

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASGELE DEĞİŞKEN DİZİLERİNİN A -DÜZGÜN
İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Havva ULUÇAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2016

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Havva ULUÇAY tarafından hazırlanan " **Rasgele Değişken Dizilerinin A-düzgün İntegrallenebilirliği** " adlı tez çalışması 13/12/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği(veya oy çokluğu)** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER

Jüri Üyeleri:

Başkan: Matematik Anabilim Dalı

Üye : Matematik Anabilim Dalı

Üye : Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Adı SOYADI
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

13/12/2016

Havva ULUÇAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RASGELE DEĞİŞKEN DİZİLERİNİN A -DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Havva ULUÇAY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde toplanabilme teorisi ve ölçü teorisine ilişkin bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramları tanıtılıp, bu iki kavramın sınırlı diziler uzayı üzerinde denkliğine yer verilmiştir. Daha sonra A -kuvvetli toplanabilme ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılıp yine sınırlı diziler için bu iki kavramın denkliği gösterilmiştir. Üstelik bir x dizisinin A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter şartın x dizisinin A -istatistiksel yakınsak ve A -düzgün integrallenebilir olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde rasgele değişken dizilerinin A -düzgün integrallenebilme kavramı tanıtılıp, bu kavramın bir karakterizasyonuna yer verilmiştir. Ayrıca rasgele değişkenlerin ağırlıklı toplamlar dizisinin yakınsaklığı araştırılmıştır. Rasgele vektör dizilerinin A -kompakt düzgün integrallenebilme tanımı verilir, ağırlıklı toplamlarının dizisinin L^1 uzayındaki yakınsaklığı gösterilmiştir.

Esas itibarı ile orijinal sonuçlarımız beşinci bölümde verilmiştir. Beşinci bölümde daha önceki bölümlerde verilen A -istatistiksel yakınsaklık, A -kuvvetli toplanabilme, A -kompakt düzgün integrallenebilme tanımları Bochner integrali yardımıyla rasgele vektör dizileri için genelleştirilmiş ve bunlara ilişkin bazı teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise tezin genel bir değerlendirilmesine yer verilmiştir.

Aralık 2016, 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: A -istatistiksel yakınsaklık, A -düzgün integrallenebilme, Bochner integrali.

ABSTRACT

Master Thesis

A -UNIFORM INTEGRABILITY OF SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES

Havva ULUÇAY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ÜNVER

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter some basic concepts of summability theory and measure theory have been recalled.

In the third chapter the concepts of statistical convergence and strong Cesàro summability have been studied and equivalence of these concepts for bounded sequences have been given. Subsequently, the idea of A -statistical convergence and A -strong summability of sequences have been explained. The equivalence of these concepts for bounded sequences have also been examined. Moreover, it has been shown that x is A -strongly convergent if and only if it is A -statistically convergent and A -uniformly integrable.

In the fourth chapter the concept of A -uniform integrability for sequences of random variables has been introduced and a characterization of this concept has been given. Also, convergence of a weighted sums of random variables has been investigated. The concept of A -compactly uniform integrability of sequences of random elements has been recalled and convergence in L_1 space of weighted sums of random elements has been given.

The original results of this thesis are included in the fifth chapter. In the fifth chapter the concepts of A -statistical convergence, A -strong summability and A -uniform integrability are generalized for sequences of random elements by using Bochner integral and some results are obtained for these more general concepts.

The final chapter conducts a general evaluation.

December 2016, 64 pages

Key Words: A -statistical convergence, A -uniform integrability, Bochner integral.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarımız boyunca bilgi, tecrübe ve emekleri ile desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Bu tez konusunu almamı sağlayan ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen hocam Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve destekleri için lisansüstü eğitim arkadaşlarıma ayrıca teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-3001 "Başlangıç Ar-Ge Projeleri Destekleme Programı " tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında olduğu gibi yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olan aileme ve dostlarıma en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Havva ULUÇAY
Ankara, Aralık 2016

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Toplanabilme Teorisi.....	2
2.2 Ölçü Teorisi	3
3. SKALER TERİMLİ DİZİLERİN DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ ...	6
3.1 İstatistiksel Yakınsaklık	6
3.2 A-istatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Toplanabilme.....	9
3.3 A-düzgün İntegrallenebilme.....	11
4. RASGELE VEKTÖR DİZİLERİNİN DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ	16
4.1 Rasgele Değişken Dizilerinin A-düzgün İntegrallenebilirliği.....	16
4.2 Rasgele Değişkenlerin Ağırlıklı Toplamlar Dizisinin Yakınsaklığı.....	26
4.3 Rasgele Vektör Dizilerinin Kompakt Düzgün İntegrallenebilirliği	34
4.4 A-kompakt Düzgün İntegrallenebilir Rasgele Vektör Dizilerinin L ₁ -ağırlıklı Yakınsaklığı	38
5. RASGELE VEKTÖR DİZİLERİNİN DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ	48
5.1 Bochner A-kuvvetli Toplanabilme	48
5.2 A-kompakt Düzgün Bochner İntegrallenebilme	52
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	60
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ.....	64

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{U}_A$	A -düzgün integrallenebilen skaler terimli diziler uzayı
st_A	A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
$w(A)$	A -kuvvetli toplanabilen diziler uzayı
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
A^c	A kümesinin tümleyeni
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
c_A	A matrisinin toplanabilirlik alanı
C_1	Cesàro matrisi
$\delta_A(K)$	K kümesinin A -yoğunluğu
$h.h.k$	Hemen her k
$\mathbb{M}^+$	Negatif olmayan ve her bir satır toplamı 1 olan matrislerin sınıfı
λ	Lebesgue ölçüsü
L_1	Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
w	Skaler terimli tüm diziler uzayı
$w_0(A)$	Sıfıra A -kuvvetli toplanabilen diziler uzayı
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
$\ \cdot\ _\infty$	l_∞ uzayının alışılmış supremum normu

1. GİRİŞ

Martingallerin yakınsaklığında önemli rol oynayan düzgün integrallenebilme kavramı, olasılık teorisinin başlıca kavramlarından biridir. Literatürde bu kavramın birçok versiyonu bulunmaktadır. Rasgele değişkenlerin sınıfı için verilen düzgün integrallenebilme kavramı birçok karakterizasyona sahiptir (Chung 1968). Toplanabilme teorisini göz önüne alınarak benzer tanım toplanabilme matrisi yardımıyla da verilmiştir (Cabrera 1994). Üstelik; kompakt düzgün integrallenebilme kavramı tanımlanarak, bu kavram Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin sınıfı için de tanımlanmış ve çalışmalar yapılmıştır (Wang ve Rao 1987).

1997 yılında Cabrera ayrılabilir Banach uzaylarında toplanabilme matrisi yardımıyla kompakt düzgün integrallenebilme kavramının tanımını vermiş ve rasgele vektörlerin ağırlıklı toplamalar dizisinin ortalamadaki yakınsaklığını araştırmıştır.

Bu tezde ise ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizileri için Bochner integrali yardımıyla kompakt düzgün integrallenebilmenin yeni bir versiyonu tanımlanmıştır.

2007 yılında Khan ve Orhan reel terimli diziler için A -düzgün integrallenebilme kavramını tanımlayarak, toplanabilme teorisinin başlıca kavramlarından biri olan A -kuvvetli toplanabilmeyi karakterize etmişlerdir. Bu tezde ise Bochner integrali yardımıyla rasgele vektörlerin dizileri için A -kuvvetli toplanabilme kavramını genelleştirecek ve düzgün integrallenebilmenin bu yeni versiyonu kullanarak bu kavram için benzer sonuçlar elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Toplanabilme Teorisi

Bu kısımda, toplanabilme teorisinin bazı temel tanımları ve teoremi verilecektir.

Tanım 2.1.1 w , reel ya da kompleks terimli tüm dizilerin uzayı ve $E \subseteq w$ alt vektör uzayı olmak üzere E uzayına bir dizi uzayı denir. Bir E dizi uzayından $\mathbb{K}$ reel veya kompleks cismine tanımlı lineer bir f fonksiyoneline toplanabilme metodu denir. Eğer E yakınsak diziler uzayını içeriyor ve yakınsak her x dizisi için $\lim x = L$ olduğunda $f(x) = L$ oluyorsa f fonksiyoneline regüler toplanabilme metodu denir (Wilansky 1985).

Tanım 2.1.2 $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise

$$(Ax)_n := \sum_k a_{nk} x_k$$

olmak üzere $Ax := \{(Ax)_n\}$ dizisine x dizisinin A dönüşüm dizisi denir.

$$w_A := \{x \in w : \{(Ax)_n\} \text{ dizisi mevcut}\}$$

ve

$$c_A := \{x \in w : \{(Ax)_n\} \text{ dizisi yakınsak}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Bir $f : c_A \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyoneline $f(x) = \lim_n (Ax)_n$ şeklinde tanımlarsak f bir toplanabilme metodudur. Eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise x dizisi L sayısına A -toplanabilirdir denir ve bu durum $A - \lim x = L$ şeklinde ifade edilir (Wilansky 1985). Tez boyunca $A(x) := \lim_n (Ax)_n$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem toplanabilme matrislerinin regülerliğini karakterize etmektedir.

Teorem 2.1.1 (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul;

$$(i) \|A\| := \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_n a_{nk} = 0 \text{ (her } k \text{ için)}$$

$$(iii) \lim_n \sum_k a_{nk} = 1$$

olmasıdır (Boss 2000).

Yukarıdaki teorem kullanılarak

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlı $C_1 = (c_{nk})$ Cesàro matrisinin regüler olduğu kolayca görülebilir.

2.2 Ölçü Teorisi

Bu kısımda tezin temelini oluşturacak olan rasgele değişken, rasgele vektör tanımları verilecek ve tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı önemli tanımlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1 X bir küme olmak üzere X kümesinin altkümelerinin bir ρ sınıfı

$$(i) X \in \rho$$

$$(ii) \text{ Her } E \in \rho \text{ için } E^c = X \setminus E \in \rho$$

$$(iii) \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } E_n \in \rho \text{ iken } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \rho$$

koşullarını sağlıyorsa bu ρ sınıfına X üzerinde bir σ - cebir ve (X, ρ) ikilisine ölçülebilir uzay denir (Royden 1968).

Tanım 2.2.2 (X, ρ) bir ölçülebilir uzay olsun. ρ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \text{ Her } E \in \rho \text{ için } \mu(E) \geq 0$$

$$(iii) \text{ Her } \{E_n\} \text{ ayrık dizisi için } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa bu μ fonksiyonuna bir ölçü fonksiyonu ve (X, ρ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir (Royden 1968).

Tanım 2.2.3 (X, ρ) bir ölçülebilir uzay ve P fonksiyonu ρ üzerinde tanımlı bir ölçü olsun. Eğer $P(X) = 1$ ise P fonksiyonuna olasılık ölçüsü denir ve (X, ρ, P) üçlüsüne olasılık uzayı denir (Chung 2001).

Tanım 2.2.4 X bir topolojik uzay olsun. X uzayının tüm açık alt kümelerini içeren en küçük σ -cebir vardır ve bu σ -cebiye Borel σ -cebir denir. Bu Borel σ -cebirin elemanlarına X uzayının Borel kümeleri denir (Royden 1968).

Tanım 2.2.5 (X, ρ_1) ve (Y, ρ_2) iki ölçülebilir uzay olmak üzere her $E \in \rho_2$ için $f^{-1}(E) \in \rho_1$ oluyorsa $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna ölçülebilirdir (rasgele eleman) denir. Burada Y bir vektör uzayı olduğunda f fonksiyonu rasgele vektör, $Y = \mathbb{R}$ olduğunda ise f fonksiyonu rasgele değişken adını alır. Elbette $\mathbb{R}$ alışılmış topolojisinin Borel σ -cebi ile Y Banach uzayı olduğunda da norm topolojisinin ürettiği Borel σ -cebi ile göz önüne alınmaktadır (Chung 2001).

Teorem 2.2.1 (X, ρ, μ) bir ölçü uzayı ve $\{f_n\}$ negatif olmayan rasgele değişkenlerin bir dizisi ve $f = \sum_n u_n$ olsun. O halde

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_X u_n d\mu$$

gerçeklenir. Burada her iki seri de yakınsak kabul edilmektedir ve integral Lebesgue integralidir (Royden 1968).

Tanım 2.2.6 (X, ρ, P) bir olasılık uzayı, her $j \in \mathbb{N}$ için $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ rasgele değişkenler ve her $j \in \mathbb{N}$ için $B_j \subseteq \mathbb{R}$ Borel ve lineer kümeler olmak üzere

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n \{f_j \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^n P(\{f_j \in B_j\})$$

koşulu sağlanıyorsa $\{f_j\}$ sınıfı bağımsızdır denir. Her $i, j \in \mathbb{N}$ için

$$P(\{f_i \in B_i\} \cap \{f_j \in B_j\}) = P(\{f_i \in B_i\}) P(\{f_j \in B_j\})$$

gerçekleniyorsa $\{f_j\}$ sınıfı ikili bağımsızdır denir (Chung 2001). Rasgele vektörlerin sınıfı için bağımsızlık tanımı benzer biçimde yapılır.

Tanım 2.2.7 (X, ρ, μ) bir ölçü uzayı, Y ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. Eğer

$$(i) \lim_{n,m} \int \|f_n - f_m\| d\mu = 0$$

$$(ii) \{f_n\}^X \text{ dizisi } f \text{ rasgele vektörüne hemen her yerde yakınsak}$$

koşullarını sağlayan sadece sonlu ölçüye sahip küme üzerinde sıfırdan farklı değer alan basit fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi varsa f rasgele vektörüne Bochner integralenebilir denir ve bu fonksiyonun Bochner integrali

$$Bf := \lim_n \int_X f_n d\mu$$

ile tanımlanır (Pugachev ve Sinityn 1999).

Tanım 2.2.8 X bir vektör uzayı ve “ $\leq$ ” X uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer

$$(i) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } x \vee y = \sup\{x, y\} \in X \text{ ve } x \wedge y = \inf\{x, y\} \in X$$

$$(ii) \text{ Her } x, y, z \in X \text{ için } x \leq y \text{ iken } x + z \leq y + z$$

$$(iii) \text{ Her } x \in X \text{ ve } \lambda \in (0, \infty) \text{ için } 0 \leq x \text{ iken } 0 \leq \lambda x$$

özellikleri gerçekleniyorsa X vektör uzayına bir Riesz uzayı denir (Aliprantis ve Burkinshaw 1990).

Tanım 2.2.9 Bir X Riesz uzayının pozitif konisi $X_+ := \{x \in X : 0 \leq x\}$ şeklinde tanımlanır (Aliprantis ve Burkinshaw 1990).

Tanım 2.2.10 $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir Riesz uzayı olmak üzere $x, y \in X$ için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa uzayın normuna bir örgü normu denir, burada $|x| = x \vee (-x)$ ile verilmektedir. Eğer bir örgü normu ile donatılmış bir Riesz uzayı tam ise bu uzay Banach örgüsü olarak adlandırılır (Aliprantis ve Burkinshaw 1990).

3. SKALER TERİMLİ DİZİLERİN DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde ilk olarak istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramları tanıtılıp, bu iki kavram arasındaki ilişki incelenecektir. Ayrıca A -istatistiksel yakınsaklık kavramı ele alınacak ve A -kuvvetli toplanabilme ile arasındaki ilişki incelenecektir. Daha sonra, A -düzgün integrallenebilme kavramı tanıtılıp, bu kavram ile A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme arasındaki ilişki ele alınacaktır.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda skaler terimli bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli Cesàro toplanabilirliği verilip, bu iki kavram arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 3.1.1 $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(K) := \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin doğal yoğunluğu denir. Burada $|K|$ ile K kümesinin eleman sayısı gösterilmektedir (Niven ve Zuckerman 1980).

Tanım 3.1.2 $x = (x_k)$ skaler terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir (Fast 1951, Fridy 1985, Connor 1988).

Bir $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek χ_{K_ε} bu kümenin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $st - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $C_1 - \lim \chi_{K_\varepsilon}(k) = 0$ olmasıdır.

Şimdi klasik anlamda yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayalım. Klasik anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Ancak bazı ıraksak diziler de istatistiksel yakınsak olabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.1.1

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \\ 1 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}, (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ bir dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 1\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $st - \lim x = 1$ dir. Ancak x dizisi yakınsak değildir. Hatta bu dizi sınırsız bir dizidir.

Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsaklığın iyi bilinen karakterizasyonlardan biridir.

Teorem 3.1.1 Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ olacak biçimde bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_{k \in K} x_k = L$ olmasıdır (Fridy 1985, Connor 1988).

Tanım 3.1.3 $x = (x_k)$ skaler terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

olacak biçimde L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli *Cesàro* toplanabilir denir (Connor 1988).

Teorem 3.1.2 (i) Bir x dizisi bir L sayısına kuvvetli *Cesàro* toplanabilir ise yine aynı değere istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Sınırlı bir x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise yine aynı değere kuvvetli *Cesàro* toplanabilir (Connor 1988).

İspat. *i)* $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli *Cesàro* toplanabilir olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |x_k - L| &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \\
&\geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \\
&\geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} \varepsilon \\
&= \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} 1 \\
&= \varepsilon |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Buradan

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| \geq \frac{1}{n} \varepsilon |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

ii) Kabul edelim ki $x = (x_k)$ sınırlı dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun. x dizisi sınırlı olduğundan her k için

$$|x_k - L| \leq |x_k| + |L| \leq \|x\| + |L| =: M < \infty$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |x_k - L| &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \\
&\leq \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} 1 + M \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} 1 \\
&\leq \varepsilon n + M |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

olup

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| \leq \varepsilon + \frac{1}{n} M |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Dolayısıyla x dizisi L sayısına kuvvetli *Cesàro* toplanabilirdir. ■

Sonuç 3.1.1 Sınırlı diziler uzayı üzerinde istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli *Cesàro* toplanabilme kavramları denktir.

3.2 A -istatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Toplanabilme

Bu kısımda bir dizinin A -istatistiksel yakınsaklığı ve A -kuvvetli toplanabilirliği incelenecek ve bu iki kavram arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 3.2.1 $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \sum_{k: |x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir (Connor 1988) ve $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir.

Açıkça görülüyor ki A -istatistiksel yakınsaklık tanımında A matrisi yerine Cesàro matrisi alınırsa istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Diğer yandan yoğunluk tanımı da A -yoğunluk tanımına genişletilebilir. $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) := \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise K kümesi A -yoğunluğa sahiptir denir (Freedman ve Sember 1981).

Bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $K_\varepsilon = |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ dersek, $st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A(K_\varepsilon) = 0$ olmasıdır.

Hemen söyleyebiliriz ki klasik anlamda yakınsak olan her dizi A -istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 3.2.2 $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir matris olsun. $x = (x_k)$ skaler terimli bir dizi olmak üzere

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k - L| = 0$$

olacak biçimde L sayısı varsa x dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilirdir denir (Connor 1988). A -kuvvetli toplanabilen dizilerin kümesi $w(A)$ ve sıfıra A -kuvvetli toplanabilen dizilerin kümesini de $w_0(A)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.1 $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir matris olsun. O halde

(i) Bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilir ise $st_A - \lim x = L$ gerçekenir.

(ii) $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi ve $st_A - \lim x = L$ ise x dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilirdir (Connor 1989).

İspat. $L = 0$ almak genellikle birşey kaybettirmez.

i) Kabul edelim ki $x \in w_0(A)$ olsun. O halde

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k| = 0$$

gerçekenir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_k a_{nk} |x_k| &= \sum_{k: |x_k| < \varepsilon} a_{nk} |x_k| + \sum_{k: |x_k| \geq \varepsilon} a_{nk} |x_k| \\ &\geq \sum_{k: |x_k| \geq \varepsilon} a_{nk} |x_k| \\ &\geq \varepsilon \sum_{k: |x_k| \geq \varepsilon} a_{nk} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $st_A - \lim x = L$ gerçekenir.

ii) Kabul edelim ki $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ve $st_A - \lim x = L$ olsun. O halde $\|x\|_\infty := \sup_k |x_k| < \infty$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_k a_{nk} |x_k| &= \sum_{k: |x_k| < \varepsilon} a_{nk} |x_k| + \sum_{k: |x_k| \geq \varepsilon} a_{nk} |x_k| \\ &\leq \varepsilon \sum_k a_{nk} + \|x\|_\infty \sum_{k: |x_k| \geq \varepsilon} a_{nk} \end{aligned}$$

gerçekenir. Kabulümüzden ve A matrisinin regülerliğinden $x \in w_0(A)$ bulunur. ■

3.3 A -düzgün İntegrallenebilme

Bu kısımda bir dizinin A -düzgün integrallenebilmesi tanıtılacak ve A -kuvvetli toplanabilme, A -istatistiksel yakınsaklık ve A -düzgün integrallenebilme arasındaki ilişki incelenecektir.

Negatif olmayan elemanlara sahip ve her bir satır toplamı 1 olan matrislerin sınıfını $\mathbb{M}^+$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.3.1 $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olmak üzere

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k: |x_k| \geq c} |a_{nk}| |x_k| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisine A -düzgün integrallenebilirdir denir. A -düzgün integrallenebilen dizilerin uzayı $\mathbb{U}_A$ ile gösterilir (Khan ve Orhan 2007).

A -düzgün integrallenebilmeyi karakterize etmek için ilk önce aşağıdaki notasyonu verelim. Her n için $f_n : [0, 1] \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere

$$f_n(s) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq s \leq a_{n,0} \\ k & , \quad s \in \left[\sum_{j=0}^{k-1} a_{nj}, \sum_{j=0}^k a_{nj} \right) , \quad (k = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisini ve x dizisi yardımıyla $\{g_n\}$ fonksiyon dizisini $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $g_n(s) := x(f_n(s))$ şeklinde tanımlayalım.

Lemma 3.3.1 $x = (x_k)$ skaler terimli bir dizi, $A = (a_{nk}) \in \mathbb{M}^+$ bir toplanabilme matrisi ve $L^1([0, 1], \lambda); [0, 1]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilen fonksiyonların uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) x dizisi A -düzgün integrallenebilirdir.
- (ii) $K = \{g_n : n \geq 1\}$ kümesi L^1 uzayında düzgün integrallenebilirdir.
- (iii) $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$, $\sup_n \sum_k \Phi(|x_k|) a_{nk} < \infty$ olacak şekilde konveks ve çift bir $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır (Khan ve Orhan 2007).

İspat. $x = (x_k)$ dizisi A -düzgün integrallenebilir olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve $c \geq c_o$ için

$$\sup_n \sum_{k: |x_k| \geq c} a_{nk} |x_k| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir c_o sayısı vardır. $j = 0, 1, \dots$ için $E_j := \sum_{k=0}^j a_{nk}$, ve $E_{-1} = 0$ olmak üzere

$$\int_{|g_n| > c} |g_n| d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\substack{|g_n| > c \\ [E_{j-1}, E_j)}} |g_n| d\lambda$$

yazılabilir. $s \in [E_{j-1}, E_j)$ için $g_n(s) = x(f_n(s)) = x_j$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ ve $c \geq c_o$ için

$$\begin{aligned} \int_{|g_n| > c} |g_n| d\lambda &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\substack{|x_j| > c \\ [E_{j-1}, E_j)}} |x_j| d\lambda \\ &= \sum_{|x_j| \geq c} |x_j| \int_{[E_{j-1}, E_j)} d\lambda \\ &= \sum_{|x_j| \geq c} |x_j| a_{nj} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $K = \{g_n : n \geq 1\}$ kümesi L^1 uzayında düzgün integrallenebilir. O halde De la Vallée-Poussin teoreminden (Meyer 1966) $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$ ve $\sup_n \int \Phi(|g_n|) d\lambda < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan, artan, konveks bir Φ fonksiyonu vardır. $j = 0, 1, \dots$ için $E_j = \sum_{k=0}^{j-1} a_{nk}$, ve $E_1 = 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$

$$\int \Phi(|g_n|) d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{[E_{j-1}, E_j)} \Phi(|g_n|) d\lambda$$

yazılabilir. $s \in [E_{j-1}, E_j)$ için $g_n(s) = x(f_n(s)) = x_j$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \int \Phi(|g_n|) d\lambda &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{[E_{j-1}, E_j)} \Phi(|x_j|) d\lambda \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Phi(|x_j|) a_{nj} \\ &< \infty \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu da (iii) önermesini ispatlar. ■

Şimdi sınırlı bir dizinin A -düzgün integrallenebilir olduğunu gösterelim. $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olmak üzere

$$E = \{k : |x_k| > M\}$$

kümesini tanımlayalım. $\|x\|_\infty$ değerinden daha büyük bir $M > 0$ için $E = \emptyset$ olup

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_{k:|x_k|>M} |x_k| |a_{nk}| &= \sup_n \sum_k \chi_E(k) |x_k| |a_{nk}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

gerçeklendiğinden $x \in \mathbb{U}_A$ elde edilir.

Regüler ve $\max_k a_{nk} \rightarrow 0$ olacak şekilde $A \in \mathbb{M}^+$ matrisi verildiğinde sınırsız ancak A -düzgün integrallenebilir bir dizi inşa edebiliriz. Aslında A matrisi sıfıra yakınsak kolonlara sahip ve

$$\liminf_k \left\{ \max_n a_{nk} \right\} = 0$$

olacak şekilde bir matris olduğunda da sınırsız ancak A -düzgün integrallenebilen bir $x = (x_k)$ dizisi inşa edilebilir. Bunun için kolon indislerinin

$$\max_n a_{n,K(m)} < 2^{-m}, m = 0, 1, 2, \dots$$

olacak şekilde $K(0) < K(1) < K(2) < \dots$ dizisini ele alalım. Şimdi $n > N(m)$ ve $k \leq K(m)$ olduğunda $a_{nk} < 2^{-m}$ olacak şekilde satır indislerinin artan $N(j)$ indislerini seçelim. Diğer yandan bir $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} m+1 & , \quad k = K(m) \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Her $n > N(m)$ için

$$\begin{aligned} (Ay)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k a_{nk} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) a_{n,K(j)} \\ &\leq \sum_{j=0}^m (j+1) 2^{-m} + \sum_{j>m} (j+1) 2^{-j} \end{aligned} \tag{3.1}$$

gerçeklenir. (3.1) eşitsizliğinin her iki tarafında $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $n > N(m)$ olduğunda $n \rightarrow \infty$ olacağından $\lim_n (Ay)_n = 0$ sağlanır. Şimdi bir $x = (x_k)$ dizisini her k için

$$x_k = \sqrt{y_k}$$

şeklinde tanımlayalım. Konveks, çift $\Phi(x) = x^2$ ile tanımlı Φ fonksiyonunu göz önüne alırsak $\Phi(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$ ve $\lim_n (Ay)_n = 0$ olduğundan

$$\sup_n \sum_k \Phi(|x_k|) a_{nk} = \sup_n \sum_k y_k a_{nk} < \infty$$

olup Lemma 3.3.1 gereğince x dizisi A -düzgün integrallenebilirlerdir.

Aşağıda vereceğimiz teorem bir x dizisinin A -kuvvetli toplanabilirliğini karakterize etmektedir.

Teorem 3.3.1 $A \in \mathbb{M}^+$ ve $x = (x_k)$ skaler terimli bir dizi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) x dizisi sıfıra A -kuvvetli toplanabilirlerdir.
- (ii) x dizisi A -düzgün integrallenebilirlerdir ve sıfıra A -istatistiksel yakınsaktır (Khan ve Orhan 2007).

İspat. x dizisi sıfıra A -kuvvetli toplanabilir olsun. Bu durumda

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k| = 0$$

gerçeklenir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \sum_{k: |x_k| > \varepsilon} a_{nk} = \sum_{k: \left| \frac{x_k}{\varepsilon} \right| > 1} a_{nk} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_k a_{nk} |x_k|$$

olup, $st_A - \lim x = 0$ gerçekleşir. Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. Her $n \geq N$ için

$$\sum_k a_{nk} |x_k| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer yandan her $n = 1, 2, \dots, N - 1$ için

$$\sum_{k > K} a_{nk} |x_k| < \varepsilon$$

olacak şekilde yeterince büyük $K \in \mathbb{N}$ sayısı seçilebilir. Ayrıca $C > \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_K|\}$ olmak üzere

$$\sup_n \sum_{k:|x_k|>C} a_{nk} |x_k| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $x \in \mathbb{U}_A$ elde edilir.

Şimdi x dizisi A -düzgün integrallenebilir ve $st_A - \lim x = 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \limsup_n \sum_{k:|x_k|\leq t} a_{nk} |x_k| &\leq \limsup_n \sum_{k:\varepsilon<|x_k|\leq t} a_{nk} |x_k| + \limsup_n \sum_{k:|x_k|\leq \min(t,\varepsilon)} a_{nk} |x_k| \\ &\leq t \limsup_n \sum_{k:|x_k|>\varepsilon} a_{nk} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \limsup_n \sum_k a_{nk} |x_k| &\leq \limsup_n \sum_{k:|x_k|\leq t} a_{nk} |x_k| + \limsup_n \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k| \\ &\leq \varepsilon + \limsup_n \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k| \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\limsup x \leq \sup x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için

$$\limsup_n \sum_k a_{nk} |x_k| \leq \varepsilon + \limsup_n \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k|$$

elde edilir. Her iki tarafın $t \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\limsup_n \sum_k a_{nk} |x_k| \leq \varepsilon + \limsup_{t \rightarrow \infty} \limsup_n \sum_{k:|x_k|>t} a_{nk} |x_k|$$

bulunur. O halde x dizisi A -düzgün integrallenebilir olduğundan

$$\limsup_n \sum_k a_{nk} |x_k| \leq \varepsilon$$

olup ε keyfi olduğundan

$$\limsup_n \sum_k a_{nk} |x_k| = 0$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k| = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

4. RASGELE VEKTÖR DİZİLERİNİN DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde (H, Σ, P) bir olasılık uzayı olmak üzere H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişken dizilerinin A -düzgün integrallenebilme kavramı tanımlanacak ve bir karakterizasyonu elde edilecektir. Ayrıca rasgele değişkenlerin ağırlıklı toplamlar dizisinin yakınsaklığı ele alınacaktır. Rasgele vektör dizilerinin A -kompakt düzgün integrallenebilme kavramı verilip, bu dizilerin ağırlıklı toplamlar dizisinin L^1 uzayındaki yakınsaklığı incelenecektir.

4.1 Rasgele Değişken Dizilerinin A -düzgün İntegrallenebilirliği

Bu kısımda rasgele değişken dizileri için düzgün integrallenebilme ve A -düzgün integrallenebilme kavramları verilecek ve A -düzgün integrallenebilme kavramının bir karakterizasyonu elde edilecektir.

Tanım 4.1.1 T keyfi bir indis kümesi ve her $t \in T$ için $\{f_t\}$, H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir sınıfı olsun. Eğer

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \int_{|f_t| > c} |f_t| dP = 0$$

oluyorsa $\{f_t\}$ sınıfı düzgün integrallenebilirdir denir (Chung 2001).

Tanım 4.1.2 $\{f_n\}$ dizisi H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin Lebesgue integrallenebilir bir dizisi ve $A = (a_{nk})$ matrisi bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k| > c} |f_k| dP \right) = 0$$

oluyorsa $\{f_n\}$ dizisine A -düzgün integrallenebilirdir denir (Cabrera 1994).

Teorem 4.1.1 $\{f_n\}$ dizisi H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin düzgün integrallenebilir bir dizisi olsun. Bu durumda $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ koşulunu sağlayan

her $A = (a_{nk})$ matrisi için $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilirdir (Cabrera 1994).

İspat. Kabul edelim ki $\{f_n\}$ dizisi düzgün integrallenebilir olsun. $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k |a_{nk}| \leq M \quad (4.1)$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. $\{f_n\}$ dizisi düzgün integrallenebilir olduğundan

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_k \int_{|f_k| > c} |f_k| dP = 0$$

gerçeklenir. O halde her $\varepsilon > 0$ için $c \geq c_0$ olduğunda

$$\sup_k \int_{|f_k| > c} |f_k| dP < \frac{\varepsilon}{M} \quad (4.2)$$

olacak biçimde bir $c_0 > 0$ sayısı mevcuttur. Şimdi her $c \geq c_0$ için (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerinden

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k| > c} |f_k| dP \right) \leq \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \left(\sup_k \int_{|f_k| > c} |f_k| dP \right) \right) \leq \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilirdir. ■

Teorem 4.1.2 H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir $\{f_n\}$ dizisinin düzgün integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \sup_n \int_H |f_n| dP < \infty$$

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için $P(E) < \delta$ olduğunda

$$\sup_n \int_E |f_n| dP < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mevcut olmasıdır (Chung 2001).

Aşağıdaki teorem A -düzgün integrallenebilme kavramını karakterize etmektedir. Bu teorem düzgün integrallenebilme için yukarıda bahsettiğimiz karakterizasyonun bir benzeridir.

Teorem 4.1.3 $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olmak üzere H üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir $\{f_n\}$ dizisinin A -düzgün integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_H |f_k| dP \right) < \infty$$

$$(ii) \text{ Her } \varepsilon > 0 \text{ için}$$

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| P(E_k) \right) < \delta$$

olduğunda

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{E_k} |f_k| dP \right) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mevcut olmasıdır (Cabrera 1994).

İspat. Kabul edelim ki $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $c \geq c_0$ için

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k|>c} |f_k| dP \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde bir $c_0 > 0$ sayısı mevcuttur. O halde her k için

$$\begin{aligned} \int_H |f_k| dP &= \int_{|f_k|\leq c} |f_k| dP + \int_{|f_k|>c} |f_k| dP \\ &\leq c + \int_{|f_k|>c} |f_k| dP \end{aligned}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_k |a_{nk}| \int_H |f_k| dP &\leq c \sum_k |a_{nk}| + \sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k|>c} |f_k| dP \\ &< cM + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada M sayısı Teorem 4.1.1'deki gibi alınmıştır. Bu da (i) şartını ispatlar. (ii) şartını ispatlamak için her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k |a_{nk}| P(E_k) < \frac{\varepsilon}{2c} = \delta$$

koşulunu sağlayan bir $\{E_k\}$ dizisini ele alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_k |a_{nk}| \int_{E_k} |f_k| dP &= \sum_k |a_{nk}| \left(\int_{E_k \cap (|f_k| \leq c)} |f_k| dP + \int_{E_k \cap (|f_k| > c)} |f_k| dP \right) \\
&\leq c \sum_k |a_{nk}| P(E_k) + \sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k| > c} |f_k| dP \\
&< c \frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (ii) koşulu gerçekleşir.

Karşıt olarak (i) gereğince

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_H |f_k| dP \right) < T$$

olacak biçimde bir $T > 0$ sayısı vardır. Buradan ve Markov eşitsizliğinden her bir $c > 0$ için

$$\begin{aligned}
\sum_k |a_{nk}| P(|f_k| > c) &\leq \frac{1}{c} \sum_k |a_{nk}| \int_H |f_k| dP \\
&\leq \frac{1}{c} \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_H |f_k| dP \right) \\
&\leq \frac{T}{c}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde; her bir $c \geq c_0 = \frac{T}{\delta}$ için

$$\begin{aligned}
\sup_n \sum_k |a_{nk}| P(|f_k| > c) &\leq \sup_n \sum_k |a_{nk}| P(|f_k| > c_0) \\
&\leq \frac{T}{c_0} = \delta
\end{aligned}$$

bulunur. (ii) uyarınca $k \in \mathbb{N}$ için $E_k = \{|f_k| > c\}$ alınırsa her $c \geq c_0$ için

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k| > c} |f_k| dP < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilirdir. ■

Lemma 4.1.1 $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir ise $S_n = \sum_k a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right)$ ağırlıklı toplamlar dizisi düzgün integrallenebilirdir (Cabrera 1994).

İspat. $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir olsun. Teorem 4.1.3'ün (i) gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \int_H |S_n| dP &= \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \right| dP \\ &\leq 2 \sum_k |a_{nk}| \int_H |f_k| dP \\ &\leq 2T \\ &< \infty \end{aligned}$$

gerçeklenir. Teorem 4.1.3'ün (ii) uyarınca her $\varepsilon > 0$ için $\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| P(E_k) \right) < \delta^*$ olduğunda $\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{E_k} |f_k| dP \right) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir $\delta^* > 0$ mevcuttur. Şimdi $0 < \delta < \min \left\{ \frac{\delta^*}{M}, \frac{\varepsilon}{2T} \right\}$ ve $P(E) < \delta$ olacak biçimde E kümesini alalım. Burada M sayısı Teorem 4.1.1 ve T sayısı Teorem 4.1.3'deki gibi alınmıştır. O halde $\sum_k |a_{nk}| P(E) < \delta M < \delta^*$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \int_E |S_n| dP &\leq \int_E \left(\sum_k |a_{nk}| \left| f_k - \int_H f_k dP \right| \right) dP \\ &= \sum_k |a_{nk}| \int_E \left| f_k - \int_H f_k dP \right| dP \\ &\leq \sum_k |a_{nk}| \int_E |f_k| dP + P(E) \sum_k |a_{nk}| \int_H |f_k| dP \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2T} T \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.2 uyarınca $\{S_n\}$ dizisi düzgün integrallenebilirdir. ■

Sıradaki teorem, düzgün integrallenebilmenin klasik karakterizasyonunu veren De La Valleé Poussin teoremine benzer olan A -düzgün integrallenebilmenin bir karakterizasyonudur. Bu sonuç, $p > 1$ olmak üzere $G(t) = t^p$ ile tanımlı G fonksiyonu ile uygulamada kullanılır.

Teoremi vermeden önce ispatında kullanılacak olan önermeyi ispatsız olarak verelim.

Önerme 4.1.1 f Lebesgue integrallenebilir rasgele değişken olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(|f| \geq k) \leq \int_{|f| \geq n} |f| dP$$

gerçeklenir (Cabrera 1994).

Teorem 4.1.4 $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olsun. H üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir $\{f_n\}$ dizisinin A -düzgün integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H G(|f_k|) dP < \infty$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = 0$$

olacak biçimde $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $G(0) = 0$ ölçülebilir fonksiyonunun var olmasıdır. Üstelik G fonksiyonu konveks ve $\frac{G(t)}{t}$ artan olacak biçimde seçilebilir (Cabrera 1994).

İspat. Kabul edelim ki G fonksiyonu verilen koşulları sağlasın. (i) gereğince

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H G(|f_k|) dP \leq M$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. (ii) uyarınca her $\varepsilon > 0$ ve $t > c_0$ için

$$\frac{G(t)}{t} \geq \frac{M + 1}{\varepsilon}$$

olacak biçimde bir $c_0 > 0$ sayısı vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ ve $|f_k| > c > c_0$ için

$$|f_k| \leq G(|f_k|) \frac{\varepsilon}{M + 1}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\int_{|f_k|>c} |f_k| dP \leq \frac{\varepsilon}{M+1} \int_{|f_k|>c} G(|f_k|) dP$$

olup

$$\sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k|>c} |f_k| dP \leq \frac{\varepsilon}{M+1} \sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k|>c} G(|f_k|) dP < \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir. Burada G fonksiyonunun konveks ve $\frac{G(t)}{t}$ nin artan olması gerekli değildir.

Karşıt olarak $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_n g_n = \infty$ olacak biçimde negatif olmayan sabitlerin artan bir $\{g_n\}$ dizisini alalım. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), s \in [n-1, n) \text{ için } g(s) = g_n$$

olarak tanımlansın. G fonksiyonu da

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds, \quad t > 0, \quad G(0) = 0$$

şeklinde tanımlansın. İlk olarak G fonksiyonunun konveks olduğunu gösterelim.

$\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, t_1 < t_2 \in (0, \infty)$ için g fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} & \alpha G(t_1) + \beta G(t_2) - (\alpha + \beta) G(\alpha t_1 + \beta t_2) \\ &= \alpha \int_0^{t_1} g(s) ds + \beta \int_0^{t_2} g(s) ds - (\alpha + \beta) \int_0^{\alpha t_1 + \beta t_2} g(s) ds \\ &= \beta \int_{\alpha t_1 + \beta t_2}^{t_2} g(s) ds - \alpha \int_{t_1}^{\alpha t_1 + \beta t_2} g(s) ds \\ &\geq \beta \int_{\alpha t_1 + \beta t_2}^{t_2} g(\alpha t_1 + \beta t_2) ds - \alpha \int_{t_1}^{\alpha t_1 + \beta t_2} g(\alpha t_1 + \beta t_2) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla G fonksiyonu konvektir. Her bir $n \geq 1$ için $(n-1, n)$ aralığında $G'(t) = g(t) = g_n$ gerçekleşir. Bu durumda

$$F(t) := \frac{G(t)}{t}$$

ile tanımlı F fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında sürekli ve her bir $(n-1, n)$ aralığında türevlenebilir olduğundan; F fonksiyonunun artan olduğunu göstermek için $n \geq 1$ için $t \in (n-1, n]$ olmak üzere $F'(t) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $n \geq 1$ ve $t \in (n-1, n]$ sabitlensin.

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_o^t g(s)ds = \int_o^{n-1} g(s)ds + \int_{n-1}^t g(s)ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{(i-1, i]} g_i ds + \int_{n-1}^t g(s)ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i + (t - n + 1) g_n \end{aligned}$$

eşitliğini göz önüne alırsak

$$F(t) = \frac{G(t)}{t} = \frac{1}{t} \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i + (t - n + 1) g_n \right)$$

olup

$$\begin{aligned} t^2 F'(t) &= g_n \cdot t - \sum_{i=0}^{n-1} g_i + (t - n + 1) g_n \\ &= \sum_{i=1}^n (g_n - g_i) \\ &> 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Şimdi F fonksiyonu artan olduğundan $t \rightarrow \infty$ iken $F(t) \rightarrow \infty$ olduğunu göstermek yerine $t \in (n-1, n]$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $F(n) \rightarrow \infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. $g_i \rightarrow \infty$ olduğundan her $M > 0$ ve her $i > i_0$ için $g_i > M$ olacak biçimde bir i_0 sayısı vardır. Her $M > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i_0} g_i + \frac{1}{n} \sum_{i=i_0+1}^n g_i \\ &> \frac{1}{n} c_{i_0} + \frac{1}{n} \sum_{i=i_0+1}^n M \\ &= \frac{1}{n} c_{i_0} + \frac{1}{n} (n - i_0) M \end{aligned}$$

olup

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i > M$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = \infty \quad (4.3)$$

elde edilir. O halde

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = \infty \quad (4.4)$$

olup (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i = \infty$$

bulunur. Şimdi

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H G(|f_k|) dP < \infty$$

olacak biçimde ve $\lim_n g_n = \infty$ olacak biçimde artan bir $\{g_n\}$ dizisinin varlığını ispatlayalım. $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir olduğundan her bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k| > n_j} |f_k| dP < 2^{-j}$$

koşulunu sağlayan pozitif tamsayıların $j \rightarrow \infty$ için $n_j \rightarrow \infty$ olacak biçimdeki bir $\{n_j\}$ dizisini seçebiliriz. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$g_n = |\{j \geq 1 : n_j < n\}|$$

olacak biçimde $\{g_n\}$ dizisini alırsak $\{g_n\}$ dizisi artandır. $j \rightarrow \infty$ iken $n_j \rightarrow \infty$ olduğundan her bir $n \geq 1$ için $\{j \in \mathbb{N} : n_j < n\}$ kümesi sınırlıdır. Ayrıca $M \geq 1$ olmak üzere $j = 1, 2, \dots, M$ için $n_j < n_o$ olacak biçimde $n_o \geq 1$ tamsayısı vardır. g_n azalmayan olduğundan her $n \geq n_o$ için $g_n \geq g_{n_o} = M$ dır. Yani $n \rightarrow \infty$ için $g_n \rightarrow \infty$ gerçekleşir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$, her $t \in (n-1, n]$ için

$$G(t) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i + (t - n + 1) g_n$$

olduğundan her $t \in (n-1, n]$ için

$$\begin{aligned} G(t) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} g_i + (n - n + 1) g_n \\ &= \sum_{i=1}^n g_i \end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\int_H G(|f_k|) dP &\leq \int_H \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n-1 < |f_k| \leq n) \sum_{i=1}^n g_i \right) dP \\
&= \int_H \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i \left(\sum_{n=i}^{\infty} \chi(n-1 < |f_k| \leq n) \right) \right) dP \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} g_i \int_H \left(\sum_{n=i}^{\infty} \chi(n-1 < |f_k| \leq n) \right) dP \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} g_i P(|f_k| > i-1)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \int_H G(|f_k|) dP &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i P(|f_k| > i-1) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\{j \geq 1 : n_j < i\}| P(|f_k| > i-1) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=n_j}^{\infty} P(|f_k| > i) \right) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 4.1.1 ve Tonelli teoremi (4.5) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \int_H G(|f_k|) dP &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{|f_k| \geq n_j} |f_k| dP \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \int_{|f_k| \geq n_j} |f_k| dP \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (i) gerçekleşir. ■

4.2 Rasgele Değişkenlerin Ağırlıklı Toplamlar Dizisinin Yakınsaklığı

Bu kısımda rasgele değişkenlerin ağırlıklı toplamlar dizisinin yakınsaklığı ele alınacaktır.

Teorem 4.2.1 H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir $\{f_n\}$ dizisi bağımsız ve her birinin Lebesgue integrali sonlu ise

$$\int_H \left(\prod_{j=1}^n f_j \right) dP = \prod_{j=1}^n \left(\int_H f_j dP \right)$$

sağlanır (Chung 2001).

Lemma 4.2.1 $\{f_n\}$ dizisi H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bir $A = (a_{nk})$ matrisi

$$(i) \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0$$

koşullarını sağlasın. Eğer $\{f_n\}$ dizisi ikili bağımsız ve düzgün sınırlı ise

$$\lim_n \left(\int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \right|^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

gerçeklenir (Cabrera 1994).

İspat. $\{f_n\}$ dizisi düzgün sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $s \in H$ için

$|f_n(s)| \leq N$ olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \int_H (S_n)^2 dP &= \int_H \left(\sum_k a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \right)^2 dP \\ &= \int_H \lim_m \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \right)^2 dP \\ &= \int_H \lim_m \left\{ \sum_{k=1}^m (a_{nk})^2 \left(f_k - \int_H f_k dP \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{1 \leq k < j} a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) a_{nj} \left(f_j - \int_H f_j dP \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

gerçeklenir. Şimdi n sayısını sabitleyelim ve her $m \in \mathbb{N}$ için

$$E_m := \sum_{1 \leq k < j}^m a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) a_{nj} \left(f_j - \int_H f_j dP \right)$$

olmak üzere $\int_H \lim_m E_m dP = 0$ olacağını gösterelim. A matrisini kabul koşullarından ve $\{f_n\}$ dizisinin düzgün sınırlılığından her m ve her $s \in H$ için

$$\begin{aligned} |E_m(s)| &\leq \sum_{1 \leq k < j}^m |a_{nk}| |a_{nj}| \left| f_k(s) - \int_H f_k(s) dP \right| \left| f_j(s) - \int_H f_j(s) dP \right| \\ &\leq T \end{aligned}$$

olacak biçimde bir $T > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan

$$\sum_{1 \leq k < j}^{\infty} |a_{nk}| |a_{nj}| \left| f_k - \int_H f_k dP \right| \left| f_j - \int_H f_j dP \right| < \infty$$

olduğundan $\lim_m E_m$ mevcuttur. Bu durumda Sınırlı Yakınsaklık Teoremi'nden

$$\begin{aligned} \int_H \lim_m E_m dP &= \lim_m \int_H E_m dP \\ &= \lim_m \int_H \left(\sum_{1 \leq k < j}^m a_{nk} a_{nj} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \left(f_j - \int_H f_j dP \right) \right) dP \\ &= \lim_m \sum_{1 \leq k < j}^m a_{nk} a_{nj} \int_H \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \left(f_j - \int_H f_j dP \right) dP \\ &= \sum_{1 \leq k < j}^{\infty} a_{nk} a_{nj} \int_H \left\{ f_k f_j - f_k \int_H f_j dP - f_j \int_H f_k dP \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_H f_k dP \int_H f_j dP \right) \right\} dP \end{aligned}$$

olup Teorem 4.2.1'den

$$\int_H \lim_m E_m dP = 0 \tag{4.7}$$

bulunur. (4.7) eşitliği (4.6) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_H (S_n)^2 dP &= \int_H \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk})^2 \left(f_k - \int_H f_k dP \right)^2 dP \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk})^2 \int_H \left(f_k - \int_H f_k dP \right)^2 dP \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk})^2 \int_H \left(|f_k| + \int_H |f_k| dP \right)^2 dP
\end{aligned}$$

olup, $\{f_n\}$ dizisinin düzgün sınırlılığından ve A matrisinin kabul koşullarından

$$\lim_n \int_H (S_n)^2 dP = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_n \left(\int_H (S_n)^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki önerme rasgele değişkenlerin ağırlıklı toplamlar dizisinin L_1 uzayındaki yakınsaklığını veren Teorem 4.2.2'in ispatında kullanılacak olup burada ispatsız olarak verilecektir.

Önerme 4.2.1 $\{f_n\}$ dizisi H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi ve $c > 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$W_n := f_n \chi_{\{|f_n| \leq c\}}$$

olacak biçimde rasgele değişkenlerin bir $\{W_n\}$ dizisini tanımlayalım. Eğer $\{f_n\}$ dizisi ikili bağımsız ise $\{W_n\}$ dizisi de ikili bağımsızdır.

Teorem 4.2.2 $\{f_n\}$ dizisi H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bir $A = (a_{nk})$ matrisi

$$(i) \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0$$

koşullarını sağlam. Eğer $\{f_n\}$ dizisi ikili bağımsız ve A -düzgün integrallenebilir ise

$$\lim_n \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \right| dP = 0$$

gerçeklenir (Cabrera 1994).

İspat. $\{f_n\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her $c > c_0$ için

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k|>c} |f_k| dP \right) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.8)$$

olacak biçimde bir $c_0 > 0$ sayısı mevcuttur. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Y_n := f_n \chi_{\{|f_n|>c\}}$$

olacak biçimde rasgele değişkenlerin bir $\{Y_n\}$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \right| dP \\ &= \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left((Y_k + W_k) - \int_H (Y_k + W_k) dP \right) \right| dP \\ &\leq \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(Y_k - \int_H Y_k dP \right) \right| dP + \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(W_k - \int_H W_k dP \right) \right| dP \end{aligned} \quad (4.9)$$

gerçeklenir. $\{f_n\}$ dizisi ikili bağımsız olduğundan Önerme 4.2.1 gereğince $\{W_n\}$ dizisi de ikili bağımsızdır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ ve her $s \in H$ için $|W_n(s)| \leq c$ olduğundan $\{W_n\}$ dizisi düzgün sınırlıdır. Lemma 4.2.1'den

$$\lim_n \left(\int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(W_k - \int_H W_k dP \right) \right|^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

gerçeklenir. Diğer yandan $P(H) = 1 < \infty$ olduğundan

$$\lim_n \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(W_k - \int_H W_k dP \right) \right| dP = 0$$

elde edilir. O halde aynı $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(W_k - \int_H W_k dP \right) \right| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.10)$$

olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(Y_k - \int_H Y_k dP \right) \right| dP &\leq \int_H \sum_k |a_{nk}| \left| Y_k - \int_H Y_k dP \right| dP \\ &= \sum_k |a_{nk}| \int_H \left| Y_k - \int_H Y_k dP \right| dP \\ &\leq 2 \sum_k |a_{nk}| \int_H |Y_k| dP \\ &= 2 \sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k| > c} |f_k| dP \end{aligned}$$

olup (4.8) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(Y_k - \int_H Y_k dP \right) \right| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.11)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (4.10) ve (4.11) eşitsizlikleri (4.9)'de dikkate alınırsa her $n \geq n_0$ için

$$\int_H \left| \sum_k a_{nk} \left(f_k - \int_H f_k dP \right) \right| dP \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Yukarıdaki teoremin diğer şartlarını biraz daha güçlendirip, rasgele değişken dizilerinin ikili bağımsızlık koşulu düşürülebilir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.3 $\{f_n\}$ dizisi H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bir $A = (a_{nk})$ matrisi

(i) $r \in (0, 1)$ için $\sup_n \sum_k |a_{nk}|^r < \infty$

(ii) $\lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0$

koşullarını sağlasın. Eğer $\{|f_n|^r\}$ dizisi A^r -düzgün integrallenebilir ise

$$\lim_n \left(\int_H \left| \sum_k a_{nk} f_k \right|^r dP \right)^{\frac{1}{r}} = 0$$

gerçeklenir (Cabrera 1994).

İspat. $\{|f_n|^r\}$ dizisi A^r -düzgün integrallenebilir olsun. Burada A^r matrisi $A^r = (|a_{nk}|^r)$ şeklinde tanımlanan bir toplanabilme matrisidir. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $c > c_0$ için

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}|^r \int_{|f_k|>c} |f_k|^r dP \right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.12)$$

olacak biçimde bir $c_0 > 0$ sayısı mevcuttur. Diğer yandan her $k \in \mathbb{N}$ için rasgele değişkenlerin $\{W_k\}$ ve $\{Y_k\}$ dizilerini Teorem 4.2.2'deki gibi tanımlayalım. $M > 0$ sayısı Teorem 4.1.1'deki gibi alınmak üzere

$$\begin{aligned} \int_H \left| \sum_k a_{nk} W_k \right| dP &\leq \sum_k |a_{nk}| \int_H |W_k| dP \\ &= \sum_k |a_{nk}| \int_{|f_k| \leq c} |f_k| dP \\ &\leq c \sum_k |a_{nk}| \\ &\leq c M \sup_k |a_{nk}|^{1-r} \end{aligned}$$

olup A matrisinin (ii) koşulundan

$$\lim_n \int_H \left| \sum_k a_{nk} W_k \right| dP = 0$$

dır. $r \in (0, 1)$ için Lyaponouv eşitsizliğinden; her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\int_H \left| \sum_k a_{nk} W_k \right|^r dP < \left(\int_H \left| \sum_k a_{nk} W_k \right| dP \right)^r < \frac{\varepsilon^r}{2} \quad (4.13)$$

olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\int_H \left| \sum_k a_{nk} Y_k \right|^r dP &\leq \int_H \left(\sum_k |a_{nk}|^r |Y_k|^r \right) dP \\
&= \sum_k |a_{nk}|^r \int_H |Y_k|^r dP \\
&= \sum_k |a_{nk}|^r \int_{|f_k|>c} |f_k|^r dP
\end{aligned}$$

olup (4.12) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_H \left| \sum_k a_{nk} Y_k \right|^r dP < \frac{\varepsilon^r}{2} \quad (4.14)$$

gerçeklenir. (4.13) ve (4.14) eşitsizlikleri kullanılarak her $n \geq n_o$ için

$$\begin{aligned}
\int_H \left| \sum_k a_{nk} f_k \right|^r dP &= \int_H \left| \sum_k a_{nk} (W_k + Y_k) \right|^r dP \\
&< \int_H \left| \sum_k a_{nk} W_k \right|^r dP + \int_H \left| \sum_k a_{nk} Y_k \right|^r dP \\
&< \varepsilon^r
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\int_H \left| \sum_k a_{nk} f_k \right|^r dP \right)^{\frac{1}{r}} < \varepsilon$$

sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Buraya kadar rasgele değişkenlerin dizileri için çalışmalara yer verilmiştir. “Bu sonuçlar rasgele vektörlerin dizileri için geçerli mi?” sorusu akla gelebilir. Rasgele değişkenlerin dizisi için verilen Teorem 4.2.2 ayrılabilir Banach uzayının rasgele vektörlerin dizileri için geçerli değildir. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir. Ancak ileriki kısımda böyle bir genişlemenin yeni koşul altında gerçekleştirildiği ispatlanacaktır.

Örnek 4.2.1 l^1 ayrılabilir Banach uzayını ele alalım. $\{e_n\}$, l^1 uzayının standart bazı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : H \rightarrow l^1$ olmak üzere

$$f_n(s) = \begin{cases} e_n & , s \in B \\ -e_n & , s \in C \end{cases}$$

$P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ şeklinde tanımlanan rasgele vektörlerin bağımsız bir $\{f_n\}$ dizisini göz önüne alalım. l^1 mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı $x = (x_n) \in l^1$ olmak üzere $\|x\| = \sum_n |x_n| < \infty$ normu ile bir Banach uzayı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ ve $h.h.s$ için

$$\|f_n(s)\| = \sum_j |(f_n)_j| = \sum_j |(e_n)_j| = 1$$

gerçeklenir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} Bf_n &= e_n P(B) - e_n P(C) \\ &= \theta \end{aligned}$$

olup her $c \geq 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\int_{\|f_n\| > c} \|f_n\| dP = 0$ sağlanır. Burada θ Banach uzayının sıfır vektörüdür. Dolayısıyla rasgele vektörlerin $\{\|f_n\|\}$ dizisi düzgün integrallenebilirdir. Diğer yandan $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimdeki toplanabilme matrisi olmak üzere $\{\|f_n\|\}$ dizisi Teorem 4.1.1'den A -düzgün integrallenebilirdir. Ancak $h.h.s \in H$ için

$$\int_H \left\| \sum_k a_{nk} f_k \right\| = \sum_k |a_{nk}|$$

olup $\{\int \|S_n\|\}$ dizisi sıfıra yakınsamak zorunda değildir. Örneğin, Cesàro matrisini göz önüne alındığında ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \int_H \|S_n\| dP &= \int_H \sum_k |a_{nk}| dP \\ &= 1 \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Ancak Teorem 4.2.3 ayrılabilir Banach uzaylarına genişletilebilir ve dolayısıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.4 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bir $A = (a_{nk})$ matrisi

$$(i) \ r \in (0, 1) \text{ için } \sup_n \sum_k |a_{nk}|^r < \infty$$

$$(ii) \ \lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0$$

koşullarını sağlasın. Eğer $\{\|f_n\|^r\}$ dizisi A^r -düzgün integrallenebilir ise

$$\lim_n \left(\int_H \left\| \sum_k a_{nk} f_k \right\|^r dP \right)^{\frac{1}{r}} = 0$$

gerçeklenir (Cabrera 1994).

4.3 Rasgele Vektör Dizilerinin Kompakt Düzgün İntegrallenebilirliği

Bu kısımda rasgele vektörlerin dizisinin sıklık, kompakt düzgün integrallenebilme ve A -kompakt düzgün integrallenebilme kavramları tanımlanacak ve aralarındaki ilişki ele alınacaktır.

Tanım 4.3.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \int_{f_n \notin K} \|f_n\| dP < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan kompakt bir $K \subset X$ altkümesi varsa $\{f_n\}$ dizisine kompakt düzgün integrallenebilirdir denir (Cabrera 1997).

Ayrılabilir Banach uzayındaki rasgele vektör dizilerinin kompakt düzgün integrallenebilme kavramı, rasgele değişkenlerin düzgün integrallenebilme kavramının doğal genişlemesidir. Banach uzayı sonlu boyutlu ise bu iki tanım birbirine denktir (Cabrera 1997).

Tanım 4.3.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n P(f_n \notin K) < \varepsilon$$

olacak biçimde kompakt bir $K \subset X$ altkümesi varsa $\{f_n\}$ dizisine X üzerinde “sıkı” bir dizidir denir (Cabrera 1997).

X ayrılabilir Banach uzayı olduğunda norm topolojisinin ürettiği σ -*cebiri* ile açık yuvarların ürettiği σ -*cebiri* çakışıkır. Ayrıca fonksiyonların ölçülebilirliğini araştırırken σ -*cebirin* elemanlarının ön görüntü kümelerinin ölçülebilir olduğuna bakmak yerine σ -*cebirin* üreten ailenin elemanlarının ön görüntü kümelerinin ölçülebilirliğine bakmak yeterlidir. Bu nedenle burada ayrılabilir Banach uzaylarında çalışmak kolaylık sağlayacaktır.

Tanım 4.3.3 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan kompakt bir $K \subset X$ altkümesi varsa $\{f_n\}$ dizisine A -kompakt düzgün integrallenebilirdir denir (Cabrera 1997).

Aşağıdaki teorem ayrılabilir bir Banach uzayında bir $\{f_n\}$ dizisinin A -kompakt düzgün integrallenebilmesi için yeter koşulu ispatlar.

Teorem 4.3.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı ve $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir $\{f_n\}$ dizisi sıkı ve H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir $\{\|f_n\|\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir ise $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilirdir (Cabrera 1997).

İspat. Kabul edelim ki $\{\|f_n\|\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir ve $\{f_n\}$ dizisi sıkı olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$P(f_n \notin K) < \frac{\delta}{M}$$

olacak biçimde X uzayının kompakt bir K altkümesi vardır. Burada $M > 0$ sayısı Teorem 4.1.1'deki gibi alınmıştır. Şimdi her k için $E_k = \{s : f_k(s) \notin K\}$ alırsak

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| P(E_k) \right) = \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| P(f_k \notin K) \right) < \delta$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla Teorem 4.1.3 (ii) gereğince her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \right) < \varepsilon$$

sağlanır. Yani $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilirdir. ■

Önerme 4.3.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı olmak üzere H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir $\{f_n\}$ dizisi kompakt düzgün integrallenebilir olsun. Bu durumda $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ koşulunu sağlayan her $A = (a_{nk})$ matrisi için $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilirdir (Cabrera 1997).

İspat. $M > 0$ sayısı Teorem 4.1.1'deki gibi alınmak üzere $\{f_n\}$ dizisi kompakt düzgün integrallenebilir olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \int_{f_n \notin K} \|f_n\| dP < \frac{\varepsilon}{M}$$

koşulunu sağlayan bir $K \subset X$ kompakt altkümesi vardır. Buradan her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \right) \leq \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \right) < \varepsilon$$

olup $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilirdir. ■

Yukarıdaki önermenin karşıtı doğru değildir. Yani A -kompakt düzgün integrallenebilir rasgele vektörlerin dizileri kompakt düzgün integrallenebilir değildir. Bunun

için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.3.1 l^1 ayrılabilir Banach uzayını göz önüne alalım. $\{e_n\}$, l^1 uzayının standart bazı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : H \rightarrow l^1$ olmak üzere

$$f_n(s) = \begin{cases} ne_n & , s \in B \\ -ne_n & , s \in C \\ \theta & , s \in D \end{cases}$$

$P(B) = P(C) = \frac{1}{2n}$, $P(D) = 1 - \frac{1}{n}$ şeklinde tanımlanan bağımsız rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. K , l^1 uzayının herhangi bir kompakt altkütmesi olmak üzere, K kümesi $\{\mp ne_n, n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en fazla sonlu tane elemanını içerir. Bu durumda $n_o < n$ olduğunda $f_n(s) \notin K$ gerçekleşir. O halde

$$\begin{aligned} \int_{f_n \notin K} \|f_n\| dP &= \int_B \|ne_n\| dP + \int_C \|-ne_n\| dP + \int_D \|\theta\| dP \\ &= nP(B) + nP(C) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $\sup_n \int_{f_n \notin K} \|f_n\| dP = 1$ sağlanır. Bu da bize rasgele vektörlerin $\{f_n\}$ dizisinin

kompakt düzgün integrallenebilir olmadığını gösterir. Ayrıca $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{n_o} < \varepsilon$ olacak biçimde $n_o \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Şimdi K kümesi $K = \{\theta, \mp e_1, \mp 2e_2, \dots, \mp n_o e_{n_o}\}$ olsun. K , l^1 uzayının kompakt altkütmesidir ve

$$P(f_n \notin K) = \begin{cases} 0 & , n \leq n_o \\ \frac{1}{n} & , n > n_o \end{cases}$$

olup $\sup_n P(f_n \notin K) = \sup_{n > n_o} \frac{1}{n} = \frac{1}{n_o} < \varepsilon$ sağlandığından rasgele vektörlerin $\{f_n\}$ dizisi sıkıdır. Şimdi $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olsun. Bu durumda $c > n_o$ için

$$\begin{aligned} \sum_k |a_{nk}| \int_{\|f_k\| > c} \|f_k\| dP &\leq \sum_k |a_{nk}| \int_{\|f_k\| > n_o} \|f_k\| dP \\ &= \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca l^1 uzayının tanımından her $n \in \mathbb{N}$ ve $s \in H$ için $\|f_k(s)\| \leq k$ olup

$$\begin{aligned} \sum_k |a_{nk}| \int_{\|f_k\| > c} \|f_k\| dP &\leq \sum_k k |a_{nk}| P(f_k \notin K) \\ &< \varepsilon \sum_k k |a_{nk}| \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{\|f_n\|\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilirdir. O halde Teorem 4.3.1'den $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilirdir.

4.4 A -kompakt Düzgün İntegrallenebilir Rasgele Vektör Dizilerinin L_1 -Ağırlıklı Yakınsaklığı

Bu kısımda ayrılabilir Banach uzayında değer alan rasgele vektörlerin ağırlıklı toplam-
lar dizisinin L_1 uzayındaki yakınsaklığını inceleyeceğiz.

Şimdi kullanacağımız iki operatörden bahsedelim. Bunun için ilk olarak aşağıdaki tanımları hatırlatalım.

Tanım 4.4.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve $b = \{b_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $x \in X$ için

$$x = \sum_n t_n b_n$$

olacak biçimdeki skalerlerin bir tek $\{t_n\}$ dizisi varsa b dizisine X uzayı için bir Schauder bazıdır denir (Wilansky 1964).

Tanım 4.4.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve $b = \{b_n\}$ dizisi X uzayının bir Schauder bazı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$g_n : X \rightarrow \mathbb{K}, g_n(x) = t_n$$

şeklinde tanımlanan sürekli lineer fonksiyonellerin bir $\{g_n\}$ dizisi b bazı için koordinat fonksiyonelleri olarak adlandırılır. Burada $\{t_n\}$ dizisi Tanım 4.4.1'deki skalerlerin dizisidir (Wilansky 1964).

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere, $U_n : X \rightarrow X$, kısmi toplam operatörü

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x)b_k = \sum_{k=1}^n t_k b_k$$

şeklinde ve $Q_n : X \rightarrow X$, rezidüel (kalan) operatörü

$$Q_n(x) = x - U_n(x)$$

şeklinde tanımlanır. $\{U_n\}$ ve $\{Q_n\}$ dizileri her $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = x \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = \theta$$

koşulunu sağlayan sürekli, lineer operatörlerin iki dizisidir (Cabrera 1997). Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|U_n\| \leq C$$

olacak biçimde $C > 0$ baz sabiti vardır (Wilansky 1964). Dolayısıyla

$$\|U_n\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|U_n(x)\|}{\|x\|}$$

olduğundan

$$\|U_n(x)\| \leq C \|x\|$$

eşitsizliği her $x \in X$ için gerçekleşir.

Önerme 4.4.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı ve $K \subset X$ kompakt altkütmesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ ve $x \in K$ olduğunda

$$\|Q_n(x)\| < \varepsilon$$

olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur (Wei ve Taylor 1978).

Kısım 4.2’de ayrılabilir Banach uzayında değer alan rasgele vektörlerin dizisi için Teorem 4.2.2’nin sağlanmadığını göstermiştik. Ancak Teorem 4.4.1’de A -kompakt düzgün integrallenebilen rasgele vektörlerin dizisi için benzer bir genişlemenin mümkün olduğunu ispatlayacağız. Bunun için ilk olarak vereceğimiz teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmaları ve önermeleri verelim.

Lemma 4.4.1 $(X, \|\cdot\|)$ Schauder bazına sahip bir Banach uzayı ve $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer, H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integral-lenebilir ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_H \|Q_t(f_k - Bf_k)\| dP \right) = 0$$

gerçeklenir (Cabrera 1997).

İspat. X uzayının Schauder bazının baz sabiti C olsun. $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilir olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \right) < \frac{\varepsilon}{4(C+1)} \quad (4.15)$$

olacak biçimde bir $K \subset X$ kompakt altküme mevcuttur. Diğer yandan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$W_k := f_k \chi_{\{f_k \in K\}} \text{ ve } Y_k := f_k \chi_{\{f_k \notin K\}}$$

olacak biçimde rasgele vektörlerin $\{W_k\}$ ve $\{Y_k\}$ dizilerinin tanımlayalım. Burada $f_k(s) \in K$ için $W_k(s) \in K$ olduğundan Önerme 4.4.1'den her $\varepsilon > 0$ için $t \geq t_0$ için

$$\|Q_t(W_k(s))\| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad (4.16)$$

olacak biçimde bir $t_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Yine $M > 0$ sayısı Teorem 4.1.1'deki gibi alınmıştır. Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ ve her $t \in \mathbb{N}$ için

$$I_1 := \int_H \|Q_t(W_k - BW_k)\| dP = \int_H \|Q_t(W_k) - Q_t(BW_k)\| dP$$

yazılabilir. Ayrıca her $t \in \mathbb{N}$ için $Q_t : X \rightarrow X$ sürekli lineer operatör olup $Q_t(BW_k) = BQ_t(W_k)$ sağlandığından

$$I_1 = \int_H \|Q_t(W_k) - BQ_t(W_k)\| dP$$

yazabiliriz. $\|BW_k\| \leq \int_H \|W_k\| dP$ olduğundan

$$I_1 \leq \int_H \|Q_t(W_k)\| dP + \int_H \|Q_t(W_k)\| dP$$

olup, (4.16) eşitsizliğinden

$$I_1 = \int_H \|Q_t W_k - B W_k\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

bulunur ve böylece

$$\sum_k |a_{nk}| \int_H \|Q_t (W_k - B W_k)\| dP < \sum_k |a_{nk}| \int_H \frac{\varepsilon}{2M} dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.17)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_H \|Q_t (Y_k - B Y_k)\| dP \\ &= \int_H \|Y_k - B Y_k - U_t (Y_k - B Y_k)\| dP \\ &\leq \int_H \|Y_k\| dP + \int_H \|Y_k\| dP + \int_H \|U_t (Y_k - B Y_k)\| dP \end{aligned}$$

olup $\|U_n(x)\| \leq C \|x\|$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \cdot \int_H \|Y_k\| dP + \int_H C \|Y_k - B Y_k\| dP \\ &\leq 2(C+1) \cdot \int_H \|Y_k\| dP \\ &= 2(C+1) \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_k |a_{nk}| \int_H \|Q_t (Y_k - B Y_k)\| dP \leq 2(C+1) \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP$$

olup (4.15) eşitsizliğinden

$$\sum_k |a_{nk}| \int_H \|Q_t (Y_k - B Y_k)\| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.18)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $t \geq t_0$ için (4.17) ve (4.18) eşitsizliklerinden

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H \|Q_t (f_k - B f_k)\| dP < \varepsilon$$

olup $\{f_n\}$ dizisi için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H \|Q_t(f_k - Bf_k)\| dP = 0$$

gerçeklenir. ■

Lemma 4.4.2 $(X, \|\cdot\|)$ Schauder bazına sahip bir Banach uzayı ve $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integral-lenebilir ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_H \|Q_t(f_k)\| dP \right) = 0$$

gerçeklenir (Cabrera 1997).

Lemma 4.4.2 bir önceki lemmaya benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 4.4.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve $\{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. Kompakt bir $K \subset X$ altkümesi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$W_n = f_n \chi_{\{f_n \in K\}}$$

olacak biçimde rasgele vektörlerin bir $\{W_n\}$ dizisini tanımlayalım. Eğer $\{f_n\}$ dizisi ikili bağımsız ise rasgele vektörlerin $\{W_n - BW_n\}$ dizisi de ikili bağımsızdır.

Önerme 4.4.3 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir $\{f_n\}$ dizisi ikili bağımsız ve $\{g_n\}$ dizisi H uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin sonlu bir dizisi ise $\{g_n(f_n)\}$ dizisi ikili bağımsızdır (Chung 2001).

Önerme 4.4.4 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. f , H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektör ve g , X uzayından $\mathbb{R}$ uzayına tanımlı sürekli lineer fonksiyonel ise $\{g(f - Bf)\}$ rasgele değişkeni sıfır ortalamaya sahiptir. Yani Lebesgue integrali sıfırdır.

Teorem 4.4.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca bir $A = (a_{nk})$ matrisi

$$(i) \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0$$

koşullarını sağlasın. Eğer $\{f_n\}$ dizisi ikili bağımsız ve A -kompakt düzgün integrallenebilir ise

$$\lim_n \int_H \left\| \sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right\| dP = 0$$

gerçeklenir (Cabrera 1997).

İspat. $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilir olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \right) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $K \subset X$ kompakt altkümesi mevcuttur. K kümesinin sınırlılığından $\sup_k \sup_{s \in H} \|f_k(s)\| \leq N$ olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \int_H \left\| \sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right\| dP &\leq \sum_k |a_{nk}| \int_H \|f_k - Bf_k\| dP \\ &\leq \sum_k |a_{nk}| \int_H (\|f_k\| + \|Bf_k\|) dP \\ &\leq 2 \sum_k |a_{nk}| \int_H \|f_k\| dP \\ &= 2 \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \in K} \|f_k\| dP + 2 \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \\ &< 2MN + 2\varepsilon \\ &< \infty \end{aligned}$$

sağlanır. Yani $S_n \in L_1$ dir. Burada $M > 0$ sayısı Teorem 4.1.1'deki gibi alınmıştır. Diğer yandan X ayrılabilir Banach uzayı, Schauder bazına sahip $C[0, 1]$ Banach uzayı içine izometrik olarak izomorfik yapılabileceğinden; genelliği bozmaksızın, X uzayının $\{b_n\}$ Schauder bazına sahip olduğunu varsayabiliriz (Marti 1969). Şimdi

$\{b_n\}$ Schauder bazının baz sabitine C diyelim. Her bir sabitlenmiş $t \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
& \int_H \left\| \sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right\| dP \\
&= \int_H \left\| Q_t \left(\sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) + U_t \left(\sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) \right\| dP \\
&\leq \int_H \left\| Q_t \left(\sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) \right\| dP \\
&\quad + \int_H \left\| \sum_{i=1}^t g_i \left(\sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) b_i \right\| dP
\end{aligned} \tag{4.19}$$

yazabiliriz. Lemma 4.4.1'den her $t \geq t_o$, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \int_H \left\| Q_t \left(\sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) \right\| dP \\
&= \int_H \left\| Q_t \left(\lim_m \sum_{k=1}^m a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) \right\| dP \\
&\leq \int_H \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \|Q_t(f_k - Bf_k)\| \right) dP \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \int_H \|Q_t(f_k - Bf_k)\| dP \\
&< \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olacak biçimde bir t_0 sayısı mevcuttur. Sabit $t \in \mathbb{N}$ ve $r > \max_{1 \leq i \leq t} \|g_i\| \|b_i\|$ seçelim. $\{f_n\}$ dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilir olduğundan keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP < \frac{\varepsilon}{4rt} \tag{4.21}$$

koşulunu sağlayan $K \subset X$ kompakt altkümesi mevcuttur. Her $n \in \mathbb{N}$ için rasgele vektörlerin $\{W_n\}$ ve $\{Y_n\}$ dizileri Lemma 4.4.1'deki gibi tanımlayalım. Her $i, n \in \mathbb{N}$

için

$$\begin{aligned}
& \int_H \left\| \sum_{i=1}^t g_i \left(\sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) b_i \right\| dP \\
& \leq \sum_{i=1}^t \int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right) \right| \|b_i\| dP \\
& \leq \sum_{i=1}^t \left\{ \int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (W_k - BW_k) \right) \right| dP \right. \\
& \quad \left. + \int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (Y_k - BY_k) \right) \right| dP \right\} \|b_i\|
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde ederiz. Diğer yandan her $i, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
& \int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (W_k - BW_k) \right) \right| dP \|b_i\| \\
& \leq \left(\int_H \left(g_i \left(\sum_k a_{nk} (W_k - BW_k) \right) \right)^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_H 1^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} \|b_i\| \\
& = \left(\int_H \lim_m \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} g_i (W_k - BW_k) \right)^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} \|b_i\| \\
& = \left\{ \int_H \lim_m \left(\sum_{k=1}^m a_{nk}^2 (g_i (W_k - BW_k))^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \sum_{1 \leq k < j} a_{nk} g_i (W_k - BW_k) a_{nj} g_i (W_j - BW_j) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \|b_i\|
\end{aligned} \tag{4.23}$$

gerçeklenir. Şimdi n sayısını sabitleyelim ve her $m \in \mathbb{N}$ için

$$E_m := \sum_{1 \leq k < j}^m a_{nk} g_i (W_k - BW_k) a_{nj} g_i (W_j - BW_j)$$

olmak üzere $\int_H \lim_m E_m dP = 0$ olacağını gösterelim. Her m ve her $s \in H$ için

$$\begin{aligned}
|E_m(s)| & \leq \sum_{1 \leq k < j}^m |a_{nk}| |a_{nj}| |g_i (W_k - BW_k)| |g_i (W_j - BW_j)| \\
& \leq T
\end{aligned}$$

olacak biçimde bir $T > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan

$$\sum_{1 \leq k < j}^{\infty} |a_{nk}| |a_{nj}| |g_i(W_k - BW_k)| |g_i(W_j - BW_j)| < \infty$$

olduğundan $\lim_m E_m$ mevcuttur. Bu durumda Sınırlı Yakınsaklık Teoremi'nden

$$\begin{aligned} \int_H \lim_m E_m dP &= \lim_m \int_H E_m dP \\ &= \lim_m \int_H \left(\sum_{1 \leq k < j}^m a_{nk} a_{nj} g_i(W_k - BW_k) g_i(W_j - BW_j) \right) dP \\ &= \lim_m \sum_{1 \leq k < j}^m a_{nk} a_{nj} \int_H (g_i(W_k - BW_k) g_i(W_j - BW_j)) dP \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Önerme 4.4.2 ve Önerme 4.4.3'den

$$g_i(W_k - BW_k) \text{ ve } g_i(W_j - BW_j)$$

rasgele değişken dizileri ikili bağımsızdır ve Lebesgue integralleri sonlu olduğundan Teorem 4.2.1'den

$$\int_H \lim_m A_m dP = \sum_{1 \leq k < j}^{\infty} a_{nk} a_{nj} \left(\int_H g_i(W_k - BW_k) dP \right) \left(\int_H g_i(W_j - BW_j) dP \right)$$

gerçeklenir. Önerme 4.4.4'den

$$\int_H \lim_m E_m dP = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.23) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (W_k - BW_k) \right) \right| dP \|b_i\| \\ & \leq \left(\int_H \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 (g_i(W_k - BW_k))^2 \right) dP \right)^{\frac{1}{2}} \|b_i\| \\ & \leq r \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \int_H \|W_k - BW_k\|^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq L \left(\left(\sup_k |a_{nk}| \right) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu nedenle $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ ve $1 \leq i \leq t$ olduğunda

$$\int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (W_k - BW_k) \right) \right| dP \|b_i\| < \frac{\varepsilon}{4t} \quad (4.24)$$

olacak biçimde bir $n_o \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} & \int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (Y_k - BY_k) \right) \right| dP \|b_i\| \\ & \leq \int_H \left(\sum_k |a_{nk}| |g_i(Y_k - BY_k)| \right) dP \|b_i\| \\ & \leq \left(\sum_k |a_{nk}| \int_H \|g_i\| \|Y_k - BY_k\| dP \right) \|b_i\| \\ & \leq 2r \sum_k |a_{nk}| \int_H \|Y_k\| dP \\ & = 2r \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \end{aligned}$$

olup (4.24) eşitsizliğinden

$$\int_H \left| g_i \left(\sum_k a_{nk} (Y_k - BY_k) \right) \right| dP \|b_i\| < 2r \cdot \frac{\varepsilon}{4rt} \quad (4.25)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.20), (4.24) ve (4.25) eşitsizlikleri (4.19)'de dikkate alınırsa her $n \geq n_0$ için

$$\int_H \left\| \sum_k a_{nk} (f_k - Bf_k) \right\| dP < t \cdot \frac{\varepsilon}{4t} + 2rt \frac{\varepsilon}{4rt} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar. ■

5. RASGELE VEKTÖR DİZİLERİNİN KOMPAKT DÜZGÜN BOCHNER İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde bir Banach uzayında değer alan rasgele vektörlerin dizisi için Bochner integrali yardımıyla Bochner A -istatistiksel yakınsaklık ve Bochner A -kuvvetli toplanabilme kavramları tanımlanacak ve aralarındaki ilişki ele alınacaktır. Ayrıca bu diziler için A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme kavramı verilir, bu iki yeni kavram ile olan ilişkisi araştırılacaktır. Bu bölüm boyunca yine (H, Σ, P) olasılık uzayıyla çalışmaya devam edilecektir.

5.1 Bochner A -kuvvetli Toplanabilme

Bu kısımda A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme tanımlanacak ve düzgün integrallenebilme ile arasındaki ilişki incelenecektir. Ayrıca Bochner A -istatistiksel yakınsaklık ve Bochner A -kuvvetli toplanabilme kavramları tanımlanıp, üçüncü bölümde verdiğimiz klasik anlamdaki A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme arasındaki ilişkiye yer verilecektir.

Lebesgue integrali yerine Bochner integrali kullanılarak A -kompakt düzgün integrallenebilmenin daha genel tanımı aşağıdaki biçimde verilebilir.

Tanım 5.1.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı, $F = \{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| < \varepsilon$$

olacak biçimde kompakt bir $K \subset X$ altkümesi varsa F dizisine A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilirdir denir.

f rasgele vektörü Bochner integrallenebilir olmak üzere

$$\|Bf\| \leq \int \|f\|$$

olduğundan F dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilir olduğunda A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir. Ancak bu durumun karşınının doğru olmadığına ilişkin aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 5.1.1 l_1 ayrılabilir Banach uzayını göz önüne alalım. $\{e_k\}$, l_1 uzayının standart bazı ve her $k \in \mathbb{N}$ için $B_k \cap D_k = \phi$, $P(B_k) = P(D_k) = \frac{1}{2k}$ olacak biçimdeki $B_k, D_k \in \Sigma$ için $f_k : H \rightarrow l_1$ olmak üzere

$$f_k(s) = \begin{cases} ke_k & , \quad s \in B_k \\ -ke_k & , \quad s \in D_k \\ \theta & , \quad d.d \end{cases}$$

ile tanımlanan rasgele vektörlerin bir $\{f_k\}$ dizisini ve l_1 uzayının keyfi bir K kompakt altkütmesini ele alalım. O halde her $k \geq N$ için $\mp ke_k \notin K$ olacak biçimde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla her $n \geq N$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_{nk} \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n \int_H \|f_k\| dP \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n 1 \\ &= \frac{n - N + 1}{n} \end{aligned}$$

olup

$$\sup_n \sum_{k=1}^n c_{nk} \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \geq \sup_{n > N} \sum_{k=1}^n c_{nk} \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP = 1$$

gerçeklenir. Burada $C_1 = (c_{nk})$ Cesàro matrisidir. Diğer yandan $K = \phi$ kompakt kümesini göz önüne alalım. Her k için f_k basit fonksiyonlarının Bochner integrali tanımından

$$Bf_k = \frac{1}{2k} ke_k - \frac{1}{2k} ke_k = \theta$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_{k=1}^n c_{nk} \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| &= \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|Bf_k\| \\ &= \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\theta\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\{f_k\}$ dizisi C_1 -kompakt düzgün Bochner integrallenebilirken, C_1 -kompakt düzgün integrallenebilir değildir.

Şimdi rasgele vektör dizileri için Bochner A -kuvvetli toplanabilme ve Bochner A -istatistiksel yakınsaklık tanımlarını verelim. Burada X Banach uzayını ayrılabilir almaya devam edeceğiz.

Tanım 5.1.2 $F = \{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi, f Bochner integrallenebilir bir rasgele vektör ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer $\{Bf_n\}$ vektörlerin dizisi Bf vektörüne norm topolojisinde A -istatistiksel yakınsak ise; yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \sum_{k: \|B(f_k - f)\| > \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa F dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsaktır denir.

Tanım 5.1.3 $F = \{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi, f Bochner integrallenebilir bir rasgele vektör ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer $\{Bf_n\}$ vektörlerin dizisi Bf vektörüne A -kuvvetli toplanabilir ise; yani

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| \|B(f_k - f)\| = 0$$

oluyorsa F dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -kuvvetli toplanabilirdir denir.

Elbette, Teorem 3.3.1'i kullanılarak Tanım 5.1.2 ve Tanım 5.1.3'de verilen kavramlar arasındaki ilişkiyi elde etmek kolaydır. Ancak Tanım 5.1.1'de tanımlanan düzgün

integrallenebilmenin genişlemesi yardımıyla bu kavramlar arasındaki doğal ilişki elde edilebilir. Bu amaç için aşağıdaki tanım verilmelidir.

Tanım 5.1.4 $F = \{f_n\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi, f rasgele vektörü Bochner integrallenebilir ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| \int_H \|(f_k - f)\| dP = 0$$

oluyorsa F dizisi f rasgele vektörüne Lebesgue A -kuvvetli toplanabilirdir denir.

Her Bochner integrallenebilir g rasgele vektörü için

$$\|Bg\| \leq \int \|g\|$$

olduğundan F dizisi Lebesgue A -kuvvetli toplanabilir olduğunda Bochner A -kuvvetli toplanabilirdir.

Şimdi bu yeni kavramlar ile bu kavramların klasik versiyonları arasındaki ilişkiyi inceleyen iki örnekten bahsedelim.

Örnek 5.1.2 $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi, L bir reel sayı olsun. $J = [0, 1]$, $B(J)$, J aralığının Borel σ -cebiri, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : (J, B(J), \lambda) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ olmak üzere $f_n(s) = x_n$ ile $\{f_n\}$ dizisi ve $f : (J, B(J), \lambda) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ olmak üzere $f(s) = L$ şeklinde f fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\|B(f_n - f)\| = \int_J \|f_n - f\| d\lambda = |x_n - L|$$

eşitliğinden rasgele değişkenlerin Lebesgue integrallenebilir özel bir dizisi için sırasıyla klasik versiyondaki A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme kavramlarının Bochner A -istatistiksel yakınsaklık ve Bochner (veya Lebesgue denkliği) A -kuvvetli toplanabilmeye denk olduğu görülür.

Örnek 5.1.3 $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi ve x , A -düzgün integrallenebilir reel terimli bir dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $c \geq L$ olduğunda

$$\sup_n \sum_{k:|x_k|>c} |x_k| |a_{nk}| < \varepsilon$$

koşulunu gerçekleyen bir $L > 0$ sayısı vardır. Şimdi $K = K(\varepsilon) = [-L, L]$ kompakt kümesini ve Örnek 5.1.2'de tanımlanan (f_n) rasgele değişkenlerin dizisini ele alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| &= \sup_n \sum_{k:|x_k|>L} |a_{nk}| \left| \int_J x_k d\lambda \right| \\ &= \sup_n \sum_{k:|x_k|>L} |a_{nk}| |x_k| \lambda(J) \\ &= \sup_n \sum_{k:|x_k|>L} |a_{nk}| |x_k| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

olup, rasgele değişkenlerin Lebesgue integrallenebilir özel bir dizisi için A -düzgün integrallenebilme, A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilmeye denktir.

5.2 A -kompakt Düzgün Bochner İntegrallenebilme

Bu kısımda A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilmeyi kullanarak, Bochner A -kuvvetli toplanabilme ve Bochner A -istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi ele alacağız.

Ayrılabilir Banach uzayları için verilen aşağıdaki teorem Teorem 3.3.1' in bir benzeridir.

Teorem 5.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir Banach uzayı ve $F = \{f_n\}$, H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi ve her $s \in H$ için $f(s) = \theta$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçekleşir.

(i) F dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsak ve A -kompakt

düzgün Bochner integrallenebilir ise yine f rasgele vektörüne Bochner A -kuvvetli toplanabilir.

(ii) F dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -kuvvetli toplanabilir ise yine f rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsaktır.

İspat. *i)* Kabul edelim ki F dizisi $f = \theta$ rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsak ve A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \sum_{k: \|B(f_k)\| > \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} = 0 \quad (5.1)$$

ve

$$\sup_n \sum_k a_{nk} \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.2)$$

olacak biçimde bir $K \subset X$ kompakt altkütmesi vardır. Diğer yandan her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_k \|Bf_k\| a_{nk} &= \sum_{k: \|Bf_k\| > \frac{\varepsilon}{2}} \|Bf_k\| a_{nk} + \sum_{k: \|Bf_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}} \|Bf_k\| a_{nk} \\ &\leq \sum_k \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| a_{nk} \\ &\quad + \sum_{k: \|Bf_k\| > \frac{\varepsilon}{2}} \|Bf_k \chi_{\{f_k \in K\}}\| a_{nk} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

elde edilir. K kompakt küme olduğundan her $x \in K$ için $\|x\| \leq M$ olacak biçimde $M > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla her k için

$$\begin{aligned} \|Bf_k \chi_{\{f_k \in K\}}\| &\leq \int_{\{s: f_k(s) \in K\}} \|f_k(s)\| dP(s) \\ &\leq M \int_H dP(s) \\ &= M \end{aligned} \quad (5.4)$$

gerçeklenir. Şimdi (5.3) ve (5.4) eşitsizliklerinden her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \limsup_n \sum_k \|Bf_k\| a_{nk} &\leq \sup_n \sum_k \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| a_{nk} \\ &\quad + M \limsup_n \sum_{k: \|Bf_k\| > \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

yazılabilir. Diğer yandan (5.1) ve (5.2) eşitsizlikleri (5.5) dikkate alınrsa her $\varepsilon > 0$ için

$$\limsup_n \sum_k \|Bf_k\| a_{nk} \leq \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu da bize F dizisinin f rasgele vektörüne Bochner A -kuvvetli toplanabilir olduğunu ispatlar.

ii) Kabul edelim ki F dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -kuvvetli toplanabilir olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_k \|Bf_k\| a_{nk} &\geq \sum_{k: \|Bf_k\| > \varepsilon} \|Bf_k\| a_{nk} \\ &> \varepsilon \sum_{k: \|Bf_k\| > \varepsilon} a_{nk} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$0 \leq \sum_{k: \|Bf_k\| > \varepsilon} \|Bf_k\| a_{nk} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_k \|Bf_k\| a_{nk}$$

gerçeklenir. Sonuç olarak F dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsaktır. ■

Aşağıdaki teorem ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizilerinin A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir olması için gerek koşulu verir.

Teorem 5.2.2 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı ve $F = \{f_k\}$, H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi ve her $s \in H$ için $f(s) = \theta$ olmak üzere kabul edelim ki her n için $f_n(H)$ kümesi kompakt olsun. Eğer F dizisi f rasgele vektörüne Lebesgue A -kuvvetli toplanabilir ise yine f rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsaktır ve F dizisi A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilirdir.

İspat. Kabul edelim ki F dizisi $f = \theta$ rasgele vektörüne Lebesgue A -kuvvetli toplanabilir olsun. Bu durumda F dizisi f rasgele fonksiyonuna Bochner A -kuvvetli

toplanabilir ve Teorem 5.2.1'in (ii) gereğince F dizisi Bochner A -istatistiksel yakınsaktır. Diğer yandan her $n > N$ için

$$\sum_k a_{nk} \int_H \|f_k\| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.6)$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\sum_k a_{nk} \int_H \|f_k\| dP < \infty$$

olduğundan $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\sum_{k>M} a_{nk} \int_H \|f_k\| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.7)$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. Şimdi X uzayının $K = \bigcup_{k \leq M} f_k(H)$ kompakt altkümesini ele alalım. O halde $k = 1, 2, \dots, M$ için

$$\{s : f_k(s) \notin K\} = \emptyset$$

gerçeklenir. Böylece $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \sum_k \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| a_{nk} &= \sum_{k>M} \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| a_{nk} \\ &\leq \sum_{k>M} a_{nk} \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \\ &\leq \sum_{k>M} a_{nk} \int_H \|f_k\| dP \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. Ayrıca (5.6) gereğince

$$\begin{aligned} \sup_{n>N} \sum_k \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| a_{nk} &\leq \sup_{n>N} \sum_k a_{nk} \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP \\ &\leq \sup_{n>N} \sum_k a_{nk} \int_H \|f_k\| dP \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

bulunur. (5.7), (5.8) ve (5.9) uyarınca

$$\sup_n \sum_k \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| a_{nk} < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani F dizisi A -kompakt Bochner düzgün integrallenebilirdir. ■

Örnek 5.1.2, Örnek 5.1.3 ve Teorem 5.2.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir. Bu sonuç aslında üçüncü bölümde reel terimli diziler için verdiğimiz Teorem 3.3.1 kendisidir.

Sonuç 5.2.1 $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi, $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Bu durumda x dizisinin L sayısına A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul A -düzgün integrallenebilir ve yine L sayısına A -istatistiksel yakınsak olmasıdır.

Aşağıdaki önermeler sırasıyla ayrılabilir Banach örgüleri (lattice) üzerinde değer alan pozitif rasgele vektörlerin dizilerinin A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilmesi için yeter koşulu ve sonlu boyutlu ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizilerinin A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilmesi için gerek koşulu verir. Bu koşullar, dördüncü bölümde bahsettiğimiz gibi düzgün integrallenebilme karakterizasyonun şartlarına benzer olarak verilecektir.

Bu önermeyi vermeden önce, Banach örgülerinde vektör integralinin bazı basit özelliklerini hatırlayalım.

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach örgüsü X_+ , X uzayının pozitif konisi olmak üzere f , H uzayından X_+ konisine tanımlı rasgele vektörü Bochner integrallenebilir olsun. Her $E_1 \subset E_2 \in \Sigma$ için

$$f\chi_{E_2} \geq f\chi_{E_1} \geq 0$$

yazabiliriz. Bochner integrali pozitif olduğundan (Aliprantis ve Burkinshaw 1990) ve örgü normundan

$$\|Bf\chi_{E_2}\| \geq \|Bf\chi_{E_1}\| \quad (5.10)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Önerme 5.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach örgüsü $F = \{f_n\}$, H uzayından X_+ konisine tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi ve $A = (a_{nk})$ regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer F dizisi A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir ise

- (i) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k\| < \infty$
(ii) Her $\varepsilon > 0$ için, $A_k \in \Sigma$ ve

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| P(A_k) < \delta \quad (5.11)$$

olduğunda

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{A_k}\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ mevcuttur.

İspat. Kabul edelim ki F dizisi A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| < \varepsilon/2 \quad (5.12)$$

olacak biçimde bir $K \subset X$ kompakt altkümesi vardır. K kümesi kompakt olduğundan $\sup_{x \in K} \|x\| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$\{s \in H : f_k(s) \in K\} \subset \{s \in H : \|f_k(s)\| \leq M\}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla A matrisinin regülerliği ve (5.12) uyarınca

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k\| &\leq \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \in K\}}\| \\ &\quad + \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| \\ &\leq \sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \in K} \|f_k\| dP \\ &\quad + \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| \\ &< M \sup_n \sum_k |a_{nk}| + \varepsilon/2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (i) şartını ispatlar. Diğer yandan $\delta = \varepsilon/2M$ ve $\{A_k\}$, (5.11) koşulunu sağlayan Σ sınıfına ait kümelerin bir dizisi olsun. Şimdi

$$R_k = A_k \cap \{s : f_k(s) \in K\} \text{ ve } Q_k = A_k \cap \{s : f_k(s) \notin K\}$$

küme dizilerini tanımlarsak (5.10) gereğince

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{A_k}\| &\leq \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{s \in R_k\}}\| \\ &\quad + \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{s \in Q_k\}}\| \\ &\leq \sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_{s \in R_k} \|f_k\| dP \\ &\quad + \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| \\ &\leq M \sup_n \sum_k |a_{nk}| P(A_k) \\ &\quad + \varepsilon/2 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Önerme 5.2.2 $(X, \|\cdot\|)$ sonlu boyutlu ayrılabilir Banach uzayı, $F = \{f_n\}$, H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi, $A = (a_{nk})$ regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer

$$(i) \sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H \|f_k\| dP < \infty$$

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için, $E_k \in \Sigma$ ve

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| P(E_k) < \delta \tag{5.13}$$

olduğunda

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{E_k}\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ mevcutsa F dizisi A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilirdir.

İspat. (i) gereğince

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H \|f_k\| dP < T$$

olacak biçimde bir $T > 0$ sayısı vardır. $c > T/\delta$ sabitlersek Chebychev eşitsizliğinden,

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| P(\|f_k\| > c) \leq \frac{\delta}{T} \sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_H \|f_k\| dP < \delta \quad (5.14)$$

elde edilir. Şimdi $K = \{x \in X : \|x\| \leq c\}$ kompakt kümesini göz önüne alalım. Bu durumda (5.14)'den her bir k için $E_k = f_k^{-1}(K^c)$ ölçülebilir altkütmesi (5.13) koşulunu sağlar. Böylece (ii) uyarınca

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| \|Bf_k \chi_{E_k}\| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Yani F dizisi A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilirdir. ■

Sonuç 5.2.2 Sonlu boyutlu ayrılabilir $\mathbb{R}$ Banach örgüsünü göz önüne alalım. Bu durumda Önerme 5.2.1 ve Önerme 5.2.2'de toplanabilme matrisi özdeşlik matrisi olarak dördüncü bölümde verdiğimiz Teorem 4.1.2'i elde ederiz. Diğer yandan Wilansky 1985'nin Teorem 1.3.9'unu göz önüne alarak yine dördüncü bölümde verdiğimiz Teorem 4.1.3'i elde ederiz.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Toplanabilme teorisinin amacı ıraksak bir diziye (veya seriye) bir limit karşılık getirmektir. Bir dizi yakınsak olmadığı durumda, uygun toplanabilme yöntemleri kullanılarak diziye bir limit karşılık getirilebilir. En yaygın toplanabilme yöntemleri matris toplanabilme yöntemleri (Boss 2000, Wilansky 1984) olup bu yöntemler yardımıyla A -kuvvetli toplanabilme ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramları elde edilir. Bu iki kavramın tanımlara uygun bir A matrisi için sınırlı diziler üzerinde denkliği ispatlanmıştır (Connor 1988). Diğer yandan 2007 yılında Khan ve Orhan A -düzgün integrallenebilme kavramını tanımlayarak A -kuvvetli yakınsaklık kavramının bir karakterizasyonunu elde etmişlerdir.

Tüm bu düşüncelerden yola çıkarak, bu tezde ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizileri için Bochner integrali yardımıyla Bochner A -istatistiksel yakınsaklık ve Bochner A -kuvvetli toplanabilme kavramları tanımlanmış ve bu yeni iki kavram ile klasik versiyonları arasındaki ilişki ele alınmıştır. Daha sonra Bochner integrali kullanarak, Lebesgue integrali ile verilen A -kompakt düzgün integrallenebilme kavramının daha genel tanımını olan A -kompakt düzgün Bochner integrallenme kavramı verilip, bu üç yeni kavramlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca rasgele vektörlerin bir dizisi A -kompakt düzgün integrallenebilir olduğunda A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir olduğu görülmüştür. Fakat bu durumun karşınının doğru olmadığı bir örnek ile açıklanmıştır.

Litaratürde düzgün integrallenebilmenin birçok versiyonu bulunmaktadır. Reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar için verilen düzgün integrallenebilme kavramının karakterizasyonu Chung 2001'un kitabında yer almaktadır. Cabrera 1997'da rasgele vektörlerin dizileri için benzer düşüncüyü izlemiş ve A -kompakt düzgün integrallenebilmeyi karakterize etmiştir. Bu düşüncelerden yola çıkarak bu tezde " A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme kavramı karakterize edilebilir mi?" diye araştırılmıştır. Ancak ayrılabilir Banach örgülerinde değer alan rasgele vektör-

lerin dizileri için A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme için yeter koşul ve sonlu boyutlu ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizilerinin A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme için gerek koşul elde edilmiştir. Buna rağmen klasik karakterizasyon özel hal olarak elde edilmiştir. Diğer yandan Cabrera 1994'ın verdiği sonuç da elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. 1990. Principles of Real Analysis, Academic Press, Inc. San Diego.
- Adler, A. Rosalsky, A. and Taylor, R. L. 1992. Some Strong Laws of Large Numbers for Sums of Random Elements, Bull. Int. Math. Acad. Sinica 20 (4), 335-357.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford Univ. Press, UK.
- Chandra, T. K. 1989. Uniform Integrability in the Cesàro Sense and The Weak Law of Large Numbers, Sankhya. Ser. A, 51, 309-317.
- Chung, K. L. 2001. A Course in Probability Theory, Academic Press, USA.
- Cuesta, J. A. and Matrán, C. 1988. Strong Convergence of Weighted Sums of Random Elements through the Equivalence of Sequences of Distributions, J. Multivariate Anal. 25, 311-322.
- Connor, J. S. 1988. The Statistical and Strong p -Cesàro Convergence of Sequences, Analysis 8; 47-63.
- Çakalli, H. and Khan, M. K. 2011. Summability in Topological spaces, Appl. Math. Lett. 243, 348–352.
- Çakalli, H. 1996. On Statistical Sonvergence in Topological Groups, Pure Appl. Math. Sci. 43(1-2), 27–31.
- Daffer, P. Z. and Taylor, R. L. 1982. Tightness and Strong Laws of Large Numbers in Banach spaces, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 10, 251-263.
- Fast, H. 1951. Sur La Convergence Statistique. Colloq. Math. 2, 241-244.
- Freedman, A. R. and Sember, J. J. 1981. Densities and Summability, Pacic J. Math. 95, 293-305.
- Fridy, J. A. 1985. On Statistical Convergence, Analysis 5, 301-313.
- Fridy, J. A. and Miller, H. I. 1991. A Matrix Characterization of Statistical Convergence, Analysis, 11, 59-66.
- Gut, A. 1992. The Weak Law of Large Numbers for Arrays, Stat. Probab. Lett. 14, 49-52.
- Hoffmann-Jorgensen, J. and Pisier, G. 1976. The Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem in Banach Spaces, Ann. Probab. 4, 587-599.
- Hong, D. H. and Oh, K. S. 1995. On the Weak Law of Large Numbers for Arrays, Stat. Probab. Lett. 22, 55-57.
- Khan, M. K. and Orhan, C. 2007. Matrix Characterization of A -statistical Convergence, J. Math. Anal. Appl. 335, 406-417.

- Khan, M. K. and Orhan, C. 2010. Characterization of Strong and Statistical Convergences, *Publ. Math. Debrecen* 76, no. 1-2, 77-88.
- Meyer, P. A. 1966. *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Co, N. Y.
- Martí, J. T. 1969. *Introduction to the Theory of Bases*. Springer-Verlag, New York/Berlin.
- Niven, I. and Zuckerman, H. S. 1980. *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Walley and Sons, 4th ed. New York.
- Cabrera, O. M. 1994. Convergence of Weighted Sums of Random Variables and Uniform Integrability Concerning the Weights, *Collect. Math.* 45 (2), 121-132.
- Cabrera, O. M. 1997. Convergence in mean of Weighted Sums of $\{a_{nk}\}$ –compactly Uniformly Integrable Random Elements in Banach Spaces, *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 20 (3), 443-450.
- Prullage, D. L. 1967. Summability in Topological Groups, *Math. Z.* 96, 259–278.
- Pugachev, V. S. and Sinitsyn, I. N. 1999. *Lectures on Functional Analysis and Applications*, World Scientific, Singapore.
- Royden, H. L. 1968. *Real Analysis*, The Macmillan Company, London.
- Taylor, R. L. 1978. Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, 672, Springer Berlin.
- Taylor, R. L. and Wei, D. 1979. Laws of Large Numbers for Tight Random Elements in Normed Linear Spaces, *The Annals of Probability*, vol. 7, no. 1, 150-155.
- Ünver, M. Khan, M. K. and Orhan, C. 2014. *A*-distributional Summability in Topological Spaces, *Positivity*, 18(1), 131-145.
- Wang, X. C. and Rao, M. B. 1987. Some Results on the Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Separable Banach Spaces, *Studia Math.* 86 (2), 131-153.
- Wang, X. C., Rao, M. B. and Deli, L. 1992. Convergence in the r -th mean of Weighted Sums of Random Elements in Banach Spaces of type p , *Northeast Math. J.* 8 (3), 349-356.
- Wilansky, A. 1964. *Functional Analysis*, Blaisdell, New York.
- Wilansky, A. 1985. *Summability through Functional Analysis*, Elsevier Science Publishers B. V. North-Holland.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Havva ULUÇAY

Doğum Yeri : Çelebi

Doğum Tarihi : 12/12/1991

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kırımı Refia Alemdaroğlu Lisesi(2009)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2014)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
(Şubat 2015 – Aralık 2016)