

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BULANIK ÖLÇÜNÜN BELİRLENMESİNDE KARŞILAŞILAN
HESAPLAMA ÇABASINI AZALTMAYA DUYARLI YAKLAŞIMLAR**

Ezgi TÜR KARSLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Ezgi TÜRKARSLAN tarafından hazırlanan ‘‘Bulanık lnn Belirlenmesinde Karşılaşılın Hesaplama abasını Azaltmaya Duyarlı Yaklaşımlar’’ adlı tez çalışması 19/06/2017 tarihinde aşğıdaki jüri tarafından oy birliğı ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER



Jüri yeleri:

Başkan: Doç. Dr. Murat OLGUN

Ankara Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı



ye : Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÖZÇELİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi / Endüstri Mühendisliğı Anabilim Dalı



ye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER

Ankara Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

19/06/2017



Ezgi TÜR KARSLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BULANIK ÖLÇÜNÜN BELİRLENMESİNDE KARŞILAŞILAN HESAPLAMA ÇABASINI AZALTMAYA DUYARLI YAKLAŞIMLAR

Ezgi TÜRKARSLAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde bulanık ölçüm teorisi, k -monotonluk ve bir küme fonksiyonun Möbius gösterimine ilişkin bazı temel kavram ve önermelere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak k -toplamsal bulanık ölçü kavramı tanıtılıp k -toplamsal bulanık ölçülerin bulanık ölçü belirleme sürecinde sağladığı kolaylıklara değinilmiştir. Daha sonra bulanık ölçünün Shapley katsayısı ve etkileşim gösterimi kavramları tanıtılıp bu kavramlarla ilgili önerme ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak λ -bulanık ölçü ve Choquet integrali tanıtılıp bulanık ölçü belirlemek için literatürde mevcut bir metoda yer verilmiştir. Daha sonra bir çok kriterli karar verme problemi olan tedarikçi seçim problemi hem literatürdeki mevcut metot ile hem de geleneksel bulanık ölçü belirleme metodu ile ele alınmıştır.

Beşinci bölümde bulanık ölçü belirlemek için verilmiş karma bir metoda yer verilmiştir. Daha sonra bu karma metot ve Choquet integrali yardımıyla bir uygulama incelenmiştir.

Son bölümde ise tezin genel bir değerlendirilmesine yer verilmiştir.

Haziran 2017, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bulanık ölçü, bulanık integral, çok kriterli karar verme.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME APPROACHES THAT RELIEF CALCULATION COMPLEXITY OF IDENTIFICATION OF FUZZY MEASURE

Ezgi TÜRKARSLAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Mehmet NVER

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter some basic concepts of fuzzy measure theory, k -monotonicity and Möbius representation of a set function have been recalled.

In the third chapter, the concept of k -additive fuzzy measure is introduced and the practicality of k -additive fuzzy measures in the fuzzy measure identification process is referred. Then the concepts of Shapley index and interaction index of a fuzzy measure are introduced and some propositions and theorems related to these concepts are given.

In the fourth chapter, the concepts of λ -fuzzy measure and Choquet integral are introduced and from a literature method for determining fuzzy measure is given. Subsequently, a supplier selection problem is considered as a multi criteria decision making problem and this problem is solved both by the literature method and by the traditional fuzzy measure identification method.

In the fifth chapter, a hybrid method which was given to determine a fuzzy measure is considered. Then, an application is investigated via this hybrid method and Choquet integral.

The final chapter conducts a general evaluation.

June 2017, 59 pages

Key Words: Fuzzy measure, fuzzy integral, multicriteria decision making

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, iki yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam; Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan Matematik Anabilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan başta sayın hocalarım Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) olmak üzere Matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ezgi TÜRKARSLAN
Ankara, Haziran 2017

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Bulanık Ölçüm Teorisi.....	3
3. k-TOPLAMSAL BULANIK ÖLÇÜLER VE BAZI GÖSTERİMLERİ	11
3.1 k-Toplamsal Bulanık Ölçüler.....	11
3.2 Shapley Katsayısı ve Etkileşim Katsayısı.....	13
3.3 Gösterimlerin Bazı Özellikleri	15
4. BULANIK ÖLÇÜ BELİRLEMEK İÇİN BAZI METOTLAR.....	34
4.1 λ - Bulanık Ölçüler	34
4.2 Bulanık Ölçünün Belirlenmesi	36
4.3 Elde Edilen Bulanık Ölçünün Bir Uygulaması.....	38
4.4 Geleneksel λ - Bulanık Ölçü Belirleme Metodu	42
5. BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİNİN BİR UYGULAMASI	50
5.1 Bulanık Ölçünün Belirlenmesi	50
5.2 Türkiye' nin Şehirlerinin Küresel Isınmadan Etkilenme Derecelerinin Belirlenmesi	51
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	56
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ.....	59

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
m_A	A kümesinin Möbius gösterimi
I_A	A kümesinin etkileşim gösterimi
u_A	A kümesinin ittifak oyunu
v_i	$\{i\}$ kümesinin Shapley katsayısı
μ^*	Dual ölçü
Γ	Ters Bernoulli operatörü



ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 4.1 Choquet İntegrali	36
-----------------------------------	----



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 Ölçünün Belirlenmesi	40
Çizelge 4.2 Tedarikçilerin x_1, x_2, x_3, x_4 Kriterlerine Göre Skorları	40
Çizelge 4.3 Standart Tercih Tablosu	43
Çizelge 4.4 Rasgele Tutarlılık İndeksi Değerleri	45
Çizelge 4.5 λ - Bulanık Ölçüsünün Belirlenmesi	46
Çizelge 4.6 Bölüm (4.2) ve (4.4)' te Elde Edilen Sıralamalar ve Puanlar	49
Çizelge 5.1 Üçgen Bulanık Dönüşüm Ölçeği (TFS)	50
Çizelge 5.2 Kriterlerin Tanımlanması	52
Çizelge 5.3 Kriterler İçin Karşılaştırma Matrisi	53
Çizelge 5.4 Kriterler İçin Bulanıklaştırılmış Önem Ağırlıkları	53
Çizelge 5.5 Bulanık Ölçü	54

1. GİRİŞ

Çok Kriterli Karar Verme (ÇKKV) karar bilimlerinin bir alt dalı olup birden fazla çelişen kritere göre alternatifleri sıralama, alternatifler arasından seçim yapma, dolayısıyla alternatifleri analiz etme sürecidir. ÇKKV; hayatın her alanında ve her düzeyde uygulanmaktadır. Örneğin, mikro ölçekte kişilerin yatırım, gayrimenkul alımı, aile bütçeleme gibi kararlarında; orta ölçekte işletmelerin üretim planlaması, teçhizat alımı, tedarikçi seçimi, tesis yer seçimi, yatırım gibi kararlarında; makro ölçekte devletlerin ekonomik hedef, strateji belirlenmesi gibi kararlarında kullanılabilmektedir. ÇKKV; problemin belirlenmesi, kriterlerin inşası, alternatiflerin değerlendirilmesi ve en uygun alternatifin seçilmesi gibi temel basamaklardan oluşur. ÇKKV problemlerinde karar verici kriter ağırlıkları ile kriterler arasındaki ilişkinin belirlenmesi ve bu ağırlık ve ilişkilere göre alternatiflerin değerlendirilmesi gibi problemleri bazı gelişmiş yöntemlerle aşmak zorundadır. Bu yöntemlerden biri bulanık ölçü ve bulanık integral kavramlarının birlikte kullanılmasıdır. Aslında bulanık ortamda ele alınan ÇKKV problemleri, Bellman ve Zadeh (1970) bulanık ortamda karar verme konseptini sunduğundan beri çalışılmaktadır. Bulanık ortam dahilinde ele alınan karar verme sürecinin gerçek hayat problemlerine daha çok uyduğu için ön plana çıktığını söylemek mümkündür (Carlsson ve Fullér 1996, Ducey ve Larson 1999, Özçelik vd. 2014).

Bulanık integral kavramının temeli toplamsallığın modellenmesinin geleneksel bir yolu olan Lebesgue integraline dayanmaktadır (Lebesgue 1966). Lebesgue integralinde kriterler arasında etkileşimin olmadığı varsayılır. Ancak pratikte ÇKKV problemlerinde daima kriterler arasında olumlu ya da olumsuz yönde bir etkileşim söz konusudur. Bu toplamsal olmama sorununu modellemek için toplamsal olanların yerine bulanık ölçüler ve bulanık integraller dikkate alınmaktadır. Choquet integrali, bulanık ölçü sayesinde kriterler arasında gereksizlik ve sinerji konseptini kullanarak kriterler arasındaki etkileşimin belli bir çeşidini dikkate alan bulanık integrallerden biridir (Tzeng ve Huang 2011).

Karar verme problemlerinde bulanık ölçüm teorisi kullanılırken kriterlerin birbirlerine olan etkileşimi göz önüne alınarak bulanık ölçü inşa edilir ve bulanık integral

yöntemlerinden biri kullanılarak en uygun alternatif belirlenir. Ancak, kriter sayısı arttıkça ölçüsü hesaplanması gereken küme sayısı üstel şekilde artacağından ve birbirini etkileyeceğinden her bir kümenin ölçüsünü hesaplamak kolay bir işlem değildir. Literatürde bu sorunun üstesinden gelmek için çeşitli çalışmalar bulunmaktadır.

Bu tezde bulanık ölçünün inşa edilmesinde kümenin eleman sayısına bağlı olarak üstel olarak artan alt küme sayısının doğurduğu zorluğun üstesinden gelmek için ortaya konulmuş yöntemler detaylı olarak incelenecektir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bulanık Ölçüm Teorisi

Bu bölümde bulanık ölçüm teorisinin bazı temel tanım ve önermeleri verilecektir. Tez boyunca notasyon kolaylığı sağlamak açısından $X = \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde alınacaktır.

Tanım 2.1.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $P(X)$, X 'in kuvvet kümesi olmak üzere,

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(X) = 1$

(iii) $A \subseteq B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonluk)

şartlarını sağlayan $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde tanımlı bir bulanık ölçü denir. Eğer $A \cap B = \emptyset$ iken;

(i) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ sağlanıyorsa μ toplamsal bulanık ölçü

(ii) $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$ sağlanıyorsa μ üst toplamsal bulanık ölçü

(iii) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ sağlanıyorsa μ alt toplamsal bulanık ölçü olarak isimlendirilir (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

Tanım 2.1.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme, $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir küme fonksiyonu ve $k \geq 2$ bir tam sayı olsun. $P(X)$ ailesindeki her $(A_i)_{i=1}^k$ dizisi için

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, 2, 3, \dots, k\}} (-1)^{|I|+1} \mu \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \quad (2.1)$$

oluyorsa μ fonksiyonuna k -monotondur denir (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

Tez boyunca $k = 1$ monotonluk özelliğine karşılık gelecektir. Ayrıca özel olarak $k = 2$ alınırsa her $A_1, A_2 \in P(X)$ için

$$\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$$

elde edilir.

Tanım 2.1.2'de μ fonksiyonu olasılık ölçüsü olarak alınırsa (2.1) eşitsizliği eşitlik

şeklinde verilir. Yani, k -monotonluk özelliği bu durumun bir genişlemesidir (Nguyen ve Walker 2005).

Tanım 2.1.3 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme, $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir küme fonksiyonu olsun. Her $k \geq 2$ tam sayısı için μ fonksiyonu k -monoton ise μ fonksiyonuna ∞ -monotondur denir (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

Tanım 2.1.4 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir küme fonksiyonu olmak üzere her $A \in P(X)$ için

$$m(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B) \quad (2.2)$$

ile tanımlı $m : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne μ fonksiyonunun Möbius gösterimi denir (Chateauneuf ve Jaffray 1989). Burada m dönüşümünün iyi tanımlı olduğu açıktır. Şimdi Möbius gösteriminin karakterizasyonunda kullanacağımız lemmaları verelim.

Lemma 2.1.1 A sonlu bir küme olmak üzere;

$$\sum_{B \subset A} (-1)^{|B|} = \begin{cases} 1, & A = \emptyset \\ 0, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

gerçeklenir (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. $A = \emptyset$ durumu açıktır. $A \neq \emptyset$ olsun. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alalım. Binom teoreminden;

$$\begin{aligned} \sum_{B \subset A} (-1)^{|B|} &= (-1)^{|\emptyset|} + \sum_i (-1)^{|\{x_i\}|} + \sum_{i < j} (-1)^{|\{x_i, x_j\}|} + \dots + (-1)^{|A|} \\ &= \binom{n}{0} (-1)^0 + \binom{n}{1} (-1)^1 + \dots + \binom{n}{n} (-1)^n \\ &= (1 - 1)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.1.2 A sonlu bir küme ve $B \subset A$ olmak üzere;

$$\sum_{B \subset D \subset A} (-1)^{|D|} = \begin{cases} (-1)^{|A|}, & A = B \\ 0, & \text{d.d} \end{cases}$$

gerçeklenir (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. İspat iki durumda incelenebilir.

(i) $A = B$ olsun. Bu durumda $B \subset D \subset A$ olduğunda $A = D$ olur. O halde

$$\sum_{B \subset D \subset A} (-1)^{|D|} = \sum_A (-1)^{|A|} = (-1)^{|A|}$$

gerçeklenir.

(ii) $A \neq B$ ve $B \subset A$ olsun. Lemma 2.1.1'den

$$\sum_{B \subset D \subset A} (-1)^{|D|} = \sum_{E \subset A \setminus B} (-1)^{|B \cup E|} = (-1)^{|B|} \sum_{E \subset A \setminus B} (-1)^{|E|} = 0$$

elde edilir.

Aşağıdaki önerme bir küme fonksiyonunun Möbius gösterimini karakterize etmektedir.

Önerme 2.1.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir küme fonksiyonu olsun. (2.2) ile tanımlı m fonksiyonunun μ 'nün Möbius gösterimi olması için gerek ve yeter şart her $A \in P(X)$ için

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} m(B) \tag{2.3}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. Kabul edelim ki (2.3) gerçekleşsin. O halde $A \in P(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B) &= \sum_{B \subset A} (-1)^{|A| - |B|} \mu(B) \\
&= (-1)^{|A|} \sum_{B \subset A} (-1)^{|B|} \mu(B) \\
&= (-1)^{|A|} \sum_{B \subset A} (-1)^{|B|} \sum_{D \subset B} m(D) \\
&= (-1)^{|A|} \sum_{D \subset A} m(D) \sum_{D \subset B \subset A} (-1)^{|B|} \\
&= (-1)^{|A|} \left(m(A) \sum_{A \subset B \subset A} (-1)^{|B|} + \sum_{\substack{D \subset A \\ D \neq A}} m(D) \sum_{D \subset B \subset A} (-1)^{|B|} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1.2'den eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplam $(-1)^{|A|}$ değerine ikinci toplam ise sıfıra eşittir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B) &= (-1)^{|A|} (-1)^{|A|} m(A) \\
&= m(A)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde m dönüşümü μ fonksiyonunun Möbius gösterimidir.

Şimdi kabul edelim ki m dönüşümü μ fonksiyonunun Möbius gösterimi olsun. O halde $A \in P(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{B \subset A} m(B) &= \sum_{B \subset A} \sum_{D \subset B} (-1)^{|B \setminus D|} \mu(D) \\
&= \sum_{B \subset A} \sum_{D \subset B} (-1)^{|B|} (-1)^{|D|} \mu(D) \\
&= \sum_{B \subset A} (-1)^{|B|} \sum_{D \subset B} (-1)^{|D|} \mu(D) \\
&= \sum_{D \subset A} (-1)^{|D|} \mu(D) \sum_{D \subset B \subset A} (-1)^{|B|} \\
&= (-1)^{|A|} \mu(A) \sum_{A \subset B \subset A} (-1)^{|B|} + \sum_{\substack{D \subset A \\ D \neq A}} (-1)^{|D|} \mu(D) \sum_{D \subset B \subset A} (-1)^{|B|}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yine Lemma 2.1.2'den son eşitliğin ilk toplamı $(-1)^{|A|}$ değerine ve ikinci toplamı sıfıra eşittir. O halde

$$\begin{aligned}\sum_{B \subset A} m(B) &= (-1)^{|A|} (-1)^{|A|} \mu(A) \\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 2.1.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir küme fonksiyonu olsun.

(i) μ , bir $k \geq 2$ tam sayısı için k -monoton ise $2 \leq k' \leq k$ olacak şekilde her k' tam sayısı için k' -monotondur.

(ii) $k \geq 2$ olmak üzere μ fonksiyonu k -monoton ve her $x \in X$ için $\mu(x) > 0$ ise μ dönüşümü monotondur ve $\mu > 0$ gerçekleşir (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. (i) μ , k -monoton olsun. Herhangi bir $(A_i)_{i=1}^{k'}$ küme dizisini alalım ve $(B_i)_{i=1}^k$ küme dizisi

$$B_i = \begin{cases} A_i, & i \leq k' \\ \emptyset, & i > k' \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. μ , k -monoton olduğundan

$$\begin{aligned}\mu \left(\bigcup_{i=1}^{k'} A_i \right) &= \mu \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) \geq \sum_{\substack{I \subset \{1,2,3\dots k\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) \\ &= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,3\dots k'\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

(ii) μ fonksiyonu k -monoton, her $x \in X$ için $\mu(x) > 0$ ve $A_1 \subset A_2$ olsun.

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$ olmak üzere $A_2 = B_1 \cup B_2$ ve μ , k -monoton olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu(A_2) &= \mu(B_1 \cup B_2) \geq \sum_{\substack{I \subset \{1,2\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \\
&= \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \\
&= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \\
&= \mu(A_1) + \mu\left(\bigcup_{x \in A_2 \setminus A_1} \{x\}\right) \\
&\geq \mu(A_1) + \sum_{i=1}^n \mu(\{x_i\})
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde μ monoton olup $\mu > 0$ gerçekleşir.

Önerme 2.1.3 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir küme fonksiyonu ve $m : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu μ 'nün Möbius gösterimi olsun. O halde μ 'nün bir $K \geq 2$ tam sayısı için K -monoton olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \not\subset A_k, \forall k}} m(D) \geq 0, \quad A_k \in P(X), \quad 1 \leq k \leq K \quad (2.4)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. $(A_k)_{k=1}^K$, $P(X)$ kümesinde bir dizi olmak üzere $I(D) = \{k : 1 \leq k \leq K, D \subset A_k\}$ şeklinde tanımlansın ve μ , K -monoton olsun. O halde (2.3)'ten

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^K A_k\right) &\geq \sum_{\substack{I \subset \{1,2,3,\dots,K\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right) \\
&= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,3,\dots,K\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \sum_{D \subset \bigcap_{k \in I} A_k} m(D) \\
&= \sum_{I(D) \neq \emptyset} m(D) \sum_{\substack{I \subset I(D) \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Binom teoreminden

$$\sum_{\substack{I \subset I(D) \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} = 1 \quad (2.5)$$

elde edilir. O halde

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^K A_k \right) \geq \sum_{I(D) \neq \emptyset} m(D) \quad (2.6)$$

sağlanır. Diğer yandan (2.3)'ten

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{k=1}^K A_k \right) &= \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \subset A_k}} m(D) \\ &= \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \subset A_k}} m(D) + \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \not\subset A_k}} m(D) \end{aligned}$$

olup (2.6)'dan ispat tamamlanır. Şimdi

$$\sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \not\subset A_k, \forall k}} m(D) \geq 0$$

olsun.(2.3)'ten

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{k=1}^K A_k \right) &= \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ I(D) = \emptyset}} m(D) + \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ I(D) \neq \emptyset}} m(D) \\ &= \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \subset A_k}} m(D) + \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \not\subset A_k, \forall k}} m(D) \end{aligned}$$

olup hipotezden ve (2.5)'ten

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^K A_k\right) - \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \subset A_k, \forall k}} m(D) &\geq 0 \\
\mu\left(\bigcup_{k=1}^K A_k\right) &\geq \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \subset A_k, \forall k}} m(D) \\
\mu\left(\bigcup_{k=1}^K A_k\right) &\geq \sum_{\substack{D \subset \bigcup_{k=1}^K A_k \\ D \subset A_k, \forall k}} m(D) \sum_{\substack{I \subset I(D) \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \\
&= \sum_{\substack{I \subset I(D) \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right)
\end{aligned}$$

Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 2.1.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir küme fonksiyonu ve $m : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu μ fonksiyonunun Möbius gösterimi olsun.

- (i) μ , k -monoton ve $2 \leq |A| \leq k$ ise $m(A) \geq 0$ gerçekleşir.
- (ii) μ , ∞ -monoton ise m negatif olmayan bir fonksiyondur (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. (i) $|A| = k' \leq k$ olsun. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{k'}\}$ ve $A_i = A \setminus \{x_i\}$ ise her $i = 1, 2, \dots, k'$ için $A = \bigcup_{i=1}^{k'} A_i$ olur. Hipotezden μ fonksiyonu k -monoton olduğundan Önerme 2.1.2'den k' -monoton olup (2.4) sağlanır. Ancak bu şartı sağlayan tek küme A kümesinin kendi olduğundan ispat tamamlanır.

(ii) μ , ∞ -monoton bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $k \geq 2$ tam sayısı için μ fonksiyonu k -monoton olup (i)'den $m(A) \geq 0$ gerçekleşir.

3. k -TOPLAMSAL BULANIK ÖLÇÜLER VE BAZI GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde k -toplamsal bulanık ölçü kavramı tanıtılıp bu kavramın bulanık ölçü belirleme sürecinde sağladığı kolaylığa ve dual ölçü kavramına değinilecektir. Ayrıca bulanık ölçünün Shapley katsayısı ve etkileşim gösterimi tanıtılarak bunların Möbius gösterimi ile arasındaki ilişki incelenecektir.

3.1 k -Toplamsal Bulanık Ölçüler

Bu kısımda k -toplamsal bulanık ölçülerin bulanık ölçü belirleme sürecinde sağladığı kolaylığa değinilecektir.

Tanım 3.1.1 Bir $\mu : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna pseudo-Boolean fonksiyonu denir. Her bulanık ölçü bir pseudo-Boolean fonksiyonudur. Gerçekten her $A \subset X$ için

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in A \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (3.1)$$

tanımlarsak A kümesini $A = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ olacak biçimde ifade edebiliriz (Grabisch 1997).

Önerme 3.1.1 Her μ pseudo-Boolean fonksiyonu n değerli çok lineer polinom olarak ifade edilebilir. Yani her $T \subset X$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ için

$$\mu(x) = \sum_{T \subset X} \left[m(T) \prod_{i \in T} x_i \right] \quad (3.2)$$

yazılabilir. Burada $m : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu μ fonksiyonunun Möbius gösterimidir (Grabisch 1997).

Tanım 3.1.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve A , X 'in boş kümeden farklı bir alt kümesi

olsun. Bu durumda

$$v_A(B) = \begin{cases} 1, & A \subset B \\ 0, & d.d \end{cases}$$

ile tanımlı $v_A : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyona bir ittifak oyunu denir (Grabisch 1997).

Aslında her ittifak oyunu 0 – 1 değerli bir bulanık ölçüdür ve (3.2) eşitliğindeki

$\prod_{i \in T} x_i$ ifadesi x vektörüne karşılık gelen $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin v_T altındaki değeridir. Yani (3.2) gösterimi bulanık ölçülerin ittifak oyunlarına bir ayrışımıdır.

Eğer ölçü toplamsal ise $K \subset X$, $m(T) \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ için

$$\mu(x) = \sum_{i \in K} \mu_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

olur. O halde (3.2)'den $m_i = \mu_i$ olmak üzere bir pseudo-Boolean fonksiyonu elde etmiş oluruz. Buradan yola çıkarak k -toplamsal ölçü tanımını verebiliriz.

Tanım 3.1.3 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $k \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere X üzerinde tanımlı bir μ bulanık ölçüsü, $|T| > k$ olacak biçimdeki her $T \subset X$ için $m(T) = 0$ ve $|T| = k$ olacak biçimdeki bazı $T \subset X$ kümeleri için $m(T) \neq 0$ koşulunu sağlıyorsa μ ölçüsüne k -toplamsal bulanık ölçü denir (Grabisch 1997).

Dikkat edilirse her bulanık ölçü $|X| = n$ olmak üzere bir $k \leq n$ tam sayısı için k -toplamsaldır. En kötü senaryo $k = n$ olmasıdır. Gerçekten $|X| = n$ olmak üzere bulanık ölçü belirleyebilmek için $2^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}$ tane alt kümenin değerinin belirlenmesi gerekir. Ancak k -toplamsal bulanık ölçülerde $k = 1$ için $\binom{n}{1}$ tane, herhangi bir $k = j$ için $\sum_{i=1}^j \binom{n}{i}$ tane alt kümenin değerinin belirlenmesine ihtiyaç vardır. Bu durum açıkça ölçü belirleme sürecini kolaylaştırır.

Şimdi örnek olması açısından 2-toplamsal bulanık ölçüleri inceleyelim. Her $K \subset X$ için (3.1) ve (3.2)'den

$$\begin{aligned}
\mu(K) &= \sum_{i=1}^n m_i x_i + \sum_{\{i,j\} \subset X} m_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i \in K} m_i + \sum_{\{i,j\} \subset K} m_{i,j} \\
&= \sum_{i \in K} \mu_i + \sum_{\{i,j\} \subset K} (\mu_{i,j} - \mu_i - \mu_j) \\
&= \sum_{i \in K} \mu_i + \sum_{\{i,j\} \subset K} \mu_{i,j} - \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in K}} (\mu_i + \mu_j) \\
&= \sum_{i \in K} \mu_i + \sum_{\{i,j\} \subset K} \mu_{i,j} - (|K| - 1) \sum_{i \in K} \mu_i \\
&= \sum_{\{i,j\} \subset K} \mu_{i,j} - (|K| - 2) \sum_{i \in K} \mu_i
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

3.2 Shapley Katsayısı ve Etkileşim Katsayısı

Bu kısımda bulanık ölçünün Shapley katsayısı, etkileşim katsayısı ve dual ölçü kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 3.2.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde bir bulanık ölçü olmak üzere her $i \in X$ için

$$\nu_i := \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sum_{\substack{K \subset X \setminus i \\ |K|=k}} (\mu_{iK} - \mu_K)$$

sayısına i 'ye karşılık gelen Shapley katsayısı denir. Burada

$$\gamma_k = \frac{1}{n} \binom{n-1}{k}^{-1} = \frac{(n-k-1)!(k)!}{n!}$$

şeklindedir. Aslında Shapley katsayısı i . terimin bu terimi içeren tüm kümelere

katkısının ortalamasıdır (Grabisch 1997).

Burada $\sum_{i=1}^n \nu_i = 1$ olduğu ve ölçü toplamsal olduğu zaman her $i \in X$ için $\mu_i = m_i = \nu_i$ olduğu kolayca görülebilir. Diğer yandan her $i, j \in X$ için

- i) $\mu_{ij} = \mu_i + \mu_j$ ise i ve j elemanları arasında etkileşim yoktur,
 - ii) $\mu_{ij} > \mu_i + \mu_j$ ise i ve j elemanları pozitif etkileşimlidir,
 - iii) $\mu_{ij} < \mu_i + \mu_j$ ise i ve j elemanları negatif etkileşimlidir
- denir.

Tanım 3.2.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde bir bulanık ölçü olmak üzere her $i, j \in X$ için

$$I_{ij} = \sum_{k=0}^{n-2} \xi_k \sum_{\substack{K \subset X \setminus \{i,j\} \\ |K|=k}} (\mu_{ijk} - \mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K)$$

sayısına (i, j) ikilisine karşılık gelen etkileşim katsayısı denir. Burada

$$\xi_k = \frac{1}{n-1} \binom{n-2}{k}^{-1} = \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!}$$

şeklindedir (Grabisch 1997).

Etkileşim katsayısı $\{i, j\}$ kümesini içeren tüm alt kümelere $\{i, j\}$ kümesinin katkısının ortalamasıdır. Dikkat edilirse ölçü toplamsal olduğu zaman $I_{ij} = 0$ gerçekleşir.

Tanım 3.2.3 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde bir bulanık ölçü olsun. Herhangi bir $T \subset X$ için

$$I_T := \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|} \mu_{KLT}$$

sayısına T kümesinin etkileşim katsayısı denir. Burada $|T| = p$ olmak üzere

$$\xi_k^p = \frac{1}{n-p+1} \binom{n-p}{k}^{-1} = \frac{(n-k-p)!k!}{(n-p+1)!}$$

şeklindedir (Grabisch 1997).

Tanım 3.2.4 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde bir bulanık ölçü olmak üzere her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) := 1 - \mu(A^c)$$

ile tanımlı $\mu^* : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna μ bulanık ölçüsüne karşılık gelen dual ölçü denir (Grabisch 1997).

Aşağıdaki önerme kolayca ispatlanabilir.

Önerme 3.2.1 μ , bulanık ölçüsünün dual ölçüsü de bir bulanık ölçüdür (Grabisch 1997).

3.3 Gösterimlerin Bazı Özellikleri

Bu bölümde $\nu_i, I_{ij}, I_T, \mu^*, v_A$ ve Möbius gösteriminin sağladığı bazı özellikler verilecektir. Aşağıdaki iki teorem etkileşim katsayısı ile Möbius gösterimi arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.3.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde bir bulanık ölçü olsun. μ bulanık ölçüsünün etkileşim gösterimi her $T \subset X$ için

$$I_T = \sum_{k=0}^{n-|T|} \frac{1}{k+1} \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} m_{TK}$$

eşitliğini sağlar (Grabisch 1997).

Sonuç 3.3.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde k-toplamsal bir bulanık ölçü ve m , μ ölçüsünün Möbius gösterimi olsun. Bu durumda

$$I_T = \begin{cases} m(T), & |T| = k \\ 0, & |T| > k \end{cases}$$

gerçeklenir (Grabisch 1997).

İspat. Teorem 3.3.1 ve Tanım 3.1.3'ten ispat kolayca görülebilir.

Teorem 3.3.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde bir bulanık ölçü olsun . μ bulanık ölçüsünün Möbius gösterimi her $T \subset X$ için

$$m(T) = \sum_{k=0}^{n-|T|} \alpha_k \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} I_{KT}$$

eşitliğini sağlar. Burada her k için

$$\alpha_k = - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha_r}{k-r+1} \binom{k}{r}$$

ile verilir. $\alpha_0 = 0$ olmak üzere α_k sayılarına Bernoulli sayıları denir (Grabisch,1997).

Bir bulanık ölçünün Möbius gösterimi ile dualinin Möbius gösterimi arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.3.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde bir bulanık ölçü olsun. μ^* , μ ölçüsünün dual ölçüsü, m ve m^* fonksiyonları da sırasıyla μ ve μ^* ölçülerinin Möbius gösterimleri olsun. O halde her $A \subset X$ için

$$m^*(A) = (-1)^{|A|+1} \sum_{A \subset B} m(B)$$

gerçeklenir (Grabisch 1997).

İspat. Öncelikle $A \subset X$ olmak üzere

$$\sum_{B \subset A} m^*(B) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B) \quad (3.3)$$

olduğunu gösterelim. Önerme 2.1.1 ve Tanım 3.1.2'ten

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} m(B) = \sum_{B \subset X} v_B(A) m(B) \quad (3.4)$$

yazabiliriz. Diğer yandan Tanım 3.2.4 ve (3.4) eşitliğinden

$$\mu^*(A) = 1 - \mu(A^c) = 1 - \sum_{B \subset X} v_B(A^c) m(B) \quad (3.5)$$

elde edilir. Şimdi, reel sayılar için bilinen

$$x.y = 1 - [(1-x) + (1-y) - (1-x).(1-y)]$$

eşitliğini (3.5)'te göz önüne alırsak $x = v_B(A^c)$, $y = m(B)$ seçerek

$$\mu^*(A) = \sum_{B \subset X} v_B^*(A) m(B) \quad (3.6)$$

elde ederiz. Ayrıca v_B ittifak oyununun dual ölçüsü de bir bulanık ölçü olduğundan Tanım 3.2.4'ten

$$v_B^*(A) = 1 - v_B(A^c) = \begin{cases} 1, & v_B(A^c) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset \\ 0, & v_B(A^c) = 1 \iff A \cap B = \emptyset \end{cases} \quad (3.7)$$

yazabiliriz. O halde (3.6) ve (3.7)'den

$$\mu^*(A) = \sum_{B \subset A} m^*(B) = \sum_{B \subset X} v_B^*(A) m(B) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B)$$

olup (3.3) eşitliği elde edilir. Şimdi tümevarım yöntemini kullanarak iddiamızı ispatlayalım: $A = \{i\}$ için (3.3)'ten

$$m^*(\{i\}) = \sum_{i \in B} m(B)$$

sağlanır. $|A| \leq k$ olacak biçimdeki kümeler için iddiamız doğru olsun. $|A'| = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. (3.3)'ten

$$\sum_{i=1}^k \sum_{\substack{B \subset A' \\ |B|=i}} m^*(B) + m^*(A') = \sum_{B \cap A' \neq \emptyset} m(B) \quad (3.8)$$

yazabiliriz. Diğer yandan hipotezden

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{B \subset A' \\ |B|=i}} m^*(B) &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{B \subset A' \\ |B|=i}} (-1)^{|B|+1} \sum_{B \subset C} m(C) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{B \subset A' \\ |B|=i}} (-1)^{|B|+1} \left(\sum_{\substack{B \subset C \\ A' \not\subset C}} m(C) + \sum_{\substack{B \subset C \\ A' \subset C}} m(C) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{B \subset A' \\ |B|=i}} (-1)^{|B|+1} \sum_{\substack{B \subset C \\ A' \not\subset C}} m(C) + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{B \subset A' \\ |B|=i}} (-1)^{|B|+1} \sum_{A' \subset C} m(C) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{C \cap A' \neq \emptyset \\ |C \cap A'|=i}} m(C) \left(\sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (-1)^{j+1} \right) + \sum_{A' \subset C} m(C) \left(\sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Binom teoreminden

$$\sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (-1)^{j+1} = 1$$

ve

$$\sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} = \begin{cases} 2, & k \text{ tek} \\ 0, & k \text{ çift} \end{cases}$$

yazabiliriz. O halde

$$\sum_{i=1}^k \sum_{\substack{B \subset A' \\ |B|=i}} m^*(B) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{C \cap A' \neq \emptyset \\ |C \cap A'|=i}} m(C) + 2 \sum_{A' \subset C} m(C), & k \text{ tek} \\ \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{C \cap A' \neq \emptyset \\ |C \cap A'|=i}} m(C), & k \text{ çift} \end{cases}$$

olur. Elde edilenler (3.8)'de yerine yazılırsa

k tek ise;

$$m^*(A') = - \sum_{A' \subset B} m(B)$$

k çift ise;

$$m^*(A') = \sum_{A' \subset B} m(B)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi bir bulanık ölçünün etkileşim katsayıları ile dualinin etkileşim katsayıları arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Önerme 3.3.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme; μ , X üzerinde bir bulanık ölçü ve μ^* , μ ölçüsünün dual ölçüsü olmak üzere I ve I^* sırasıyla μ ve μ^* 'ın etkileşim gösterimleri olsun. O halde her $T \subset X$ için

$$I_T^* = (-1)^{|T|+1} I_T$$

gerçeklenir (Grabisch 1997).

İspat. Tanım 3.2.3'ten $|T| = p$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_T^* &= \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|} \mu_{KL}^* \\ &= \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|} (1 - \mu_{(KL)^c}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} \left(\sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|} + \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|+1} (1 - \mu_{(KL)^c}) \right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Diğer yandan Lemma 2.1.1'den

$$I_T^* = \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|+1} (1 - \mu_{KL^c})$$

bulunur. Şimdi $J := K^c \setminus T$ olsun. $|K| = k$ olmak üzere $|J| = n - k - p$ ve $\xi_k^p = \xi_{n-k-p}^p$ elde edilir. O halde

$$I_T^* = \sum_{j=0}^{n-|T|} \xi_j^{|T|} \sum_{\substack{J \subset X \setminus T \\ |J|=n-k-p}} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|+1} \mu_{(T \setminus L)J} \quad (3.9)$$

olur. Buradan

$$(-1)^{|T|-|L|+1} = \begin{cases} (-1)^{|L|} & , \quad |T| \text{ tek} \\ (-1)^{|L|+1} & , \quad |T| \text{ çift} \end{cases}$$

yazabiliriz. O halde (3.9)'dan $T \setminus L = L^c = U$ olmak üzere

$$I_T^* = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-|T|} \xi_j^{|T|} \sum_{\substack{J \subset X \setminus T \\ |J|=n-k-p}} \sum_{U \subset T} (-1)^{|T|-|U|+1} \mu_{(U)J}, & k \text{ tek} \\ - \sum_{j=0}^{n-|T|} \xi_j^{|T|} \sum_{\substack{J \subset X \setminus T \\ |J|=n-k-p}} \sum_{U \subset T} (-1)^{|T|-|U|+1} \mu_{(U)J}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

olup ispat tamamlanır.

Bir ittifak oyununun etkileşim katsayıları ve Möbius gösterimi doğrudan hesaplanabilir. Bunu göstermek için öncelikle aşağıdaki lemmaya ve tanıma ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.3.1

$$\sum_{A \subset C \subset B} (-1)^{|C \setminus A|} = \sum_{A \subset C \subset B} (-1)^{|B \setminus C|} = \begin{cases} 0, & A \subset B \\ 1, & A = B \end{cases}$$

gerçeklenir (Grabisch 2016).

Tanım 3.3.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme $\psi : P(X) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir operatör ve $\xi : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir küme fonksiyonu olmak üzere bir operatör ile küme fonksiyonunun $(\psi * \xi)$ çarpımı her $A \subset X$ için

$$(\psi * \xi)(A) := \sum_{C \subset X} \psi(A, C) \xi(C)$$

ile tanımlıdır (Grabisch 2016).

Önerme 3.3.3 $m, \xi : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı küme fonksiyonunun Möbius gösterimi olmak üzere ξ küme fonksiyonunun etkileşim gösterimi için

$$I^\xi = \Gamma * m^\xi$$

gerçeklenir. Burada Γ Ters Bernoulli operatörü olup her $A, B \subset X$ için

$$\Gamma(A, B) = \begin{cases} \frac{1}{|B \setminus A| + 1}, & A \subset B \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

ile tanımlıdır (Grabisch 2016).

Önerme 3.3.4 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olmak üzere $A \subset X$ alalım. v_A ittifak oyununun Möbius gösterimi m^A ve etkileşim gösterimi I^A olmak üzere

$$m^A(T) = \begin{cases} 1, & A = B \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

ve

$$I_T^A = \begin{cases} \frac{1}{|A \setminus T| + 1}, & T \subset A \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

gerçeklenir.

İspat. v_A ittifak oyununun Möbius gösteriminin Tanım 2.1.4'ten

$$m^A(T) = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T \setminus S|} v_A(S)$$

olduğunu biliyoruz. $A = T$ ve $A \neq T$ olmak üzere iki ayrı durumu inceleyelim:

Durum 1: $A = T$ olsun. Bu durumda

$$m^A(T) = \sum_{S \subset A} (-1)^{|A \setminus S|} v_A(S) = 1$$

olduğu açıktır.

Durum 2: $A \neq T$ olsun. Bu durum da dört farklı durumda incelenmelidir.

(i) $T \subsetneq A$ ise

$$m^A(T) = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T \setminus S|} v_A(S) = 0$$

elde edilir.

(ii) $A \subsetneq T$ ise Lemma 3.3.1'den

$$m^A(T) = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T \setminus S|} v_A(S) = \sum_{A \subset S \subset T} (-1)^{|T \setminus S|} = 0$$

veya $v_A(S)$ nin tanımından

$$m_T^A = \sum_{S \subset A \subset T} (-1)^{|T \setminus S|} v_A(S) = 0$$

elde edilir.

(iii) $A \cap T = \emptyset$ ise

$$m^A(T) = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T \setminus S|} v_A(S) = 0$$

elde edilir.

(iv) $A \cap T \neq \emptyset$ $A \setminus T \neq \emptyset$ $T \setminus A \neq \emptyset$ ise

$$m^A(T) = \sum_{S \subset T} (-1)^{|T \setminus S|} v_A(S) = 0$$

elde edilir.

Diğer yandan v_A ittifak oyununun etkileşim gösterimi

$$I^A = \Gamma * m^A$$

olduğundan

$$\begin{aligned} I_T^A &= (\Gamma * m^A)(T) = \sum_{D \subset X} \Gamma(T, D) m^A(D) \\ &= \sum_{T \subset D} \frac{1}{|D \setminus T| + 1} m^A(D) \\ &= \sum_{T \subset A} \frac{1}{|A \setminus T| + 1} \\ &= \frac{1}{|A \setminus T| + 1} \end{aligned}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Sıradaki önerme ile bir ittifak oyununun etkileşim gösterimleri ile dualinin etkileşim gösterimleri arasındaki ilişki verilecektir.

Önerme 3.3.5 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $A \subset X$ olsun. v_A ittifak oyununun duali v_A^* olmak üzere sırasıyla I^A ve I^{A^*} fonksiyonları da v_A ve v_A^* ölçülerinin etkileşim gösterimleri olsun. O halde her $A, B \subset X$ için

- (i) $I_A^A = 1$, $I_A^{A^*} = (-1)^{|A|+1}$
- (ii) $B \subsetneq A$ iken $0 < I_B^A < 1$, $0 < |I_B^{A^*}| < 1$
- (iii) $B \not\subset A$ iken $I_B^A = 0$ $I_B^{A^*} = 0$

gerçeklenir (Grabisch 1997).

İspat. i) Önerme 3.3.4'te $I_T^A = \frac{1}{|A \setminus T| + 1}$ ifadesinde $T = A$ alınır,

$$I_A^A = \frac{1}{|A \setminus A| + 1} = 1$$

elde edilir. Önerme 3.3.2'de $T = A$ alınır,

$$I_A^{A^*} = (-1)^{|A|+1} I_A^A = (-1)^{|A|+1}$$

elde edilir.

ii) Diğer yandan $B \subsetneq A$ ise $|A| - |B| > 0$ olup $0 < \frac{1}{|A| - |B| + 1} < 1$ olur. O halde Önerme 3.3.4'ten

$$0 < I_B^A < 1$$

elde edilir. Önerme 3.3.2'de $T = B$ alınıp eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır

$$0 < |I_B^{A*}| < 1$$

elde edilir.

iii) Önerme 3.3.4'ten $B \not\subset A$ iken $I_B^A = 0$ bulunur. Önerme 3.3.2'den $B \not\subset A$ iken $0 < |I_B^{A*}| < 1$ bulunup ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.6 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $\mu, k \geq 1$ için X üzerinde k -monoton bir küme fonksiyonu olsun. O halde $|T| \leq k$ olacak biçimdeki her $T \subset X$ için $I_T \geq 0$ gerçekleşir (Grabisch 1997).

İspat. Öncelikle $k = 1$ durumunu özel olarak inceleyelim. Yani μ fonksiyonunu monoton kabul edelim. Her $i \in X$ ve $K \subset X \setminus i$ için $\mu_K \leq \mu_{iK}$ olup $\gamma_k \geq 0$ olduğundan $I_i \geq 0$ gerçekleşir. $k \geq 2$ durumu için $|T| = k$ olacak biçimde $T \subset X$ alalım. I_T tanımından $K \subset X \setminus T$ için

$$\sum_{L \subset T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} \geq 0$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $T := \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ ve $A_i := K \cup (T \setminus t_i)$ olsun. μ, k -monoton olduğundan

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^k [K \cup (T \setminus t_i)] \right) \geq \sum_{\substack{I \subset \{1,2,3,\dots,k\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu \left(\bigcap_{i \in I} [K \cup (T \setminus t_i)] \right)$$

yazabiliriz. Şimdi

$$\begin{aligned} \mu_{KT} &\geq \sum_{\substack{L \subsetneq T}} (-1)^{|T \setminus L|+1} \mu_{KL} \\ &= - \sum_{\substack{L \subsetneq T}} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} \end{aligned}$$

$$\mu_{KT} + \sum_{L \subsetneq T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} = \sum_{L \subset T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} \geq 0$$

olup $I_T \geq 0$ gerçekleşir. Diğer yandan $r \leq k$ için r -monotonluk sağlandığından $|T| \leq k$ için de $I_T \geq 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Etkileşim gösterimi sonlu değerli bir fonksiyon olduğundan sınırlı olduğu açıktır. Bu sınırı belirleyebilmek için öncelikle k -monoton ölçüler için üst sınırı belirleyeceğimiz aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

Önerme 3.3.7 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme, $k \geq 1$ ve μ , X üzerinde k -monoton bir bulanık ölçü olsun. $|T| \leq k+1$ olacak biçimdeki her $T \subset X$ için $I_T \leq 1$ gerçekleşir (Grabisch 1997).

İspat. İspatı $|T| = k+1$ için gösterirsek $r < k+1$ için de geçerli olacaktır. I_T tanımında $K \subset X \setminus T$ için

$$\sum_{L \subset T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} = 1$$

alınırsa

$$I_T = \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus T \\ |K|=k}} 1 = \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \binom{n-p}{k} = 1$$

elde edilir. O halde $K \subset X \setminus T$ için

$$\sum_{L \subset T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} \leq 1 \tag{3.10}$$

olduğunu gösterirsek $I_T \leq 1$ olduğunu göstermiş oluruz. Öncelikle

$$\sum_{L \subset T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} = \mu_{KT} + \sum_{L \subsetneq T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL}$$

yazalım. μ , bulanık ölçü olduğundan μ_{KT} terimi en fazla 1 olabilir. O halde

$$\sum_{L \subsetneq T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} \leq 0$$

olduğunu gösterirsek $K \subset X \setminus T$ için

$$\sum_{L \subset T} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} \leq 1$$

olduğunu göstermiş oluruz.

İlk olarak $k = 1$ durumunu düşünelim. Yani $T = \{i, j\}$ olsun. μ , monoton olduğundan

$$\sum_{L \subsetneq \{i, j\}} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} = \mu_K - \mu_{iK} - \mu_{jK} \leq 0$$

elde edilir. Şimdi tümevarım yöntemi ile $k \geq 2$ için iddiamızın doğru olduğunu ispatlayalım. $k \geq 2$ ise $|T| = 3$ olup $T = \{i, j, p\}$ şeklindedir. Monotonluk ve 2-monotonluktan

$$\sum_{L \subsetneq \{i, j, p\}} (-1)^{|T \setminus L|} \mu_{KL} = -\mu_K + \mu_{iK} + \mu_{jK} + \mu_{pK} - \mu_{ijK} - \mu_{ipK} - \mu_{jpK} \leq 0$$

gerçeklenir. Şimdi iddiamızın $k = m$ için sağlandığını kabul edelim ve $|T'| = m + 1$ olacak biçimde bir küme alalım. $|T| = m$ olacak biçimde $T \subset T'$ alırsak $T' = T \cup \{t\}$ olacak biçimde $t \in X$ vardır. $K \subset X \setminus T'$ için hipotez ve Önerme 3.3.6'dan

$$\sum_{L \subsetneq T'} (-1)^{|T' \setminus L|} \mu_{KL} = \sum_{\substack{L \subsetneq T' \\ t \notin L}} (-1)^{|T' \setminus L|} \mu_{KL} + \sum_{\substack{L \subsetneq T' \\ t \in L}} (-1)^{|T' \setminus L|} \mu_{KL} \leq 0$$

elde edilir. Burada $L = L' \cup \{t\}$ olup Önerme 3.3.6'dan

$$\sum_{L \subset T} (-1)^{|T' \setminus L|} \mu_{KL} + \sum_{L' \cup \{t\} \subsetneq T'} (-1)^{|T' \setminus L|} \mu_{KL't} \leq 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.3.8 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ , X üzerinde tanımlı bir bulanık ölçü olmak üzere her $i, j \in X$ için $I_{ij} \in [-1, 1]$ gerçekleşir. Ayrıca $I_{ij} = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\mu = v_{\{i, j\}}$ olmasıdır (Grabisch 1997).

İspat. μ bulanık ölçü olduğundan monotondur. O halde Önerme 3.3.7'den $I_{ij} \leq 1$ sağlanır. Ayrıca μ bulanık ölçüsünün duali olan μ^* da bir bulanık ölçü olduğundan $I_{ij}^* \leq 1$ sağlanır. Önerme 3.3.2'den

$$I_{ij}^* = (-1)^{|\{i,j\}|+1} I_{ij} \leq 1$$

olup $I_{ij} \geq -1$ gerçekleşir. O halde her $\{i, j\} \subset X$ için $I_{ij} \in [-1, 1]$ elde edilir. Son olarak Önerme 3.3.5'in ilk şartından $v_{\{i,j\}}$ ittifak oyununun etkileşim gösteriminin $I_{ij} \leq 1$ olduğunu elde ederiz. Karşıt olarak $I_{ij} \leq 1$ olduğunu kabul edelim.

$$I_{ij} = \sum_{k=0}^{n-2} \xi_k \sum_{\substack{K \subset X \setminus \{i,j\} \\ |K|=k}} (\mu_{ijK} - \mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K) \quad (3.11)$$

toplamının her bir terimi $k = 1, 2, 3, \dots, n-2$ ve $|K| = k$ olacak biçimdeki her $K \subset X \setminus \{i, j\}$ için $(\mu_{ijK} - \mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K)$ şeklindedir. Eğer $\mu_{ijK} < 1$ ise μ monoton olduğundan $(\mu_K - \mu_{iK} - \mu_{jK}) \leq 0$ olup eşitsizliğin her iki tarafına (μ_{ijK}) terimi eklenirse

$$(\mu_{ijK} - \mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K) \leq \mu_{ijK} < 1 \quad (3.12)$$

elde edilir. Bu durumda (3.11)'dan

$$I_{ij} < \sum_{k=0}^{n-2} \xi_k \sum_{\substack{K \subset X \setminus \{i,j\} \\ |K|=k}} 1 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n-1} \binom{n-2}{k}^{-1} \binom{n-2}{k} = 1$$

gerçekleşir. Bu ise çelişkidir. Bu durumda $\mu_{ijK} = 1$ olur. O halde (3.12) eşitsizliği

$$-\mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K = 0$$

eşitliğine dönüşür. μ bulanık ölçü olup monotonluk özelliğini sağlayacağından bu durum ancak

$$\mu_{iK} = \mu_{jK} = \mu_K = 0$$

olması ile mümkündür. Böylelikle $\mu, \{i, j\}$ ikilisi için bir ittifak oyunu olup ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.9 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı bulanık ölçülerin sonlu konveks kombinasyonu da bir bulanık ölçüdür. Yani $i = 1, 2, \dots, p$ için μ^i fonksiyonları bulanık ölçülerin bir ailesi ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in [0, 1]$ için $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ olmak üzere

$$\mu = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu^i$$

bir bulanık ölçüdür. Ayrıca her $A \subset X$ için sırasıyla

$$m(A) = \sum_{i=1}^p \alpha_i m^i(A)$$

ve

$$I_A = \sum_{i=1}^p \alpha_i I_A^i$$

ifadeleri μ ölçüsünün Möbius gösterimi ve etkileşim gösterimidir (Grabisch 1997).

İspat. Her $i = 1, 2, \dots, p$ için μ^i fonksiyonu bulanık ölçü , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in [0, 1]$ ve

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

olsun. O halde

$$\mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu^i(\emptyset) = 0$$

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu^i(X) = \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

elde edilir. Diğer yandan her i için μ^i fonksiyonu bulanık ölçü olduğundan $A \subset B$ iken

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu^i(A) &\leq \sum_{i=1}^p \alpha_i \mu^i(B) \\ \mu(A) &\leq \mu(B) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \sum_{B \subset A} m(B) \\
&= \sum_{B \subset A} \sum_{C \subset D} (-1)^{|D \setminus C|} \mu_C \\
&= \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{B \subset A} \sum_{C \subset D} (-1)^{|D \setminus C|} \mu_C^i \\
&= \sum_{i=1}^p \alpha_i m_A^i
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_A &= \sum_{k=0}^{n-|A|} \xi_k^{|A|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus A \\ |K|=k}} \sum_{L \subset A} (-1)^{|A|-|L|} \mu_{KL} \\
&= \sum_{k=0}^{n-|A|} \xi_k^{|A|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus A \\ |K|=k}} \sum_{L \subset A} (-1)^{|A|-|L|} \sum_{i=1}^p \alpha_i m_{KL}^i \\
&= \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{k=0}^{n-|A|} \xi_k^{|A|} \sum_{\substack{K \subset X \setminus A \\ |K|=k}} \sum_{L \subset A} (-1)^{|A|-|L|} m_{KL}^i \\
&= \sum_{i=1}^p \alpha_i I_A^i
\end{aligned}$$

elde edilir.

Verilen bir küme fonksiyonunun bir bulanık ölçünün Möbius gösterimine karşılık gelip gelmediği önemli bir problemidir. Bu problemin çözümüne geçmeden önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.3.2 Herhangi bir μ küme fonksiyonunun monoton olması için gerek ve yeter şart her $A \in P(X)$ ve her $x \in A$ için $\mu(A) \geq \mu(A \setminus x)$ olmasıdır (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. Kabul edelim ki μ monoton olsun. O halde $\mu(A) \geq \mu(A \setminus x)$ gerçekleşir. Karşıt olarak her $A \in P(X)$ ve $x \in A$ için $\mu(A) \geq \mu(A \setminus x)$ olsun. Şimdi $E \subset F \subset X$

alalım. $F \setminus E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ diyelim. O halde hipotezden

$$\mu(F) \geq \mu(F \setminus \{x_1\}) \geq \mu(F \setminus \{x_1\} \setminus \{x_2\}) \geq \dots \geq \mu(E)$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $m : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. m fonksiyonunun bir bulanık ölçünün Möbius gösterimine karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart

(i) $m(\emptyset) = 0$

(ii) $\sum_{B \subset X} m(B) = 1$

(iii) $\forall A \subset X$ ve $\forall i \in A$ için $\sum_{i \in B \subset A} m(B) \geq 0$

olmasıdır (Chateauneuf ve Jaffray 1989).

İspat. Kabul edelim ki m bir μ bulanık ölçüsünün Möbius gösterimi olsun.

i) Tanım 2.1.4'ten

$$m(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B)$$

olduğunu biliyoruz. Burada $A = \emptyset$ alınırsa $B = \emptyset$ olup μ bulanık ölçü olduğundan $m(\emptyset) = 0$ sağlanır.

ii) Önerme 2.1.1'den

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$$

olduğunu biliyoruz. Burada $A = X$ alınırsa μ bulanık ölçü olduğundan

$$\sum_{B \subset X} m(B) = 1$$

sağlanır.

iii) $A \in P(X)$ ve $x \in A$ alalım ve $A' = A \setminus \{x\}$ tanımlayalım. Lemma 3.3.2'den

$$\begin{aligned} \sum_{D \subset A'} m(D) &\leq \sum_{F \subset A} m(F) = \sum_{D \subset A'} m(D) + \sum_{D \subset A'} m(D \cup \{x\}) \\ &= \sum_{D \subset A'} m(D \cup \{x\}) \\ &= \sum_{D \subset A'} m(D \cup \{x\}) \geq 0 \\ &= \sum_{i \in B \subset A} m(B) \geq 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Karşıt olarak (i), (ii), (iii) şartları sağlansın. μ fonksiyonunun bulanık ölçü olduğunu gösterelim. Eğer;

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$$

eşitliğinde $A = \emptyset$ alınırsa $\mu(\emptyset) = 0$ elde edilir. Yine aynı eşitlikte $A = X$ alınırsa

$$\sum_{B \subset X} m(B) = 1$$

elde edilir. Ayrıca Lemma 3.3.2'den μ fonksiyonunun monoton olduğu görülür.

Möbius gösterimi için ele alınan problem etkileşim katsayıları için de göz önüne alınabilir. Aşağıdaki teorem ile verilen bir I küme fonksiyonunun bir bulanık ölçünün etkileşim katsayısı olabilmesi için gerek şartlar verilecektir.

Teorem 3.3.4 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $I : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ bir küme fonksiyonu olsun.

I fonksiyonu bir μ bulanık ölçüsünün etkileşim gösterimi ise

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \forall i \in X \text{ ve } \forall K \subset X \setminus i \text{ için } \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r \beta_k^r \sum_{\substack{L \subset X \setminus i \\ |L \cap K|=k, |L|=r}} I_{iL} \geq 0 \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{r=0}^n \alpha_r \sum_{\substack{L \subset X \\ |L|=r}} I_L = 0 \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{r=0}^n \beta_r^r \sum_{\substack{L \subset X \\ |L|=r}} I_L = 1 \end{aligned}$$

gerçeklenir (Grabisch 1997).

Burada

$$\beta_k^r = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_{r-j}$$

ve

$$\alpha_k = - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha_r}{k-r+1} \binom{k}{r}$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 3.3.2’de $T = \emptyset$ alınırsa

$$m(\emptyset) = \sum_{r=0}^n \alpha_r \sum_{\substack{L \subset X \\ |L|=r}} I_L \quad (3.13)$$

elde edilir. Teorem 3.3.3 (i) şartından $m(\emptyset) = 0$ olup (3.13) eşitliğinden

$$\sum_{r=0}^n \alpha_r \sum_{\substack{L \subset X \\ |L|=r}} I_L = 0$$

elde edilir. O halde (ii) ispatlanmış olur. Şimdi Teorem 3.3.3’ün (ii) koşulundan

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{A \subset X} m(A) \\ &= \sum_{A \subset X} \left(\sum_{r=0}^{n-|A|} \alpha_r \sum_{\substack{L \subset X \setminus A \\ |L|=r}} I_{AL} \right) \\ &= \sum_{A \subset X} \sum_{L \subset X \setminus A} \alpha_{|L|} I_{AL} \\ &= \sum_{A \subset X} \sum_{L \subset X \setminus A} \alpha_{|L|-|A|} I_L \\ &= \sum_{L \subset X} I_L \sum_{A \subset L} \alpha_{|L|-|A|} \binom{|L|}{|A|} \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{L \subset X \\ |L|=r}} I_L \sum_{j=0}^r \alpha_{r-j} \binom{r}{j} \\ &= \sum_{r=0}^n \beta_r^r \sum_{L \subset X} I_L \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise (iii)'yi ispatlar. Her bulanık ölçü bir $k \leq n$ pozitif tam sayısı için k-toplamsal bulanık ölçü olduğundan teoremin (i) şartının k-toplamsal bulanık ölçüler için sağlandığını gösterelim. k-toplamsal bulanık ölçüler için Teorem 3.3.3'ün (i) şartı yazılırsa $i \in X$ ve $K \subset X \setminus i$ için

$$m_i + \sum_{j \in K} m_{ij} + \dots + \sum_{\substack{L \subset K \\ |L|=l}} m_{iL} + \dots + \sum_{\substack{L \subset K \\ |L|=k-1}} m_{iL} \geq 0$$

elde edilir. $|K| \geq k$ alalım ve yukarıdaki eşitsizliğin her bir terimini Teorem 3.3.1'i kullanarak I_T katsayılarına dönüştürürsek $|T| = p$ olmak üzere $\forall i \in X$ ve $\forall K \subset X \setminus i$ için

$$\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^r \beta_k^r \sum_{\substack{L \subset X \setminus i \\ |L \cap K|=k, |L|=r}} I_{iL} \geq 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4. BULANIK ÖLÇÜ BELİRLEMEK İÇİN BAZI METOTLAR

Bu bölümde λ -bulanık ölçü tanıtılıp, literatürde mevcut bir bulanık ölçü belirleme metodu incelenecek ve bu metodun yine literatürde mevcut örneklerle uygulamaları gösterilip, λ -bulanık ölçüden farkı vurgulanacaktır. Burada ele alınan örnekler ve yöntemler Larbani vd. (2011)'e aittir.

4.1 λ - Bulanık Ölçü

Bu kısımda λ -bulanık ölçü tanıtılacak ve sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 4.1.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $A, B \subset X$ olsun. $A \cap B = \emptyset$ ve $\lambda \in (-1, \infty)$ olmak üzere,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda \mu(A)\mu(B)$$

şartını sağlayan $\mu : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde tanımlı bir λ - bulanık ölçü denir. Her $A, B \in P(X)$ için $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere;

(i) $\lambda = 0$ iken $\mu_\lambda(A \cup B) = \mu_\lambda(A) + \mu_\lambda(B)$ sağlanıyorsa μ toplamsal λ - bulanık ölçü

(ii) $\lambda > 0$ iken $\mu_\lambda(A \cup B) > \mu_\lambda(A) + \mu_\lambda(B)$ sağlanıyorsa μ üst toplamsal λ - bulanık ölçü

(iii) $\lambda < 0$ iken $\mu_\lambda(A \cup B) < \mu_\lambda(A) + \mu_\lambda(B)$ sağlanıyorsa μ alt toplamsal λ - bulanık ölçü olarak isimlendirilir (Larbani vd. 2011).

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme, $\lambda \in (-1, \infty)$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mu_i = \mu_\lambda(\{x_i\}), \mu_\lambda$ bulanık ölçüsünün bulanık yoğunlukları olmak üzere

$$\begin{aligned} \mu_\lambda(X) = \mu_\lambda(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) &= \sum_{i=1}^n \mu_i + \lambda \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n \mu_{i_1} \mu_{i_2} + \dots + \lambda^{n-1} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \\ &= \frac{1}{\lambda} \left| \prod_{i=1}^n (1 + \lambda \mu_i) - 1 \right| \end{aligned}$$

eşitliği ile X üzerinde bir bulanık ölçü tanımlanabilir. Burada $\mu_i = \mu_\lambda(\{x_i\})$ bulanık yoğunlukları verildiği zaman λ parametresi aşağıdaki eşitlik çözülerek hesaplanabilir:

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^n \mu_i = 1 \\ \prod_{i=1}^n (1 + \lambda \mu_i) - 1, & \sum_{i=1}^n \mu_i \neq 1 \end{cases}$$

Şimdi λ - bulanık ölçü kavramına alternatif olan aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.1.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve μ, X üzerinde bir bulanık ölçü olmak üzere her $A, B \in P(X)$ ve $A \cap B = \emptyset$ için

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda_{AB} \quad (4.1)$$

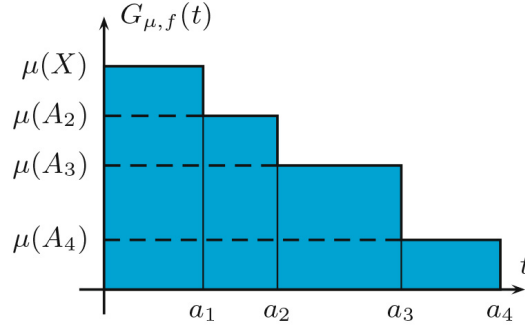
eşitliği ile verilen λ_{AB} ifadesine A ve B kümeleri arasındaki karşılıklı bağımlılık katsayısı denir (Larbani vd. 2011).

Bulanık ölçüler kullanılarak bulanık integraller tanımlanabilir. Bu integrallerden biri de 1953 yılında Gustave Choquet tarafından tanımlanan Choquet integralidir.

Tanım 4.1.3 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme (kriterlerin kümesi) ve μ, X üzerinde bir bulanık ölçü olsun. Bir $f : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonun Choquet integrali

$$(C) \int_X f d\mu := \sum_{k=1}^n (f(x_{(k)}) - f(x_{(k-1)})) \mu(E_{(k)})$$

ile verilir. Burada $\{x_{(k)}\}_{k=0}^n$ dizisi $0 := f(x_{(0)}) \leq f(x_{(1)}) \leq f(x_{(2)}) \leq \dots \leq f(x_{(n)})$ olacak biçimde $\{x_{(k)}\}_{k=0}^n$ dizisinin yeni bir permütasyonudur ve $E_{(k)} := \{x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(n)}\}$ şeklindedir (Choquet 1953).



Şekil 4.1 Choquet İntegrali

Her i için $x_{(i)} = a_i$, $A_i = \{x \in X : f(x) \geq a_i\}$, $A_1 = X$ ve $G_{\mu, f}(t) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq t\})$ olmak üzere Şekil 4.1’de verilen alan f ’in Choquet integralidir.

4.2 Bulanık Ölçünün Belirlenmesi

Bu bölümde bir bulanık ölçü belirlemek için izlenecek adımlar verilecektir. Bu adımlar yine Larbani vd. (2011)’e aittir.

Adım 1: $i \neq j$ için $0 \leq \lambda_{ij} \leq 1$ olacak biçimdeki λ_{ij} karşılıklı bağımlılık katsayıları belirlenir. Bu katsayıları belirlerken karar verici aşağıdaki yöntemleri kullanabilir.

- (i) Karar verici deneyimlerine ve bilgilerine dayanarak bu katsayıları belirleyebilir. Bunun için ilk önce kriterler arasındaki karşılıklı bağımlılığın tam bağımlı, çok güçlü bağımlı, güçlü bağımlı, orta bağımlı, zayıf bağımlı ve bağımsız olmak üzere sıralı bir ölçeğini tanımlar. Daha sonra sayısal bir ölçeği belirlediği sıralı ölçek ile ilişkilendirir. Örneğin; tam bağımlılık için 1.0, çok güçlü bağımlılık için 0.90, pozitif güçlü bağımlılık için 0.75, orta bağımlılık için 0.30, ve bağımsızlık için 0.00 gibi. Karar verici karşılıklı bağımlılık katsayılarının belirlenmesi sürecinde herhangi iki kriter arasındaki karşılıklı bağımlılık katsayısı 1’e yakınsa kriterlerden birinin gereksiz olduğunu ifade eder ve gereksiz kriteri ortadan kaldırır.

- (ii) Karar verici bu katsayıları ilgili alanlardaki uzmanların görüşlerine dayanarak belirleyebilir.

Adım 2: Kriterlerin yoğunlukları belirlenir. $X \neq \emptyset$ kriterlerin sonlu bir kümesi olmak üzere $\{x_i, x_j\}$ biçimindeki bir kümenin ölçüsünü ve X tüm kriterlerin kümesinin ölçüsünü sırasıyla

$$\begin{aligned}\mu(\{x_i, x_j\}) &= \mu_i + \mu_j + \lambda_{ij} \\ \mu(X) &= \sum_{x_i \in X} \mu_i + \max_{\substack{x_i, x_j \in X \\ i \neq j}} \lambda_{ij},\end{aligned}\tag{4.2}$$

ile tanımlayabiliriz. μ bulanık ölçü olacağından

$$0 \leq \mu(\{x_i, x_j\}) = \mu_i + \mu_j + \lambda_{ij} \leq 1$$

$$\mu(X) = \sum_{x_i \in X} \mu_i + \max_{\substack{x_i, x_j \in X \\ i \neq j}} \lambda_{ij} = 1$$

olmalıdır. O halde her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mu(\{x_i\}) = \mu_i$ bireysel yoğunlukları

$$0 \leq \mu_i + \mu_j + \lambda_{ij} \leq 1$$

$$\mu(X) = \sum_{x_i \in X} \mu_i + \max_{\substack{x_i, x_j \in X \\ i \neq j}} \lambda_{ij} = 1,\tag{4.3}$$

$$0 \leq \mu_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sistemini çözerek elde edebiliriz.

Önerme 4.2.1 Adım 1 ve Adım 2 ile belirlenen λ_{ij} ve μ_i 'ler göz önüne alındığında $|A| \geq 2$ için

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} \mu_i + \max_{\substack{x_i, x_j \in A \\ i \neq j}} \lambda_{ij}\tag{4.4}$$

$$\mu(\emptyset) = 0$$

şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu bir bulanık ölçüdür (Larbani vd. 2011).

İspat. (4.4) sisteminden $\mu(\emptyset) = 0$ ve $\mu(X) = 1$ sağlanır. $|A| \geq 2$ olmak üzere $A \subset B$ iken

$$\sum_{x_i \in A} \mu_i \leq \sum_{x_i \in B} \mu_i$$

ve

$$\max_{\substack{x_i, x_j \in A \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \leq \max_{\substack{x_i, x_j \in B \\ i \neq j}} \lambda_{ij}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \sum_{x_i \in A} \mu_i + \max_{\substack{x_i, x_j \in A \\ i \neq j}} \lambda_{ij} &\leq \sum_{x_i \in B} \mu_i + \max_{\substack{x_i, x_j \in B \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \\ \mu(A) &\leq \mu(B) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.3 Elde Edilen Bulanık Ölçünün Bir Uygulaması

Kısım (4.2)'de elde edilen yöntemin bir uygulaması olarak Larbani vd.(2011) tedarikçi seçim problemini göz önüne almıştır. Şimdi bu örneği inceleyelim:

Tedarikçi seçim problemi gerçek dünya yöneticileri tarafından yaygın olarak tartışılan bir yönetim sorunudur. Bir tedarikçiyi değerlendirmek için kullanılan en yaygın dört kriter

x_1 =Hizmet kalitesi

x_2 =Fiyat

x_3 =Müşteri Memnuiyeti

x_4 =Ürün Perfonmansı

kriterleridir ve bu kriterler birbirlerini pozitif yönde etkilemektedir. Bahsedilen bu dört kriterin genellikle hesaplama kolaylığı sağlamak için birbirinden bağımsız

olduğu kabul edilmiştir. Ancak kriterlerin bağımsızlığını varsaymanın gerçekçi olmaktan çok uzak olduğunu ve böyle bir karar problemi yapısının gerçek dünya yöneticilerinin kararını yönlendirmek için kullanıldığında yanıltıcı olabileceğini görebiliriz. Bölüm (4.2)'deki bulanık ölçü belirleme adımları takip edilirse ilk olarak karar verici kriterler arasındaki karşılıklı bağımlılık derecesini ve $\mu_i = \mu(\{x_i\})$ bireysel yoğunlukları belirlemelidir.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ kriterlerin kümesi ve $\{\lambda_{ij} = \lambda_{ji}, 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j\}$ olmak üzere

$$\lambda_{12} = 0.03, \quad \lambda_{23} = 0.06$$

$$\lambda_{13} = 0.04, \quad \lambda_{24} = 0.10$$

$$\lambda_{14} = 0.03, \quad \lambda_{34} = 0.03$$

ve $i = 1, 2, 3, 4$ için μ_i bireysel yoğunluklar

$$\mu_1 = 0.25, \quad \mu_3 = 0.25$$

$$\mu_2 = 0.25, \quad \mu_4 = 0.15$$

olsun. Kolaylık olması bakımından x_1, x_2, x_3, x_4 kriterleri sırasıyla 1, 2, 3, 4 ile gösterilsin. $|A| \geq 2$ olmak üzere (4.4) sisteminden elde edilir (Çizelge 4.1).

Çizelge 4.1 Ölçünün Belirlenmesi

$\mu(\emptyset) = 0$	$\mu(\{4\}) = 0.15$	$\mu(\{2, 3\}) = 0.56$	$\mu(\{1, 2, 4\}) = 0.75$
$\mu(\{1\}) = 0.25$	$\mu(\{1, 2\}) = 0.53$	$\mu(\{2, 4\}) = 0.50$	$\mu(\{1, 3, 4\}) = 0.69$
$\mu(\{2\}) = 0.25$	$\mu(\{1, 3\}) = 0.54$	$\mu(\{3, 4\}) = 0.43$	$\mu(\{2, 3, 4\}) = 0.75$
$\mu(\{3\}) = 0.25$	$\mu(\{1, 4\}) = 0.43$	$\mu(\{1, 2, 3\}) = 0.81$	$\mu(\{1, 2, 3, 4\}) = \mu(X) = 1$

Kabul edelim ki A,B,C ve D tedarikçileri alternatiflerimiz olsunlar. Tedarikçilerin x_1, x_2, x_3, x_4 kriterlerine göre puanları çizelge 4.2’de verilmiştir.

Çizelge 4.2 Tedarikçilerin x_1, x_2, x_3, x_4 Kriterlerine Göre Skorları

Alternatifler	Hizmet Kalitesi	Fiyat	Müşteri memnuniyeti	Ürün Performansı
A	55	85	85	45
B	55	45	75	85
C	85	75	55	65
D	75	65	65	75

Şimdi, Choquet integrali yardımıyla alternatifleri değerlendirelim. Choquet integralinin değer aralığı $[0, 1]$ olduğundan alternatiflerin puanlarını normalize edelim.

A alternatifi için çizelge 4.2’den

$$f(x_1) = 0.55$$

$$f(x_2) = 0.85$$

$$f(x_3) = 0.85$$

$$f(x_4) = 0.45$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_4) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3)$ elde edilir. Şimdi Tanım 4.1.3 ile f fonksiyonunun A tedarikçisi için Choquet integralini

hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu &= [(f(x_4) - f(x_0))\mu(E_{(1)})] + [(f(x_1) - f(x_4))\mu(E_{(2)})] \\
&\quad + [(f(x_2) - f(x_1))\mu(E_{(3)})] + [(f(x_3) - f(x_2))\mu(E_{(4)})] \\
&= 0.45 \times 1 + 0.10 \times 0.81 + 0.30 \times 0.56 + 0 \\
&= 0.699
\end{aligned}$$

B alternatifi için çizelge 4.2'den

$$f(x_1) = 0.55$$

$$f(x_2) = 0.45$$

$$f(x_3) = 0.75$$

$$f(x_4) = 0.85$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_2) \leq f(x_1) \leq f(x_3) \leq f(x_4)$ elde edilir. Şimdi Tanım 4.1.3 ile f fonksiyonunun B tedarikçisi için Choquet integralini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu &= [(f(x_2) - f(x_0))\mu(E_{(1)})] + [(f(x_1) - f(x_2))\mu(E_{(2)})] \\
&\quad + [(f(x_3) - f(x_1))\mu(E_{(3)})] + [(f(x_4) - f(x_3))\mu(E_{(4)})] \\
&= 0.45 \times 1 + 0.10 \times 0.69 + 0.20 \times 0.43 + 0.10 \times 0.15 \\
&= 0.620
\end{aligned}$$

C alternatifi için çizelge 4.2'den

$$f(x_1) = 0.85$$

$$f(x_2) = 0.75$$

$$f(x_3) = 0.55$$

$$f(x_4) = 0.65$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_3) \leq f(x_4) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$ elde edilir. Şimdi Tanım 4.1.3 ile f fonksiyonunun C tedarikçisi için Choquet integralini

hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu &= [(f(x_3) - f(x_0))\mu(E_{(1)})] + [(f(x_4) - f(x_3))\mu(E_{(2)})] \\
&+ [(f(x_2) - f(x_4))\mu(E_{(3)})] + [(f(x_1) - f(x_2))\mu(E_{(4)})] \\
&= 0.55 \times 1 + 0.10 \times 0.75 + 0.10 \times 0.53 + 0.10 \times 0.25 \\
&= 0.703
\end{aligned}$$

D alternatifi için çizelge 4.2'den

$$f(x_1) = 0.75$$

$$f(x_2) = 0.65$$

$$f(x_3) = 0.65$$

$$f(x_4) = 0.75$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_2) \leq f(x_3) \leq f(x_1) \leq f(x_4)$ elde edilir. Şimdi Tanım 4.1.3 ile f fonksiyonunun D tedarikçisi için Choquet integralini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu &= [(f(x_2) - f(x_0))\mu(E_{(1)})] + [(f(x_3) - f(x_2))\mu(E_{(2)})] \\
&+ [(f(x_1) - f(x_3))\mu(E_{(3)})] + [(f(x_4) - f(x_1))\mu(E_{(4)})] \\
&= 0.65 \times 1 + 0 + 0.10 \times 0.43 + 0 \\
&= 0.693
\end{aligned}$$

Elde edilen değerler sıralanırsa $C \succ D \succ A \succ B$ olup en iyi tedarikçinin C olduğu görülür (Larbani vd. 2011)

4.4 Geleneksel λ -Bulanık Ölçü Belirleme Metodu

Bu kısımda çok kriterli karar verme metotlarından biri olan analitik hiyerarşi süreci metodunu (AHP) kullanarak Bölüm 4.3'teki aynı örneği inceleyeceğiz (Larbani vd. 2011) AHP metodu karar verirken alternatiflerin kriterlere göre sıralanmasına ve

seçim yapılmasına yarayan nicel bir yöntemdir. Bu metotta önce standart tercih tablosundan yararlanılarak kriterlerin birbirlerine göre önem derecesini gösteren H matrisi oluşturulur.

Çizelge 4.3 Standart Tercih Tablosu

Önem Değeri	Değer Tanımları
1	Eşit önemde
3	Biraz daha önemli(az üstünlük)
5	Oldukça önemli(fazla üstünlük)
7	Çok önemli(çok üstünlük)
9	Son derece önemli (kesin üstünlük)
2,4,6 ve 8	Ara değerler (uzlaşma değerleri)

Şimdi H matrisini oluşturalım. Her kriterin kendi ile karşılaştırılıp önem derecesinin belirlenmesinde kriterler eşit önemde oldukları için matrisin köşegeni 1 olur. $a_{21} = 3$ ise x_2 kriteri x_1 kriterinden biraz daha önemli demektir. Bu durumda $a_{12} = 1/3$ olmalıdır. O halde Çizelge 4.2'den yararlanılarak H matrisi aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

H matrisi oluşturulduktan sonra

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}$$

formülü ile bir C matrisi oluşturulur. Burada $\sum_{i=1}^n a_{ij}$, H matrisinin sütun toplamaları

olup $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere B_i matrisi

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ b_{4i} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere B_i matrisi C matrisinin her bir sütununu oluşturur.

$$C = \begin{pmatrix} 1/9 & 1/22 & 2/17 & 2/11 \\ 3/9 & 3/22 & 3/17 & 1/11 \\ 3/9 & 6/22 & 6/17 & 4/11 \\ 2/9 & 12/22 & 6/17 & 4/11 \end{pmatrix}$$

C matrisinin satır bileşenlerinin aritmetik ortalaması alınarak kriterlerin birbirlerine göre önem derecelerini gösteren

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi oluşturulur. $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij}}{n}$$

şeklindedir. O halde W sütun matrisi

$$W = \begin{pmatrix} 0.110 \\ 0.179 \\ 0.326 \\ 0.384 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. O halde AHP metodu yardımıyla kriterlerin başlangıç ağırlıklarını bulmuş olduk. Karar vericinin kriterler arasında kıyaslama yaparken tutarlı davranıp davranmadığını ölçmek için tutarlılık oranının hesaplanması gerekir. Bu hesaplamada kriter sayısına bağlı olarak rasgele indeks sayıları kullanılır. Hesaplamalar sonucunda bulunan değer 0,10 veya altında çıkmışsa oluşturulan karşılaştırma matrisinin tutarlı olduğu sonucuna varılır. Aksi durumda karar matrisi tekrar düzenlenmelidir (Saaty 1980).

Çizelge 4.4 Rasgele Tutarlılık İndeksi Değerleri

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
RI	0	0	0.52	0.9	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56

Şimdi tutarlılık oranını hesaplayalım. Öncelikle H karar matrisi ile W sütun matrisini çarparak V sütun matrisini hesaplayalım.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.110 \\ 0.179 \\ 0.326 \\ 0.384 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.470 \\ 0.768 \\ 1.398 \\ 1.646 \end{pmatrix}$$

Daha sonra $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$D_i = \left(\frac{V_i}{W_i} \right) = \begin{pmatrix} 4.27 \\ 4.29 \\ 4.28 \\ 4.28 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi elde edilip $n = 4$ için

$$\lambda_{\max} = \frac{\sum_{i=1}^4 D_i}{n} = 4.28$$

bulunur. Şimdi tutarlılık oranını hesaplayalım. Tutarlılık indeksi

$$TI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = 0.09$$

ve çizelge 4.4'ten $n = 4$ için $RI = 0.9$ olup tutarlılık oranı

$$TO = \frac{0.09}{0.9} = 0.1$$

elde edilir.

Şimdi bulanık ölçü ağırlıklarını bulalım. $c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$w_1 : \mu_\lambda(\{x_1\}) = 0.110c$$

$$w_2 : \mu_\lambda(\{x_2\}) = 0.179c$$

$$w_3 : \mu_\lambda(\{x_3\}) = 0.326c$$

$$w_4 : \mu_\lambda(\{x_4\}) = 0.384c$$

olur. Daha sonra $\lambda = 3$ ve $c = 0.569$ alındığında bir λ -bulanık ölçüsü elde edilmiştir (Inoue ve Amagasa 1997) . O halde Tanım 4.1.1'den çizelge 4.5 bulunur.

Çizelge 4.5 λ - Bulanık Ölçüsünün Belirlenmesi

$\mu_\lambda(\emptyset) = 0$	$\mu_\lambda(x_4) = 0.219$	$\mu_\lambda(x_2, x_3) = 0.344$	$\mu_\lambda(x_1, x_2, x_4) = 0.523$
$\mu_\lambda(x_1) = 0.063$	$\mu_\lambda(x_1, x_2) = 0.184$	$\mu_\lambda(x_2, x_4) = 0.388$	$\mu_\lambda(x_1, x_3, x_4) = 0.688$
$\mu_\lambda(x_2) = 0.102$	$\mu_\lambda(x_1, x_3) = 0.283$	$\mu_\lambda(x_3, x_4) = 0.526$	$\mu_\lambda(x_2, x_3, x_4) = 789$
$\mu_\lambda(x_3) = 0.186$	$\mu_\lambda(x_1, x_4) = 0.322$	$\mu_\lambda(x_1, x_2, x_3) = 0.472$	$\mu_\lambda(X) = 1$

Şimdi Bölüm 4.3'teki aynı örneği inceleyeceğiz. O halde Choquet integralinin tanımını kullanarak A,B,C ve D alternatiflerini sıralayalım.

A alternatifi için çizelge 4.2'den

$$f(x_1) = 0.55$$

$$f(x_2) = 0.85$$

$$f(x_3) = 0.85$$

$$f(x_4) = 0.45$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_4) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3)$ elde edilir. A tedarikçisi için Choquet integralini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu_\lambda &= [(f(x_4) - f(x_0))\mu_\lambda(E_{(1)})] + [(f(x_1) - f(x_4))\mu_\lambda(E_{(2)})] \\
&\quad + [(f(x_2) - f(x_1))\mu_\lambda(E_{(3)})] + [(f(x_3) - f(x_2))\mu_\lambda(E_{(4)})] \\
&= 0.45 \times 1 + 0.10 \times 0.472 + 0.30 \times 0.344 + 0 \\
&= 0.6004
\end{aligned}$$

B alternatifi için çizelge 4.2'den

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= 0.55 \\
f(x_2) &= 0.45 \\
f(x_3) &= 0.75 \\
f(x_4) &= 0.85
\end{aligned}$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_2) \leq f(x_1) \leq f(x_3) \leq f(x_4)$ elde edilir. Şimdi Tanım 4.1.3 ile f fonksiyonunun B tedarikçisi için Choquet integralini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu_\lambda &= [(f(x_2) - f(x_0))\mu_\lambda(E_{(1)})] + [(f(x_1) - f(x_2))\mu_\lambda(E_{(2)})] \\
&\quad + [(f(x_3) - f(x_1))\mu_\lambda(E_{(3)})] + [(f(x_4) - f(x_3))\mu_\lambda(E_{(4)})] \\
&= 0.45 \times 1 + 0.10 \times 0.688 + 0.20 \times 0.526 + 0.10 \times 0.219 \\
&= 0.6459
\end{aligned}$$

C alternatifi için çizelge 4.2'den

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= 0.85 \\
f(x_2) &= 0.75 \\
f(x_3) &= 0.55 \\
f(x_4) &= 0.65
\end{aligned}$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_3) \leq f(x_4) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$ elde edilir. Şimdi Tanım 4.1.3 ile f fonksiyonunun C tedarikçisi için Choquet integralini

hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu_\lambda &= [(f(x_3) - f(x_0))\mu_\lambda(E_{(1)})] + [(f(x_4) - f(x_3))\mu_\lambda(E_{(2)})] \\
&+ [(f(x_2) - f(x_4))\mu_\lambda(E_{(3)})] + [(f(x_1) - f(x_2))\mu_\lambda(E_{(4)})] \\
&= 0.55 \times 1 + 0.10 \times 0.523 + 0.10 \times 0.184 + 0.10 \times 0.063 \\
&= 0.627
\end{aligned}$$

D alternatifi için çizelge 4.2'den

$$f(x_1) = 0.75$$

$$f(x_2) = 0.65$$

$$f(x_3) = 0.65$$

$$f(x_4) = 0.75$$

olup bu değerler küçükten büyüğe sıralanırsa $f(x_2) \leq f(x_3) \leq f(x_1) \leq f(x_4)$ elde edilir. Şimdi Tanım 4.1.3 ile f fonksiyonunun D tedarikçisi için Choquet integralini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
(C) \int_X f d\mu_\lambda &= [(f(x_2) - f(x_0))\mu_\lambda(E_{(1)})] + [(f(x_3) - f(x_2))\mu_\lambda(E_{(2)})] \\
&+ [(f(x_1) - f(x_3))\mu_\lambda(E_{(3)})] + [(f(x_4) - f(x_1))\mu_\lambda(E_{(4)})] \\
&= 0.65 \times 1 + 0 + 0.10 \times 0.322 + 0 \\
&= 0.6822
\end{aligned}$$

Elde edilen değerler sıralanırsa $D \succ B \succ C \succ A$ olup en iyi tedarikçinin D olduğu görülür (Larbani vd. 2011).

Çizelge 4.6 Bölüm (4.2) ve (4.4)'te Elde Edilen Sıralamalar ve Puanlar (Larbani vd. 2011)

Alternatifler	Kısım 4.2		Kısım 4.3	
	Sıra	Bulanık İntegral	Sıra	Bulanık İntegral
A	3	0.699	4	0.6004
B	4	0.620	2	0.6459
C	1	0.703	3	0.6270
D	2	0.693	1	0.6822

Şimdi ileri sürülen bulanık ölçü belirleme metodu kullanılarak tanımlanan ölçünün λ -bulanık ölçü olmadığını gösterelim. Örnek olarak Bölüm 4'ün çok kriterli karar verme uygulamasında belirlenen bulanık ölçünün λ -bulanık ölçü olarak belirlenemeyeceğini gösterelim. Kolay hesaplamak için x_1, x_2, x_3, x_4 kriterlerini sırasıyla 1, 2, 3, 4 ile gösterlim. Tanım 4.1.1'den

$$\mu(\{1\}) \cup (\{2\}) = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\}) + \lambda \mu(\{1\})\mu(\{2\})$$

eşitliği çözülürse $\lambda = 0.48$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\mu(\{2\}) \cup (\{4\}) = \mu(\{2\}) + \mu(\{4\}) + \lambda \mu(\{2\})\mu(\{4\})$$

eşitliği çözülürse $\lambda = 2.67$ bulunur. O halde ileri sürülen metot bir λ -bulanık ölçü olamaz (Larbani vd. 2011).

5. BULANIK ÖLÇÜM TEORİSİNİN BİR UYGULAMASI

Bu bölümde bulanık ölçüm teorisi kullanılarak literatürde var olan bir örnek incelenecektir. Küresel ısınma ve iklim değişiklikleri dünya üzerindeki tüm canlıların yaşamlarını tehdit eden önemli konulardır. Kuraklık, sıcaklık değişimleri ve yağış değişimleri küresel ısınmanın gözle görülebilir sonuçlarıdır. Bu bölümde bu sonuçlar dikkate alınarak Türkiye için küresel ısınmanın etki derecelerinin değerlendirilmesi çok kriterli karar verme problemi ele alınacaktır ve bulanık ölçü teorisi yardımıyla ilgili etki dereceleri belirlenecektir (Özcelik vd. 2016).

5.1 Bulanık Ölçünün Belirlenmesi

Bu bölümde bulanık ölçü belirlemek için karma bir metot incelenecektir. Bu kısımda incelenecek metot bir önceki bölümdeki (4.2) denklemi ile bir çok kriterli karar verme metodu olan bulanık analitik hiyerarşi süreci (FAHP) metodunun bir karmasıdır (Özcelik vd. 2016). FAHP; kriterlerin bireysel önem ağırlıklarının belirlenmesi için kullanılır. Bu bölümde uzman görüşüne göre karşılaştırma matrisi Çizelge 5.1 ile verilen üçgen bulanık skala kullanılarak oluşturulmuştur (Dağdeviren 2007).

Çizelge 5.1 Üçgen Bulanık Dönüşüm Ölçeği(TFS)

Dilbilimsel Ölçek	TFS	TFS(karşılıklı)
Sadece eşit	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)
Eşit önemde	(1/2, 1, 3/2)	(2/3, 1, 2)
Zayıf önemli	(1, 3/2, 2)	(1/2, 2/3, 1)
Oldukça önemli	(3/2, 2, 5/2)	(2/5, 1/2, 2/3)
Çok önemli	(2, 5/2, 3)	(1/3, 2/5, 1/2)
Son derece önemli	(5/2, 3, 7/2)	(2/7, 1/3, 2/5)

Öncelikle her $k = 1, 2, \dots, n$ için α -kesim değerinde alt ve üst sınırlar aşağıdaki eşitliklerle belirlenir:

$$\text{Alt sınır : } LB_k = \alpha(m_k - l_k) + l_k$$

$$\text{Üst sınır : } UB_k = u_k - \alpha(u_k - m_k)$$

Daha sonra her k için $w_{k(alt)}$ ve $w_{k(st)}$ sınır değerleri aşağıdaki formüllerle hesaplanır.

$$w_{k(alt)} = \frac{\sum_{i=1}^l \alpha_i (LB_k)_i}{\sum_{i=1}^l \alpha_i}$$

$$w_{k(st)} = \frac{\sum_{i=1}^l \alpha_i (UB_k)_i}{\sum_{i=1}^l \alpha_i}$$

Daha sonra

$$W_k = \beta w_{k(alt)} + (1 - \beta) w_{k(st)}, \quad \beta \in [0, 1]$$

eşitliği ile her bir kriterin önem ağırlığı hesaplanır. $\beta = 1$ alınrsa karar vericinin iyimser görüşte, $\beta = 0.5$ alınrsa karar vericinin ılımlı görüşte, $\beta = 0$ alınrsa karar vericinin karamsar görüşe sahip olduğunu söyleyebiliriz. İyimser karar verici bulanık değerlendirme yaparken yüksek değerleri, kötümser karar verici ise düşük değerleri tercih etme eğilimindedir (Deng 1999)

Şimdi her bir (x_i, x_j) ikili kriteri için $\lambda_{ij} \in [0, 1]$ karşılıklı bağımlılık katsayısını belirleyelim. Karar verici karşılıklı bağımlılık katsayılarını belirlemek için Bölüm 4.2'deki adımları takip edebilir (Özcelik vd. 2016).

5.2 Türkiye'nin Şehirlerinin Küresel Isınmadan Etkilenme Derecelerinin Belirlenmesi

Bu kısımda küresel ısınmanın yağış ve sıcaklık gibi etkileri dikkate alınarak Türkiye'nin şehirlerinin küresel ısınmadan etkilenme dereceleri bir çok kriterli karar verme problemi olarak ele alınacaktır (Özcelik vd. 2016.). Bu amaçla aşağıda dört tane kriter

belirlenmiştir. Belirtilen kriterlere ilişkin veriler, Türkiye Devlet Meteoroloji İşlerinden edinilmiştir.

Çizelge 5.2 Kriterlerin Tanımlanması

C₁	Maksimum yağış miktarı ile bu yağışın gerçekleştiği ayın normal yağış miktarı arasındaki oran (son 42 yıl)
C₂	Yağışın anormal olduğu yıl sayısı (son 42 yıl)
C₃	Kuraklık derecesi (son 21 yıl)
C₄	Son 10 yıllık ortalama sıcaklığın mevsim normaline oranı

Kriterler belirlendikten sonra kriterlerin önem ağırlıkları bahsedilen karma metot ile belirlenir. Bunun için ilk önce FAHP yöntemi ile kriterlerin ikili bulanık karşılaştırma matrisi elde edilecektir. Kriterler için ikili karşılaştırma matrisi çizelge 5.3'te verilmiştir. Çizelge 5.3 kullanılarak her bir kriterin bulanık ağırlığı

$$C_1 = (0.103, 0.158, 0.270)$$

$$C_2 = (0.132, 0.198, 0.307)$$

$$C_3 = (0.249, 0.390, 0.589)$$

$$C_4 = (0.148, 0.254, 0.416)$$

olarak elde edilmiştir.

Her α -kesim değerinde C_1, C_2, C_3, C_4 kriterlerinin alt ve üst sınırları Kısım 5.1'deki formüller kullanılarak elde edilmiş ve çizelge 5.4'te gösterilmiştir. Kriterlerin bulanık önem ağırlıkları çizelge 5.4'in son sütununda gösterilmiştir ve $\beta = 0.5$ olarak kabul edilmiştir.

Çizelge 5.3 Kriterler İçin Karşılaştırma Matrisi

Kriterler	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	(1, 1, 1)	(2/5, 1/2, 2/3)	(1/3, 2/5, 1/2)	(2/3, 1, 2)
C_2	(3/2, 2, 5/2)	(1, 1, 1)	(2/5, 1/2, 2/3)	(2/5, 1/2, 2/3)
C_3	(2, 5/2, 3)	(3/2, 2, 5/2)	(1, 1, 1)	(1, 3/2, 2)
C_4	(1/2, 1, 3/2)	(3/2, 2, 5/2)	(1/2, 2/3, 1)	(1, 1, 1)

Çizelge 5.4 Kriterler İçin Bulanıklaştırılmış Önem Ağırlıkları

Kriterler	l	m	u	w_{alt}	$w_{üst}$	W
C_1	0.103	0.158	0.270	0.137833	0.199067	0.17
C_2	0.132	0.198	0.307	0.1738	0.237967	0.21
C_3	0.249	0.390	0.589	0.3383	0.462967	0.40
C_4	0.148	0.254	0.416	0.215133	0.3134	0.26

Daha sonra uzmanların görüşüne göre herhangi iki kriter arasındaki λ_{ij} zayıf bağımlılık katsayıları elde edilmiştir. Bu katsayılar;

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0.02$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{31} = 0.01$$

$$\lambda_{14} = \lambda_{41} = 0.01$$

$$\lambda_{23} = \lambda_{32} = 0.01$$

$$\lambda_{24} = \lambda_{42} = 0.02$$

$$\lambda_{34} = \lambda_{43} = 0.04$$

dir. İki kriter arasındaki karşılıklı bağımlılık katsayıları hesaplandıktan sonra tek nokta kümelerinin bireysel yoğunluklarını çizelge 5.4'ün son sütununu ve

(4.2) sistemine göre normalize ederek

$$\mu_1 = 0.16, \quad \mu_2 = 0.19, \quad \mu_3 = 0.37, \quad \mu_4 = 0.24$$

şeklinde buluruz. Gerçekten;

$$\sum_{k=1}^4 \mu_k + \max_{\substack{i,j=1,2,3,4 \\ i \neq j}} \lambda_{ij} = 0.16 + 0.19 + 0.37 + 0.24 + 0.04 = 1$$

elde edilir. Şimdi (4.2) sistemini kullanarak bulanık ölçü kuralım. Böylece çizelge 5.5 elde edilir.

Çizelge 5.5 Bulanık Ölçü

$\mu(\emptyset) = 0$	$\mu(C_4) = 0.24$	$\mu(C_2, C_3) = 0.57$	$\mu(C_1, C_2, C_4) = 0.61$
$\mu(C_1) = 0.16$	$\mu(C_1, C_2) = 0.37$	$\mu(C_2, C_4) = 0.45$	$\mu(C_1, C_3, C_4) = 0.81$
$\mu(C_2) = 0.19$	$\mu(C_1, C_3) = 0.54$	$\mu(C_3, C_4) = 0.65$	$\mu(C_2, C_3, C_4) = 0.084$
$\mu(C_3) = 0.37$	$\mu(C_1, C_4) = 0.37$	$\mu(C_1, C_2, C_3) = 0.74$	$\mu(C_1, C_2, C_3, C_4) = 1$

Choquet integrali yardımıyla Türkiye'nin 81 ilinin küresel ısınmaya karşı yatkinlık derecesini hesaplanabilir. Kriterlerin yapısı gereği "**bir**" sonucu küresel ısınmaya en fazla yatkinlık durumunu, "**sıfır**" sonucu küresel ısınmaya en az yatkinlık durumunu göstermektedir.

Burada örnek teşkil etmesi açısından sadece Ankara ili için veriler kullanılarak Choquet integralinin hesaplanması verilecektir.

Örnek 5.2.1 Ankara şehrinin Choquet integralini hesaplayalım. $X = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ ve

$$f(C_1) = 0.2382942$$

$$f(C_2) = 0.5416667$$

$$f(C_3) = 0.5673935$$

$$f(C_4) = 0.4727869$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}(C) \int_X f d\mu &= \sum_{k=1}^n (f(C_{(k)}) - f(C_{(k-1)})) \mu(E_k) \\ &= (0.2382942 - 0) \times 1 + (0.4727869 - 0.2382942) \times 0.84 \\ &\quad + (0.5416667 - 0.4727869) \times 0.57 + (0.5673935 - 0.5416667) \times 0.37 \\ &= 0.48405\end{aligned}$$

elde edilir.

Özcelik vd. (2016)'e göre, kıyı kentleri ve düzenli yağış alan şehirler diğer şehirlerden daha az etkilenmektedir. Küresel ısınmadan en fazla etkilenen şehir Kütahya olarak belirlenmiştir. Bu durum Kütahya şehrinin konumu nedeniyle beklenen bir sonuçtur. Çünkü, şehir ülkenin iç kısmında bulunmaktadır ve yıllara göre yağış rejimi düzensizlikler göstermiştir. Ayrıca şehrin sanayileşme durumuda bu sonuçta etkili olmuştur. Küresel ısınmadan en az etkilenen şehir Sinop olarak belirlenmiştir. Sinop, şehri Karadeniz Bölgesi'ndedir ve bu bölgede bulunan Rize, Samsun, Artvin şehirleride diğer şehirlere göre daha düşük skora almıştır. Çünkü, Türkiye'nin diğer bölgelerinin aksine bu bölgede sıcaklık ve yağış rejimi düzenlidir.

Sonuç olarak önerilen karma yöntem sayesinde Türkiye'nin şehirlerinin küresel ısınmadan etkilenme derecesini gösteren ve tutarlı olan tablo (Özcelik 2016)'de elde edilmiştir. Bu tabloda C_1, C_2, C_3 ve C_4 kriterlerine göre alternatiflerin aldığı değerler bahsedilen gerçek verilerden elde edilmiştir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çok kriterli karar verme (ÇKKV) oluşturulan birbiriyle çelişen kriterlere göre en uygun alternatifi belirleme sürecidir. Bu süreçte karar verici kriterler arasındaki ilişkinin belirlenmesi ve bu ilişkilere göre alternatiflerin değerlendirilmesi gibi problemleri bazı yöntemlerle aşmak zorundadır. Bu sebeplerle bazı çok kriterli karar verme yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin temel amacı alternatif ve kriter sayılarının fazla olduğu durumlarda karar verme mekanizmasını kontrol altında tutmak ve karar sonucunu mümkün olduğu kadar kolay ve çabuk elde etmektir.

Çok kriterli karar verme yöntemlerinden biri bulanık ölçü ve bulanık integral kavramlarının birlikte kullanılmasıdır. Bulanık ölçü, bulanık integral kavramları günlük yaşamda karşılaşılan problemlerin tam olarak modellenemediği belirsizlik içeren durumlarda kullanılır.

Bu tezde karar verme sürecini rahatlatmak için kullanılan k -toplamsal bulanık ölçü ve λ -bulanık ölçü kavramı açıklanmış, literatürde mevcut bir çok kriterli karar verme problemi olan tedarikçi seçim yöntemi incelenmiştir. Tezin son bölümünde çok kriterli karar verme problemlerinin çözümü için yine literatürde mevcut karma bir metot incelenip bu metot yardımıyla bir gerçek hayat problemi incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Bellman, R.E. and Zadeh, L.A. 1970. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17 (4):141-164.
- Carlsson, C. and Fullér, R. 1996. "Fuzzy multiple criteria decision making: recent developments", *Fuzzy Sets and Systems*, 78 (2), 139-153.
- Chateauneuf, A. and Jaffray, J.Y. 1989. Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion, *Mathematical Social Sciences*, 17:263-283.
- Choquet, G. 1953. Theory of capacities. *Annales de L'Institut Fourier* 5:131-295.
- Dağdeviren M. 2007. Personnel selection with fuzzy analytical hierarchy process and an application, *J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.* 22 (4), 791-799, (in Turkish).
- Deng, H. 1999. Multicriteria Analysis with Fuzzy Pairwise Comparison , *International Journal of Approximate Reasoning*, 21(3), 215-231.
- Ducey, M.J. and Larson, B.C. 1999. "A fuzzy set approach to the problem of sustainability", *Forest Ecology and Management*, 115 (1), 29-40.
- Grabisch, M. and Roubens, M. 1996. Equivalent representations of a set function with application to decision making. In 6th IEEE Int. Conf. on Fuzzy
- Grabisch, M. 1995a. A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition, *Int. Joint Conf. of the 4th IEEE International Conference Fuzzy Systems and the 2nd International Fuzzy Engineering Symposium*, March 1995, Yokohama, Japan, 145-150.
- Grabisch, M. 1995b. Fuzzy integral in multicriteria decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 69 : 279-298.
- Grabisch, M. 1996. The application of fuzzy integrals in multi criteria decision making. *European Journal of Operational Research*, 89 : 445-456.
- Grabisch, M. 1997. k-Order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy Sets and*
- Grabisch, M. 2016. *Set Functions, Games and Capacities in Decision Making*. Springer International Publishing Switzerland.

- Inouei, Y. and Amagasa, M. 2007. Basics of Fuzzy Set Theory, Tokyo, Japan, Asagura, International Journal of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge Based Systems, 7 : 545-560.
- Larbani, M. Huang, C. and Tzeng G. 2011. A novel method for fuzzy measure identification, International Journal of Fuzzy Systems, 13, (1).
- Lebesgue, H. 1966. Measure and The Integral, San Fransisco: Holden-Day.
- Mikenina, L. and Zimmermann, H.J. 1999. Improved feature selection and classification by the 2-additive fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems, 107, 195-218.
- Miranda, P. and Grabisch, M. 1999. Optimization issues for fuzzy measures
- Olgun, M. Ünver, M. and Özçelik, G. 2016. Bulanık Ölçü tanımlamak için hibrid bir metot, Ankara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi (BAP)
- Özçelik, G. Aydoğan, E.K. and Gencer, C. 2014. "A hybrid moora-fuzzy algorithm for special education and rehabilitation center selection", Journal of Military and Information Science, 2 (3), 53-62.
- Özcelik, G. Ünver M. and Temel-Gencer C. 2016. Evaluation of the global warming impacts using a hybrid method based on fuzzy techniques: A case study in Turkey. Gazi Journal of Science, 29 (4), 883-894
- Saaty, T.L. 1980. The Analytic Hierarchy Process, New York, McGraw-Hill.
- Sekita, Y. 1976. A consideration of identifying fuzzy measures. Osaka University Economy, 25: 133-138.
- Shafer, G. 1976 A Mathematical Theory Of Evidence, Princeton University Press, Princeton, New Jersey. Systems, 92 :167-189.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ezgi TÜR KARSLAN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 06/07/1991

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Yenimahalle Mustafa Kemal Lisesi (2009)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2013)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
(Eylül 2015-Haziran 2017)