

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALTIN DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Elif Hatice YARDIMCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2010**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ALTIN DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Elif Hatice YARDIMCI

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanımlar ve gerekli ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Altın oran ve özellikleri verildikten sonra Fibonacci ve Lucas dizilerinden bahsedilip, Fibonacci ve Lucas dizilerinin geometrik bir yorumu yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, ilk önce diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde altın yapının tanımı verilmiş, sonrada altın yapıya örnekler verilip, hemen hemen çarpım yapısı kullanılarak manifold üzerinde altın yapının bazı geometrik özellikleri incelenmiştir.

Temmuz 2010, 88 sayfa

Anahtar Kelimeler : Altın oran, Altın yapı, Hemen hemen çarpım yapısı

ABSTRACT

Master Thesis

GOLDEN DIFFERENTIAL GEOMETRY

Elif Hatice YARDIMCI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and required informations are given.

In the third chapter, the Golden ratio and its properties, Fibonacci and Lucas sequences is given. In the fourth chapter, firstly, the Golden structure on differentiable manifold is defined. Then some examples of the Golden structure by using the almost product structure are examined.

July 2010, 88 pages

Key Words: Golden ratio, Golden structure, Almost product structure

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu vererek, bana araştırma olanağı sağlayan ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, tezimle ilgili kendisi ile çalışma fırsatı bulduğum Sayın Doç Dr. Aysel TURGUT VANLI (Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'ya, çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. M. Kemal SAĞEL (Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'e ve çalışmalarım sırasında önemli katkılarda bulunan ve yönlendiren Araş. Gör. Zafer ŞANLI (Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme özellikle kardeşim Tuğba YARDIMCI'ya en derin duygularla teşekkür ederim.

Elif Hatice YARDIMCI

Ankara, Temmuz 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar	2
2.2 Diferensiyellenebilir Lif Demet Yapıları	12
2.3 Demetler Üzerinde Konneksiyon	31
3. ALTIN ORAN	35
3.1 Altın Oranın Değeri	36
3.2 Cebirsel Özellikler	37
3.3 Altın Dikdörtgen	40
3.4 Altın Üçgen	41
3.5 Fibonacci ve Lucas Dizileri	42
3.6. Fibonacci ve Lucas Dizilerinin Geometrik Bir Yorumu	45
4. ALTIN ORAN VE DİFERENSİYEL GEOMETRİ	47
4.1 Manifoldlar Üzerinde Altın Yapılar	47
4.2 Altın Yapılara Örnekler	55
4.3 Altın Yapı Olarak Konneksiyonlar	65
4.3.1 Asli lif demetlerinde konneksiyonlar	65
4.3.2 Tanjant demetlerde konneksiyonlar	68
4.4 Altın Yapıların İntegrallenmesi ve Paralelizmi	74
4.4.1 Hemen hemen çarpım manifoldları üzerinde uyarlanmış lineer konneksiyonlar	76
4.5 Altın Riemannian Metrikleri	80
KAYNAKLAR	85
ÖZGEÇMİŞ	88

SİMGELER DİZİNİ

E, M, F	C^∞ – manifoldlar
$T_p M$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
(E, π, M, F)	Lif demeti
π	Projeksiyon
F_x	(E, π, M, F) lif demetinin $x \in M$ noktasındaki lifi
TM	M manifoldunun tanjant manifoldu
$V_z E$	E nin z noktasındaki vertical uzayı
$H_z E$	E nin z noktasındaki horizontal uzayı
VE	TE nin vertical altdemeti
HE	TE nin horizontal altdemeti
v	Vertical projeksiyon
h	Horizontal projeksiyon
$\chi(E)$	E üzerinde tanımlı C^∞ vektör alanlarının modülü
$\chi^v(E)$	E üzerinde tanımlı C^∞ vertical vektör alanlarının modülü
$\chi^h(E)$	E üzerinde tanımlı C^∞ horizontal vektör alanlarının modülü

$\Gamma(\xi)$	ξ demetinin çapraz kesitlerinin kumesi
σ	Lif demetinin çapraz kesiti
G	Lie grubu
$P(M, G)$	Asli lif demeti
LM	Lineer atıların kumesi
φ	Altın oran
Φ	Altın yapı
f_n	Fibonacci dizisi
l_n	Lucas dizisi
g	Riemannian metriği
$\overset{Sc}{\nabla}$	Schouten konneksiyonu
$\overset{V}{\nabla}$	Vranceanu konneksiyonu
$[,]$	Lie parantez operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Koordinat Fonksiyonları	3
Şekil 2.2 $\pi = \pi_1 \circ \phi_\alpha$ diyagramı	13
Şekil 2.3 Lokal trivialisation	14
Şekil 2.4 $\pi_1 \circ \phi = \pi_1$ diyagramı	16
Şekil 2.5 $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi_1$ diyagramı	17
Şekil 2.6 Mobius şeridi aşık ar olmayan lif demetidir	18
Şekil 2.7 M manifoldu üzerinde lokal kesit	19
Şekil 2.8 Demet dönüşümü	19
Şekil 2.9 $\pi_1 \circ \Psi_\alpha = \pi_1$ diyagramı	22
Şekil 2.10 Tanjant vektörün bileşenleri	26
Şekil 3.1 Aşık ve ortalama oran	35
Şekil 3.2 Doğru parçasının altın kesimi	36
Şekil 3.3 Altın dikdörtgen	41
Şekil 3.4 Dar açılı altın üçgen	42
Şekil 3.5 Geniş açılı altın üçgen	42
Şekil 3.6 Fibonacci ve Lucas dizilerinin geometrik yorumu	46

1. GİRİŞ

Altın sayı, altın bölüm veya altın ortalama olarak da bilinen altın oranın, insanlar tarafından ne zaman keşfedildiğine ve kullanılmaya başlandığına dair kesin bir bilgi mevcut olmamakla beraber, M.Ö. 3. yüzyılda Öklid'in "Elementler" isimli 13 kitaptan oluşan çalışmalarından 13. kitapta ilk kez ortaya atıldığı düşünülmektedir. Öklid bu çalışmasında bir doğruyu 0.6180339... noktasından bölmekten bahsetmiş ve bunu bir doğruyu ekstrem ve önemli oranda bölmek diye adlandırmıştır.

Bu oran pek çok alanda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin; insan bedeninin boyutlarında, mimaride, görsel sanatlarda, uyumlu ses frekanslarındaki oranlarda ve fraktallarda karşılaşmaktayız.

Son yıllarda ise altın oran, fizik araştırmalarında, matematiksel olasılık teorisinde, Kantor uzay zamanında, El Naschie'in alan teorisinde ve fraktal boyutlarda önemli bir rol oynamaktadır.

Diferensiyel geometride Mircea Crasmareanu ve Cristina-Elena Hretcanu tarafından yazılan "Golden Differential Geometry" adlı makalede diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde $Q(X) = X^2 - X - I$ yapı polinomuna sahip $(1, 1)$ tipindeki Φ tensör alanı yardımıyla yeni bir polinom yapısı olan altın yapı tanımlanmış ve hemen hemen çarpım yapısı kullanılarak diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde altın yapının geometrisi incelenmiştir.

Bu çalışma ise yukarıdaki makalenin bir irdelenmesidir

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı temel tanım ve sembollerini tanıtağız.

Tanım 2.1: (Oran) Aynı türden iki şeyin nicelik açısından karşılaştırılması olarak tanımlayabiliriz. Örneğin doğru parçalarıyla ilgileniyorsak, AB ve CD gibi iki doğru parçasının oranını $\frac{AB}{CD}$, ya da bunların aynı birimle ölçülmüş uzunlukları, sırasıyla, a ve b ise $\frac{a}{b}$ ile sembolize ederiz (Çakar 1992).

2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: (Topolojik manifold) M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu **topolojik manifold** (veya kısaca topolojik n -manifold) dur denir.

(i) M bir Hausdorff uzayıdır.

(ii) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

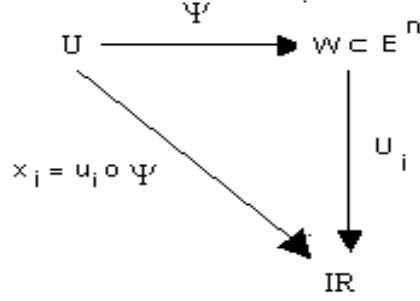
(iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.2: (Koordinat komşuluğı = Harita) M bir n boyutlu topolojik manifold ve U da M nin bir açık bir alt cümlesi olsun. Eğer U bir Ψ homeomorfizimi ile E^n nin bir W alt cümlesine eşlenebiliyorsa:

$$\Psi : U \xrightarrow{\text{homeomorfizim}} W \subset E^n$$

(U, Ψ) ikilisine M de bir **koordinat komşuluğı (harita)** denir. $p \in U$ için $\Psi(p) \in E^n$ dir ve $\Psi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, $x_i(p) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ dir. Burada

$x_i(p)$ reel sayısına $\Psi(p)$ noktasının i -yinci koordinatı ve $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da **koordinat fonksiyonu** denir. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1 Koordinat Fonksiyonları

Ψ fonksiyonu bir homeomorfizim olduğundan süreklidir ve dolayısıyla $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ fonksiyonları da süreklidirler.

$x_1(p), \dots, x_n(p)$ reel sayılarına $p \in U$ noktasının, (U, Ψ) koordinat komşuluğuna göre, **lokal koordinatları** ve U üzerinde tanımlı olan $(x_1, \dots, x_n)$ reel değerli fonksiyon n -lisine de (U, Ψ) üzerinde ki **lokal koordinat sistemi** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Haritanın bir başka tanımı da şu şekilde yapılmaktadır:

Boş olmayan bir küme M , M nin boş olmayan bir alt kümesi U ve

$$\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

bir dönüşüm olsun. Eğer

(i) Ψ bire-bir

(ii) $\Psi(U)$, $\mathbb{R}^n$ de açık bir alt küme

ise, (U, Ψ) ikilisine, M için bir n -**boyutlu harita** denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.3: (Atlas) M bir n -boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}$ $\alpha \in A$ yazalım. E^n de U_α ya homeomorf olan bir açık cümle E_α ve

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\text{homeomorfizim}} E_\alpha$$

olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir **atlas (koordinat komşuluğu sistemi)** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.4: (Diferensiyellenebilir yapı) Bir topolojik n -manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özeliğe sahip ise S ye $C^r, r \geq 1$, sınıfindandır denir. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\Phi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfindandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıfindan ise S ye M üzerinde bir C^r **sınıfindan diferensiyellenebilir yapı** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.5: (Diferensiyellenebilir manifold) M bir n -boyutlu topolojik manifold ve M nin S atlası C^r sınıfindan olsun. O zaman M ye bir n -boyutlu **diferensiyellenebilir manifolddur** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.6: (Diffeomorfizm)

Aynı boyutlu iki C^∞ manifold M, N ve $F : M \rightarrow N$ birebir ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer:

i) $F \in C^k(M, N)$

ii) $F^{-1} \in C^k(M, N)$

ise, F dönüşümüne bir C^k **diffeomorfizm** ve bu durumda M ile N manifoldlarına da C^k **diffeomorfiktirler** denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.7: (M Diferensiyellenebilir manifoldunun tanjant vektörü) M diferensiyellenebilir manifold ve bir noktası $p \in M$ olsun. Bir

$$X_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin p noktasındaki tanjant vektörü ise X_p ye M **nin p noktasında ki bir tanjant vektörü** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

M üzerindeki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_p M$ ile gösterilir. $T_p M$, bir reel vektör uzayıdır. Bu $T_p M$ vektör uzayına, M nin p noktasında ki **tanjant uzayı** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

p noktasında bir harita $(U, \Psi = (x_i))$, $1 \leq i \leq n$ ise $T_p M$ nin bir bazı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : 1 \leq i \leq n \right\}$$

kümesidir. Bu baza $T_p M$ nin **doğal (veya koordinat) bazı** denir (Brickell and Clark 1970).

Tanım 2.1.8: (Vektör alanı) M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $p \in V$ noktasında ki tanjant uzay $T_p V$ olsun. V nin bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzaylarının birleşimi $\bigcup_{p \in V} T_p V$ ile gösterilsin. Bir

$$\pi : \bigcup_{p \in V} T_p V \rightarrow V$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_p V$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_p) = p$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $V \subseteq M$ üzerinde ki bir **vektör alanı** operatörü

$$X : V \rightarrow \bigcup_{p \in V} T_p V$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I : V \rightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur. M üzerindeki vektör alanlarının cümlesini $\chi(M)$ ile göstereceğiz (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.9: (Türev Dönüşümü)

m ve n boyutlu iki C^∞ manifold sırasıyla M, N ve $F : M \rightarrow N$ bir diferensiyel-
lenebilir dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} F_* : T_p M &\rightarrow T_{F(p)} N \\ X_p &\rightarrow F_*(X_p) : C^\infty(N, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ g &\rightarrow [F_*(X_p)](g) = X_p[g \circ F] \end{aligned}$$

bir F_* dönüşümü tanımlayalım. Bu F_* dönüşümüne F dönüşümünün bir $p \in M$ noktasındaki **türev dönüşümü** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.10: (Çok lineer dönüşümler) $V_1, V_2, \dots, V_n$ ve W uzayları aynı K cismi üzerinde tanımlı birer vektör uzayı ve kartezyen çarpımları da $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ olsun. Bir

$$L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

dönüşümü için aşağıda ki özellik varsa bu dönüşüme **i-yinci yere göre lineerdir**

denir.

$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2, \dots, \alpha_{i-1} \in V_{i-1}, \varepsilon, \mu \in V_i, \alpha_{i+1} \in V_{i+1}, \dots, \alpha_n \in V_n$ ve $\forall a, b \in K$ için

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, a\varepsilon + b\mu, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) &= aL(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \varepsilon, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \\ &+ bL(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \mu, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ için bu özellik sağlanıyorsa L fonksiyonuna $n - \text{lineer dönüşüm}$ denir (Hacısalıhoğlu 2006).

$L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ şeklindeki bütün $n - \text{lineer}$ dönüşümlerinin cümlesini $\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ ile gösterelim.

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = \left\{ L \mid L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \xrightarrow{n-\text{lineer}} W \right\}$$

$n - \text{lineer}$ dönüşümlerinin cümlesi bir vektör uzayı olup,

$$\text{boy}\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = \text{boy}V_1 \cdot \text{boy}V_2 \cdot \dots \cdot \text{boy}V_n \cdot \text{boy}W$$

dır (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.11: (Riemann metriği) M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde bir $p \in M$ noktası için

$$\begin{aligned} g &: M \rightarrow \mathcal{L}(T_p M, T_p M; \mathbb{R}) \\ p &\rightarrow g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

şeklinde simetrik, pozitif tanımlı bir lineer form tanımlanmış ise g ye M de **Riemann metriği** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.12: (Riemann manifoldu) Bir M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanmış ise bu (M, g) ikilisine bir **Riemann manifoldu** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.13 : (Vektör uzayı üzerinde tensör) Bir reel vektör uzayı V ve V nin dual uzayı V^* olsun.

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-tan e}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-tan e}} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde her bir $(r + s)$ —lineer dönüşümüne V üzerinde r . **dereceden kovaryant ve s . dereceden kontravaryant tensör (veya kısaca (s, r) tipinden bir tensör)** denir (Okubo 1987).

Bir vektör uzayı üzerinde tanımlı (s, r) tipinden tensörlerin kümesi $T_s^r(V)$ ile gösterilir. $T_s^r(V)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup, $\text{boy} V = n$ ise, $\text{boy} T_s^r(V) = n^{r+s}$ dir (Hacısalihoglu ve Ekmekçi 2003).

Teorem 2.1.1: $T_1^s(V)$ uzayı $\mathcal{L}(\underbrace{V, V, \dots, V}_{s\text{-tan e}}; V)$ uzayına izomorftur (Hacısalihoglu ve Ekmekçi 2003).

V vektör uzayı yerine M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ alınırsa, M nin p noktasında bir tensör uzayı $T_s^r(T_p(M))$ elde edilir ve bu uzayın her bir elemanına p **noktasında bir (s, r) tipinde tensör denir** (Okubo 1987).

Tanım 2.1.14: (Tensör alanı) Bir C^∞ manifold M olsun. M nin her bir noktasına (s, r) tipinden bir tensör karşılık getiren dönüşüme M üzerinde (s, r) tipinden bir **tensör alanı** denilir (Okubo 1987).

O halde M üzerinde tanımlı bir tensör alanı,

$$\begin{aligned} T & : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_p(M)) \\ p & \rightarrow T(p) \in T_s^r(T_p(M)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür.

Ayrıca $w_1, \dots, w_s \in \chi^*(M)$, $X_1, \dots, X_r \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olmak üzere;

$$(T : (X_1, \dots, X_r, w_1, \dots, w_s))(p) = T_p(X_{1p}, \dots, X_{rp}, w_{1p}, \dots, w_{sp})$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$T : \underbrace{\chi(M) \times \dots \times \chi(M)}_{r\text{-tan } e} \times \underbrace{\chi^*(M) \times \dots \times \chi^*(M)}_{s\text{-tan } e} \rightarrow C^\infty(M)$$

şeklinde $C^\infty(M)$ değerli bir $(r + s)$ lineer dönüşüm olur (Lee 1997).

M üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesi, $\mathfrak{S}_s^r(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{S}_s^r(M)$, $C^\infty(M)$ üzerinde bir modüldür.

Özel olarak:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_0^0 &= C^\infty(M) \\ \mathfrak{S}_0^1 &= \chi^*(M) \\ \mathfrak{S}_1^0 &= \chi(M)\end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla $(1, 1)$ tipindeki bir tensör alanını Teorem 2.1.1 den

$$T : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

şeklinde bir dönüşüm olarak görebiliriz.

Tanım 2.1.15 (Nijenhuis torsiyon tensörü) M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere F , $(1, 1)$ tipinde tensör alanı olsun.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} N_F &: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow N_F(X, Y) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$N_F(X, Y) = F^2([X, Y]) + [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)])$$

şeklinde tanımlanan $(1, 2)$ tipindeki N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsiyon tensörü** denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.1.1: N_F Nijenhuis torsiyon tensörü bi-lineer ve antisimetrik tensördür (Öztürk 2006).

Tanım 2.1.16: (Lineer konneksiyon) Bir C^∞ manifold olsun.

$$\begin{aligned} \nabla &: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (i) \quad &\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \\ (ii) \quad &\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y \\ (iii) \quad &\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \end{aligned}$$

özelliklerini sağlıyorsa, ∇ dönüşümüne M üzerinde bir **lineer konneksiyon** denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.17: (Lie parantez operatörü) Bir C^∞ manifold M olsun. $X, Y \in \chi(M)$, $p \in M$ ve $\forall f \in C^\infty(M)$ için

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

şeklinde tanımlı

$$[\cdot, \cdot] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne **Lie parantez operatörü** denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.18: (Lie grupları) G bir grup ve aynı zamanda diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad \mu(a, b) = ab$$

ve G de ki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \rightarrow G, \quad \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin her ikisi de diferensiyellenebilir ise G ye **Lie grubu** denir

(Hacısalıhoğlu 2006).

O halde Lie grupları aynı zamanda grup olan diferensiyellenebilir manifoldlardır. Öyle ki grup operasyonu diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla bir Lie grubu aynı zamanda bir grup, bir topolojik uzay ve bir manifolddur (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.19: (Sağ etki) G bir Lie grubu ve M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. G Lie grubunun M manifoldu üzerindeki sağ etkisi aşağıdaki özellikleri sağlayan $\Phi : M \times G \rightarrow M$ bir dönüşümdür.

(i) $\forall m \in M$ için $\Phi(m, e) = m$, (e , G Lie grubunun etkisiz elemanı)

(ii) $\forall m \in M$, $\forall g_1, g_2 \in G$ için $\Phi(\Phi(m, g_1), g_2) = \Phi(m, g_1 g_2)$ (Lewis 1993).

Tanım 2.1.20: (Yörünge) Φ , G nin M üzerindeki sağ etkisi ve $m \in M$ olsun. $m \in M$ den geçen Φ nin yörüngesi

$$\vartheta_m = \{\Phi(m, g) \mid g \in G\}$$

şeklinde tanımlanan M nin alt cümlesidir (Lewis 1993).

2.2 Diferensiyellenebilir Lif Demet Yapıları

Tanım 2.2.1: (Çarpım manifoldları) M ve N , sırasıyla, m ve n boyutlu birer C^r manifoldlar ve

$$S_m = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I} \text{ ile } S_n = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$$

de, sırası ile, M ve N manifoldlarının atlasları olsunlar.

(i) $\{U_i\}_{i \in I}$ ve $\{V_j\}_{j \in J}$, sırası ile, M ve N nin birer açık örtüsü iseler $\{U_i \times V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ de $M \times N$ nin bir açık örtüsüdür.

$$(ii) \quad \begin{array}{lll} \phi_i \times \psi_j & : & U_i \times V_j \rightarrow E^{m+n} \\ & & (p, q) \rightarrow (\phi_i(p), \psi_j(q)) \end{array}$$

olarak tanımlanan $\phi_i \times \psi_j$ dönüşümü

$$\begin{array}{lll} \phi_i \times \psi_j & : & U_i \times V_j \rightarrow \phi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \\ & & \text{açık cümle} \qquad \qquad \text{açık cümle} \end{array}$$

şeklinde bir homeomorfizimdir.

Dolayısıyla $M \times N$ nin bir atlası

$$S_{m+n} = \{(U_i \times V_j), (\phi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$$

olur ve S_{m+n} de C^r sınıfındandır. Böylece $M \times N$ cümlesi de bir $(m+n)$ boyutlu topolojik manifold olur. Bu manifoldda M ve N manifoldlarının **çarpım manifoldu** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

$M \times N$ çarpım manifoldundaki bir nokta (p, q) şeklinde ifade edilir ve $p \in M$ ve

$q \in N$ dir (Nakahara 2003).

Önerme 2.2.1: $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ ve $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ projeksiyonları diferensiyelenebilirdir (Greub vd. 1972).

Tanım 2.2.2: (Lokal çarpım özeliği ve lokal trivialisation) E, M, F sırasıyla $(m + n), m, n$ boyutlu C^∞ manifoldlar, $\pi : E \rightarrow M$ örten, C^∞ bir dönüşüm ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ve $\forall U_\alpha$ için

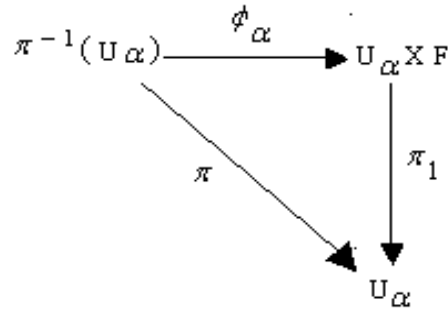
$$\pi = \pi_1 \circ \phi_\alpha, \quad \pi_1 : U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$$

olacak biçimde

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$$

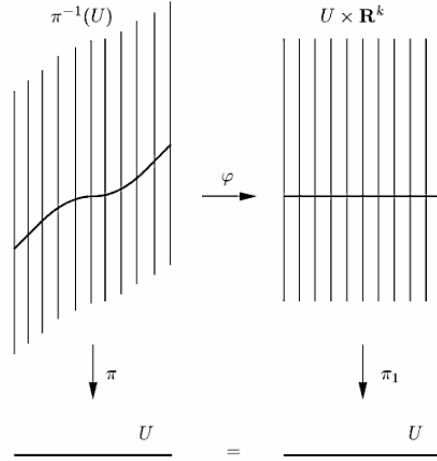
diffeomorfizimlerinin bir $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sınıfı varsa, $(F$ ye göre) π **lokal çarpım özeliğine** veya **lokal trivialisationa sahiptir** denir (Greub vd. 1972, Morita 2001). (Şekil 2.3)

$\pi = \pi_1 \circ \phi_\alpha$ koşulu,



Şekil 2.2 $\pi = \pi_1 \circ \phi_\alpha$ diyagramı

diyagramının değişmeli olması ile aynı anlama sahiptir.



Şekil 2.3 Lokal trivialisation

Tanım 2.2.3: (Diferensiyellenebilir lif demeti (fibre bundle)) Bir $\pi : E \rightarrow M$ örten, C^∞ bir dönüşümü lokal trivialisation özeliğine sahip olsun. Bu durumda $\xi = (E, \pi, M, F)$ dörtlüsüne M manifoldu üzerinde F lif modeli ile bir **diferensiyellenebilir lif demeti** denir (Greub vd. 1972).

Tanım 2.2.4: $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir C^∞ lif demeti olsun. O zaman $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine ξ lif demetinin bir **lokal koordinat gösterimi veya chartı** denir (Greub vd. 1972).

Bir $\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demetinde E ye ξ lif demetinin **total (demet) uzayı**, M ye **(taban) baz uzayı**, F ye **lif modeli (veya standart lif)** ve π ye **projeksiyon** adı verilir. Ayrıca, $rank\xi = boyF$ olarak tanımlanır (Greub vd. 1972).

$\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti bazen E total uzayı ile, bazen de $\pi : E \rightarrow M$, C^∞ dönüşümü ile gösterilir.

Tanım 2.2.5: (Lif (fibre)) $\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti olsun. $\forall x \in M$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{p \in E \mid \pi(p) = x\}$$

kümesine $x \in M$ üzerinde bir **lif** denir (Greub vd. 1972).

Tüm F_x liflerin ayrık birleşimi E total (demet) uzayını verir; yani,

$$E = \bigcup_{x \in M} F_x$$

dir (Greub vd. 1972).

$\text{boy}F_x = \text{boy}E - \text{boy}M$ sayısına ξ nin lif boyutu denir (Greub vd. 1972).

$\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti ve $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi olsun. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\begin{aligned} \phi_\alpha & : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \quad \text{olmak üzere} \\ \phi_{\alpha,x} & = \phi_\alpha|_x : F_x \rightarrow \{x\} \times F \equiv F \\ \text{ve } \phi_{\alpha,x} & : F_x \rightarrow F \end{aligned}$$

diffeomorfizmini elde ederiz (Nicola 2000).

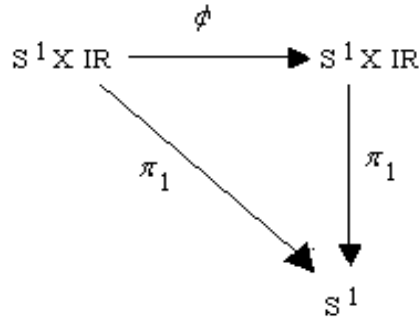
$\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti için genelde total uzayının E tamamı M manifoldu ile F manifoldunun kartezyen çarpımına diffeomorfik olmak zorunda değildir.

Tanım 2.2.6: (Aşıkâr demet (Trivial bundle)) $\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti olsun. Eğer $E = M \times F$ ve π , birinci izdüşüm fonksiyonu ise ξ ya bir **aşıkâr demet** denir (Lee 2003).

Bu tanıma göre aşıkâr demetin total uzayının E kartezyen çarpım yapısına sahip olması gerekmektedir.

Ayrıca, her lif demeti lokal trivialdir.

Örnek 2.1(Silindir): $(S^1 \times \mathbb{R}, \pi_1, S^1)$ üçlüsünde $\pi_1 : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örten, diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Ayrıca,



Şekil 2.4 $\pi_1 \circ \phi = \pi_1$ diyagramı

diyagramı için $\pi_1 \circ \phi = \pi_1$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin gerçekleşmesi için en azından $\phi = I_{S^1 \times \mathbb{R}}$ özdeşlik dönüşümü alınır, $I_{S^1 \times \mathbb{R}}$ bir diffeomorfizm olduğundan $(S^1 \times \mathbb{R}, \pi_1, S^1)$ bir trivial demettir.

Örnek 2.2 (Möbiüs şeridi) Taban uzayı S^1 olmak üzere, S^1 i θ ile parametrelendirelim. O halde $S^1 = \{\theta \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ yazarız. F , lif modeli de $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bunu da t ile parametrelendirirsek $F = \{t \mid -1 \leq t \leq 1\}$ olur.

S^1 in iki açığı; (yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için)

$$U_\alpha = \{\theta \mid -\varepsilon < \theta < \pi + \varepsilon\} \text{ ve } U_\beta = \{\theta \mid \pi - \varepsilon < \theta < \varepsilon\}$$

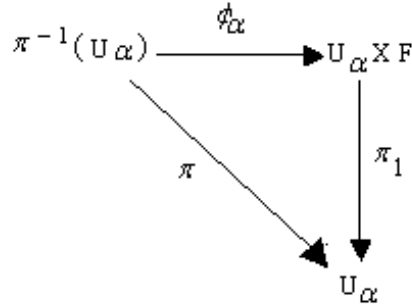
alalım. M , möbiüs şeridini göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
 \pi : M &\rightarrow S^1 \\
 (\theta, t) &\rightarrow \theta
 \end{aligned}$$

dönüşümü örten, diferensiyellenebilir bir dönüşümdür.

$$\begin{aligned}\phi_\alpha &: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \\ (\theta, t) &\rightarrow (\theta, -t) \\ \text{ve} \\ \phi_\beta &: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times F \\ (\theta, t) &\rightarrow (\theta, t)\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Böylece;



Şekil 2.5 $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ diyagramı

değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü; $\forall(\theta, t) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ için

$$\pi_1 \circ \phi_\alpha(\theta, t) = \pi_1(\phi_\alpha(\theta, t)) = \pi_1(\theta, -t) = \theta \quad (2.2.1)$$

ve

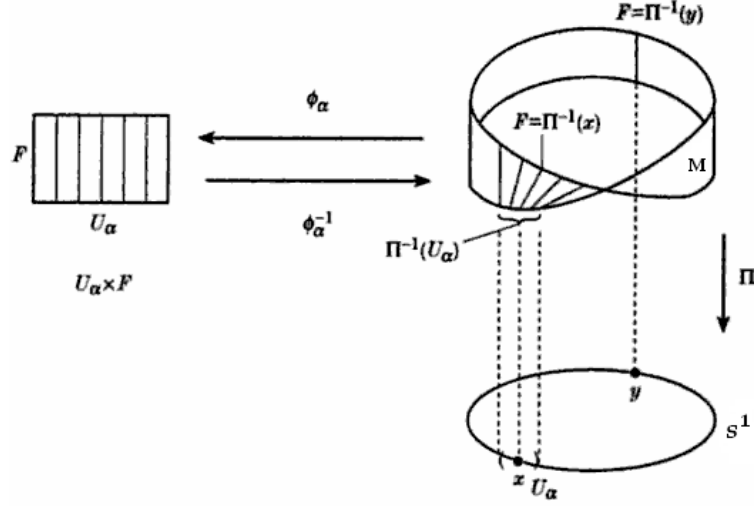
$$\pi(\theta, t) = \theta \quad (2.2.2)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.2.1) ve (2.2.2) eşitlikleri $\forall(\theta, t) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ için sağlandığından

$$\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi$$

eşitliği yazılabilir. Böylece; ϕ_α diffeomorfizim olup, M için bir lokal trivialization olur.

Benzer şekilde ϕ_β nın da bir diffeomorfizim olduğu gösterilebilir ve ϕ_β da M için bir lokal trivialisatıondır. Böylece (M, π, S^1) bir lif demetidir. (Şekil 2.6)



Şekil 2.6 Möbius şeridi aşıkır olmayan lif demetidir

Tanım 2.2.7: (Lif demetinin (diferensiyellenebilir) çapraz kesiti (cross-section)) $\xi = (E, \pi, M, F)$ herhangi bir lif demeti olsun.

$$\pi \circ \sigma = I_M$$

olacak biçimde tanımlı $\sigma : M \rightarrow E$, C^∞ dönüşümüne ξ lif demetinin bir **çapraz kesiti (cross section)** denir (Lee 2009).

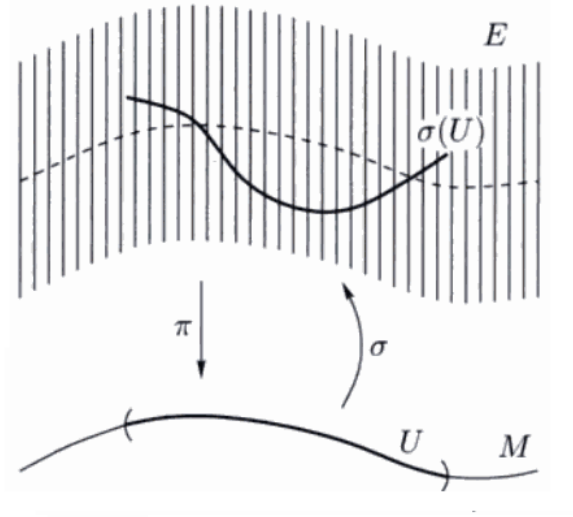
Yani, $\forall x \in M$ için $\sigma(x) \in F_x$ dir (Lee 2009).

$U \subset M$ açık bir alt küme

$$\pi \circ \sigma = I_U$$

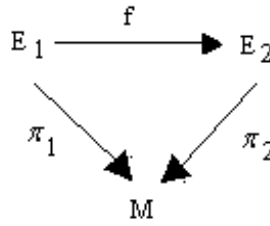
olacak biçimde tanımlı $\sigma : U \rightarrow E$, C^∞ dönüşümüne U açık alt kümesi üzerinde ξ lif demetinin **lokal diferensiyellenebilir kesiti** denir (Lee 2009). (Şekil 2.7)

ξ lif demetinin (diferensiyellenebilir) çapraz kesitlerinin kümesi $\Gamma(\xi)$, $\Gamma(E)$ veya $\Gamma(\pi)$ şeklinde gösterilir (Lee 2009).



Şekil 2.7 M manifoldu üzerinde lokal kesit

Tanım 2.2.8: (Demet dönüşümü (Bundle map)) (E_1, π_1, M, F_1) ve (E_2, π_2, M, F_2) lif demetleri olsunlar. M üzerindeki demet dönüşümü $\pi_2 \circ f = \pi_1$ olacak şekilde $f : E_1 \rightarrow E_2$ diferensiyellenebilir dönüşümdür. (Şekil 2.8) Yani,



Şekil 2.8 Demet dönüşümü

diyagramı değişimlidir. Ayrıca, $\forall x \in M$ için $f_x : E_{1x} \rightarrow E_{2x}$ lineer bir dönüşümdür ($E_{1x} = \pi_1^{-1}(x)$ ve $E_{2x} = \pi_2^{-1}(x)$) (Lee 2003).

Eğer f dönüşümü bir difeomorfizm ise de, f ye M üzerinde demet izomorfizmi denir (Lee 2003).

Tanım 2.2.9: (Vektör demeti) $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir C^∞ lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlamıyorsa, ξ ye bir **vektör demeti** denir.

(i) $\forall x \in M$ için $\pi^{-1}(x) = F_x$ ve F reel vektör uzaylarıdır.

(ii) $\forall x \in M$, $\phi_{\alpha,x} : F_x \rightarrow F$ dönüşümleri lineer izomorfizim olacak biçimde ξ nin $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat gösterimi vardır (Greub vd. 1972).

M , m boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M nin tüm noktalarındaki tanjant uzaylarının ayrık birleşimi $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ ve TM üzerinde

$$\pi : TM \rightarrow M$$

dönüşümü, $\pi(v_p) = p$, $(v_p \in T_p M)$ şeklinde tanımlansın. M üzerinde bir harita $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$ olsun. $p \in U_\alpha$ noktasında $T_p M$ için bir baz $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p\}$ dır. O halde $v_p \in T_p M$

$$v_p = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

dönüşümü

$$\begin{aligned} v_p \rightarrow \tilde{\varphi}_\alpha(v_p) &= (x^1 \circ \pi(v_p), \dots, x^m \circ \pi(v_p), dx^1(v_p), \dots, dx^m(v_p)) \\ &= (x^1(p), \dots, x^m(p), dx^1(v_p), \dots, dx^m(v_p)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\tilde{\varphi}_\alpha$ dönüşümü birebir, örten olup, görüntü kümesi $\mathbb{R}^{2m}$ uzayının bir açık alt kümesidir. O halde $(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)$ ikilisi TM üzerinde $2m$ boyutlu

bir harita ve $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ koleksiyonunda TM için bir atlasıdır. Ayrıca

$$\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}((\varphi_\alpha(p), v_1, \dots, v_m) = (v_p)$$

dir.

M üzerinde $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ atlası verildiğinde $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak biçimde $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$ ve $(U_\beta, \varphi_\beta = (y^i))_{1 \leq i \leq m}$ haritalarını alalım. O halde $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$ olacaktır. Ayrıca $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasında $T_p M$ için iki baz $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p\}$ ve $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m}|_p\}$ dir. O halde herhangi bir $v_p \in T_p M$ elemanı $v_p = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{j=1}^m v'_j \frac{\partial}{\partial y^j}|_p$ şeklinde ifade edilir.

$$\phi_{\alpha\beta} = \tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta}(p) &= \tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}(\varphi_\beta(p), v'_1, \dots, v'_m) = \tilde{\varphi}_\alpha(v_p) \\ &= (x^1 \circ \pi(v_p), \dots, x^m \circ \pi(v_p), dx^1(v_p), \dots, dx^m(v_p)) \end{aligned}$$

olur. Burada $x^i \circ \pi$ ve dx^i ($1 \leq i \leq m$) diferensiyellenebilir olduğundan $\phi_{\alpha\beta} = \tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}$ de diferensiyellenebilirdir. Benzer şekilde $\phi_{\beta\alpha} = \tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ diferensiyellenebilir olduğu görülür. Benzer işlemleri $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$ olacak biçimde $\forall \alpha, \beta \in I$ için yaparsak $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ ların diferensiyellenebilir olduğunu görürüz. O halde

$$\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$$

atlası diferensiyellenebilir bir yapıdır. Bu yapıyla, TM , $2m$ boyutlu bir C^∞ manifold olup, M nin **tanjant manifoldu** olarak isimlendirilir (Carmo 1992, Tu 2007).

$(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ dörtlüsünün bir vektör demeti olduğu kolayca gösterilebilir. Bu demete M nin **tanjant demeti**, $\pi : TM \rightarrow M$ sürekli, örten, C^∞ dönüşümüne de **doğal (kanonik) projeksiyon** denir.

M nin $\{x^i : 1 \leq i \leq m\}$ lokal koordinat sistemine göre herhangi bir $v_p \in TM$ elemanı $v_p = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$, $\pi(v_p) = p$ şeklinde ifade edilir. TM üzerindeki lokal koordinat sistemi

$$(x^i \circ \pi, dx^i)_{1 \leq i \leq m}$$

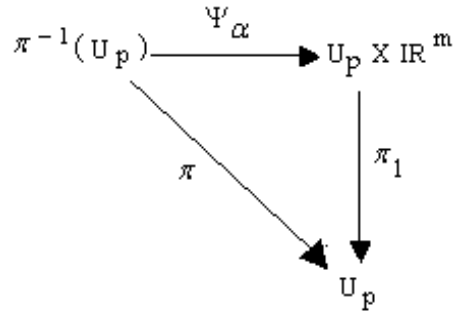
şeklindedir. x^i koordinat fonksiyonları $p \in M$ için $U_p \subset M$ koordinat komşuluğunda tanımlı olacak biçimde

$$\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_p) \rightarrow U_p \times \mathbb{R}^m$$

dönüşümü

$$\Psi_\alpha(v_p) = (\pi(v_p), dx(v_p)) = (p, v), \quad x = (x_1, \dots, x_m)$$

olarak tanımlansın. Böylece;



Şekil 2.9 $\pi_1 \circ \Psi_\alpha = \pi$ diyagramı

değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü $\forall v_p \in \pi^{-1}(U_p)$ tanjant vektörü için

$$(\pi_1 \circ \Psi_\alpha)(v_p) = \pi_1(\Psi_\alpha(v_p)) = \pi_1(p, v) = p \quad (2.2.3)$$

ve

$$(I_{U_p} \circ \pi)(v_p) = I_{U_p}(\pi(v_p)) = p \quad (2.2.4)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.2.3) ve (2.2.4) $\forall v_p \in \pi^{-1}(U_p)$ tanjant vektörü için sağ-

landığından $\pi_1 \circ \Psi_\alpha = \pi$ eşitliği yazılabilir. Böylece Ψ_α bir diffeomorfizim olup, TM manifoldu için bir lokal trivialisation olur. Dolayısıyla $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ bir vektör demetidir (Özkan 2006).

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu için TM tanjant demetinin kesitleri, M manifoldu üzerinde vektör alanlarıdır (Lee 2003).

Tanım 2.2.10: (Altvektör demeti) $\xi_E = (E, \pi, M, F)$ ve $\xi_{E'} = (E', \pi|_{E'}, M, F')$ iki vektör demeti olsun. Eğer,

(i) $\forall x \in M$ için F'_x lifi F_x lifinin bir alt vektör uzayı

(ii) U_α, M nin bir açığı olmak üzere

$$\phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap E') = U_\alpha \times F' \subset U_\alpha \times F$$

olacak şekilde (U_α, ϕ_α) haritası var ve bu özellik ile $E' \subset E$ bir alt manifold ise $\xi_{E'}$ vektör demetine ξ_E vektör demetinin bir **altvektör demeti** denir. ($\pi^{-1}(U_\alpha) \cap E' = \pi|_{E'}^{-1}(U_\alpha)$) (Lee 2009).

$\xi = (E, \pi, M, F)$ bir vektör demeti ve $U \subset M$ açık bir alt küme olsun. E nin U üzerindeki $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ lokal kesitlerine lineer bağımsız denir, eğer her bir $x \in U$ için $\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)$ vektörleri F_x in lineer bağımsız elemanları ise (Lee 2003)

Eğer $\forall x \in U$ için $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ cümlesi F_x vektör uzayını geriyorsa, $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ lokal kesitlerine E yi geriyor denir (Lee 2003).

U üzerinde E için lokal bir çatı alanı, E yi geren U üzerindeki lineer bağımsız sıralı $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ lokal kesitlerdir. Böylece $\forall x \in U$ için $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$, F_x için bir bazdır (Lee 2009).

Tanım 2.2.11: (Vertical uzay ve vertical tanjant vektör) $\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti olsun. $\forall z \in E$ için

$$V_z E = \ker(\pi_*|_z) = \{A_z \in T_z E \mid \pi_*|_z(A_z) = 0\}$$

kümesi, $T_z E$ tanjant uzayının bir alt uzayıdır. $V_z E$ uzayına E nin z noktasında **vertical uzayı** ve bu uzayın her bir elemanına da bir **vertical tanjant vektör** denir (Greub vd. 1972). (Şekil 2.10)

$z \in E$ ve $\pi(z) = p$ olmak üzere $V_z E = T_z(F_p)$ dir (Greub vd. 1972).

E üzerinde vektör alanlarının modülü $\chi(E)$ olmak üzere $A \in \chi(E)$ olsun. $\forall z \in E$ için $A_z \in V_z E$ ise A ya **vertical vektör alanı** denir ve $A \in \chi^v(E)$ şeklinde gösterilir (Greub vd. 1972).

$\xi = (E, \pi, M, F)$ bir lif demeti olsun. Bir

$$\pi_{TE} : TE \rightarrow E$$

dönüşümü $\forall z \in E$ için $\pi_{TE}^{-1}(z) = T_z E$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$TE = \bigcup_{z \in E} T_z E$$

olmak üzere $\xi_{TE} = (TE, \pi_{TE}, E, \mathbb{R}^{m+n})$ dörtlüsü bir vektör demeti olup, bu E manifoldunun tanjant demetidir (Greub vd. 1972).

Teorem 2.2.1: $\xi_{VE} = (VE, \pi_{VE}, E, \mathbb{R}^n)$ dörtlüsü TE nin bir altvektör demeti olup, burada

$$VE = \bigcup_{z \in E} V_z E, \quad \pi_{VE} = \pi_{TE}|_{VE}, \quad \pi_{VE}^{-1}(z) = V_z E$$

dir (Turgut 1989).

Tanım 2.2.12: (Vertical altdemet) $\xi_{VE} = (VE, \pi_{VE}, E, \mathbb{R}^n)$ vektör demetine TE nin **vertical altdemeti** denir (Greub vd. 1972).

Tanım 2.2.13: (Whitney toplamı) Vektör uzaylarının (ya da modüllerin) direkt toplamına benzer bir kavramda vektör demetlerinin Whitney toplamı adı verilen toplamıdır. ξ_1 ve ξ_2 bir M manifoldu üzerinde iki vektör demeti ve ξ da bu iki demetin Whitney toplamı olan

$$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$$

M manifoldu üzerinde yeni bir vektör demetidir. Bu durumda $F_\xi, F_{\xi_1}, F_{\xi_2}$ sırasıyla ξ, ξ_1 ve ξ_2 nin lifleri olmak üzere

$$F_\xi = F_{\xi_1} \oplus F_{\xi_2} \quad (2.2.5)$$

dir. Burada (2.2.5) ifadesindeki $\oplus$ işareti adi direkt toplamı göstermektedir (Turgut 1989).

Tanım 2.2.14: (Horizontal altdemet) $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir lif demeti ve

$\xi_{VE} = (VE, \pi_{VE}, E, \mathbb{R}^n)$, TE nin bir vertical alt demeti olsun.

$$\xi_{TE} = \xi_{HE} \oplus \xi_{VE}$$

olacak biçimdeki ξ_{HE} vektör demetine ξ_{TE} nin **horizontal altdemeti** denir (Greub vd. 1972).

Tanımdan horizontal altdemet $\xi_{HE} = (HE, \pi_{HE}, E, \mathbb{R}^m)$ şeklinde olup, burada

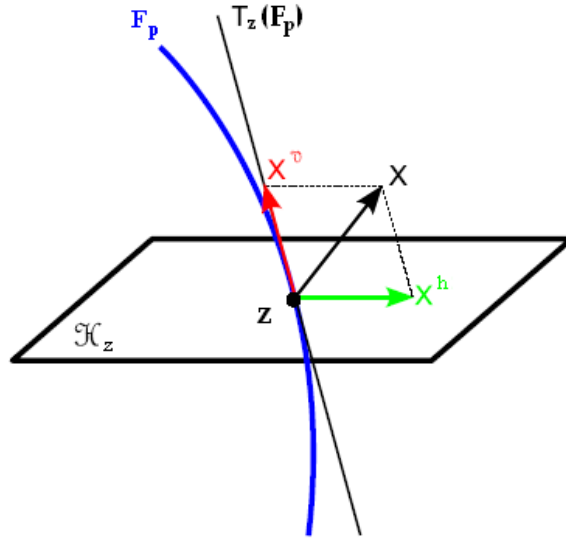
$$HE = \bigcup_{z \in E} H_z E, \quad \pi_{HE} = \pi_{TE}|_{HE}, \quad \pi_{HE}^{-1}(z) = H_z E$$

dir. Ayrıca $\forall z \in E$ için

$$T_z E = H_z E \oplus V_z E, \quad TE = \bigcup_{z \in E} (H_z E \oplus V_z E) = HE \oplus VE$$

yazılabilir (Greub vd. 1972).

$H_z E, T_z E$ tanjant uzayının bir altuzayıdır ve bu uzaya E nin z noktasında **horizontal uzayı** denir. Bu uzayın her bir elemanına da bir **horizontal tanjant vektör** denir (Greub vd. 1972). (Şekil 2.10)



Şekil 2.10 Tanjant vektörün bileşenleri

$B \in \chi(E)$ olsun. $\forall z \in E$ için $B_z \in H_z E$ ise B ye **horizontal vektör alanı** denir ve $B \in \chi^h(E)$ şeklinde gösterilir (Greub vd. 1972).

$X \in \chi(E)$ için $X = X^h + X^v$ şeklindedir. Burada X^h ve X^v sırasıyla X vektör alanının horizontal ve vertical bileşenleridir. Yani, $X^h \in \chi^h(E)$ ve $X^v \in \chi^v(E)$ dir. Böylece

$$\chi(E) = \chi^h(E) \oplus \chi^v(E)$$

dir (Greub vd. 1972).

$TE = HE \oplus VE$ olduğunu biliyoruz. h ve v de sırasıyla HE ve VE ye karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} h & : TE \rightarrow HE & \text{ve} & & v : TE \rightarrow VE \\ h^2 & = h, & v^2 & = v, & h \circ v = v \circ h = 0, & h + v = I \\ \zeta e k h & = VE & \text{ve} & & \zeta e k v = HE \end{aligned}$$

şeklinde bağıntılar vardır (Burada I , TE üzerinde özdeşlik dönüşümüdür.) (Bejancu ve Farran 2006).

$h - v = P$ şeklinde bir dönüşüm tanımlarsak P , $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olup, $P^2 = I$ olduğundan P , E üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Dolayısıyla (E, P) ikilisi de bir hemen hemen çarpım manifoldudur (Bejancu ve Farran 2006).

Tanım 2.2.15: (Asli lif demeti (Principal fibre bundle)) G , bir Lie grubu ve (P, π, M, G) diferensiyellenebilir bir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki önerme doğru ise (P, π, M, G) dörtlüsüne diferensiyellenebilir bir **asli lif demeti** denir.

(i) $T : P \times G \rightarrow P$ fonksiyonu G nin P üzerinde bir sağ etkisidir.

(ii) P nin $\forall x \in U_\alpha$ ($U_\alpha \subset M$ de açık) ve $\forall a, b \in G$ için

$$\varphi_\alpha(x, ab) = T(\varphi_\alpha(x, a), b)$$

olacak biçimde $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ koordinat gösterimi vardır.

Yukarıdaki T etkisine sağ etki, (ii) önermesini sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ koordinat gösterimine de asli koordinat gösterimi denir (Leon ve Rodrigues 1989).

(P, π, M, G) bir asli lif demeti $P(M, G)$ şeklinde de ifade edilebilir.

(P, π, M, G) bir asli lif demeti ise $z \in P$, $a \in G$ için

$$\pi(za) = \pi(z)$$

dir. (P, π, M, G) asli lif demeti olsun. $z \in \pi^{-1}(x)$ ise

$$\pi^{-1}(x) = \{zg \mid g \in G\}$$

dir. Yani, z noktasının üzerindeki lif z nin yörüngesine eşittir.

Tanım 2.2.16: (Lineer çatı) M , n boyutlu bir manifold olsun. $x \in M$ olmak üzere $T_x M$ nin sıralı bir $\{x_1, \dots, x_n\}$ bazına x noktasında bir **lineer çatı** denir (Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 2.2.17: (Lineer çatıların asli lif demeti) M üstündeki bütün lineer çatıların kümesini LM ile gösterelim. LM ye M manifoldunun çatılarının demeti denir.

$$\pi : LM \rightarrow M$$

dönüşümü, $\forall x \in M$ için ve $\forall u \in LM$ ($u, x \in M$ noktasında lineer çatı) için

$$\pi(u) = x$$

şeklinde tanımlanır ve π ye LM nin projeksiyon dönüşümü denir.

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_n^n, \det A \neq 0\}$ cümlesi matris çarpımına göre bir gruptur. Bu grup manifold yapısına sahiptir ve matris çarpımı altında bir Lie grubudur.

$A \in GL(n, \mathbb{R})$ ve $u \in LM$ olsun. O halde $A = [a_{ij}]$ ve $u = (x_1, \dots, x_n)$ için

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

olsun. $\{y_1, \dots, y_n\}$ cümlesi x noktasında bir çatıdır. Ayrıca $(y_1, \dots, y_n) = uA$ olduğun-

dan

$$\begin{aligned} LM \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow LM \\ (u, A) &\rightarrow uA \end{aligned}$$

dönüşümü, $GL(n, \mathbb{R})$ nin LM üstüne sağdan bir etkisidir.

$(x_1, \dots, x_n)$ M nin bir U koordinat komşuluğunda bir lokal koordinat olsun. $x \in U$ için $(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x$, x noktasında bir lineer çatıdır. Böylece x noktasında her $u = (x_1, \dots, x_n)$ çatısını

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ile bir tek şekilde ifade edebiliriz. Burada $[x_{ij}] \in GL(n, \mathbb{R})$ dir. O halde ,

$$\begin{aligned} \Psi &: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(n, \mathbb{R}) \\ u &\rightarrow \Psi(u) = (x, [x_{ij}]) \end{aligned}$$

birebir, örten dönüşüm bulunur.

(x^i, x_{ij}) yi $\pi^{-1}(U)$ da lokal koordinat sistemi olarak alırsak LM , $n^2 + n$ boyutlu bir manifold olur. LM , $GL(n, \mathbb{R})$ yapı grubu ve π projeksiyonu ile M üzerinde bir asli lif demetidir (Leon ve Rodrigues 1989).

Tanım 2.2.18: (Dağılım (Distribution)) $m = (n + k)$ -boyutlu M manifoldu üzerinde n -boyutlu **diferensiyellenebilir bir dağılım**, TM tanjant demetinin *rank* n olan bir E altvektör demetidir (Lee 2009).

O halde M manifoldu üzerindeki n -boyutlu diferensiyellenebilir bir dağılım, $\forall x \in M$ ye karşılık n boyutlu bir $\Delta_x \subset T_x M$ alt vektör uzayını karşılık getirir.

$$\begin{aligned} \Delta &: M \rightarrow \bigcup_{x \in M} T_x M \\ x &\rightarrow \Delta_x \subset T_x M \end{aligned}$$

Ayrıca, $\forall x \in M$ nin bir U komşuluğunda lineer bağımsız $X_1, \dots, X_n$ vektör alanı

vardır ki U komşuluğundaki $\forall q \in U$ için $\{X_1(q), \dots, X_n(q)\}$ cümlesi Δ_q alt vektör uzayının bir bazıdır (Lee 2009).

E , M manifoldu üzerinde bir dağılım ve X de $U \subset M$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. Eğer, $\forall p \in U$ için $X_p \in \Delta_p$ ise X vektör alanı E dağılımına aittir denir ve X in E dağılıma ait olduğunu göstermek için $X \in \Gamma(E)$ şeklinde gösterilir (Bazı kaynaklarda $X \in E$ şeklinde de gösterilir.) (Bejancu ve Farran 2006).

Tanım 2.2.19: (İnvolutive) TM nin bir E altvektör demetinde $X, Y \in \Gamma(E)$ için $[X, Y] \in \Gamma(E)$ ise E altvektör demetine **involutive** denir (Bejancu ve Farran 2006).

E dağılımı integrallenebilir $\Leftrightarrow E$ dağılımı involutive (Bejancu ve Farran 2006).

Tanım 2.2.20: (Tümleyen dağılım (Complementary dağılım)) M diferensiyellenebilir bir manifold ve R, S de M manifoldu üstünde iki complementary dağılım, yani, $\forall x \in M$ için

$$T_x M = R_x \oplus S_x$$

yani

$$TM = R \oplus S$$

dir (Özdemir vd. 2010).

r ve s sırasıyla R ve S dağılımlarına karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere r ve s yi $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olarak görebiliriz. Ayrıca,

$$r^2 = r \quad s^2 = s$$

$$rs = sr = 0 \quad \text{ve} \quad r + s = I_{TM}$$

özellikleri vardır (Özdemir vd. 2010).

2.3. Demetler Üzerinde Konneksiyonlar

Tanım 2.3.1: (Ehresmann konneksiyonu) $\pi : E \rightarrow M$ örten, submersion ve $V = \ker \pi_*(TE$ nin vertical alt demeti) olmak üzere (E, π, M, F) lif demeti üzerindeki bir Ehresmann konneksiyonu $TE = V \oplus H$ olacak şekilde TE nin H horizontal alt demetidir (Özdemir vd. 2010).

O halde,

$$(i) \forall u \in E \text{ için } T_u E = V_u \oplus H_u$$

$$(ii) \forall u \in E \text{ için } H : u \in E \mapsto H_u \subset T_u E \text{ diferensiyellenebilir bir dönüşümdür.}$$

Tanım 2.3.2: (Vektör değerli 1-form) V , m - boyutlu bir vektör uzayı ve M de diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M manifoldu üzerinde vektör değerli 1-form M de tanımlı bir w dönüşümüdür ki $\forall p \in M$ için

$$w_p : T_p M \xrightarrow{linear} V$$

dir (Naber 1997).

Eğer $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $v \in T_p M$ için

$$w_p(v) = w_p^1(v)e_1 + \dots + w_p^m(v)e_m = w_p^i(v)e_i$$

yazılır. Burada $w_p^i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ reel değerli 1-formlardır (Naber 1997).

M üzerinde V vektör uzayı değerli 1-formların cümlesi $\Omega^1(M; V)$ şeklinde gösterilir (Naber 1997).

Ayrıca, (E, π, M, F) lif demeti üzerindeki ehresmann konneksiyonu vektör değerli 1-formlar yardımı ile de tanımlanmaktadır:

(E, π, M, F) lif demeti üzerindeki **ehresmann konneksiyonu**, aşağıdaki özellikleri sağlayan $v : TE \rightarrow VE$, $v \in \Omega^1(E; VE)$ vektör değerli 1–formdur.

$$(i) \quad v^2 = v$$

$$(ii) \quad \forall p \in E \text{ için } v_p : T_p E \xrightarrow{linear} V_p E$$

$$(iii) \quad v, \text{ bir projeksiyon: } \forall p \in E \text{ için } v(T_p E) = V_p E \quad (\text{yani, } imv = VE)$$

v projeksiyon olduğundan $\check{e}kv = HE$ olup açıktır ki $TE = HE \oplus VE$ ve $\forall p \in E$ için $T_p E = H_p E \oplus V_p E$ dir (Greub vd. 1972).

Tanım 2.3.3: (Asli lif demetlerinde ehresmann konneksiyonu) $P(M, G)$, M manifoldu üzerinde G Lie grubu ile bir asli lif demeti olsun. $P(M, G)$ üzerindeki ehresmann konneksiyonu, $V = \check{e}k\pi_*$ vertical dağılım olmak üzere, G –invariant olacak şekilde V nin tümleyen dağılımı H horizontal dağılımıdır.

$$\mathbf{G - invariant} : \forall p \in P \text{ ve } \forall g \in G \text{ için } (T_g)_* H_p = H_{pg}$$

$$\mathbf{Tümleyen dağılım} : \forall p \in P \text{ için } T_p P = H_p \oplus V_p$$

Tanım 2.3.4: (Principal konneksiyon) $P(M, G)$ asli lif demeti üzerindeki ehresmann konneksiyonu vektör değerli 1–formlar yardımı ile de şu şekilde tanımlanmaktadır: $v : TP \rightarrow VP$ olmak üzere

$$(i) \quad v^2 = v$$

$$(ii) \quad \forall p \in P \text{ için } v_p : T_p P \xrightarrow{linear} V_p P$$

$$(iii) \quad v, \text{ bir projeksiyon: } \forall p \in P \text{ için } v(T_p P) = V_p P \quad (\text{yani, } imv = VP)$$

(iv) v , G equivariant yani, $(T_a)_* \circ v = v \circ (T_a)_*$

ise v ye $P(M, G)$ üzerinde **principal konneksiyon** denir (Greub vd. 1972).

Tanım 2.3.5: (H nın konneksiyon formu) (P, π, M, G) asli lif demeti üzerinde bir H konneksiyonu verilsin. O zaman aşağıdaki gibi tanımlanan $w \in \Omega(P, \mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ -değerli 1-forma H nın konneksiyon formu denir. (Burada $\mathfrak{g}$, G lie grubunun lie cebiridir.)

$$\forall p \in P \text{ için } w_p(X_p) := ((T_p)_*, e)^{-1} \circ v(X_p), \quad e \in G$$

şeklinde tanımlanan

$$w_p : T_p P \xrightarrow{\text{lineer}} \mathfrak{g}$$

dönüşümüdür (Lee 2009).

Tanımdan da anlaşılacağı gibi $X_p \in H_p P \iff w_p(X_p) = 0$ ve

$$H_p P = \ker w_p = \{X_p \in T_p P \mid w_p(X_p) = 0\}$$

dır (Lee 2009).

Tanım 2.3.6: (II. Temel Form) H konneksiyonunun eğrilik formu:

$$\Omega(X, Y) = dw(h(X), h(Y)), \quad \forall X, Y \in \chi(P)$$

şeklinde tanımlanan $\mathfrak{g}$ -değerli 2-formdur (Leon ve Rodrigues 1989).

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için $dw(X, Y) = \{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y])\}$ dir (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi 2003).

O halde $\forall X, Y \in \chi(P)$ için,

$$\Omega(X, Y) = dw(h(X), h(Y)) = -w([h(X), h(Y)])$$

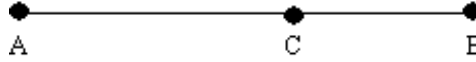
dir.

3. ALTIN ORAN

Altın oran, doğada sayısız canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında bulunan özel bir orandır. Doğada bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, yüzyıllarca sanat ve mimaride uygulanmış, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Ayrıca altın oran göze çok hoş gelen bir orandır. Doğada en belirgin örneklerine insan vücudunda, deniz kabuklarında, DNA sarmallarında, galaksilerde, ağaç dallarında, tavşanların üremesinde, Mısır piramitlerinde, geometrik şekillerde (dikdörtgen, üçgen, beşgen), fraktallarda... görülmektedir.

Bu bölümde ise kısaca altın oranın matematiksel tanımından ve özelliklerinden bahsedeceğiz.

Tanım 3.1: Herhangi bir AB doğru parçasının üzerindeki bir C noktası için $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranına **aşıt oran**, $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranına da **ortalama oran** denir (Yağcı 2005).



Şekil 3.1 Aşıt ve ortalama oran

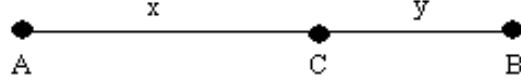
Tanım 3.2: Eğer AB doğru parçasının üzerindeki bir C noktası için aşıt oran ile ortalama oran eşit oluyorsa, yani

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

ise C ye AB nin **altın bölümü** veya **altın noktası** denir. Bu oranı oluşturan $\frac{|AB|}{|AC|}$ veya $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranına da **altın oran** denir (Yağcı 2005).

3.1 Altın Oranın Değeri

Yukarıda çizdiğimiz AB doğru parçasında $|AC| = x$ ve $|CB| = y$ olsun. (Şekil 3.2) Şimdi $\frac{|AB|}{|AC|}$ ve $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranlarını x ve y cinsinden hesaplayıp bu oranları eşitleyelim, bakalım ne zaman



Şekil 3.2 Doru parçasının altın kesimi

eşit çıkacaklar. Şekilden hemen

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{x+y}{x} \\ \frac{|AC|}{|CB|} &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$

eşitlikleri çıkar. Demek ki, bu iki oranın eşit olmaları için x ve y uzunlukları

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

denklemini sağlamalı. Paydaları eşitleyelim:

$$xy + y^2 = x^2$$

Şimdi denklemi y^2 ye bölelim:

$$\frac{x}{y} + 1 = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

Bu aşamada $\varphi = \frac{x}{y}$ tanımını yapalım. Yukarıdan

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

buluruz. Bu denklemin kökleri ise

$$\varphi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \varphi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir. x ve $y > 0$ olduğundan, $z = \frac{x}{y} > 0$. Dolayısıyla z için negatif olan ifadeyi değil, pozitif olan ifadeyi almalıyız. O halde

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339...$$

$\frac{AC}{CB} = \frac{x}{y} = \varphi$ olduğundan altın oranı buluruz. (Yağcı 2005).

3.2 Cebirsel Özellikler

$f_1 = 1, f_2 = 1$ başlangıç değerleri ve

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n > 2$$

bağıntısı ile tanımlı diziye **Fibonacci dizisi** denir. Yani Fibonacci dizisinin her bir terimi kendisinden önce gelen ilk iki terimin toplamı şeklinde belirlenir. Fibonacci dizisinde her n tamsayısına karşılık gelen değerinde **fibonacci sayısı** denir. İlk fibonacci sayıları şöyle:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

dir (Bolat 2008).

Fibonacci dizisinin genel terimi:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

veya

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (1 - \varphi)^n)$$

dır. Bu formül Binet's formülü olarak bilinmektedir.

Bu dizinin ilginç bir yanı, dizinin bir terimi öncekine bölündüğünde bölümün $n \rightarrow \infty$ için, altın orana

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339...$$

yakınsadığı görülmektedir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \end{aligned}$$

dır. Fibonacci dizisinin ilk 16 terimi ve terimlerinin oranı aşağıdadır.

n	f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	3	1.5
4	3	5	1.666667
5	5	8	1.6
6	8	13	1.625
7	13	21	1.615385
8	21	34	1.610948
9	34	55	1.617647
10	55	89	1.618182
11	89	144	1.617977
12	144	233	1.618056
13	233	377	1.618026
14	377	610	1.618037
15	610	987	1.618033

İrrasyonel bir sayı olan $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

veya

$$x = \frac{1}{x} + 1$$

denkleminin pozitif değeri kökü olduğundan φ bir cebirsel sayıdır. (Cebirsel sayılar, katsayıları tam sayılar olan bir polinomun kökü olarak ifade edilebilen sayılardır. Örneğin tüm rasyonel sayılar aynı zamanda bir cebirsel sayıdır; hepsi $nx - m = 0$ şeklindeki bir polinomun köküdür. Sanal bileşeni olan sayılar da cebirsel olabilir. Örneğin i sayısının kendisi cebirseldir; $x^2 + 1 = 0$ polinomunun köküdür.)

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

den

$$\begin{aligned}\varphi &= \sqrt{1 + \varphi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}\end{aligned}$$

olmak üzere φ sayısı elemanları 1 olan bir sonsuz zincir kesiridir.

Ayrıca $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \varphi$ başlangıç değerleri ve

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}, \quad n > 2$$

bağıntısı ile tanımlanan dizi

$$1, \varphi, 1 + \varphi, 1 + 2\varphi, 2 + 3\varphi, 3 + 5\varphi, 5 + 8\varphi, \dots \quad (3.1)$$

olmak üzere $\varphi^2 = \varphi + 1$ bağıntısının göz önüne alınmasıyla,

$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \dots$$

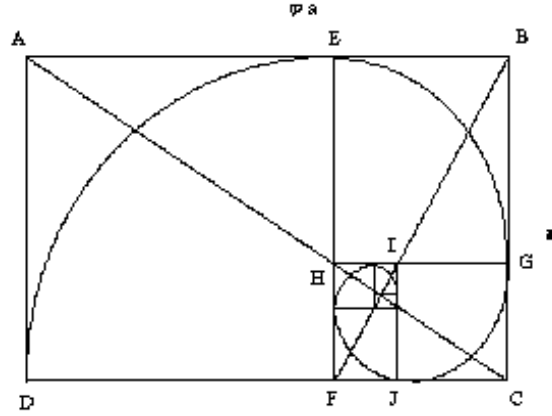
biçiminde yazılabilir. Görüldüğü gibi bu dizi aynı zamanda ortak çarpanı φ olan bir geometrik dizidir. Bu diziye **Altın Dizi** denilmektedir.

Altın dizinin terimlerine (3.1) dikkatlice bakarsak, her bir terimin birinci terimleri ve ikinci terimindeki φ lerin katsayısı 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Fibonacci dizisini oluşturmaktadır.

3.3 Altın Dikdörtgen

Uzun ve kısa kenarlarının oranı altın oranı (φ) veren dikdörtgene **altın dikdörtgen** denir. (Şekil 3.3) Bu dikdörtgeni, kısa kenarın bir kare oluşturacağı biçimde bölersek geriye yine uzun ve kısa kenarlarının oranı altın oran (φ) olan bir altın dikdörtgen elde ederiz. Yeni oluşan dikdörtgende aynı işlem tekrarlanırsa yine yeni bir altın dikdörtgen elde ederiz. Bu işlemi sonsuz defa tekrarladığımızda yine karşımıza yeni bir altın dikdörtgen çıkacaktır.

Bu dikdörtgeni, kendisine benzer bir dikdörtgen çıkarıldığında, geride kare bırakan dikdörtgen diye de algılayabiliriz (Çakar 1992, Yağcı 2005).



Şekil 3.3 Altın dikdörtgen

İçinden defalarca kare çıkardığımız bu Altın dikdörtgenin karelerinin kenar uzunluklarını yarıçap alan bir çember parçasını her karenin içine çizersek bir Altın spiral elde ederiz.

3.4 Altın Üçgen

Öyle bir ikizkenar üçgen bulacağız ki kendisinden kendine benzer bir üçgen çıkarıldığında geriye gene bir ikizkenar üçgen kalacak. Bu şartı sağlayan üçgenlere **Altın üçgen** denir (Yağcı 2005).

Teorem 3.4.1: Altın üçgen tanımına uyan dar açılı bir tek üçgen vardır ve bu üçgenin tepe açısı 36° dir (Yağcı 2005). (Şekil 3.4)

Şekil 3.4 Dar açılı altın üçgen

Teorem 3.4.2: Altın üçgen tanımına uyan geniş açılı bir tek üçgen vardır ve bu üçgenin tepe açısı 108° dir (Yağcı 2005). (Şekil 3.5)

Şekil 3.5 Geniş açılı altın üçgen

Teorem 3.4.3: Altın üçgenlerin her ikisinde de uzun kenarın kısa kenara oranı φ dir (Yağcı 2005).

3.5 Fibonacci ve Lucas Dizileri

$f_1 = 1, f_2 = 1$ olmak üzere

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n > 2$$

bağıntısı kullanılarak elde edilen diziye Fibonacci dizisi ve her n tamsayısına karşılık gelen değere de Fibonacci sayısı denildiğini biliyoruz. Fibonacci sayılarında, ilk iki sayı seçilmeden diziye oluşturan elemanların bilinemeyeceği açıktır. Bu iki başlangıç sayısının özel bir yanı olmadığından, başlangıç için başka değerler de seçilebilir ve aynı bağıntıyı kullanarak tümüyle farklı bir sayı dizisi elde edilebilir. Fransız matematikçi Edward Lucas, başlangıç sayıları için seçilebilecek ikinci en basit sayılarını seçerek

$$l_1 = 1, l_2 = 3$$

ve

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}, \quad n > 2 \quad (3.2)$$

bağıntısını kullanarak, Fibonacci dizisine benzer bir sayı dizisi elde etmiştir. Bir çok araştırmada da, bu iki sayı dizisi arasında ilginç bağıntıların olduğu kanıtlanmıştır .

Lucas dizisinde de her n tamsayısına karşılık gelen değere de **Lucas sayıları** denir. İlk Lucas sayıları

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$$

şeklindedir (Bolat 2008).

Bu iki sayı dizisi arasında ki var olan bir bağıntı kullanılarak Binet's formülü elde edilip, geometik bir yorum yapılacaktır.

Fibonacci ve Lucas dizileri arasındaki bağıntı şu şekildedir:

$$2f_n = f_{n-1} + l_{n-1} \quad \text{ve} \quad 2l_n = 5f_{n-1} + l_{n-1} \quad (3.3)$$

Bu ifadeleri matris formunda yazarsak

$$\begin{pmatrix} l_n \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

elde ederiz ve her adımda (3.3) bağıntısını kullanarak

$$\begin{pmatrix} l_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ifadesine ulaşırız.

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştirerek bu matrisin kuvvetini hesaplamak daha kolay olacak.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad (*)$$

(*) denklemini, bu matrisin karakteristik denklemidir ve bu denklemin kökleri olan karakteristik değerler ise,

$$\varphi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \varphi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir. Eigen vektörler ise,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}x \quad \text{olup}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{dir.}$$

Bu iki vektörü bir matrisin sütunlarına yerleştirip, oluşan matrisin tersini alırsak,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \varphi_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

dir. Bu ifadeyi (3.4) de yerine yerleştirirsek

$$\begin{pmatrix} l_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \varphi_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sonucuna ulaşırız. Sağ tarafta gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^n - \varphi_2^n) \\ l_n &= \varphi_1^n + \varphi_2^n \end{aligned}$$

Bu formüllerin bir sonucu olarak

$$\frac{l_n + \sqrt{5}f_n}{2} = \varphi_1^n \quad \text{ve} \quad \frac{l_n - \sqrt{5}f_n}{2} = \varphi_2^n$$

Ayrıca,

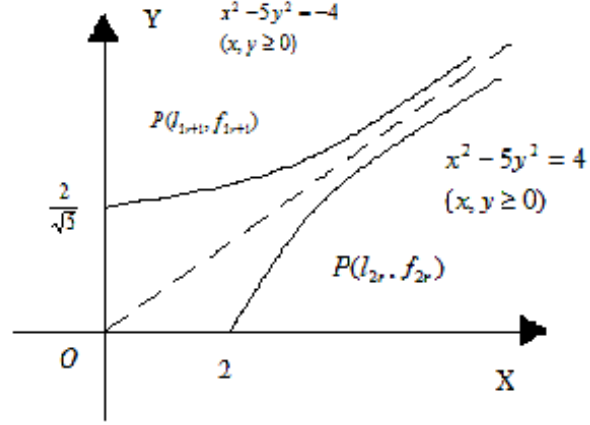
$$\begin{aligned} l_n^2 - 5f_n^2 &= 4\varphi_1^n\varphi_2^n = 4(\varphi_1\varphi_2)^n = 4(-1)^n \\ l_n^2 - 5f_n^2 &= 4(-1)^n \end{aligned} \tag{3.5}$$

eşitliği de sağlar (Lewis ?).

3.6 Fibonacci ve Lucas Dizilerinin Geometrik Bir Yorumu

Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri, (3.5) ifadesinde n çift olduğu zaman, $x^2 - 5y^2 = 4$ hiperbolünün pozitif kısmı üzerindeki tamsayı noktalarının koordi-

nat fonksiyonları ve n tek olduğu zaman $x^2 - 5y^2 = -4$ hiperbolünün pozitif kısmı üzerindeki tamsayı noktalarının koordinat fonksiyonlarıdır. Fakat, bu hiperboller ortak bir asimptota sahiptirler. (Şekil 3.6)



Şekil 3.6 Fibonacci ve Lucas dizilerinin geometrik yorumu

aşağıdaki matris ise,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

yukarıdaki şekildeki her bir hiperbolün bir kolunu diğerine çevirir (Lewis ?)

4. ALTIN ORAN VE DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Bu bölüm, Mircea Crasmareanu ve Cristina-Elena Hretcanu tarafından 2008 yılında yayımlanan "Golden Differential Geometry" adlı makalenin açılmış halidir.

4.1 Manifoldlar Üzerinde Altın Yapılar

Tanım 4.1.1: M, C^∞ reel bir manifold olsun. Eğer $(1, 1)$ tipindeki F tensör alanı aşağıdaki cebirsel denklemini sağlar ve $\forall p \in M$ için $F^{n-1}(p), F^{n-2}(p), \dots, F(p), I$ lineer bağımsızsa, F tensör alanına M manifoldu üzerinde bir **polinom yapısı** denir.

$$Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 I = 0$$

(Burada $I, (1, 1)$ tipindeki tensör alanlarının özdeşlik dönüşümü.) $Q(x)$ polinomuna da **yapı polinomu** denir (Goldberg ve Yano 1970).

Açıklama 4.1.1: $Q(x) = x^2 + I$ yapı polinomuna sahip $(1, 1)$ tipindeki bir tensör alanı için **hemen hemen kompleks yapıyı (J)** elde ederiz. Yani; $J^2 = -I$ dir. Eğer bir manifoldun üzerinde hemen hemen complex yapı mevcutsa, bu manifoldun boyutu çifttir.

$Q(x) = x^2 - I$ yapı polinomuna sahip $(1, 1)$ tipindeki bir tensör alanı için **hemen hemen çarpım yapıyı (P)**, ve $Q(x) = x^2$ yapı polinomuna sahip olan $(1, 1)$ tipindeki bir tensör alanı için ise **hemen hemen tanjant yapıyı (T)** elde ederiz. Dolayısıyla $P^2 = I$ ve $T^2 = 0$ dir.

Tanım 4.1.2: Aşağıdaki denklemi sağlayan $(1, 1)$ tipindeki bir Φ tensör alanına M manifoldu üzerinde bir **altın yapı** denir.

$$\Phi^2 = \Phi + I \tag{4.1}$$

Bu yapıların bazı özelliklerine bakalım.

Önerme 4.1.1: M manifoldu üzerinde bir altın yapı aşağıdaki gibi üslü kuvvetlere sahiptir.

$$\Phi^n = f_n \Phi + f_{n-1} I \quad (4.2)$$

Burada $(f_n)_n$ Fibonacci dizisidir.

Fibonacci dizisini genel terimi olan

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} \quad (4.3)$$

Binet's formülünü (4.2) denkleminde yerine yerleştirirsek,

$$\Phi^n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} \Phi + \frac{\varphi^{n-1} - (1 - \varphi)^{n-1}}{\sqrt{5}} I \quad (4.4)$$

eşitliğini elde ederiz.

Önerme 4.1.2:

(i) Bir Φ altın yapısının eigen değerleri altın oran φ ve $1 - \varphi$ dir.

(ii) Φ altın yapısı, $\forall x \in M$ için M manifoldunun tanjant uzayı üzerinde $T_x M$ bir izomorfizimdir.

(iii) Φ altın yapısının tersi mevcuttur ve $\Phi^{-1} = \widehat{\Phi}$ olmak üzere

$$\widehat{\Phi}^2 = -\widehat{\Phi} + I \quad (4.5)$$

denklemini sağlar.

İspat:

(i)

$$\Phi : \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$$

$\chi(M)$ üzerinde Φ nin eigen değeri λ ise $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X) = \lambda X$$

dir. Φ , altın yapı olduğundan

$$\Phi^2 = \Phi + I$$

eşitliğini sağlar.

$$\implies \Phi^2(X) = \Phi(X) + I(X)$$

$$\implies \Phi(\Phi(X)) = \Phi(X) + X, \quad (\Phi(X) = \lambda X)$$

$$\implies \Phi(\lambda X) = \lambda X + X, \quad (\Phi, lineer)$$

$$\implies \lambda \Phi(X) = \lambda X + X, \quad (\Phi(X) = \lambda X)$$

$$\implies \lambda(\lambda X) = \lambda X + X$$

$$\implies \lambda^2 X = (\lambda + 1)X$$

Bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için doğru olduğundan

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

eşitliğini elde ederiz. Bu denklemin köklerinde

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi$$

dir. $\lambda_1 = \varphi$ ve $\lambda_2 = 1 - \varphi$ değerleri de Φ altın yapısının eigen değerleridir.

(ii)

$$\Phi : \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$$

Φ altın yapısının bir izomorfizm olduğunu göstermek için Φ lineer olduğundan bire-bir ve örten olduğunu göstermeliyiz. Eğer bir lineer dönüşümün çekirdeği $\{\vec{0}\}$ ise bu lineer dönüşüm bire-birdir. Dolayısıyla Φ nin çekirdeğine bakalım.

$$\begin{aligned} \text{çek}\Phi &= \left\{ X \in \chi(M) \mid \Phi(X) = \vec{0} \right\} \quad \text{ve} \\ \Phi^2 &= \Phi + I \quad \text{olduğundan} \\ \implies \Phi(\Phi(X)) &= \Phi(X) + I(X), \quad (\Phi(X) = \vec{0}) \\ \implies \Phi(\vec{0}) &= \vec{0} + X, \quad (\Phi \text{ lineer olduğundan } \Phi(\vec{0}) = \vec{0}) \\ \implies \vec{0} &= \vec{0} + X \\ \implies X &= \vec{0} \\ \implies \text{çek}\Phi &= \left\{ \vec{0} \right\} \\ \implies \Phi &\text{ bire-birdir.} \end{aligned}$$

Şimdi örtenliğine bakalım.

$$\begin{aligned} \text{boy}\chi(M) &= \text{rank}\Phi + \text{boy}(\text{çek}\Phi), \quad (\text{çek}\Phi = \left\{ \vec{0} \right\} \text{ olduğundan } \text{boy}(\text{çek}\Phi) = 0 \text{ dır.}) \\ \implies \text{boy}\chi(M) &= \text{boy}\Phi(\chi(M)) \\ \implies \chi(M) &= \Phi(\chi(M)) \\ \implies \Phi, &\text{ örtendir} \end{aligned}$$

(iii)

Φ izomorfizm olduğundan bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla Φ nin tersi mevcuttur.

$$\begin{aligned}\Phi^2 &= \Phi + I \quad (\text{Her iki tarafa sağdan } \Phi^{-1} \text{ ni işleme sokarsak}) \\ \implies \Phi^2\Phi^{-1} &= \Phi\Phi^{-1} + I\Phi^{-1} \\ \implies \Phi(\Phi\Phi^{-1}) &= I + \Phi^{-1} \\ \implies \Phi I &= I + \Phi^{-1} \\ \implies \Phi &= I + \Phi^{-1} \\ \implies \Phi^{-1} &= \Phi - I, \quad (\text{Her iki tarafa tekrar sağdan } \Phi^{-1} \text{ ni işleme sokarsak}) \\ \implies \Phi^{-1}\Phi^{-1} &= \Phi\Phi^{-1} - I\Phi^{-1} \\ \implies (\Phi^{-1})^2 &= I - \Phi^{-1}, \quad (\Phi^{-1} = \hat{\Phi}) \\ \implies \hat{\Phi}^2 &= -\hat{\Phi} + I\end{aligned}$$

Açıklama 4.1.2: Altın yapılar ikililer şeklinde yer alır. Yani ; Φ bir altın yapı ise $\tilde{\Phi} = I - \Phi$ de altın yapıdır.

$$\begin{aligned}(I - \Phi)^2 &= (I - \Phi) \circ (I - \Phi) \\ &= (I - \Phi - \Phi + \Phi^2), \quad (\Phi^2 = \Phi + I) \\ &= (I - 2\Phi + \Phi + I) \\ &= (I - \Phi) + I\end{aligned}$$

O halde

$$(I - \Phi)^2 = (I - \Phi) + I$$

olup, bir altın yapıdır.

Benzer durum hemen hemen tanjant yapı (T ve $-T$), hemen hemen kompleks yapı (J ve $-J$) ve hemen hemen çarpım yapısı (P ve $-P$) için de geçerlidir. Yani, sırası ile

eğer T bir hemen hemen tanjant yapı ise, $(-T)$ de bir hemen hemen tanjant yapıdır.

J bir hemen hemen kompleks yapı ise, $(-J)$ de bir hemen hemen kompleks yapıdır.

P bir hemen hemen çarpım yapı ise, $(-P)$ de bir hemen hemen çarpım yapıdır.

Şimdi altın yapı ve hemen hemen çarpım yapısı arasında ilişkiye bakalım.

Teorem 4.1.1: Bir P hemen hemen çarpım yapısından aşağıdaki gibi bir altın yapı elde ederiz.

$$\Phi = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P) \quad (4.6)$$

Karşıt olarak herhangi bir Φ altın yapısı bir hemen hemen çarpım yapısı üretir. Yani,

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I) \quad (4.7)$$

İspat:

$$\Phi^2 = \Phi + I$$

eşitliği sağlanıyor mu buna bakmalıyız.

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= (\Phi \circ \Phi) \\ &= \frac{1}{4} \left[(I + \sqrt{5}P) \circ (I + \sqrt{5}P) \right] \\ &= \frac{1}{4} (I + \sqrt{5}P + \sqrt{5}P + 5P^2), \quad (P^2 = I) \\ &= \frac{1}{4} (I + 2\sqrt{5}P + 5I) \\ &= \frac{1}{2} (3I + \sqrt{5}P) = \frac{1}{2} (I + \sqrt{5}P) + I \\ &= \Phi + I \end{aligned}$$

O halde $\Phi^2 = \Phi + I$ dir. Dolayısıyla Φ bir altın yapıdır.

Şimdi de

$$P^2 = I$$

oluyor mu buna bakacağız.

$$\begin{aligned}
P^2 &= P \circ P \\
&= \frac{1}{5} [(2\Phi - I) \circ (2\Phi - I)] \\
&= \frac{1}{5} (4\Phi^2 - 2\Phi - 2\Phi + I), \quad (\Phi^2 = \Phi + I) \\
&= \frac{1}{5} (4\Phi + 4I - 4\Phi + I) \\
&= I
\end{aligned}$$

O halde $P^2 = I$ dir.

(4.6) ifadesinden esinlenerek bazı yapılar tanımlayalım:

(i) M manifoldu üzerinde bir hemen hemen tanjant yapı T olsun. O zaman

$$\Phi_t = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}T) \quad (4.8)$$

ifadesi (M, T) hemen hemen tanjant manifoldu üzerinde bir **tanjant altın yapıdır**.

Φ_t Tanjant altın yapısı,

$$\Phi_t^2 - \Phi_t + \frac{1}{4}I = 0 \quad (4.9)$$

denklemini sağlar. Reel sayılarda bu denklemi düşünersek, $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ dır ve bu denklemin kökü $\varphi_t = \frac{1}{2}$ sayısında **tanjant reel altın orandır**.

(ii) (M, J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun.

$$\Phi_c = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}J) \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanan Φ_c tensör alanına (M, J) hemen hemen kompleks manifoldu

üzerinde **kompleks altın yapı** denir. Φ_c , kompleks altın yapısı

$$\Phi_c^2 - \Phi_c + \frac{3}{2}I = 0 \quad (4.11)$$

denklemini sağlar. $M = \mathbb{R}^2$ alırsak $x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$ olur. Bu deklemin kökleri ise,

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}i \quad \text{ve} \quad x_2 = \bar{x}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}i$$

dir.

Tanım 4.1.3:

$$\varphi_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}i$$

kompleks sayısına **kompleks altın oran** denir.

Açıklama 4.1.4: Bu sayı trigonometrik ifade içerir.

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{5}{6}}i \right)$$

Tanım 4.1.4:

$$\varphi_c^u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{5}{6}}i \right)$$

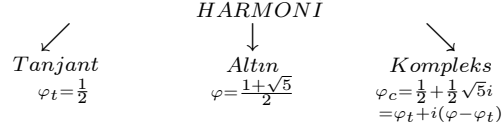
kompleks sayısına birim kompleks altın oran denilecek. φ_c^u nin sağladığı denklem $x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}x + 1 = 0$ dir. φ_c ye karşılık gelen matris

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dir. Bu matrisin köşegenleştirilmiş hali:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Bu bölümün bir sonucu olarak, üçlü bir kavram elde ederiz:



4.2 Altın Yapılara Örnekler

Örnek 4.2.1: (Clifford Cebirleri)

Clifford cebiri olarak bilinen bu cebir, verilen bir vektör uzayı için skalar çarpımının bir seçimiyle tek türlü tanımlıdır. Bu cebir vektörler arasında bir çarpım tanımlanarak oluşturulur. Clifford çarpımı denilen bu çarpım lineer ve birleşimlidir.

x, y, z vektörler ve a, b, c skalarlar ise,

$$1) (ax)(by + cz) = (ab)xy + (ac)xz \quad (\text{Lineer})$$

$$2) (xy)z = x(yz) \quad (\text{birleşme})$$

Clifford çarpımı skalar ve dış çarpım yardımıyla tanımlandığı için iki vektör arasındaki dış çarpımın özelliklerine bakalım (Lounesto 2001).

4.2.1 İki vektörün dış çarpımı

V , sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. İki vektör arasındaki dış çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(i) \forall v \in V \text{ için } v \wedge v = 0$$

$$(ii) \forall v_1, v_2 \in V \text{ için } v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\forall v_1, v_2 \in V$ için

$$(av_1) \wedge v_2 = v_1 \wedge (av_2) = a(v_1 \wedge v_2)$$

(iv) $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ için

$$(v_1 + v_2) \wedge v_3 = (v_1 \wedge v_3) + (v_2 \wedge v_3)$$

$$v_3 \wedge (v_1 + v_2) = (v_3 \wedge v_1) + (v_3 \wedge v_2)$$

(Hacısalihoglu ve Ekmekçi 2003).

4.2.2 İki vektörün clifford çarpımı

$\mathbb{R}^n$ nin herhangi x ve y vektörü için clifford çarpımı xy ile gösterilir ve

$$xy = \langle x, y \rangle + x \wedge y \quad (4.12)$$

olarak tanımlanır (Lounesto 2001).

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ve $x \wedge y = -y \wedge x$ olduğundan

$$yx = \langle y, x \rangle + y \wedge x = \langle y, x \rangle - x \wedge y \quad (4.13)$$

elde ederiz. Bu durumda (4.12) ve (4.13) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$xy + yx = 2\langle x, y \rangle$$

olur.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayının $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı,

$$e_i e_j = \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=0} + e_i \wedge e_j = e_i \wedge e_j$$

$$e_j e_i = \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{=0} + e_j \wedge e_i = e_j \wedge e_i = -e_i \wedge e_j = -e_i e_j$$

$$\implies e_i e_j = -e_j e_i$$

$$e_i e_i = \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1} + \underbrace{e_i \wedge e_i}_{=0} = 1$$

O halde clifford çarpımına göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının standart bazları

$$\begin{cases} e_i^2 = e_i e_i = 1, & i = j \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.14)$$

bağıntılarını sağlarlar.

$\mathbb{R}^n$ nin clifford cebiri $cl(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilir.

O halde (4.14) bağıntılarını kullanarak, $\Phi_i = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}e_i)$ şeklinde tanımlanan ifade aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{cases} \Phi_i = \text{Altın yapı } (\Phi_i^2 = \Phi_i + 1) \\ \Phi_i \Phi_j + \Phi_j \Phi_i = \Phi_i + \Phi_j - \frac{1}{2}, & i \neq j \end{cases} \quad (4.15)$$

4.2.3 $\mathbb{R}^2$ nin Clifford Cebiri

$\{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^2$ nin ortonormal bazları olsun,

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{skalar} \\ e_1, e_2 & \text{vektör} \\ e_1 e_2 & \text{bivektör} \end{array}$$

Yukarıdaki dört eleman $\mathbb{R}^2$ nin $cl(\mathbb{R}^2)$ clifford cebiri için $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ baz eleman-

larını oluşturur. Yani $cl(\mathbb{R}^2)$ de ki herhangi bir elemanı; u_0 skaları, $\tilde{u} = u_1e_1 + u_2e_2$ vektörü ve $\hat{u} = u_{12}e_1e_2$ bivektörünün lineer birleşimi olarak yazarız.

$$u = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_{12}e_1e_2$$

$cl(\mathbb{R}^2)$ clifford cebiri $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ baz elemanlarıyla dört boyutlu bir reel vektör uzayıdır (Lounesto 2001).

4.2.4 $cl(\mathbb{R}^2)$ nin matris cebiri olarak ifade edilmesi

$\mathbb{R}^2$ vektör uzayında ortonormal baz vektörleri e_1 ve e_2 ,

$$1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad e_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve e_1e_2 bivektörü

$$e_1e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

matrisleri ile ifade edilir (Lounesto 2001).

Böylece,

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \Phi_1 = \frac{1}{2}(I_2 + \sqrt{5}e_1) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1-\varphi \end{pmatrix} \\ (ii) \quad \Phi_2 = \frac{1}{2}(I_2 + \sqrt{5}e_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

ifadelerini elde ederiz.

Örnek 4.2.2: (2D Altın matrisler)

$\Phi \in \mathbb{R}_n^n$ olmak üzere $\Phi^2 = \Phi + I$ şartını sağlayan matrislere Altın matris denir.

$n = 2$ için (4.1) ifadesini çözersek Altın yapıların iki parametrelili ailesini elde ederiz.

Yani, $\Phi \in \mathbb{R}_2^2$ olmak üzere

$$\Phi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

dir ve (4.1) ifadesini çözdüğümüzde de

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \Phi\Phi & (\star) \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + dc \\ ab + bd & cb + d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi + I &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (\star\star) \\ &= \begin{pmatrix} a+1 & c \\ b & d+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

($\star$) ve ($\star\star$) ifadeleri eşit olduğundan

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + dc \\ ab + bd & cb + d^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+1 & c \\ b & d+1 \end{pmatrix} \\ \implies a^2 + bc &= a+1 & ab + bd &= b \\ ac + dc &= c & cb + d^2 &= d+1 \\ \implies a + d &= 1 \text{ ve } c = -\frac{1}{b}(a^2 - a - 1) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\implies \Phi_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{b}(a^2 - a - 1) \\ b & 1 - a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}^* \quad (4.17)$$

elde ederiz. O halde $n = 2$ için Altın matrisler (4.17) formatındadır.

Ayrıca, (4.16)(i) den Φ_1 ve $I_2 - \Phi_1$ matrisleri (4.17) formatında olmadığı halde ikisinde altın matrisdir. Çünkü,

$$\begin{aligned}
\Phi_1^2 &= \Phi_1 \Phi_1 \\
&= \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 - \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 - \varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & (1 - \varphi)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi + 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\varphi + \varphi + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi + 1 & 0 \\ 0 & 2 - \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 - \varphi \end{pmatrix}}_{=\Phi_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_2} \\
\implies \Phi_1^2 &= \Phi_1 + I_2
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $(I_2 - \Phi_1)^2 = (I_2 - \Phi_1) + I_2$ olduğu gösterilebilir.

$\Phi_2 = \Phi_{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}}$ iken

$$\Phi_{\varphi, b} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ b & 1 - \varphi \end{pmatrix}$$

matrisi Φ_1 matrisi gibi aynen esas köşegen üzerinde $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan φ ve $1 - \varphi$ bulunmaktadır. O zaman $\Phi_1 = \lim_{b \rightarrow 0} \Phi_{\varphi, b}$ şeklinde düşünebiliriz.

(4.17) ifadesine geri dönersek, belirtelim ki:

(i) $\Phi_{a, b}$ matrisinin determinantı a ve b parametrelerinden bağımsızdır, yani, (-1) dir. $\Phi_{\cos t, \sin t}$ matrisinin $O^-(2) = \{S \in O(2) \mid \det S = -1\}$ ye ait olup olmadığını incelerken şunu elde ediyoruz:

$$\Phi_{\cos t, \sin t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t + \cot t \\ \sin t & 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (4.18)$$

şeklinde olup, $\det \Phi_{\cos t, \sin t} = -1$ dir. Fakat $\Phi_{\cos t, \sin t}$ matrisi incelendiğinde ortogonal bir matris değildir. Yani $\Phi_{\cos t, \sin t} \notin O(2)$ dir. Dolayısıyla $\Phi_{\cos t, \sin t} \notin O^-(2)$ dir.

(4.18) den şu örnek ortaya çıkıyor

$$\Phi_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\Phi_{a,b}$ matrisinin izi a ve b parametrelerinden bağımsızdır, yani, $(+1)$ dir. $\Phi_{\cos t, \sin t} \notin O^-(2)$ dair yeni bir sebep de $\Phi_{\cos t, \sin t}$ matrisinin izi $(+1)$ olmasıdır. Çünkü $O^-(2)$ ye ait elemanların izine bakıldığında

$$\begin{aligned} A &\in O^-(2) \text{ olsun. O halde } \det A = -1 \text{ ve } A \in O(2), \quad (A \in O(2) \iff A^T = A^{-1}) \\ A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ \implies A^{-1} &= \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{=-1}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (\det A = -1) \\ \implies A^{-1} &= - \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ A^T &= A^{-1} \text{ özeliğini kullanırsak,} \\ \implies \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ \implies a = -d \text{ ve } c = b &\implies A = \begin{pmatrix} -d & b \\ b & d \end{pmatrix} \in O^-(2) \\ \implies iz A &= -d + d = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. $(Tr \Phi_{a,b}^k)_{k \geq 0}$ izlerinin dizisi 2, 1, 3, 4, 7, ... şeklinde olup, Fibonacci dizisi elde edilir.

(iii) $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri φ ve $1 - \varphi$ olup, toplamları $(+1)$ dir. Bunu

(4.17) ifadesi üzerinde doğrulayarak, şuna varıyoruz:

$$\begin{aligned} I_2 - \Phi_{a,b} &= \Phi_{1-a,b} \quad \text{yani} \\ \Phi_{a,b} + \Phi_{1-a,b} &= I_2 \end{aligned}$$

dir. Belirtelim ki, aşağıdaki genel kuadratik denklem

$$\mathcal{L}(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

$$\Phi_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{b}\mathcal{L}(a) \\ b & -\alpha - a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}^*$$

matrisini çözüm kabul eder.

Örnek 4.2.3: (Altın yansımalar)

Bir E Öklid uzayında bir H hiperdüzlemine göre yansıma H hiperdüzlemini sabit bırakan, H ya dik her bir $v \in E \setminus \{0\}$ vektörünü $-v$ vektörüne dönüştüren ve

$$r_v = x \in E \rightarrow r_v(x) = x - \frac{2\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

formülüne sahip olan ortogonal bir dönüşümdür (Processi 2007).

$r_v^2 = I_E$, ($I_E = E$ üzerinde özdeşlik dönüşümü) Böylece, v vektörüne göre Altın yansımayı

$$\Phi_v = \frac{1}{2}(I_E + \sqrt{5}r_v)$$

olarak tanımlayabiliriz. Yani, $\Phi_v^2 = \Phi_v + I_E$ dir. Ayrıca, v vektörü Φ_v nin $1 - \varphi$ eigen değerine karşılık gelen eigen vektörüdür.

Lemma 4.2.1: X ortogonal bir dönüşüm ve v de bir vektör ise

$$Xr_vX^{-1} = r_{X(v)}$$

dir (Processi 2007).

Bu lemmada r_v yi Φ_v cinsinden $r_{X(v)}$ yi de $\Phi_{X(v)}$ cinsinden yazarsak,

$$X\Phi_v X^{-1} = \Phi_{X(v)}$$

ifadesini elde ederiz. Φ_v lineer dönüşümünün açık bir ifadesi:

$$\Phi_v(x) = \varphi x - \frac{\sqrt{5}\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

şeklindedir.

Örnek 4.2.4: (Altın yapılarla ilgili olarak üçlü yapılar)

F ve P , M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanları olsunlar.

$(F, P, J = P \circ F)$ üçlü ile aşağıdaki dört yapıyı oluşturabiliriz.

$$(1) F^2 = P^2 = I \text{ ve } P \circ F - F \circ P = 0 \text{ ise } J^2 = I$$

$$(2) F^2 = P^2 = I \text{ ve } P \circ F + F \circ P = 0 \text{ ise } J^2 = -I$$

$$(3) F^2 = P^2 = -I \text{ ve } P \circ F - F \circ P = 0 \text{ ise } J^2 = I$$

$$(4) F^2 = P^2 = -I \text{ ve } P \circ F + F \circ P = 0 \text{ ise } J^2 = -I$$

sırasıyla bu yapılara, **hemen hemen hyperproduct (ahp)**, **hemen hemen biproduct complex (abpc)**, **hemen hemen product bicomplex (apbc)** ve **hemen hemen hypercomplex (ahc)** denir.

(4.6) ifadesinden yola çıkarak

$$\Phi_F = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F), \quad \Phi_P = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P), \quad \Phi_J = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}J)$$

şeklinde olup, bu yapılar arasındaki bağıntı

$$\sqrt{5}\Phi_J = 2\Phi_P\Phi_F - \Phi_P - \Phi_F + \varphi I$$

dır ve (Φ_F, Φ_P, Φ_J) üçlüsünü göz önüne alırsak

(1) $(F, P, J = P \circ F)$ üçlüsü bir hemen hemen hyperproduct (ahp) $\iff \Phi_F, \Phi_P$ Altın yapı ve $\Phi_P\Phi_F = \Phi_F\Phi_P$ ise Φ_J Altın yapı

(2) $(F, P, J = P \circ F)$ üçlüsü bir hemen hemen biproduct kompleks (abpc) $\iff \Phi_F, \Phi_P$ Altın yapı ve $4(\Phi_P\Phi_F + \Phi_F\Phi_P) = 2(\Phi_P + \Phi_F) - I$ ise Φ_J kompleks altın yapı

(3) $(F, P, J = P \circ F)$ üçlüsü bir hemen hemen product bicomplex (apbc) $\iff \Phi_F, \Phi_P$ kompleks altın yapı ve $\Phi_P\Phi_F = \Phi_F\Phi_P$ ise Φ_J Altın yapı

(4) $(F, P, J = P \circ F)$ üçlüsü bir hemen hemen hypercomplex (ahc) $\iff \Phi_F, \Phi_P$ kompleks altın yapı ve $4(\Phi_P\Phi_F + \Phi_F\Phi_P) = 2(\Phi_P + \Phi_F) - I$ ise Φ_J kompleks altın yapı

Örnek 4.2.5: $M = \mathbb{R}_1^4$ üzerinde $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\vec{s}), (\vec{s}^2 = -1)$ ifadesi bir kuaterniyon kompleks altın yapıdır.

İspat:

$$\Phi^2 = \Phi - \frac{3}{2}$$

eşitliği sağlanıyor mu? Buna bakalım.

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}\vec{s})(1 + \sqrt{5}\vec{s}) \\
&= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}\vec{s} + \sqrt{5}\vec{s} - 5) \\
&= \frac{1}{4}(-4 + 2\sqrt{5}\vec{s}) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\vec{s})\right)}_{=\Phi} - \frac{3}{2} \\
\implies \Phi^2 &= \Phi - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Örnek 4.2.6: $M = \mathbb{R}^4$ üzerinde $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\vec{s})$, $(\vec{s}^2 = 1)$ ifadesi bir split kuaterniyon altın yapıdır.

İspat:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

eşitliği sağlanıyor mu? Buna bakalım.

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}\vec{s})(1 + \sqrt{5}\vec{s}) \\
&= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}\vec{s} + \sqrt{5}\vec{s} + 5) \\
&= \frac{1}{4}(6 + 2\sqrt{5}\vec{s}) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\vec{s})\right)}_{=\Phi} + 1 \\
\implies \Phi^2 &= \Phi + 1
\end{aligned}$$

4.3 Altın Yapılar Olarak Konneksiyonlar

4.3.1 Asli lif demetlerinde konneksiyonlar

$P(M, G)$ bir asli lif demeti olsun. $V = \ker \pi_*$ ($\pi : P \rightarrow M$ lif projeksiyonu) P üzerindeki vertical dağılım ve H da V nin tümleyen dağılımı, yani $TP = V \oplus H$

ve H , G -invariant. O halde v ve h sırasıyla V ve H a karşılık gelen projeksiyonları göstermek üzere

$$F = v - h$$

$(1, 1)$ tipindeki tensör alanı P üstünde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. P asli lif demeti üzerindeki bu F hemen hemen çarpım yapısı bir konneksiyona karşılık gelir $\Longleftrightarrow$ aşağıdaki şartlar sağlanırsa

$$(1) F(X) = X \Longleftrightarrow X \in V$$

$$(2) dR_a \circ F_u = F_{ua} \circ dR_a, \quad \forall a \in G \text{ ve } u \in P$$

(4.6) ifadesi göz önüne alınarak, şunu elde ederiz:

Önerme 4.3.1: P , asli lif demeti üzerindeki bir Φ altın yapısı bir konneksiyon ifade eder $\Longleftrightarrow$ aşağıdaki şartlar sağlanırsa

(1') $X \in \chi(P)$ ($= P$ üzerindeki vektör alanlarının Lie cebiri) Φ Altın yapısının φ eigen değerine karşılık gelen eigen vektörü $\Longleftrightarrow X$ vertical vektör alanı

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F) \implies F = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I) \\ F(X) &= X \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I)(X) = X \\ &\Leftrightarrow 2\Phi(X) - X = \sqrt{5}X \\ &\Leftrightarrow \Phi(X) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}X + X) \\ &\Leftrightarrow \Phi(X) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})(X) \\ &\Leftrightarrow \Phi(X) = \varphi X \end{aligned}$$

$$(2') dR_a \circ \Phi_u = \Phi_{ua} \circ dR_a, \quad \forall a \in G \text{ ve } u \in P, \quad (I = \chi(P) \text{ üzerindeki özdeşlik})$$

$w \in \Omega(P, \mathfrak{g})$, H nın eğrilik konneksiyon 1-formu olsun. Burada $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun

Lie cebiridir. w nın eğrilik formu:

$$\forall X, Y \in \chi^h(M) \text{ için } \Omega(X, Y) = dw(h(X), h(Y)) = -w([X, Y])$$

dir. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için F hemen hemen çarpım yapısının Nijenhuis tensörü

$$\begin{aligned} N_F(X, Y) &= F^2([X, Y]) + [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)]), \quad (F^2 = I) \\ &= [X, Y] + [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)]) \end{aligned}$$

dir. $F = v - h$ idi. O halde $\forall X, Y \in \chi^h(M)$ için $F(X) = v(X) - h(X) = -h(X) = -X$ olup,

$$\begin{aligned} N_F(X, Y) &= [X, Y] + [X, Y] + F([X, Y]) + F([X, Y]) \\ N_F(X, Y) &= 2[X, Y] + 2F([X, Y]) \\ w(N_F(X, Y)) &= 2w([X, Y]) + 2w(F[X, Y]) \\ (w \circ F &= w(v - h) = w \circ v - \underbrace{w \circ h}_{=0} = w \circ v = w) \\ w(N_F(X, Y)) &= 2w([X, Y]) + 2w([X, Y]) \\ -\frac{1}{4}w(N_F(X, Y)) &= -(w([X, Y])) \end{aligned}$$

dir. O halde $\Omega(X, Y) = -\frac{1}{4}w(N_F(X, Y))$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} N_F(X, Y) &= F^2([X, Y]) + [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)]) \\ &= [X, Y] + [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)]), \quad \forall X, Y \in \chi(M) \end{aligned}$$

ve $\Phi = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}F)$ ve $F = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I)$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}
N_F(X, Y) &= [X, Y] + \frac{1}{5}[(2\Phi - I)X, (2\Phi - I)Y] - \frac{1}{5}(2\Phi - I)[(2\Phi - I)X, Y] \\
&\quad - \frac{1}{5}(2\Phi - I)[X, (2\Phi - I)Y] \\
&= [X, Y] + \frac{2}{5}[\Phi(X), (2\Phi - I)Y] - \frac{1}{5}[X, (2\Phi - I)Y] - \frac{2}{5}(2\Phi - I)[\Phi(X), Y] \\
&\quad + \frac{1}{5}(2\Phi - I)[X, Y] - \frac{2}{5}(2\Phi - I)[X, \Phi(Y)] + \frac{1}{5}(2\Phi - I)[X, Y] \\
&= [X, Y] + \frac{4}{5}[\Phi(X), \Phi(Y)] - \frac{2}{5}[\Phi(X), Y] - \frac{2}{5}[X, \Phi(Y)] + \frac{1}{5}[X, Y] \\
&\quad - \frac{4}{5}\Phi([\Phi(X), Y]) + \frac{2}{5}[\Phi(X), Y] + \frac{2}{5}\Phi([X, Y]) - \frac{1}{5}[X, Y] - \frac{4}{5}\Phi([X, \Phi(Y)]) \\
&\quad + \frac{2}{5}[X, \Phi(Y)] + \frac{2}{5}\Phi([X, Y]) - \frac{1}{5}[X, Y] \\
&= \underbrace{\frac{4}{5}[X, Y] + \frac{4}{5}\Phi([X, Y])}_{=\frac{4}{5}\Phi^2([X, Y])} + \frac{4}{5}[\Phi(X), \Phi(Y)] - \frac{4}{5}\Phi([\Phi(X), Y]) - \frac{4}{5}\Phi([X, \Phi(Y)]) \\
&= \frac{4}{5}(\Phi^2([X, Y]) + [\Phi(X), \Phi(Y)] - \Phi([\Phi(X), Y]) - \Phi([X, \Phi(Y)])) \\
&= \frac{4}{5}N_\Phi(X, Y)
\end{aligned}$$

$$N_F(X, Y) = \frac{4}{5}N_\Phi(X, Y) \text{ elde edilir.} \quad (4.19)$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y) &= -\frac{1}{4}w(N_F(X, Y)) \\
&= -\frac{1}{5}w(N_\Phi(X, Y))
\end{aligned}$$

olur.

4.3.2 Tanjant demetlerde konneksiyonlar

Tanım 4.3.2.1: J , $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere eğer

$$imJ = \zeta ekJ$$

ise, J ye M manifoldu üzerinde **hemen hemen tanjant yapı** denir (Crasmareanu 2003).

Tanımdan da rahatça görüleceği gibi $J^2 = 0$ dir ve $im J = V(M)$ dir (Crasmareanu 2003).

$\pi : TM \rightarrow M$, M manifoldunun tanjant demeti olsun. $V(M) = \ker \pi_*$ ($\pi_* : TTM \rightarrow TM$) şeklinde gösterilir ve $V(M)$ ye M manifoldunun vertical dağılımı denir. M üzerinde $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ bir lokal koordinat sistemi olmak üzere TM üzerindeki bir lokal koordinat sistemide $(x, y) = (x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ şeklindedir. TM de $(x, y) = (x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ lokal koordinat sistemli bir atlas için, TM nin bir J tanjant yapısı

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i \quad \text{yani} \\ J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0 \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Tanım 4.3.2.2: $(1, 1)$ tipindeki bir tensör alanı $v : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{cases} J \circ v = 0 \\ v \circ J = J \end{cases} \quad (4.20)$$

şartları sağlanıyorsa v tensör alanına **vertical projector** denir.

(4.20)₁ den $im v \subseteq \ker J = V(M)$ ve (4.20)₂ den de $v|_{im J} = I_{V(M)}$ elde ederiz, yani, $V(M) = im J \subseteq im v$ dir. Sonuç olarak $im v = V(M)$ ve $v^2 = v$ dir (Crasmareanu 2003)

Tanım 4.3.2.3: $V(M)$ vertical dağılımın complementary dağılımına N , yani,

$$\chi(M) = N \oplus V(M) \quad (4.21)$$

Normalization veya **Horizontal dağılım** veya **lineer olmayan konneksiyon** denir.

v vertical projektörü $C^\infty(M)$ -lineer ve $imv = V(M)$ olduğundan aşağıdaki önermeyi söyleyebiliriz.

Önerme 4.3.2.1: Bir v vertical projectörü $\zeta kv = N(v)$ bağıntısı sayesinde bir non-lineer konneksiyon üretir.

Buradaki önemli bir açıklama şudur ki: en son önermenin terside doğrudur. Yani, eğer N non-lineer bir konneksiyon ise (4.21) ayrışımına göre h_N ve v_N horizontal ve vertical projeksiyonları olmak üzere aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 4.3.2.2: v_N , $N(v_N) = N$ olacak şekilde bir vertical projectordür.

İspat:

$$v_N : \chi(M) \rightarrow V(M) \quad \text{ve} \quad h_N : \chi(M) \rightarrow N$$

$imv_N = V(M) = \zeta kJ$ olduğundan (4.20)₁ ifadesi sağlanır. $v_N(V(M)) = V(M) = imJ$ olduğu içinde (4.20)₂ sağlanır. Böylece (4.20) ifadesindeki iki şart sağlandığı için v_N bir projectordür ve $\zeta kv_N = N(v_N) = N$ dir.

Lineer olmayan konneksiyon = vertical projector özdeşleştirmesine göre lineer olmayan konneksiyonun başka bir karakterizasyonu aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.3.2.4: Γ , (1,1) tipindeki bir tensör alanı $\Gamma : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

$$\begin{cases} \Gamma \circ J = -J \\ J \circ \Gamma = J \end{cases} \quad (4.22)$$

şartlarını sağlıyorsa Γ tensör alanına **hemen hemen çarpım tipinde lineer olmayan konneksiyon** denir.

Önerme 4.3.2.3: Eğer Γ , hemen hemen çarpım tipinde lineer olmayan konneksiyon ise

(i) $v_\Gamma = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)} - \Gamma)$ bir vertical projectordür.

(ii) $V(M)$, Γ tensör alanının (-1) eigen değerine karşılık gelen eigen uzayıdır.

(iii) $N(v_\Gamma)$, Γ tensör alanının $(+1)$ eigen değerine karşılık gelen eigen uzayıdır.

İspat:

$$(i) \quad J \circ v_\Gamma = \frac{1}{2}(J - J \circ \Gamma) \stackrel{(4.19)_2}{=} \frac{1}{2}(J \circ J) = 0 \quad \text{ve}$$

$$v_\Gamma \circ J = \frac{1}{2}(J - \Gamma \circ J) \stackrel{(4.19)_1}{=} \frac{1}{2}(J + J) = J$$

O halde (4.20) deki iki şart sağlandığı için v_Γ bir vertical projectordür.

$$(ii) \quad V(M) = \text{im } v_\Gamma = \{X \in \chi(M) \mid \Gamma(X) = -X\}$$

$v_\Gamma = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)} - \Gamma)$ şeklinde tanımlı. $V(M) = \{X \in \chi(M) \mid v_\Gamma(X) = X\}$. O halde

$$\begin{aligned} v_\Gamma(X) &= \frac{1}{2}(I_{\chi(M)}(X) - \Gamma(X)) \\ X &= \frac{1}{2}(X - \Gamma(X)) \\ \implies \Gamma(X) &= -X \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $V(M) = \text{im } v_\Gamma = \{X \in \chi(M) \mid \Gamma(X) = -X\}$ dir.

$$(iii) \quad N(v_\Gamma) = \ker v_\Gamma = \{X \in \chi(M) \mid \Gamma(X) = X\}$$

$v_\Gamma = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)} - \Gamma)$ şeklinde tanımlı. O halde $\ker v_\Gamma = \{X \in \chi(M) \mid v_\Gamma(X) = 0\}$. O

halde

$$\begin{aligned}
v_\Gamma(X) &= \frac{1}{2}(I_{\chi(M)}(X) - \Gamma(X)) \\
0 &= \frac{1}{2}(X - \Gamma(X)) \\
\implies \Gamma(X) &= X
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $N(v_\Gamma) = \ker v_\Gamma = \{X \in \chi(M) \mid \Gamma(X) = X\}$ dir.

Sonuç olarak, her v vertical projector $\Gamma = I_{\chi(M)} - 2v$ şeklinde bir hemen hemen çarpım tipinde lineer olmayan konneksiyon oluşturur.

$$\begin{aligned}
\Gamma &= I_{\chi(M)} - 2v \text{ ifadesi için} \\
\Gamma^2 &= \Gamma \circ \Gamma \\
&= (I_{\chi(M)} - 2v) \circ (I_{\chi(M)} - 2v) \\
&= I_{\chi(M)} - 2v - 2v + 4v^2 \\
&= I_{\chi(M)} - 4v + 4v \\
&= I_{\chi(M)}
\end{aligned}$$

olduğundan Γ , tensör alanı M manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Bundan yola çıkarak aşağıdaki ifade elde edilir:

Önerme 4.3.2.4: v , vertical projectorü ile verilen M manifoldu üzerindeki bir N lineer olmayan konneksiyonu bir altın yapıyla da tanımlanabilir

$$\Phi = \varphi I_{\chi(M)} - \sqrt{5}v$$

ve N, Φ nin φ eigen değerine karşılık gelen eigen uzayı, $V(M)$ de Φ nin $(1 - \varphi)$ eigen değerine karşılık gelen eigen uzayıdır.

İspat:

$\Gamma = I_{\chi(M)} - 2v$ ve Γ , bir hemen hemen çarpım yapısı olduğundan (4.6) eşitliğinden yola çıkarak

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2}(I_{\chi(M)} + \sqrt{5}\Gamma) \text{ eşitliğini kullanarak} \\ \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I_{\chi(M)}) \text{ elde ederiz.}\end{aligned}$$

İkinci eşitliği $\Gamma = I_{\chi(M)} - 2v$ ifadesinde yerine yerleştirirsek

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I_{\chi(M)}) &= I_{\chi(M)} - 2v \\ 2\Phi - I_{\chi(M)} &= \sqrt{5}I_{\chi(M)} - 2\sqrt{5}v \\ 2\Phi &= I_{\chi(M)} + \sqrt{5}I_{\chi(M)} - 2\sqrt{5}v \\ \Phi &= \varphi I_{\chi(M)} - \sqrt{5}v\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$N = \zeta ekv = \{X \in \chi(M) \mid \Phi(X) = \varphi X\}$$

$$\Phi = \varphi I_{\chi(M)} - \sqrt{5}v \text{ olduğundan } v = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi I_{\chi(M)} - \Phi) \text{ dir. } N = \{X \in \chi(M) \mid v(X) = 0\}.$$

O halde

$$\begin{aligned}v(X) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi I_{\chi(M)}(X) - \Phi(X)) \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi X - \Phi(X)) \\ \implies \Phi(X) &= \varphi X\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $N = \zeta ekv = \{X \in \chi(M) \mid \Phi(X) = \varphi X\}$ dir.

$$V(M) = imv = \{X \in \chi(M) \mid \Phi(X) = (1 - \varphi)X\} \text{ dir.}$$

$$\Phi = \varphi I_{\chi(M)} - \sqrt{5}v \text{ olduğundan } v = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi I_{\chi(M)} - \Phi) \text{ dir. } V(M) = \{X \in \chi(M) \mid v(X) = X\}.$$

O halde

$$\begin{aligned} v(X) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi I_{\chi(M)}(X) - \Phi(X)) \\ X &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi X - \Phi(X)) \\ \implies \Phi(X) &= (1 - \varphi)X \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $V(M) = \text{im } v = \{X \in \chi(M) \mid \Phi(X) = (1 - \varphi)X\}$ dir

4.4 Altın Yapıların İntegralenmesi Ve Paralelizmi

Φ , Altın yapısının Nijenhuis tensörüne bakalım:

$$N_{\Phi}(X, Y) = \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]$$

dir. R ve S de M manifoldu üzerinde complementary dağılım olsunlar, yani, $\forall x \in M$ için

$$T_x M = R_x \oplus S_x$$

demet durumunda da

$$TM = R \oplus S$$

şeklindedir. r ve s de sırasıyla R ve S ye karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases} r^2 = r & s^2 = s \\ rs = sr = 0 & r + s = I_{TM} \end{cases}$$

bağıntıları vardır.

$r - s = F$ olmak üzere F nin bir hemen hemen çarpım yapısı olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{cases} r + s = I_{TM} \\ r - s = F \end{cases}$$

olduğundan $r = \frac{1}{2}(I_{TM} + F)$ ve $s = \frac{1}{2}(I_{TM} - F)$ dir.

$$\Phi = \frac{1}{2}(I_{TM} + \sqrt{5}F)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1-\varphi}{\sqrt{5}}I \\ s = -\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{\varphi}{\sqrt{5}}I \end{cases}$$

dır.

Hatırlatma:

(i) Eğer $N_\Phi = 0$ ise Φ altın yapısı integrallenebilirdir. (4.19) ifadesinden $N_F = \frac{4}{5}N_\Phi$ olduğunu biliyoruz. O halde Φ altın yapısı integrallenebilir $\iff F$ hemen hemen çarpım yapısı integrallenebilir

(ii) $s[rX, rY] = 0$ ise M manifoldu üzerinde R dağılımı integrallenebilir.

$r[sX, sY] = 0$ ise M manifoldu üzerinde S dağılımı integrallenebilir.

$$\begin{aligned} \Phi r &= r\Phi = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^2 - \frac{1-\varphi}{\sqrt{5}}\Phi, & (\Phi^2 = \Phi + I) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{1}{\sqrt{5}}I - \frac{1-\varphi}{\sqrt{5}}\Phi \\ &= \frac{\varphi}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{1}{\sqrt{5}}I \\ &= \varphi r \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\Phi s = s\Phi = (1-\varphi)s = \frac{\varphi-1}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1}{\sqrt{5}}I$ dır. O halde

$$\begin{cases} \Phi r = r\Phi = \varphi r = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{1}{\sqrt{5}}I \\ \Phi s = s\Phi = (1-\varphi)s = \frac{\varphi-1}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1}{\sqrt{5}}I \end{cases}$$

dır. Bu eşitliklerin yardımıyla

$$\begin{aligned}
N_{\Phi}(rX, rY) &= \Phi^2[rX, rY] + [\Phi rX, \Phi rY] - \Phi[\Phi rX, rY] - \Phi[rX, \Phi rY] \\
(\Phi r &= \varphi r) \\
&= \Phi^2[rX, rY] + \varphi^2[rX, rY] - \varphi\Phi[rX, rY] - \varphi\Phi[rX, rY] \\
&= \Phi[rX, rY] + [rX, rY] + \varphi[rX, rY] + [rX, rY] - 2\varphi\Phi[rX, rY] \\
&= (1 - 2\varphi)\Phi[rX, rY] + (2 + \varphi)[rX, rY] \\
\frac{1}{5}sN_{\Phi}(rX, rY) &= \frac{(1 - 2\varphi)}{5}s\Phi[rX, rY] + \frac{(2 + \varphi)}{5}s[rX, rY], \quad (s\Phi = (1 - \varphi)s) \\
&= \frac{(1 - 2\varphi)}{5}(1 - \varphi)s[rX, rY] + \frac{(2 + \varphi)}{5}s[rX, rY] \\
&= \left(\frac{1 - \varphi - 2\varphi + 2\varphi^2 + 2 + \varphi}{5}\right)s[rX, rY] \\
&= s[rX, rY] \\
\implies \frac{1}{5}sN_{\Phi}(rX, rY) &= s[rX, rY] \text{ elde ederiz.}
\end{aligned}$$

Benzer bir ispatla $r[sX, sY] = \frac{1}{5}rN_{\Phi}(sX, sY)$ elde edilir. O halde

$$\begin{cases} \frac{1}{5}sN_{\Phi}(rX, rY) = s[rX, rY] \\ \frac{1}{5}rN_{\Phi}(sX, sY) = r[sX, sY] \end{cases}$$

dir. Bu son ifadelerden yola çıkarak aşağıdaki önerme çok rahat görülür.

Önerme 4.4.1: (i) R integrallenebilir $\iff sN_{\Phi}(rX, rY) = 0$

(ii) S integrallenebilir $\iff rN_{\Phi}(sX, sY) = 0$

(iii) Φ integrallenebilir ise de hem R hemde S integrallenebilir.

4.4.1 Hemen hemen çarpım manifoldları üzerinde uyarlanmış lineer konneksiyonlar

D , $(n + p)$ boyutlu bir M manifoldu üzerinde n -dağılım olsun. M manifoldu üz-

erindeki bir lineer konneksiyon ∇^* olmak üzere

$$\nabla_X^* U \in \Gamma(D), \quad \forall X \in \Gamma(TM), \quad U \in \Gamma(D)$$

ise ∇^* lineer konneksiyonuna D ye uyarlanmış denir (Bejancu and Farran 2006).

D' , M manifoldu üzerinde D dağılımının tümleyen bir p -dağılımı olsun. O halde $TM = D \oplus D'$ dır. Q ve Q' de sırasıyla D ve D' ye karşılık gelen projeksiyonlar olsun. Dolayısıyla $Q - Q' = F$ şeklinde bir hemen hemen çarpım yapısı oluşturabiliyoruz. (M, D, D') üçlüsüne de hemen hemen çarpım manifoldu denir.

Hemen hemen çarpım manifoldu üzerindeki bir lineer konneksiyona ∇^* , uyarlanmış lineer konneksiyon denir eğer ∇^* hem D hemde D' ye göre uyarlanmış ise, yani,

$$\begin{aligned} \nabla_X^* QY &\in \Gamma(D) \\ \nabla_X^* Q'Y &\in \Gamma(D') \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

İlk kez Schouten Van-Kampen ve Vranceanu tarafından tanıtılan ve kendi isimleriyle bilinen hemen hemen çarpım manifoldları üzerinde iki uyarlanmış lineer konneksiyon vardır. Bu konneksiyonlar şu şekilde tanımlanır: M bir hemen hemen çarpım manifoldu ve ∇ , M üzerinde bir lineer konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

(i) **Schouten konneksiyonu**

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y = Q(\nabla_X QY) + Q'(\nabla_X Q'Y)$$

(ii) **Vranceanu konneksiyonu**

$$\overset{V}{\nabla}_X Y = Q(\nabla_{QX} QY) + Q'(\nabla_{Q'X} Q'Y) + Q[Q'X, QY] + Q'[QX, Q'Y]$$

dır (Bejancu ve Farran 2006).

M manifoldu üzerinde $Q - Q' = F$, F hemen hemen çarpım yapısı eğer $\tilde{\nabla}$ lineer

konneksiyonuna göre kovaryant türevi sifıra eşit ise, yani,

$$(\tilde{\nabla}_X F)Y = \tilde{\nabla}_X FY - F\tilde{\nabla}_X Y = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

F hemen hemen çarpım yapısı $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonuna göre paraleldir denir (Bejancu ve Farran 2006).

Önerme 4.4.1.1: r ve s projektörleri M manifoldu üzerindeki her ∇ lineer konneksiyon için Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paraleldir ve Φ altın yapısı da Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paraleldir.

İspat:

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

r projectorunun Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paralelliği:

$$\begin{aligned} (\overset{Sc}{\nabla}_X r)Y &= \overset{Sc}{\nabla}_X rY - r(\overset{Sc}{\nabla}_X Y) \\ &= r(\nabla_X r^2 Y) + s(\underbrace{\nabla_X s(rY)}_{=0}) - r[r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY)] \\ (r^2 &= r, \quad rs = sr = 0) \\ &= r((\nabla_X rY) - r^2((\nabla_X rY)) \\ &= r((\nabla_X rY) - r((\nabla_X rY)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overset{V}{\nabla}_X r)Y &= (\overset{V}{\nabla}_X rY) - r(\overset{V}{\nabla}_X Y) \\ &= r(\nabla_{rX} r(rY)) + s(\underbrace{\nabla_{sX} s(rY)}_{=0}) + r[sX, r(rY)] + s[rX, \underbrace{s(rY)}_{=0}] \\ &\quad - r(r(\nabla_{rX} rY) + s(\nabla_{sX} sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY]) \\ &= r(\nabla_{rX} rY) + r[sX, r(rY)] - r(\nabla_{rX} rY) - r[sX, rY] = 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde s projectorunun Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paralel-

liđi gösterilebilir.

Φ , Altın yapısının Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paralelliği:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^{Sc} \Phi)Y &= (\nabla_X^{Sc} \Phi Y) - \Phi(\nabla_X^{Sc} Y) \\
&= r(\nabla_X r(\Phi Y) + s(\nabla_X s(\Phi Y))) \\
&\quad - \Phi[(r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY))], \quad \left(\begin{array}{l} \Phi r = r\Phi = \varphi r \\ \Phi s = s\Phi = (1 - \varphi)s \end{array} \right) \\
&= r(\nabla_X \varphi(rY)) + s(\nabla_X (1 - \varphi)sY) - \varphi r(\nabla_X rY) - (1 - \varphi)s(\nabla_X sY) \\
&= \varphi r(\nabla_X(rY)) + (1 - \varphi)s(\nabla_X(sY)) - \varphi r(\nabla_X rY) - (1 - \varphi)s(\nabla_X sY) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^V \Phi)Y &= (\nabla_X^V \Phi Y) - \Phi(\nabla_X^V Y) \\
&= r(\nabla_{rX} r(\Phi Y) + s(\nabla_{sX} s(\Phi Y))) + r[sX, r(\Phi Y)] + s[rX, s(\Phi Y)] \\
&\quad - \Phi r(\nabla_{rX} rY) - \Phi s(\nabla_{sX} sY) - \Phi r[sX, rY] \\
&\quad - \Phi r[rX, sY], \quad \left(\begin{array}{l} \Phi r = r\Phi = \varphi r \\ \Phi s = s\Phi = (1 - \varphi)s \end{array} \right) \\
&= r(\nabla_{rX} \varphi(rY)) + s(\nabla_{sX} (1 - \varphi)sY) + r[sX, \varphi(rY)] + s[rX, (1 - \varphi)sY] \\
&\quad - \varphi r(\nabla_{rX} rY) - (1 - \varphi)s(\nabla_{sX} sY) - \varphi r[sX, rY] - (1 - \varphi)s[rX, sY] \\
&= \varphi r(\nabla_{rX} rY) + (1 - \varphi)s(\nabla_{sX} sY) + \varphi r[sX, rY] + (1 - \varphi)s[rX, sY] \\
&\quad - \varphi r(\nabla_{rX} rY) - (1 - \varphi)s(\nabla_{sX} sY) - \varphi r[sX, rY] - (1 - \varphi)s[rX, sY] \\
&= 0
\end{aligned}$$

D , M manifoldu üzerinde bir dağılım, eğer; $X \in \chi(M)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ ise D dağılımına ∇ lineer konneksiyonuna göre paraleldir denir.

Önerme 4.1.1.2: R ve S dağılımları M manifoldu üzerindeki her ∇ lineer konneksiyon için Schouten ve Vranceanu konneksiyonuna göre paraleldir.

İspat:

$X \in \chi(M)$ ve $Y \in \Gamma(R)$ olsun. $Y \in \Gamma(R) \implies s(Y) = 0$ ve $r(Y) = Y$

$$\begin{aligned} \overset{Sc}{\nabla}_X Y &= r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY) \\ &= r(\nabla_X Y) \in R \\ \overset{V}{\nabla}_X Y &= r(\nabla_{rX} rY) + s(\nabla_{sX} sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY] \\ &= (r(\nabla_{rX} Y) + r[sX, Y]) \in R \end{aligned}$$

$X \in \chi(M)$ ve $Y \in \Gamma(S)$ olsun. $Y \in \Gamma(S) \implies r(Y) = 0$ ve $s(Y) = Y$

$$\begin{aligned} \overset{Sc}{\nabla}_X Y &= r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY) \\ &= s(\nabla_X Y) \in S \\ \overset{V}{\nabla}_X Y &= r(\nabla_{rX} rY) + s(\nabla_{sX} sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY] \\ &= (s(\nabla_{sX} Y) + s[rX, Y]) \in S \end{aligned}$$

4. 5. Altın Riemannian Metrikleri

P , M manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapısı ve g de

$$g(P(X), P(Y)) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \chi(M)$$

veya buna denk olarak P , bir g —simetrik endomorfizm

$$g(P(X), Y) = g(X, P(Y))$$

olacak şekilde M manifoldu üzerinde bir Riemann metriği olmak üzere (g, P) ikilisine **Riemannian hemen hemen çarpım yapısı** denir.

Önerme 4.5.1: P , bir g —simetrik endomorfizm $\Leftrightarrow \Phi$, Altın yapısı da g —simetrik endomorfizm.

İspat:

$$(\Rightarrow:) g(P(X), Y) = g(X, P(Y)) \implies g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y)) \quad (?)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P) \quad \text{olduğunu biliyoruz} \\ \implies P &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I) \quad \text{dır.} \end{aligned}$$

$$g(P(X), Y) = g(X, P(Y)) \implies g\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I)\right)(X), Y\right) = g\left(X, \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I)\right)(Y)\right)$$

$$\implies \frac{1}{\sqrt{5}} [g(2\Phi(X), Y) - g(X, Y)] = \frac{1}{\sqrt{5}} [g(X, 2\Phi(Y)) - g(X, Y)]$$

$$\implies 2g(\Phi(X), Y) = 2g(X, \Phi(Y))$$

$$\implies g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y))$$

$$(\Leftarrow:) g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y)) \implies g(P(X), Y) = g(X, P(Y)) \quad (?)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P)$$

$$g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y)) \implies g\left(\left(\frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P)\right)(X), Y\right) = g\left(X, \left(\frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P)\right)(Y)\right)$$

$$\implies \frac{1}{2} [g(X, Y) + g(\sqrt{5}P(X), Y)] = \frac{1}{2} [g(X, Y) + g(X, \sqrt{5}P(Y))]$$

$$\implies \sqrt{5}g(P(X), Y) = \sqrt{5}g(X, P(Y))$$

$$\implies g(P(X), Y) = g(X, P(Y))$$

Tanım 4.5.1: (Altın Riemannian Manifoldu) g , M manifoldu üstünde

$$g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y)), \quad \forall X, Y \in \chi(M)$$

olacak şekilde bir Riemann metriği ise (g, Φ) ikilisine **Altın Riemanian yapı** ve (M, g, Φ) üçlüsüne de **Altın Riemannian manifoldu** denir.

Önerme 4.5.1: Altın Riemannian manifoldu üzerinde

(i) r, s projektörleri g —simetriktir. Yani,

$$\begin{cases} g(r(X), Y) = g(X, r(Y)) \\ g(s(X), Y) = g(X, s(Y)) \end{cases}$$

dir.

(ii) R, S dağılımları g —ortogonaldır.

$$g(r(X), s(Y)) = 0$$

(iii) Altın yapı, N_Φ —simetriktir.

$$N_\Phi(\Phi(X), Y) = N_\Phi(X, \Phi(Y))$$

İspat:

(i)

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi - \frac{1-\varphi}{\sqrt{5}}I$$

ve

$$g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y))$$

olduğunu biliyoruz. O halde $\Phi = \sqrt{5}r + (1 - \varphi)I$ ve

$$g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y))$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g((\sqrt{5}r + (1 - \varphi)I)(X), Y) &= g(X, (\sqrt{5}r + (1 - \varphi)I)(Y)) \\
g((\sqrt{5}r(X), Y) + g((1 - \varphi)I(X), Y) &= g(X, (\sqrt{5}r(Y)) + g(X, (1 - \varphi)I(Y)) \\
\sqrt{5}g(r(X), Y) + (1 - \varphi)g(X, Y) &= \sqrt{5}g(X, r(Y)) + (1 - \varphi)g(X, Y) \\
g(r(X), Y) &= g(X, r(Y))
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $s = -\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{\varphi}{\sqrt{5}}I$ ve $g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y))$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdakine benzer şekilde $g(s(X), Y) = g(X, s(Y))$ olduğu gösterilebilir.

(ii) R ve S dağılımları tümleyen dağılım olduğundan

$$T_x M = R_x \oplus S_x$$

dir. M manifoldu üzerinde g metriği koyduğumuz için $(R_x)^\perp = S_x$ ve $(S_x)^\perp = R_x$ olur. Dolayısıyla

$$g(r(X), s(Y)) = 0$$

dır.

(iii) Φ altın yapısının Nijenhuis tensörü

$$N_\Phi(X, Y) = \Phi^2([X, Y]) + [\Phi(X), \Phi(Y)] - \Phi([\Phi(X), Y]) - \Phi([X, \Phi(Y)])$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
N_\Phi(\Phi(X), Y) &= \Phi^2([\Phi(X), Y]) + [\Phi^2(X), \Phi(Y)] - \Phi([\Phi^2(X), Y]) - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)]) \\
&= \Phi([\Phi(X), Y]) + [\Phi(X), Y] + [\Phi(X), \Phi(Y)] + [X, \Phi(Y)] \\
&\quad - \Phi([\Phi(X), Y]) - \Phi([X, Y]) - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)])
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_{\Phi}(X, \Phi(Y)) &= \Phi^2([X, \Phi(Y)]) + [\Phi(X), \Phi^2(Y)] - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)]) - \Phi([X, \Phi^2(Y)]) \\ &= \Phi([X, \Phi(Y)]) + [X, \Phi(Y)] + [\Phi(X), \Phi(Y)] + [\Phi(X), Y] \\ &\quad - \Phi([\Phi(X), \Phi(Y)]) - \Phi([X, \Phi(Y)]) - \Phi([X, Y]) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $N_{\Phi}(\Phi(X), Y) = N_{\Phi}(X, \Phi(Y))$ dir.

KAYNAKLAR

- Anonymous Web sitesi: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnathtml>.
- Bejancu, A. and Farran, H.R. 2006. "Foliations and Geometric Structures." Mathematics and its applications, Vol 580, Springer, New York
- Bolat, C. 2008. " k -Fibonacci, k -Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları". Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- Brickell, F. and Clark, R.S. 1970. "Differentiable Manifolds". VRN company, London
- Carmo, Manfredo Perdigao do. 1992. "Riemannian Geometry". Birkhauser. Boston
- Crasmareanu, M. 2003. "Nonlinear Connections and Semisprays on Tangent Manifold" NOVI SAD J.MATH, 33 (2); 11-22
- Crasmareanu, M. and Hretcanu, C.E. 2008. "Golden Differential Geometry" Chaos, Solitons and Fractals, 38; 1229-1238.
- Çakar, Ö. 1992. "Doğanın Güzellikleri Ölçüsü Altın Oran", Bilim ve Teknik, 6-11
- Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. 1972. "Connection, Curvature and Cohomology, Vol 1-2". Academic Press, New York
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2000. "Diferensiyel Geometri". Ankara Üniversitesi
- Hacısalıhoğlu, H.H. ve Ekmekçi, N. 2003. "Tensör Geometri". Ankara Üniversitesi

- Hacısalıhoğlu, H.H. 2006. "Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş". Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları
- Lee, JM. 1997. "Riemannian Manifolds". Springer, New York
- Lee, JM. 2003. "Introduction to Smooth Manifolds". Springer, New York
- Lee, JM. 2009. "Manifolds and Differential Geometry". American Mathematical Society, United States of America
- Leon, M., Rodrigues, PR. 1989. "Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics". Netherlands
- Lewis, A., 1993. "Notes on Principal Fibre bundle". ?
- Lewis, B., (?) "Trigonometry and Fibonacci Numbers". The Mathematical Gazette, 216-226
- Lounesto, P. 2001. "Clifford Algebras and Spinors". Cambridge University Press, United Kingdom
- Morita, S. 2001. "Geometry of Differential Forms". American Mathematical Society, United States of America
- Naber, GL. 1997. "Topology, Geometry and Gauge Fields". Springer, New York
- Nakahara, M. 2003. "Geometry, topology, and physics". Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia
- Nicola, PC. 2000. "Mainstream Mathematical Economics in The 20th Century". Springer, New York

- Okubo, T. 1987. "Differential Geometry". Marcel Dekker, Inc, New York
- Özdemir, F., Crasmareanu, M., Uğuz, S. 2010. "Geometrical Objects Associated to a Substructure". Turkish J. Math., 34
- Özkan, M. 2006. "Lineer Çatıların Asli Lif Demeti İle Birleşik Vektör Demetlerine Lineer Konneksiyonların Horizontal Lifti". Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- Procesi, C. 2007. "Lie Groups: an approach through invariants and representations". Springer, New York
- Tu, LW. 2007. "Introduction the manifold". Springer, New York
- Turgut, A. 1989. "Tanjant Manifold Üzerinde Metrikler, Konneksiyonlar ve Eğriler". Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- Yağcı, M. 2005. "Altın Oran". Matematik Dünyası, 52-60
- Yano, K. and Kon, M. 1983. "Structures on Manifolds" Series in pure mathematics Volume 3, Springer, New York

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif Hatice YARDIMCI

Doğum Yeri : ANKARA

Doğum Tarihi : 28.07.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Atatürk Lisesi

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü - 2008

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı - (2008-2010)

Çalıştığı Kurum / Kurumlar ve Yıl

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Araştırma Görevlisi (2009 - ...)