

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI POLİNOMLARI İÇEREN LİNEER POZİTİF
OPERATÖRLERİN SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLARA
YAKLAŞIMI

Nevin USTA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

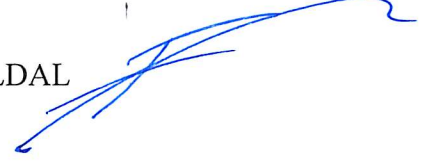
ANKARA
2017

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Nevin USTA tarafından hazırlanan “**Bazı Polinomları İçeren Lineer Pozitif Operatörlerin Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlara Yaklaşımı**” adlı tez çalışması 25/08/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

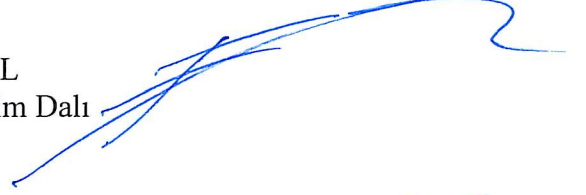


Jüri Üyeleri:

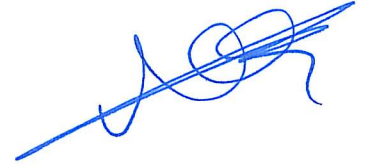
Başkan: Prof. Dr. Nuri ÖZALP
Ankara Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Ankara Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Ali OLGUN
Kırıkkale Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

25/08/2017


Nevin USTA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI POLİNOMLARI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLARA YAKLAŞIMI

Nevin USTA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde lineer pozitif operatörün özellikleri ve süreklilik modülünün tanımı ve özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde Laguerre polinomlarını içeren operatör tanımlanmış ve bu operatör yardımıyla sınırlı salınımlı fonksiyonlara yaklaşım hızı verilmiştir.

Dördüncü bölümde Brenke polinomlarını içeren Szasz operatörleri verilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde Brenke polinomlarını içeren Szasz tipli operatörlerin Kantrovich tipi verilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde ise Kantrovich operatörün sınırlı salınımlı fonksiyonlara yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Son olarak yedinci bölüm tartışma ve sonuç bölümü olarak ayrılmış olup neler yaptığımız ve neler yapabileceğimiz hakkında genel bilgi verilmiştir.

Ağustos 2017, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Polinomlar, Lineer Pozitif Operatörler, Yakınsaklık Hızı, Sınırlı Salınımlı Fonksiyon, Total salınım.

ABSTRACT

Master Thesis

APPROXIMATION OF LINEAR POSITIVE OPERATORS WHICH IS INVOLVING SOME POLYNOMIALS ON FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

Nevin USTA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

The thesis is composed of seven chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, properties of linear positive operators and definition and properties of modulus of continuity are presented.

In the third chapter, operator containing Laguerre polynomials is defined and the speed of approach to functions is given by this operator.

In the fourth chapter, Szasz operators involving Brenke type polynomials given and approach properties are examined.

In the fifth chapter, a Kantorovich type of Szasz operators including Brenke type polynomials are given and approximation properties are examined.

In the sixth chapter, properties of Kantorovich operator approximating to function of bounded variation are investigated.

Lastly, as the seventh chapter includes discussion and conclusion parts, general information will be provided about what we have done so far and what can be done more.

August 2017, 70 pages

Key Words: Polynomials, Linear Positive Operators, Rate of Convergence, Function of Bounded Variation, Total Variation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan saygıdeğer danışman hocam; Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nevin USTA
Ankara, Ağustos 2017

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER	3
2.1 Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı	3
2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri	4
2.3 Süreklilik Modülü	6
3. LAGUERRE POLİNOMLARINI İÇEREN BİR OPERATÖR YARDIMIYLA SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLARA YAK- LAŞIM HIZI	11
3.1 Bazı Temel Tanımlar ve Lemmalar	12
4. BRENKE POLİNOMLARINI İÇEREN SZASZ OPERATÖR- LERİNİN BİR GENELLEMESİ	28
4.1 L_n Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	30
4.2 Örnek	38
5. BRENKE POLİNOMLARINI İÇEREN SZASZ TIPLI OPERATÖR- LERİN KANTROVİCH TIPLI GENELLEMESİ	39
5.1 K_n Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	39
5.2 Yaklaşım Hızı	42
5.3 Özel Durumlar ve Başka Özellikler	46
6. BRENKE TIPLI POLİNOMLARI İÇEREN SZASZ TIPLI OPERA- TÖRLERİN KANTOROVİCH VARYASYONUNUN SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLAR YARDIMI İLE YAKLAŞIM ÖZEL- LİKLERİ	51
6.1 Yardımcı Sonuçlar	53
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	70

SİMGELER DİZİNİ

$B_n f(x)$	Bernstein polinomları
$S_n f(x)$	Szasz operatörleri
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$C_B[0, \infty)$	$\{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{sınırlı}\}$
$C_B^2[0, \infty)$	$\{g \in C_B[0, \infty) : g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$
$\tilde{C}[0, \infty)$	$[0, \infty)$ üzerinde düzgün sürekli fonksiyonların uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü
$K(f; \delta)$	Petree's K-fonksiyoneli
$L_k^{(n)}(t)$	n. dereceden Laguerre polinomları
$M_n f$	Meyer-König ve Zeller operatörü
$\bigvee_b(f)$	f in $[a, b]$ üzerindeki toplam salınımı
$\overset{a}{BV}[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde sınırlı salımlı fonksiyonların sınıfı
$L_n(f; x)$	Brenke tipli polinomları içeren lineer pozitif operatörler
$K_n(f; x)$	Kantorovich operatör
$K_n^*(f; x)$	Gould Hopper polinomlarını içeren $K_n(f; x)$ in Kantorovich versiyonu

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, temel olarak verilen keyfi, sürekli bir fonksiyona kendisinden çok daha basit ve daha kolay sonuçlar elde edilebilen fonksiyonlar ya da polinomlar yardımıyla yaklaşmayı temel alır. Ele aldığımız sürekli bir fonksiyona cebirsel polinomlarla ya da fonksiyonlarla yaklaşıldığında en iyi yaklaşan polinomun ya da fonksiyonun bulunması ve yaklaşım hızının hesaplanması yaklaşım teorisinde çalışılan en önemli problemlerden birisidir.

Yaklaşım teorisi geçmişten günümüze kadar birçok matematikçiye ilham kaynağı olmuştur. Yıllardır yaklaşım teorisi üzerine birçok yayın yapılmış olup günümüzde de çalışılmaya devam edilmektedir.

Yaklaşım teorisinin geliştirilmesinde en büyük adım 1885 yılında Karl Weierstrass'ın " $[a, b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlı her sürekli f fonksiyonu için, o fonksiyona yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinom dizisi karşılık gelir." teoremini ortaya atması ve ispatlaması ile ortaya çıkmıştır. Bu teoremin ispatının karışık ve uzun olması sebebiyle daha sonralarda birçok matematikçi daha anlaşılabilir ve daha kısa ispatlar yapmışlardır. Bunlardan bazıları Carl Runge (1885), Henri Lebesgue (1908), Edmund Londov (1908), Charles de la Vallée-Poussion (1908), Sergei N. Bernstein (1912) ve Lipot Fejer (1916). Bu ispatlar içerisinde en ilginç olanı 1912 yılında Bernstein tarafından verilmiştir.

Bu teoremi ispat etmek için Bernstein sürekli fonksiyonlara yaklaşım için $B_n f$ operatörünü $f \in C[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

şeklinde tanımlamış ve Bernstein polinomlarının $[0, 1]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını göstermiştir. Bu açıdan Bernstein polinomları Weierstrass teoreminde adı geçen $P_n(x)$ polinomuna örnektir.

Bernstein operatörleri f fonksiyonunun kapalı ve sınırlı aralıklarda tanımlı olması halinde incelenir. f fonksiyonunun sınırsız aralıklarda olması durumunda da yaklaşım problemleri incelenmiştir. Sınırsız aralıklarda sürekli bir fonksiyona yakınsayan önemli bir fonksiyon dizisi de G. M. Mirakyan tarafından inşa edilmiştir. 1941 yılında G. M. Mirakyan $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli olan ve $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/(1+x^2) < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsak olan

$$S_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

ile tanımlı Szasz operatörleri olarak bilinen $\{S_n\}$ operatörler dizisini tanımlamıştır ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. 1944 yılında J. Faward ve 1950 yılında O. Szasz tarafından bu operatörlerin bazı özellikleri incelenmiştir. Genellikle $S_n f$ fonksiyon serileri Szasz- Mirakyan operatörleri olarak bilinir.

1951 yılında H. Bohman

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(t_{k,n}) u_k(x), \quad x \in [0, 1], \quad 0 \leq t_{k,n} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde olan pozitif lineer operatörler dizisinin $[0, 1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı hakkında oldukça kullanışlı bir kriter vermiştir. 1953 yılında P. P. Korovkin, H. Bohman'ın sonucunu genelleyen ve pozitif lineer operatörler ile yaklaşım teorisini derinleştiren bir çalışma sunmuştur. Çalışmadaki kritere göre; keyfi bir $\{L_n(f)\}$ pozitif lineer operatör dizisinin f fonksiyonuna kapalı ve sonlu bir aralıkta düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i = 0, 1, 2$ için $\{L_n(e_i)\}$ dizisinin ilgili aralıkta e_i fonksiyonuna düzgün yakınsamasıdır. Burada e_i 'ler $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ ile tanımlı test fonksiyonlarıdır. Bu kriter, sürekli fonksiyonlara pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinin temelini oluşturmuştur. Bohman-Korovkin teoremini gerçekleyen diğer operatör dizileri Bernstein polinomlarının bulunma yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu yüzden Bernstein polinomları pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinin oluşmasında çok önemli bir yere sahiptir. Bohman- Korovkin teoreminden sonra bu teoremin koşullarını sağlayan çok sayıda pozitif lineer operatörler dizisi inşa edilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

2.1 Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı

Tanım 2.1 X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa buna X uzayında bir operatördür denir ve $L(f; x) = g(x)$ biçiminde gösterilir, burada $L(f; x) = L(f(t); x)$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı x değişkeni L işleminde sabit gibidir ve $L(f(x); x) = f(x)L(1; x)$ yazılabilir.

X uzayı lineer bir uzay olduğunda lineer operatörün tanımı yapılabilir.

Tanım 2.2 X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L : X \rightarrow Y$$

şeklindeki L operatörünü gözönüne alalım. Eğer $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulu sağlanıyorsa o taktirde L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.3 X bir vektör uzayı olmak üzere her $f \in X$ için

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f; x) \geq 0$$

oluyor ise L operatörüne pozitif operatör denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartını sağlayan operatöre lineer pozitif operatör denir.

Uyarı 2.1 $f \leq 0$ iken $L(f; x) \leq 0$ gerçekleşir mi?

Kabul edelim ki $f \leq 0$ olsun. Bu durumda

$$-f \geq 0$$

elde edilir. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(-f; x) \geq 0$$

bulunur. L operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$-L(f; x) \geq 0 \text{ ise } L(f; x) \leq 0$$

elde edilir. Yani istenilen özelliğin gerçekleştiği görülmüş olur.

2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Lemma 2.1 Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \leq g \text{ ise } L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f) \geq 0 \tag{2.1}$$

yazılabilir. Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir. Bunun (2.1)'de kullanılmasıyla

$$L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0 \text{ ise } L(f) \leq L(g)$$

bulunur. ■

Lemma 2.2 L bir lineer pozitif operatör ise o takdirde;

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Keyfi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \quad (2.2)$$

dir. L operatörünün lineerliğinden, monoton artanlığından ve de (2.2)'den

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir. Bu ise

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

olduğunu gösterir. ■

Tanım 2.4 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ 'e bir fonksiyon dizisi denir ve (f_n) ile gösterilir.

Tanım 2.5 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f; x)$ 'e bir operatör dizisi denir ve (L_n) ile gösterilir.

Tanım 2.6 Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm,

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Burada

1. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g \in C[a, b]$
2. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g = g + f$
3. $\forall f, g, h \in C[a, b]$ için $(f + g) + h = f + (g + h)$
4. $\forall f \in C[a, b]$ için $\exists \theta$ vardır ki $f + \theta = \theta + f = f$
5. $\forall f \in C[a, b]$ için $\exists f'$ vardır ki $f + f' = f' + f = \theta$
6. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda f \in C[a, b]$
7. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$
8. $\forall f \in C[a, b]$ için $1.f = f$

9. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$
 10. $\forall f, g \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$
 11. $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| \geq 0$
 12. $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| = 0 \iff f = 0$
 13. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
 14. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
- koşulları sağlandığından $C[a, b]$ *Lineer Normlu Uzay*dır.

Tanım 2.7 (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ lineer normlu uzayında düzgün yakınsak olması için, $\forall x \in [a, b]$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

olmasıdır. Daha açık olarak ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması demektir.

Teorem 2.1 (Korovkin Teoremi) $f, [a, b]$ aralığında sürekli, tüm reel ekseninde sınırlı olsun. $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatörlerin dizisi, $\forall x \in [a, b]$ için $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$ 0 a düzgün yakınsayan diziler olmak üzere

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$L_n(s; x) = x + \beta_n(x)$$

$$L_n(s^2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

eşitliklerini sağlıyorsa $L_n(f; x)$ $[a, b]$ üzerinde $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

2.3 Süreklilik Modülü

$f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t - x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan ω fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Lemma 2.3 Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i). $\omega(f; \delta) \geq 0$
- (ii). $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- (iii). $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m \omega(f; \delta)$
- (iv). $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda) \omega(f; \delta)$
- (v). $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$
- (vi). $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$
- (vii). $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$.

İspat. (i). Tanım gereğince, süreklilik modülü mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.

(ii). $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t - x| \leq \delta_2$ bölgesinin $|t - x| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır. Bölge büyüdüğü taktirde, alınan supremumunda büyüyemesi gerektiğinden ispat tamamlanır.

(iii). Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir. $|t - x| \leq m\delta$ için $t = x + mh$ seçilmesiyle $|h| \leq \delta$ elde edilir. O taktirde

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x + (k+1)h) - f(x + kh)] \right|$$

olup, sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)| \\ &\leq \omega(f; \delta) + \dots + \omega(f; \delta) \\ &= m \omega(f; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv). $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\lambda]$ ile gösterilirse bu durumda $[\lambda] < \lambda < [\lambda] + 1$ eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır. Şimdi bu eşitsizlikten ve (ii) de ispatlanan $\omega(f; \delta)$ nın azalmayan fonksiyon olmasını kullanarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. $[\lambda]$ pozitif bir tamsayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanabilir. Bu durumda

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[\lambda] + 1 \leq \lambda + 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

olur. Sonuç olarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

(v). $|t - x| \leq \delta$ eşitsizliğindeki $\delta \rightarrow 0$ olması $t \rightarrow x$ olması anlamına gelir. f fonksiyonu sürekli olduğundan, süreklilik tanımına göre $t \rightarrow x$ için $|f(t) - f(x)| \rightarrow 0$ olduğundan ispat açıktır.

(vi). $\omega(f; \delta)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçilirse elde edilir. O halde $|f(t) - f(x)|$ lerin supremumu $\omega(f; |t - x|)$ olacağından, $|f(t) - f(x)|$ ifadesi $\omega(f; |t - x|)$ den küçük kalacaktır. Bu ise istenilendir.

$$\omega(f; |t - x|) = \sup_{x \in [a, b]} |f(t) - f(x)|$$

(vii). (vi) özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|) = \omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta} \delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar. ■

Tanım 2.8 f reel değerli, sürekli bir fonksiyon, $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $\forall x, y \in [0, \infty)$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha$$

sağlanacak şekilde bir $M > 0$ varsa f fonksiyonuna α 'yıncı basamaktan Lipschitz sürekli fonksiyondur denir. Lipschitz sürekli fonksiyonların kümesi $Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 $C[0, \infty)$ ve $C_B[0, \infty)$ uzayları sırası ile

$$C[0, \infty) = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{sürekli}\}$$

ve

$$C_B[0, \infty) = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{sınırlı}\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. C_B deki norm

$$\|f\|_{C_B} = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$$

şeklindedir.

Tanım 2.10 $f \in C_B[0, \infty)$ olmak üzere ikinci süreklilik modülü

$$w_2(f; \delta) := \sup_{0 < t \leq \delta} \|f(\cdot + 2t) - 2f(\cdot + t) + f(\cdot)\|_{C_B} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.11 $f \in C_B[0, \infty)$ Petree's K-fonksiyoneli

$$K(f; \delta) := \inf_{g \in C_B^2[0, \infty)} \left\{ \|f - g\|_{C_B} + \delta \|g\|_{C_B^2} \right\}$$

olarak tanımlanır, burada

$$C_B^2[0, \infty) := \{g \in C_B[0, \infty) : g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$$

ve

$$\|g\|_{C_B^2} := \|g\|_{C_B} + \|g'\|_{C_B} + \|g''\|_{C_B}$$

şeklinde olup

$$K(f; \delta) \leq M \left\{ w_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1; \delta) \|f\|_{C_B} \right\} \quad (2.4)$$

her $\delta > 0$ için geçerlidir. M sabit olup f ve δ dan bağımsızdır



3. LAGUERRE POLİNOMLARINI İÇEREN BİR OPERATÖR YARDIMIYLA SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLARA YAKLAŞIM HIZI

$n > -1$ olmak üzere, n . dereceden genelleştirilmiş Laguerre polinomları;

$$L_k^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+n}{k-j} \frac{t^j}{j!}$$

eşitliği ile verilir.

Genelleştirilmiş Laguerre polinomları için doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(n)}(t) x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \exp\left(\frac{-xt}{1-x}\right) \quad (3.1)$$

eşitliği ile tanımlıdır. (3.1) eşitliğinden

$$1 = (1-x)^{n+1} \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(n)}(t) x^k \quad (3.2)$$

olduğu açıktır.

$$m_{n,k}(x, t) := (1-x)^{n+1} \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(n)}(t) x^k \quad (3.3)$$

olsun. Cheney ve Sharma (1964),

$$(P_n f)(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) m_{n,k}(x, t) \quad (3.4)$$

lineer pozitif operatörünü tanımlamışlardır. Ayrıca $m_{n,k}(x, t)$ çekirdeğinin $n = 0$ hali $P(\zeta_1 = k)$ yı vermektedir.

Burada $t \leq 0$ kabul edilen bir parametredir. $t = 0$ özel durumunda (3.4) eşitliği ile tanımlı $(P_n f)(x, t)$ operatörü,

$$(M_n f)(x, t) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \left(\frac{k}{k+n}\right) x^k$$

Meyer-König ve Zeller(1960) operatörüne dönüşür.

Özel fonksiyonları içeren lineer pozitif operatörler son yıllarda oldukça çalışılmakta olup, bu çalışmalardan bahsetmekte fayda vardır (örnek için bakınız Altın vd. 2005, Ozarslan 2007, Tasdelen ve Erencin 2007, Tasdelen vd. 2012, Varma vd. 2012a,b, Varma ve Tasdelen 2012).

Bojanic (1979) ve Bojanic ve Vuilleumier (1981) sırasıyla Fourier serileri ve Fourier Legendre serilerinin sınırlı salımlı fonksiyonlara yaklaşım hızlarını hesaplamışlardır. Cheng (1983a,b) ise, Bernstein ve Szász operatörleri için bu tip iki sonuç elde etmiştir. Bojanic-Vuilleumier ve Cheng'in temel çalışmalarından sonra, metodları birçok çalışmada kullanılmıştır (örnek için bakınız: Zeng 2000, Guo ve Khan 1989, Karsli ve Ibikli 2008, Guo 1989).

Bu bölümde, (3.4) eşitliği ile tanımlı Cheney ve Sharma operatörlerinin noktasal yakınsaklık hızından bahsedilecektir. Özellikle olasılık teorisinin bazı metod ve teknikleri yardımıyla (3.4) eşitliği ile tanımlı $(P_n f)$ operatörünün, $f(x+)$ ve $f(x-)$ nin var olduğu x noktalarında, $[0, 1]$ aralığında tanımlı sınırlı salımlı fonksiyonlara yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Burada $f(x+)$ ve $f(x-)$ sırasıyla sağ ve sol limitleri göstermektedir.

3.1 Bazı Temel Tanımlar ve Lemmalar

Bu kısımda ana teoremimizi ispatlamak için gerekli olan bazı temel tanım ve lemmaları aşağıda verelim.

Tanım 3.1 f , $[a, b]$ üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve $\underline{P}$ de $[a, b]$ aralığının tüm P parçalanmalarının kümesi olsun. f nin $[a, b]$ üzerindeki toplam salınımı

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_{P \in \underline{P}} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

Eğer $\bigvee_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır, denir. $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların sınıfı $BV[a, b]$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 $f : [a, b] \rightarrow R$ Lebesgue ölçülebilir, sınırlı ve $g : [a, b] \rightarrow R$ sağdan sürekli, azalmayan bir fonksiyon ise, Lebesgue–Stieltjes integrali

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

olarak tanımlanır.

Eğer g artmayan ise, Lebesgue–Stieltjes integrali

$$\int_a^b f(x) dg(x) := - \int_a^b f(x) d(-g)(x)$$

olarak da tanımlanır.

Tanım 3.3 X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(x) = \begin{cases} \sum_{\text{Tüm } x} x P(x) & x \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) & x \text{ sürekli} \end{cases}$$

ve varyansı

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var(x) \\ &= E(x - \mu)^2 \\ &= E(x^2) - [E(x)]^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca a geçerli bir sayı olmak üzere $E[(x - a)^r]$ e x rassal değişkeninin a civarındaki r . momentini denir ve

$$E[(x - a)^r] = \begin{cases} \sum_{\text{Tüm } x} (x - a)^r P(x_i) & x \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r P(x_i) & x \text{ sürekli} \end{cases}$$

şeklinde gösterilir.

Lemma 3.1 Her $x \in [0, 1]$ ve $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} (P_n 1)(x, t) &= 1 \\ (P_n s)(x, t) &= x - \frac{tx}{n(1-x)} \\ (P_n s^2)(x, t) &\leq x^2 - \frac{tx^2}{n(1-x)} - \frac{tx}{n(1-x)} + \frac{x}{n} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ve

$$(P_n(s-x)^2)(x, t) \leq \frac{x(1-t)}{n} \quad (3.6)$$

dir.

İspat. (3.5) in ispatı için, Cheney ve Sharma (1964) e bakılabilir. (3.6) nin ispatı için, (3.4) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} (P_n(s-x)^2)(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+n} - x \right)^2 m_{n,k}(x, t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+n} \right)^2 m_{n,k}(x, t) - 2x \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+n} \right) m_{n,k}(x, t) \\ &\quad + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x, t) \end{aligned}$$

bulunur. (3.5) den,

$$\begin{aligned} (P_n(s-x)^2)(x, t) &\leq x^2 - \frac{tx^2}{n(1-x)} - \frac{tx}{n(1-x)} + \frac{x}{n} - 2x \left(x - \frac{tx}{n(1-x)} \right) + x^2 \\ &\leq \frac{x(1-t)}{n} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilirki, bu ispatı tamamlar. ■

Lemma 3.2 : $x \in (0, 1)$ ve $K_{n,k}(x, t, y)$;

$$K_{n,k}(x, t, y) = \begin{cases} \sum_{k \leq ny/(1-y)} m_{n,k}(x, t), & 0 < y < 1 \\ 1, & y = 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

olmak üzere yeterince büyük n 'ler için

- (i) $0 \leq y < x$ için, $K_{n,k}(x, t, y) \leq \frac{x(1-t)}{n(x-y)^2}$
- (ii) $x < z \leq 1$ için, $1 - K_{n,k}(x, t, z) \leq \frac{x(1-t)}{n(z-x)^2}$

dir.

İspat. İlk olarak (i) nin ispatını yapalım. Lemma 3.1 den,

$$(P_n(s-x)^2)(x, t) \leq \frac{x(1-t)}{n}$$

dir. Ayrıca $\frac{k}{n+k} < y < x$ için

$$\frac{|k/(n+k) - x|^2}{(y-x)^2} \geq 1$$

olduğu göz önüne alınırsa, yeterince büyük n 'ler için

$$\begin{aligned} K_{n,k}(x, t, y) &\leq \sum_{k/(n+k) < y} m_{n,k}(x, t) \\ &\leq \sum_{k/(n+k) < y} \frac{|k/(n+k) - x|^2}{(y-x)^2} m_{n,k}(x, t) \\ &\leq \frac{(P_n(s-x)^2)(x, t)}{(y-x)^2} \leq \frac{x(1-t)}{n(y-x)^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu ise (i) nin ispatını tamamlar. Şimdi de (ii) nin ispatını elde edelim. $(P_n 1)(x, t) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x, t) \\ 1 &= \sum_{k \leq ny/(1-y)} m_{n,k}(x, t) + \sum_{k > ny/(1-y)} m_{n,k}(x, t) \\ 1 - \sum_{k \leq ny/(1-y)} m_{n,k}(x, t) &= \sum_{k > ny/(1-y)} m_{n,k}(x, t) \\ 1 - K_{n,k}(x, t, y) &= \sum_{k > ny/(1-y)} m_{n,k}(x, t) \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Diğer taraftan $x < z < \frac{k}{n+k}$ için

$$\frac{|k/(n+k) - x|^2}{(z-x)^2} \geq 1$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 1 - K_{n,k}(x, t, y) &\leq \sum_{k > ny/(1-y)} \frac{|k/(n+k) - x|^2}{(z-x)^2} m_{n,k}(x, t) \\ &\leq \frac{(P_n(s-x)^2)(x, t)}{(z-x)^2} \leq \frac{x(1-t)}{n(z-x)^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu ise (ii) nin ispatını tamamlar. ■

Lemma 3.3 Eğer y dejenere olmayan olasılık dağılımında pozitif değerli rastgele bir değişken ve $E(y^2)$, $E(y^3)$ ve $E(y^4) < \infty$ ise, bu durumda

$$E(y^3) \leq (E(y^2)E(y^4))^{1/2}$$

dir.

Lemma 3.4 $x \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(1-x) \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(0)}(t) x^k = \frac{-x(x+t+1)}{(x-1)^2} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-x) \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(0)}(t) x^k \\ &= \frac{x(t^2x + (x-1)^2(x+1) + t(3x^2 - 2x - 1))}{(x-1)^4} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} k^3(1-x) \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(0)}(t) x^k \\ &= \frac{-x(t^3x^2 + (x-1)^2(x^2 + 4x + 1) + 3t^2x(2x^2 - x + 1))}{(x-1)^6} \\ & \quad + \frac{t(x-1)^2(7x^2 + 10x + 1)}{(x-1)^6} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} k^4(1-x) \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(0)}(t) x^k \\ &= \frac{x(t^4x^3 + 2t^3x^2(5x^2 - 2x - 3) + t^2(x-1)^2x(25x^2 + 40x + 7))}{(x-1)^8} \\ & \quad + \frac{(x-1)^4(x^3 + 11x^2 + 11x + 1) + t(x-1)^3(15x^3 + 55x^2 + 25x + 1)}{(x-1)^8} \end{aligned} \quad (3.10)$$

dir.

İspat. $n = 0$ için, (3.1) eşitliği

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(0)}(t) x^k = \frac{1}{(1-x)} \exp\left(\frac{-xt}{1-x}\right)$$

şekline dönüşür. Her iki tarafın x 'e göre türevi alınırsa;

$$\sum_{k=0}^{\infty} k L_k^{(0)}(t) x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)} \exp\left(\frac{-xt}{1-x}\right) \left[\frac{1-x-t}{(1-x)^2} \right]$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılıp eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(1-x) \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(0)}(t) x^k = \frac{-x(x+t+1)}{(x-1)^2}$$

elde edilir. Bu ise (3.7) eşitliğinin ispatını verir. (3.8)-(3.10) nın ispatı ise benzer şekilde yapılabilir. ■

Lemma 3.5 ζ_1 rastgele değişken

$$P(\zeta_1 = k) = (1-x) \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(0)}(t) x^k$$

ise, bu durumda

$$\begin{aligned} \mu &= E(\zeta_1) \\ \sigma^2 &= E(\zeta_1 - \mu)^2 = \frac{x(tx + x + t - 1)}{(x-1)^3} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$E(\zeta_1 - \mu)^4 = \left\{ \frac{x(3t^2x(1+x)^2 + (x-1)^2(x^2 + 7x + 1) + t(x^4 + 16x^3 - 16x - 1))}{(x-1)^6} \right\} \quad (3.12)$$

ve

$$E(\zeta_1 - \mu)^3 \leq \sqrt{\frac{x^2(tx + x + t - 1)((x-1)^2(x^2 + 7x + 1) + t(x^4 + 16x^3 - 16x - 1))}{(x-1)^9}}$$

dir.

İspat. (3.7) den,

$$\mu = E(\zeta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-x) \exp\left(\frac{xt}{1-x}\right) L_k^{(0)}(t) x^k = \frac{-x(x+t+1)}{(x-1)^2}$$

yazılabilir. (3.7) ve (3.8) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(\zeta_1 - \mu)^2 = E(\zeta_1^2) - 2\mu E(\zeta_1) + \mu^2 \\ &= E(\zeta_1^2) - (E(\zeta_1))^2 = \frac{x(tx + x + t - 1)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

ve (3.7), (3.8) ve (3.10) dikkate alınır

$$\begin{aligned} E(\zeta_1 - \mu)^4 &= E(\zeta_1^4) - 4\mu E(\zeta_1^2) + 6\mu^2 E(\zeta_1^2) - 4\mu^3 E(\zeta_1) + \mu^4 \\ &= \frac{x(3t^2x(1+x)^2 + (x-1)^2(x^2+7x+1) + t(x^4+16x^3-16x) - 1)}{(x-1)^6} \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 3.3 de, yukarıda elde edilen eşitlikler göz önüne alınır

$$\begin{aligned} E(\zeta_1 - \mu)^3 &\leq (E(\zeta_1 - \mu)^2 E(\zeta_1 - \mu)^4)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{x^2(tx+x+t-1)((x-1)^2(x^2+7x+1) + t(x^4+16x^3-16x) - 1)}{(x-1)^9}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.5 in ispatı tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki Lemma olasılık teorisinin klasik merkezi limit teoremi için bilinen Berry-Essen sınıridir. İspatı ve daha fazla bilgi Shirayev (1984), p. 432 de bulunabilir

Lemma 3.6 (Berry-Essen). $\zeta_k, k = 1, 2, \dots$ bağımsız aynı dağılımlı rastgele değişkenler olsun. $E(\zeta_1) = \mu \in R, Var(\zeta_1) = E(\zeta_1 - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty$ ve $E|\zeta_1 - \mu|^3 < \infty$ olmak üzere $n = 1, 2, \dots$ ve tüm t ler için,

$$\left| P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\zeta_k - \mu) \leq t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \right| < C \frac{E(\zeta_1 - \mu)^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

dir. Burada $1/\sqrt{2\pi} \leq C \leq 0.82$ dir. Bu lemmannın ispatı için Shirayev (1984) e bakılabilir.

Lemma 3.7 Her $x \in (0, 1)$ için,

$$\left| \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - \frac{1}{2} \right| \leq C \frac{1}{\sqrt{n}} A(x, t)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \left(\frac{3t^2x(1+x)^2 + (x-1)^2(x^2+7x+1)}{x(tx+x+t-1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t(x^4+16x^3-16x-1)}{x(tx+x+t-1)^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.6 den

$$\left| \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - \frac{1}{2} \right| \leq C \frac{E(\zeta_1 - \mu)^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

yazılabilir, burada Lemma 3.3 ve Lemma 3.5 dikkate alınır

$$\begin{aligned} \left| \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - \frac{1}{2} \right| &\leq C \frac{(E(\zeta_1 - \mu)^2 E(\zeta_1 - \mu)^4)^{1/2}}{\sigma^3 \sqrt{n}} \\ &= C \frac{(\sigma^2 E(\zeta_1 - \mu)^4)^{1/2}}{\sigma^3 \sqrt{n}} \\ &= C \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{E(\zeta_1 - \mu)^4}{\sigma^4 \sqrt{n}} \right)^{1/2} \\ &\leq C \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{3t^2 x(1+x)^2 + (x-1)^2(x^2 + 7x + 1)}{x(tx + x + t - 1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t(x^4 + 16x^3 - 16x - 1)}{x(tx + x + t - 1)^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 3.8 Her $x \in (0, 1)$ için

$$\text{sgn}(s - x) = \begin{cases} 1, & s > x \\ 0, & s = x \\ -1, & s < x \end{cases}$$

olmak üzere

$$(P_n \text{sgn}(s - x))(x, t) = 2 \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - 1 + \varepsilon_n(x) m_{n,k'}(x, t)$$

dir. Burada

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{k'}{(n+k')} \quad k' \in \mathbb{N} \\ 0, & x \neq \frac{k'}{(n+k')} \quad k' \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. P_n operatörü $\text{sgn}(s - x)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$(P_n \text{sgn}(s - x))(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{sgn} \left(\frac{k}{k+n} - x \right) m_{n,k}(x, t)$$

$$= \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) + \sum_{k < nx/(1-x)} (-1)m_{n,k}(x, t)$$

olur.

$$(P_n 1)(x, t) = \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) + \sum_{k < nx/(1-x)} m_{n,k}(x, t) + \varepsilon_n(x)m_{n,k'}(x, t)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (P_n sgn(s-x))(x, t) &= \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - [1 - \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) \\ &\quad - \varepsilon_n(x)m_{n,k'}(x, t)] \\ &= 2 \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - 1 + \varepsilon_n(x)m_{n,k'}(x, t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Lemma 3.9 Her $x \in (0, 1)$ için,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x+) - f(x-)}{2} (P_n sgn(s-x))(x, t) + \left[f(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] (P_n \delta)(x, t) \right| \\ &\leq \frac{C^*}{\sqrt{n}} A(x, t) \{ |f(x+) - f(x-)| + \varepsilon_n(x) |f(x) - f(x-)| \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

dir. Burada $\delta_x(s)$

$$\delta_x(s) = \begin{cases} 1, & x = s \\ 0, & x \neq s \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlı Dirac Delta fonksiyonu olup, C^* belirli bir sabittir.

İspat. $\delta_x(s) = \delta(s-x)$ olup $\delta_x(s)$ ye P_n operatörü uygulanırsa

$$P_n(\delta_x(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(\frac{k}{k+n} - x\right) m_{n,k}(x, t)$$

olur. $\frac{k}{k+n} = x$ için $\delta_x(s)$ nin tanımından

$$(P_n \delta)(x, t) = \varepsilon_n(x)m_{n,k'}(x, t)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x+) - f(x-)}{2} (P_n \operatorname{sgn}(s-x))(x, t) + \left[f(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] (P_n \delta)(x, t) \right| \\
& \leq \left| \frac{f(x+) - f(x-)}{2} (P_n \operatorname{sgn}(s-x))(x, t) \right| + \left| \left[f(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] (P_n \delta)(x, t) \right| \\
& \leq \left| \frac{f(x+) - f(x-)}{2} \left[2 \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - 1 + \varepsilon_n(x) m_{n,k'}(x, t) \right] \right| \\
& \quad + \left| \left[f(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] \varepsilon_n(x) m_{n,k'}(x, t) \right| \\
& = \left| (f(x+) - f(x-)) \left(\sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon_n(x) m_{n,k'}(x, t) \right) \right| \\
& \quad + \left| \left[f(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] \varepsilon_n(x) m_{n,k'}(x, t) \right| \\
& \leq |f(x+) - f(x-)| \left| \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - \frac{1}{2} \right| + |f(x) - f(x-)| \varepsilon_n(x) m_{n,k'}(x, t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.7 ye göre,

$$\left| \sum_{nx/(1-x) < k} m_{n,k}(x, t) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} A(x, t) \quad (3.14)$$

dir. Lemma 3.7 nin ispatında kullanılan metoda ve Guo (1989) daki çalışmaya benzer şekilde işlemler yapılırsa,

$$m_{n,k'}(x, t) =: \frac{C_1}{\sqrt{n}} A(x, t) \quad (3.15)$$

elde edilir. Burada $C^* = \max \{C, C_1\}$ olup (3.14) ve (3.15) den (3.13) eşitsizliği elde edilir, bu ise ispatı tamamlar. ■

Lemma 3.10 Yeterince büyük n ler için

$$|(P_n g_x)(x, t)| \leq \frac{3(1-t)}{nx(1-x)} \left\{ \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{(1-x)}{\sqrt{k}}} (g_x) \right\}$$

olup, burada

$$g_x(s) = \begin{cases} f(s) - f(x+), & x < s \leq 1 \\ 0, & s = x \\ f(s) - f(x-), & 0 \leq s < x \end{cases}$$

dir.

İspat. Lebesgue-Stieltjes integralinden

$$(P_n f)(x, t) = \int_0^1 f(y) d_y K_{n,k}(x, t, y) \quad (3.16)$$

yazılabilir. (3.16) den $(P_n g_x)(x, t)$ yi aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\begin{aligned} |(P_n g_x)(x, t)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_x \left(\frac{k}{k+n} \right) m_{n,k}(x, t) \right| \\ &= \left| \int_0^1 g_x(y) d_y K_{n,k}(x, t, y) \right|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.17) yi aşağıdaki gibi üç kısma ayıralım.

$$\int_0^1 g_x(y) d_y K_{n,k}(x, t, y) = (I_1 g_x)(x, t) + (I_2 g_x)(x, t) + (I_3 g_x)(x, t). \quad (3.18)$$

Burada,

$$\begin{aligned} (I_1 g_x)(x, t) &= \int_0^{x-x/\sqrt{n}} g_x(y) d_y K_{n,k}(x, t, y) \\ (I_2 g_x)(x, t) &= \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+(1-x)/\sqrt{n}} g_x(y) d_y K_{n,k}(x, t, y) \\ (I_3 g_x)(x, t) &= \int_{x+(1-x)/\sqrt{n}}^1 g_x(y) d_y K_{n,k}(x, t, y) \end{aligned}$$

dir. $(I_1 g_x)(x, t)$, $(I_2 g_x)(x, t)$ ve $(I_3 g_x)(x, t)$ yi ayrı ayrı hesaplayalım.

İlk olarak $y \in [x - x/\sqrt{n}, x + (1 - x)/\sqrt{n}]$ için $(I_2 g_x)(x, t)$ yi hesaplayalım.

Burada $g_x(x) = 0$ ve $\left| \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+(1-x)/\sqrt{n}} d_y K_{n,k}(x, t, y) \right| \leq 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} |(I_2 g_x)(x, t)| &= \left| \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+(1-x)/\sqrt{n}} (g_x(y) - g_x(x)) d_y K_{n,k}(x, t, y) \right| \\ &\leq \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+(1-x)/\sqrt{n}} |g_x(y) - g_x(x)| |d_y K_{n,k}(x, t, y)| \\ &\leq \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^{x+(1-x)/\sqrt{n}} (g_x) \leq \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x) \end{aligned} \quad (3.19)$$

olur. İkinci olarak $(I_1 g_x)(x, t)$ yi hesaplayalım. Kısmi Lebesgue-Stieltjes integrasyonunu kullanırsak,

$$\begin{aligned} (I_1 g_x)(x, t) &= \int_0^{x-x/\sqrt{n}} g_x(y) d_y K_{n,k}(x, t, y) \\ &= g_x(x - x/\sqrt{n}) K_{n,k}(x, t, x - x/\sqrt{n}) - g_x(0) K_{n,k}(x, t, 0) \\ &\quad - \int_0^{x-x/\sqrt{n}} K_{n,k}(x, t, y) d_y g_x(y) \end{aligned}$$

elde ederiz. $|g_x(x - x/\sqrt{n})| = |g_x(x - x/\sqrt{n}) - g_x(x)| \leq \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^x (g_x)$ olduğundan

$$|(I_1 g_x)(x, t)| \leq \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^x (g_x) K_{n,k}(x, t, x - x/\sqrt{n}) + \int_0^{x-x/\sqrt{n}} K_{n,k}(x, t, y) d_y \left(-\bigvee_y^x (g_x) \right)$$

elde edilir. Lemma 3.2 nin (i) şikkından

$$K_{n,k}(x, t, x - x/\sqrt{n}) \leq \frac{x(1-t)}{n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^2}$$

olup, bu değer yukarıdaki eşitlikte yerine yazılır ve Lemma 3.2 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |(I_1 g_x)(x, t)| &\leq \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^x (g_x) \frac{x(1-t)}{n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^2} + \int_0^{x-x/\sqrt{n}} \frac{x(1-t)}{n(x-y)^2} d_y \left(-\bigvee_y^x (g_x) \right) \\ &= \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^x (g_x) \frac{x(1-t)}{n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^2} + \frac{x(1-t)}{n} \int_0^{x-x/\sqrt{n}} \frac{1}{(x-y)^2} d_y \left(-\bigvee_y^x (g_x) \right) \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki integrale $u = \frac{1}{(x-y)^2}$, $dv = d_y \left(-\bigvee_y^x (g_x) \right)$ diyerek kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{x-x/\sqrt{n}} \frac{1}{(x-y)^2} d_y \left(-\bigvee_y^x (g_x) \right) &= -\frac{1}{(x-y)^2} \bigvee_y^x (g_x) \Big|_0^{x-x/\sqrt{n}} + \int_0^{x-x/\sqrt{n}} \frac{2}{(x-y)^3} \bigvee_y^x (g_x) dy \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^2} \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^x (g_x) + \frac{1}{x^2} \bigvee_0^x (g_x) + \int_0^{x-x/\sqrt{n}} \frac{2}{(x-y)^3} \bigvee_y^x (g_x) dy \end{aligned}$$

ve son integralde $y = x - x/\sqrt{u}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_0^{x-x/\sqrt{n}} \frac{2}{(x-y)^3} \bigvee_y^x(g_x) dy = \frac{1}{x^2} \int_1^n \bigvee_{x-x/\sqrt{u}}^x(g_x) du = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} |(I_1 g_x)(x, t)| &\leq \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^x(g_x) \frac{x(1-t)}{n \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &\quad + \frac{x(1-t)}{n} \left\{ -\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2} \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^x(g_x) + \frac{1}{x^2} \bigvee_0^x(g_x) + \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \right\} \\ &= \frac{x(1-t)}{n} \left\{ \frac{1}{x^2} \bigvee_0^x(g_x) + \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \right\} \\ &\leq \frac{(1-t)}{nx} \left\{ \bigvee_0^1(g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$(I_1 g_x)(x, t)$ hesaplanmış olur.

Aynı metod ve işlemler $|(I_3 g_x)(x, t)|$ içinde yapılırsa,

$$\begin{aligned} |(I_3 g_x)(x, t)| &\leq \frac{(1-t)}{n(1-x)} \left\{ \bigvee_x^1(g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_x^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x) \right\} \\ &= \frac{(1-t)}{n(1-x)} \left\{ \bigvee_0^1(g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x) \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir.

(3.19)-(3.21) eşitsizlikleri, (3.18) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} |(P_n g_x)(x, t)| &\leq |(I_1 g_x)(x, t)| + |(I_2 g_x)(x, t)| + |(I_3 g_x)(x, t)| \\ &\leq \frac{(1-t)}{nx} \left\{ \bigvee_0^1(g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}}(g_x) \\ &\quad + \frac{(1-t)}{n(1-x)} \left\{ \bigvee_0^1(g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x(g_x) \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

eşitsizliği elde edilir. $x \in (0, 1)$ için

$$\frac{1-t}{nx} + \frac{1-t}{n(1-x)} = \frac{1-t}{nx(1-x)}$$

ve

$$\bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x (g_x) \leq \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x)$$

dir. Böylece (3.22) dan,

$$\begin{aligned} |(P_n g_x)(x, t)| &\leq \left(\frac{1-t}{nx} + \frac{1-t}{n(1-x)} \right) \left\{ \bigvee_0^1 (g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x) \\ &= \frac{1-t}{nx(1-x)} \left\{ \bigvee_0^1 (g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x) \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\bigvee_0^1 (g_x) \leq \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x)$$

olup (3.23) den,

$$|(P_n g_x)(x, t)| \leq \frac{2(1-t)}{nx(1-x)} \left\{ \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x) \right\} + \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x)$$

yazılır. Burada $n > 1$ ve $x \in (0, 1)$ için $\frac{1}{n-1} \leq \frac{1-t}{nx(1-x)}$ dir.

Sonuç olarak

$$|(P_n g_x)(x, t)| \leq \frac{3(1-t)}{nx(1-x)} \left\{ \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+(1-x)/\sqrt{k}} (g_x) \right\}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu ispatlanmak istenen eşitsizliktir. ■

Yukarıda verilen tanım ve lemmaların ışığı altında aşağıda verilen teoremi ispat edelim.

Teorem 3.1 f , $[0, 1]$ de tanımlı sınırlı salınımlı bir fonksiyon ($f \in BV[0, 1]$) olmak üzere, her $x \in (0, 1)$ ve yeterince büyük n ' ler için

$$\left| (P_n f)(x, t) - \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \right| \leq \frac{3(1-t)}{nx(1-x)} \left\{ \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{(1-x)}{\sqrt{k}}} (g_x) \right\} \\ + \frac{C^*}{\sqrt{n}} A(x, t) \{ |f(x+) - f(x-)| + \varepsilon_n(x) |f(x) - f(x-)| \}$$

dir. Burada

$$A(x, t) = \sqrt{\frac{3t^2x(1+x)^2 + (x-1)^2(x^2+7x+1) + t(x^4+16x^3-16x-1)}{x(tx+x+t-1)^2}}$$

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} 1 & , x = \frac{k'}{(n+k')} \quad k' \in N \\ 0 & , x \neq \frac{k'}{(n+k')} \quad k' \in N \end{cases}$$

olup, C^* belirli bir sabit, $\bigvee_a^b (g_x)$; $[a, b]$ de g_x in total salınımdır.

İspat. Herhangi bir $f \in BV[0, 1]$ ve yeterince büyük n ler için f fonksiyonunu $[0, 1]$ aralığında aşağıdaki gibi dört parçaya ayırabiliriz.

$$f(s) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) + g_x(s) + \frac{f(x+) - f(x-)}{2} \operatorname{sgn}(s-x) \\ + \delta_x(s) \left[f(x) - \frac{f(x+) - f(x-)}{2} \right] \quad (3.24)$$

Eğer P_n operatörü (3.24) in her iki tarafına uygulanırsa,

$$(P_n f)(x, t) = \left[\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \right] (P_n 1)(x, t) + (P_n g)(x, t) \\ + \frac{f(x+) - f(x-)}{2} (P_n \operatorname{sgn}(s-x))(x, t) \\ + \left[f(x) - \frac{1}{2}(f(x+) - f(x-)) \right] (P_n \delta_x)(x, t)$$

elde edilir. Eşitliği düzenleyip her iki tarafın mutlak değerini alırsak,

$$\left| (P_n f)(x, t) - \left[\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \right] \right| \\ \leq |(P_n g)(x, t)| + \left| \frac{f(x+) - f(x-)}{2} (P_n \operatorname{sgn}(s-x))(x, t) \right| \\ + \left| \left[f(x) - \frac{1}{2}(f(x+) - f(x-)) \right] (P_n \delta_x)(x, t) \right|$$

bulunur. Buradan Lemma 3.9 ve Lemma 3.10 göz önüne alınırsa istenen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■



4. BRENKE POLİNOMLARINI İÇEREN SZASZ OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEMESİ

Jakimovski ve Leviatan (1969) Appell polinomlar yardımıyla Szasz operatörlerinin bir genellemesini elde etmişlerdir. $g(z) = \sum a_k z^k$ ($a_0 \neq 0$), $|z| < R$, ($R > 1$) diskinde bir analitik fonksiyon olsun ve kabul edelim ki $g(1) \neq 0$ olsun. $p_k(x)$ Apell polinomlar için doğurucu fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$g(t) e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k \quad (4.1)$$

$x \in [0, \infty]$ için $p_k(x) \geq 0$ olmak üzere, Jakimovski ve Leviatan (1969)

$$P_n(f; x) := \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4.2)$$

operatörünü tanımlamıştır.

(4.1) de $g(t) = 1$ alınırsa ve e^{tx} in seri açılımı yerine yazılırsa karşılıklı katsayıların eşitliğinden $p_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ elde edilir. Bu durumda (4.2) ile verilen operatör Szasz operatörüne dönüşür.

Ismail (1974) Sheffer polinomları yardımıyla (1.1) ve (4.2) ile verilen operatörlerin başka bir genellemesini elde etmiştir. a_k ve h_k reel sayılar olmak üzere $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ($a_0 \neq 0$) ve $H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k z^k$ ($h_1 \neq 0$) $|z| < R$, ($R > 1$) diskinde analitik fonksiyonlar olsun. $p_k(x)$ Sheffer polinomları için doğurucu fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$(i) \quad x \in [0, \infty) \text{ için } p_k(x) \geq 0, \quad (4.3)$$

$$(ii) A(1) \neq 0 \text{ ve } H'(1) = 1,$$

olmak üzere

$$A(t) e^{xH(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k, \quad |t| < 1 \quad (4.4)$$

şeklindedir. Ismail (1974) de

$$T_n(f; x) := \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.5)$$

operatörünü tanımlamıştır ve operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Bu operatör aşağıdaki özel durumlarda daha önce bilinen operatörlere dönüşmektedir.

Durum 1: (4.4) ile verilen doğurucu fonksiyonda $H(t) = t$ alınrsa (4.1) ile verilen Appell polinomlarının doğurucu fonksiyonu elde edilir. (4.5) operatörü de (4.2) ile verilen operatöre dönüşür.

Durum 2: $H(t) = t$ ve $A(t) = 1$ alınrsa (4.5) operatörü (1.1) ile verilen Szasz operatörüne dönüşür.

Bu bölümde, Brenke tipli polinomlar yardımıyla lineer pozitif operatörler tanımlanmıştır. Brenke tipli polinomları Chihara 1978 için doğurucu fonksiyon

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k, \quad (4.6)$$

olup, burada A ve B aşağıdaki şekilde tanımlanan analitik fonksiyonlar

$$A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r, \quad a_0 \neq 0 \quad (4.7)$$

$$B(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r, \quad b_r \neq 0 \quad (r \geq 0) \quad (4.8)$$

ve

$$p_k(x) = \sum_{r=0}^k a_{k-r} b_r x^r, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

ve de

- (i) $A(1) \neq 0, \quad \frac{a_{k-r} b_r}{A(1)} \geq 0, \quad 0 \leq r \leq k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) $B : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty),$
- (iii) (4.6), (4.7) ve (4.8) serileri $|t| < R, \quad (R > 1)$ için yakınsaktır.

dir. Yukarıda verilen koşullar altında Brenke tipli polinomları içeren lineer pozitif operatörler

$$L_n(f; x) := \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır, burada $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ dir. Aşağıdaki özel durumlarda (4.11) ile verilen lineer pozitif operatörün hangi operatörleri içerdiğini görelim.

Durum 1: $B(t) = e^t$ alınrsa (4.6) ile verilen eşitlik (4.1) e, (4.11) ile verilen operatör ise (4.2) ile verilen operatöre karşılık gelir.

Durum 2: $B(t) = e^t$ ve $A(t) = 1$ alınrsa Szasz operatörü tekrar elde edilir.

4.1 L_n Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Lemma 4.1 $\forall x \in [0, \infty)$ için

$$L_n(1; x) = 1 \quad (4.12)$$

$$L_n(s; x) = \frac{B'(nx)}{B(nx)}x + \frac{A'(1)}{nA(1)} \quad (4.13)$$

$$L_n(s^2; x) = \frac{B''(nx)}{B(nx)}x^2 + \frac{B'(nx)[2A'(1) + A(1)]}{nA(1)B(nx)}x + \frac{1}{n^2A(1)}\{A''(1) + A'(1)\} \quad (4.14)$$

dir.

İspat. (4.6) de verilen Brenke tipli polinomların doğurucu fonksiyonunda $t = 1$

alınır ve her iki taraf $\frac{1}{A(1)B(nx)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) = 1$$

elde edilir. Bu durum operatörde dikkate alınrsa (4.12) eşitliği elde edilir.

(4.6) ile verilen eşitlikte n yerine nx alınır her iki tarafının t ye göre türevi alınır ve her iki taraf t ile çarpılırsa

$$tA'(t)B(nxt) + nxA(t)B'(nxt) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k(nx)t^k \quad (4.15)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $t = 1$ alınır ve her iki taraf $\frac{1}{nA(1)B(nx)}$ ile çarpılır ve bu durum operatörde dikkate alınrsa (4.13) eşitliği elde edilir.

(4.15) de verilen eşitliğin her iki tarafının t ye göre türevi alınır ve her iki taraf t ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & t^2 n^2 x^2 A(1) B''(nxt) + nx B'(nxt) \{2t^2 A'(t) + tA(t)\} \\ & + B(nxt) \{t^2 A''(1) + tA'(1)\} \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(nx) t^k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $t = 1$ alınır ve her iki taraf $\frac{1}{n^2 A(1) B(nx)}$ ile çarpılır ve bu durum operatörde dikkate alınırsa (4.14) eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

■

Teorem 4.1 Eğer $f \in C[0, \infty) \cap E$ ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B'(y)}{B(y)} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B''(y)}{B(y)} = 1 \quad (4.16)$$

ise o taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x)$$

dir. Yani L_n operatörleri $[0, \infty)$ un her kompakt alt kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Burada

$$E := \{f : \forall x \in [0, \infty), |f(x)| \leq ce^{Ax} \quad A \in \mathbb{R} \text{ ve } c \in \mathbb{R}^+\}$$

dir.

İspat. (4.12), (4.13) ve (4.14) eşitliklerinin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(1; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= x^0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(s; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B'(nx)}{B(nx)} x + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A'(1)}{nA(1)} \\ &= x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(s^2; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B'(nx) [2A'(1) + A(1)]}{nA(1) B(nx)} x \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 A(1)} \{A''(1) + A'(1)\} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(s^i; x) = x^i \quad i = 0, 1, 2$$

yazılabilir.

Yukarıdaki yakınsama $[0, \infty)$ un her kompakt alt kümesinde düzgündür. Korovkin teoreminden istenilen elde edilir. ■

Lemma 4.2 (Gavrea and Rasa 1993) $g \in C^2[0, \infty)$ ve $(P_n)_{n \geq 0}$, $P_n(1; x) = 1$ özelliğini sağlayan lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$|P_n(g; x) - g(x)| \leq \|g'\| \sqrt{P_n((s-x)^2; x)} + \frac{1}{2} \|g''\| P_n((s-x)^2; x) \quad (4.17)$$

dir.

Lemma 4.3 (Zhuk 1989) $f \in C[a, b]$, $h \in (0, \frac{b-a}{2})$ ve f_h , f fonksiyonuna bağlı olan ikinci dereceden Steklov fonksiyonu ise bu durumda

$$\begin{aligned} (i) \quad \|f_h - f\| &\leq \frac{3}{4} w_2(f; h) \\ (ii) \quad \|f_h''\| &\leq \frac{3}{2h^2} w_2(f; h) \end{aligned} \quad (4.18)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 4.4 $x \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} L_n((s-x)^2; x) &= \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 \\ &+ \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)B'(nx)}{nA(1)B(nx)} \right\} x \\ &+ \frac{1}{n^2 A(1)} \{A''(1) + A'(1)\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

dir.

İspat. L_n operatörünün lineerlik özelliğinden,

$$L_n((s-x)^2; x) = L_n(s^2; x) - 2xL_n(s; x) + x^2L_n(1; x)$$

elde edilir. Lemma 4.1 den ispat tamamlanır. ■

L_nf operatörünün f fonksiyonuna yakınsama hızını aşağıdaki teoremlerde verelim.

Teorem 4.2 $f \in C[0, \infty) \cap E$ olsun.

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2w\left(f; \sqrt{\lambda_n(x)}\right)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) &= L_n((s-x)^2; x) = \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 \\ &+ \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)B'(nx)}{nA(1)B(nx)} \right\} x \\ &+ \frac{1}{n^2A(1)} \{A''(1) + A'(1)\}. \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. (4.12) den

$$|L_n(f; x) - f(x)| = |L_n(f; x) - f(x)L_n(1; x)|$$

yazılır. L_n lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &= |L_n(f; x) - f(x)L_n(1; x)| \\ &= |L_n(f(s) - f(x); x)| \end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) den

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \\ &= \frac{1}{A(1)B(nx)} \left| \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \end{aligned}$$

bulunur, süreklilik modülünün özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) w\left(f; \left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \\
&= \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) w\left(f; \left|\frac{k}{n} - x\right| \frac{\delta}{\delta}\right) \\
&\leq \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left(1 + \left|\frac{k}{n} - x\right| \frac{1}{\delta}\right) w(f; \delta) \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \\ &+ \frac{1}{A(1)B(nx)} \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left|\frac{k}{n} - x\right| \end{aligned} \right\} w(f; \delta) \\
&= \left\{ \begin{aligned} &1 \\ &+ \frac{1}{A(1)B(nx)} \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left|\frac{k}{n} - x\right| \end{aligned} \right\} w(f; \delta) \quad (4.20)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Cauch-Schwarz eşitsizliği ve (4.6) den

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left|\frac{k}{n} - x\right| &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k^2(nx)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k}{n} - x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k}{n} - x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{A(1)B(nx)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left|\frac{k}{n} - x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A(1)B(nx)}{A(1)B(nx)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= A(1)B(nx) \left\{ \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left|\frac{k}{n} - x\right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= A(1)B(nx) \{L_n((s-x)^2; x)\}^{\frac{1}{2}} \\
&= A(1)B(nx) \sqrt{\lambda_n(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan (4.20) da dikkate alınırsa,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \left\{1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\lambda_n(x)}\right\} w(f; \delta) \quad (4.21)$$

bulunur, $\delta = \sqrt{\lambda_n(x)}$ seçilirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.3 $f \in C[0, a]$ için

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{2}{a} \|f\| h^2 + \frac{3}{4} (a + 2 + h^2) w_2(f; h)$$

dır. Burada

$$h := h_n(x) = \sqrt[4]{L_n((s-x)^2; x)}$$

$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ve $w_2(f; h)$ (2.3) de tanımlandığı gibidir.

İspat. f_h f fonksiyonuna bağlı olan ikinci dereceden Steklov fonksiyonu olsun.

(4.12) den

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq |L_n(f - f_h; x)| + |L_n(f_h; x) - f_h(x)| \\ &\quad + |f_h(x) - f(x)| \\ &\leq 2 \|f_h - f\| + |L_n(f_h; x) - f_h(x)| \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. $f_h \in C^2[0, a]$ ve Lemma 4.2 den

$$|L_n(f_h; x) - f_h(x)| \leq \|f_h'\| \sqrt{L_n((s-x)^2; x)} + \frac{1}{2} \|f_h''\| L_n((s-x)^2; x) \quad (4.23)$$

bulunur. Landau eşitsizliğinde Lemma 4.3 gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|f_h'\| &\leq \frac{2}{a} \|f_h\| + \frac{a}{2} \|f_h''\| \\ &\leq \frac{2}{a} \|f\| + \frac{3a}{4} \frac{1}{h^2} w_2(f; h) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$h = \sqrt[4]{L_n((s-x)^2; x)}$ olmak üzere (4.23) de bu son eşitsizlik ve Lemma 4.3 dikkate alınırsa

$$|L_n(f_h; x) - f_h(x)| \leq \frac{2}{a} \|f\| h^2 + \frac{3a}{4} w_2(f; h) + \frac{3}{4} h^2 w_2(f; h) \quad (4.24)$$

elde edilir.

(4.22) de (4.24) yerine konulur ve Lemma 4.3 ün (i) şıkkı dikkate alınırsa teoremin ispatı elde edilir. ■

Uyarı 4.1 Teorem 4.3 ün ispatı $h \in (0, \frac{a}{2})$ için verilmiştir. $B(t) = e^t$, $A(t) = 1$ ve $x = 0$ durumları için $h := h_n(x) = \sqrt[4]{L_n((s-x)^2; x)}$ eşitliğinden $h = 0$ olduğu görülür. Bu durumda Teorem 4.3 deki eşitsizlik $h = 0$ olduğunda da sağlanır.

Teorem 4.4 $f \in C_B^2[0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \gamma \|f\|_{C_B^2}$$

dir. Burada

$$\gamma := \gamma_n(x) = \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{(B'(nx) - B(nx))(nA(1) + 2A'(1)) + A(1)B'(nx)}{nA(1)B(nx)} x + \frac{1}{n^2A(1)} \{A''(1) + (n+1)A'(1)\} \right]$$

şeklindedir.

İspat. f in Taylor açılımı, L_n operatörlerin lineerlik özelliği ve (4.12) dikkate alınırsa

$$L_n(f; x) - f(x) = f'(x) L_n(s-x; x) + \frac{1}{2} f''(\eta) L_n((s-x)^2; x) \quad (4.25)$$

elde edilir ve $\eta \in (x, s)$ dir.

$$L_n(s-x; x) = \frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} x + \frac{A'(1)}{nA(1)} \geq 0$$

ve $x \leq s$ için Lemma 4.1 de (4.13) eşitliği ve Lemma 4.4 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \left[\frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} x + \frac{A'(1)}{nA(1)} \right] \|f'\|_{C_B} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{A(1)B'(nx) + 2A'(1)[B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)} x + \frac{A''(1) + A'(1)}{n^2A(1)} \right] \|f''\|_{C_B} \\ &\leq \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{(B'(nx) - B(nx))(nA(1) + 2A'(1)) + A(1)B'(nx)}{nA(1)B(nx)} x + \frac{1}{n^2A(1)} \{A''(1) + (n+1)A'(1)\} \right] \|f\|_{C_B^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.5 $f \in C_B [0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2M \left\{ w_2 \left(f; \sqrt{\delta} \right) + \min(1, \delta) \right\} \|f\|_{C_B}$$

dir. Burada

$$\delta := \delta_n(x) = \frac{1}{2} \gamma_n(x)$$

ve $M > 0$ olup δ ve f den bağımsız bir sabittir. Burada $\gamma_n(x)$ Teorem 4.4 deki gibidir.

İspat. $g \in C_B^2 [0, \infty)$ olsun. Teorem 4.4 den

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq |L_n(f - g; x)| + |L_n(g; x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &\leq 2 \|f - g\|_{C_B} + \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(B'(nx) - B(nx))(nA(1) + 2A'(1)) + A(1)B'(nx)}{nA(1)B(nx)} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2 A(1)} \{A''(1) + (n+1)A'(1)\} \right] \|g\|_{C_B^2} \\ &= 2 \left[\|f - g\|_{C_B} + \delta \|g\|_{C_B^2} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) eşitsizliğinin sol tarafı $g \in C_B^2 [0, \infty)$ fonksiyonuna bağlı değildir, bu nedenle

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2K(f; \delta) \quad (4.27)$$

dir. Bu eşitsizlikte (2.4) eşitsizliği dikkate alınır

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2M \left\{ w_2 \left(f; \sqrt{\delta} \right) + \min(1, \delta) \right\} \|f\|_{C_B}$$

elde edilir. ■

Uyarı 4.2 (4.16) varsayımı altında Teorem 4.2-4.5 de $n \rightarrow \infty$ iken λ , h , γ ve δ sifıra yakınsar.

4.2 Örnek

$$e^{ht^{d+1}} \exp(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{d+1}(x, h) \frac{t^k}{k!} \quad (4.28)$$

Gould-Hopper polinomları için doğurucu fonksiyon

$$g_k^{d+1}(x, h) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{d+1}\right]} \frac{k!}{s! (k - (d+1)s)!} h^s x^{k-(d+1)s} \quad (4.29)$$

formundadır. Burada $[\cdot]$ tamsayı kısmını gösterir. $g_k^{d+1}(x, h)$ Gould-Hopper polinomları Hermite tipi Douak 1996 d-ortagonal polinomlardır. d-ortagonal kavramı Van Iseghem (1987) ve Maroni (1989) tarafından açıklanmıştır.

$A(t) = e^{ht^{d+1}}$ ve $B(t) = e^t$ olmak üzere (4.28) den Gould-Hopper polinomlarının Brenke tipli polinomlar olduğu açıktır. $h \geq 0$ ise (4.10) ve (4.16) koşulları ile (4.11) ile verilen L_n operatörü için sağlanır. O halde L_n operatörünün Gould-Hopper polinomlarını içeren açık formu

$$L_n^*(f; x) = e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4.30)$$

şeklinde dir. $h = 0$ için $g_k^{d+1}(nx, 0) = (nx)^k$ olup bu durumda (4.30) operatörleri bilinen Szasz operatörüne dönüşür.

5. BRENKE POLİNOMLARINI İÇEREN SZASZ TIPLİ OPERATÖRLERİN KANTROVİCH TIPLİ GENELLEMESİ

Bu bölümde (4.11) de verilen operatörlerin bir Kantorovich tipi ve bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

(4.10) varsayımları altında (4.11) operatörlerinin Kantorovich versiyonu

$$K_n(f; x) := \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır, burada $x \geq 0$ ve $f \in [0, \infty)$ dır. (5.1) ile tanımlanan K_n operatörünün lineer ve pozitif olduğu açıktır.

(4.6) eşitliğinde $B(t) = e^t$, $A(t) = 1$ alınır ve e^{xt} nin seri açılımı yerine yazılır ve t^k nin karşılıklı katsayıları eşitlenirse, $p_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ olarak elde edilir. Bu durumda (5.1) operatörü

$$K_n(f; x) := ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \quad (5.2)$$

şeklindeki Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörüne dönüşür (Butzer 1954).

(5.1) de $B(t) = e^t$ alınırsa Jakimovski ve Leviatan(1969) tarafından verilen (4.2) operatörünün Kantorovich modeli elde edilir.

5.1 K_n Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Lemma 5.1 $\forall x \in [0, \infty)$ için

$$K_n(1; x) = 1 \quad (5.3)$$

$$K_n(s; x) = \frac{B'(nx)}{B(nx)}x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \quad (5.4)$$

$$K_n(s^2; x) = \frac{B''(nx)}{B(nx)}x^2 + \frac{2B'(nx)[A'(1) + A(1)]}{nA(1)B(nx)}x + \frac{1}{n^2A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\} \quad (5.5)$$

dir.

İspat. (4.6) de verilen Brenke tipli polinomların doğurucu fonksiyonunda x yerine nx , $t = 1$ alınır ve her iki taraf $\frac{1}{A(1)B(nx)}$ ile çarpılırsa

$$A(t) B(nxt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) t^k \quad (5.6)$$

$$A(1) B(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \quad (5.7)$$

$$1 = \frac{1}{A(1) B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \quad (5.8)$$

elde edilir. Bu durum operatörde dikkate alınırsa (5.3) eşitliği bulunur.

(5.6) ile verilen eşitliğin her iki tarafının t ye göre türevi alınır

$$A'(t) B(nxt) + nx A(t) B'(nxt) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(nx) t^{k-1} \quad (5.9)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte sırasıyla $t = 1$ alınır, eşitliğin her iki tarafı 2 ile çarpıldıktan sonra (5.7) eşitliği ile taraf tarafa toplanıp her iki taraf $\frac{1}{2nA(1)B(nx)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{B'(nx)}{B(nx)} x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} = \frac{1}{2nA(1) B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) p_k(nx)$$

elde edilir. Bu durum operatörde dikkate alınırsa (5.4) eşitliği elde edilir.

(5.9) ile verilen eşitliğin her iki tarafı t ile çarpıldıktan sonra t ye göre türev alınır,

elde edilen eşitliğin her iki tarafı 3 ile çarpılıp (5.6) eşitliği ile taraf tarafa toplanır,

$t = 1$ alınıp eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{3n^2A(1)B(nx)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{2B'(nx) [A'(1) + A(1)]}{nA(1) B(nx)} x + \frac{1}{n^2A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{3n^2A(1) B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} (3k^2 + 3k + 1) p_k(nx) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum operatörde dikkate alınırsa (5.5) eşitliği elde edilir. ■

Lemma 5.2 $x \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} K_n((s-x)^2; x) &= \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 \\ &+ \left\{ \frac{2A'(1) [B'(nx) - B(nx)] + A(1) [2B'(nx) - B(nx)]}{nA(1) B(nx)} \right\} x \\ &+ \frac{1}{n^2A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

dir.

İspat. K_n nin lineerliğinden

$$K_n((s-x)^2; x) = K_n(s^2; x) - 2xK_n(s; x) + x^2K_n(1; x) \quad (5.11)$$

olduğu görülür. Lemma 5.1 deki eşitlikler yerine yazılıp düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 5.1 Eğer $f \in C[0, \infty) \cap E$ ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B'(y)}{B(y)} = 1 \text{ ve } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B''(y)}{B(y)} = 1 \quad (5.12)$$

ise o taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(f; x) = f(x) \quad (5.13)$$

dir. Yani K_n operatörleri $[0, \infty)$ un her kompakt alt kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Burada

$$E := \left\{ f : x \in [0, \infty), x \rightarrow \infty \text{ için } \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ yakınsaktır} \right\} \quad (5.14)$$

dir.

İspat. (5.3), (5.4) ve (5.5) eşitliklerinin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır ve (5.12) daki eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(1; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= x^0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B'(nx)}{B(nx)} x + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \\ &= x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s^2; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2B'(nx)[A'(1) + A(1)]}{nA(1)B(nx)} x \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s^i; x) = x^i \quad i = 0, 1, 2$$

yazılabilir.

Yukarıdaki yakınsama $[0, \infty)$ un her kompakt alt kümesinde düzgündür. Korovkin teoreminden istenilen elde edilir. ■

5.2 Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, Peetre's K-fonksiyoneli, ikinci süreklilik modülü ve bir klasik yaklaşım yardımıyla $K_n(f)$ operatörünün yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Teorem 5.2 $f \in \tilde{C}[0, \infty) \cap E$ olsun.

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2w\left(f; \sqrt{\lambda_n(x)}\right) \quad (5.15)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) &= K_n((s-x)^2; x) = \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 \\ &+ \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)} \right\} x \\ &+ \frac{1}{n^2A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

şeklindedir. Burada $\tilde{C}[0, \infty)$, $[0, \infty)$ üzerinde düzgün sürekli fonksiyonların uzayıdır.

İspat. (5.3) den

$$|K_n(f; x) - f(x)| = |K_n(f; x) - f(x)K_n(1; x)|$$

yazılır. K_n lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned} |K_n(f; x) - f(x)| &= |K_n(f; x) - K_n(f(x); x)| \\ &= |K_n(f(s) - f(x); x)| \end{aligned}$$

elde edilir. (5.1) den

$$\begin{aligned}
|K_n(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} (f(t) - f(x)) dt \right| \\
&= \frac{n}{A(1)B(nx)} \left| \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} (f(t) - f(x)) dt \right| \\
&\leq \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |f(t) - f(x)| dt
\end{aligned}$$

bulunur, Lemma 2.3 in (vii) özelliğinden

$$\begin{aligned}
|K_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} \left(1 + |t - x| \frac{1}{\delta}\right) w(f; \delta) dt \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \\ &+ \frac{n}{A(1)B(nx)} \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t - x| dt \end{aligned} \right\} w(f; \delta) \\
|K_n(f; x) - f(x)| &= \left\{ \begin{aligned} &1 + \\ &\frac{n}{A(1)B(nx)} \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t - x| dt \end{aligned} \right\} w(f; \delta) \quad (5.17)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

İkinci yandaki integrale Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t - x| dt &\leq \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t - x|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t - x|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (5.17) de dikkate alınırsa daha sonra elde edilen eşitsizliğin sağ tarafına toplam için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t-x| dt &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t-x|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{p_k(nx)} \left(p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t-x|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} |t-x|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} (A(1) B(nx))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A(1) B(nx) K((t-x)^2; x)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{A(1) B(nx)} \sqrt{A(1) B(nx)}}{\sqrt{n} \sqrt{n}} (\lambda_n(x))^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{A(1) B(nx)}{n} (\lambda_n(x))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu eşitsizlik (5.17) de dikkate alınırsa,

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\lambda_n(x)} \right\} w(f; \delta) \quad (5.18)$$

bulunur, $\delta = \sqrt{\lambda_n(x)}$ seçilirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 5.3 $f \in C_B^2[0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq \zeta \|f\|_{C_B^2}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\zeta &: = \zeta_n(x) \\
&= \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{2B(nx)} \right\} x^2 \\
&\quad + \left\{ \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2(n+1)B'(nx) - (2n+1)B(nx)]}{2nA(1)B(nx)} \right\} x \\
&\quad + \frac{1}{2n^2A(1)} \left\{ A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3} \right\} + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)}
\end{aligned} \quad (5.19)$$

şeklindedir.

İspat. f in Taylor açılımı, K_n operatörlerin lineerlik özelliği ve (5.3) dikkate alınırsa

$$K_n(f; x) - f(x) = f'(x) K_n(s - x; x) + \frac{1}{2} f''(\eta) K_n((s - x)^2; x) \quad (5.20)$$

elde edilir ve $\eta \in (x, s)$ dir.

$$K_n(s - x; x) = \frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \geq 0 \quad (5.21)$$

ve $x \leq s$ için (5.20) de Lemma 5.1 ve 5.2 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |K_n(f; x) - f(x)| &\leq \left[\frac{B'(nx) - B(nx)}{B(nx)} x + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \right] \|f'\|_{C_B} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1)[2B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2A(1)} (A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3}) \right] \|f''\|_{C_B} \\ &\leq \left[\frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{2B(nx)} x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2A'(1)[B'(nx) - B(nx)] + A(1) \left[\begin{array}{l} 2(n+1)B'(nx) \\ -(2n+1)B(nx) \end{array} \right]}{2nA(1)B(nx)} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n^2A(1)} \{A''(1) + 2A'(1) + \frac{A(1)}{3}\} + \frac{2A'(1) + A(1)}{2nA(1)} \right] \|f\|_{C_B^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.4 $f \in C_B[0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2M \left\{ w_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta) \right\} \|f\|_{C_B} \quad (5.23)$$

dir. Burada

$$\delta := \delta_n(x) = \frac{1}{2} \zeta_n(x) \quad (5.24)$$

ve $M > 0$ olup δ ve f den bağımsız bir sabittir. Burada $\zeta_n(x)$ Teorem 5.3 deki gibidir.

İspat. $g \in C_B^2[0, \infty)$ olsun. Teorem 5.3 den

$$\begin{aligned} |K_n(f; x) - f(x)| &\leq |K_n(f - g; x)| + |K_n(g; x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &\leq 2\|f - g\|_{C_B} + \zeta\|g\|_{C_B^2} \\ &= 2\left[\|f - g\|_{C_B} + \delta\|g\|_{C_B^2}\right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

elde edilir. (5.25) eşitsizliğinin sol tarafı $g \in C_B^2[0, \infty)$ fonksiyonuna bağlı değildir, bu nedenle

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2K(f; \delta) \quad (5.26)$$

dir, burada $K(f; \delta)$ (2.4) de tanımlanan Peetre's K- fonksiyoneli dir. (5.25), ikinci süreklilik modülü ve Petree's K- fonksiyoneli kullanılırsa

$$|K_n(f; x) - f(x)| \leq 2M \left\{ w_2\left(f; \sqrt{\delta}\right) + \min(1, \delta) \right\} \|f\|_{C_B}$$

elde edilir. ■

Uyarı 5.1 (5.12) varsayımı altında Teorem 5.2-5.4 de $n \rightarrow \infty$ için λ_n , ζ_n ve δ_n sıfıra yakınsar.

5.3 Özel Durumlar ve Başka Özellikler

$h \geq 0$, $A(t) = e^{ht^{d+1}}$ ve $B(t) = e^t$ için Gould-Hopper polinomlarını içeren $K_n(f; x)$ in Kantorovich versiyonu

$$K_n^*(f; x) := ne^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \quad (5.27)$$

şeklindedir.

Uyarı 5.2 (4.29) ile verilen Gould-Hopper polinomları için doğurucu fonksiyon $h = 0$ için $g_k^{d+1}(nx, h) = (nx)^k$ olarak bulunur ve bu durumda (5.27) de verilen operatör (5.2) de verilen Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörüne dönüşür.

Şimdi (5.27) operatörü için bir Voronovskaya-tipli bir teorem verilecektir. Bu teoremin ispatı için öncelikle aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 5.3 K_n^* operatörü için

$$\begin{aligned} K_n^*(1; x) &= 1, \\ K_n^*(s; x) &= x + \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_n^*(s^2; x) &= x^2 + \frac{2}{n} (h(d+1) + 1) x \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1) \{h(d+1) + d + 2\} + \frac{1}{3} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_n^*(s^3; x) &= x^3 + \frac{3x^2}{n} \left\{ h(d+1) + \frac{3}{2} \right\} + \frac{x}{n^2} \left\{ \begin{array}{l} 3h^2(d+1)^2 \\ + 3h(d+1)(d+3) + \frac{7}{2} \end{array} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n^3} \left\{ \begin{array}{l} h^2(h+3)(d+1)^3 + \frac{3}{2}h(h+1)(d+1)^2 \\ + h(d+1) + \frac{1}{4} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} K_n^*(s^4; x) &= x^4 + \frac{4x^3}{n} \{h(d+1) + 2\} + \frac{3x^2}{n^2} \left\{ \begin{array}{l} 2h(h+1)(d+1)^2 \\ + 6h(d+1) + 5 \end{array} \right\} \\ &\quad + \frac{x}{n^3} \left\{ \begin{array}{l} 12h^2(d+1)^2(d+2) + 4h^3(d+1)^3 \\ + 2h(d+1)(2d^2 + 10d + 15) + 6 \end{array} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{n^4} \left\{ \begin{array}{l} h^3(h+6)(d+1)^4 + 8h(1+3h)(d+1)^3 - 9h(h+1)(d+1)^2 \\ + 7h(d+1) + 2h^3(d+1)^3 + 4d(d-1)(d+1)^2 h^2 \\ + 3h^2 d^2 (d+1)^2 + (d-2)(d-1)d(d+1)h + \frac{1}{5} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

dır.

Lemma 5.4 $x \in [0, \infty)$ için

$$K_n^*((s-x)^2; x) = \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1) \{h(d+1) + d + 2\} + \frac{1}{3} \right]$$

$$\begin{aligned}
K_n^*((s-x)^4; x) &= \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} \{6h(h+2)(d+1)^2 + 2h(d+1)(-3d+2) + 5\} \\
&+ \frac{1}{n^4} \left\{ \begin{aligned} &h^3(h+6)(d+1)^4 \\ &+ 2h(h^2 + 12h + 4)(d+1)^3 \\ &+ 7h(d+1) - 9h(h+1)(d+1)^2 \\ &+ 4d(d-1)(d+1)^2 h^2 \\ &+ 3h^2 d^2 (d+1)^2 + (d-2)(d-1)d(d+1)h + \frac{1}{5} \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

dir.

Teorem 5.5 $f \in C^2[0, a]$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[K_n^*(f; x) - f(x)] = f'(x) \left\{ h(d+1) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{xf''(x)}{2!} \tag{5.30}$$

dır.

İspat. Taylor teoreminden

$$f(s) = f(x) + (s-x)f'(x) + \frac{(s-x)^2}{2!}f''(x) + (s-x)^2\eta(s; x) \tag{5.31}$$

eşitliği yazılabilir, burada $\eta(s; x) \in [0, a]$ ve

$$\left\{ f(s) - f(x) - (s-x)f'(x) - \frac{(s-x)^2}{2!}f''(x) \right\} / (s-x)^2 = \eta(s; x)$$

denkleminde $s \rightarrow x$ iken limit alınırsa $\frac{0}{0}$ belirsizliği elde edilir. Bu denkleminde iki kez L'H uygulanırsa $\lim_{s \rightarrow x} \eta(s; x) = 0$ olduğu görülür. (5.31) in her iki tarafına K_n^* operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
K_n^*(f; x) &= f(x) + f'(x)K_n^*(s-x; x) \\
&+ \frac{f''(x)}{2!}K_n^*((s-x)^2; x) + K_n^*((s-x)^2\eta(s; x); x)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

elde edilir. Lemma 5.3 ve Lemma 5.4 den (5.32) eşitliği

$$\begin{aligned}
n[K_n^*(f; x) - f(x)] &= n \left\{ \frac{h(d+1)}{n} + \frac{1}{2n} \right\} f'(x) \\
&+ n \left\{ \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \left[h(d+1) \{h(d+1) + d+2\} + \frac{1}{3} \right] \right\} \frac{f''(x)}{2!} \\
&+ nK_n^*((s-x)^2\eta(s; x); x)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

şeklinde yazılır, burada

$$K_n^*((s-x)^2 \eta(s; x); x) = n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} (s-x)^2 \eta(s; x) ds \quad (5.34)$$

dır. Eşitliğin sağ tarafındaki integrale Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & n K_n^*((s-x)^2 \eta(s; x); x) \\ & \leq n^2 e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} (s-x)^4 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} \eta^2(s; x) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(n^3 e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} (s-x)^4 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \cdot \left(n e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx, h)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} \eta^2(s; x) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \sqrt{n^2 K_n^*((s-x)^4; x)} \sqrt{K_n^*(\eta^2(s; x); x)} \end{aligned} \quad (5.35)$$

elde edilir. Lemma 5.4 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 K_n^*((s-x)^4; x) = 3x^2 \quad (5.36)$$

dır. Diğer taraftan $\eta(s; x) \in [0, a]$ ve $\lim_{s \rightarrow x} \eta(s; x) = 0$ iken Teorem 5.1 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^*(\eta^2(s; x); x) = \eta^2(x; x) = 0 \quad (5.37)$$

dır. (5.36) ve (5.37), (5.35) da dikkate alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n K_n^*((s-x)^2 \eta(s; x); x) = 0 \quad (5.38)$$

eşitliği elde edilir. (5.33) de $n \rightarrow \infty$ iken limit alınır ve elde edilen denklemde (5.38) yerine yazılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [K_n^*(f; x) - f(x)] = f'(x) \left\{ h(d+1) + \frac{1}{2} \right\} + \frac{x f''(x)}{2!}$$

ispat tamamlanır. ■

Uyarı 5.3 Teorem 5.5 de $h = 0$ alınırsa (5.2) de verilen Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü için Voronovskaya tipli teorem elde edilir.



6. BRENKE TİPLİ POLİNOMLARI İÇEREN SZASZ TİPLİ OPERATÖRLERİN KANTOROVİCH VARYASYONUNUN SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLAR YARDIMI İLE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Kantorovich tipi operatörlerin iyi bilinen bazı çeşitleri fonksiyonların yeniden yapılandırılması için kullanışlıdır. Örneğin, biyomedikal görüntüler veya görüntülerin diğer türleri yeniden yapılandırılabilir ve hatta çeşitli pratik problemlerin çözümü böyle operatörler yardımıyla geliştirilebilir (Costarelli, Vinti 2013, Costarelli, Vinti 2014, Vinti and Zampogni 2014).

Brenke tipli polinomların doğurucu fonksiyonları, Hermite, Laguerre ve genelleştirilmiş Hermite polinomlarını (Szegő's) içinde barındırır. Ayrıca bu tip doğurucu fonksiyonlar olasılık teori ve bazı q -ortogonal polinomların üretilmesiyle de çok ilişkilidir.

Sonuç olarak bu bölümdeki çalışmamız problemlerin, ortogonal polinomların, yaklaşımın yeniden yapılandırılması için faydalıdır.

$\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ üzerinde sınırlı salınımlı tüm fonksiyonların sınıfı $BV(I)$ tarafından gösterilecektir. Bazı yazarlar $BV(I)$ da fonksiyonların yakınsama hızını elde etmek için bazı operatörler üzerinde çalışmışlardır. Sınırlı salınımlı fonksiyonların yakınsama hızı, birkaç farklı operatörleri içeren Cheng 1983, Cheng 1984, Bojanic Bojanic 1979 ve Bojanic ve Vuilleumier Bojanic and Vuilleumier 1981 gibi birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ardından Bojanic-Vuilleumier ve Cheng'in temel çalışmalarından sonra, metodları bir çok çalışmada kullanılmıştır (Öksüzler, Karsli, and Tasdelen Yesildal 2013, Gupta 2004, Guo and Khan 1989, Karsli, Ibikli 2008, Pych-Taberska and Karsli 2011, Zeng 2000).

Bu bölümde lokal sınırlı salınımlı fonksiyon için $x > 0$ noktasında yakınsama hızı bulunacaktır. Ayrıca bu bölümde (5.1) ile verilen operatörünün olasılık teorisinin teknikleri yardımı ile yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3. bölümde bahsedildiği gibi, Brenke tipli $p_k(nx)$ polinomları için doğurucu fonksiyon

$$A(t) B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k, \quad (6.1)$$

olup, burada A ve B aşağıdaki şekilde tanımlanan analitik fonksiyonlar

$$A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r, \quad a_0 \neq 0 \quad (6.2)$$

$$B(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r, \quad b_r \neq 0 \quad (r \geq 0) \quad (6.3)$$

ve

$$p_k(x) = \sum_{r=0}^k a_{k-r} b_r x^r, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

ve de

$$\begin{aligned} (i) \quad & A(1) \neq 0, \quad \frac{a_{k-r} b_r}{A(1)} \geq 0, \quad 0 \leq r \leq k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ (ii) \quad & B : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \\ (iii) \quad & (6.1), (6.2) \text{ ve } (6.3) \text{ serileri } |t| < R, \quad (R > 1) \text{ için yakınsaktır} \end{aligned} \quad (6.5)$$

dir.

Bu bölümde $M_n(x, t)$

$$M_n(x, t) := \frac{n}{A(1) B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \chi_{n,k}(t)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatördür. $I = [0, \infty)$ olmak üzere $\chi_{n,k}(t)$, $[k/n, (k+1)/n]$ aralığında karakteristik fonksiyondur.

$M_n(x, t)$ operatörünün Weierstrass M -testinden düzgün yakınsaktır. Böylelikle (5.1) operatörü

$$K_n(f; x) = \int_0^{\infty} f(t) M_n(x, t) dt.$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma 6.1 (Berry-Essen). $\zeta_k, k = 1, 2, \dots$ bağımsız aynı dağılımlı rastgele değişkenler olsun. $E(\zeta_1) = \mu \in R, Var(\zeta_1) = E(\zeta_1 - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty$ ve $E|\zeta_1 - \mu|^3 < \infty$ olmak üzere $n = 1, 2, \dots$ ve tüm t ler için,

$$\left| P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\zeta_k - \mu) \leq t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \right| < C \frac{E(\zeta_1 - \mu)^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

dir. Burada $1/\sqrt{2\pi} \leq C \leq 0.82$ dir. Bu lemmanın ispatı için Shiryayev (1984) e bakılabilir.

6.1 Yardımcı Sonuçlar

Uyarı 6.1 Eğer $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B'(y)}{B(y)} = 1$ ve $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B''(y)}{B(y)} = 1$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $K_n((s-x)^2; x) \rightarrow 0$ dir.

Bundan böyle

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B'(y)}{B(y)} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{B''(y)}{B(y)} = 1.$$

oldukları kabul edilecektir.

Uyarı 6.2 Burada yukarıdaki koşulları sağlayan B fonksiyonu için bazı örnekler verilmiştir. Örneğin $B(y) = y \exp(y)$ ya da $B(y) = y^2 + C \exp(y)$ dir. Başka örnekler de kolayca inşa edilebilir.

Lemma 6.2 $x \in (0, \infty)$ olsun.

$$\lambda_n(x, y) = \int_0^y M_n(x, t) dt \leq \frac{\psi(n, x)}{(x-y)^2}, \quad 0 \leq y < x \quad (6.6)$$

ve

$$1 - \lambda_n(x, z) = \int_z^\infty M_n(x, t) dt \leq \frac{\psi(n, x)}{(z-x)^2}, \quad x < z < \infty \quad (6.7)$$

dir. Burada $\psi(n, x) = K_n((s-x)^2; x)$ dir.

İspat. İlk olarak (6.6) in ispatını yapalım. $0 < t < y$ olup, buradan $-t > -y$ yazılabilir. Her iki tarafa x eklenirse $x - t > x - y$ elde edilir. $0 \leq y < x$ den $x - y > 0$ olup her iki taraf $x - y$ ile bölünürse $\frac{x-t}{x-y} > 1$ olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^y M_n(x, u) du &\leq \int_0^y M_n(x, t) \left(\frac{x-t}{x-y} \right)^2 dt = \frac{1}{(x-y)^2} \int_0^y M_n(x, t) (x-t)^2 dt \\ &\leq \frac{\psi(n, x)}{(x-y)^2}, \quad 0 \leq y < x. \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de (6.7) nin ispatını elde edelim. $K_n(1; x) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty M_n(x, t) dt \\ 1 &= \int_0^z M_n(x, t) dt + \int_z^\infty M_n(x, t) dt \end{aligned}$$

dir. (6.6) den sağ taraftaki integral $\lambda_n(x, z)$ ye eşittir. Buradan

$$1 - \lambda_n(x, y) = \int_z^\infty M_n(x, t) dt \quad (6.8)$$

elde edilir. Diğer taraftan $z < t < \infty$ ve $x < z < \infty$ olduğu gözönüne alınırsa $\frac{t-x}{z-x} > 1$ dir. (6.8) da bu eşitlik gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_n(x, y) &= \int_z^\infty M_n(x, t) dt \\ &\leq \int_z^\infty M_n(x, t) \frac{(t-x)^2}{(z-x)^2} dt \\ &= \frac{1}{(z-x)^2} \int_z^\infty M_n(x, t) (t-x)^2 dt \\ &= \frac{\psi(n, x)}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar. ■

Lemma 6.3 $x \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\frac{1}{A(1)B(x)} \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(x) = \frac{A'(1)}{A(1)} + x \frac{B'(x)}{B(x)} \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{A(1)B(x)} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 k p_k(x) = \frac{A'(1)B(x) + xA(1)B'(x) + A''(1)B(x) + 2xA'(1)B'(x) + x^2A(1)B''(x)}{A(1)B(x)} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(1)B(x)} \sum_{k=0}^{\infty} k^3 p_k(x) = & [A'(1)B(x) + xA(1)B'(x) + 3A''(1)B(x) \\ & + 6xA'(1)B'(x) + 3x^2A(1)B''(x) \\ & + 3xA''(1)B'(x) + 3x^2A'(1)B''(x) \\ & + A'''(1)B(x) + x^3A(1)B'''(x)]/A(1)B(x) \end{aligned} \quad (6.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(1)B(x)} \sum_{k=0}^{\infty} k^4 p_k(x) = & (A'(1)B(x) + xA(1)B'(x) + 7A''(1)B(x) \\ & + 14xA'(1)B'(x) + 7x^2A(1)B''(x) + 6A'''(1)B(x) \\ & + 18xA''(1)B'(x) + 18x^2A'(1)B''(x) + 6x^3A(1)B'''(x) \\ & + A''''(1)B(x) + 4xA'''(1)B'(x) + 6x^2A''(1)B''(x) \\ & + 4x^3A'(1)B'''(x) + x^4A(1)B''''(x))/A(1)B(x) \end{aligned} \quad (6.12)$$

şeklindedir.

İspat. (6.1) ile verilen Brenke tipli polinomların doğurucu fonksiyonunun her iki tarafının t e göre türevi alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(x) t^{k-1} = A'(t)B(xt) + xA(t)B'(xt)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $t = 1$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(x) = A'(1)B(x) + xA(1)B'(x)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{A(1)B(x)}$ ile çarpılırsa (6.9) eşitliği elde edilir.

(6.10) – (6.12) nin ispatıda benzer şekilde yapılır. ■

Lemma 6.4 $x \in (0, \infty)$ için

$$\left| \sum_{k > nx} \frac{p_k(nx)}{A(1)B(nx)} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \beta(x) + \frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma \sqrt{2\pi}},$$

dir, burada $\beta(x) = \frac{E|\zeta_1 - \mu|^3}{\sigma^3}$ olup, C belirli bir sabittir.

İspat. $\zeta_1, P(\zeta_1 = j) = \frac{p_j(x)}{A(1)B(x)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$; $x \in (0, \infty)$ parametredir) parçalanması ile rastgele değişkendir. Bundan dolayı,

$$\mu = E(\zeta_1) = \frac{A'(1)}{A(1)} + x \frac{B'(x)}{B(x)}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sqrt{Var(\zeta_1)} = (-(B(x)A'(1) + xA(1)B'(x))^2 \\ &\quad + A(1)B(x)((A(1) + 2A'(1))xB'(x) \\ &\quad + B(x)(A'(1) + A''(1)) + x^2A(1)B''(x))) / (A(1)B(x))^2, \end{aligned}$$

Hölder eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} E|\zeta_1 - \mu|^3 &\leq \sqrt{E(\zeta_1 - \mu)^4 E(\zeta_1 - \mu)^2} \tag{6.13} \\ &= \{(-B(x)A'(1) - xA(1)B'(x))((B(x)A'(1) + xA(1)B'(x))^2 \\ &\quad + A(1)B(x)((A(1) + 2A'(1))xB'(x) + B(x)(A'(1) + A''(1)) \\ &\quad + x^2A(1)B''(x))) (3x(A(1)B'(x))^3 + 3xA(1)B(x)B'(x)(3xA(1)A'(1)B'(x) \\ &\quad - 2A(1)((A(1) + 2A'(1))xB'(x) + x^2A(1)B''(x))) \\ &\quad + (B(x))^2(-3xA(1)B'(x)(-3(A'(1))^2 \\ &\quad + 2A(1)(A'(1) + A''(1))) + A(1)(xB'(x)(3(A(1))^2 \\ &\quad - 12(A'(1))^2 + A(1)(4A'(1) - 6A''(1) \\ &\quad - 4A'''(1))) - x^2A(1)((-5 + 4x)A(1) + A''(1))B''(x) \\ &\quad + x((6 + x)A(1) + 4A'(1)B'''(x))) + (B(x))^3(3(A'(1))^3) \\ &\quad - 6A(1)A'(1)(A'(1) + A''(1)) + (A(1))^2(3A'(1) + 5A''(1) \\ &\quad - 2A'''(1) - 6A''''(1))))\} / (A(1)B(x))^6\}^{1/2}. \end{aligned}$$

elde edilir. $\{\zeta_l\}_{l=1}^\infty; \zeta_1, \eta_n = \sum_{l=1}^n \zeta_l$ ile aynı dağıtılan bağımsız rastgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Daha sonra η_n rastgele değişkenin muhtemel dağılımı

$$P(\eta_n = k) = \frac{p_k(nx)}{A(1)B(nx)}.$$

şeklindedir. Böylelikle

$$\begin{aligned} \sum_{k > nx} \frac{p_k(nx)}{A(1)B(nx)} &= P(n\mu < \eta_n) \\ &= 1 - P\left(\frac{\eta_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{nx - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.6 ve (6.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k > nx} p_k(nx) - \frac{1}{2} \right| &\leq \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2} du \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{nx - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-u^2/2} du \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \beta(x) + \frac{n(x - \mu)}{\sigma\sqrt{2\pi n}}. \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 6.5 Her $x \in (0, \infty)$ için

$$\operatorname{sgn}(t - x) = \begin{cases} 1, & t > x \\ 0, & t = x \\ -1, & t < x \end{cases}.$$

olmak üzere

$$|K_n(\operatorname{sgn}(t - x); x)| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \left[3 \left(C\beta(x) + \frac{n(x - \mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right] \quad (6.14)$$

dir.

İspat. $k^* \in \mathbb{N}$ için $x \in [k^*/n, (k^* + 1)/n)$ olsun. (5.1) ile verilen operatörde f yerine $\operatorname{sgn}(t - x)$ alınırsa

$$\begin{aligned} K_n(\operatorname{sgn}(t - x); x) &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \operatorname{sgn}(t - x) dt \\ &= \frac{n}{A(1)B(nx)} \left[\sum_{k=0}^{k^*-1} p_k(nx) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \operatorname{sgn}(t - x) dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=k^*+1}^{\infty} p_k(nx) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \operatorname{sgn}(t - x) dt \right] \\ &\quad + \frac{n}{A(1)B(nx)} p_{k^*}(nx) \int_{k^*/n}^{(k^*+1)/n} \operatorname{sgn}(t - x) dt \quad (6.15) \end{aligned}$$

bulunur. İlk integralde $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, $\frac{k^*}{n} \leq x \leq \frac{k^*+1}{n}$ ve $0 \leq k \leq k^* - 1$ olduğu gözönüne alınırsa $x < t$ olup bu durumda $\operatorname{sgn}(t - x) = -1$ dir. İkinci integralde $k^* + 1 \leq k < \infty$, $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$ ve $\frac{k^*}{n} \leq x \leq \frac{k^*+1}{n}$ olduğu gözönüne alınırsa $t > x$ olup, bu durumda $\operatorname{sgn}(t - x) = 1$ dir. $K_n(1; x) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \\ &= \frac{1}{A(1)B(nx)} \left[\sum_{k=0}^{k^*-1} p_k(nx) + \sum_{k=k^*+1}^{\infty} p_k(nx) + p_{k^*}(nx) \right] \\ - \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{k^*-1} p_k(nx) &= \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=k^*+1}^{\infty} p_k(nx) + \frac{1}{A(1)B(nx)} p_{k^*}(nx) - 1 \end{aligned}$$

bulunur. İkinci integralde ise $\frac{k^*}{n} \leq x \leq t \leq \frac{k^*+1}{n}$ olup $\operatorname{sgn}(t - x) = 1$ ve $\frac{k^*}{n} \leq t \leq x \leq \frac{k^*+1}{n}$ alıp $\operatorname{sgn}(t - x) = -1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{k^*/n}^{(k^*+1)/n} \operatorname{sgn}(t - x) dt &= \int_{k^*/n}^x -1 dt + \int_x^{(k^*+1)/n} 1 dt \\ &= ((k^* + 1)/n - x) - (x - k^*/n) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bu durumlar (6.15) eşitliğinde gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} K_n(\operatorname{sgn}(t - x); x) &= \frac{1}{A(1)B(nx)} \left[- \sum_{k=0}^{k^*-1} p_k(nx) + \sum_{k=k^*+1}^{\infty} p_k(nx) \right] \\ &\quad + \frac{n}{A(1)B(nx)} p_{k^*}(nx) [((k^* + 1)/n - x) - (x - k^*/n)] \\ &= \frac{2}{A(1)B(nx)} \sum_{k=k^*+1}^{\infty} p_k(nx) - 1 \\ &\quad + 2 \frac{n}{A(1)B(nx)} p_{k^*}(nx) [((k^* + 1)/n - x)] \end{aligned}$$

elde edilir. $(k^* + 1)/n - x \leq 1/n$ den

$$|K_n(\operatorname{sgn}(t - x); x)| \leq 2 \left| \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k > nx} p_k(nx) - \frac{1}{2} \right| + 2 \frac{p_{k^*}(nx)}{A(1)B(nx)}$$

dir. Berry–Esseen teoreminden

$$\begin{aligned} \frac{p_{k^*}(nx)}{A(1)B(nx)} &= \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{k^*} p_k(nx) - \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{k^*-1} p_k(nx) \\ &\leq 2 \left[\frac{C}{\sqrt{n}} \beta(x) + \frac{n(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{((k^*-1)-nx)/\sigma\sqrt{n}}^{(k^*-nx)/\sigma\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du, \\ \frac{p_{k^*}(nx)}{A(1)B(nx)} &\leq 2 \left[\frac{C}{\sqrt{n}} \beta(x) + \frac{n(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}} \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$|K_n(\operatorname{sgn}(t-x); x)| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \left[3 \left(C\beta(x) + \frac{n(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right]$$

bulunur bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 6.1 f , $[0, \infty)$ un her sonlu alt aralığında sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $x \in (0, \infty)$ ve $r > 1$, $f(t) = O(t^{2r})$, $t \rightarrow \infty$, ise bu durumda yeterince büyük n ler için,

$$\begin{aligned} \left| K_n(f; x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right| &\leq \frac{4n\psi(n, x) + x^2}{nx^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+x/\sqrt{k}} (g_x) \\ &+ \frac{|f(x+) - f(x-)|}{\sqrt{n}} \left[3 \left(C\beta(x) + \frac{n(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right] + O(n^{-r}), \end{aligned} \quad (6.16)$$

dir, burada $\psi(n, x) = K_n((s-x)^2; x)$, $\mu = E(\zeta_1)$, $\sigma = \sqrt{E(\zeta_1 - \mu)^2}$ ve $\beta(x)$ Lemma 6.4 deki gibi olup, C belirli bir sabittir.

$$g_x(t) = \begin{cases} f(t) - f(x+), & x < t < \infty \\ 0, & t = x \\ f(t) - f(x-), & 0 \leq t < x \end{cases}$$

ve $\bigvee_a^b(g_x)[a, b]$ de g_x in toplam varyasyonudur.

İspat. Öncelikle sınırlı fonksiyonlar için aşağıdaki iyi bilinen özdeşlikler verilecektir.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{f(x+) + f(x-)}{2} + g_x(t) + \frac{f(x+) - f(x-)}{2} \operatorname{sgn}(t-x) \\ &+ \delta_x(t) \left[f(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right], \end{aligned} \quad (6.17)$$

burada

$$\delta_x(t) = \begin{cases} 1, & x = t \\ 0, & x \neq t \end{cases}$$

ve

$$\operatorname{sgn}(t - x) = \begin{cases} 1, & t > x \\ 0, & t = x \\ -1, & t < x \end{cases}.$$

dir. (6.17) ün her iki tarafına K_n operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} K_n(f; x) &= \frac{f(x+) + f(x-)}{2} K_n(1; x) + K_n(g_x; x) \\ &\quad + \frac{f(x+) - f(x-)}{2} K_n(\operatorname{sgn}(t - x); x) \\ &\quad + \left[f(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] K_n(\delta_x; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Direkt hesaplama ile

$$K_n(\delta_x; x) = 0.$$

olduğu görülür ve $K_n(\operatorname{sgn}(t - x); x)$ için Lemma 6.5 eşitsizliği gözönüne alınacaktır.

Böylelikle

$$\begin{aligned} &\left| K_n(f; x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right| \\ &\leq |K_n(g_x; x)| + \left| \frac{f(x+) - f(x-)}{2} K_n(\operatorname{sgn}(t - x); x) \right| \end{aligned} \quad (6.18)$$

dir. Bu $\left| K_n(f; x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right|$ tahmini gösterir ki, sadece $K_n(g_x; x)$ belirlenmelidir.

O halde $K_n(g_x; x)$ i belirleyelim,

$$\begin{aligned} |K_n(g_x; x)| &\leq \left| \int_0^{x-x/\sqrt{n}} g_x(t) M_n(x, t) dt \right| + \left| \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} g_x(t) M_n(x, t) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_{x+x/\sqrt{n}}^{\infty} g_x(t) M_n(x, t) dt \right| \\ &= |\Delta_1(n, x)| + |\Delta_2(n, x)| + |\Delta_3(n, x)| \end{aligned} \quad (6.19)$$

şeklindedir. $\Delta_1(n, x)$, $\Delta_2(n, x)$ ve $\Delta_3(n, x)$ i bulalım.

$$g_x(x) = 0 \text{ ve } \left| \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} M_n(x, t) dt \right| \leq 1 \text{ den}$$

$$\begin{aligned} |\Delta_2(n, x)| &= \left| \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} (g_x(t) - g_x(x)) M_n(x, t) dt \right| \\ &\leq \int_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} |g_x(t) - g_x(x)| M_n(x, t) dt \\ &\leq \bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}} (g_x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^{x+x/\sqrt{k}} (g_x) \end{aligned} \quad (6.20)$$

dir. Şimdi de $\Delta_1(n, x)$ i bulalım. $y = x - x/\sqrt{n}$ alınıp kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\Delta_1(n, x) = \int_0^y g_x(t) d_t(\lambda_n(x, t)) = g_x(y) \lambda_n(x, y) - g_x(0) \lambda_n(x, 0) - \int_0^y \lambda_n(x, t) d_t(g_x(t))$$

elde edilir. $|g_x(y)| = |g_x(y) - g_x(x)| \leq \bigvee_y^x (g_x)$ den

$$|\Delta_1(n, x)| \leq \bigvee_y^x (g_x) \lambda_n(x, y) + \int_0^y \lambda_n(x, t) d_t \left(-\bigvee_t^x (g_x) \right).$$

olduğundan (6.6) ve $y = x - x/\sqrt{n} \leq x$ den

$$|\Delta_1(n, x)| \leq \frac{\psi(n, x)}{(x - y)^2} \bigvee_y^x (g_x) + \psi(n, x) \int_0^y \frac{1}{(x - t)^2} d_t \left(-\bigvee_t^x (g_x) \right)$$

dir. Burada $u = (x - t)^{-2}$ ve $dv = d_t \left(-\bigvee_t^x (g_x) \right)$ denir ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{1}{(x - t)^2} d_t \left(-\bigvee_t^x (g_x) \right) &= -\frac{1}{(x - t)^2} \bigvee_t^x (g_x) \Big|_0^y + \int_0^y \frac{2}{(x - t)^3} \bigvee_t^x (g_x) dt \\ &= -\frac{1}{(x - y)^2} \bigvee_y^x (g_x) + \frac{1}{x^2} \bigvee_0^x (g_x) + \int_0^y \frac{2}{(x - t)^3} \bigvee_t^x (g_x) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki son integralde y yerine $x - x/\sqrt{n}$ yazılır ve $t = x - x/\sqrt{u}$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^{x-x/\sqrt{n}} 2(x - t)^{-3} \bigvee_t^x (g_x) dt = \frac{1}{x^2} \int_1^n \bigvee_{x-x/\sqrt{u}}^x (g_x) du \leq \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x (g_x)$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
|\Delta_1(n, x)| &\leq \bigvee_y^x (g_x) \frac{\psi(n, x)}{(x - y)^2} \\
&\quad + \psi(n, x) \left\{ -\frac{1}{(x - y)^2} \bigvee_y^x (g_x) + \frac{1}{x^2} \bigvee_0^x (g_x) + \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x (g_x) \right\} \\
\text{dır. } \bigvee_0^x (g_x) &\leq \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x (g_x) \text{ alınır} \\
|\Delta_1(n, x)| &\leq \frac{2\psi(n, x)}{x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_{x-x/\sqrt{k}}^x (g_x) \tag{6.21}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak da $\Delta_3(n, x)$ hesaplayalım. $z = x + x/\sqrt{n}$ alınır,

$$\Delta_3(n, x) \leq \int_z^\infty g_x(t) M_n(x, t) dt = \int_z^\infty g_x(t) d_t(\lambda_n(x, t))$$

olur. $[0, 2x]$ de $Q_n(x, t)$

$$Q_n(x, t) = \begin{cases} 1 - \lambda_n(x, t-), & 0 \leq t < 2x \\ 0, & t = 2x \end{cases}$$

olarak tanımlayalım ve

$$\Delta_3(n, x) = \int_z^{2x} g_x(t) d_t Q_n(x, t) + \int_{2x}^\infty M_n(x, t) [g_x(t) - g_x(2x)] dt$$

olup $\Delta_3 = \Delta_{31} + \Delta_{32}$ olarak tanımlanır, burada

$$\Delta_{31} = \int_z^{2x} g_x(t) d_t Q_n(x, t) \quad \text{ve} \quad \Delta_{32} = \int_{2x}^\infty M_n(x, t) [g_x(t) - g_x(2x)] dt$$

şeklindedir. Δ_{31} e kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$|\Delta_{31}| = g_x(z) Q_n(x, z) + \int_z^{2x} Q_n(x, t) d_t(g_x(t))$$

bulunur. Ayrıca (6.7) den,

$$\begin{aligned}
|\Delta_{31}| &\leq g_x(z)Q_n(x, z) + \int_z^{2x} Q_n(x, t) d_t \left(\bigvee_x^t(g_x) \right) \\
&\leq \bigvee_x^z(g_x) \frac{\psi(n, x)}{(x-z)^2} + \psi(n, x) \int_z^{2x} \frac{1}{(t-x)^2} d_t \left(\bigvee_x^t(g_x) \right) \\
&\leq \bigvee_x^z(g_x) \frac{\psi(n, x)}{(x-z)^2} + \psi(n, x) \left\{ \frac{1}{x^2} \bigvee_x^{2x}(g_x) - \frac{1}{(x-z)^2} \bigvee_x^z(g_x) \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_z^{2x} \frac{1}{(t-x)^3} \bigvee_x^t(g_x) dt \right\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$|\Delta_{31}| \leq \psi(n, x) \left\{ \frac{1}{x^2} \bigvee_x^{2x}(g_x) + 2 \int_z^{2x} \frac{1}{(t-x)^3} \bigvee_x^t(g_x) dt \right\}.$$

elde edilir. z değişkeni yerine yazılırsa,

$$\int_{x+x/\sqrt{n}}^{2x} \bigvee_x^t(g_x) \frac{dt}{(t-x)^3} = \frac{1}{2x^2} \int_1^{x+x/\sqrt{n}} \bigvee_x^{x+x/\sqrt{u}}(g_x) du \leq \frac{1}{2x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_x^{x+x/\sqrt{k}}(g_x)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
|\Delta_{31}| &\leq \frac{\psi(n, x)}{x^2} \left\{ \bigvee_x^{2x}(g_x) + \sum_{k=1}^n \bigvee_x^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) \right\} \\
&\leq \frac{2\psi(n, x)}{x^2} \sum_{k=1}^n \bigvee_x^{x+x/\sqrt{k}}(g_x)
\end{aligned} \tag{6.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi de Δ_{32} yi elde edelim. $f(t) = O(t^{2r})$, $t \rightarrow \infty$ sağlayan bir $r > 1$ tamsayısı mevcuttur. Tüm ortogonal polinomlar $\{p_k(nx)\}$ ailesi Asai 1921 çalışmasında denklem (1.2) de verilen rekürans bağıntısını sağlayan ve $\rho(t) = t$ için Brenke tipli doğurucu fonksiyonları (4.6) tarafından üretilir. (ayrıca bakınız Asai, Kubo, Kuo 2003). Lemma 5.1, Lemma 5.2, Uyarı 6.1 ve Asai 1921 de verilen tekrar oranı görünümünde bir matematiksel tümevarım yoluyla

$$K_n((t-x)^{2r}; x) = O(n^{-r}), n \rightarrow \infty$$

olduğu gösterilebilir. Sadece f, x, r , ye bağlı $M > 0$ sabiti için

$$\begin{aligned}
|\Delta_{32}| &\leq \frac{Mn}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{2x}^{\infty} \chi_{n,k}(t) t^{2r} dt \\
&\leq M2^{2r} K_n((t-x)^{2r}; x) = O(n^{-r}), n \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{6.23}$$

dir. (6.18) – (6.23) da bulunanların birleştirilmesiyle (6.16) elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■



7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çeşitli polinomları içeren lineer pozitif operatörler üzerine olan bu çalışmamız için makaleler incelendi ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri araştırıldı. Brenke polinomlarını içeren Szasz operatörlerine indirgenebilen çeşitli lineer pozitif operatörler tanımlandı ve bunların yaklaşım özellikleri incelendi. Ayrıca bu operatörlerin Kantorovich tipi, Voronovskaya tipi elde edildi, yaklaşım özellikleri verildi ve Kantorovich varyasyonun sınırlı salımlı fonksiyonlara yaklaşımı inşa edildi. Dahası Laguerre polinomlarını içeren lineer pozitif operatör tanımlandı ve sınırlı salımlı fonksiyonlara yaklaşım hızını veren teorem ispatlandı. Yine bu operatörler dışında operatörlerin tanımlanması, verimli çalışmalardan sonra birçok genellemesi yapılması ve operatörlerin bazı yaklaşım özelliklerini sağlamasının ispatlanması beklenmektedir.

Brenke ve Laguerre polinomlarını içeren lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelliklerini veren bu tez; yaklaşım teorisiyle ilgilenenlere motive edici bir destek olup; kaynak olabileceği düşüncesiyle de önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- Altomare, F. and Campiti, M. 1994. Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications, de Gruyter Studies in Mathematics, 17, Walter de Gruyter, Berlin, New York, pp. 627.
- Abel, U. and Ivan, M. 2002. Asymptotic expansion of the Jakimovski-Leviatan operators and their derivatives. Functions, series, operators (Budapest, 1999), 103–119, János Bolyai Math. Soc., Budapest.
- Asai, N. 1921. Notes on Some Orthogonal Polynomials Having the Brenke Type Generating Functions (Mathematical aspects of quantum fields and related topics), RIMS Kokyuroku, Kyoto University 2014-10, 41-53.
- Asai, N., Kubo, I., Kuo, H.H. 2003. Generating functions of orthogonal polynomials and Szegő-Jacobi parameters. Probab. Math. Statist. 23, no. 2, Acta Univ. Wratislav. No. 2593, 273–291.
- Agratini, O. 2001. An approximation process of Kantorovich type. Math. Notes. (Miskolc) 2(1), 3-10.
- Bojanic, R. 1979. An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation, Publ. Inst. Math. (Belgrade) 26 (40), 57-60.
- Bojanic, R. and Vuilleumier, M. 1981. On the rate of convergence of Fourier-Legendre series of functions of bounded variation, J. Approx. Theory 31, 67-79.
- Butzer, P.L. and Karsli, H. 2009. Voronovskaya-type theorems for derivatives of the Bernstein-Chlodovsky polynomials and the Szász-Mirakyan operator, Comment. Math., Vol. 49, No. 1, 33-57.
- Butzer, P. L. 1954. On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval, Proc. Amer. Soc., 5, 547-553.
- Cheng, F. 1984. On the rate of convergence of Szász-Mirakyan operator of functions of bounded variation, J. Approx. Theory 40, 226-241.
- Cheng, F. 1983. On the rate of convergence of Bernstein polynomials of functions of bounded variation, J. Approx. Theory 39, 259-274.
- Chihara, T. S. 1978. An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, NY, USA.
- Cheney, E.W. and Sharma, A. 1964. Bernstein power series, Canad. J. Math. 16, 241-252.
- Chanturiya, Z. A. 1974. The moduli of variation of a function and its applications in the theory of Fourier series. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 214, 63-66.
- Costarelli, D., Vinti, G. 2014. Order of approximation for sampling Kantorovich operators, Journal of Integral Equations and Applications, 26, (3), 345-368.

- Costarelli, D., Vinti, G. 2013. Approximation by nonlinear multivariate sampling kantorovich type operators and applications to image processing, Numerical Functional Analysis and Optimization 34, (8), 819-844.
- Douak, K. 1996. “*The relation of the d -orthogonal polynomials to the Appell polynomials,*” Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 70, no. 2, pp. 279–295.
- Ditzian, Z. and Totik, V. 1987. Moduli of Smoothness, Springer, New York, NY, USA.
- Doğru, O., Özarslan, M. A., Taşdelen, F. 2004. On positive operators involving a certain class of generating functions. Studia Sci. Math. Hung. 41(4), 415-429.
- Favard, J. 1944. Sur les multipicateurs d’interpolation, J. Math. Pures Appl. (9) 23, 219–247.
- Gould, H. W. and Hopper, A. T. 1962. “*Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials,*” Duke Mathematical Journal, vol. 29, no. 1, pp. 51–63.
- Gavrea, I., Rasa, I. 1993. Remarks on some quantitative Korovkin-type results, Rev. Anal. Number. Approx. 22 (2) 173 – 176.
- Guo, S. and Khan, M. K. 1989. On the rate of convergence of some operators for functions of bounded variation, J. Approx. Theory 58, 90-101.
- Gupta, V. 2004. The Bézier variant of Kantorovich-Balazs operators, Comp & Math. with Appl. 47, 227-232.
- Gupta, V. 2005. An Estimate on the convergence of Baskakov-Bézier operators. J. Math. Anal. Apply. 312(1), 280-288.
- Guo, S. 1989. On the rate of convergence of the integrated Meyer-König and Zeller operators for functions of bounded variation, J. Approx. Theory 56, 245-255.
- Ismail, M. E. H. 1974. “*On a generalization of Szász operators,*” Mathematica, vol. 39, no. 2, pp. 259–267.
- Jakimovski, A. and Leviatan, D. 1969. “*Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval,*” Mathematica, Vol. 11, pp. 97–103.
- Karsli, H. and Ibikli, E. 2008. Convergence rate of a new Bezier variant of Chlodowsky operators to bounded variation functions, J. Comput. Appl.Math. 212, 431-443.
- Khan, M. K. 1989. On the rate of converge of Bernstein power series for functions of bounded variation. J. Approx. Theory 57, 90-103.

- Mirakyan, G. 1941. Approximation des fonctions continues au moyen de polynomes de la forme $e^{-nx} \sum_{k=0}^m C_{k,n} \chi^k$, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 31, 201–205.
- Maroni, P. 1989. L'orthogonalite et les recurrences de polynomes d'ordre superieur a deux. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 10 105-139.
- Meyer-König, W. and Zeller, K. 1960. Bernsteinsche Potenzreihen, Studia Math. 19, 89-94.
- Öksüz, Ö., Karsli, H. and Tasdelen Yesildal, F. 2013. Convergence rate of Bézier variant of an operator involving Laguerre polynomials of degree n, Aip Conference Proceeding 1558-1160, doi : 10.1063/1.4825714.
- Öksüz, Ö., Karsli H. and Tasdelen F. 2015. Order of Approximation by an Operator Involving Biorthogonal Polynomials, Journal of Inequalities and Applications: 121, 1-3.
- Öksüz, Ö., Karsli H. and Tasdelen F. 2016. Approximation by a Kantorovich Variant of Szász Operators based on Brenke type Polynomials, Mediterranean Journal of Mathematics, 13(5), 3327-3340.
- Ozhavzali, M., Olgun, A. 2014. On a modified Szasz-Mirakjan-Kantorovich operators in polynomial weighted spaces, Adv. Appl. Math. Sci. 13 (5), 205-218.
- Pych-Taberska, P. and Karsli, H. 2011. On the rates of convergence of Bernstein-Chlodovsky polynomials and their Bézier-type variants, Appl. Anal., Volume 90, Issue 3-4, 403-416.
- Sahai, A. and Prasad, G. 1993. On the rate of convergence of some operators for modified Szasz-Mirakyan operators on functions of bounded variation, Publ. Inst. Math. (Belgrad) (N.S.) 53, No.67, 73-80.
- Shiryayev, A.N. 1984. Probability, Springer, New York.
- Szász, O. 1950. "Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval," Journal of Research of the National Bureau of Standards, vol. 45, no. 3, pp. 239–245.
- Tasdelen, F., Aktaş, R., Altın, A. 2012. A Kantorovich Type of Szász Operators Including Brenke-Type Polynomials, Abs. and Appl. Analysis, Article Number: 867203 DOI: 10.1155/2012/867,203.
- Varma, S., Sucu, S. and İçöz, G. 2012. "Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials," Computers & Mathematics with Applications, vol. 64, no. 2, pp. 121–127.
- Van Iseghem, J. 1987. Vector orthogonal relations. Vector QD-algorithm, J. Comput. Appl. Math. 19 141-150.

- Vinti, G. and Zampogni, L. 2014. Approximation results for a general class of Kantorovich type operators, *Advanced Nonlinear Studies*, 14, (4), 1, 991-1011.
- Zhuk, V. V. 1989. Functions of the Lip1 class and S. N. Bernstein's polynomials, *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.* 1 25 – 30. (*Russian*) .
- Zeng, X.M. 2000. Rates of approximation of bounded variation functions by two generalized Meyer-König and Zeller type operators, *Comput. Math. Appl.* 39, 1-13.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nevin USTA

Doğum Yeri : Altındağ

Doğum Tarihi : 05/10/1990

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Yeşilöz Lisesi (2009)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2013)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
(Şubat 2014 – Ağustos 2017)

Çalıştığı Kurum :

Ahi Evran Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi (2015)