

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİLİ GEOMETRİK SÜREÇTE PARAMETRE TAHMİNİ

Güneş Deniz OĞUZ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2021**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİLİ GEOMETRİK SÜREÇTE PARAMETRE TAHMİNİ

Güneş Deniz OĞUZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Geometrik süreç güvenilirlik teorisinde en çok kullanılan modellerden birisidir. Fakat, kullanım açısından bazı zorluklara sebep olmaktadır. Bu zorluklardan bir tanesi; modelin tanımının sadece stokastik olarak artan ya da azalan modeller için yapılabilmesidir. Diğer bir zorluk ise ele alınan ilk olay gerçekleşme zamanının dağılımının şekil parametresinin takip eden olaylar arası geçen zaman dağılımları için değişmeden kalmasıdır. Belirtilen bu zorlukların üstesinden gelebilen ikili geometrik süreç Wu (2018) tarafından geliştirilip literatüre dahil edilmiştir. Bu çalışmada ilk olarak ikili geometrik süreç ve bazı matematiksel özellikleri tanıtılır. Daha sonra bu süreçte, ilk olayın gerçekleşme zamanının dağılımının şekilsel olarak bilindiği varsayımı altında parameter tahmin problemi ele alınır. Özellikle üstel ve Weibull dağılımı durumunda hem süreç parametrelerinin hem de ele alınan dağılımın bilinmeyen parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilmesinde durulur. Her iki dağılım durumunda en çok olabilirlik tahmin edicilerinin performansları bir simülasyon çalışması ile değerlendirilir.

Eylül 2021, 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Geometrik süreç, ikili geometrik süreç, üstel dağılım, Weibull dağılım, parameter tahmini, EÇO, HKO

ABSTRACT

Master Thesis

PARAMETER ESTIMATION IN DOUBLY GEOMETRIC PROCESS

Güneş Deniz OĞUZ

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Science
Department of Statistics

Supervisor : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Geometric process is one of the most used models in the reliability theory. However, it causes some difficulties in terms of use. One of these difficulties is that the definition of the model includes only stochastically increasing or decreasing cases. Another difficulty is that the shape parameter of the distribution of the first event occurrence time remains unchanged for the elapsed time distributions between subsequent events. The doubly geometric process was given by Wu (2018) to overcome these difficulties. In this study, firstly, the doubly geometric process and some mathematical properties are presented. Then, for this process, the parameter estimation problem is considered under the assumption that the distribution of the occurrence time of the first event is formally known. In particular for the exponential and Weibull distributions, obtaining the maximum likelihood estimators of both the process parameters and the unknown parameters of the distribution is handled. The performances of the maximum likelihood estimators for the both distributions are evaluated with a simulation study.

September 2021, 33 pages

Key Words:, Geometric process, doubly geometric process, exponential distribution, Weibull distribution, parameter estimation, maximum likelihood method.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam sırasında desteklerini benden esirgemeyen sayın Hocam Prof. Dr. Halil AYDOĞDU' ya, çok değerli tez jüri üyelerime, Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Hilmi PEKALP ile Dr. Araş. Gör. Gültaç EROĞLU İNAN hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Güneş Deniz OĞUZ

Ankara, Eylül 2021



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. BAZI KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1 Rasgele Değişken	4
2.2 Stokastik Süreç	4
2.3 $o(h)$ fonksiyonu.....	5
2.4 Durağan Artışlı Süreç	5
2.5 Bağımsız Artışlı Süreç	5
3. BAZI SAYMA SÜRECİ	6
3.1 Sayma Süreci	6
3.2 Homojen Poisson Süreci	6
3.3 Durağan Olmayan Poisson Süreci	7
3.4 Yenileme Süreçleri	8
3.5 Geometrik Süreçler	8
3.5.1 Geometrik süreç için olaylar arası geçen zamanların dağılım fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı.....	9
3.5.2 Geometrik sürecin monotonluk özelliği.....	9
3.6 İkili Geometrik Süreç	10
3.6.1 İkili geometrik süreçte olaylar arası geçen ardışık zamanların sürelerinin dağılım fonksiyonu, beklenen değer ve varyansı	11
3.6.2 İkili geometrik süreçte hk 'nın yapısının belirlenmesi	13
3.6.3 İkili geometrik sürecin monotonluk özelliği.....	13
3.6.4 Yenileme süreci ile ikili geometrik sürecin stokastik olarak karşılaştırılması.....	13
4. İKİLİ GEOMETRİK SÜRECE İLİŞKİN PARAMETRELERİN TAHMİNİ ...	16
4.1 Üstel Dağılım	16

4.2 Üstel Dağılım Durumunda İkili Geometrik Süreç için İstatistiksel Çıkarım...	16
4.3 Weibull Dağılımı	19
4.4 Weibull Dağılımı Durumunda İkili Geometrik Süreç için İstatistiksel Çıkarım... ..	20
5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	23
6. GERÇEK VERİ UYGULAMASI.....	29
6.1 Üstel Dağılım Örneği	29
6.2 Weibull Dağılımı Örneği	30
7. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ.....	33

SİMGELER DİZİNİ

X_n : ($n - 1$). olay gerçekleştikten sonra n . olay (yenileme) gerçekleşinceye kadar geçen zaman

S_n : n . olayın (yenileme) gerçekleşme zamanı

$N(t)$: ($0, t$] aralığında gerçekleşen yenilemelerin sayısı

$\lambda(t)$: Şiddet Fonksiyonu

E : Durum uzayı

T : Parametre kümesi

F : Dağılım fonksiyonu

f : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

a : İkili geometrik sürecin oran parametresi

b : İkili geometrik sürecin model parametresi

α : Weibull dağılımı şekil parametresi

β : Weibull dağılımı ölçek parametresi

Kısaltmalar

HKO Hata kareler ortalaması

EÇO En Çok Olabilirlik

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	Geometrik sürecin monotonluk özelliği	9
Çizelge 5.1	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$, $b = 2$) Üstel ($\theta = 2$)	24
Çizelge 5.2	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$, $b = -2$) Üstel ($\theta = 2$)	24
Çizelge 5.3	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05 = 0.5$) Üstel ($\theta = 2$)	25
Çizelge 5.4	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$, $b = -0.5$) Üstel ($\theta = 2$)	25
Çizelge 5.5	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, b = 2$) Üstel ($\theta = 2$)	26
Çizelge 5.6	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$, $b = 2$) Weibull($\alpha = 3, \beta = 1$)	26
Çizelge 5.7	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$, $b = -2$) Weibull($\alpha = 3, \beta = 1$)	26
Çizelge 5.8	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$, $b = 2$) Weibull ($\alpha = 1.5, \beta = 1$)	27
Çizelge 5.9	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, 0.99, 1.01, 1.05$, $b = -2$) Weibull ($\alpha = 1.5, \beta = 1$)	27
Çizelge 5.10	İkili geometrik süreç ($a = 0.95, b = 2$) Weibull($\alpha = 3, \beta = 1$)	27
Çizelge 6.1	Üstel dağılım için en çok olabilirlik tahmin edicileri, KS test ve p değerleri	30
Çizelge 6.2	Weibull dağılımı için: en çok olabilirlik tahmin edicileri, KS test ve p değerleri	30

1. GİRİŞ

Sayma süreci, olaylar arası geçen zaman sürelerinin istatistiksel analizinde sık olarak kullanılan faydalı bir yöntemdir. $N(t)$, $(0, t]$ aralığında meydana gelen olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik süreci bir sayma süreci olarak adlandırılır. $n = 1, 2, \dots$ için $X_n, (n - 1)$. olay gerçekleştikten sonra n . olayın gerçekleşme zamanına kadar geçen süre olmak üzere $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisi $\{N(t), t \geq 0\}$ sürecinin olaylar arası geçen zamanlar dizisi olarak tanımlanır. Bu dizi yardımıyla sayma süreci tek olarak belirlenir. Burada $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisi birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerden meydana geliyor ise bu süreç bir yenileme süreci olur. Gerçek dünya problemlerinde bir sayma sürecinden gelen veri kümesi genellikle yaşlanma ve yıpranma etkisine bağlı olarak monoton trend içerir. Bu durumda zaman süreleri birbirinden bağımsız olabilir, fakat aynı dağılımlı olmayacak ve böylece model olarak bir yenileme süreci kullanılamayacaktır. Literatürde, bu şekilde trende sahip zamanlara ilişkin veri kümelerinin analizi için birçok yöntem vardır. Geometrik süreç bunlardan birisidir. Geometrik süreç ilk olarak Lam (1988) tarafından yenileme sürecinin genellemesi olarak tanımlanmıştır. Lam (1992) geometrik süreçte parametrik olmayan çıkarımda bulunmuştur. Lam (1998) geometrik süreçte lognormal dağılım varsayımı ile parametre tahmin problemini ele almıştır. Literatürde geometrik süreç için, X_1 rasgele değişkeninin dağılımının Weibull, gamma, lognormal, inverse Gaussian gibi en çok kullanılan güvenilirlik dağılımları olduğu varsayımı ile EKK Yöntemi, En çok olabilirlik yöntemi gibi yöntemler ile parametre tahminleri yapıp, karşılaştırmalarda bulunarak çeşitli sonuçlar çıkartılmıştır. Kara (2009) çalışmasında, geometrik süreci geniş olarak ele almıştır. Çalışmada, parametrelerin parametrik ve parametrik olmayan tahmini problemleri geniş simülasyon çalışmaları ile değerlendirilmiştir. Aydoğdu vd. (2010a) çalışmalarında Weibull dağılımı varsayımı ile geometrik süreçte parametre tahmininde bulunmuşlardır. Aydoğdu vd. (2010b), α seri sürecine Weibull dağılımı ile uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemini uygulamışlardır. Kara vd.(2015), geometrik süreçte ters Gaussian dağılımı ile istatistiksel çıkarımda bulunmuştur. Çalışmada, dağılımın ve sürecin a oran parametresinin tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri incelenmiştir. Kara vd. (2019), α seri sürecinde lognormal dağılım ile parametre tahminini ele almıştır.

Bu tez çalışmasına bağlı olarak Pekalp vd. (2020, 2021) üstel ve Weibull dağılımları durumunda ikili geometrik süreçte parametre tahmin problemini ele almışlardır.

Geometrik süreç çeşitli alanlarda rasgelelik problemlerin çözümünde geniş ölçüde kullanılan önemli bir model olmasına rağmen, kullanım açısından bazı sınırlamalar taşımaktadır. Bu model, olaylar arası geçen sürelerinin değişen şekil parametrelerine sahip aynı tür dağılımları istemesi durumunda uygun olmayacaktır. Ayrıca ikinci bir sınırlama ise bu modelin olaylar arası geçen sürelerini stokastik monoton olarak istemesidir. Wu (2018) tarafından önerilen ikili geometrik süreç bu iki sınırlamanın üstesinden gelebilmektedir. Bu tez çalışmasına bağlı olarak Pekalp vd. (2020, 2021) üstel ve Weibull dağılımları durumunda ikili geometrik süreçte parametre tahmin problemini ele almışlardır.

Bu çalışmanın literatüre katkısı, geometrik sürece alternatif olarak geliştirilen, geometrik sürecin sınırlamalarından kaynaklanan zorlukların üstesinden gelebilen ikili geometrik süreci tanıtarak, ilk olarak üstel ve Weibull dağılımları ele alarak parametre tahmininde bulunmasıdır. Bildiğimiz kadarıyla literatürde ikili geometrik süreçte parametre tahmin problemine ilişkin olarak başka bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmanın bölümleri aşağıda açıklanmıştır.

İkinci bölümde, öncelikle rasgele değişken ve stokastik süreç temel kavramları verilecektir. Sonrasında durağan artırlı süreç , $o(h)$, bağımsız artırlı süreç kavramları verilecektir.

Üçüncü bölümde, öncelikle sayma süreci kavramı verilip, sonrasında durağan Poisson süreci, yenileme süreci, durağan olmayan Poisson süreci, geometrik süreç ve son olarak literatürde tanıtılan ikili geometrik süreç ve olasılıksal özellikleri ele alınacaktır.

Dördüncü bölümde, ikili geometrik süreç için Weibull dağılımı ve üstel dağılım varsayımı altında, model parametrelerinin ve dağılım parametrelerinin parametre tahminleri ele alınacak ve gerekli istatistiksel çıkarımlar verilecektir.

Beşinci bölümde, her bir parametrenin tahmin edicilerinin küçük örneklem özelliklerini ve performanslarını değerlendirmek için farklı parametre ve örneklem değerleri ile bir simülasyon çalışması yapılacaktır. Simülasyon çalışması sonrası, tahmin edicilerin performansları değerlendirilecek ve çalışmanın EÇÖ tahmin edicilerinin asimptotik istatistiksel özelliklerini desteklediği belirtilecektir.

Altıncı bölümde, Kumar and Klefsjö (1992) ve Ascher and Feingold (1984) de yer alan iki veri seti için, ikili geometrik sürecin, belirli bir üstel ve Weibull dağılımı ile ilgili veri setlerinin modellenmesinde kullanım durumu incelenecektir.

Yedinci bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlar değerlendirilecektir.

2. BAZI KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmadaki bazı kurumsal temeller ve kavramlar üzerinde durulmaktadır. Rasgele değişken, stokastik süreç, $o(h)$ fonksiyonu, durağan artışlı, bağımsız artışlı süreç tanımları verilecektir.

2.1 Rasgele Değişken

Bir olasılık uzayı $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ olmak üzere

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega) \rightarrow X(\omega)$$

fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ için $\{\omega: X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{U}$ şartını sağlıyorsa, X fonksiyonuna rasgele değişken denir. D_X rasgele değişkenin değer kümesini gösterir.

2.2 Stokastik Süreç

$(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve T bir parametre kümesi olsun.

$$X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Her sabit $t \in T$ için $X(t, \omega)$ bir rasgele değişken ise X fonksiyonuna bir stokastik süreç adı verilir ve

$$\{X(t), t \in T\}$$

ile gösterilir. Her sabit $t \in T$ için $X(t)$ rasgele değişkenlerinin almış olduğu değerlerin kümesine stokastik sürecin durum uzayı denir ve E ile gösterilir. E durum uzayı ve T parametre kümesi için dört durum söz konusudur.

1. E durum uzayı sayılabilir (sonlu elemanlı ya da sayılabilir sonsuz), T parametre kümesi sayılabilir: Süreç kesikli durum uzaylı, kesikli parametre kümelidir.
2. E durum uzayı sayılamaz, T parametre kümesi sayılamaz: Süreç sürekli durum uzaylı, sürekli parametre kümelidir.
3. E durum uzayı sayılabilir (sonlu elemanlı ya da sayılabilir sonsuz), T parametre kümesi sayılamaz: Süreç kesikli durum uzaylı, sürekli parametre kümelidir.
4. E durum uzayı sayılamaz, T parametre kümesi sayılabilir: Süreç sürekli durum uzaylı, kesikli parametre kümelidir.

2.3 $o(h)$ fonksiyonu

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ ise $f(h) = o(h)$ yazılır. $f(h) = o(h)$ olması f fonksiyonunun h dan daha hızlı 0'a gittiği anlamına gelir. Özellik $f(h) = o(h)$ ve $g(h) = o(h)$ iken $af(h) + bg(h) = o(h)$ olur.

2.4 Durağan Artışlı Süreç

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. Her $h > 0$ ve $t + h \in T$ için, $X(t + h) - X(t)$ rasgele değişkeninin dağılımı sadece h 'a bağlı (t den bağımsız) ise $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine durağan artışlı süreç denir.

2.5 Bağımsız Artışlı Süreç

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ şartını sağlayan T parametre kümesine ait $t_1, t_2, \dots, t_n$ 'lerin her seçim için, $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ise, $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine bağımsız artışlı stokastik süreç denir.

3. BAZI SAYMA SÜRECİ

Bu bölümde öncelikle sayma süreci tanımı verilip, sonrasında temel sayma süreçlerinden olan durağan Poisson süreci, yenileme süreci, durağan olmayan Poisson süreci, geometrik süreç ve son olarak literatürde tanıtılan ikili geometrik süreç ve olasılıksal özellikleri ele alınacaktır.

3.1 Sayma Süreci

$N(t)$, $(0, t]$ aralığında meydana gelen olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik süreci bir sayma süreci olarak adlandırılır. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci sürekli parametre kümesi $T = [0, \infty)$ ve kesikli durum uzayı $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ile aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $N(t) \geq 0$,
2. $N(t)$ pozitif ve tamsayı değerler alan rasgele bir değişkendir.
3. $s < t$ olması durumunda $N(s) \leq N(t)$ 'dir.
4. $s < t$ iken $(s, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısı $N(t) - N(s)$ 'dir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecini gözönüne alalım. $n = 1, 2, \dots$ için $X_n; (n - 1)$. olay gerçekleştikten sonra n . olayın gerçekleşme zamanına kadar geçen süre olmak üzere; $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisine $\{N(t), t \geq 0\}$ sürecinin olaylar arası geçen zamanları dizisi denir. Bu olaylar arası geçen zaman dizisi ile sayma süreci tek olarak belirlenir. $S_0 = 0$ $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ $n = 1, 2, \dots$ olsun. $S_n, \{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinin n . Olay için gerçekleşme zamanını ifade eder. Sabit her $t \geq 0$ için $N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$ 'dir. Ek olarak $(N(t) \geq n)$ olayının $(S_n \leq t)$ olayına denk olmasından $P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$ 'dir.

3.2 Homojen Poisson Süreci

Tanım 3.2.1 Bir $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecini gözönüne alalım. $\lambda > 0$ olmak üzere,

i) $N(0) = 0$

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı

iii) Uzunluğu t olan herhangi bir aralıkta gerçekleşen olayların sayısına ilişkin dağılım λt ortalamalı Poisson dağılımıdır, yani $P(N(t+s) - N(s) = k) = e^{-\lambda t} \lambda t^k / k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$ ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci λ oranlı Poisson süreci olarak adlandırılır.

iii. özelliği gözönüne aldığımızda bir Poisson sürecinin aynı zamanda durağan artışı olduğu söylenir.

Bir Poisson sürecine göre gerçekleşen olaylar arası geçen zaman dizisi bağımsız ve aynı $\frac{1}{\lambda}$ ortalaması ile üstel dağılıma sahip rasgele değişkenlerden oluşur. λ birim zaman başına düşen ortalama olay sayısıdır.

$$E(N(t)) = \lambda t, t \geq 0$$

$$V(N(t)) = \lambda t, t \geq 0$$

3.3 Durağan Olmayan Poisson Süreci

Tanım 3.3.1 Bir $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci gözönüne alınsın. $t \geq 0$ iken $\lambda(t)$ t 'nin negatif değerler almayan bir fonksiyonunu göstermek üzere;

i) $N(0) = 0$

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı

iii) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

iv) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$

ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci $\lambda(t)$ şiddet fonksiyon ile homojen olmayan Poisson süreci olarak adlandırılır. Burada $\lambda(t)$ sabit olmadığı için homojen olmayan Poisson süreci adı verilir.

Bu sürecin bir boyutlu olasılık dağılımı

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \left[\int_0^t \lambda(s)ds \right]^n}{n!}, n = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

ile verilir.

3.4 Yenileme Süreçleri

Tanım 3.4.1 Bir $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine göre gerçekleşen olaylar (yenilemeler) arası geçen zamanların dizisi birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyor ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci bir yenileme süreci olarak adlandırılır.

3.5 Geometrik Süreçler

Tanım 3.5.1 Pozitif değerli rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ olsun. a pozitif bir sabit olmak üzere

$$X_1, aX_2, a^2X_3, \dots$$

rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımlı ise, $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisinin üzerine kurulu olan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci, a oranı ile bir geometrik süreç olarak adlandırılır.

$a = 1$ olması durumunda rasgele değişkenler aynı dağılımlı olurlar ve karşımıza çıkan geometrik süreç bir yenileme sürecine dönüşür.

$Y_n = a^{n-1}X_n, n = 1, 2, \dots$ olsun. $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişken dizisinde olaylar arası geçen zamanların dağılım fonksiyonu F , bu dağılım fonksiyonunun ortalaması μ ve varyansı σ^2 olmak üzere

$$N(t) = \max \{n: S_n \leq t\}$$

ile tanımlı $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci oluşturur.

3.5.1 Geometrik süreçler için olaylar arası geçen zamanların dağılım fonksiyonu, beklenen değeri ve varyansı

X_n ; $(n - 1)$. olay gerçekleştikten sonra n . olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olmak üzere; X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(a^{-n+1} Y_n \leq x) \\ &= P(Y_n \leq x a^{n-1}) \\ &= F(a^{n-1} x) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} E(X_n) &= a^{-n+1} \mu \\ V(X_n) &= a^{-2n+2} \sigma^2 \end{aligned}$$

dır.

3.5.2 Geometrik sürecin monotonluk özelliği

Tanım 3.5.2.1 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ olasılık uzayında tanımlı herhangi iki rasgele değişken X ve Y olsun. $P(X > t) \geq P(Y > t)$ ise X stokastik olarak Y den büyük veya eşittir denir. $X \geq_{st} Y$ olarak gösterilir.

Lemma 3.5.2.1 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ olasılık uzayında tanımlı herhangi iki rasgele değişken X ve Y olsun. Tüm artan $u(\cdot)$ fonksiyonları için; $X \geq_{st} Y \Leftrightarrow E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ 'dir [6].

Tanım 3.5.2.2 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ bir uzayda tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Her $n = 1, 2, 3 \dots$ için $X_n \geq_{st} X_{n+1}$ ise $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisine stokastik olarak azalandır denir ve $X_n \downarrow_{st}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.5.2.3 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ bir uzayda tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Her $n = 1, 2, 3 \dots$ için $X_n \leq_{st} X_{n+1}$ ise $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisine stokastik olarak artandır denir ve $X_n \uparrow_{st}$ biçiminde gösterilir. Geometrik sürecin a parametresinin değerlerine göre davranışı aşağıdaki gibidir:

Çizelge 3.1 Geometrik sürecin monotonluk özelliği

Parametre değeri	Durum
$a > 1$	$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ stokastik azalan
$a < 1$	$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ stokastik artan
$a = 1$	$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ bir yenileme süreci oluşturur.

3.6 İkili Geometrik Süreç

Geometrik süreç, ilk tanıtıldığı andan bu yana özellikle güvenilirlik analizinde geniş yer almaktadır. Süreç, çeşitli alanlarda problemlerin çözümünde geniş ölçüde kullanılan önemli bir model olmasına rağmen, kullanım açısından bazı sınırlamalar taşımaktadır.

Bu sınırlamalar;

1. Model, olaylar arası geçen zaman sürelerinin değişen şekil parametrelerine sahip dağılımlar tarafından modellenmeye ihtiyaç duyulduğu stokastik süreçler için uygun değildir.

2. Sadece stokastik olarak artan ya da azalan stokastik süreçler için tanımlanabilmektedir.

Wu (2018), tarafından önerilen ikili geometrik süreç, bu iki sınırlamanın üstesinden gelebilmektedir.

Tanım 3.6.1 $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ pozitif değerli rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun. $h(k)$ bazı parametrelere bağlı IN üzerinde tanımlı pozitif değerli $h(1) = 1$ ile ifadesi bilinen bir fonksiyon, ve a pozitif bir sabit olmak üzere

$$X_1, a X_2^{h(2)}, a^2 X_3^{h(3)}, \dots$$

rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımlı ise $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ dizisinin üzerine kurulu $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine bir ikili geometrik süreç denir. Burada; $h(k) = (1 + \log(k))^b$ olarak tanımlıdır; a^{k-1} ölçek etki faktörü, $h(k)$ şekil etki faktörü olmak üzere,

$\{a^{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots\}$ bir geometrik seri, $\{h(k), k = 1, 2, 3, \dots\}$ bir geometrik seri oluşturmaktadır. Bu iki geometrik seri sebebiyle süreç; “İkili Geometrik Süreç” olarak adlandırılmaktadır.

3.6.1 İkili geometrik süreçte olaylar arası geçen ardışık zamanların sürelerinin dağılım fonksiyonu, beklenen değer ve varyansı

İkili geometrik süreçte, $Y_k = a^{k-1} X_k^{h(k)}$ olarak tanımlıdır. X_k , $(k - 1)$. olay gerçekleştikten sonra k . olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olmak üzere X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, beklenen değer ve varyansını hesaplayabilmek için öncelikle

$$\begin{aligned} Y_k = a^{k-1} X_k^{h(k)} &\Rightarrow X_k^{h(k)} = a^{1-k} Y_k \\ &\Rightarrow X_k = (a^{1-k} Y_k)^{\frac{1}{h(k)}} \end{aligned}$$

ilgili dönüşümü yapılmalıdır. X_k rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{X_k}(x) &= P(X_k \leq x) \\ &= P(Y_k \leq a^{k-1} x^{h(k)}) \\ &= F(a^{k-1} x^{h(k)}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. X_k rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı, $h^{-1}(k) = \frac{1}{h(k)}$ olmak üzere,

$$E(X_k) = a^{(1-k)h^{-1}(k)} \lambda_{1k}$$

$$Var(X_k) = a^{2(1-k)h^{-1}(k)} (\lambda_{2k} - \lambda_k^2)$$

dır. Burada

$$\lambda_{1k} = \int_0^{\infty} x^{h^{-1}(k)} f(x) dx$$

$$\lambda_{2k} = \int_0^{\infty} x^{2h^{-1}(k)} f(x) dx$$

olarak tanımlıdır.

Yukarıdaki moment ifadelerinin çıkarımları aşağıda verilir.

$$X_k \stackrel{d}{=} (a^{1-k} Y_k)^{h^{-1}(k)}, \quad Y_k \stackrel{d}{=} X_1, \quad \forall k \geq 1$$

$$E(X_1^{h^{-1}(k)}) < \infty \text{ ve } E(X_1^{2h^{-1}(k)}) < \infty \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} E(X_k) &= E\left(a^{(1-k)h^{-1}(k)} Y_k^{h^{-1}(k)}\right) \\ &= a^{(1-k)h^{-1}(k)} E\left(Y_k^{h^{-1}(k)}\right) \\ &= a^{(1-k)h^{-1}(k)} \int_0^{\infty} x^{h^{-1}(k)} dF(x) \\ &= a^{(1-k)h^{-1}(k)} \int_0^{\infty} x^{h^{-1}(k)} f(x) dx \\ &= a^{(1-k)h^{-1}(k)} \lambda_{1k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_k^2) &= a^{2(1-k)h^{-1}(k)} \int_0^{\infty} x^{2h^{-1}(k)} dF(x) \\ &= a^{2(1-k)h^{-1}(k)} \int_0^{\infty} x^{2h^{-1}(k)} f(x) dx \\ &= a^{2(1-k)h^{-1}(k)} \lambda_{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X_k) &= a^{2(1-k)h^{-1}(k)} \lambda_{2k} - a^{2(1-k)h^{-1}(k)} \lambda_{1k}^2 \\ &= a^{2(1-k)h^{-1}(k)} (\lambda_{2k} - \lambda_{1k}^2) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.6.2 İkili geometrik süreçte $h(k)$ 'nın yapısının belirlenmesi

Burada; ikili geometrik süreç, $h(k) = (1 + \log(k))^b$ olarak tanımlanan $h(k)$ fonksiyonu ile ele alınmıştır. $h(k)$ 'nın seçimi; $h(k) = b^{k-1}$, $h(k) = b^{\log(k)}$, $h(k) = b^{\log(k)}$ olarak tanımlı farklı $h(k)$ fonksiyonları için gerçek veri setinde ele alınmıştır. Sonuç olarak; $h(k) = (1 + \log(k))^b$ fonksiyonu ile sürecin diğer $h(k)$ fonksiyonlarına göre daha iyi performans gösterdiği görülmüştür.

3.6.3 İkili geometrik sürecin monotonluk özelliği

Geometrik süreç, sadece stokastik olarak artan ya da azalan süreçleri modellemesine rağmen, ikili geometrik süreç daha esnek süreçleri modelleyebilmektedir. Aşağıdaki 4 durum örnek olarak verilebilir.

Teorem 3.6.3.1

$\{N(t), t \geq 0\}$, olaylar arası geçen zaman dizisi $\{X_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ bir ikili geometrik Süreç olsun. Bu durumda;

- i. $0 < a < 1$, $P(X_1 > 1) = 1$ ve $b < 0$ ise $\{X_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ stokastik olarak artandır.
- ii. $a > 1$, $P(0 < X_1 < 1) = 1$ ve $b < 0$ ise $\{X_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ stokastik olarak azalandır.
- iii. $0 < a < 1$, $P(0 < X_1 < 1) = 1$ ve $0 < b < 4.898226$ ise $\{X_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ stokastik olarak artandır.
- iv. $a > 1$, $P(X_1 > 1) = 1$ ve $0 < b < 4.898226$ ise $\{X_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ stokastik olarak azalandır.

3.6.4 Yenileme süreci ile ikili geometrik sürecin stokastik olarak karşılaştırılması

$\{N(t), t \geq 0\}$ a oran parametresi $h(k) = (1 + \log(k))^b$ ile X_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu F olmak üzere ardışık olaylar arası geçen zamanlar dizisi $\{X_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ olan bir ikili geometrik süreç olsun.

$\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ ise aynı F dağılımına sahip ardışık yenilemeler arası geçen zamanlar dizisi $\{\tilde{X}_k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ olacak şekilde bir yenileme sürecini gösterebilir. Bu durumda bu iki sürecin karşılaştırılmasına ilişkin olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem:

i) $X_t \uparrow_{st} \Rightarrow$ Her sabit $t \geq 0$ için $N(t) \leq_{st} \tilde{N}(t)$

ve

ii) $X_t \downarrow_{st} \Rightarrow$ Her sabit $t \geq 0$ için $N(t) \geq_{st} \tilde{N}(t)$

dır.

İspat:

i) $X_t \uparrow_{st}$ olsun. $X_1 \stackrel{d}{=} \tilde{X}_1$ ve $X_2 \geq_{st} X_1 \stackrel{d}{=} \tilde{X}_2$ dir. Genel olarak $X_k \geq_{st} \tilde{X}_k$, $k = 1, 2, \dots$ olur.

$$\begin{aligned}
 P(X_1 + X_2 \leq t) &= \int_0^\infty P(X_1 + X_2 \leq t | X_1 = x) dF(x) \\
 &= \int_0^\infty P(X_2 \leq t - x) dF(x) \\
 &= \int_0^t P(X_2 \leq t - x) dF(x) \\
 &\leq \int_0^t P(\tilde{X}_2 \leq t - x) dF(x) \\
 &= \int_0^t F(t - x) dF(x) \\
 &= F^* F(t) \\
 &= P(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 \leq t),
 \end{aligned}$$

Yani $X_1 + X_2 \geq_{st} \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$ dir.

$$P(X_1 + X_2 + X_3 \leq t) = \int_0^t P(X_3 \leq t - x) dF_{X_1+X_2}(x)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t P(\tilde{X}_3 \leq t-x) dF_{X_1+X_2}(x) \\
&= \int_0^t F_{X_1+X_2}(x) d \underbrace{(-F_{\tilde{X}_3}(t-x))}_{x' \text{ e göre azalmayan}} , \\
&\leq \int_0^t F_{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2}(x) d(-F_{\tilde{X}_3}(t-x)) \\
&= \int_0^t F_{\tilde{X}_3}(t-x) dF_{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2}(x) \\
&= P(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3 \leq t)
\end{aligned}$$

yani

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq_{st} \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3 \text{ dir.}$$

Bu şekilde devam edilirse $k \geq 1$ için genel olarak

$$X_1 + \dots + X_k \geq_{st} \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_k \text{ bulunur. Bu durumda}$$

$$S_k = X_1 + \dots + X_k \text{ ve } \tilde{S}_k = \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_k \text{ olmak üzere}$$

$(P(N(t) \geq k) = P(S_k \leq t)) \leq (P(\tilde{S}_k \leq t) = P(\tilde{N}(t) \geq k))$ olduğundan her sabit $t \geq 0$ için $\tilde{N}(t) \geq_{st} N(t)$ dir.

4. İKİLİ GEOMETRİK SÜRECE İLİŞKİN PARAMETRELERİN TAHMİNİ

$\{N(t), t \geq 0\}$, bir ikili geometrik süreç olmak üzere; ilk olayın gerçekleşme zamanı olan X_1 rasgele değişkeninin F dağılım fonksiyonu ya hiç bilinmiyordur ya da şekilsel olarak bilinirken bazı parametreleri bilinmemektedir. Bu durumda F dağılım fonksiyonunun şekilsel olarak bilinip bilinmemesine göre parametrik ya da parametrik olmayarak süreçten gelen veri kümesine dayalı olarak ilgili parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada F dağılım fonksiyonunun şekilsel olarak bilindiği kabul edilmektedir. Bu bölümde üstel ve Weibull dağılımları için model parametrelerinin ve dağılımların parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin yöntemine göre tahmin edilmesi problemi üzerinde durulacaktır.

4.1 Üstel Dağılım

Üstel dağılım güvenilirlik analizinde kullanılan ve bütün özellikleri ortaya çıkartılmış “hafızasızlık” özelliğine sahip önemli bir ömür dağılımıdır. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0; \theta > 0. \quad (4.1)$$

dır. Bu dağılımın beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$\mu = \theta \quad (4.2)$$

$$\sigma^2 = \theta^2 \quad (4.3)$$

olarak elde edilir.

4.2 Üstel Dağılım Durumunda İkili Geometrik Süreç için İstatistiksel Çıkarım

Farz edelim ki $\{X_1, \dots, X_n\}$ ikili geometrik süreçten gelen bir veri kümesi olsun. X_1 ilk olayın gerçekleşme zamanı olmak üzere bu rasgele değişkeninin dağılımı θ parameteresi ile üstel olsun. Bu durumda $X_1 \sim \text{Üstel}(\theta)$, (4.1) olasılık yoğunluk

fonksiyonuna sahiptir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsızdır, fakat aynı dağılımlı değildir. X_k rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_k}(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{a^{k-1} x^{h(k)}}{\theta}} a^{k-1} x^{h(k)-1} h(k) \quad (4.4)$$

olarak elde edilir.

$$L(a, b, \mu, \sigma^2) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(x) \quad (4.5)$$

$$L(a, b, \mu, \sigma^2) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{(\sum_{k=1}^n a^{k-1} x_k^{(1+\log(k))^b})}{\theta}} \prod_{k=1}^n (x_k^{(1+\log(k))^b-1} (1+\log(k))^b) \quad (4.6)$$

Bu durumda $\ln L$, en çok olabilirlik fonksiyonunun logaritması olmak üzere,

$$\begin{aligned} \ln L(a, b, \theta) &= \frac{n(n-1)}{2} \ln a - n \ln(\theta) - \frac{1}{\theta} \left(\sum_{k=1}^n a^{k-1} x_k^{(1+\log(k))^b} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^n ((1+\log(k))^b - 1) \ln(x_k) + \sum_{k=1}^n \ln(1+\log(k))^b \end{aligned} \quad (4.7)$$

olarak elde edilir. $\ln L$, log-olabilirlik fonksiyonunun a, b ve θ parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n(n-1)}{2a} - \frac{1}{\theta} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) a^{k-2} x_k^{(1+\log(k))^b} \right) = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \left\{ -\frac{1}{\theta} \left(\sum_{k=1}^n a^{k-1} x_k^{(1+\log(k))^b} \ln(x_k) (1+\log(k))^b \ln(1+\log(k)) \right) \right\} + \\ &\left(\sum_{k=1}^n \ln(x_k) (1+\log(k))^b \ln(1+\log(k)) \right) + \left(\sum_{k=1}^n \ln(1+\log(k)) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \left(\sum_{k=1}^n a^{k-1} x_k^{(1+\log(k))^b} \right) = 0. \quad (4.10)$$

θ ve α, β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin değerleri bu lineer olmayan denklem sisteminin çözümünden elde edilebilir. Fakat bu denklemlerden analitik bir

çözüme ulaşılamaz. Bu sebepten sayısal bir yöntemle ihtiyaç duyulur. Bu amaç için Mathematica paket programında “ NMaximize” alt programı kullanılabilir.

En çok olabilirlik fonksiyonlarının ortak dağılımları (a, b, θ) ortalama vektörü ve I^{-1} varyans kovaryans matrisi ile asimptotik olarak normal dağılmaktadır .Barndorff-Nielsen ve Cox (1994).

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ \theta \end{pmatrix}, I^{-1} \right) \quad (4.11)$$

Burada, I^{-1} Fisher Informasyon Matrisinin tersini göstermektedir.

$$I = \begin{bmatrix} E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) \\ E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \ln L}{\partial b} \right) \\ E \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right) & E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

olarak tanımlıdır. Burada informasyon matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} E \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} \right) &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6a^2} \\ E \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b \partial a} \right) &= \frac{1}{a} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) \ln(1 + \log(k)) (0.422784 + \ln(\theta) - \ln(a^{k-1})) \right) \\ E \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial a} \right) &= \frac{n-n^2}{2a\theta} \\ E \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\ln(1 + \log(k))^2 (1 + ((0.16667(4.94208 + 6\ln(\theta))(0.845569 \right. \\ &\quad \left. + \ln(\theta)))) - 2\ln(a^{k-1})(0.422784 + \ln(\theta)) + (\ln(a^{k-1}))^2) \right) \\ E \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b \partial \theta} \right) &= -\frac{1}{\theta} \left(\sum_{k=1}^n \ln(1 + \log(k)) (0.422784 + \ln(\theta) - \ln(a^{k-1})) \right) \\ E \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right) &= \frac{n}{\theta^2}. \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

4.3 Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı güvenilirlik analizinde en çok kullanılan dağılımlardan biridir. Bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x; \beta, \alpha) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad 0 < x < \infty \quad \alpha, \beta > 0 \quad (4.13)$$

ise, X 'in dağılımına α şekil ve β ölçek parametreli Weibull dağılımı denir ve

$$X \sim Weibull(\alpha, \beta) \quad (4.14)$$

biçiminde gösterilir.

Şekil parametresi $\alpha = 1$ olduğu zaman, dağılım üstel dağılıma dönüşmektedir. X 'in dağılım fonksiyonu

$$F(x; \beta, \alpha) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad 0 < x < \infty; \quad \beta > 0, \alpha > 0 \quad (4.15)$$

dır.

Weibull dağılımının beklenen değer ve varyansı;

$$E(X) = \mu = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \beta \quad (4.16)$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right] \beta^2 \quad (4.17)$$

Weibull dağılımının k . momenti

$$E(X^k) = \beta^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) \quad (4.18)$$

olarak elde edilir. Bu momentlere çalışmada ihtiyaç duyulacaktır.

4.4 Weibull Dağılımı Durumunda İkili Geometrik Süreç için İstatistiksel Çıkarım

Farz edelim ki $\{X_1, \dots, X_n\}$ ikili geometrik süreçten gelen bir veri kümesi olsun. X_1 ilk olayın gerçekleşme zamanı olmak üzere bu rasgele değişkenin dağılımı Weibull olsun. Bu durumda $X_1 \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$, (4.13) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsızdır fakat aynı dağılımlı değildir. X_k rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_k}(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha} (a^{k-1} x^{h(k)})^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left(\frac{a^{k-1} x^{h(k)}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right) a^{k-1} x^{h(k)-1} h(k) \quad (4.19)$$

olarak elde edilir.

$$L(a, b, \mu, \sigma^2) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(x) \quad (4.20)$$

$$L = \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha} \right)^n a^{\left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \alpha} \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha h(k)-1} \prod_{k=1}^n h(k) e^{-\frac{1}{\beta^\alpha} \sum_{k=1}^n (a^{k-1} x_k^{h(k)})^\alpha} \quad (4.21)$$

olarak elde edilir ve $\ln L$ ençok olabilirlik fonksiyonunun log fonksiyonu,

$$\ln L(a, b, \alpha, \beta) = \alpha \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \ln a + n(\ln \alpha - \alpha \ln(\beta)) + \sum_{k=1}^n (\alpha h(k) - 1) \ln(x_k) + \sum_{k=1}^n \ln(h(k)) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{a^{k-1} x_k^{h(k)}}{\beta} \right)^\alpha \quad (4.22)$$

olarak elde edilir. $\ln L$, log-olabilirlik fonksiyonunun a, b, α, β parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \frac{\alpha}{a} - \left\{ \left(\frac{\alpha}{a \beta^\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^n ((k-1) (Y_k)^\alpha) \right) \right\} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \left(\frac{-n\alpha}{\beta} \right) + \left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} \right) \left(\sum_{k=1}^n (Y_k)^\alpha \right) \right\} = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \ln a + n \left(\frac{1}{\alpha} - \ln(\beta) \right) + \sum_{k=1}^n h(k) \ln(x_k) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{Y_k}{\beta} \right)^\alpha \ln(Y_k - \beta) = 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \sum_{k=1}^n \left(\alpha \ln(x_k) (1 + \log(k))^b \ln(1 + \log(k)) \right) + \sum_{k=1}^n \ln(1 + \log(k)) \\ &\quad - \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha} \sum_{k=1}^n \left((Y_k)^\alpha (1 + \log(k))^b \ln(x_k) \ln(1 + \log(k)) \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

a , b ve α, β parametreleri bu yöntemle elde edilebilir fakat $\ln L$ fonksiyonunun ilk türevleri nümerik olarak çözülemez. Bu nedenle a, b model parametrelerinin ve α, β dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (4.22) log- olabilirlik fonksiyonunun mathematica paket programı yardımı ile maksimum edilmesi ile bulunabilir.

En çok olabilirlik tahmin edicilerinin ortak dağılımı (a, b, α, β) ortalama vektörü ve I^{-1} varyans kovaryans matrisi ile asimptotik olarak normal dağılmaktadır .Barndorff-Nielsen ve Cox (1994).

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim \text{AN} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, I^{-1} \right) \quad (4.27)$$

Burada , I^{-1} Fisher Informasyon Matrisinin tersini göstermektedir.

$$I = \begin{bmatrix} E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) \\ E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial b} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial \ln L}{\partial b} \right) \\ E \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right) & E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right) \\ E \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \right) & E \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \right) & E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

olarak tanımlıdır. İnfomasyon matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} \right) &= \frac{\alpha^2}{6a^2} (2n^3 - 3n^2 + n) \\ -E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right) &= \frac{\alpha^2}{a\beta^\alpha} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\beta^\alpha}{\alpha} (0.422784 + \alpha \ln \beta) - \beta^\alpha \ln a^{k-1} \right) (k-1) \ln(1 + \log k) \\ -E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} \right) &= \frac{-2n - n(n-1) \alpha \ln \beta}{2a} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n (k-1) (0.422784 + \alpha \ln \beta) \end{aligned}$$

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_4} \right) = \left(\frac{\alpha^2}{a\beta} \right) \left(\frac{n^2 - n}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \right) &= - \sum_{k=1}^n \alpha \left(\frac{-0.577216}{\alpha} + \ln \beta - \ln a^{k-1} \right) (\ln(1 + \log k))^2 + \\ &\quad \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\beta^\alpha}{\alpha} (0.422784 + \alpha \ln \beta) - \beta^\alpha \ln a^{k-1} \right) (\ln(1 + \log k))^2 + \\ &\quad \frac{\alpha^2}{\beta^\alpha} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\beta^\alpha}{\alpha} (0.422784 + \alpha \ln \beta) + \beta^\alpha (\ln a^{k-1})^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. (2 \ln a^{k-1} \frac{\beta^\alpha}{\alpha} (0.422784 + \alpha \ln \beta)) \right) (\ln(1 + \log k))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln(1 + \log k) \left(\frac{-0.577216}{\alpha} + \ln \beta - \ln a^{k-1} \right) + \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \\ &\quad \log k) \left(\left(\frac{\beta^\alpha}{\alpha^2} (0.823681 + \alpha \ln \beta (0.845569 + \alpha \ln \beta)) - \frac{\beta^\alpha}{\alpha} (0.422784 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \alpha \ln \beta) (\ln \beta + \ln a^{k-1}) + \beta^\alpha \ln a^{k-1} \ln \beta \right) \right) + \frac{1}{\beta^\alpha} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \\ &\quad \log k) \left(\frac{\beta^\alpha}{\alpha} (0.422784 + \alpha \ln \beta) - \beta^\alpha \ln a^{k-1} \right) \end{aligned}$$

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_4} \right) = - \left(\frac{\alpha^2}{\beta^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \log k) \left(\frac{\beta^\alpha}{\alpha} (0.422784 + \alpha \ln \beta) - \beta^\alpha \ln a^{k-1} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} -E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_3 \partial \theta_3} \right) &= n \left(\frac{1}{\alpha^2} + (\ln \beta)^2 \right) + \frac{n}{\alpha^2} (0.823681 + \alpha \ln \beta (0.845569 + \alpha \ln \beta)) + \\ &\quad \frac{2n \ln \beta}{\alpha} (0.422784 + \alpha \ln \beta) \end{aligned}$$

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_3 \partial \theta_4} \right) = \frac{\alpha n \ln \beta}{\beta} - \frac{n}{\beta} (0.422784 + \alpha \ln \beta)$$

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_4 \partial \theta_4} \right) = \frac{n\alpha^2}{\beta^2}.$$

dir.

5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, üstel ve Weibull dağılımları varsayımı altında ikili geometrik süreç model parametrelerinin ve F dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin performanslarını ölçmek için kapsamlı bir simülasyon çalışması ele alınmıştır.

Uygulamada genellikle a parametresinin bire yakın değerleri 0.95, 0.99, 1.01 ve 1.05 alınmaktadır (Lam, 2007). İkili geometrik sürecin, parametrelerinin tahmin edicileri üzerindeki stokastik monotonluk özelliğini inceleyebilmek için b parametresinin 2 ve -2 değerleri kullanılmıştır.

Üstel dağılımın θ parametresi için 2 değeri; parametrelerinin tahmin edicileri üzerindeki stokastik monotonluk özelliğini inceleyebilmek için, b parametresinin -2,-0.5,0.5,2 değerleri kullanılmıştır. Bütün parametrelerin tahmin, yan ve HKO değerleri Çizelge 5.1, ...Çizelge 5.4 de verilmiştir. Çizelge 5.5de EÇO tahmin edicilerinin simüle edilmiş varyansları ve varyans alt sınırı verilmiştir.

Weibull dağılımının şekil parametresinin değeri 1.5 ve 3, ölçek parametresinin değeri ise 1 olarak alınmıştır. Çünkü bütün tahmin ediciler ölçek olarak değişmezdir. Simülasyon çalışması sırasında, tahmin edicilerin küçük örneklem özelliklerini inceleyebilmek için örneklem genişliği $n = 30, 50, 100$ alınmıştır. Çizelgelerde simülasyon sayısı 1000 olarak alınmıştır. Bütün parametrelerin tahmin, yan ve HKO değerleri Çizelge 5.6 - Çizelge 5.9 da verilmiştir. Çizelge 5.10 de EÇO tahmin edicilerinin simüle edilmiş varyansları ve varyans alt sınırı gösterilmiştir.

Çizelge 5.1 $b = 2$ ve $\theta = 2$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\theta}$		
		Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO
0.95	30	0.9442	-0.0058	0.0007	2.0741	0.0741	0.0467	2.1109	0.1109	0.6534
	50	0.9467	-0.0034	0.0002	2.0415	0.0415	0.0203	2.0773	0.0773	0.4082
	100	0.9487	-0.0014	0.0000	2.0170	0.0170	0.0074	2.0263	0.0263	0.1577
0.99	30	0.9876	-0.0024	0.0006	2.0782	0.0782	0.0478	2.1750	0.1750	0.7563
	50	0.9889	-0.0012	0.0001	2.0404	0.0404	0.0205	2.1029	0.1029	0.4355
	100	0.9897	-0.0003	0.0000	2.0197	0.0197	0.0075	2.0591	0.0591	0.1833
1.01	30	1.0088	-0.0012	0.0005	2.0706	0.0706	0.0449	2.1239	0.1239	0.6669
	50	1.0096	-0.0004	0.0001	2.0425	0.0425	0.0216	2.0846	0.0846	0.4385
	100	1.0103	0.0003	0.0000	2.0183	0.0183	0.0074	2.0622	0.0622	0.2087
1.05	30	1.0520	0.0020	0.0006	2.0819	0.0819	0.0462	2.1582	0.1582	0.8438
	50	1.0519	0.0019	0.0002	2.0378	0.0378	0.0203	2.1247	0.1247	0.4461
	100	1.0511	0.0011	0.0000	2.0144	0.0144	0.0068	2.0703	0.0703	0.2017

Çizelge 5.2 $b = -2$ ve $\theta = 2$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\theta}$		
		Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO
0.95	30	0.9447	-0.0053	0.0007	-1.9226	0.0774	0.0463	2.1767	0.1767	0.8020
	50	0.9473	-0.0023	0.0002	-1.9633	0.0368	0.0208	2.0655	0.0655	0.3970
	100	0.9489	-0.0011	0.0000	-1.9843	0.0157	0.0072	2.0450	0.0450	0.1772
0.99	30	0.9878	-0.0022	0.0005	-1.9286	0.0715	0.0463	2.1530	0.1530	0.6870
	50	0.9885	-0.0015	0.0001	-1.9538	0.0462	0.0203	2.0998	0.0998	0.4620
	100	0.9896	-0.0004	0.0000	-1.9785	0.0215	0.0071	2.0434	0.0434	0.1887
1.01	30	1.0087	-0.0013	0.0010	-1.9289	0.0712	0.0606	2.1861	0.1861	0.8032
	50	1.0105	0.0005	0.0001	-1.9637	0.0363	0.0195	2.1227	0.1227	0.4339
	100	1.0101	0.0001	0.0000	-1.9878	0.0122	0.0072	2.0336	0.0336	0.1823
1.05	30	1.0525	0.0025	0.0006	-1.9238	0.0763	0.0477	2.1652	0.1652	0.7875
	50	1.0516	0.0016	0.0002	-1.9622	0.0378	0.0198	2.1244	0.1244	0.4104
	100	1.0510	0.0010	0.0000	-1.9852	0.0148	0.0071	2.0685	0.0685	0.3199

Çizelge 5.3 $b = 0.5$ ve $\theta = 2$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\theta}$		
		Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO
0.95	30	0.9432	-0.0068	0.0008	0.5826	0.0823	0.0471	2.1405	0.1405	0.7726
	50	0.9473	-0.0027	0.0002	0.5280	0.0280	0.0201	2.0474	0.0474	0.3559
	100	0.9488	-0.0012	0.0000	0.5168	0.0168	0.0070	2.0437	0.0437	0.1769
0.99	30	0.9870	-0.0030	0.0005	0.5714	0.0714	0.0485	2.1306	0.1306	0.7265
	50	0.9887	-0.0013	0.0001	0.5434	0.0434	0.0217	2.0685	0.0685	0.4315
	100	0.9897	-0.0003	0.0000	0.5164	0.0164	0.0069	2.0462	0.0462	0.1818
1.01	30	1.0094	-0.0006	0.0006	0.5797	0.0797	0.0485	2.1995	0.1995	1.0030
	50	1.0098	-0.0002	0.0001	0.5417	0.0417	0.0205	2.0100	0.0100	0.4552
	100	1.0101	0.0001	0.0000	0.5167	0.0167	0.0067	2.0091	0.0091	0.1939
1.05	30	1.0538	0.0038	0.0007	0.5665	0.0665	0.0460	2.2196	0.2196	0.9326
	50	1.0517	0.0017	0.0002	0.5422	0.0422	0.0210	2.0776	0.0776	0.4333
	100	1.0514	0.0014	0.0000	0.5215	0.0215	0.0073	2.0734	0.0734	0.1943

Çizelge 5.4 $b = -0.5$ ve $\theta = 2$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\theta}$		
		Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO	Ortalama	Yan	HKO
0.95	30	0.9442	-0.0058	0.0007	-0.4244	0.0755	0.0463	2.1501	0.1501	0.7646
	50	0.9468	-0.0032	0.0002	-0.4564	0.0436	0.0191	2.0804	0.0804	0.3902
	100	0.9484	-0.0016	0.0000	-0.4808	0.0192	0.0072	2.0284	0.0284	0.1943
0.99	30	0.9878	-0.0022	0.0006	-0.4280	0.0720	0.0444	2.1792	0.1792	0.8176
	50	0.9895	-0.0005	0.0001	-0.4632	0.0368	0.0211	2.1135	0.1134	0.4164
	100	0.9898	-0.0002	0.0000	-0.4871	0.0129	0.0074	2.0546	0.0546	0.1969
1.01	30	1.0083	-0.0017	0.0006	-0.4247	0.0753	0.0496	2.1479	0.1479	0.7872
	50	1.0099	-0.0001	0.0001	-0.4562	0.0438	0.0199	2.1279	0.1279	0.4711
	100	1.0101	0.0001	0.0000	-0.4875	0.0125	0.0067	2.0363	0.0363	0.1933
1.05	30	1.0530	0.0012	0.0007	-0.4256	0.0744	0.0453	2.1644	0.1644	0.9015
	50	1.0522	0.0010	0.0002	-0.4576	0.0424	0.0196	2.1459	0.1459	0.4606
	100	1.0509	0.0009	0.0000	-0.4825	0.0175	0.0073	2.0505	0.0505	0.2076

Çizelge 5.5 $a = 0.95, b = 2, \theta = 2$ için simüle edilen varyanslar ve varyans alt sınırları

	Simüle edilen varyanslar			Varyans alt sınırları		
n	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\theta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\theta}$
30	0.00064	0.04121	0.64175	0.00057	0.03639	0.52812
50	0.00018	0.01859	0.40265	0.00015	0.01734	0.32417
100	0.00004	0.00708	0.16717	0.00004	0.00671	0.16372

Çizelge 5.6 $b = 2, \alpha = 3, \beta = 1$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\alpha}$			$\hat{\beta}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.95	30	0.9374	-0.0126	0.0009	1.8571	-0.1430	0.5837	4.4168	1.4168	22.4533	0.9806	-0.0194	0.0194
	50	0.9480	-0.0120	0.0007	1.9116	-0.0884	0.3054	3.7947	0.7947	5.8169	0.9854	-0.0146	0.0159
	100	0.9419	-0.0081	0.0004	2.0726	0.0726	0.0983	2.9240	-0.0760	1.0951	0.9881	-0.0119	0.0154
0.99	30	0.9889	-0.0011	0.0002	1.8001	-0.1999	0.6775	4.5180	1.5180	14.5915	0.9984	-0.0016	0.0188
	50	0.9894	-0.0006	0.0001	1.8692	0.1308	0.3921	4.0177	1.0177	7.6821	0.9934	-0.0066	0.0109
	100	0.9895	-0.0005	0.0000	1.9862	-0.0138	0.1490	3.3215	0.3215	1.8070	0.9998	0.0002	0.0066
1.01	30	1.0112	0.0012	0.0002	1.9533	-0.0467	0.7649	4.0113	1.0113	7.3324	0.9805	-0.0195	0.0335
	50	1.0111	0.0011	0.0001	1.9551	-0.0449	0.3460	3.6039	0.6039	2.9209	1.0030	0.0030	0.0300
	100	1.0110	0.0010	0.0001	1.9954	-0.0046	0.2152	3.3930	0.3930	2.9039	1.0020	0.0020	0.0107
1.05	30	1.0702	0.0202	0.0011	1.8120	-0.1880	0.4917	4.2973	1.2973	10.1912	1.6027	0.6027	1.4209
	50	1.0514	0.0014	0.0007	2.1713	0.1713	0.3631	3.7674	0.7674	6.6367	1.0181	0.0181	0.0428
	100	1.0491	-0.0009	0.0006	1.9209	-0.0791	0.1613	2.2972	-0.7028	2.9564	0.9921	-0.0079	0.0168

Çizelge 5.7 $b = -2, \alpha = 3, \beta = 1$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\alpha}$			$\hat{\beta}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.95	30	0.9486	-0.0014	0.0009	-2.1621	-0.1621	0.5456	4.2964	1.2964	11.5162	0.9902	-0.0098	0.0176
	50	0.9497	-0.0003	0.0006	-2.1146	-0.1146	0.2861	3.8073	0.8073	4.6741	0.9916	-0.0084	0.0147
	100	0.9499	-0.0001	0.0003	-2.0046	-0.0046	0.1172	3.2511	0.2511	2.9918	0.9950	-0.0050	0.0101
0.99	30	0.9881	-0.0019	0.0002	-2.1738	-0.1738	0.7129	4.4781	1.4781	15.3931	0.9825	-0.0175	0.0195
	50	0.9888	-0.0012	0.0001	-2.0772	-0.0772	0.3887	3.8058	0.8058	5.5501	0.9917	-0.0083	0.0120
	100	0.9896	-0.0004	0.0000	-2.0660	-0.0660	0.1878	3.5580	0.5580	2.9289	0.9905	-0.0095	0.0068
1.01	30	1.0108	0.0008	0.0001	-2.1378	-0.1378	0.5879	4.1262	1.1262	6.9916	1.0022	0.0022	0.0185
	50	1.0106	0.0006	0.0001	-2.0750	-0.0750	0.3357	3.7342	0.7342	4.4248	1.0014	0.0014	0.0109
	100	1.0105	0.0005	0.0000	-2.0279	-0.0279	0.1513	3.3647	0.3647	1.9455	0.9981	-0.0019	0.0049
1.05	30	1.0527	0.0027	0.0007	-2.1563	-0.1563	0.3723	3.9999	0.9999	4.9440	1.0114	0.0114	0.0139
	50	1.0491	-0.0009	0.0005	-2.1095	-0.1095	0.2627	3.7912	0.7912	4.6398	0.9957	-0.0043	0.0108
	100	1.0501	0.0001	0.0002	-1.9805	0.0195	0.0486	3.0727	0.0727	0.4867	1.0007	0.0007	0.0082

Çizelge 5.8 $b = 2, \alpha = 1.5, \beta = 1$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\alpha}$			$\hat{\beta}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.95	30	0.9516	0.0016	0.0009	1.7831	-0.2169	0.5957	2.2639	0.7639	3.5142	1.0123	0.0123	0.0569
	50	0.9499	-0.0000	0.0007	1.8670	-0.1330	0.3212	1.9610	0.4610	1.3962	0.9945	-0.0055	0.0383
	100	0.9501	0.0000	0.0004	1.9185	-0.0815	0.1656	1.7871	0.2871	0.6719	0.9984	-0.0016	0.0280
0.99	30	0.9880	-0.0020	0.0004	1.8176	-0.1824	0.6394	2.2229	0.7229	4.1678	0.9912	-0.0088	0.0701
	50	0.9893	-0.0007	0.0001	1.8863	-0.1137	0.3849	1.9687	-0.4687	1.7209	0.9975	-0.0025	0.0404
	100	0.9893	-0.0007	0.0000	1.9571	-0.0429	0.1854	1.7454	0.2454	0.6933	1.0012	0.0012	0.0207
1.01	30	1.0101	0.0001	0.0003	1.8145	-0.1855	0.6913	2.2167	0.7167	2.9035	1.0081	0.0081	0.0723
	50	1.0099	-0.0001	0.0001	1.9159	-0.0841	0.3857	1.9347	0.4347	1.5732	0.9901	-0.0099	0.0426
	100	1.0099	-0.0001	0.0000	1.9098	-0.0902	0.1849	1.8067	0.3067	0.7345	1.0032	0.0032	0.0219
1.05	30	1.0567	0.0067	0.0008	1.7961	-0.2039	0.6062	2.2197	0.7197	2.9387	1.2765	0.2765	0.9037
	50	1.0481	-0.0019	0.0008	1.9712	-0.0288	0.3859	1.8182	0.3182	1.3570	1.0339	0.0339	0.1166
	100	1.0513	0.0012	0.0007	2.0073	0.0073	0.1751	1.6095	0.1095	0.6903	0.9997	-0.0003	0.0600

Çizelge 5.9 $b = -2, \alpha = 1.5, \beta = 1$ parametre değerleri için simüle edilen ortalama, yan ve HKO değerleri

a	n	$\hat{a}$			$\hat{b}$			$\hat{\alpha}$			$\hat{\beta}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.95	30	0.9508	0.0008	0.0010	-2.2131	-0.2131	0.6208	2.2954	0.7954	4.8333	1.0259	0.0259	0.1111
	50	0.9477	-0.0023	0.0007	-2.0967	-0.0967	0.3313	1.9398	0.4398	1.7348	0.9794	-0.0206	0.0427
	100	0.9478	-0.0022	0.0005	-2.0362	-0.0362	0.1569	1.7037	0.2037	0.5840	0.9860	-0.0140	0.0315
0.99	30	0.9884	-0.0016	0.0004	-2.1484	-0.1484	0.6655	2.2037	0.7037	3.4388	1.0231	0.0231	0.0792
	50	0.9893	-0.0007	0.0001	-2.1200	-0.1200	0.3758	1.9850	0.4850	1.6633	1.0050	0.0050	0.0383
	100	0.9896	-0.0004	0.0000	-2.0794	-0.0794	0.1953	1.8024	0.3024	0.7328	0.9954	-0.0046	0.0220
1.01	30	1.0102	0.0002	0.0003	-2.1568	-0.1568	0.6973	2.2121	0.7121	3.4444	1.0124	0.0124	0.0759
	50	1.0101	-0.0000	0.0001	-2.0936	-0.0936	0.4056	1.9695	0.4695	1.7751	0.9962	-0.0038	0.0421
	100	1.0101	0.0000	0.0000	-2.0727	-0.0727	0.1981	1.7864	0.2864	0.7799	0.9991	-0.0010	0.0206
1.05	30	1.0484	-0.0016	0.0009	-2.2250	-0.2250	0.6004	2.2353	0.7353	2.6968	1.0094	0.0094	0.0595
	50	1.0490	-0.0010	0.0006	-2.1407	-0.1407	0.3359	1.9826	0.4826	1.7823	0.9869	0.0131	0.0340
	100	1.0494	-0.0006	0.0004	-2.1365	-0.1365	0.1470	1.8529	0.3529	0.5631	0.9992	-0.0008	0.0217

Çizelge 5.10 Simüle edilen varyanslar ve varyans alt sınırları $a = 0.95, b = 2, \alpha = 3, \beta = 1$

n	Simüle edilen varyanslar				Varyans alt sınırları			
	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
30	0.0008	0.5467	19.1008	0.0166	0.0000	0.0140	0.5621	0.0127
50	0.0007	0.3236	11.5791	0.0142	0.0000	0.0091	0.2159	0.0107
100	0.0003	0.0916	1.1211	0.0126	0.0000	0.0065	0.0742	0.0104

Simülasyon çalışmasında, üstel dağılım durumunda da benzer gözlemler yapılmaktadır. Çizelge 5.1,5.2,5.3,5.4 incelendiğinde, θ parametrelerinin tahmin edicisinin yan ve HKO değerlerinin, n değeri arttıkça küçüldüğü görülmektedir. Böylelikle tahmin edicilerin asimptotik olarak tutarlılığı simülasyon çalışması ile desteklenmektedir. Çizelge 5.5 incelendiğinde ise, simüle edilen varyans değerleri ile karşılık gelen en küçük varyans alt sınır değerlerinin n değeri arttıkça birbirlerine yaklaştığı görülmektedir. Bu durumda çalışma asimptotik etkinliği desteklemektedir.

Weibull dağılımı durumunda Çizelge 5.6,5.7,5.8,5.9 incelendiğinde, a, b, α, β parametrelerinin bütün tahmin edicilerinin yan ve HKO değerlerinin, n değeri arttıkça küçüldüğü görülmektedir. Bu beklenen bir durumdur, çünkü EÇO tahmin edicileri asimptotik olarak yansız ve tutarlıdır. Simülasyon çalışması, ilgili asimptotik özellikleri desteklemektedir. Burada özel olarak $\hat{\alpha}$ için, HKO değerlerinin n örneklem genişliği büyüdükçe küçüldüğü görülmektedir. Asimptotik yansızlık ve tutarlılık özelliklerine büyük örneklem genişliğinde ulaşmaktadır. Çizelge 5.10 incelendiğinde ise, simüle edilen varyans değerleri ile karşılık gelen en küçük varyans alt sınır değerlerinin n değeri arttıkça birbirlerine yaklaştığı görülmektedir. Bu durum da etkinliği desteklemektedir ve beklenen bir durumdur. Çünkü EÇO tahmin edicileri oldukça etkin tahmin edicilerdir.

6. GERÇEK VERİ UYGULAMASI

Bu bölümde, Kumar and Klefsjö (1992) ve Ascher and Feingold (1984) çalışmalarında verilen iki veri kümesi dikkate alınacaktır. Veri kümelerinin isimleri sırası ile Hidrolik Sistem Arızası (veri kümesi 1) ve itme dizel motor arıza verileri (veri kümesi 2) olarak verilmektedir.

Wu (2018) çalışmasında ikili geometrik sürecin veri kümesi1 ve veri kümesi2 için uygun olduğunu göstermiştir. Çalışmada, belirli bir üstel dağılım ve Weibull dağılımı ile ikili geometrik sürecin iki veri kümesini modellemede kullanılıp kullanılamayacağı gösterilecektir.

6.1 Üstel Dağılım Örneği

Burada, veri kümelerinin belirli bir üstel dağılıma sahip ikili geometrik süreçten geldiği gösterilmek istenmektedir. Bu amaçla öncelikle, veri kümelerinin belirli bir üstel dağılım ile ikili geometrik süreci takip ettiği kabul edilir. Daha sonra, her bir veri seti için a, b ve θ parametrelerinin en çok olabirlik tahmin edicileri elde edilir. Eğer $\hat{y}_k$'s tahminlerinin birbirinden bağımsız üstel rasgele değişkenler olduğu gösterilirse, belirli bir üstel dağılım ile ikili geometrik sürecin veri kümelerini modellemek için kullanılabileceği söylenebilir. Bu amaçla, $\hat{y}_k$ tahminleri $\hat{a}^{k-1}x_k^{(1+\log(k))^{\hat{b}}}$, $k = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinden elde edilir. Burada $\hat{a}$ ve $\hat{b}$, a ve b parametrelerinin EÇO tahmin edicileridir. Kolmogorov-Smirnov (KS) testi tahminlerin uyum iyiliğini ölçmek için kullanılacaktır. Veri kümesinin belirli bir üstel dağılımı ile ikili geometrik süreçten geldiği varsayımı ile a, b ve θ parametrelerinin EÇO tahminleri, KS istatistiği ve karşılık gelen p değerleri her bir veri kümesi için Çizelge 6.1 de verilmiştir. Çizelge 6.1 de, belirli bir Weibull dağılımı ile ikili geometrik sürecin ilgili iki veri kümesi için kullanılabildiği görülmektedir.

Çizelge 6.1 Veri kümesinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, KS test ve p değerleri

	EÇO			KS test istatistiği	p değeri
	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\theta}$		
Veri kümesi 1	0.931119	0.416095	301.068	0.1288	0.7543
Veri kümesi 2	1.03848	-0.109328	574.827	0.1193	0.2439

6.2 Weibull Dağılımı Örneği

Bu örnekte, ilk olay gerçekleşme zamanının dağılımının Weibull dağılım olduğu varsayımı altında, bu veri kümelerinin Weibull dağılımı tarafından uyarlanıp uyarlanamayacağı gösterilecektir. Bu sonucu elde etmek için aşağıdaki yaklaşım önerilir. İlk olarak, veri kümelerinin belirli bir Weibull dağılımına sahip bir ikili geometrik süreci takip ettiğini varsayılır. Daha sonra, herbir veri kümesi için, a, b, α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilir. Eğer $\hat{y}_k$ tahminlerinin Weibull rasgele değişkeni olduğu gösterilebilirse, belirli bir Weibull dağılımı ile ikili geometrik sürecin bu veri kümelerinin modellenmesinde kullanılabileceği söylenir. Bu amaçla, $\hat{y}_k$ tahminleri, $\hat{a}^{k-1} x_k^{(1+\log k)^{\hat{b}}}$, $k = 1, 2, \dots, n$ eşitliğinden elde edilir. Burada $\hat{a}$ ve $\hat{b}$, a ve b parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileridir. Sonuçta, Kolmogorov-Smirnov (KS) testi, Weibull dağılımı için tahminlerin uyum iyiliğini ölçmek için kullanılır. Veri kümesinin belirli bir Weibull dağılımı ile ikili geometrik süreçten geldiği varsayımı ile, a, b, α ve β parametrelerinin EÇO tahminleri, KS istatistiği ve karşılık gelen p değerleri herbir veri kümesi için Çizelge 6.2 de verilmiştir. Çizelge 6.2 de, belirli bir Weibull dağılımı ile ikili geometrik sürecin ilgili iki veri kümesi için kullanılabildiği görülmektedir.

Çizelge 6.2 Veri kümelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, KS test ve p değerleri

	EÇO				KS test istatistiği	p değeri
	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$		
Veri kümesi 1	0.9000	0.5628	0.8187	377.136	0.0905	0.9752
Veri kümesi 2	1.0259	0.3588	0.5756	3584.00	0.0612	0.9381

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında amaç, geometrik sürecin sebep olduğu zorlukların üstesinden gelebilen Wu (2018) tarafından geliştirilen ikili geometrik süreci ve olasılıksal özelliklerini tanıtmaktır. Bu amaç için öncelikle bazı temel kavramlar verilip, sonrasında sayma süreci tanımı ile poisson, homojen olmayan poisson, yenileme süreci, geometrik süreç gibi bazı temel sayma süreçleri ve özellikleri ele alınmıştır. İlgili sayma süreçlerinden sonra, ikili geometrik süreç ve özellikleri tanıtılmıştır. Simülasyon çalışmasında, ilk olay gerçekleşme zamanının dağılımı için, çok kullanılan güvenilirlik dağılımlarından üstel ve Weibull dağılımları varsayımında bulunularak, hem model parametreleri hem de dağılımın bilinmeyen parameterleri için EÇO yöntemi ile parametre tahmini yapılmıştır. Sonuç olarak, Weibull dağılım ve üstel dağılım ele alınarak yapılan simülasyon çalışması tahmin edicilerin asimptotik yansızlık, asimptotik tutarlılık ve etkinlik açısından performanslarını göstermekte ve bu özelliklerini desteklemektedir. Sonraki çalışmalarda, F dağılımı için, başka güvenilirlik dağılımları kullanılabilir. Simülasyon çalışmasına ek olarak, Kumar and Klefsjö (1992) ve Ascher and Feingold (1984) çalışmalarında kullanılan, hidrolik sistem arızası (veri seti 1) ve itme dizel motor arıza verileri (veri seti 2) veri kümeleri için, üstel ve Weibull dağılımları ile ikili geometrik sürecin bu veri kümelerini modellemede kullanılabilirliğini incelemeye yönelik örnekler verilmiştir. Örnekler sonucunda, ilgili dağılımlar ile ikili geometrik sürecin her iki verikümesinin de modellenmesinde kullanılabileceği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Aydogdu. H., Şenoglu B., Kara, M. 2010. Parameter estimation in geometric process with Weibull Distribution, Applied Mathematics and Computation, Vol 217, Issue 6, 2657-2665.
- Aydoğdu, H., Şenoğlu, B. and Kara, M. 2010. Application of MML methodology to an α -series process with Weibull distribution. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3), 449-460.
- Ascher H, Feingold H (1984). Repairable Systems Reliability: Modelling, Inference, Misconceptions and Their Causes. New York, Marcel Dekker.
- Barndorff-Nielsen OE, Cox DR. 1994. Inference and asymptotics. London: Chapman&Hall.
- Kara, M. 2009. Geometrik süreçlerde parametre tahmini. Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Ankara.
- Kara, M., Aydogdu. H., & Turksen, O. 2015. Statistical inference for geometric process with the inverse Gaussian distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 85(16) 3206-3215.
- Kara M., Altındağ Ö., Pekalp M. H. and Aydoğdu H. 2019. Parameter Estimation in α -Series Process with Lognormal Distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, DOI: 10.1080/03610926.2018.1504075. 48 (20), 4976-4998.
- Kumar U, Klefsjö B 1992. Reliability Analysis of Hydraulic Systems of LHD Machines Using the Power Law Process Model. Reliability Engineering and System Safety, 35(3), 217–224.
- Lam Y. 1998. A note on the optimal replacement problem, Adv Appl Probab, Vol 20, No 2, 479-482.
- Lam Y. 1988. Geometric process and replacement problem, Acta Math Appl Sin, 366-377.
- Lam Y., 1992. Nonparametric inference for geometric process. Commun Stat Theor M. 21, 2083-2105.
- Lam Y, Chan S.K. 1998. Statistical inference for geometric process with lognormal distribution, Comput Stat Data Anal. 27, 99-112
- Pekalp, M.H., Eroğlu İnan, G., Aydoğdu H. 2020. Statistical Inference for doubly geometric process with Weibull distributions. Communications in Statistics: Simulation and Computation.
- Pekalp, M.H., Eroğlu İnan, G., Aydoğdu H. 2021. Statistical Inference for doubly geometric process with Exponential distributions. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics.
- Wu, S. 2018. Doubly geometric process and applications. Journal of the Operational Research Society 69 (1):66–67. doi:10.1057/s41274-017-0217-4.