

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKSİMAL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇİN GLOBAL
MORREY TİPLİ UZAYLARDA İKİ AĞIRLIKLİ EŞİTSİZLİKLER

Ayşe GÜREL BOZYİĞİT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMAL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇİN GLOBAL MORREY TIPLI UZAYLARDA İKİ AĞIRLIKLİ EŞİTSİZLİKLER

Ayşe GÜREL BOZYİĞİT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca Morrey uzayları, lokal Morrey uzayları ve genelleştirilmiş Morrey uzayları hatırlatılarak bu uzayların bazı temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde ağırlıklı global Morrey tipli uzaylar hatırlatılmış olup bu bölümün birinci kısmında ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda maksimal operatörlerin iki ağırlıklı sınırlılığı ispatlanmıştır. Bu bölümün ikinci kısmında ise ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda maksimal komütatörlerin iki ağırlıklı sınırlılığına değinilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda singüler operatörler ve singüler komütatörlerin iki ağırlıklı sınırlılığından bahsedilmiştir. Bu bölümün ilk kısmında ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda singüler operatörlerin iki ağırlıklı eşitsizlikleri incelenip iki ağırlıklı sınırlılığı için gerekli koşulu veren teorem ispatı gösterilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda singüler komütatörlerin iki ağırlıklı sınırlılığı ispatlanmıştır. Tezin beşinci bölümünde diğer bölümlerde elde edilen sonuçlar kullanılarak ağırlıklı global Morrey uzaylarında bazı eşitsizliklerin uygulamasına yer verilmiştir. Tezin son bölümünde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Eylül 2023, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Maksimal operatör, singüler integral operatörler, global Morrey tipli uzay, iki ağırlıklı eşitsizlikler, Hardy eşitsizliği, BMO uzayı.

ABSTRACT

Master Thesis

TWO WEIGHTED INEQUALITIES FOR MAXIMAL AND SINGULAR INTEGRAL OPERATORS IN GLOBAL MORREY TYPE SPACES

Ayşe GÜREL BOZYİĞİT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic definitions and theorems are given. In addition, Morrey spaces, local Morrey spaces and generalized Morrey spaces are recalled and some basic properties of these spaces are mentioned. In the third part of the thesis, weighted global Morrey type spaces are reminded and in the first part of this part, two weighted boundedness of maximal operators in weighted global Morrey type spaces is proved. In the second part of this chapter, the two-weight boundedness of maximal commutators in weighted global Morrey type spaces is discussed. The fourth part of the thesis deals with the two-weight boundedness of singular operators and singular commutators in weighted global Morrey type spaces. In the first part of this chapter, two-weight inequalities of singular operators in weighted global Morrey type spaces are analyzed and the proof of the theorem giving the necessary condition for two-weight boundedness is shown. In the second part of this chapter, two-weight boundedness of singular commutators in weighted global Morrey type spaces is proved. In the fifth part of the thesis, the application of some inequalities in weighted global Morrey type spaces using the results obtained in the other chapters is given. In the last part of the thesis, the results obtained are analyzed.

September 2023, 50 pages

Key Words: Maximal operator, singular integral operators, global Morrey type space, two weight inequalities, Hardy inequality, BMO space.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunda bana çalışma fırsatı veren ve tezin her aşamasında desteğini esirgemedi kıymetli zamanını benimle paylaşarak bilgi ve önerileri ile çalışmamı yönlendiren, fikirleri ile gelişimime katkı sağlayan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) teşekkür ederim.

Ayrıca lisans ve yüksek lisans eğitimimde emeği geçen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Ankara Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma saygı ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi hep yanımda olan sevgili aileme ve tüm desteği ile varlığını hissettiren değerli eşime sonsuz teşekkür ederim. Sizlerin sevgi dolu destekleri benim motivasyon kaynağım olmuştur.

Ayşe GÜREL BOZYİĞİT

Ankara, Eylül 2023

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	8
2.1 Temel Tanım ve Teoremler	8
2.2 Morrey Uzayları	13
3. AĞIRLIKLIL GLOBAL MORREY TIPLI UZAYLARDA MAK- SİMAL OPERATÖR VE MAKİMAL KOMÜTATÖRLER İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EİİTSİZLİKLER	21
3.1 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Maksimal Operatörle- rin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri	22
3.2 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Maksimal Komütatör- lerin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri	26
4. AĞIRLIKLIL GLOBAL MORREY TIPLI UZAYLARDA SİN- GÜLER OPERATÖR VE SİNGÜLER KOMÜTATÖRLER İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EİİTSİZLİKLER	31
4.1 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Singüler Operatörlerin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri	31
4.2 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Singüler Komütatörle- rin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri	33
5. BAZI UYGULAMALAR	38
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	43
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$ B(x, r) $	$B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyon uzayı
$L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$	Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayları
$L_{p,\lambda}^{loc}(\mathbb{R}^n)$	Lokal Morrey uzayı
$\mathcal{M}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$\mathcal{M}_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı
$G\mathcal{M}_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)$	Ağırlıklı global Morrey tipli uzay
$W_p^k(\Omega)$	Sobolev uzayı
$W_{p,\omega}^k(\Omega, \varphi)$	Genelleştirilmiş Sobolev uzayı
ω_n	Birim kürenin hacmi
M	Maksimal operatör
T	Singüler integral operatörü
$A_p(\mathbb{R}^n)$	Muckenhoupt sınıfı
M_b	Maksimal komütatör
$[M, b]$	Maksimal komütatör
$[T, b]$	Singüler integral komütatörü
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Maksimal operatör, lineer olmayan bir operatördür ve harmonik analiz için önemli araçlardan biridir. Bu operatör $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere;

$$Mg(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |g(y)| dy$$

ile tanımlanır.

Mg Hardy-Littlewood maksimal operatörü ile harmonik analizin farklı alanlarında karşılaşılabılır. Bunların en önemlilerinden biri de singüler operatörler teorisi ile Lebesgue diferensiyelleme teoreminin ispatıdır. Maksimal operatör, reel ve kompleks analizde oldukça fazla kullanılan bir operatördür. Ayrıca Maksimal operatörün sınırlılığı, birçok konvolüsyon tipli olan singüler integral operatörlerin sınırlılığının elde edilmesinde önemli bir role sahiptir.

Calderón-Zygmund tipi singüler integraller

$$T_g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) g(t) dt$$

biçiminde tanımlanır. Burada K standart singüler çekirdektir, yani K fonksiyonu $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq t\}$ üzerinde sürekli ve

$$|K(x, t)| \leq C|x - t|^{-n} \quad x \neq t,$$

$$|K(x, t) - K(x, z)| \leq C \frac{|t - z|^\sigma}{|x - t|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad |x - t| > 2|t - z| \text{ ise}$$

$$|K(x, t) - K(\xi, t)| \leq C \frac{|x - \xi|^\sigma}{|x - t|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad |x - t| > 2|x - \xi| \text{ ise}$$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.

Maksimal singüler operatör

$$T^*g(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon g(x)|$$

ile tanımlanır. Burada $T_\varepsilon g(x)$,

$$T_\varepsilon g(x) = \int_{\{t \in \mathbb{R}^n : |x-t| \geq \varepsilon\}} K(x, t) g(t) dt.$$

ile tanımlanan alışılmış kesmedir. g bir basamak fonksiyonu olduğunda $T^*g(x)$ hemen her yerde (h.h.y.) var olduğu bilinmektedir.

Singüler integraller konusu başta Calderon ve Zygmund (1952) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Harmonik analizinde çok önemli konularından biri olan singüler integral operatörler analitik fonksiyonlarda sınır değer problemler teorisinde , kısmi türevli denklemler teorisinde , Fourier serileri ve matematiğin diğer alt dallarında çeşitli uygulamalara sahip güncel bir konudur.

Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve bir ölçülebilir b fonksiyonu için maksimal komütatör

$$M_b(g)(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |g(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır.

b bir ölçülebilir fonksiyon olsun. M Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve b fonksiyonun komütatörü her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$[M, b]g(x) = M(bg)(x) - b(x)Mg(x)$$

ile tanımlanır.

$0 \leq \lambda \leq n$, $p \geq 1$ için $g \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|g\|_{p, \lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x, r)} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına $L_{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları denir. Burada $B(x, r)$, x merkezli r yarıçaplı yuvarı belirtir.

$$\|g\|_{p, \lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L_p(B(x, r))} \leq c < \infty$$

a) $\lambda = 0$ alınırsa,

$$\|g\|_{p,0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \|g\|_{L_p(B(x,r))} = \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

bilinen Lebesgue uzayı elde edilir.

b) $\lambda = n$ alınırsa,

$$L_{p,n}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$$

dir. Gerçekten de $g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\left(r^{-n} \int_{B(x,r)} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L_\infty}$$

elde edilir. Böylece $g \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ bulunur ve

$$\|g\|_{L_{p,n}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L_\infty}$$

elde edilir.

$g \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Temel Lebesgue Teoreminden

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y)|^p dy = |g(x)|^p$$

dir. Bu durumda

$$|g(x)| = \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{L_{p,n}}$$

eşitsizliği gerçekleşir. O halde $g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir ve

$$\|g\|_{L_\infty} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{L_{p,n}}$$

gerçeklenir (Stein, 1970). Burada ω_n , $\mathbb{R}^n$ 'de birim kürenin hacmidir ve

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

ile gösterilir.

$$|g(x)| \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{L_{p,n}}$$

ifadesi ele alındığında sonuç elde edilir.

c) $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise $L_p(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olup $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ de sifıra denk olan fonksiyonların kümesidir.

Morrey uzayları ilk defa Morrey (1938) tarafından tanımlanmıştır. Morrey uzayları kısmi diferensiyel denklemler teorisinde ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerde oldukça kullanışlıdır.

Maksimal operatörün sınırlılığı farklı fonksiyon uzaylarında bazı matematikçiler tarafından araştırılmıştır. Hardy-Littlewood maksimal operatörün Morrey uzaylarındaki sınırlılık koşullarını Mizuhara (1991), Nakai (1994) ve Guliyev (2009) gibi matematikçiler çalışmıştır. Klasik Morrey uzayları, Morrey (1938) tarafından çalışılmıştır. Hardy-Littlewood maksimal operatörü ile singüler integral operatörlerin Morrey uzaylarındaki sınırlılığı incelenmiştir. Bahsedilen operatörlerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı Muckenhoupt (1972), Coifman ve Fefferman (1974) tarafından çalışılmıştır. Nakai ve Mizuhara gibi araştırmacılar maksimal ve singüler integralin genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığını elde etmişlerdir. Ayrıca Guliyev (1994, 1999) tarafından geliştirilen yeni bir yöntemle Lie grupları ve $\mathbb{R}^n$ de harmonik analizin klasik integral operatörleri için sınırlılık sonuçları elde edilmiştir. Daha sonra Guliyev (2009) tarafından önerilen yeni yöntemlerle genelleştirilmiş Morrey uzaylarında maksimal, potansiyel ve singüler integral gibi operatörlerin sınırlılığı sağlanmıştır. Guliyev ile birlikte Samko (2009) gibi araştırmacılar, sadece Morrey tipli uzaylarla sınırlı kalmayarak diğer fonksiyon uzaylarında da yeni sonuçlar elde etmişlerdir.

$$\|g\|_{BMO} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |g(y) - g_{B(x, r)}| dy < \infty$$

veya

$$\|g\|_{BMO} = \inf_C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |g(y) - C| dy < \infty.$$

olacak şekildeki tüm lokal integrallenebilen g fonksiyonlarının sınıfına $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir.

BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayı, John ve Nirenberg (1961) tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca BMO uzayı, L uzayı ile benzer özelliklere sahip olup L_∞ yerine kullanıldığı durumlarla da karşılaşılabılır.

T , Calderón-Zygmund operatör ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Coifman vd. (1976) çalışmalarının iyi bilinen bir sonucu $[b, T]g = T(bg) - bTg$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$ için, $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğudur. Calderón-Zygmund operatörlerin komütatörü ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğün incelenmesinde önemlidir.

$1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise φ ağırlık fonksiyonu, $A_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir denir. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$|B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} \varphi(y) dy \leq C \operatorname{ess\,sup}_{y \in B(x, r)} \frac{1}{\varphi(y)} < \infty$$

olacak şekilde $C > 0$ var ise φ ağırlık fonksiyonu, $A_1(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir denir.

$1 \leq p < \infty$ için,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi_1^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise (φ_1, φ_2) ağırlık fonksiyonları $\tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir.

A_p sınıfı Muckenhoupt tarafından 1972 de Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılıklarının incelenmesiyle ilgili çalışmalarında tanımlanmıştır. A_p Muckenhoupt sınıfının maksimal fonksiyonun ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı karakterize ettiği bilinmektedir.

$1 \leq p < \infty$ ve $g \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|g\|_{M_{p, \omega}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\omega(x, r)} \|g\|_{L_p(B(x, r))} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına $M_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı denir. Burada $\omega(x, r)$, $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 'da negatif olmayan ölçülebilir fonksiyondur. Ayrıca $\omega(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilirse $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı elde edilir.

Lebesgue uzaylarında kesirli maksimal operatörler ve singüler integral operatörler için iki ağırlıklı norm eşitsizliği Edmunds ve Kokilashili (1995), Cruz-Urbe (2000) gibi matematikçiler tarafından geniş çapta incelenmiştir. Morrey uzayları üzerindeki farklı ağırlık türleri ile ağırlıklı norm eşitsizlikleri de Nakamura vd. (2018) tarafından çalışılmıştır.

Son zamanlarda, Komori ve Shirai (2009) ağırlıklı Morrey uzaylarını tanımlamışlar ve Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Calderón-Zygmund operatörü gibi bazı klasik operatörlerin bu uzaylar üzerindeki sınırlılığını çalışmışlardır. Ayrıca Guliyev (2012) ilk olarak genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarını tanıtmıştır ve altlineer operatörlerin sınırlılığını ve bunların Calderón-Zygmund operatörleri tarafından üretilen yüksek dereceli komütatörlerini ve bu uzaylardaki Riesz potansiyelini incelemiştir (Aykol vd. 2020, Guliyev 2014, 2018).

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde yer alan teorem ispatlarında modern matematiğin çok bilinen eşitsizliklerinden biri olan Hardy eşitsizliği sıklıkla kullanılmıştır. Bu eşitsizlik, Hardy tarafından (1920) ilk kez tanımlanmıştır ve daha sonra ilk ağırlıklı Hardy eşitsizliği de tanıtılmıştır (Hardy vd., 1952). Hardy eşitsizliğinin gelişimine ağırlık fonksiyonlarının eşitsizlik içinde kullanılması önemli bir katkı sağlamıştır.

$0 < p, \theta < \infty$ ve $\omega(r), \varphi(r)$, $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar ve $g \in L_{p,\varphi}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $GM_{p,\theta,\omega}^\varphi$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayları

$$\|g\|_{GM_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega(t) \|g\|_{L_{p,\varphi}(B(x,t))}^\theta dt \right)^{1/\theta} < \infty$$

normu ile tanımlanır. Eğer $\varphi(r) = 1$ ise o zaman $GM_{p,\theta,\omega}$ Global Morrey-tipi uzay elde edilir (Burenkov ve Guliyev, 2004).

$0 < \lambda < n$ için $GM_{p,\infty,r^{-\lambda/p}}$ uzayları Morrey (1938) tarafından tanıtılmış olan klasik Morrey tipi uzaylardır ve 2.derece kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının incelenmesi için kullanılır. $GM_{p,\infty,w}$ uzaylarının interpolasyon özellikleri Spanne (1966) tarafından araştırılmıştır. $GM_{p,\infty,r^{-\lambda}}$ uzayları Hörmander tipi vektör alanlarında, gömme teoremlerini incelemek için Lu (1995) tarafından kullanılmıştır. Mizuhara (1991) ve Nakai (2006) çalışmalarında $GM_{p,\infty,w}$ uzaylarında çeşitli integral operatörlerin sınırlılığını incelemiştir.

Bu tezin amacı, ağırlıklı Global Morrey tipli uzaylarda M maksimal operatörü ile T Calderón-Zygmund singüler integral operatörü ve onların komütatörlerinin $GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığını elde etmektir. Burada Morrey uzayının tanımı hatırlatılarak bu uzayda maksimal operatör ve Calderón-Zygmund singüler integral operatörünün sınırlılıkları verilmiştir. Ağırlıklı Global Morrey tipli uzaylarda belirtilen operatörlerin sınırlılığının gösterilmesinde Hardy eşitsizliğinden yararlanılmıştır. Tezin son kısmında ise üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen sonuçlarla ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda eşitsizlikler üzerine uygulamalara yer verilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 W bir F cismi ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $\|\cdot\| : W \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $v, w \in W$ ve her $\gamma \in F$ için

$$(N1) \quad \|w\| \geq 0 \text{ ve } \|w\| = 0 \Leftrightarrow w = 0,$$

$$(N2) \quad \|\gamma w\| = |\gamma| \|w\|,$$

$$(N3) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

aksiyomlarını sağlıyor ise bu dönüşüme W üzerinde norm denir. $(W, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu bir vektör uzayı olarak adlandırılır ve kısaca W ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.2 W ve V iki vektör uzayı ve T, W uzayından V uzayına bir fonksiyon olsun.

Her $w, x \in W$ ve her $\gamma \in F$ için

$$(i) \quad T(w + x) = Tw + Tx$$

$$(ii) \quad T(\gamma w) = \gamma Tw$$

özellikleri sağlanıyor ise T bir lineer operatör olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3 W ve V iki normlu uzay, $D(T) \subset W$ ve $T : D(T) \rightarrow V$ lineer bir operatör olsun. Her $w \in W$ için

$$\|Tw\| \leq E\|w\|$$

gerçeklenecek biçimde bir $E \geq 0$ sayısı mevcutsa T sınırlı bir operatör olarak ifade edilir.

Bu T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{w \in D(T), w \neq 0} \frac{\|Tw\|}{\|w\|}$$

ile hesaplanır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.4 W ile V normlu uzaylar, $D(T) \subset W$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow V$ bir operatör ve $w_0 \in D(T)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\|w - w_0\| < \delta$$

şartını sağlayan her $w \in W$ için,

$$\|Tw - Tw_0\| < \varepsilon$$

koşulu gerçekleşecek biçimde bir $\delta > 0$ sayısı mevcutsa T operatörüne w_0 sürekli denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 2.1 W ve V iki normlu uzay ve $D(T) \subset W$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda T lineer operatörünün sürekli olması için gerekli ve yeter şart T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.5 W bir küme ve $\mathcal{S}$, W kümesini alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer

(a) $W \in \mathcal{S}$,

(b) Her $A \in \mathcal{S}$ için $A^c = W \setminus A \in \mathcal{S}$,

(c) Her $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $A_i \in \mathcal{S}$ iken $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{S}$

gerçekleniyor ise $\mathcal{S}$ sınıfına, W üzerinde bir cebirdir denir (c) koşulu yerine

(d) Her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in \mathcal{S}$ iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$

özellliği sağlanıyorsa $\mathcal{S}$ cebirine, W üzerinde σ -cebir denir. $(W, \mathcal{S})$ ikilisi bir ölçülebilir uzay olarak ifade edilir ve $\mathcal{S}$ deki her bir küme $\mathcal{S}$ -ölçülebilir kümedir.

Tanım 2.6 $(W, \mathcal{S})$ ölçülebilir uzayı ile $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $\beta \in \mathbb{R}$ için

$$h^{-1}([\beta, +\infty]) = \{w \in W : h(w) > \beta\} \in \mathcal{S}$$

sağlanıyor ise h ye ölçülebilir fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.7 $(W, \mathcal{S})$ ölçülebilir uzayı verilsin. Eğer $\mu : W \rightarrow [-\infty, \infty]$ küme fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Her $A \in \mathcal{S}$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) (A_n) , $\mathcal{S}$ de ayrık olan (A_n) dizisi olmak üzere $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini gerçekliyorsay μ fonksiyonu ölçü olarak adlandırılır. Bu durumda $(W, \mathcal{S}, \mu)$ üçlüsüne ölçü uzayı denir. Ayrıca her $A \in \mathcal{S}$ için $\mu(A) < \infty$ oluyor ise μ ye sonlu ölçü denir.

Tanım 2.8 $(W, \mathcal{S}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve P bir önerme olsun. Eğer $\mu(A) = 0$ olacak biçimde bir $A \in \mathcal{S}$ kümesi dışında P önermesi doğru ise P , hemen her yerde (h.h.y) sağlanır denir.

Tanım 2.9 W bir küme ve $P(W)$, W kümesinin kuvvet kümesi olsun . Eğer $\mu^* : P(W) \rightarrow [-\infty, \infty]$ küme fonksiyonu

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- (ii) Her $A \in P(W)$ için $\mu^*(A) \geq 0$,
- (iii) Her $A, B \in P(W)$ için $A \subset B$ iken $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- (iv) (A_n) , $P(W)$ de bir dizi olmak üzere $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ özelliklerini gerçekleştiriyorsa bir dış ölçü olarak adlandırılır.

Tanım 2.10 (Lebesgue Dış Ölçüsü) (I_k) , $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının dizisi ve

$$\eta_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d(I_k) : (I_k) \in \eta_A \right\}$$

tanımlanan λ^* bir dış ölçü olup Lebesgue dış ölçüsü olarak adlandırılır. Burada $I = (a, b)$ olmak üzere $d(I) = b - a$ olur.

Teorem 2.2 λ^* Lebesgue dış ölçüsü her alt aralığa onun uzunluğunu karşılık getirir. Yani $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise

$$\lambda^*(I) = d(I)$$

olur.

Tanım 2.11 $\mathbb{R}^n$ deki bir I aralığı, $I_1, \dots, I_n$ ler $\mathbb{R}$ nin alt aralıkları olmak üzere

$$I = I_1 \times \dots \times I_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in I_i \text{ ve } i = 1, \dots, n\}$$

ile ifade edilir. I aralığının hacmi, $V(I) = d(I_1) \dots d(I_n) = \prod_{i=1}^n d(I_i)$ ile hesaplanır. Tüm I_i ler, $\mathbb{R}$ de açık aralık ise I , $\mathbb{R}^n$ de açık aralık, hepsi kapalı ise $\mathbb{R}^n$ de kapalı aralık olarak

adlandırılır. (I_k) , $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının dizisi,

$$\nu_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R}^n)$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) : (I_k) \in \nu_A \right\}$$

tanımlanan λ^* , bir dış ölçü olup $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü olarak adlandırılır.

Tanım 2.12 W bir küme ve μ^* bir dış ölçüsü olsun. Eğer her $A \subset W$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

ise E , μ^* -ölçülebilir küme denir. μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen E kümelerinin sınıfı $\mathcal{M}(W, \mu^*)$ ile gösterilir.

Teorem 2.3 W bir küme ve μ^* , W üzerinde bir dış ölçü olsun. Bu durumda

- (a) $\mathcal{M}(W, \mu^*)$ sınıfı bir σ -cebirdir.
- (b) μ^* dış ölçüsünün $\mathcal{M}(W, \mu^*)$ sınıfına kısıtlaması bir ölçüdür.

Tanım 2.13 λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \lambda^*)$ sınıfına kısıtlamasına Lebesgue ölçüsü denir ve λ ile gösterilir.

Tanım 2.14 $(W, \mathcal{S}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Bu durumda

- (i) $p \in [1, \infty)$ için

$$\|h\|_{L_p(W)} = \left(\int_W |h|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

- (ii) $p = \infty$ için

$$\|h\|_{L_\infty(W)} = \operatorname{ess\,sup}_{w \in W} |h(w)| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına p -inci kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar uzayı adı verilir ve L_p ile gösterilir.

$A \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir küme ise A kümesinin Lebesgue ölçüsü

$$|A| = \int_A dx$$

şeklindedir.

Teorem 2.4 $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $g \in L_p$ ve $h \in L_q$ ise $gh \in L_1$ ve

$$\|gh\|_{L_1} \leq \|g\|_{L_p} \|h\|_{L_q}$$

gerçeklenir. Bu eşitsizlik Hölder eşitsizliği olarak adlandırılır.

Teorem 2.5 $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $g, h \in L_p(W)$ ise $g + h \in L_p$ ve

$$\|g + h\|_{L_p} \leq \|g\|_{L_p} + \|h\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği adı verilir.

Teorem 2.6 (Fubini Teoremi) h , $\mathbb{R}^{n+m}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |h(x, y)| dx dy \\ J_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)| dx \right) dy \\ J_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |h(x, y)| dy \right) dx \end{aligned}$$

integrallerinden en az biri var ve sonlu olsun. O halde

- (a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$ için $h(., y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$,
- (b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $h(x, .) \in L_1(\mathbb{R}^m)$,
- (c) $\int_{\mathbb{R}^m} h(., y) dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$,
- (d) $\int_{\mathbb{R}^n} h(x, .) dx \in L_1(\mathbb{R}^m)$,
- (e) $J_1 = J_2 = J_3$

ifadeleri elde edilir.

Tanım 2.15 h ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt $K \subset W$ alt kümesi üzerinde

$$\int_K |h| d\mu < \infty$$

ise h fonksiyonu W üzerinde lokal integrallenebilirdir denir.

Teorem 2.7 (Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı lokal integrallenebilen bir h fonksiyonu verilsin. O halde

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |h(y)| dy = h(x)$$

ifadesi h.h. her x için sağlanır.

Tanım 2.16 $L_{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile ölçülebilir g fonksiyonlarının ağırlıklı L_p uzayı gösterilir. Bu uzay

$$\|g\|_{L_{p, \varphi}(B(x, r))} \equiv \|g\chi_{B(x, r)}\|_{L_{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{B(x, r)} |g(y)|^p \varphi(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olacak şekilde g fonksiyonlarının uzayıdır.

Ağırlıklı Lebesgue uzayı, bir ağırlık fonksiyonu yardımıyla Lebesgue ölçüsü kullanılarak tanımlanan bir fonksiyon uzayıdır.

2.2 Morrey Uzayları

Bu kısımda tez çalışmasında faydalanılacak tanımlar ve teoremler hatırlatılmıştır.

Tanım 2.17 (Morrey Uzayları) $0 \leq \lambda \leq n$, $p \geq 1$ için $g \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|g\|_{p, \lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x, r)} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına $L_{p, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları denir. Burada $B(x, r)$, x merkezli r yarıçaplı yuvarı belirtir.

$$\|g\|_{p, \lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L_p(B(x, r))} \leq c < \infty$$

a) $\lambda = 0$ alınırsa,

$$\|g\|_{p,0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \|g\|_{L_p(B(x,r))} = \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

bilinen Lebesgue uzayı elde edilir.

b) $\lambda = n$ alınırsa,

$$L_{p,n}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$$

dir. Gerçekten de $g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\left(r^{-n} \int_{B(x,r)} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L_\infty}$$

elde edilir. Böylece $g \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ bulunur ve

$$\|g\|_{L_{p,n}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L_\infty}$$

elde edilir. Yani $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir.

$g \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Temel Lebesgue Teoreminden

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y)|^p dy = |g(x)|^p$$

dir. Bu durumda

$$|g(x)| = \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{L_{p,n}}$$

eşitsizliği gerçekleşir. O halde $g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir ve

$$\|g\|_{L_\infty} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|g\|_{L_{p,n}}$$

gerçeklenir (Stein, 1970). Burada ω_n , $\mathbb{R}^n$ 'de birim kürenin hacmidir ve

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

ile gösterilir. Dolayısıyla $L_{p,n}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n)$ elde edilir.

c) $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olup burada $\Theta, \mathbb{R}^n$ de sifıra denk olan fonksiyonların kümesidir.

Morrey uzayları ilk defa Morrey (1938) tarafından tanımlanmıştır. Morrey uzayları kısmi diferensiyel denklemler teorisinde ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerde önemli yere sahiptir. Morrey uzaylarının norm tanımında $B(x, r)$ yerine $B(0, r)$ alınırsa $L_{p,\lambda}^{loc}$ lokal Morrey uzayı elde edilir.

Tanım 2.18 ω fonksiyonu *h.h.* $x \in \mathbb{R}^n$ için $\omega(x) > 0$ olacak biçimde $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir ise ω bir ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.19 ($L_{p,\kappa}(\omega)$ Ağırlıklı Morrey Uzayı) $1 \leq p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\|g\|_{L_{p,\kappa}(\omega)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \omega(B(x, r))^{-\frac{\kappa}{p}} \|g\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} < \infty$$

özellikliğini sağlayan g fonksiyonlarının uzayı $L_{p,\kappa}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayı olarak adlandırılır. Bu norm tanımında $B(x, r)$ yerine $B(0, r)$ alınırsa lokal ağırlıklı Morrey uzayı elde edilir.

Tanım 2.20 ($M_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı) $1 \leq p < \infty$ ve $g \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|g\|_{M_{p,\omega}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\omega(x, r)} \|g\|_{L_p(B(x, r))} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına $M_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı denir. Burada $\omega(x, r)$, $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ da negatif olmayan ölçülebilir fonksiyondur. Ayrıca burada $\omega(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilirse $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı elde edilir.

Tanım 2.21 ($LM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş ağırlıklı lokal Morrey uzayı)

$0 < p, \theta \leq \infty$ ve $\omega(r)$, ağırlık fonksiyonu olsun. $g \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|g\|_{LM_{p,\theta,\omega}} = \|\omega(r)\|_{L_{\theta}(B(0,r))} \|g\|_{L_p(B(0,r))} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına $LM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey uzayı denir.

Tanım 2.22 (Maksimal Fonksiyon) $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrallenebilir olsun. g fonksiyonunun maksimal fonksiyonu

$$Mg(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |g(y)| dy$$

ile tanımlanır.

Aşağıdaki teorem maksimal operatörün Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.8 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan g fonksiyonu için

- (i) $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise Mg maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.
- (ii) Eğer $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall t > 0$ için,

$$|\{x : Mg(x) > t\}| \leq \frac{A}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx$$

sağlanır. Burada A , sadece boyuta bağlı bir sabittir.

- (iii) $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mg \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\|Mg\|_{L_p} \leq A_p \|g\|_{L_p}$ gerçekleşir (Stein, 1970).

Teorem 2.9 (i) $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L_{p,\lambda}$ ve $0 < \lambda < \infty$ için Mg , $\mathbb{R}^n$ de hemen her yerde sonludur.

- (ii) $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mg\|_{p,\lambda} \leq C \|g\|_{p,\lambda}$$

gerçeklenir. Burada C , f fonksiyonundan bağımsız sabittir.

- (iii) $p = 1$ olsun. Bu durumda

$$t |\{Mg > t\} \cap B_r(x)| \leq C r^\lambda \|g\|_{1,\lambda}$$

gerçeklenir. C sabiti x, r, t ve g den bağımsızdır (Chiarenza ve Frasca, 1987).

Lemma 2.1 $1 \leq p < \infty$, $g \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$p > 1$ için,

$$\|Mg\|_{L_p(B(x,t))} \leq C t^{n/p} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} \|g\|_{L_p(B(x,r))} dr$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mg\|_{W_{L_1}(B(x,t))} \leq Ct^n \int_t^\infty r^{-n-1} \|g\|_{L_1(B(x,r))} dr$$

gerçeklenir, burada C sabiti g , $x \in \mathbb{R}^n$ e bağlı olmayan bir sabittir ve $t > 0$ dır. (Guliyev, 1994).

Teorem 2.10 $1 \leq p < \infty$ olsun ve $\omega_1(x, r)$, $\omega_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_t^\infty \omega_1(x, r) \frac{dr}{r} \leq C \omega_2(x, r) \quad (2.1)$$

koşulunu sağlasın, burada C , x ve t 'ye bağlı olmayan bir sabittir. Bu durumda $p > 1$ için M maksimal operatörü $M_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $M_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. (Guliyev, 1999)

Tanım 2.23 $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise φ ağırlık fonksiyonu, $A_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir denir. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$|B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} \varphi(y) dy \leq C \operatorname{ess\,sup}_{y \in B(x, r)} \frac{1}{\varphi(y)} < \infty$$

olacak şekilde $C > 0$ var ise φ ağırlık fonksiyonu, $A_1(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir denir.

$1 \leq p < \infty$ için,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varphi_1^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise (φ_1, φ_2) ağırlık fonksiyonları $\tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ dir.

Lemma 2.2 $1 \leq p < \infty$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $(\varphi_2^{-1}, \varphi_1^{-1}) \in \tilde{A}_{p'}(\mathbb{R}^n)$ dir.

Teorem 2.11 $1 \leq p < \infty$ olsun. $M : L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olmasıdır (Muckenhoupt, 1972).

Teorem 2.12 $1 < p < \infty$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman M operatörü $L_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Garcia-Cuerva ve Rubio de Francia, 1985).

Lemma 2.3 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $\frac{q-1}{p-1} = \delta$ ise $(\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}) \in \tilde{A}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ gerçekleşir.

Sonuç 2.1 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M operatörü $L_{p,\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Tanım 2.24 (Singüler İntegral Operatör) Calderón-Zygmund tipi singüler integraler

$$T_g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, t)g(t)dt$$

biçiminde ifade edilir. Burada K standart singüler çekirdektir, yani K fonksiyonu $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq t\}$ üzerinde sürekli ve

$$|K(x, t)| \leq C|x - t|^{-n} \quad x \neq t,$$

$$|K(x, t) - K(x, z)| \leq C \frac{|t - z|^\sigma}{|x - t|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad |x - t| > 2|t - z| \text{ ise}$$

$$|K(x, t) - K(\xi, t)| \leq C \frac{|x - \xi|^\sigma}{|x - t|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad |x - t| > 2|x - \xi| \text{ ise}$$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.

Teorem 2.13 $1 < p < \infty$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda T singüler integral operatörü $L_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Fujii, 1991).

Sonuç 2.2 $1 < p < \infty$ ve $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. O halde T singüler integral operatörü $L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

Tanım 2.25 $0 < p, \theta < \infty$ için $\omega(r), \varphi(r)$, $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar ve $g \in L_{p,\varphi}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $GM_{p,\theta,\omega}^\varphi$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayları

$$\|g\|_{GM_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega(t) \|g\|_{L_{p,\varphi}(B(x,t))}^\theta dt \right)^{1/\theta} < \infty$$

normu ile tanımlanır. Eğer $\varphi(r) = 1$ ise o zaman $GM_{p,\theta,\omega}$ global Morrey tipli uzay elde edilir (Burenkov ve Guliyev, 2004).

$M^\sharp$ keskin maksimal operatörü,

$$g_{B(x,r)}(x) = |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} g(y) dy$$

olmak üzere

$$M^\sharp g(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |g(y) - g_{B(x,r)}| dy,$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.26

$$\|g\|_{BMO} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |g(y) - g_{B(x,r)}| dy < \infty$$

veya

$$\|g\|_{BMO} = \inf_C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |g(y) - C| dy < \infty.$$

olacak şekildeki tüm lokal integrallenebilen g fonksiyonlarının sınıfına $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir.

Tanım 2.27 Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve bir ölçülebilir b fonksiyonu için maksimal komütatör

$$M_b(g)(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(x) - b(y)| |g(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.28 b bir ölçülebilir fonksiyon olsun. M Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve b fonksiyonun komütatörü her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$[M, b]g(x) = M(bg)(x) - b(x)Mg(x)$$

ile tanımlanır.

M_b ve $[M, b]$ operatörleri temelde birbirinden farklıdır. Çünkü M_b pozitif ve altlinner operatör iken $[M, b]$ operatörü ne pozitif ne de altlineerdir. Ancak b fonksiyonuna bazı ek koşullar eklenirse M_b operatörü $[M, b]$ operatörünü kapsar.

Tanım 2.29 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|g\|_{BMO_{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{\|(g(\cdot) - g_{B(x,r)})\chi_{B(x,r)}\|_{L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}}{\|\varphi\|_{L_p(B(x,r))}} < \infty$$

veya

$$\|g\|_{BMO_{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \|(g(\cdot) - g_{B(x, r)})\chi_{B(x, r)}\|_{L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \|\varphi^{-1}\|_{L_{p'}(B(x, r))} < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm lokal integrallenebilen g fonksiyonlarının sınıfı $BMO_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Teorem 2.14 $1 \leq p < \infty$ ve φ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ise $\|\cdot\|_{BMO_{p,\varphi}}$ ve $\|\cdot\|_{BMO}$ normları birbirine denktir (Ho, 2016).

Aşağıdaki lemma diğer bölümlerdeki esas teoremleri ispat ederken kullanılacaktır.

Lemma 2.4 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < 2r < t$ için

$$|b_{B(x, r)} - b_{B(x, t)}| \leq C \|b\|_{BMO} \ln \frac{t}{r}$$

olacak şekilde b, x, r ve t ifadelerinden bağımsız bir $C > 0$ vardır (Janson, 1978).

Lemma 2.5 $1 \leq r \leq s \leq \infty$ olmak üzere v ve w , $(0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir pozitif iki fonksiyon olsun. O zaman

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right)^s w(t) dt \right)^{1/s} \leq C \left(\int_0^\infty h(t)^r v(t) dt \right)^{1/r}, \quad (2.2)$$

olacak şekilde h fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır gerek ve yeter koşul

$$K = \sup_{t > 0} \left(\int_t^\infty w(\tau) d\tau \right)^{1/s} \left(\int_0^t v(\tau)^{1-r'} d\tau \right)^{1/r'} < \infty, \quad (2.3)$$

olmasıdır. Burada $r + r' = rr'$ dür. Ayrıca C , (2.2) deki en iyi sabitse ve K , (2.3) ile tanımlanıyorsa, o zaman

$$K \leq C \leq k(r, s)K \quad (2.4)$$

şeklindedir.

3. AĞIRLIKLI GLOBAL MORREY TİPLİ UZAYLARDA MAKSİMAL OPERATÖR VE MAKSİMAL KOMÜTATÖRLER İÇİN İKİ AĞIRLIKLI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, öncelikle ağırlıklı global Morrey tipli uzaylar tanıtılacak, ardından bu uzaylarda Maksimal operatör ve komütatörlerinin iki ağırlıklı sınırlılığı için gerekli şartlar elde edilecektir.

Tanım 3.1 $0 < p, \theta < \infty$ ve $\omega(r)$, $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ve $g \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $LM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey tipi uzay ve $GM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ global Morrey tipi uzay sırasıyla

$$\|g\|_{LM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \omega \|g\|_{L^p(B(0,t))} \right\|_{L^\theta(0,\infty)}$$

ve

$$\|g\|_{GM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g(x + \cdot)\|_{LM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

quasi-normları sonlu olacak şekildeki tüm fonksiyonların uzayıdır.

$LM_{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Banach uzayıdır. Burenkov ve Guliyev (2004) tarafından lokal Morrey tipi uzaylarda maksimal operatörün sınırlılığı için gerek ve yeter koşul gösterilmiştir. Ayrıca kesirli maksimal operatörün sınırlılığı ve lokal Morrey tipli uzaylarda Riesz potansiyeli için gerek ve yeter koşul sırasıyla Burenkov ve Guliyev (2006, 2009) tarafından elde edilmiştir.

Her $t > 0$ için $\|\omega(r)\|_{L^\theta(t,\infty)} = \infty$ ise o zaman $LM_{p,\theta,\omega} = GM_{p,\theta,\omega} = \Theta$ dır. Burada Θ , $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfıra eşdeğer tüm fonksiyonların kümesidir. Her $t > 0$ için $\|\omega(r)r^{n/p}\|_{L^\theta(0,t)} = \infty$ ise o zaman tüm $f \in LM_{p,\theta,\omega}$ için 0 da sürekli olup $g(0) = 0$ dır ve $0 < p < \infty$ için $GM_{p,\theta,\omega} = \Theta$ dır.

Lokal ve global Morrey tipi uzayların temel özellikleri için Burenkov ve Guliyev (2004) tarafından yapılan çalışmalara bakılabilir.

$0 < \lambda < n$ için $GM_{p,\infty,r-\lambda/p}$ uzayları Morrey (1938) tarafından tanıtılmış olan klasik Morrey tipi uzaylardır ve ikinci derece kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının incelenmesi için kullanılır. $GM_{p,\infty,w}$ uzaylarının interpolasyon özellikleri Spanne (1966) tarafından araştırılmıştır. $GM_{p,\infty,r-\lambda}$ uzayları Hörmander tipi vektör alanlarında, gömme teoremlerini incelemek için Lu (1995) tarafından kullanılmıştır. Mizuhara (1991) ve Nakai(2006) çalışmalarında $GM_{p,\infty,w}$ uzaylarında çeşitli integral operatörlerin sınırlılığını incelemiştir.

3.1 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Maksimal Operatörlerin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri

Bu bölümde ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda maksimal operatörün iki ağırlıklı sınırlılıkları gösterilmiştir. Aşağıda verilen genelleştirilmiş Hardy eşitsizlikleri teoremlerin ispatında kullanılmıştır.

Lemma 3.1 $1 \leq r \leq s \leq \infty$ olmak üzere v ve w , $(0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir pozitif iki fonksiyon olsun. O zaman

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right)^s w(t) dt \right)^{1/s} \leq C \left(\int_0^\infty h(t)^r v(t) dt \right)^{1/r}, \quad (3.1)$$

olacak şekilde h fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır gerek ve yeter koşul

$$K = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w(\tau) d\tau \right)^{1/s} \left(\int_0^t v(\tau)^{1-r'} d\tau \right)^{1/r'} < \infty, \quad (3.2)$$

olmasıdır. Burada $r + r' = rr'$ 'dür. Ayrıca C (3.1)'deki en iyi sabitse ve K (3.2) ile tanımlanıyorsa o zaman

$$K \leq C \leq k(r, s)K. \quad (3.3)$$

Burada (3.2) deki K sabiti çeşitli biçimlerde yazılabilir (Opic ve Kufner, 1990). Örneğin

$$k(r, s) = r^{1/s}(r')^{1/r'} \quad , \quad k(r, s) = s^{1/s}(s')^{1/r'} \quad , \quad k(r, s) = (1 + s/r')^{1/s}(1 + r'/s)^{1/r'}.$$

Lemma 3.2 $1 \leq r \leq s \leq \infty$ olmak üzere v ve w fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde hemen her yerde ölçülebilir pozitif iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty h(\tau) d\tau \right)^s w(t) dt \right)^{1/s} \leq C \left(\int_0^\infty h(t)^r v(t) dt \right)^{1/r} \quad (3.4)$$

h fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır gerek ve yeter koşul

$$K_1 = \sup_{t>0} \left(\int_0^t w(\tau) d\tau \right)^{1/s} \left(\int_t^\infty v(\tau)^{1-r'} d\tau \right)^{1/r'} < \infty$$

olmasıdır. Ayrıca, (3.4)'deki en iyi C sabiti (3.4)'deki $K_1 \leq C \leq k(r, s)K_1$ eşitsizliklerini sağlar.

Lemma 3.1 ve Lemma 3.2, $1 \leq r = s < \infty$ için Talenti (1969), Tomaselli (1969), Muckenhoupt (1972) tarafından ve $r < s$ için Bradley (1978), Kokilashvili (1979), Maz'ya (1985) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $g \in L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mg\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} \leq C \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.5)$$

dir. Burada C sabiti g, x ve t den bağımsızdır.

İspat. g fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edelim.

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1(y) = g(y)\chi_{B(x, 2t)}(y), \quad g_2(y) = g(y)\chi_{B^c(x, 2t)}(y), \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$\|Mg\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} \leq \|Mg_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} + \|Mg_2\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))}.$$

yazabiliriz. $g_1 \in L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ alalım, Teorem 2.12 den

$$\begin{aligned} \|Mg_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} &\leq \|Mg_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|g_1\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, 2t))}. \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\|Mg_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, 2t))} \leq C \|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, 2t))},$$

elde edilir ve burada C sabiti g den bağımsızdır.

$$\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, 2t))} \leq C \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}} \frac{ds}{s}$$

dikkate alındığında

$$\|Mg_1\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \leq C \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.7)$$

yazılabilir.

$Mg_2(z)$ i hesaplamak için, $z \in B(x,t)$ için, $\delta > 0$ seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{C B(x,2t)} |x-y|^{-n+\delta} |g(y)| dy &= (n-\delta) \int_{C B(x,2t)} |g(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty s^{\delta-n-1} ds \right) dy \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |g(y)| dy \right) ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \|\chi_{B(x,s)} \varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

yazabiliriz.

Şimdi $z \in B(x,t)$ için,

$$\begin{aligned} Mg_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z,r)|^{-1} \int_{B(z,r)} |g_2(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t} \int_{C B(x,2t) \cap B(z,r)} |y-z|^{-n} |g(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t} \int_{C B(x,2t) \cap B(z,r)} |x-y|^{-n} |g(y)| dy \\ &\leq C \int_{C B(x,2t)} |x-y|^{-n} |g(y)| dy. \end{aligned}$$

$$\int_{C B(x,t)} |x-y|^{-n} |g(y)| dy \leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \quad (3.9)$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \|Mg_2\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} &\leq C \left\| \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \right\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \|\chi_{B(x,t)}\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir.

(3.7) ve (3.10) dan

$$\|Mg_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \leq C \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s}$$

elde edilir, burada C sabiti f den bağımsızdır. ■

Aşağıdaki teoremda $G\mathcal{M}_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki maksimal operatörün iki ağırlıklı sınırlılığı için gerekli koşul verilmiştir.

Teorem 3.2 $1 < p < \infty, 0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ ve ω_1, ω_2 fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \omega_1(r)^{1-\theta_1'} r^{-\theta_1'} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-\theta_1'} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty, \quad (3.11)$$

koşulunu sağlıyor ise M operatörü $G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $G\mathcal{M}_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $g \in G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 3.1 den ve daha sonra Lemma 3.2 de

$$h(s) = \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{1}{s},$$

$$\omega(t) = \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2}$$

$$\nu(t) = \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}$$

uygulandığında

$$\begin{aligned}
\|Mg\|_{\mathcal{GM}_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|Mg\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}^{\theta_2}(B(x,t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2} \left(\int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}^{\theta_1}(B(x,t))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}} t^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
&= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_1(t) \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}^{\theta_1}(B(x,r))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
&= C \|g\|_{\mathcal{GM}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.2 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Maksimal Komütatörlerin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri

Bu kısımda ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda maksimal komütatörlerin iki ağırlıklı sınırlılığı ile ilgili teorem ve ispatlara yer verilecektir.

Lemma 3.3 b negatif olmayan lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M, b]g(x)| \leq M_b(g)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

gerçeklenir (Ağcayazı vd., 2015).

Teorem 3.3 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $X, \mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir bir Banach uzayı olsun. M, X üzerinde sınırlı olsun. O zaman M_b, X üzerinde sınırlıdır ve

$$\|M_b g\|_X \leq C \|b\|_{BMO} \|g\|_X$$

sağlanır. Burada C sabiti g den bağımsızdır (Ağcayazı vd., 2015).

Sonuç 3.1 $1 \leq p < \infty, b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b operatörü $L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

Teorem 3.4 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b operatörü $L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

İspat. $g \in L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$M_b g(x) \leq C \|b\|_{BMO} M^2 g(x).$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ağcayazı vd., 2015, Sonuç 1.11). Bu eşitsizlik, Teorem 2.11, Sonuç 2.1 ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ koşulları kullanılarak

$$\begin{aligned} \|M_b g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|b\|_{BMO} \|M^2 g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|M g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M^2 g(x) = M(Mg(x))$ dır. ■

Teorem 3.5 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $g \in L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\|M_b g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, s))} ds}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))} s} \quad (3.12)$$

sağlanır. Burada C sabiti g, x ve t den bağımsızdır.

İspat. g fonksiyonunu

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1(y) = g(y) \chi_{B(x, 2t)}(y), \quad g_2(y) = g(y) \chi_{B^c(x, 2t)}(y), \quad t > 0 \quad (3.13)$$

şeklinde ifade edilsin.

$$\|M_b g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} \leq \|M_b g_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} + \|M_b g_2\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))}$$

eşitsizliği yazılabilir. Teorem 3.4 den

$$\begin{aligned} \|M_b g_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} &\leq \|M_b g_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|g_1\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} = C \|b\|_{BMO} \|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, 2t))} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Burada C sabiti g den bağımsızdır. (3.14) eşitsizliğinden,

$$\|M_b g_1\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,r))} dr}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))} r} \quad (3.15)$$

sağlanır ki burada $\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,2t))}$ t ye göre azalmayıp azalmaz. Dolayısıyla (3.15) in sağ tarafı, (3.14) ün sağ tarafındaki $\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,2t))}$ den daha büyüktür.

$z \in B(x, t)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} M_b g_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z, r)|^{-1} \int_{B(z,r)} |b(z) - b(y)| |g_2(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t} \int_{C B(x, 2t) \cap B(z,r)} |y - z|^{-n} |b(z) - b(y)| |g(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t} \int_{C B(x, 2t) \cap B(z,r)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |g(y)| dy \\ &= n \int_{C B(x, 2t)} |b(z) - b(y)| |g(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty s^{-n-1} ds \right) dy \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(z) - b(y)| |g(y)| dy \right) ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,s)}| |g(y)| dy \right) ds \\ &\quad + C \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(z) - b_{B(x,s)}| |g(y)| dy \right) ds = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi I_1 için incelenecek olursa, Hölder eşitsizliği ve Teorem 2.14 den,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,s)}| |g(y)| dy \right) ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \|b(\cdot) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p',\varphi_1^{-\delta}}(B(x,s))} ds \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

elde edilir.

I_2 yi hesaplamak için Lemma 2.4 den yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_t^\infty s^{-n-1} |b(z) - b_{B(x,s)}| \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |g(y)| dy \right) ds \\
&\leq |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |g(y)| dy \right) ds \\
&+ \int_t^\infty s^{-n-1} |b_{B(x,t)} - b_{B(x,s)}| \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |g(y)| dy \right) ds \\
&\leq CM_b \chi_{B(x,t)}(z) \int_t^\infty s^{-n-1} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&+ C\|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \ln \frac{s}{t} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.4 den,

$$\begin{aligned}
\|M_b g_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} &\leq \|I_1\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} + \|I_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \\
&\leq C\|b\|_{BMO} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))} s} \\
&+ C\|M_b \chi_{B(x,t)}\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))} s} \\
&\leq C\|b\|_{BMO} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))} s} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.15) ile (3.16) dan (3.12) bulunur. ■

Aşağıdaki teorem $G\mathcal{M}_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)$ uzayında maksimal komütatörün iki ağırlıklı sınırlılığı için temel koşulu vermektedir.

Teorem 3.6 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ ve ω_1, ω_2 fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right)^{\theta_1'} \omega_1(r)^{1-\theta_1'} r^{-\theta_1'} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{\theta_1'} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty \quad (3.17)$$

koşulunu sağlıyor ise M_b operatörü $G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $G\mathcal{M}_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $g \in G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. İlk adımda Teorem 3.5 ve sonraki

adımında Lemma 3.2 de

$$\begin{aligned} h(s) &= \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{1}{s} \\ \omega(t) &= \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2} \\ \nu(t) &= \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1} \end{aligned}$$

uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|M_b g\|_{G\mathcal{M}_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|M_b g\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2} \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{\theta_1} \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,t))}^{\theta_1}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}} t^{-\theta_1} \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\ &= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_1(t) \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} = C \|g\|_{G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4. AĞIRLIKLIL GLOBAL MORREY TIPLİ UZAYLARDA SİNGÜLER OPERATÖR VE SİNGÜLER KOMÜTATÖRLER İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde $G\mathcal{M}_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında singüler integral operatörler ve komütatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikleri incelenecektir.

4.1 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Singüler Operatörlerin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri

T , Calderón-Zygmund operatör ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Coifman vd. (1976) çalışmalarının iyi bilinen bir sonucu $[b, T]g = T(bg) - bTg$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$ için, $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğudur. Calderón-Zygmund operatörlerin komütatörü ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesinde önemlidir.

Lemma 4.1 $1 < s < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|[b, T]g|(x) \leq M(|[b, T]g|(x)) \leq C\|b\|_{BMO} \left((M|Tg|^s)^{\frac{1}{s}}(x) + (M|g|^s)^{\frac{1}{s}}(x) \right)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ vardır.

Teorem 4.1 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1^\delta, \varphi_2^\delta) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $g \in L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tg\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \leq C\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.1)$$

gerçeklenir. Burada C sabiti g , x ve t den bağımsızdır.

İspat. g fonksiyonu (3.13) de olduğu gibi $g = g_1 + g_2$ olarak ifade edilirse,

$$\|Tg\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \leq \|Tg_1\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} + \|Tg_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))}$$

yazılabilir. Teorem 2.13 den,

$$\|Tg_1\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \leq \|Tg_1\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g_1\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} = C\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,2t))} \quad (4.2)$$

gerçeklenir. Burada C sabiti g den bağımsızdır.

$$\|Tg_1\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} \leq C\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.3)$$

elde edilir ki $\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,2t))}$, t ye göre azalmayandır. Dolayısıyla (4.2) nin sağ tarafındaki $\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,2t))}$ ifadesi (4.3) ün sağ tarafından daha büyüktür.

Şimdi $\|Tg_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))}$ yi hesaplamak için $z \in B(x,t)$ alınıp $|x-z| \leq t$, $|z-y| \geq 2t$, $\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$, eşitsizlikleri uygulandığında

$$|Tg_2(z)| \leq C \int_{C B(x,2t)} \frac{|g(y)|}{|y-z|^n} dy$$

elde edilir.

$Tg_2(z)$ yi hesaplamak için, $z \in B(x,t)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} & \int_{C B(x,t)} |x-y|^{-n} |g(y)| dy \\ & \leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |g(y)| dy ds \\ & \leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-\delta} \chi_{B(x,s)}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki eşitsizlik

$$\int_{C B(x,t)} |x-y|^{-n} |g(y)| dy \leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) den,

$$\begin{aligned} \|Tg_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} & \leq C\|\chi_{B(x,t)}\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ & \leq C\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dolayısıyla (4.3) ve (4.5) ile (3.5) sonucuna ulaşılır. ■

Aşağıdaki teorem $G\mathcal{M}_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)$ uzayında singüler integral operatörün iki ağırlıklı sınırlılığı için gerekli koşulu veren teoremdir.

Teorem 4.2 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ olsun. ω_1 ve ω_2 fonksiyonları (3.11) koşulunu sağlasın. Bu durumda T operatörü $GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $g \in GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ olsun. İlk adımda Teorem 4.1 ve daha sonraki adımda Lemma 3.2 de

$$h(s) = \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{1}{s},$$

$$\omega(t) = \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2}$$

ve

$$\nu(t) = \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}$$

uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|Tg\|_{GM_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|Mg\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2} \left(\int_t^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,t))}^{\theta_1}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}} t^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\ &= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_1(t) \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,r))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} = C \|g\|_{GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}} \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

4.2 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Singüler Komütatörlerin İki Ağırlıklı Eşitsizlikleri

Bu bölümde, ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda singüler komütatörlerin iki ağırlıklı sınırlılığı için gerekli teoremler ve ispatlarına yer verilecektir.

Aşağıda verilen teorem $L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $[b, T]$ operatörünün iki ağırlıklı sınırlılığını vermektedir.

Teorem 4.3 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[b, T]$ operatörü $L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $g \in L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 4.1, Sonuç 2.1 ve Sonuç 2.2 den,

$$\|[b, T]g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq \|M([b, T]g)\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|b\|_{BMO} \left\| (M|Tg|^s)^{\frac{1}{s}} + (M|g|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\|b\|_{BMO} \left[\left\| (M|Tg|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} + \left\| (M|g|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \right] \\ &\leq C\|b\|_{BMO} \left[\left\| (|Tg|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} + \left\| (|g|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} \right] \leq C\|b\|_{BMO} \|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. O halde her $g \in L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\|[b, T]g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} \leq C\|b\|_{BMO} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, r))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, r))}} \frac{dr}{r} \quad (4.6)$$

sağlanır. Burada C sabiti g, x ve t den bağımsızdır.

İspat. g fonksiyonu (3.13) deki gibi yazılırsa

$$\|[b, T]g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} \leq \|[b, T]g_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} + \|[b, T]g_2\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))}$$

elde edilir. Teorem 4.3 den,

$$\begin{aligned} \|[b, T]g_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} &\leq \|[b, T]g_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|b\|_{BMO} \|g_1\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} = C\|b\|_{BMO} \|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, 2t))} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Burada C sabiti, g den bağımsızdır. (4.7) den,

$$\|[b, T]g_1\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}(B(x, t))} \leq C\|b\|_{BMO} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.8)$$

olur ki burada $\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,2t))}$, t de azalmayan olduğundan (4.8) in sağ tarafı (4.7) nin sağ tarafındaki $\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,2t))}$ den daha büyüktür.

Şimdi $\|[b, T]g_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))}$ hesaplanacak olursa,

$$|[b, T]g_2(z)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |b(z) - b(y)| \frac{|g(y)| dy}{|y - z|^n},$$

Burada $z \in B(x, t)$ olup $|x - z| \leq t$, $|z - y| \geq 2t$ eşitsizlikleri uygulandığında

$$|[b, T]g_2(z)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |g(y)| dy$$

$\frac{1}{2}|z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|z - y|$ elde edilir.

$[b, T]g_2$ yi hesaplamak için önce aşağıdaki eşitsizlik gösterilecektir.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |g(y)| dy \\ & \leq C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n} \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$z \in B(x, t)$ olmak üzere $[b, T]g_2(z)$ yi hesaplamak için,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |g(y)| dy \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |x - y|^{-n} |b(y) - b_{B(x,t)}| |g(y)| dy \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b_{B(x,t)}| |g(y)| dy = J_1 + J_2 \end{aligned}$$

Şimdi $\delta > 0$ seçilirse, Teorem 2.14 and Lemma 2.4 yardımıyla,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |x - y|^{-n} |b(y) - b_{B(x,t)}| |g(y)| dy \\ &\leq \delta \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |x - y|^{-n+\delta} |b(y) - b_{B(x,t)}| |g(y)| dy \int_{|x-y|}^\infty s^{-\delta-1} ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,t)}| |g(y)| dy ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|b(\cdot) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p',\varphi_1^{-\delta}}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &\quad + C \int_t^\infty s^{-n-1} |b_{B(x,t)} - b_{B(x,s)}| \int_{B(x,s)} |g(y)| dy ds \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &\quad + C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \ln \frac{s}{t} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de J_2 incelenecek olursa,

$$\begin{aligned}
J_2 &= |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |x - y|^{-n} |g(y)| dy \\
&\leq C |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(z) - b(y)| dy \int_t^\infty s^{-n} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C M_b \chi_{B(x,t)}(z) \int_t^\infty s^{-n} \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

Burada C sabiti, x ve t den bağımsızdır.

(4.9) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\|[b, T]g_2\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(B(x,t))} &\leq C \|\chi_{B(x,t)}\|_{L_{p,\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \|b\|_{BMO} \\
&\times \int_t^\infty s^{-n} \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\varphi_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (4.8) ve (4.10) ile (4.6) elde edilmiş olur. ■

Aşağıdaki teorem $G\mathcal{M}_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)$ uzayında singüler integral komütatörlerinin iki ağırlıklı eşitsizliklerini göstermektedir.

Teorem 4.5 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ olsun ve ω_1, ω_2 fonksiyonları (3.17) koşulunu sağlasın. Bu durumda $[b, T]$ operatörü $G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $G\mathcal{M}_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $g \in G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. İlk adımda Teorem 4.4 ve sonraki adımda ve Lemma 3.2 de

$$\begin{aligned}
h(s) &= \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p,\varphi_1^\delta}(B(x,s))}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{1}{s} \\
\omega(t) &= \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2} \\
\nu(t) &= \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}
\end{aligned}$$

uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|[b, T]f\|_{GM_{p, \theta_2, \omega_2}^{\varphi_2^\delta}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|[b, T]g\|_{L_{p, \varphi_2^\delta}^{\theta_2}(B(x, t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}^{\theta_2} \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, s))} ds}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))} s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{\theta_1} \frac{\|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}(B(x, t))}^{\theta_1}}{\|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}^{\theta_1}} t^{-\theta_1} \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
&= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_1(t) \|g\|_{L_{p, \varphi_1^\delta}^{\theta_1}(B(x, t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} = C \|g\|_{GM_{p, \theta_1, \omega_1}^{\varphi_1^\delta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

5. BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde elde edilen sonuçların ağırlıklı global Morrey tipli uzaylardaki bazı uygulamalarına yer verilecektir.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ ve $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ olmak üzere Sobolev uzayları

$$W_p^k(\Omega) = \{v \in L_p(\Omega) : D^\alpha v \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

ve genelleştirilmiş Sobolev-Morrey uzayları

$$W_{p,\omega}^k(\Omega, \varphi) = \{v \in \mathcal{M}_\varphi^{p,\omega}(\Omega) : D^\alpha v \in \mathcal{M}_\varphi^{p,\omega}(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

ile ifade edilir.

ω_n , $\mathbb{R}^n$ uzayında birim yuvarın hacmi olmak üzere Laplacian operatörünün standart temel çözümü

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|^{-1} & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & n \geq 3, \end{cases}$$

şeklindedir.

$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu olsun.

$$\phi(x) = \int \Gamma(x-y)g(y)dy$$

ile tanımlanan ϕ potansiyeli $\mathbb{R}^n$ uzayında $-\Delta\phi = g$ denkleminin bir çözümüdür ve $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\|\phi\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad (5.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, bu eşitsizlik singüler integrallerin Calderón-Zygmund teorisinin bir sonucudur.

Diğer taraftan, bir düzgün sınırlı Ω bölgesi üzerinde

$$\begin{cases} -\Delta\phi = g & , \Omega \text{ içinde} \\ \phi = 0 & , \Omega \text{ sınırında} \end{cases} \quad (5.2)$$

ile tanımlanan Dirichlet probleminin çözümleri için (5.1) gibi hesaplamalar iyi bilinmektedir.

Bu bölümde sınırlı Ω kümesinde Dirichlet problemi (5.2) ele alınacaktır. Aynı zamanda bu bölümde $\partial\Omega$ nın C^2 sınıfında olduğunu kabul edilecektir. Bu problemin çözümü

$$\phi(x) = \int_{\Omega} G(x, y)g(y)dy \quad (5.3)$$

olur. Burada, $h(x, y)$ her sabit $y \in \Omega$ için

$$\begin{cases} \Delta_x h(x, y) = 0 & x \in \Omega \\ h(x, y) = -\Gamma(x - y) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

olmak üzere $G(x, y)$,

$$G(x, y) = \Gamma(x - y) + h(x, y)$$

ile tanımlanan Green fonksiyonudur.

Eğer $P(y, Q)$, Poisson çekirdeği ise $h(x, y)$,

$$h(x, y) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x - Q|^{n-2}} P(y, Q) dS(Q),$$

ile verilir. Burada dS , $\partial\Omega$ üzerinde yüzey ölçüsüdür.

Green fonksiyonu,

$$G(x, y) \leq \begin{cases} C \log |x - y| & , \quad n = 2 \\ C |x - y|^{2-n} & , \quad n \geq 3 \end{cases}$$

ve

$$|D_{x_i} G(x, y)| \leq C |x - y|^{1-n} \quad (5.4)$$

eşitsizliklerini sağlar (Widman, 1967). Böylece

$$D_{x_i}\phi(x) = \int_{\Omega} D_{x_i}G(x, y)g(y)dy \quad (5.5)$$

olur. (5.3) gösterimindeki ϕ fonksiyonunun ikinci dereceden türevlerini bulmak için aşağıdaki lemmadan yararlanılacaktır. Burada $d(x) = \inf_{q \in \partial\Omega} |x - q|$ ile sınıra olan uzaklık gösterilmektedir.

Lemma 5.1 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ($n = 2$ ise $|\alpha| > 0$) olsun. Bu durumda

$$|D^\alpha h(x, y)| \leq Cd(x)^{2-n-|\alpha|}$$

olacak şekilde yalnızca n ve α ya bağlı bir C sabiti vardır.

Bu lemmadan her $x \in \Omega$ için $D_{x_i x_j} h(x, y)$, x elemanın bir komşuluğunda düzgün sınırlıdır ve dolayısıyla

$$D_{x_i x_j} \int_{\Omega} h(x, y)g(y)dy = \int_{\Omega} D_{x_i x_j} h(x, y)g(y)dy$$

elde edilir. Ayrıca $|D_{x_j} \Gamma(x)| \leq C|x|^{1-n}$ olduğundan

$$D_{x_j} \int_{\Omega} \Gamma(x - y)g(y)dy = \int_{\Omega} D_{x_j} \Gamma(x - y)g(y)dy$$

elde edilir.

$D_{x_i x_j} \Gamma$ integralenebilir olmadığından ikinci dereceden türevler ve integral arasındaki sıra değiştirilemez. m sınırlı bir fonksiyon ve

$$Kf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} D_{x_i x_j} \Gamma(x - y)f(y)dy.$$

olmak üzere

$$D_{x_i} \int_{\Omega} D_{x_j} \Gamma(x - y)g(y)dy = Kf(x) + m(x)g(x)$$

olduğu bilinir. Burada ve bundan sonraki adımlarda, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu, orijinal f yi sıfır ile genişleterek ele alınmaktadır.

K , Calderón-Zygmund singular integral operatördür. Gerçekten de, $D_{x_j}\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $1-n$ derecesinde homojen bir fonksiyon olduğu için, $D_{x_i x_j}\Gamma(x-y)$, $-n$ derecesinde homojen ve birim küre üzerinde sıfır ortalamaya sahip olduğu sonucuna varılır (Agmon, 1965). Sonuç olarak, Calderón ve Zygmund (1952) tarafından verilen genel teoriden şu sonuç ortaya çıkar: K , $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ 'de sınırlı bir operatördür. Ayrıca, $1 < p < \infty$ için

$$\tilde{K}f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y| > \varepsilon} D_{x_i x_j}\Gamma(x-y)g(y)dy \right|$$

maksimal operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

Sonuç 5.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C^2 de sınırlı ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ olsun ve ayrıca $\omega_1(r)$ ve $\omega_2(r)$, (6) koşulunu sağlasın. $g \in G\mathcal{M}_{p, \theta_1, \omega_1}^{\varphi_1}(\Omega)$ ve ϕ , (5.2) deki problemin çözümüdür. Bu durumda,

$$\|\phi\|_{W_{p, \omega_2, \theta_2}^2(\Omega, \varphi_2)} \leq C \|g\|_{G\mathcal{M}_{p, \theta_1, \omega_1}^{\varphi_1}(\Omega)} \quad (5.6)$$

olacak şekilde yalnızca n ve Ω ya bağlı bir C sabiti vardır.

İspat. Green fonksiyonu için aşağıdaki tahmine ihtiyaç duyulacaktır. Bu tahmin, Dall'Acqua ve Sweers (2004) tarafından ispatlanmıştır ancak Dall'Acqua ve Sweers C^2 den daha düzenli bir bölgede çalışmışlardır.

Ω , C^2 de sınırlı bir bölge ve $G(x, y)$, Ω üzerindeki (5.2) probleminin Green fonksiyonu olsun. Bu durumda $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ için Green fonksiyonu aşağıdaki tahminden yararlanılacaktır. Bu tahmin, Dall'Acqua ve Sweers (2004) tarafından ispatlanmıştır. Ancak Dall'Acqua ve Sweers C^2 den daha düzenli bir bölgede çalışmışlardır. Ω , C^2 de sınırlı bir bölge ve $G(x, y)$, Ω üzerindeki (5.2) probleminin Green fonksiyonu olsun. Bu durumda $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ için

$$|D_{x_i x_j}G(x, y)| \leq C \frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}}$$

olacak şekilde yalnızca n ve Ω ya bağlı C sabiti vardır.

Sonuç, aşağıdaki eşitsizliklerden elde edilir (Duran vd., 2019). Her $x \in \Omega$ için

$$|\phi(x)| + |D_{x_i}\phi(x)| \leq CMg(x) \quad (5.7)$$

$$|D_{x_i x_j} \phi(x)| \leq C \left(\tilde{K}g(x) + Mf(x) + |g(x)| \right) \quad (5.8)$$

olacak şekilde yalnızca n ve Ω ya bağlı C sabiti vardır. Teorem 3.2 ve Teorem 4.2, M ve $\tilde{K}$ operatörlerinin $G\mathcal{M}_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\Omega)$ uzayından $G\mathcal{M}_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\Omega)$ uzayına sınırlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak (5.7) ve (5.8) ifadelerinden (5.6) elde edilir. ■



6. TARTIŞMA VE SONUÇ

$GM_{p,\theta,\omega}^\varphi$ ağırlıklı global Morrey tipli uzaylar, $0 < p, \theta < \infty$ ve $\omega(r), \varphi(r), (0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar ve $g \in L_{p,\varphi}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|g\|_{GM_{p,\theta,\omega}^\varphi(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega(t) \|g\|_{L_{p,\varphi^\delta}(B(x,t))}^\theta dt \right)^{1/\theta} < \infty$$

normu ile tanımlanır. Bu tezde $GM_{p,\theta,\omega}^\varphi$ ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda maksimal operatör ile singüler operatörler ve onların komütatörlerinin iki ağırlıklı sınırlılıkları incelenmiş olup aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ ve ω_1, ω_2 fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \omega_1(r)^{1-\theta'_1} r^{-\theta'_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-\theta'_1} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty,$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda M maksimal operatörü, $GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

- $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ ve ω_1, ω_2 fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right)^{\theta'_1} \omega_1(r)^{1-\theta'_1} r^{-\theta'_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-\theta'_1} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa M_b operatörü $GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

- $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ olsun. ω_1 and ω_2 fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \omega_1(r)^{1-\theta'_1} r^{-\theta'_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-\theta'_1} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa T operatörü $GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

- $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ olsun ve ω_1, ω_2 fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right)^{\theta'_1} \omega_1(r)^{1-\theta'_1} r^{-\theta'_1} \|\varphi_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-\theta'_1} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty$$

gerçeklenirse $[b, T]$ operatörü $GM_{p,\theta_1,\omega_1}^{\varphi_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{p,\theta_2,\omega_2}^{\varphi_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olur.

Bu tez çalışmasında son olarak ağırlıklı global tipli Morrey uzaylarında üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen sonuçlarla (5.2) ile verilen Dirichlet probleminin çözümleri için uygulamaya yer verilmiştir. Tezde verilen sonuçların harmonik analizin klasik operatörlerinin Morrey tipli uzaylarda iki ağırlıklı sınırlılıklarına ilişkin çalışmalar literatürde az sayıda bulunduğundan verilen tezin bu alanda çalışma yapmakta olan yüksek lisans ve doktora öğrencilerine yol gösterici bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Adams, D.R., 1975. A note on Riesz potentials, *Duke Math. J.* 42 (4): 765-778.
- Agmon, S., 1965. Lectures on elliptic boundary value problems, mathematical studies, vol. 2, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London.
- Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., 1959. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I , *Comm. Pure Appl. Math.* 12, 623-727.
- Ağcayazı, M., Gogatishvili, A., Koca, K., Mustafayev, R., 2015. A note on maximal commutators and commutators of maximal functions, *J. Math. Soc. Japan.* 67(2), 581-593
- Aykol, C., Badalov, X.A., Hasanov, J.J., 2020. Maximal and singular operators in the local "complementary" generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets, *Quaest. Math.*, 43 (10), pp. 1487-1512.
- Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., 2004. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces, *Studia Math.* 163 (2), 157-176.
- Burenkov, V.I., Guliev, V.S., Necessary, 2006. and sufficient conditions for the boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, (Russian) *Dokl. Akad. Nauk* 409 (4), 443-447.
- Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., 2009. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, *Potential Anal.* 30 (3).
- Burenkov, V., Gogatishvili, A., V.S. Guliyev, V.S., Mustafayev R., 2010. Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, *Complex Var. Elliptic Equ.* 55 (8-10), 739-758.
- Bradley, J.S., 1978. Hardy inequalities with mixed norms, *Canad. Math. Bull.*, 21, 4, 405-408.
- Calderón, A.P., Zygmund, A., 1952. On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* 88, 85-139.
- Chen Y., 2004. Regularity of solutions to elliptic equations with VMO coefficients, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 20, 1103-1118.
- Chiarenza, F., Frasca, M., Longo, P., 1993. $W^{2,p}$ -solvability of Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.* 336, 841-853.
- Chiarenza, F., Frasca, M., Longo, P., 1991. Interior $W^{2,p}$ -estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ricerche Mat.* 40 149-168.

- Coifman, R., Fefferman, C., 1974. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Mathematica*, 241-250.
- Coifman, R., Rochberg, R., Weiss, G., 1976. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.* 103 (2), 611-635.
- Cruz-Uribe, D., 2000. New proofs of Two-weight norm inequalities for the maximal operator, *Georgian Math. J.*, 7, 33-42.
- Cruz-Uribe, D., 2017. Two weight norm inequalities for fractional integral operators and commutators, *Advanced Courses of Mathematical Analysis VI*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 25-85.
- Çelik, S., 2016. Harmonik Analizde Lebesgue Uzayları ve İntegral Operatörleri, [Yüksek lisans tezi], Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir.
- Dallacqua, A., Sweers, G., 2004. Estimates for Green function and Poisson kernels of higher order Dirichlet boundary value problems, *J. Differential Equations* 205, 466-487.
- Di Fazio, G., Ragusa, M.A., 1991. Commutators and Morrey spaces, *Bollettino U.M.I.* 7 5-A, 323-332.
- Di Fazio, G., Ragusa, M.A., 1993. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients, *J. Funct. Anal.* 112, 241-256.
- Duran, R.G., Sanmartino, M., Toschi, M., 2009. Weighted a priori estimates for Poisson equation, *Indiana University Mathematics Journal* 29, 1-16.
- Edmunds, D.E., Kokilashvili, V.M., 1995. Two weighted inequalities for singular integrals, *Canad. Math. Bull.* 38 (3), 295-303.
- Fan, D., Lu, S., Yang, D., 1998. Boundedness of operators in Morrey spaces on homogeneous spaces and its applications, *Acta Math. Sinica (N. S.)*, 14, 625-634.
- Fujii, N., 1991. A condition for a two-weight norm inequality for singular operators, *Studia Math.*, v.98, p.175-190
- Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L., 2011. Weighted norm inequalities and related topics, *North Holland Math. Studies* 116, North Holland, Amsterdam,
- Giaquinta, M., 1983. Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ,.
- Gilbert, G., Trudinger, N.S., 1983. Elliptic partial differential equations of second order. 2nd ed. Springer-Verlag.

- Guliyev, V.S., 1994. Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$. Doctor's degree dissertation, Moscow, Mat. Inst. Steklov, 1-329. (Russian)
- Guliyev, V.S., 1999. Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, some applications. 332 p., Baku.
- Guliyev, V.S., 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. J. Inequal. Appl., 1-20.
- Guliyev, V.S., Hasanov, J. J., Samko, S.G. 2010. Boundedness of maximal, potential type, and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces. J. Math. Sci., 170(4), 423-443.
- Guliyev, V.S., 2012. Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators, Eurasian Math. J. 3 (3), 33-61.
- Guliyev, V.S., 2013. Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel, J. Math. Sci. (N. Y.) 193 (2).
- Guliyev, V.S., 2013. Local generalized Morrey spaces and singular integrals with rough kernel, Azerb. J. Math. 3 (2), 79-94.
- Guliyev, V.S., Samko, S. G. 2013. Maximal, potential, and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets. J. Math. Sci., 193(2), 228-248.
- Guliyev, V.S., Karaman, T., Mustafayev, R.C., Şerbetci A., 2014. Commutators of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operator on generalized weighted Morrey spaces, Czechoslovak Math. J. 64 (139) (2), 365-386.
- Hardy, G.H., 1920. Note on a theorem of Hilbert Math. Z. 6,314-317.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G., 1952. Inequalities, Cambridge University Press, 2d ed.
- Haroske, D.D., Skrzypczak L., 2017. Embeddings of weighted Morrey spaces, Math. Nachr. 290 (7), 1066-1086.
- Ho, K.P., 2016. Singular integral operators, John-Nirenberg inequalities and Tribel-Lizorkin type spaces on weighted Lebesgue spaces with variable exponents, Revista De La Union Matematica Argentina 57 (1), 85-101.
- Janson, S., 1978. Mean oscillation and commutators of singular integral operators, Ark. Mat. 16, 263-270.
- John, F., Nirenberg, L. 1961. On functions of bounded mean oscillation, Communications on pure and applied Mathematics, 14(3), 415-426.
- Karaman, T., Guliyev V.S., Serbetci, A., 2014. Boundedness of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operators on generalized weighted Morrey spaces, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N. S.) 60 (1), 227-244.

- Kokilashvili, V., Meskhi, A., 2011. Two-weight inequalities for fractional maximal functions and singular integrals in $L^{p(\cdot)}$ spaces, J. Math. Sci. (N.Y.) 173, no. 6, 656-673.
- Kokilashvili, V., 1979. On Hardy's inequalities in weighted spaces. Soobsh. AN Gruz. SSR, 96, 1, 37-40. (in Russian)
- Komori, Y., Shirai, S., 2009. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, Math. Nachr. 282 (2), 219-231.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory of Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.
- Kufner, A., John O., Fučík, S., 1977. Function Spaces. Noordhoff International Publishing: Leyden, Publishing House Czechoslovak Academy of Sciences: Prague, 1977.
- Kurata, K., Nishigaki, S., Sugano, S., 1999. Boundedness of Integral Operators on Generalized Morrey Spaces and Its Application to Schrödinger operators. Proc. AMS, 128(4), 1125–1134.
- Lacey, M.T., Sawyer, E.T., Uriarte-Tuero, I., 2012. A characterization of two weight norm inequalities for maximal singular integrals with one doubling measure, Anal. PDE 5 (1), 1-60.
- Lu, G., 1995. Embedding theorems on Campanato-Morrey spaces for vector fields and applications, C. R. Acad. Sci. Paris 320, 429–434.
- Maz'ya, V.G., 1985. Sobolev Spaces, Springer-Verlag, Berlin.
- Mizuhara, T., 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, in: Harmonic Analysis (S. Igari, ed.), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer, Tokyo, 183-189.
- Mizuta, Y., Shimomura, T., 2008. Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Japan, 60, 583-602.
- Morrey, C.B., 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 126-166.
- Morrey, C.B., 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 126-166.
- Muckenhoupt, B., 1972. Hardy's inequality with weights. Studia Math., 44 (1), 31-38.
- Nakai, E., 1994. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math. Nachr. 166, 95-103.
- Nakai, E., 2006. The Campanato, Morrey and Holder spaces on spaces of homogeneous type, Studia Math., Vol.176, 1-19.

- Nakamura, S., Sawano, Y., Tanaka, H., 2018. The fractional operators on weighted Morrey spaces, *J. Geom. Anal.* 28 (2), 1502-1524
- Opic, B., Kufner, A., 1990. Hardy-type Inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics Series 219, Longman Scientific and Technical, Harlow.
- Pan, J., Sun, W., 2020. Two-weight norm inequalities for fractional maximal functions and fractional integral operators on weighted Morrey spaces, *Math. Nachr.* 293 (5), 970-982.
- Samko, N., 2009. Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 350 (1), 56-72.
- Sarason, D., 1975. On functions of vanishes mean oscillation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 207, 391-405.
- Shao, X., Tao, S., 2021. Weighted estimates of variable kernel fractional integral and its commutators on vanishing generalized Morrey spaces with variable exponent, *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 42(3), 451-470.
- Spanne, S., 1966. Sur l'interpolation entre les espaces $\mathcal{L}_{p,k}^\Phi$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 20, 625-648.
- Stein, E.M., 1993. Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- Talenti, G., 1969. Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 39, 171-185.
- Tomaselli, G., 1969. A class of inequalities, *Boll. Un. Mat. Ital.* 2, 622-631.
- Widman, K.O., 1967. Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations, *Math. Scand.* 21, 17-37.