

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ENERJİ FİYATLARI VE TARIM ÜRÜNLERİ FİYATLARI ARASINDAKİ
BAĞIMLILIK İLİŞKİSİNİN KAPULA YÖNTEMİ İLE ARAŞTIRILMASI**

Yonca YILDIRIM BÖLEN

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2022**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ENERJİ FİYATLARI VE TARIM ÜRÜNLERİ FİYATLARI ARASINDAKİ BAĞIMLILIK İLİŞKİSİNİN KAPULA YÖNTEMİ İLE ARAŞTIRILMASI

Yonca YILDIRIM BÖLEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel AÇIK KEMALOĞLU

Ham petrol dünyada halen birincil enerji kaynağıdır ve başta finans piyasaları olmak üzere tarım ve gıda piyasaları üzerinde çok geniş kapsamlı etkilere sahiptir. Türkiye petrol ithalatçısı bir ülke olduğundan petrol fiyatlarındaki değişimler Türkiye'deki piyasalar üzerinde çok daha fazla etkiye sebep olmaktadır. Petrol fiyatındaki dalgalanmalar başta gıda ve tarımsal ürün piyasalarını etkilemektedir. Son yıllarda petrol fiyatlarındaki artışla birlikte gıda fiyatlarında da değişim yaşanması tarımsal ürün fiyatları ile petrol fiyatları arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesinin önemini ortaya koymuştur. Bu çalışmada petrol ürünleri fiyatları ile tarımsal ürün fiyatları arasındaki bağımlılık ilişkisi kapula yöntemiyle araştırılmıştır. Enerji fiyatları olarak benzin ve motorin fiyatlarının, tarımsal ürünler olarak da buğday, arpa, mısır ve soya üretici fiyatlarının 2005-2020 dönemindeki aylık verileri incelenmiştir. Bu kapsamda, her bir değişkenin marjinal dağılımları modellemek amacıyla zaman serileri analiz yöntemleri kullanılmış ve sonrasında farklı kapula fonksiyonları ile enerji ve tarımsal ürün fiyatları arasındaki bağımlılık ilişkisi ortaya konulmuştur. Enerji ve tarımsal ürün fiyatları arasında pozitif güçlü bağımlılığın olduğu sonucuna varılmıştır.

Temmuz 2022, 61 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ham petrol, tarımsal ürün fiyatları, kapula, Box-Jenkins yöntemi

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INVESTIGATION OF THE RELATIONSHIP BETWEEN ENERGY PRICES AND AGRICULTURAL PRODUCT PRICES BY COPULA METHOD

Yonca YILDIRIM BÖLEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sibel AÇIK KEMALOĞLU

Crude oil is still the primary energy source in the world and it has far-reaching effects on agriculture and food markets, especially on financial markets. Turkey is an oil-importing country, and therefore changes in oil prices cause much more impact on the markets in Turkey. Fluctuations in oil prices primarily affect the food and agricultural product markets. The change in food prices with the increase in oil prices in recent years has made it necessary to examine the dependency structure between agricultural product prices and oil prices. In this study, the dependency relationship between crude oil product prices and agricultural product prices was investigated using the copula method. Monthly data of gasoline and diesel prices as energy prices, and producer prices of wheat, barley, corn and soybean as agricultural products for the period 2005-2020 were examined. In this context, time series analysis methods were used to determine the marginal distributions of each variable, and then the dependency relationship between different copula functions and energy and agricultural product prices was revealed. It was concluded that there is a positive strong dependence between both energy prices and agricultural product price pairs.

July 2022, 61 pages

Key Words: Crude oil, agricultural product prices, copula, Box-Jenkins method

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın tüm aşamalarında yardım ve desteklerini esirgemeyen değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sibel AÇIK KEMALOĞLU'na en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu süreçte fedakârlıkları ile bana destek olan sevgili eşim Emre BÖLEN'e, canım oğlum Eren Mahir'e ve aileme tüm kalbimle teşekkürü bir borç bilirim.

Yonca YILDIRIM BÖLEN
Ankara, Temmuz 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KAPULA VE BAĞIMLILIK	5
2.1 Kapula Teorisi	6
2.2 Kapula Aileleri	7
2.2.1 Eliptik kapula	7
2.2.1.1 Gaussian (Normal) kapula	7
2.2.1.2 Student t kapula	8
2.2.2 Arşimedyen kapula	10
2.2.2.1 Clayton kapula	10
2.2.2.2 Frank kapula	11
2.2.2.3 Gumbel kapula	12
2.2.2.4 Joe kapula	13
2.3 Bağımlılık Ölçüleri	15
2.3.1 Lineer korelasyon	15
2.3.2 Sıra (Rank) korelasyon	16
2.4 Kapula Tahmin Yöntemleri	17
2.4.1 En çok olabilirlik yöntemi (MLE)	17
2.4.2 Sözde en çok olabilirlik yöntemi (PMLE)	18
2.5 Uyum İyiği Testleri	18
2.6 Model Seçimi	20
3. BOX-JENKINS YÖNTEMİ	21
3.1 Box-Jenkins Tahmin Modelleri	21
3.1.1 Otoregresif model (AR)	21

3.1.2 Hareketli ortalamalar modeli (MA)	22
3.1.3 Otoregresif hareketli ortalamalar modeli (ARMA).....	22
3.1.4 Entegre otoregresif hareketli ortalamalar modeli (ARIMA).....	23
3.1.5 Mevsimsel entegre otoregresif hareketli ortalamalar modeli (SARIMA)	24
3.2 Box-Jenkins Yönteminde Model Belirleme Aşamaları.....	24
3.2.1 Model tanımlama	24
3.2.1.1 Durağanlığın belirlenmesi	25
3.2.1.2 Mevsimselliğin belirlenmesi	25
3.2.1.3 Geçici modelin belirlenmesi	26
3.2.2 Model tahmini	27
3.2.3 Modeli doğrulama	27
3.3 Model Seçimi Kriteri ve Performans Ölçümleri	27
4. UYGULAMA.....	29
4.1 Veri ve Tanımlayıcı İstatistikler	29
4.2 Marjinal Dağılımların Modellenmesi.....	30
4.3 Kapula Modellerinin Oluşturulması	43
5. SONUÇ.....	57
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	62

SİMGELER DİZİNİ

B	Gecikme Operatörü
$C, C_\theta(u, v)$	Kapula Fonksiyonu
H_0	Yokluk Hipotezi
$M(u, v)$	Fréchet-Hoeffding Üst Sınırı
$\Pi(u, v)$	Bağımsızlık Kapulası
ρ	Pearson Korelasyon Değeri
ρ_τ	Kendall's Tau Korelasyon Değeri
ρ_s	Spearman's Rho Korelasyon Değeri
ρ_k	Otokorelasyon Katsayısı
ρ_{kk}	Kısmi Otokorelasyon Katsayısı
S_n	Cramér-Von Mises Test İstatistiği
σ_e^2	Hata Kareler Toplamı
T_n	Kolmogorov-Smirnov Test İstatistiği
θ	Bağımlılık Parametresi
v	Serbestlik Derecesi
$W(u, v)$	Fréchet-Hoeffding Alt Sınırı

Kısaltmalar

ACF	Otokorelasyon Fonksiyonu
ADF	Genişletilmiş Dickey Fuller
AIC	Akaike Bilgi Ölçütü
AR	Otoregresif Model
ARIMA	Entegre Otoregresif Hareketli Ortalamalar Modeli
ARMA	Otoregresif Hareketli Ortalamalar Modeli
BIC	Bayesçi Bilgi Ölçütü
DF	Dickey-Fuller

EPDK	Enerji Piyasası Düzenleme Kurumu
FAO	Birleşmiş Milletler Gıda ve Tarım Organizasyonu
LL	Log-Olabilirlik Değeri
MA	Hareketli Ortalamalar Modeli
MAPE	Ortalama Mutlak Yüzde Hatası
MLE	En �ok Olabilirlik Yöntemi
MSE	Hata Kareler Toplamı
PACF	Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu
PMLE	Sözde En �ok Olabilirlik Yöntemi
RMSE	Kök Ortalama Kare Hatası
SARIMA	Mevsimsel Entegre Otoresif Hareketli Ortalamalar Modeli
T��K	Türkiye İstatistik Kurumu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Gaussian kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri.....	8
Şekil 2.2 Student t kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri	9
Şekil 2.3 Clayton kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri.....	11
Şekil 2.4 Frank kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri	12
Şekil 2.5 Gumbel kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri.....	13
Şekil 2.6 Joe kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri	14
Şekil 2.7 İki değişkenli farklı kapula fonksiyonlarına ait saçılım grafikleri.....	15
Şekil 4.1 Değişkenlerin zaman serisi grafikleri	31
Şekil 4.2 Durağanlığı sağlanmış serilerin ACF ve PACF grafikleri.....	34
Şekil 4.3 Mevsimsel değişim farkı alınmış serilerin ACF ve PACF grafikleri	35
Şekil 4.4 Kestirim serisi ile orijinal serinin birlikte grafiği	42
Şekil 4.5 Benzin-buğday fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	46
Şekil 4.6 Benzin-mısır fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	47
Şekil 4.7 Benzin-arpa fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	48
Şekil 4.8 Benzin-soya fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	49
Şekil 4.9 Motorin-buğday fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	53
Şekil 4.10 Motorin-mısır fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	54
Şekil 4.11 Motorin-arpa fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	55
Şekil 4.12 Motorin-soya fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri	56

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Kapulaların genel formları, üreteç fonksiyonları ve parametre aralıkları ...	14
Çizelge 4.1 Tanımlayıcı istatistikler ve normallik testi	29
Çizelge 4.2 Korelasyon matrisi	30
Çizelge 4.3 ADF testi sonuçları	31
Çizelge 4.4 Buğday serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar	36
Çizelge 4.5 Mısır serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar	37
Çizelge 4.6 Arpa serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar.....	38
Çizelge 4.7 Soya serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar.....	39
Çizelge 4.8 Benzin serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar	40
Çizelge 4.9 Motorin serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar	41
Çizelge 4.10 Seçilmiş modellerin performans ölçümleri	41
Çizelge 4.11 Cramér-von Mises uyum iyiliği testi (benzin-tarımsal ürün fiyatı çiftleri için).....	43
Çizelge 4.12 Benzin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı çifti için kapula model sonuçları	44
Çizelge 4.13 Cramér-von Mises uyum iyiliği testi (motorin-tarımsal ürün fiyatı çiftleri için).....	50
Çizelge 4.14 Motorin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı çifti için kapula model sonuçları	51

1. GİRİŞ

21. yüzyıldan itibaren uzayan insan ömrü, gelişen teknolojinin insan hayatına kattığı kaliteli ve güvenli yaşam ve sağlık alanında yaşanan önemli ilerlemeler (antibiyotiğin keşfi, salgınlarla başarılı mücadele vb.) dünya nüfusunda hızlı bir artışa sebep olmuştur. 1955 yılında 2,7 milyar olan dünya nüfusu 2021 yılı itibari ile yaklaşık olarak 8 milyar kişiye ulaşmıştır. Ancak hızla artan nüfus beraberinde bir gıda sorununu ve hayatın her alanına giren teknolojinin yarattığı artan enerji talebi ve yenilenebilir enerji üretiminde henüz istenilen seviyeye ulaşamaması da bir enerji sorununu meydana getirmiştir. Bunların yanı sıra iklim değişikliğinin tarımsal alanlar üzerine olan olumsuz etkisi ve yaşanan küresel enerji krizleri de gıda ve enerji sorununu tetikleyen faktörler olarak ön plana çıkmıştır. Birleşmiş Milletler Gıda ve Tarım Organizasyonuna (Food and Agriculture Organization of the United Nations–FAO) göre 2000 ile 2014 yılları arasında artan gıda fiyatlarından dolayı, dünya çapında bir gıda krizi ile karşı karşıya kalınmıştır. Ayrıca günümüzde yenilenebilir bir enerji kaynağı olmayan ham petrolün dünya ölçeğinde halen birincil enerji kaynağı olması da tüm dünya ekonomisini etkileyen küresel bir sorundur. Ham petrolden elde edilen benzin, motorin vb. yakıtlar, bugün elektrik üretiminden yolcu ve yük taşımacılığına, ısınmaya ve hatta tarım ürünlerinin üretiminden sanayi üretimine kadar birçok alanda kullanılan en önemli enerji kaynağıdır. Dolayısıyla insan yaşamında beslenmeden barınmaya hatta yaşamsal araç ve gereçlerin üretilmesine kadar birçok alan ham petrol fiyatlarına önemli ölçüde bağlıdır.

Ham petrol fiyatlarının önemli etkilerinden bir tanesi de gıda fiyatlarıyla ve dolaylı yoldan tarım ürünleri fiyatlarıyla arasındaki ilişkide saklıdır. Artan dünya nüfusunun yarattığı gıda talebini karşılayabilmek için başvurulacak en önemli kaynak tarım ürünleridir. Ancak tarım ürünlerinin üretiminden son tüketiciye kadar ulaştırılmasında geçen tüm süreçlerde (ekim, gübreleme, ürün toplama, taşıma, dağıtım vb.) fiyatlar konusunda belirleyici rollerden bir tanesi de ham petrole aittir.

Genel olarak ham petrol ile tarımsal ürün fiyatları arasındaki ilişki uzun yıllardır bilinmektedir. 2006 ile 2008 yılları arasında ham petrol fiyatlarına yaşanan dalgalanmalar birebir tarım ürünleri fiyatlarına yansımıştır (Nazlıoğlu ve Soytas 2012). Özellikle

Türkiye gibi petrol ithalatçısı bir ülkede bu tür bir ilişkinin daha kuvvetli olmasını beklenir. 2020 yılında yapılan bir çalışmada (Ahmid 2020) Türkiye’de tarım ürünleri fiyatları (buğday, arpa, yulaf, çavdar, mısır) ve ham petrol fiyatları arasındaki ilişki Granger nedensellik analizi ile incelenmiş ve aralarında pozitif bir korelasyon bulunmuştur. Ancak bu tür bir ilişkinin incelenmesi, kullanılan yöntem ve bağımlılık ilişkisi araştırılacak ülkenin sahip olduğu iç dinamiklere göre de değişkenlik gösterebilmektedir.

Araştırılan konu üzerinde ele alınan rastgele değişkenlerin arasındaki ilişkinin anlaşılabilmesi için aralarındaki bağımlılık yapısı bilinmelidir. Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının modellenmesinde literatürde farklı yaklaşımlar vardır, fakat bunlar bazı varsayımlar içermektedir ve bu varsayımlar sağlanmadığı takdirde bu yöntemler ile bağımlılığı modellemek doğru olmayacaktır. Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını modellemede, marjinal dağılımlar için herhangi bir varsayım gerektirmeyen kapula yaklaşımı tercih edilmektedir. Kapulalar, rastgele değişkenlerin kesin artan dönüşümleri altında değişmezlerdir. Kapulalar, tek boyutlu marjinal dağılım fonksiyonlarını çok değişkenli dağılım fonksiyonlarına birleştiren veya “çiftleyen” fonksiyonlardır. Alternatif olarak, kapulalar, tek boyutlu marjinalleri (0,1) aralığında düzgün (uniform) olan çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıdır (Nelsen 2006). Kapula yaklaşımı, özellikle değişkenler normal olmadığında, marjinal dağılımları verilen ortak dağılım fonksiyonlarını türetmek için kullanışlı bir yöntemdir. Kapulalar rastgele değişken çiftleri için parametrik olmayan bağımlılık ölçülerini tanımlamada kullanılabilir. Kapulalar literatürde bilinen ortak dağılım ve bağımlılık modelleme yaklaşımlarının kullanışlı uzantıları ve genellemeleridir. Birçok mikroekonometrik modelleme durumu, ortak dağılımlarla kolayca birleştirilemeyen marjinal dağılımlara sahiptir. Bu genellikle kesikli veya sınırlı bağımlı değişken modellerinde ortaya çıkar. Birbiriyle ilişkili iki değişken farklı parametrik ailelerden geldiğinde ortak modelleme özellikle zordur. Örneğin, bir değişken çok terimli ayrık bir seçimi karakterize edebilir ve diğeri bir olay sayısını ölçebilir. Farklı ailelerden marjinallere dayalı çok az parametrik ortak dağılım olduğundan, kapula yaklaşımı ortak dağılım oluşturmak için genel ve doğrudan bir yaklaşım sağlar (Trivedi ve Zimmer 2007).

H. Koirala ve arkadaşları tarafından (Koirala vd. 2015) yapılan bir çalışmada kapula methodu kullanılarak enerji fiyatları ve tarımsal ürün fiyatları arasındaki bağımlılık ilişkisi test edilmiştir. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar Clayton kapula modeli kullanıldığında tarımsal ürün fiyatları ile enerji fiyatları arasında büyük bir bağımlılık ilişkisinin olduğunu göstermiştir. Phattanan ve arkadaşları tarafından (Boonyanuphong vd. 2013) yapılan bir çalışmada ham petrol fiyatı ve tarımsal ürün fiyatları (mısır, soya yağı ve palm yağı) arasındaki bağımlılık kapula-GARCH modeli kullanılarak araştırılmıştır. Çalışma sonucu, ham petrol fiyatı ve tarımsal ürün fiyatları arasında simetrik kuyruk bağımlılığı ve bu ikisi arasındaki birlikte hareketin çoğunlukla güçlü olduğunu göstermiştir. Bu çalışmalara benzer birçok çalışma, farklı kapula metodları ve farklı ülkelerdeki tarımsal ürün fiyatları baz alınarak yapılmıştır. Chang ve Su (Chang ve Su 2010) tarafından EGARCH modeli kullanılarak yapılan bir çalışmada soya fasulyesi fiyatları ile ham petrol fiyatları arasında güçlü bir ilişki olduğu görülmüştür. Buna rağmen, Zhang ve arkadaşları tarafından (Zhang vd. 2010) VECM modeli ile yapılan bir çalışmada ise tarım ürünleri fiyatları (mısır, pirinç, şeker, soya fasulyesi ve buğday) ile enerji fiyatları (etanol, gasoline, petrol) arasında araştırılan dönem için doğrudan bir ilişki kurulamamıştır. Ancak bu tür bir bağımlılık ilişkisi de özgün bir yapıya sahip olup çeşitli dinamikler aracılığıyla değişebilmektedir. Regular vine kapula metodu kullanılarak yapılan bir çalışmada mısır, soya fasulyesi ve buğday ile etanol ve ham petrol arasındaki ilişki araştırılmıştır (Sukcharoen 2018). Sonuçlar, ham petrol fiyatları ve tarımsal ürün fiyatlarının düşüş eğilimindeyken birbirleri ile bağımlı olduklarını ancak yükseliş trendinde birbirlerinden bağımsız hareket ettiklerini göstermiştir. Bu ilginç durum daha önce Reboredo (Reboredo 2012) tarafından önerilen yükseliş trendi olduğu zaman ham petrol fiyatı ve tarımsal ürünlerin fiyatı arasında bağımlılık ilişkisi yoktur sonucu ile uyum içindedir. Bu çalışmalardan anlaşılabileceği üzere kullanılan metod, temel alınan veri seti ve ülkelerin sahip olduğu iç dinamikler bu tür bir bağımlılık ilişkisinin araştırılmasında önemli bir etkiye sahiptir. Ülkemiz petrol açısından dışarı bağımlıdır. Ancak ülkemizde henüz tarımsal ürün ve ham petrol fiyatları arasındaki ilişki kapula metodu kullanılarak detaylı bir şekilde incelenmemiştir.

Bu tez çalışmasında Türkiye’de 2005-2020 yılları arasındaki dönemi kapsayan buğday, mısır, arpa ve soya fasulyesi fiyatları ile benzin ve motorin fiyatları arasındaki bağımlılık

ilişkisi kapula yöntemi ile incelenmiştir. Değişken çiftleri arasındaki bağımlılık yapısını modellemek için önce her bir serinin marjinalleri Box-Jenkins yöntemiyle modellenmiş ve sonrasında uygun kapula fonksiyonu belirlenerek bağımlılık yapısı ortaya konulmuştur. Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde tarımsal ürün fiyatları ve ham petrol fiyatları arasındaki ilişki ortaya konmuş ve bu alanda yapılmış olan bilimsel çalışmaların özeti sunulmuştur. 2. bölümde kapula teorisi, kapula aileleri, kapula tahmin yöntemleri ve bağımlılık ölçüleri tanıtılmıştır. 3. bölümde Box-Jenkins yönteminin aşamalarına kısaca yer verilmiştir. 4. bölümde 2005-2020 yılları arasında Türkiye'deki tarımsal ürünlerden buğday, arpa, soya ve mısırın üretici fiyatları ile benzin ve motorin pompa fiyatları arasındaki ilişki için uygulama yapılmıştır. Son olarak 5. bölümde ise söz konusu uygulamadan elde edilen çıktılar değerlendirilmiş ve sonuçlar tartışılmıştır.

2. KAPULA VE BAĞIMLILIK

Kapula kelimesi Latince bir kelime olup bağ, bağlantı, ilişki anlamlarına gelmektedir. Kapula kelimesi matematiksel veya istatistiksel anlamda ilk olarak Abe Sklar (Sklar 1959) tarafından, çok değişkenli dağılım fonksiyonları oluşturmak için tek boyutlu dağılım fonksiyonlarını "birleştiren" fonksiyonları tanımlayan (şimdi onun adını taşıyan) teoremden kullanılmıştır (Nelsen 2006). Kapula terimi Sklar tarafından tanıtılmış olsa da kapula fikri daha önce bir dizi metinde görüldü. Özellikle bu fonksiyonlar için mümkün olan en iyi sınırları belirleyen ve kesinlikle artan dönüşümler altında değişmez olan bağımlılık ölçülerini inceleyen Hoeffding'de (1940, 1941) ortaya çıkmıştır (Trivedi ve Zimmer 2007).

Kapulalar, hem çok değişkenli dağılımları belirlemede hem de çok değişkenli verileri modellemede yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir kapula, çok değişkenli bir dağılımın bileşenleri arasındaki bağımlılığı karakterize eder. Kapulalar tam bir ortak dağılım oluşturmak için herhangi bir tek değişkenli marjinal dağılım seti ile birleştirilebilirler. Sonuç olarak, kapulaların kullanımı, mevcut olan çok çeşitli tek değişkenli modellerden yararlanmamızı sağlar (Rubbert ve Matteson 2011).

Nelsen tarafından kapula fonksiyonu çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını kendi tek boyutlu marjinal dağılım fonksiyonlarına bağlayan bir fonksiyon olarak ifade edilmiştir. Daha açık bir ifade ile kapula fonksiyonu, tek boyutlu marjinal dağılımları $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün olarak dağılmış olan çok boyutlu dağılım fonksiyonlarıdır (Nelsen 2006).

Kapulaların, marjinal dağılımların ve ortak dağılımın ayrı ayrı modellenmesine imkan sağlaması, artan ve sürekli dönüşümler altında değişmemeleri ve asimetric bağımlılık hakkında bilgi vermesi ile rastgele değişkenlerin belirli bir bağımlılık yapısına sahip çok değişkenli dağılımlarını elde etmede kapula teorisi başarılı araçtır.

2.1 Kapula Teorisi

Tanım 2.1 Kapula aşağıdaki özellikleri sağlayan $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir fonksiyondur (Nelsen 1999).

1. $C(0, v) = C(u, 0) = 0, \forall u, v \in [0,1]$
2. $C(1, v) = v, C(u, 1) = u, \forall u, v \in [0,1]$
3. $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ ve $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ iken,
 $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$

Teorem 2.1 Sklar Teoremi, kapulalar teorisinin yapı taşıdır. Bu teorem, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarının tek değişkenli marjinal dağılım fonksiyonları arasında ilişki kurar.

$H(x,y)$, marjinaler $F(x)$ ve $G(y)$ olan ortak bir dağılım fonksiyonu olsun. Her $x, y \in R$ için

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir C kapulası vardır. Burada F ve G sürekli ise, C tektir. Ters durumda C ; F ve G fonksiyonlarının değer kümelerinin kartezyen çarpımı üzerinde tek türlü tanımlanmıştır. Eğer C bir kapula ve F ve G dağılım fonksiyonları ise o zaman (2.1) ile tanımlanan H fonksiyonu marjinaleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonudur. F ve G sürekli ise bu durumda

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (2.2)$$

olur (Nelsen 2006).

Teorem 2.2 Fréchet-Hoeffding Sınırları

Herhangi bir C kapulası $\forall u, v \in [0,1]$ için

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada;

$$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\} \quad (2.4)$$

$$M(u, v) = \min\{u, v\} \quad (2.5)$$

olarak tanımlanmıştır (Nelsen 2006).

(2.4)'te verilen W 'ye Fréchet-Hoeffding üst sınırı, (2.5)'te verilen M 'ye Fréchet-Hoeffding alt sınırı denir. Ayrıca $\Pi(u, v) = u \cdot v$ çarpım kapulası da bağımsızlık kapulası olarak adlandırılır. (2.3) eşitsizliği kapulalar kümesi üzerinde kısmî bir sıralama verir. Daha açık bir ifadeyle, Fréchet-Hoeffding alt sınır kapulası her kapuladan küçüktür ve Fréchet-Hoeffding üst sınır kapulası her kapuladan büyüktür.

2.2 Kapula Aileleri

Kapula fonksiyonu ortak dağılımın şeklini belirleme üzerinde etkilidir. Bu nedenle kapula fonksiyonunun seçimi önem kazanmaktadır. Kuyruk bağımlılığından, kuyruk bağımsızlığına ve farklı asimetri türlerini tanımlayan birçok kapula fonksiyonu vardır. Bu bölümde eliptik ve arşimedyen kapula ailelerine yer verilmiştir.

2.2.1 Eliptik kapula

Eliptik kapulalar, eliptik bir forma, kuyruklarda simetriye sahip olan eliptik dağılımlı kapulalardır. Bütün eliptik dağılımlar radyal simetriktir. Dolayısıyla eliptik kapulaların radyal simetriye sahip olmaları ve kapalı formda ifadelerinin olmaması dezavantaj oluşturmaktadır. Bu aile içindeki önemli kapulalar Gaussian ve Student t kapulasıdır (Hofert vd. 2018). Bu bölümde Gaussian ve Student t kapula tanıtılacaktır.

2.2.1.1 Gaussian (Normal) kapula

İki değişkenli Gaussian kapula, sıfır ortalama vektör, birim varyanslar ve korelasyon ρ ile iki değişkenli bir normal dağılım kullanılarak ve Sklar Teoreminin ters ifadesi (2.2) uygulanarak oluşturulmaktadır.

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_G(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho) \quad (2.6)$$

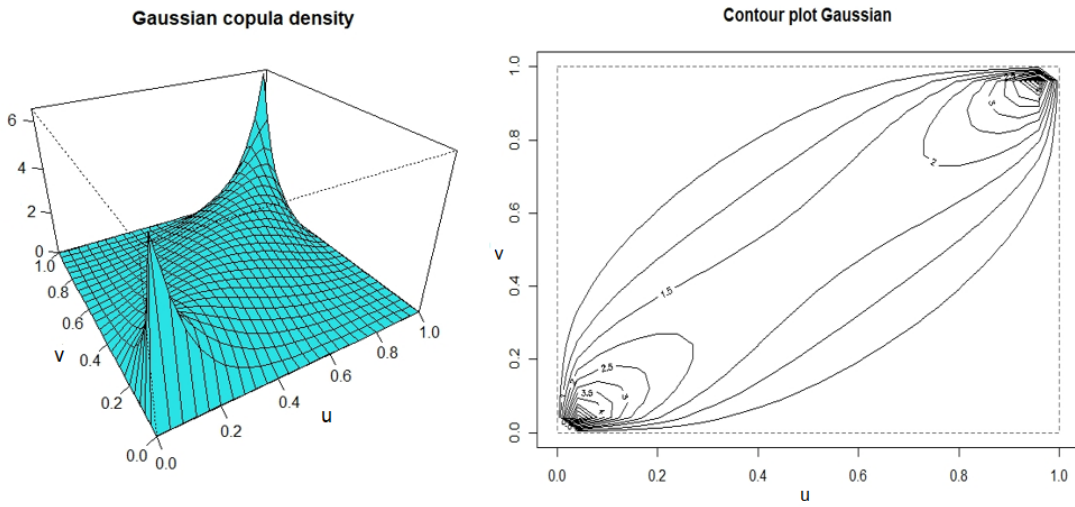
burada $\Phi(\cdot)$ standart normal dağılım fonksiyonunu ve $\Phi_G(\cdot, \cdot; \rho)$ ise $[-1, 1]$ aralığındaki ρ korelasyonlu, birim varyanslı, ortalaması sıfır olan iki değişkenli normal dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Bağımlılık parametresi ρ , sıfıra yaklaştıkça bağımsızlık kapulasına, 1'e yaklaştıkça Fréchet-Hoeffding üst sınırına, -1'e yaklaştıkça Fréchet-

Hoeffding alt sınırına karşılık gelmektedir. İki değişkenli Gaussian kapulaya karşılık gelen yoğunluk fonksiyonu ise;

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\phi(x_1)\phi(x_2)} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x_1^2+x_2^2)-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2.7)$$

burada $x_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ ve $x_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ şeklinde ifade edilmiştir.

Şekil 2.1'de Gaussian kapulasına ait yoğunluk fonksiyonunun üç boyutlu grafiği ile kontur çizimi verilmiştir.



Şekil 2.1 Gaussian kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri

Şekil 2.1'deki grafikler için bağımlılık parametresi $\rho = 0.8$ ve $n = 2000$ bağımsız gözlem alınmıştır. Gaussian kapulanın yoğunluk fonksiyonu grafiklerinden simetrik bir kapula olduğu anlaşılmaktadır.

2.2.1.2 Student t kapula

İki değişkenli Student t kapula, sıfır ortalama, ρ korelasyon ve v serbestlik derecesi ile iki değişkenli bir Student t dağılım kullanılarak oluşturulmaktadır.

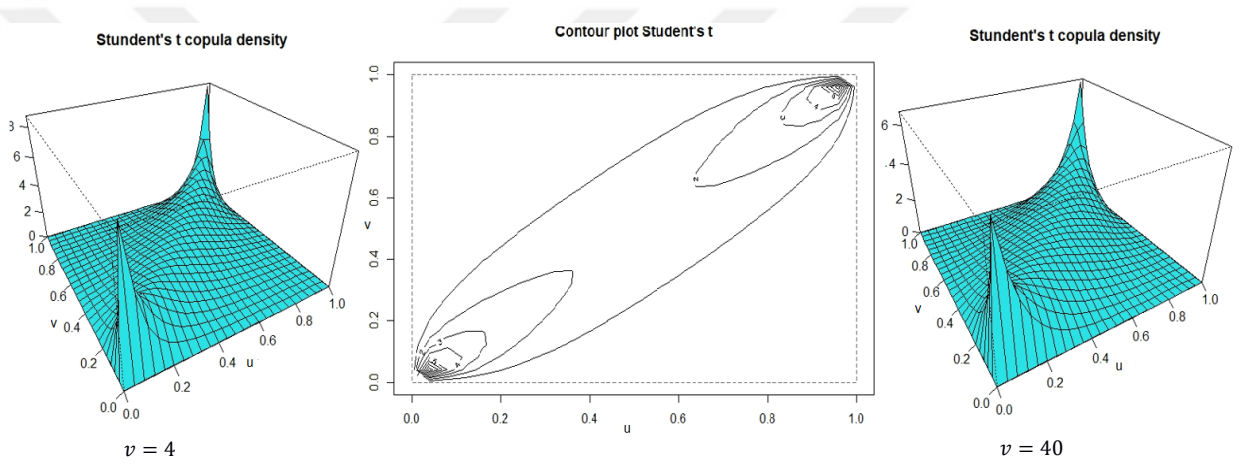
$$\begin{aligned} C(u_1, u_2; v, \rho) &= \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \frac{t(T_v^{-1}(v_1), T_v^{-1}(v_2); v, \rho)}{t_v(T_v^{-1}(v_1))t_v(T_v^{-1}(v_2))} dv_1 dv_2 \\ &= \int_{-\infty}^{b_1} \int_{-\infty}^{b_2} t(x_1, x_2; v, \rho) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

burada $b_1 = T_v^{-1}(u_1)$ ve $b_2 = T_v^{-1}(u_2)$ değişken dönüşümleri uygulanmıştır. T_v^{-1} , v serbestlik dereceli student t dağılımının tersini ifade eder. Student t kapulası v ve ρ olmak üzere iki bağımlılık parametresine sahiptir. İki değişkenli Student t kapulaya karşılık gelen yoğunluk fonksiyonu ise;

$$c(u_1, u_2; v, \rho) = \frac{t(T_v^{-1}(v_1), T_v^{-1}(v_2); v, \rho)}{t_v(T_v^{-1}(v_1))t_v(T_v^{-1}(v_2))} \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir.

Şekil 2.2’de Student t kapulasına ait yoğunluk fonksiyonunun üç boyutlu grafiği ile kontur çizimi verilmiştir.



Şekil 2.2 Student t kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri

Şekil 2.2’de farklı iki yoğunluk fonksiyonundan elde edilen grafiklerde her iki fonksiyon için $\rho = 0.8$, serbestlik dereceleri sırasıyla $v = 4$ ve $v = 40$ ve $n = 2000$ bağımsız gözlem alınmıştır. Büyük serbestlik derecesinde Student t kapulanın Gaussian kapulaya benzerlik gösterdiği görülmektedir. Yoğunluk fonksiyonu grafiklerinden ve kontur çiziminden Student t kapulasının da simetrik bir kapula olduğu anlaşılmaktadır.

2.2.2 Arşimedyan kapula

Arşimedyan kapulalar, oldukça basit formda ve doğrudan oluşturulabildiklerinden yaygın olarak kullanılır. Arşimedyan kapula tanımı üreteç fonksiyonuna dayanmaktadır.

Tanım 2.2 Bir üreteç fonksiyonu $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $\varphi(0) = 1$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$
- ii. $\varphi(t)$ sürekli
- iii. $\varphi(t)$ $[0, \infty)$ üzerinde artan ve $[0, \inf\{t: \varphi(t) = 0\})$ üzerinde kesinlikle azalan

d -boyutlu arşimedyen kapulalar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C_\varphi = \varphi(\varphi^{-1}(u_1) + \dots + \varphi^{-1}(u_d)), \quad u \in [0,1]^d \quad (2.10)$$

burada φ üreteç fonksiyonu ve φ^{-1} φ 'nın ters fonksiyonudur.

Arşimedyen kapulaların deneysel uygulamalarda sıklıkla kullanılmasının sebebi denklem 2.10'un farklı üreteç fonksiyonlarının seçimi için geniş aralıklarda bağımlılık özellikleri sağlamasıdır. Eliptik kapulalara kıyasla arşimedyen kapulalarının, tek bir bağımlılık parametresi vardır ve birçok farklı formlara sahiptir (Hyrš ve Schwarz 2015). Bu bölümde arşimedyen kapula ailesine ait Clayton, Frank, Gumbel ve Joe kapulaları tanıtılacaktır.

2.2.2.1 Clayton kapula

Clayton kapula üreteç fonksiyonu;

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1) \quad (2.11)$$

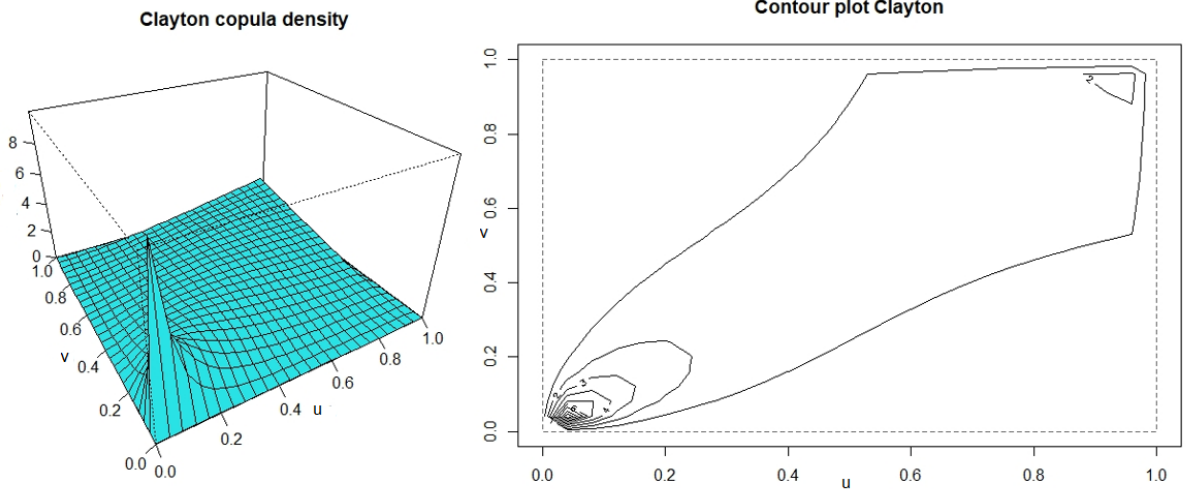
ve

iki değişkenli Clayton kapula;

$$C(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $(0, \infty)$ aralığında tanımlı olan θ bağımlılık parametresidir. Bağımlılık parametresi θ , sonsuza yaklaştıkça tam bağımlılığa, sıfıra yaklaştıkça bağımsızlık kapulasına karşılık gelir.

Şekil 2.3'de Clayton kapulasına ait yoğunluk fonksiyonunun üç boyutlu grafiği ile kontur çizimi verilmiştir.



Şekil 2.3 Clayton kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri

Şekil 2.3'deki grafikler için bağımlılık parametresi $\theta = 1.5$ ve $n = 2000$ bağımsız gözlem alınmıştır. Grafikler incelendiğinde Clayton kapulanın asimetrik bir kapula olduğu görülmektedir.

2.2.2.2 Frank kapula

Frank kapula üreteç fonksiyonu;

$$\varphi(t) = -\log\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right) \quad (2.13)$$

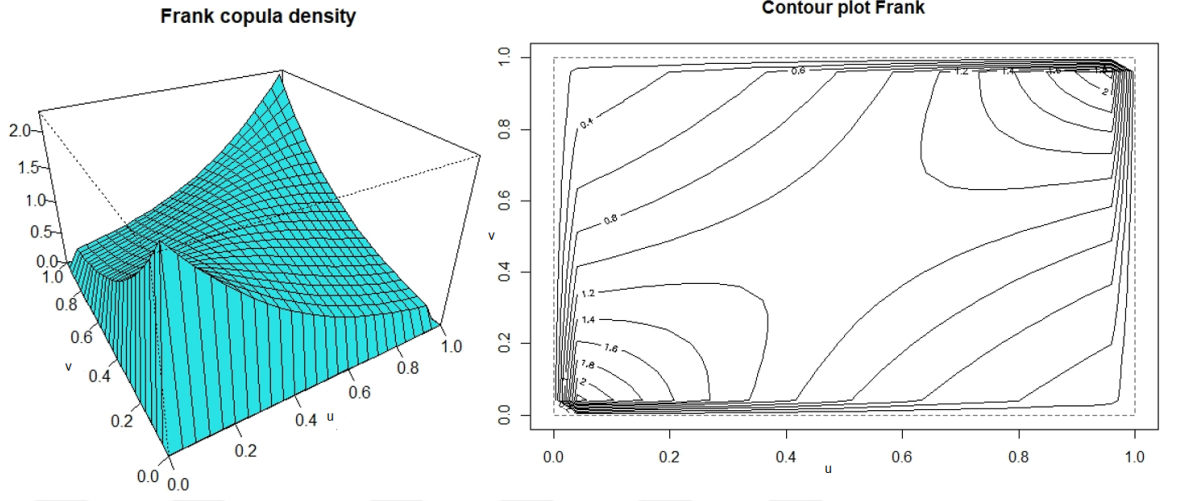
ve

iki değişkenli Frank kapula;

$$C(u_1, u_2; \theta) = -\theta^{-1} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right\} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilir. Burada bağımlılık parametresi θ , $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ aralığında değer almaktadır. $\theta \rightarrow 0^+$ iken bağımsızlık kapulasına, $\theta \rightarrow \infty$ iken Fréchet-Hoeffding üst sınırına, $\theta \rightarrow -\infty$ iken Fréchet-Hoeffding alt sınırına karşılık gelmektedir. Frank kapula diğer kapulalardan farklı olarak marjinaler arasında negatif bağımlılığa izin vermektedir. Dolayısıyla uygulamada diğer kapulalardan daha çok tercih edilir (Trivedi ve Zimmer 2005).

Şekil 2.4’de Frank kapulasına ait yoğunluk fonksiyonunun üç boyutlu grafiği ile kontur çizimi verilmiştir.



Şekil 2.4 Frank kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri

Frank kapula için bağımlılık parametresi $\theta = 2.5$ ve $n = 2000$ bağımsız gözlemden şekil 2.4’deki grafikler oluşturulmuştur. Grafikler incelendiğinde Frank kapulanın simetrik bir arşimedyan kapula olduğu görülmektedir.

2.2.2.3 Gumbel kapula

Gumbel kapula üreteç fonksiyonu;

$$\varphi(t) = (-\log t)^\theta \quad (2.15)$$

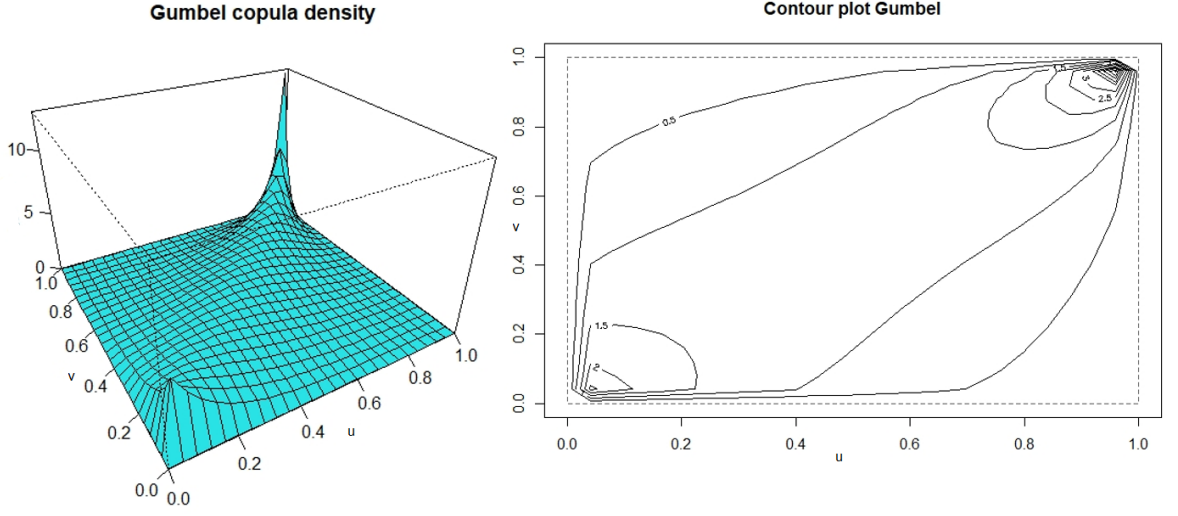
ve

iki değişkenli Gumbel kapula;

$$C(u_1, u_2; \theta) = \exp\{-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\} \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir. Burada bağımlılık parametresi θ $[1, \infty)$ aralığında değer almaktadır. $\theta = 1$ iken bağımsızlık kapulasına, $\theta \rightarrow \infty$ iken Fréchet-Hoeffding üst sınırına karşılık gelmektedir. Gumbel kapula marjinaler arasındaki negatif bağımlılığa izin vermemektedir.

Şekil 2.5’de Gumbel kapulasına ait yoğunluk fonksiyonunun üç boyutlu grafiği ile kontur çizimi verilmiştir.



Şekil 2.5 Gumbel kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri

Şekil 2.5’deki grafikler için Gumbel kapulanın bağımlılık parametresi $\theta = 1.5$ ve $n = 2000$ bağımsız gözlem alınmıştır. Gumbel kapulanın asimetrik bir kapula olduğu anlaşılmaktadır.

2.2.2.4 Joe kapula

Joe kapula üreteç fonksiyonu;

$$\varphi(t) = -\log(1 - (1 - t)^\theta) \quad (2.17)$$

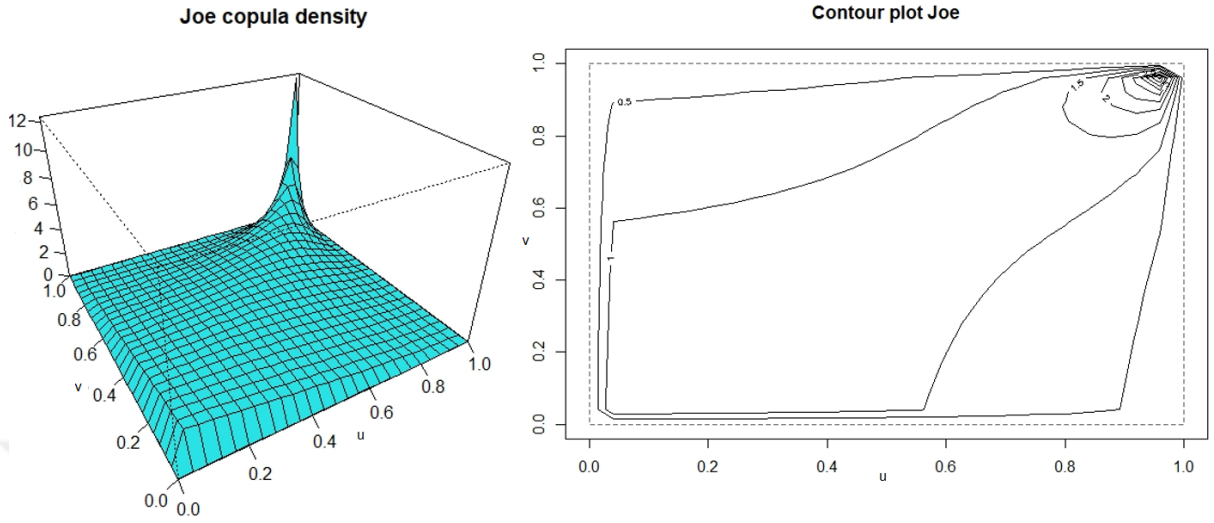
ve

iki değişkenli Joe kapula;

$$C(u_1, u_2; \theta) = 1 - [(1-u_1)^\theta + (1-u_2)^\theta - (1-u_1)^\theta(1-u_2)^\theta]^{1/\theta} \quad (2.18)$$

şeklinde ifade edilir. Burada bağımlılık parametresi θ $[1, \infty)$ aralığında değer almaktadır. $\theta = 1$ iken bağımsızlık kapulasına, $\theta \rightarrow \infty$ iken Fréchet-Hoeffding üst sınırına karşılık gelmektedir. Gumbel kapula gibi Joe kapula da marjinaler arasındaki negatif bağımlılığa

izin vermemektedir. Şekil 2.6’da Joe kapulasına ait yoğunluk fonksiyonunun üç boyutlu grafiği ile kontur çizimi verilmiştir.



Şekil 2.6 Joe kapulasına ait yoğunluk fonksiyonun grafikleri

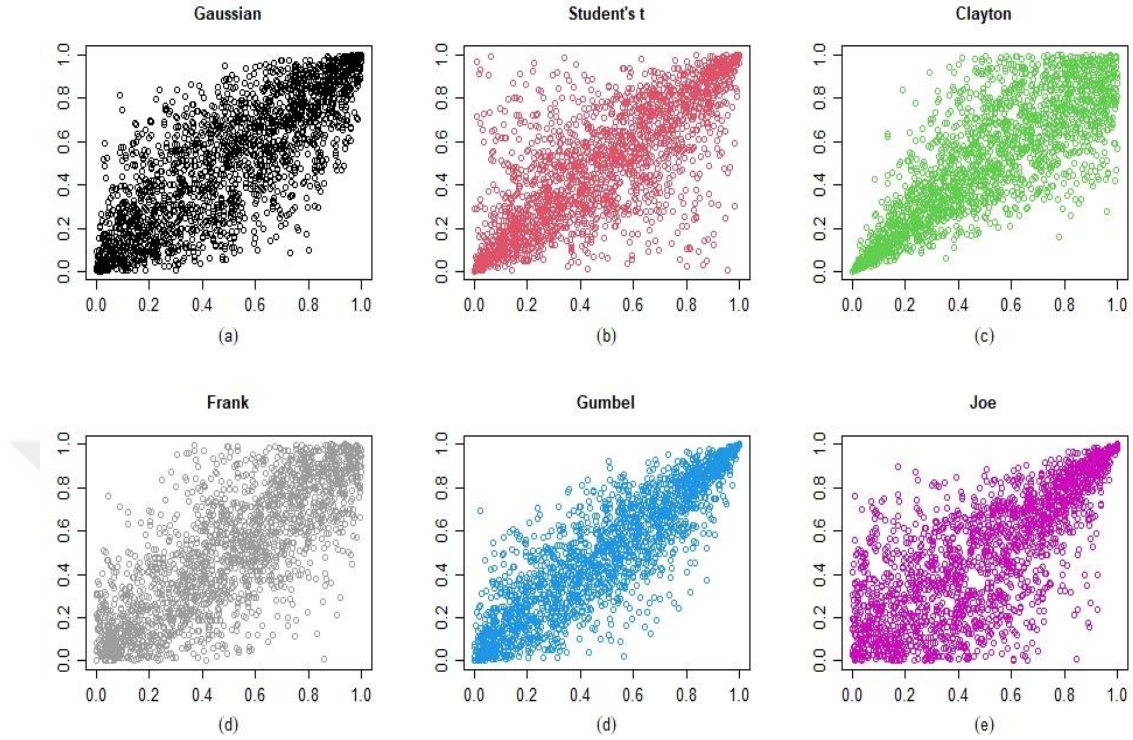
Joe kapulasının bağımlılık parametresi $\theta = 1.5$ ve $n = 2000$ bağımsız gözlemden şekil 2.6’daki grafikler oluşturulmuştur. Grafikler incelendiğinde Joe kapulanın asimetrik bir arşimedyan kapula olduğu görülmektedir.

Bu çalışmada kullanılan kapula ailelerinin genel kapalı formları ve parametrelerine ilişkin parametre aralıkları çizelge 2.1’de verilmiştir.

Çizelge 2.1 Kapulaların genel formları, üreteç fonksiyonları ve parametre aralıkları

Kapula	Genel Form	Üreteç	Parametre
Gaussian	$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_G(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho)$	-	$\rho \in [-1, 1]$
Student t	$C(u_1, u_2; v, \rho) = t_{p,v}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2))$	-	$\rho \in [-1, 1]$ $v > 0$
Clayton	$C(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\theta \in (0, \infty)$
Frank	$C(u_1, u_2; \theta) = -\theta^{-1} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right\}$	$\varphi(t) = -\log \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$\theta \in (0, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel	$C(u_1, u_2; \theta) = \exp \{ -[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta} \}$	$\varphi(t) = (-\log t)^\theta$	$\theta \in [1, \infty)$
Joe	$C(u_1, u_2; \theta) = 1 - [(1-u_1)^\theta + (1-u_2)^\theta - (1-u_1)^\theta(1-u_2)^\theta]^{1/\theta}$	$\varphi(t) = -\log(1 - (1-t)^\theta)$	$\theta \in [1, \infty)$

Şekil 2.7’de iki rastgele değişkenli 6 farklı kapula fonksiyonu için saçılım grafikleri sunulmuştur.



Şekil 2.7 İki değişkenli farklı kapula fonksiyonlarına ait saçılım grafikleri

Bağımlılık parametresi; $\nu = 4$ olan Student t ve Gaussian kapulaları için $\rho = 0.8$, Clayton, Frank, Gumbel ve Joe kapulaları için $\theta = 3.5$ olarak alınmıştır. Bu kapula fonksiyonlarından $n = 2000$ bağımsız gözlemden şekil 2.7’deki saçılım grafikleri oluşturulmuştur. Eliptik ve arşimedyen kapula ailelerinin kendi içlerinde bağımlılık parametresi aynı alınmış olsa da grafiklerden kapulaların farklı saçılımlar sergilediği görülmektedir. Dolayısıyla her bir kapula farklı bağımlılık yapısı ortaya koymaktadır.

2.3 Bağımlılık Ölçüleri

2.3.1 Lineer korelasyon

Kapulalar bağımlılık yapısıyla bağlantılı olduklarından bağımlılık ölçüleriyle de ilgili olmalılar. En yaygın kullanılan bağımlılık ölçüsü Pearson korelasyon ölçüsüdür. İki değişken arasındaki sadece doğrusal ilişkiyi ölçmektedir. İkinci momentleri sonlu iki

rastgele değişken X_1 ve X_2 arasındaki lineer korelasyon katsayısı ρ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} \quad (2.19)$$

Pearson korelasyon katsayısı $[-1,1]$ aralığında değerler alır. X_1 ve X_2 rastgele değişkenleri bağımsız ise $\rho(X_1, X_2) = 0$ 'dır. $\rho(X_1, X_2) = 1$ ise X_1 ve X_2 pozitif güçlü bağımlılığa, $\rho(X_1, X_2) = -1$ ise X_1 ve X_2 negatif güçlü bağımlılığa sahiptir.

2.3.2 Sıra (Rank) korelasyon

Kendall tau ve Spearman rho sıra sayı bazlı ve marjinallerin monoton dönüşümlerine göre değişmez olan bağımlılık ölçüleridir ve $[-1,1]$ değer aralığındadırlar. Bağımlılık ölçülerinin değeri marjinal dağılımlara bağlı olmadığından ilişkili kapulaları cinsinden ifade edilebilirler.

(X_1, X_2) , sürekli marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla F_1 , F_2 ve ortak dağılım fonksiyonları F olan iki değişkenli rastgele vektör olmak üzere;

Spearman rho aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)) \quad (2.20)$$

ve Kendall tau ise X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerin uyum olasılığından uyumsuzluk olasılığının çıkarılması ile elde edilir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P[(X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{22}) > 0] - P[(X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{22}) < 0] \quad (2.21)$$

burada (X_{11}, X_{12}) ve (X_{21}, X_{22}) , F dağılımlı iki bağımsız rastgele değişken çiftleridir. $\rho_\tau(X_1, X_2)$ 'nin ilk terimi $P[(X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{22}) > 0]$ uyum olasılığını, ikinci terimi $P[(X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{22}) < 0]$ de uyumsuzluk olasılığını vermektedir.

Spearman rho ve Kendall tau kapula cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir (Czado 2019).

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3 \quad (2.22)$$

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \quad (2.23)$$

2.4 Kapula Tahmin Yöntemleri

Kapula parametresi değişkenler arasındaki bağımlılığın yönünü ve miktarını göstermektedir. Bu parametre, kapula fonksiyonunun niteliğine göre her bir kapula fonksiyonu için farklı değer aralıklarına sahip bir katsayıdır. Ayrıca bu katsayı kapula üretici fonksiyonlarında ve kapula formüllerinde de bulunmaktadır. Kapula parametresinin tahmininde parametrik ve parametrik olmayan tahmin yöntemleri kullanılabilir. En çok olabilirlik yöntemi ile marjinallere ilişkin çıkarsama yöntemi parametrik yöntem, sözde en çok olabilirlik yöntemi yarı parametrik yöntem ve Kendall tau katsayısını temel alan yöntem ile Spearman'ın rho katsayısını temel alan yöntem ise parametrik olmayan yöntemler olarak özetlenebilir. Bu bölümde çalışmada kullanılan sonuç çıkarım yöntemlerinden en çok olabilirlik ile sözde en çok olabilirlik yöntemleri tanıtılacaktır.

2.4.1 En çok olabilirlik yöntemi (MLE)

$\{C_\theta\}; X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenleri arasında bulunan bağımlılık yapısını temsil ettiği varsayılan bir kapula ailesi olduğu düşünölsün. Marjinal yoğunluk fonksiyonlarını $f_j(x_j) = \frac{\partial F_j(x_j)}{\partial x_j}; j = 1, 2, \dots, n$ ve kapula yoğunluk fonksiyonu $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n (C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)}$ ile gösterilsin.

Bu durumda $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenlerine ilişkin olabilirlik fonksiyonu

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (2.24)$$

dir. Örnek veri matrisi $S = \{x_{1t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ olsun. Buna göre, log-olabilirlik fonksiyonu

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt})) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}) \quad (2.25)$$

olur. Burada θ , hem marjinallerin hem de kapulaların tüm parametrelerinin kümesidir.

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta) \quad (2.26)$$

$l(\theta)$ fonksiyonunu maksimize eden $\hat{\theta}$, en çok olabilirlik tahmin edicisidir (Cherubini vd. 2004).

2.4.2 Sözde en çok olabilirlik yöntemi (PMLE)

c_θ yoğunluğuna sahip C_θ kapulasının kesinlikle sürekli olmasını gerektiren sözde en çok olabilirlik yöntemi, basit sıra sayılarına dayalı

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ c_\theta \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\} \quad (2.27)$$

log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum hale getirecek parametrenin tahminini elde eder. Klasik log-olabilirlik fonksiyonu,

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \{ c_\theta (F(X_i), G(Y_i)) \} \quad (2.28)$$

ifadesinde bilinmeyen F ve G marjinal dağılım fonksiyonlarının yerine

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = \frac{R_i}{n+1} \quad G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(Y_i \leq y) = \frac{S_i}{n+1} \quad (2.29)$$

R_i ve S_i , X_i ve Y_i rastgele değişkenlerinin gözlem değerlerinden elde edilen sıra sayıları değeridir. Bu yöntem bağımlılık parametresi θ 'nın gerçek sayı olmasını gerektirmedikten, genellikle diğer yöntemlerle kıyaslandığında uygulanabilirliği daha yüksektir (Genest ve Favre 2007).

2.5 Uyum İyiliği Testleri

Yapılan deneysel çalışmada, belirlenen kapula modelinin verilere ne kadar uyduğunun bilinmesi gerekir. Bir kapula fonksiyonunun modellenmesi, hem marjinallerin hem de ortak dağılımın modellenmesi anlamına gelir. Bu nedenle, uyum iyiliği ölçüleri, önerilen bir kapulanın uyumunu değerlendirmek ve marjinal dağılımların belirlenmesini test etmek için önemlidir (Cherubini vd. 2004).

Kapulalar için uyum iyiliği testi; çok değişkenli bir dağılımın bağımlılık yapısının spesifik parametrik bir C_0 kapulası tarafından iyi bir şekilde temsil edildiği hipotezinin testidir. Hipotez $H_0: C \in C_0$ şeklinde oluşturulur, burada C_0 çalışılan kapula ailesidir ve $C_0 = \{C_\theta: \theta \in \mathcal{O}\}$ 'dir. Rastgele bir vektörün altında yatan kapula C 'nin bileşenlerinin

sürekli, kesinlikle artan dönüşümleri tarafından değişmez olduğu göz önüne alındığında, H_0 yokluk hipotezinin testi için en uygun seçeneğin ranklar gibi bu dönüşümler kümesine göre maksimum değişmez istatistiklere dayanan çıkarımdan oluştuğu görülmektedir. Tüm uyum iyiliği testleri biçimsel olarak sıralamaya dayalıdır. Bu testler ranklardan elde edilen sözde gözlemlerin toplanmasının fonksiyonları olarak görülebilirler. $U_1 = (U_{11}, \dots, U_{1d}), \dots, U_n = (U_{n1}, \dots, U_{nd})$ sözde gözlemler yani $U_{ij} = \frac{R_{ij}}{(n+1)}$ şeklinde ifade edilir. $U_1, \dots, U_n$ sözde gözlemler $\mathcal{C}$ kapulasının altından bir örnek olarak yorumlanabilir. $U_1, \dots, U_n$ sözde gözlemler, $H_0: C \in \mathcal{C}_0$ testi için maksimum değişmez istatistikleri oluşturur. Onların içerdiği bilgi, ilişkili deneysel dağılım tarafından uygun bir şekilde özetlenir. Deneysel kapula aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(U_{i1} \leq u_1, \dots, U_{id} \leq u_d), \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d \quad (2.30)$$

Uyum iyiliği testleri C_n ile H_0 doğruluğu altında elde edilen C 'nin bir tahmini C_{θ_n} arasındaki mesafeyi karşılaştırmayı içerir. Burada $\theta_n = \mathcal{T}_n(U_1, \dots, U_n)$ sözde gözlemlerden türetilen bir θ tahminini temsil eder.

Deneysel süreç üzerine tanımlı uyum iyiliği testleri;

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n}) \quad (2.31)$$

şeklinde ifade edilir. Bilinen Cramér-von Mises ve Kolmogorov-Smirnov istatistiklerinin rank tabanlı versiyonları aşağıda verilmiştir.

Cramér-von Mises test istatistiği,

$$S_n = \int_{[0,1]^d} \mathbb{C}_n(\mathbf{u})^2 dC_n(\mathbf{u}) \quad (2.32)$$

ve

Kolmogorov-Smirnov test istatistiği,

$$T_n = \sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |\mathbb{C}_n(\mathbf{u})| \quad (2.33)$$

şeklinde ifade edilirler. Bu istatistiklerin büyük değerleri H_0 yokluk hipotezinin reddedilmesine yol açar. Yaklaşık olarak p değerleri $\mathbb{C}_n$ sürecindeki asimptotik davranışa bağlı sınırlayıcı dağılımlardan elde edilebilir. S_n ve T_n 'nin sınırlayıcı dağılımları birleşik sıfır hipotezi altındaki kapula ailesi ve özellikle bilinmeyen parametre değeri θ 'ya bağlıdır. Sonuç olarak, test istatistiklerinin asimptotik dağılımı tablolastırılmaz ve yaklaşık p değerleri özel olarak uyarlanmış Monte Carlo yöntemleri ile elde edilebilir (Genest vd. 2009).

2.6 Model Seçimi

Farklı kapula fonksiyonları farklı bağımlılık yapıları oluşturur. Böylece bağımlılık yapıları araştırılırken, birçok kapula tahmini elde edilebilir ve veri için en uygun modelin seçimi yapılabilir. Kapula tahmininde ilk adım çok değişkenli marjinal dağılımların belirlenmesi ve tahminlerin yapılmasıdır. İkinci adımda bir kapula fonksiyonunun belirlenmesi gerekir. Deneysel çalışmalarda birkaç kapula denemek bağımlılık yapısının keşfi için sağlam bir strateji olacaktır (Trivedi ve Zimmer 2005).

Maksimum olabilirlik fonksiyonu ile oluşturulan ve yaygın olarak kullanılan Akaike Bilgi Kriteri (Akaike Information Criterion-AIC) ve Bayesian Bilgi Kriteri (Bayesian Information Criterion-BIC) veriye en uygun kapula modelinin seçiminde kullanılır.

AIC ve BIC değerleri aşağıdaki formüller ile elde edilir.

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k \quad (2.34)$$

$$BIC = -2 \ln(L) + k \ln(n) \quad (2.35)$$

burada $\ln(L)$ maksimum olabilirlik değerini, n gözlem sayısını ve k parametre sayısını ifade etmektedir. Oluşturulan kapula modelleri içerisinde bağımlılık yapısına en uygun modelin seçiminde, AIC ve BIC değeri en küçük olan model tercih edilir.

3. BOX-JENKINS YÖNTEMİ

Bir zaman serisi, zaman içinde ardışık olarak alınan bir gözlemler dizisidir. Birçok veri seti zaman serisi olarak görünür.

Birçok problemde zamana bağlı bir olayla ilgilenilir, çünkü olayın birçok bilinmeyen faktörünün olduğu ve gelecekteki davranışının kesin olarak hesaplanmasına izin veren deterministik bir modelini oluşturmak mümkün değildir. Yine de, bir modelin türetilmesi mümkün olabilir. Belirlenen iki limit arasında kalan bir gelecek değerin olasılığı hesaplanabilir. Böyle bir modele olasılık modeli veya stokastik model denir (Box vd. 2008).

Zaman serisi analizi, ilgilenilen zaman aralıklarında gözlemlenen bir olay ile ilgili olarak, gözlemlenen serinin yapısını veren stokastik süreci modellemek ve daha önceki dönemlere ilişkin olarak gözlem değerlerinin de yardımıyla ileriye dönük tahminler yapmayı amaçlamak için kullanılan bir yöntemdir (Kaynar ve Taştan 2009). Zaman serisi analizi için daha önce geliştirilmiş yöntemler vardır. Bunlardan biri de Box–Jenkins yöntemidir.

1970 yılında George Box ile Gwilym Jenkins tarafından önerilen Box–Jenkins metodunun amacı, örneklem verilerinden bir istatistik modelini belirlemek ve tahmin etmektir. Tahmin edilen model, kestirim için kullanılacak ise modelin özelliklerinin zamanla yani gelecekte de değişmemesi gerekmektedir (Pokorny 1987).

3.1 Box-Jenkins Tahmin Modelleri

Box-Jenkins metodu genel olarak tek değişkenli zaman serilerinin analizinde kullanılmaktadır ve bu metodun uygulanabilmesi için ilgilenilen zaman serisinin durağan olması gerekmektedir. Durağanlığa ulaşmak için durağan olmayan serilerin bir veya daha fazla farkının alınması önerilir (Gujarati ve Porter 2006).

3.1.1 Otoregresif model (AR)

Bir zaman serisine ait herhangi bir zaman dilimindeki gözlem değerinin, ilgili serinin önceki belirli bir sayıda dönemin gözlem değerinin ve hata teriminin doğrusal bir bileşimi

olarak tanımlanan modellerdir (Özmen 1986). $AR(p)$ modeli (3.1) denkleminde verilmiştir.

$$AR(p) \text{ modeli: } \Phi(B)y_t = \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$B^i y_t = y_{t-i}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

y_t : t zamanındaki gözlem değerini,

p : otoregresif modelin derecesini,

B : gecikme operatörünü,

ε_t : $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültü sürecine sahip hata terimlerini göstermektedir.

3.1.2 Hareketli ortalamalar modeli (MA)

Bir zaman serisine ait herhangi bir zaman dilimindeki gözlem değerinin, ilgili dönemin hata terimi ve belirli sayıda geçmiş dönemin hata terimlerinin doğrusal bir bileşimi olarak tanımlanan modellerdir (Özmen 1986). $MA(q)$ modeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$MA(q) \text{ modeli: } y_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad (3.2)$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

y_t : t zamanındaki gözlem değerini,

q : hareketli ortalama modelin derecesini,

B : gecikme operatörünü,

ε_t : $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültü sürecine sahip hata terimlerini göstermektedir.

3.1.3 Otoregresif hareketli ortalamalar modeli (ARMA)

AR ve MA modellerinin bir kombinasyonu olan ARMA modelleri durağan zaman serilerinde kullanılır. Bir zaman serisinin herhangi bir dönemine ait gözlem değeri, ondan önceki belirli sayıda gözlem değerinin ve hata teriminin doğrusal bir bileşimi olarak ifade edilir (Özmen 1986). $ARMA(p, q)$ modeli (3.3) denkleminde verilmiştir.

$$ARMA(p, q) \text{ modeli: } \Phi(B)y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (3.3)$$

$$\Phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i, \quad \Theta(B) = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$$

y_t : t zamanındaki gözlem değerini,

p : otoregresif modelin derecesini,

q : hareketli ortalama modelin derecesini,

$\Phi(B)$: p derecesine sahip B 'deki operatörü,

$\Theta(B)$: q derecesine sahip B 'deki operatörü,

ε_t : $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültü sürecine sahip hata terimlerini göstermektedir.

3.1.4 Entegre otoregresif hareketli ortalamalar modeli (ARIMA)

ARIMA modelleri durağan zaman serilerini modellemekte kullanılır. Ekonomik zaman serileri gibi uygulamada karşılaşılan birçok seri durağan değildir. Durağan olmayan ancak fark alarak durağan hale gelmiş serilere uygulanan modellere entegre modeller, d sayıda fark alınmış AR ve MA modellerinin kombinasyonu olan modellere ARIMA modeller denir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$ARIMA(p, d, q) \text{ modeli: } \Phi(B)(1 - B)^d y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (3.4)$$

y_t : t zamanındaki gözlem değerini,

p : otoregresif modelin derecesini,

q : hareketli ortalama modelin derecesini,

d : fark derecesini,

$\Phi(B)$: p derecesine sahip B 'deki operatörü,

$\Theta(B)$: q derecesine sahip B 'deki operatörü,

ε_t : $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültü sürecine sahip hata terimlerini göstermektedir (Brockwell ve Davis 2009).

3.1.5 Mevsimsel entegre otoregresif hareketli ortalamalar modeli (SARIMA)

Bir zaman serisinin gözlem değerleri arasında iki türlü ilişki vardır; ilki birbirini izleyen gözlem değerleri arasındaki ilişki ve ikincisi birbirini izleyen yılların aynı aylarına ait gözlem değerleri arasındaki ilişkidir. Durağan olmayan ARIMA modellerinde mevsimsellik söz konusu olduğunda Box-Jenkins tarafından SARIMA modelleri geliştirilmiştir. Bu modeller aynı zamanda mevsimsel ARIMA $(p, d, q)(P, D, Q)_s$ olarak da ifade edilir. SARIMA modeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ modeli:

$$\Phi^*(B^s)\Phi(B)(1-B)^d(1-B^s)^D y_t = \Theta^*(B^s)\Theta(B)\varepsilon_t \quad (3.5)$$

y_t : t zamanındaki gözlem değerini,

p : otoregresif modelin derecesini,

q : hareketli ortalama modelin derecesini,

d : fark derecesini,

s : mevsimselliğin periyodunu,

P : mevsimsel otoregresif modelin derecesini,

Q : mevsimsel hareketli ortalama modelin derecesini,

D : mevsimsel fark derecesini,

ε_t : $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültü sürecine sahip hata terimlerini göstermektedir (Montgomery vd. 2008).

3.2 Box-Jenkins Yönteminde Model Belirleme Aşamaları

Box-Jenkins yönteminde, model tanımlama, model tahmini ve model doğrulama olmak üzere 3 aşamalı tekrarlı yaklaşım kullanılır. Bu bölümde Box-Jenkins yönteminin aşamaları tanıtılacaktır.

3.2.1 Model tanımlama

Box-Jenkins modeli geliştirmenin ilk adımı, serinin durağan olup olmadığını ve modellenmesi gereken önemli bir mevsimsellik olup olmadığını belirlemektir.

3.2.1.1 Durağanlığın belirlenmesi

Zaman serisi analizinde kullanılan birçok yöntem ancak serinin durağan olması durumunda uygulanabilmekte dolayısıyla “durağanlık” önemli bir kavramdır. Durağanlık ortalamada değişme olmaması, varyansta değişme olmaması ve periyodik değişmelerin ortadan kalkmış olması şeklinde tanımlanabilir. Ekonomik olaylarla ilgili zaman serilerinin çoğu trend ve/veya mevsimsel dalgalanmalar sergilediklerinden genellikle durağan olmayan serilerdir.

Durağanlığın tespiti için görsel saptama (korelogram) ve birim kök testleri kullanılır.

Korelogram: Otokorelasyon katsayıları ile k gecikme değerlerinin karşılıklı işaretlenmesiyle elde edilen grafiklerdir.

Genişletilmiş Dickey Fuller (ADF) Testi: Birim kök testlerinden en yaygın olarak kullanılanıdır. Dickey ve Fuller (1979) tarafından yayınlamış Dickey Fuller Testi (DF)’nin güvenilir bir test olarak kabul görmesi için hata terimlerinin otokorelasyona sahip olmaması ve sabit varyanslı olması gerekir. Hata terimleri beyaz gürültü (white noise) özelliği göstermelidir. Otokorelasyonu ortadan kaldırmak için denklemin sağına gecikmeli bağımlı değişken eklenir. Bu model ADF olarak adlandırılır. Birim kök testinde aşağıdaki üç model kullanılır.

$$\text{Sabit terim ve trend içermeyen model: } \Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.6)$$

$$\text{Sabit terimin olduğu trend içermeyen model: } \Delta Y_t = \alpha_0 + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.7)$$

$$\text{Sabit terimin ve trendin olduğu model: } \Delta Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

$$H_0: \delta \geq 0 \text{ (seri birim kök içermektedir)}$$

$$H_1: \delta < 0$$

olarak ifade edilen H_0 hipotezi reddedilirse, seri birim kök içermemekte ve durağandır $I(0)$ olarak gösterilir.

3.2.1.2 Mevsimselliğin belirlenmesi

Zaman serisinin grafiğinde birbirini izleyen yılların aynı dönemlerinde benzer artışlar veya azalışlar varsa bu seriler mevsimsel serilerdir. Mevsimsellik zaman serisinde

durağanlığı bozan etkenlerden biridir. Mevsimsel serileri durağan hale getirmek için mevsimsel fark ($Y_t - Y_{t-s}$) alınır. Gözlem değerleri aylık olarak oluşmuş serilerde mevsimlik periyot $s = 12$ olarak alınır. Bir zaman serisi hem trend hem de mevsimsellik gösteriyorsa önce seriyi trendden arındırmak için fark alınır sonra farklar serisinin mevsimsel farkı alınır (Özmen 1986).

3.2.1.3 Geçici modelin belirlenmesi

Durağan zaman serisinin AR, MA, ARMA ya da fark alınarak durağanlaştırılmış serinin uygun ARIMA, SARIMA modellerinden uygun olabileceğine karar verilen modele geçici model denir. Durağan modeller arasında karar vermek için önce serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları belirlenerek korelogramları incelenir. Korelogramların alt ve üst limitleri dışında kalan otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının sayısı ile model dereceleri belirlenir (Özmen 1986).

Otokorelasyon katsayıları ve otokorelasyon fonksiyonu (ACF)

Herhangi bir zaman serisinin farklı dönemlerindeki gözlemleri arasında bulunan ilişkiyi ifade eden katsayılara otokorelasyon katsayıları denir. Yüksek değerlerde elde edilen otokorelasyon katsayıları ilgili serinin geçmiş değerlerine bağımlı olduğunu, düşük olan katsayılar ise serinin rastgele olduğunu ifade etmektedir. k gecikmede otokorelasyon katsayıları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (3.9)$$

Burada γ_k ; k gecikmeli otokovaryansı, γ_0 ; serinin varyansını ifade eder.

Kısmi otokorelasyon katsayıları ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF)

Bir zaman serisinde diğer gecikmelerin etkisi sabit kabul edildiğinde Y_t değerleri ile herhangi bir k gecikme ile oluşturulmuş Y_{t-k} değerleri arasındaki bağımlılığın derecesini gösteren katsayılara kısmi otokorelasyon katsayıları denir. Kısmi otokorelasyon katsayıları,

$$\rho_{kk} = \frac{(\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{k-1,j} \rho_{k-j})}{(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{k-1,j} \rho_j)} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.2 Model tahmini

Geçici modeldeki uygun p ve q 'nın belirlenmesinden sonra modelin parametreleri tahmin edilir. Momentler, en çok olabilirlik, en küçük kareler gibi birçok yöntemle geçici olarak oluşturulan modelin parametreleri tahmin edilir. Bunun için çeşitli istatistik yazılım paketlerinden faydalanılmaktadır.

3.2.3 Modeli doğrulama

Geçici modelin model parametreleri tahmin edilince, seçilen modelin verilerle uyum sağlayıp sağlamadığı test edilir. Seçilen modelin basit bir sınaması modelden elde edilen hata terimlerinin beyaz gürültü olup olmadığına bakılmasıdır. Eğer hata terimleri beyaz gürültü sürecine uyuyorsa model kabul edilir ama uymuyorsa geçici model belirleme aşamasına dönülür (Gujarati ve Porter 2006).

3.3 Model Seçimi Kriteri ve Performans Ölçümleri

Bir zaman serisinin farklı model derecelerinde seriye uygun modeller elde edilebilir. Bu modeller arasından en uygun olanının seçimi için Bölüm 2.6'da tanıtılan model seçim ölçütlerinden AIC kullanılır. AIC istatistiği literatürde değişik şekillerde ifade edilmektedir. Box, Jenkins ve Reinsel AIC istatistiğini,

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{n} + c \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlamıştır (Box vd. 2008). Burada, c bir sabit, n örneklem sayısı, $\hat{\sigma}^2$; σ parametresinin en çok olabilirlik tahmini ve p otoregresif modelin gecikme sayısı q hareketli ortalamalar modelin gecikme sayısı olmak üzere $k = p + q + 1$ 'dir. Her ne kadar AIC değerleri farklı hesaplansa da parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerini kullandıkları için aynı sonuçları verirler (Akdi 2003).

AIC'nin yaygın olarak kullanılan şekli aşağıdaki gibidir.

$$AIC = n * \ln(\hat{\sigma}^2) + 2k \quad (3.12)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{e}_i^2}{n} \quad (3.13)$$

Burada n ; örneklem sayısı, $\hat{\sigma}^2$; σ parametresinin en çok olabilirlik tahmini ve k ; toplam parametre sayısını ifade etmektedir. AIC değeri en küçük olan model en uygun model olarak seçilir.

Seçilen modelin tahmin performansının ölçümünde birçok farklı istatistikler kullanılmaktadır. Literatürde en çok kullanılanları ortalama mutlak yüzde hata ile kök ortalama hata karedir. Ortalama mutlak yüzde hata (mean absolute percentage error-MAPE) tahmin hatalarını yüzde olarak ifade etmesi ile MAPE değeri tek başına da bir anlam ifade etmektedir. Lewis (1982) tarafından yapılan bir çalışmada eğer MAPE değeri %10'un altında ise model çok iyi, %10-%20 arasında ise model iyi, %20-%50 arasında ise model kabul edilebilir ve %50'nin üzerinde ise model yanlış ve hatalı olarak sınıflandırılmıştır. Kök ortalama hata kare (root mean squared error-RMSE) ortalama hata karelerin kareköküdür. Hata terimlerinin ne kadar yayıldığıнын bir ölçüsüdür. MAPE ve RMSE değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\text{MAPE} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{Y_t}}{n} * 100 \quad (3.14)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n}} \quad (3.15)$$

Burada Y_t ; t dönemindeki gözlem değerini, e_t ; t dönemdeki tahmin hatasını, n ; gözlem sayısını belirtmektedir.

4. UYGULAMA

4.1 Veri ve Tanımlayıcı İstatistikler

Bu tez çalışmasında, Ocak 2005 ile Aralık 2020 tarihleri arasındaki 16 yıllık dönemi kapsayan aylık tarımsal ürün fiyatları ile enerji fiyatlarına ilişkin verilerden yararlanılmıştır. Tarımsal ürünler olarak buğday, arpa, soya ve mısırın üretici fiyatları, enerji fiyatlarından ise benzin ve motorin fiyatları incelenmiştir. Tarımsal ürün fiyatları için Türkiye İstatistik Kurumuna (TÜİK) ait veriler, enerji fiyatları için ise Enerji Piyasası Düzenleme Kurumuna (EPDK) ait veriler kullanılmıştır. İlk olarak elde edilen verilerin doğal logaritması alınmış ve daha sonra iki aşamalı analiz yapılmıştır. Birinci aşamada değişkenlerin marjinal dağılımları modellenmiştir. İkinci aşamada ise ikili olarak değişkenlere ait 6 farklı kapula (Gaussian, Student t, Clayton, Gumbel, Frank ve Joe) ile analiz yapılmıştır. Marjinal dağılımların modellenmesi için Gretl, kapula için R-Studio programları kullanılmıştır. Çizelge 4.1’de verilere ait tanımlayıcı istatistikler ve verilerin normallik testi sonuçları sunulmuştur.

Çizelge 4.1 Tanımlayıcı istatistikler ve normallik testi

	Buğday	Arpa	Mısır	Soya	Benzin	Motorin
Ortalama	-0.426	-0.587	-0.523	-0.024	1.437	1.296
Medyan	-0.431	-0.545	-0.494	0.010	1.471	1.334
Maximum	0.531	0.365	0.322	1.319	1.959	1.881
Minimum	-1.109	-1.309	-1.139	-0.821	0.842	0.624
Standart sapma	0.406	0.430	0.343	0.502	0.295	0.333
Çarpıklık	0.283	0.138	0.397	0.284	-0.102	-0.021
Basıklık	2.472	2.321	2.443	2.528	2.054	2.050
Jarque-Bera	4.795	4.293	5.518	4.358	5.492	5.228
p-değeri	0.091	0.117	0.032	0.113	0.042	0.047
Gözlem sayısı	192	192	192	192	192	192

Çizelge 4.1 incelendiğinde tarımsal ürün fiyatlarına ilişkin ortalamaların negatif, enerji fiyatlarının ise pozitif yapıda olduğu görülmektedir. Tarımsal ürünlere ait değişkenler normal dağılıma göre sağa çarpık, enerjiye ait değişkenler ise normal dağılıma göre sola çarpıklığa sahiptir. Tüm değişkenlerin basıklığı pozitif, yani dağılımın şekli normale göre

biraz daha sivri yapıdadır. Normallik testi Jarque-Bera sonuçlarına bakıldığında %5 anlam düzeyine göre buğday, arpa ve soya için normal dağılıma uygun oldukları, mısır, benzin ve motorinin normal dağılıma uygun olmadıkları görülmektedir. Çizelge 4.2’de her bir tarımsal ürün fiyatının benzin ve motorin fiyatı ile korelasyonları gösterilmiştir.

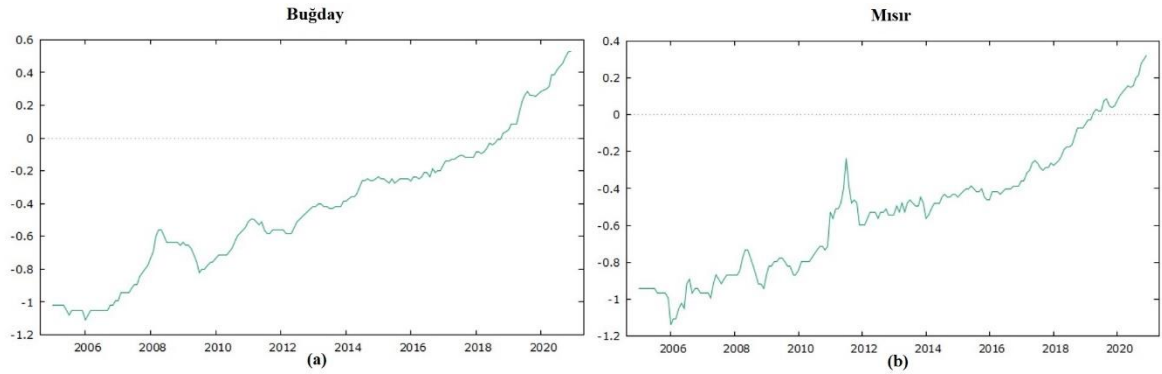
Çizelge 4.2 Korelasyon matrisi

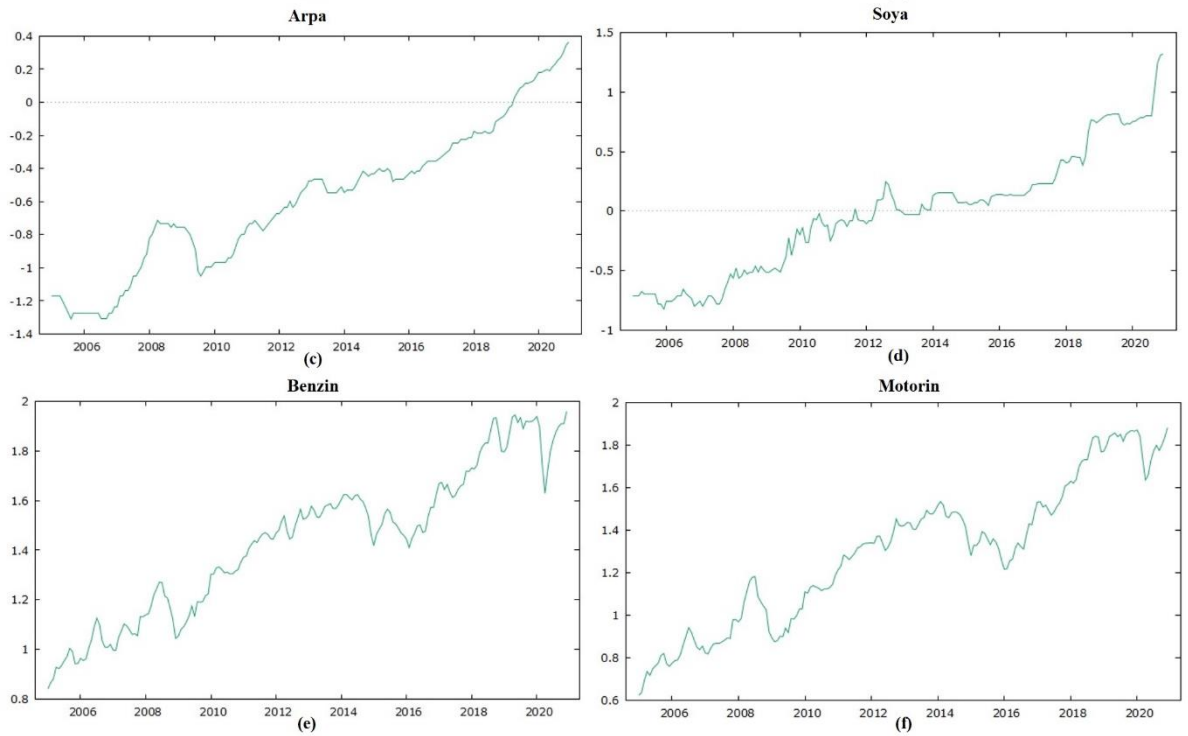
	Pearson	Kendal	Spearman
Buğday-Benzin	0.937	0.793	0.940
Buğday-Motorin	0.938	0.788	0.934
Mısır-Benzin	0.945	0.785	0.932
Mısır-Motorin	0.946	0.770	0.921
Arpa-Benzin	0.940	0.778	0.936
Arpa-Motorin	0.944	0.778	0.931
Soya-Benzin	0.958	0.813	0.952
Soya-Motorin	0.955	0.792	0.942

Çizelge 4.2’de görüldüğü üzere her bir tarım ürününün fiyatı ile benzin ve motorin arasında pozitif yönde yüksek bir ilişki vardır.

4.2 Marjinal Dağılımların Modellenmesi

Tarımsal ürün ve enerji fiyatlarına ilişkin marjinal dağılımların modellenmesinde mevsimsel Box-Jenkins modelleri kullanılmıştır. Box-Jenkins modellerinin aşamalarından ilki olan model tanımlamada, serilerin durağanlığı ve mevsimselliği incelenmiştir. Her bir serinin trendi, durağanlığı ve mevsimselliği hakkında bilgi edinmek için aşağıda serilere ait zaman serisi grafikleri verilmiştir.





Şekil 4.1 Değişkenlerin zaman serisi grafikleri

Şekil 4.1’de her bir değişkene ait fiyatın, yıllara bağlı bir artış trendinde olduğu görülmektedir. Her bir serinin trende sahip olduğu, durağanlığın sağlanmadığı, serilerin zaman içindeki belirli dalgalanmalarında da mevsimselliğin olabileceği düşünülmektedir. Zaman serisi analiz yöntemleriyle modelleme yapmadan önce her bir serinin durağan olması gerekir. Durağanlığın belirlenmesi amacıyla Genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) testi kullanılmıştır. Değişkenlerin fark almadan ve birinci farkı alınarak durağanlıklarına ilişkin ADF test sonuçları aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.3 ADF testi sonuçları

	I(0)		I(1)	
	Test istatistiği	p-değeri	Test istatistiği	p-değeri
Buğday	-1.653	0.771	-7.3129	0.000
Mısır	-2.197	0.490	-6.5228	0.000
Arpa	-2.350	0.406	-6.3985	0.000
Soya	-1.835	0.687	-12.5281	0.000
Benzin	-2.459	0.438	-8.8720	0.000
Motorin	-3.201	0.084	-9.5596	0.000

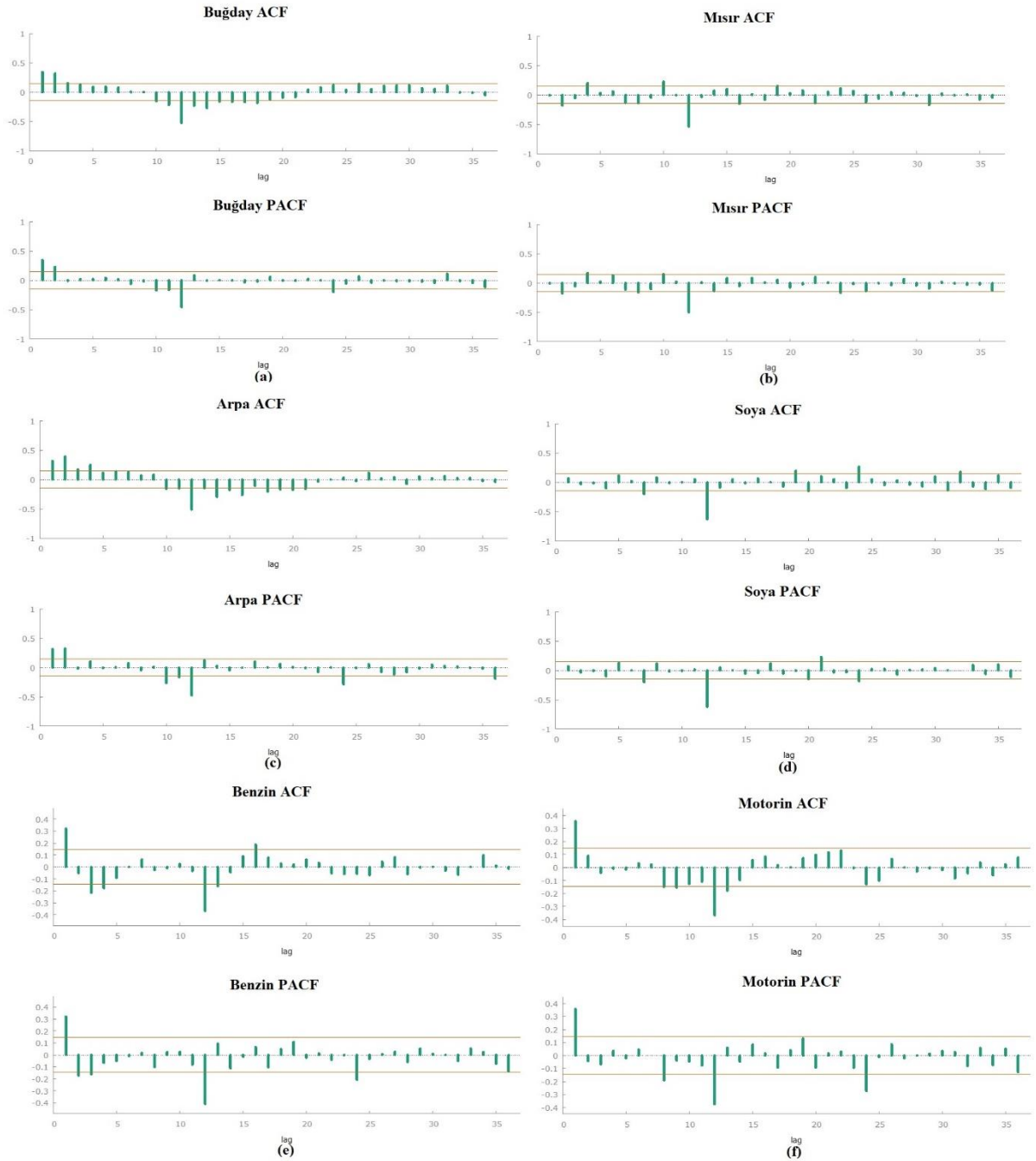
Çizelge 4.3’de serilerin fark almadan yani I(0)’daki test sonuçları incelendiğinde p değerlerinin $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinden büyük olduğu, H_0 : Seri birim kök içermektedir

hipotezinin reddedilemeyeceği, dolayısıyla serilerin durağan olmadığı anlaşılmıştır. Serilerin birinci farkları alındığında yani $I(1)$ 'deki test sonuçları incelendiğinde $p < \alpha$ olduğu yani H_0 yokluk hipotezinin %5 anlam düzeyinde reddedileceği, serilerin durağan olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Böylece fark alma işlemiyle seriler trendden arındırılmış ve durağanlığı sağlanmıştır. Durağanlığı sağlanan serilerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2 Durağanlığı sağlanmış serilerin ACF ve PACF grafikleri

Şekil 4.2’de her bir değişken için ACF ve PACF grafiklerinden anlaşılabileceği üzere, serilerin trende sahip olmadığı görülmektedir. Serilerin ACF grafikleri incelendiğinde 12. ve 24. gecikmelerde ilişkiler olabileceği, serilerin periyodu 12 olan mevsimsel dalgalanmanın var olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Bu sebepten dolayı, modelin belirlenmesi aşamasından önce serilerin mevsimsel farkının alınması gerekmektedir. Mevsimsel farkı alınmış serilerin ACF ve PACF grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.3 Mevsimsel değişim farkı alınmış serilerin ACF ve PACF grafikleri

Şekil 4.3'deki serilerin ACF ve PACF grafikleri incelendiğinde otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının azalmakta olduğu fakat sıfır olmadığı görülmektedir. Bu serilerin modellenmesinde mevsimsel otoregresif entegre hareketli ortalama modelleri uygun olacaktır. ACF ve PACF grafikleri serilerin birinci farkının ve periyodu 12 olan birinci mevsimsel farkının grafikleri olduğundan modeldeki $d = 1$ ve $D = 1$ olmaktadır. Buğday, arpa ve motorin serilerinin ACF ve PACF grafikleri incelendiğinde ACF grafiğinin yavaş azaldığı, PACF grafiğinin ise ikinci gecikmede bir anda azaldığı görülmektedir. Böylece bu seri için uygun modelin mevsimsel otoregresif modeli olacağı öngörülmüştür. Mısır ve soya serilerinin grafikleri incelendiğinde hem ACF hem de PACF grafiklerinin benzer şekilde azaldığı görülmektedir. Bu seri için mevsimsel otoregresif hareketli ortalama modelinin uygun olacağı anlaşılmıştır. Benzin serisinin grafiklerinden ilk gecikmeden sonra PACF grafiğinin ACF grafiğine göre daha yavaş azaldığı görülmektedir. Böylece bu seri için uygun modelin mevsimsel hareketli ortalama modeli olacağı öngörülmüştür. En uygun modeli bulmak için birden fazla mevsimsel $ARIMA(p, 1, q)(P, 1, Q)_{12}$ modeli oluşturulmuştur. Box-Jenkins modellerinin aşamalarından ikincisi model tahmini için en çok olabilirlik yöntemi ile mevsimsel ARIMA modelleri için parametre tahminleri yapılmıştır. Bu modellerden model katsayılarının istatistiki açıdan anlamlı olanları, model sonuçları ile beraber çizelge 4.4-4.9'da sunulmuştur. Çizelge 4.4-4.9'da yer alan bu modellerden ilgili seri için en uygun modelin seçiminde AIC değeri kullanılmıştır. AIC değerinin küçük olduğu model, ilgili seri için uygun model olarak belirlenmiştir.

Çizelge 4.4 Buğday serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar

Model	AR(1)	AR(2)	MA(1)	MA(2)	SAR(1)	SMA(1)	AIC
ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1) ₁₂							
parametre tahmini	0.742		-0.508			-0.761	-839.266
standart hata	0.129		0.162			0.067	
t istatistiği	5.754		-3.142			-11.410	
p-değeri	0.000		0.002			0.000	
ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0) ₁₂							
parametre tahmini	0.798		-0.569		-0.532		-822.058
standart hata	0.101		0.134		0.064		
t istatistiği	7.884		-4.241		-8.193		
p-değeri	0.000		0.000		0.000		
ARIMA(2, 1, 0)(1, 1, 0) ₁₂							
parametre tahmini	0.229	0.204			-0.521		-821.332
standart hata	0.074	0.074			0.066		
t istatistiği	3.112	2.774			-7.94		
p-değeri	0.002	0.006			0.000		
ARIMA(2, 1, 0)(0, 1, 1) ₁₂							
parametre tahmini	0.2218	0.1948				-0.760	-841.785
standart hata	0.0733	0.0744				0.067	
t istatistiği	3.0260	2.6190				-11.280	
p-değeri	0.0025	0.0088				0.000	
ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1) ₁₂							
parametre tahmini			0.199	0.214		-0.775	-840.101
standart hata			0.074	0.073		0.068	
t istatistiği			2.680	2.945		-11.390	
p-değeri			0.007	0.003		0.000	

Çizelge 4.4’de buğday serisine ait modellerin katsayıları istatistiki açıdan anlamlı bulunmuş ($p < \alpha = 0.05$) olup bu modeller arasından ARIMA(2,1,0)(0,1,1)₁₂ modeli uygun model olarak belirlenmiştir.

Çizelge 4.5 Mısır serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar

Model	AR(1)	AR(2)	MA(1)	MA(2)	SAR(1)	SAR(2)	SMA(1)	AIC
ARIMA(1, 1, 1)(2, 1, 0) ₁₂								
parametre tahmini	0.888		-0.939		-0.714	-0.263		-602.629
standart hata	0.172		0.139		0.074	0.077		
t istatistiği	5.199		-6.714		-9.607	-3.421		
p-değeri	0.000		0.000		0.000	0.001		
ARIMA(2, 1, 2)(0, 1, 1) ₁₂								
parametre tahmini	0.552	-0.996	-0.573	1.000			-0.999	-627.004
standart hata	0.015	0.006	0.037	0.100			0.176	
t istatistiği	37.26	-15.530	-15.680	9.999			-5.690	
p-değeri	0.000	0.000	0.000	0.000			0.000	
ARIMA(2, 1, 2)(1, 1, 0) ₁₂								
parametre tahmini	0.816	-0.928	-0.909	0.954	-0.548			-605.200
standart hata	0.115	0.045	0.160	0.088	0.065			
t istatistiği	7.071	-20.660	-5.681	10.840	-8.432			
p-değeri	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000			
ARIMA(2, 1, 2)(2, 1, 0) ₁₂								
parametre tahmini	0.816	-0.937	-0.885	0.938	-0.689	-0.242		-597.923
standart hata	0.066	0.046	0.078	0.065	0.078	0.077		
t istatistiği	12.280	-20.470	-11.400	14.400	-8.859	-3.136		
p-değeri	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002		

Çizelge 4.5’de mısır serisine ait modellerin katsayıları istatistiki açıdan anlamlı bulunmuş ($p < \alpha = 0.05$) olup bu modeller arasından AIC değeri en küçük olan ARIMA(2,1,2)(0,1,1)₁₂ modeli uygun model olarak belirlenmiştir.

Çizelge 4.6 Arpa serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar

Model	AR(1)	MA(1)	SAR(1)	SMA(1)	AIC
ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1) ₁₂					
parametre tahmini	0.843	-0.604		-0.901	-813.006
standart hata	0.078	0.108		0.085	
t istatistiği	10.80	-5.621		-10.590	
p-değeri	0.000	0.000		0.000	
ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0) ₁₂					
parametre tahmini	0.884	-0.645	-0.538		-784.995
standart hata	0.055	0.079	0.062		
t istatistiği	16.170	-8.075	-8.729		
p-değeri	0.000	0.000	0.000		
ARIMA(1, 1, 0)(1, 1, 0) ₁₂					
parametre tahmini	0.344		-0.524		-769.303
standart hata	0.070		0.062		
t istatistiği	4.897		-8.428		
p-değeri	0.000		0.000		
ARIMA(1, 1, 0)(0, 1, 1) ₁₂					
parametre tahmini	0.315			-0.957	-823.345
standart hata	0.071			0.179	
t istatistiği	4.429			-5.364	
p-değeri	0.000			0.000	
ARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 1) ₁₂					
parametre tahmini		0.213		-0.949	-806.517
standart hata		0.059		0.149	
t istatistiği		3.558		-6.369	
p-değeri		0.001		0.000	

Çizelge 4.6’da arpa ait modellerin katsayıları istatistiki açıdan anlamlı bulunmuş ($p < \alpha = 0.05$) olup bu modeller arasından AIC değeri en küçük olan ARIMA(1,1,0)(0,1,1)₁₂ modeli uygun model olarak belirlenmiştir.

Çizelge 4.7 Soya serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar

Model	AR(1)	AR(2)	MA(1)	MA(2)	SAR(1)	SMA(1)	AIC
ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1) ₁₂							
parametre tahmini	-0.895		0.989		-0.439	-0.489	-524.705
standart hata	0.053		0.043		0.109	0.137	
t istatistiği	-16.709		23.270		-4.036	-3.589	
p-değeri	0.000		0.000		0.000	0.000	
ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0) ₁₂							
parametre tahmini	-0.896		1.000		-0.685		-512.779
standart hata	0.036		0.022		0.055		
t istatistiği	-24.860		44.870		-12.560		
p-değeri	0.000		0.000		0.000		
ARIMA(1, 1, 0)(0, 1, 1) ₁₂							
parametre tahmini	-0.861		0.969			-0.830	-500.391
standart hata	0.059		0.038			0.070	
t istatistiği	-14.460		25.400			-11.800	
p-değeri	0.000		0.000			0.000	
ARIMA(2, 1, 1)(1, 1, 1) ₁₂							
parametre tahmini	0.910	-0.138	-0.808		-0.442	-0.507	-519.968
standart hata	0.193	0.076	0.184		0.110	0.140	
t istatistiği	4.711	-1.828	-4.391		-4.011	-3.611	
p-değeri	0.000	0.068	0.000		0.000	0.000	
ARIMA(1, 1, 2)(1, 1, 1) ₁₂							
parametre tahmini	0.773		-0.679	-0.128	-0.439	-0.509	-519.679
standart hata	0.206		0.214	0.073	0.110	0.140	
t istatistiği	3.754		-3.168	-1.743	-3.985	-3.633	
p-değeri	0.000		0.002	0.081	0.000	0.000	

Çizelge 4.7’de soya serisine ait modellerin katsayıları istatistiki açıdan anlamlı bulunmuş ($p < \alpha = 0.05$) olup bu modeller arasından AIC değeri en küçük olan ARIMA(1,1,1)(1,1,1)₁₂ modeli uygun model olarak belirlenmiştir.

Çizelge 4.8 Benzin serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar

Model	AR(1)	AR(2)	MA(1)	SAR(1)	SMA(1)	AIC
ARIMA(1, 1, 0)(0, 1, 1) ₁₂						
parametre tahmini	0.339				-1.000	-689.730
standart hata	0.071				0.128	
t istatistiği	4.796				-7.813	
p-değeri	0.000				0.000	
ARIMA(1, 1, 0)(1, 1, 0) ₁₂						
parametre tahmini	0.339			-0.503		-643.479
standart hata	0.071			0.074		
t istatistiği	4.773			-6.797		
p-değeri	0.000			0.000		
ARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 1) ₁₂						
parametre tahmini			0.371		-0.999	-697.193
standart hata			0.065		0.133	
t istatistiği			5.707		-7.504	
p-değeri			0.000		0.000	
ARIMA(0, 1, 1)(1, 1, 0) ₁₂						
parametre tahmini			0.364	-0.499		-636.981
standart hata			0.064	0.073		
t istatistiği			5.696	-6.849		
p-değeri			0.000	0.000		
ARIMA(2, 1, 1)(0, 1, 1) ₁₂						
parametre tahmini	1.096	-0.411	-0.748		-0.999	-693.051
standart hata	0.164	0.069	0.175		0.129	
t istatistiği	6.687	-5.893	-4.268		-7.697	
p-değeri	0.000	0.000	0.000		0.000	

Çizelge 4.8’de benzin serisine ait modellerin katsayıları istatistiki açıdan anlamlı bulunmuş ($p < \alpha = 0.05$) olup bu modeller arasından AIC değeri en küçük olan ARIMA(0,1,1)(1,1,0)₁₂ modeli uygun model olarak belirlenmiştir.

Çizelge 4.9 Motorin serisi için oluşturulmuş modellere ilişkin sonuçlar

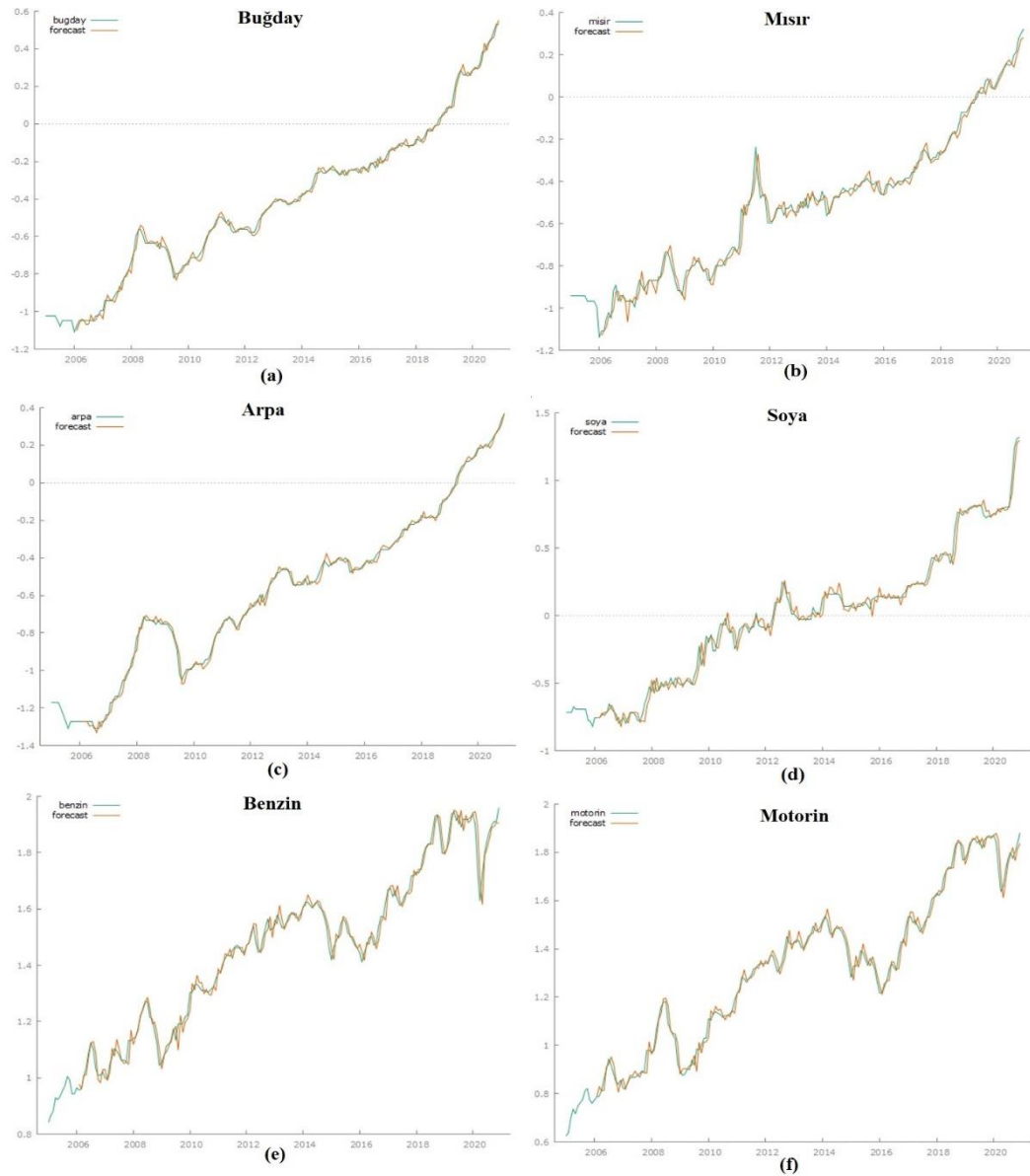
Model	AR(1)	MA(1)	SAR(1)	SMA(1)	AIC
ARIMA(1, 1, 0)(0, 1, 1) ₁₂					
parametre tahmini	0.344			-1.000	-696.437
standart hata	0.071			0.229	
t istatistiği	4.886			-4.367	
p-değeri	0.000			0.000	
ARIMA(1, 1, 0)(0, 1, 1) ₁₂					
parametre tahmini	0.347		-0.413		-646.643
standart hata	0.071		0.073		
t istatistiği	4.913		-5.697		
p-değeri	0.000		0.000		
ARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 1) ₁₂					
parametre tahmini		0.337		-1.000	-696.349
standart hata		0.065		0.196	
t istatistiği		5.213		-5.096	
p-değeri		0.000		0.000	
ARIMA(0, 1, 1)(1, 1, 0) ₁₂					
parametre tahmini		0.349	-0.429		-647.311
standart hata		0.065	0.072		
t istatistiği		5.390	-6.005		
p-değeri		0.000	0.000		

Çizelge 4.9’da motorin serisine ait modellerin katsayıları istatistiki açıdan anlamlı bulunmuş ($p < \alpha = 0.05$) olup bu modeller arasından AIC değeri en küçük olan ARIMA(1,1,0)(0,1,1)₁₂ modeli uygun model olarak belirlenmiştir. Box-Jenkins modelinin son aşaması olan model doğrulama aşamasında; her bir seri için AIC değerlerine göre seçilmiş olan modelin model uygunluğuna bakılmalıdır. Bu kapsamda seçilen modellere ilişkin performans ölçüm sonuçları aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.10 Seçilmiş modellerin performans ölçümleri

Değişken	Model	MAPE	RMSE
Buğday	ARIMA(2,1,0)(0,1,1) ₁₂	6.968	0.022
Mısır	ARIMA(2,1,2)(0,1,1) ₁₂	10.652	0.037
Arpa	ARIMA(1,1,0)(0,1,1) ₁₂	4.972	0.023
Soya	ARIMA(1,1,1)(1,1,1) ₁₂	15.316	0.052
Benzin	ARIMA(0,1,1)(0,1,1) ₁₂	1.571	0.031
Motorin	ARIMA(1,1,0)(0,1,1) ₁₂	1.845	0.031

Çizelge 4.10’da buğday, arpa, benzin ve motorin için seçilmiş modellerin MAPE değerlerinin %10’nun altında olduğu görülmektedir. Bu durum, Lewis (1982) tarafından yapılan çalışmada çok iyi model olarak sınıflandırılmıştır. Mısır ve soya için seçilmiş modellerin MAPE değerleri Lewis’in sınıflandırmasına göre iyi model olarak değerlendirilmektedir. RMSE değeri, hataların gerçek değerden sapmalarını gösteren bir ölçüt olarak tüm seriler için oldukça düşük çıkmıştır. Bu performans ölçütlerine göre modellerin uygun birer model oldukları sonucuna varılmıştır. Elde edilen kestirim değerlerinin gerçek değerlere yakın olup olmadığının anlaşılabilmesi için kestirim serisine ve orijinal seriye ait grafikler bir arada şekil 4.11’de verilmiştir.



Şekil 4.4 Kestirim serisi ile orijinal serinin birlikte grafiği

Şekil 4.4’deki grafikler incelendiğinde her bir seri için seçilen modelin kestirim serisi ile orijinal seri hemen hemen üst üste çakışmaktadır. Böylece her bir seri için belirlenen modelin uygunluğu ilgili serinin grafiği ile de kontrol edilmiştir.

4.3 Kapula Modellerinin Oluşturulması

İki aşamadan oluşan analizin ilk aşaması marjinal dağılımlara uygun modelin belirlenmesi ile tamamlanmıştır. İkinci aşamada ise ikili olarak değişkenlere ait kapulalar belirlenecektir. Marjinal dağılımların tahmini yapıldıktan sonra modelden ulaşılan standartlaştırılmış artıklar olasılık integral dönüşümü ile uniform (0,1) girdilere dönüştürülür. Bu düzgün girdiler ile iki değişkenli kapula verisi yani (u, v) çiftleri elde edilmiştir. Enerji fiyatları ile tarımsal ürün fiyatları değişkenleri arasındaki bağımlılık yapısı Gaussian, Student t, Clayton, Gumbel, Frank ve Joe kapulaları ile belirlenecektir. Bu kapula fonksiyonlarından uygun olanı belirlemek için önce Cramér-von Mises uyum iyiliği testi ile uygunlukları test edilmiştir. Çizelge 4.11’de her bir benzin-tarımsal ürün fiyatı çifti için oluşturulmuş kapulaların Cramér-von Mises uyum iyiliği test sonuçları verilmiştir.

Çizelge 4.11 Cramér-von Mises uyum iyiliği testi (benzin-tarımsal ürün fiyatı çiftleri için)

		Gaussian	Student t	Clayton	Gumbel	Frank	Joe
Buğday	S_n istatistiği	0.028	0.028	0.044	0.024	0.021	0.027
	p -değeri	0.171	0.149	0.045	0.384	0.503	0.144
Mısır	S_n istatistiği	0.030	0.030	0.050	0.028	0.029	0.033
	p -değeri	0.076	0.103	0.008	0.098	0.138	0.131
Arpa	S_n istatistiği	0.018	0.018	0.016	0.028	0.018	0.040
	p -değeri	0.578	0.568	0.610	0.192	0.635	0.085
Soya	S_n istatistiği	0.021	0.021	0.035	0.029	0.020	0.056
	p -değeri	0.326	0.384	0.102	0.150	0.390	0.044

Çizelge 4.11’deki p değerleri incelendiğinde; benzin-buğday fiyatı ve benzin-mısır fiyatı çiftleri için Clayton, benzin-soya fiyatı çifti için Joe kapula hariç diğer kapulaların uygun olduğu ve benzin-arpa fiyatı çifti için tüm kapulaların uygun olduğu sonucuna varılmıştır. Her bir benzin-tarımsal ürün fiyatı çifti için farklı kapula fonksiyonları ile elde edilmiş parametre tahminleri, parametre tahminlerine ilişkin standart hatalar ile log-olabilirlik (LL), AIC ve BIC değerleri çizelge 4.12’de verilmiştir.

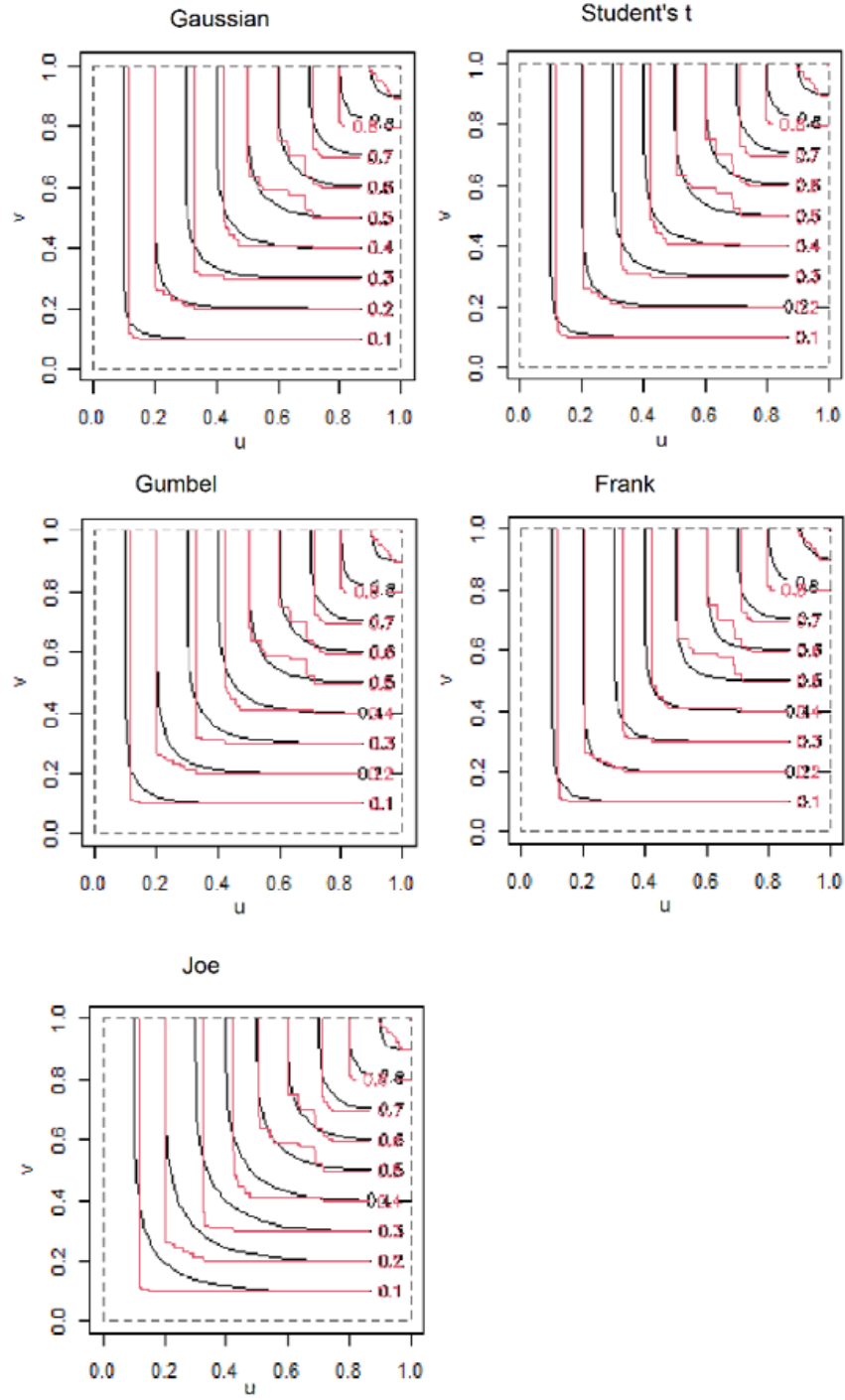
Çizelge 4.12 Benzin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı çifti için kapula model sonuçları

		Gaussian	Student t	Clayton	Gumbel	Frank	Joe
Buğday	$\hat{\rho}$	0.920	0.921	3.550	3.533	16.016	4.119
	std. hata	0.012	0.008	0.399	0.435	2.036	0.596
	$\hat{v}$		29.916				
	std. hata		23.581				
	LL	175.964	175.275	130.682	159.123	189.818	124.726
	AIC	-349.929	-346.549	-259.364	-316.246	-377.637	-247.452
	BIC	-346.671	-340.034	-256.107	-312.988	-374.380	-244.194
Mısır	$\hat{\rho}$	0.912	0.913	3.312	3.413	15.162	4.001
	std. hata	0.011	0.009	0.327	0.384	2.138	0.543
	$\hat{v}$		20.999				
	std. hata		14.131				
	LL	167.531	166.969	121.013	153.464	181.133	121.139
	AIC	-333.062	-329.938	-240.027	-304.928	-360.266	-240.277
	BIC	-329.805	-323.423	-236.769	-301.671	-357.009	-237.019
Arpa	$\hat{\rho}$	0.909	0.912	3.124	3.476	15.366	4.202
	std. hata	0.013	0.010	0.319	0.390	1.764	0.585
	$\hat{v}$		14.999				
	std. hata		11.593				
	LL	164.217	164.414	114.869	155.774	183.060	127.200
	AIC	-326.433	-324.828	-227.737	-309.548	-364.120	-252.400
	BIC	-323.176	-318.313	-224.479	-306.291	-360.863	-249.143
Soya	$\hat{\rho}$	0.926	0.927	3.289	3.851	18.243	4.719
	std. hata	0.012	0.008	0.331	0.459	2.414	0.684
	$\hat{v}$		17.998				
	std. hata		11.701				
	LL	183.147	182.413	120.016	175.534	207.809	145.042
	AIC	-364.293	-362.289	-238.033	-349.068	-413.617	-288.085
	BIC	-361.036	-355.775	-234.775	-345.811	-410.359	-284.827

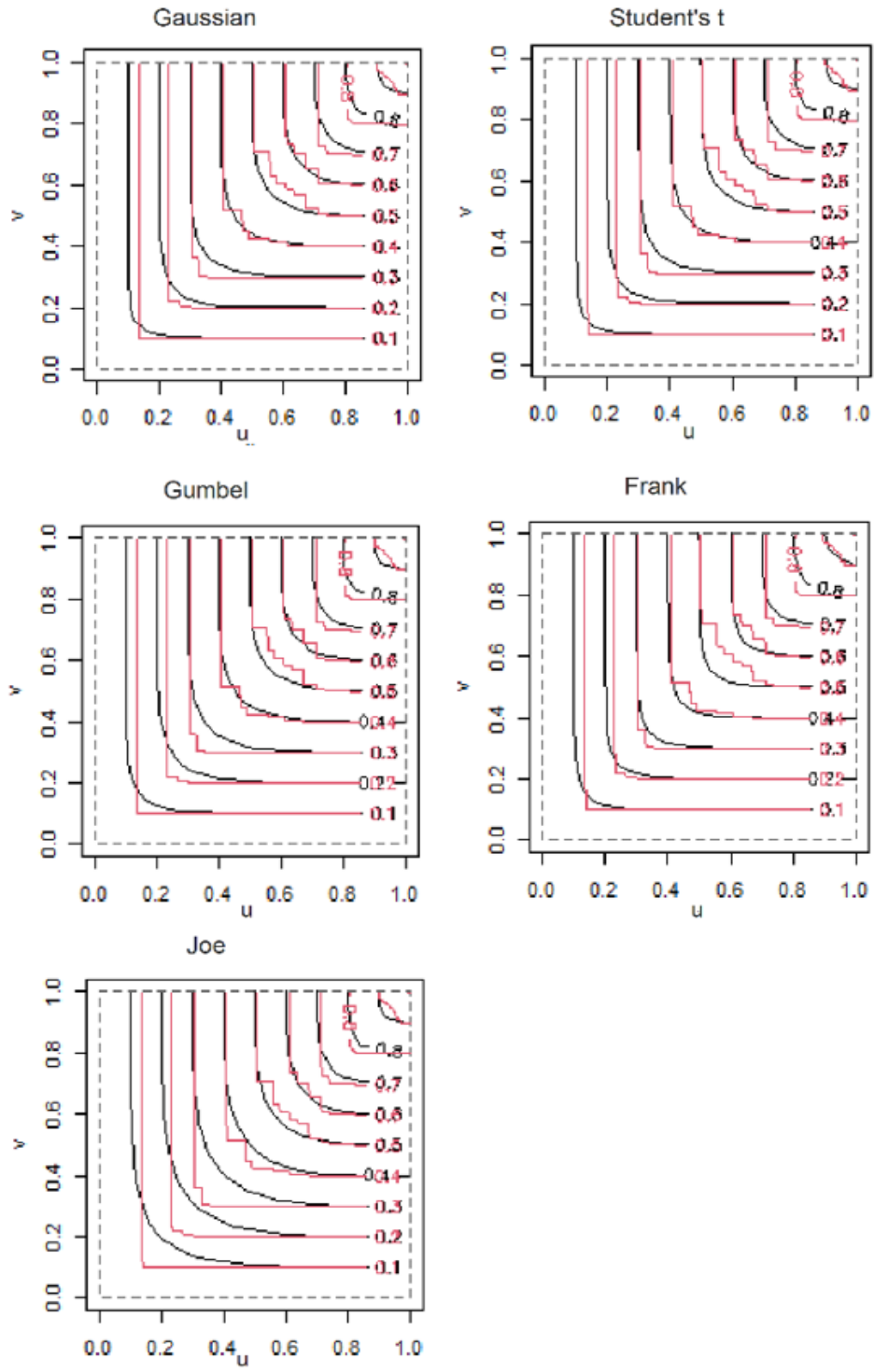
Çizelge 4.12’deki Gaussian, Student t, Clayton, Gumbel, Frank ve Joe kapulaları için bağımlılık parametre tahmininde maksimum olabilirlik metodu kullanılmıştır. Bağımlılık parametre tahminleri her bir benzin fiyatı ile tarımsal ürün fiyatları çifti için anlamlı bulunmuştur. Eliptik kapula ailesinden Gaussian ve Student t kapulalarının korelasyon katsayısı $\hat{\rho}$, 0.909 ile 0.927 aralığında değerler almıştır. Dolayısıyla tüm çiftler için

korelasyon katsayısının oldukça yüksek düzeyde pozitif olduğu görülmektedir. Enerji ve tarımsal ürün fiyatları arasındaki bağımlılık yapısı içerisinde; benzin-buğday fiyatı, benzin-mısır fiyatı, benzin-arpa fiyatı ve benzin-soya fiyatı çiftleri için önemli düzeyde pozitif bağımlılığın olduğu sonucuna varılmıştır. Uygun kapula fonksiyonlarından bağımlılığı en iyi modelleyenini seçimi için LL, AIC ve BIC değerleri kullanılmıştır. Tüm çiftler için LL'nin en yüksek, AIC ve BIC'in ise en küçük değerlerine sahip olan Frank kapula, benzin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı arasındaki bağımlılık yapısına en iyi uyan kapuladır. Eliptik kapulalardan Gaussian ve Student t kapulalarının tüm çiftler için uygun kapula olduğu görülmüştür. Bağımlılık parametresi; benzin-buğday fiyatı, benzin-mısır fiyatı, benzin-arpa fiyatı ve benzin-soya fiyatı çiftleri için sırasıyla $\hat{\theta} = 16.016$, $\hat{\theta} = 15.162$, $\hat{\theta} = 15.366$, $\hat{\theta} = 18.243$ olarak tahmin edilmiştir.

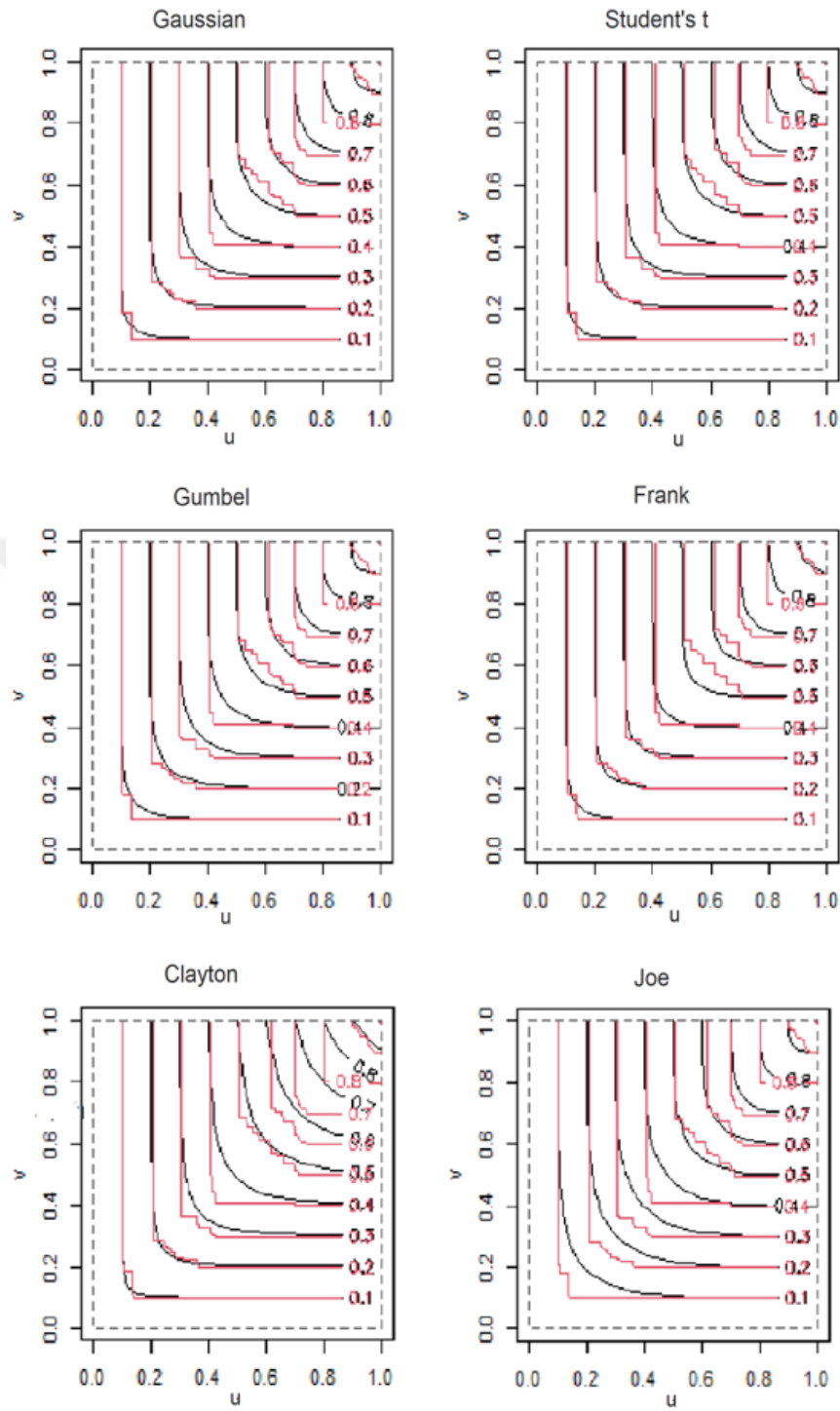
Şekil 4.5-4.8'de benzin ile her bir tarımsal ürün fiyatı çiftleri için uygun kapula kontur grafiği ile deneysel kapula konturları birlikte verilmiştir. Grafiklerde siyah renk ile çizilmiş konturlar ilgili dağılım ile modellenen kapulanın konturlarını, kırmızı ile çizilmiş konturlar ise deneysel kapula konturlarını göstermektedir.



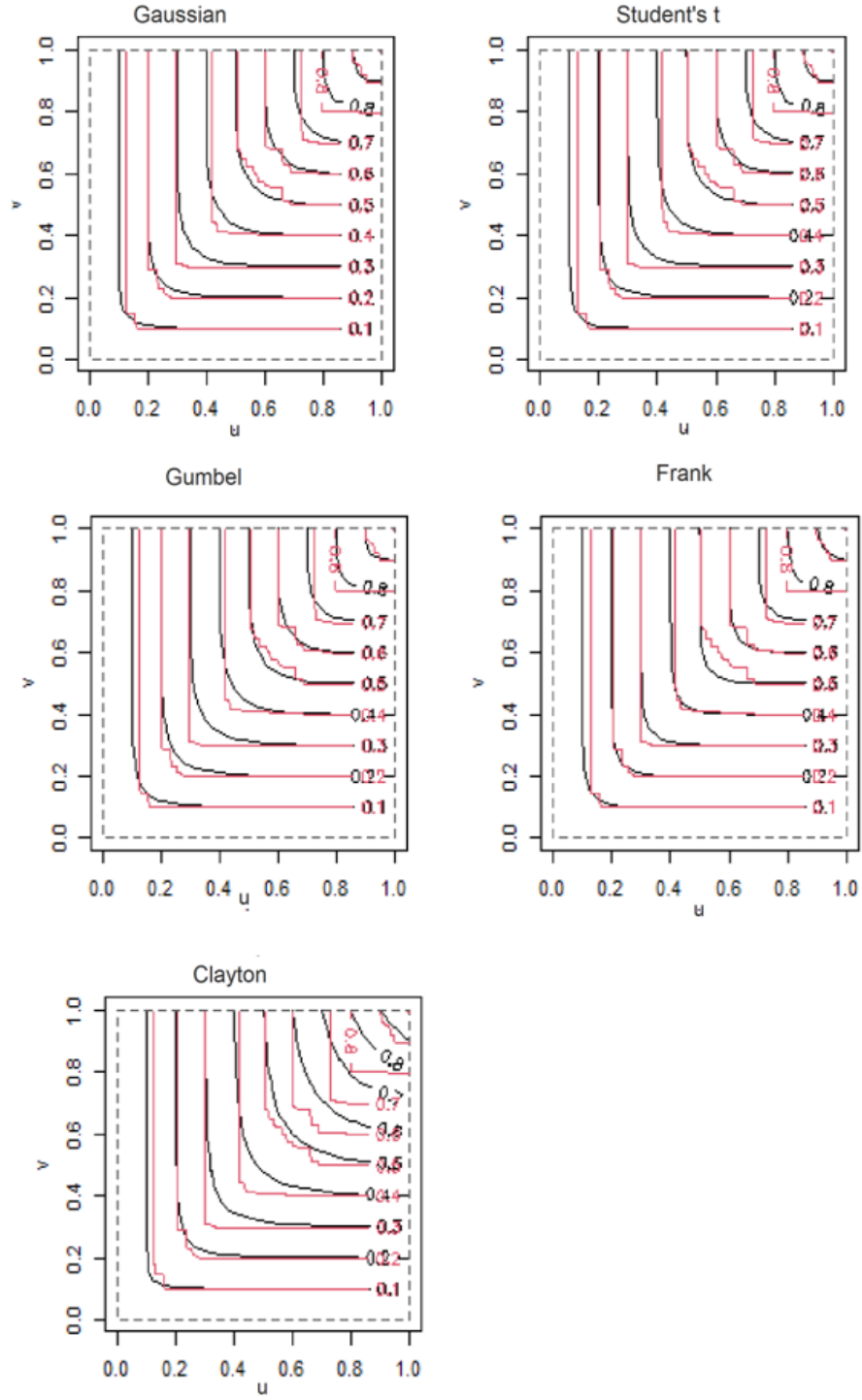
Şekil 4.5 Benzin-buğday fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 4.6 Benzin-mısır fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 4.7 Benzin-arpa fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 4.8 Benzin-soya fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri

Şekil 4.5-4.8 incelendiğinde, benzin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı çifti için uygun olan kapulalardan Frank kapula, deneysel kapula konturlarına en yakın konturları olması bakımından en iyi uyan kapuladır. Bu sonuç, her bir çift için model seçim kriterlerine göre uygun bulunan sonuçla da uyushmaktadır.

Çizelge 4.13’de her bir motorin-tarımsal ürün fiyatı çifti için oluşturulmuş kapulaların Cramér-von Mises uyum iyiliği test sonuçları verilmiştir.

Çizelge 4.13 Cramér-von Mises uyum iyiliği testi (motorin-tarımsal ürün fiyatı çiftleri için)

		Gaussian	Student t	Clayton	Gumbel	Frank	Joe
Buğday	S_n istatistiği	0.023	0.023	0.046	0.021	0.020	0.023
	p -değeri	0.313	0.318	0.026	0.477	0.501	0.284
Mısır	S_n istatistiği	0.018	0.019	0.036	0.029	0.016	0.038
	p -değeri	0.493	0.523	0.059	0.167	0.604	0.121
Arpa	S_n istatistiği	0.019	0.019	0.023	0.028	0.019	0.041
	p -değeri	0.462	0.425	0.370	0.131	0.493	0.057
Soya	S_n istatistiği	0.026	0.025	0.025	0.021	0.027	0.044
	p -değeri	0.206	0.238	0.141	0.149	0.282	0.040

Çizelge 4.13’deki p değerleri incelendiğinde; motorin-buğday fiyatı çifti için Clayton, motorin-soya fiyatı çifti için Joe kapula hariç diğer kapulaların uygun olduğu ve motorin-mısır fiyatı, motorin-arpa fiyatı çiftleri için tüm kapulaların uygun olduğu sonucuna varılmıştır. Her bir motorin-tarımsal ürün fiyatı çifti için farklı kapula fonksiyonları ile elde edilmiş parametre tahminleri, parametre tahminlerine ilişkin standart hatalar ile LL, AIC ve BIC değerleri aşağıda sunulmuştur.

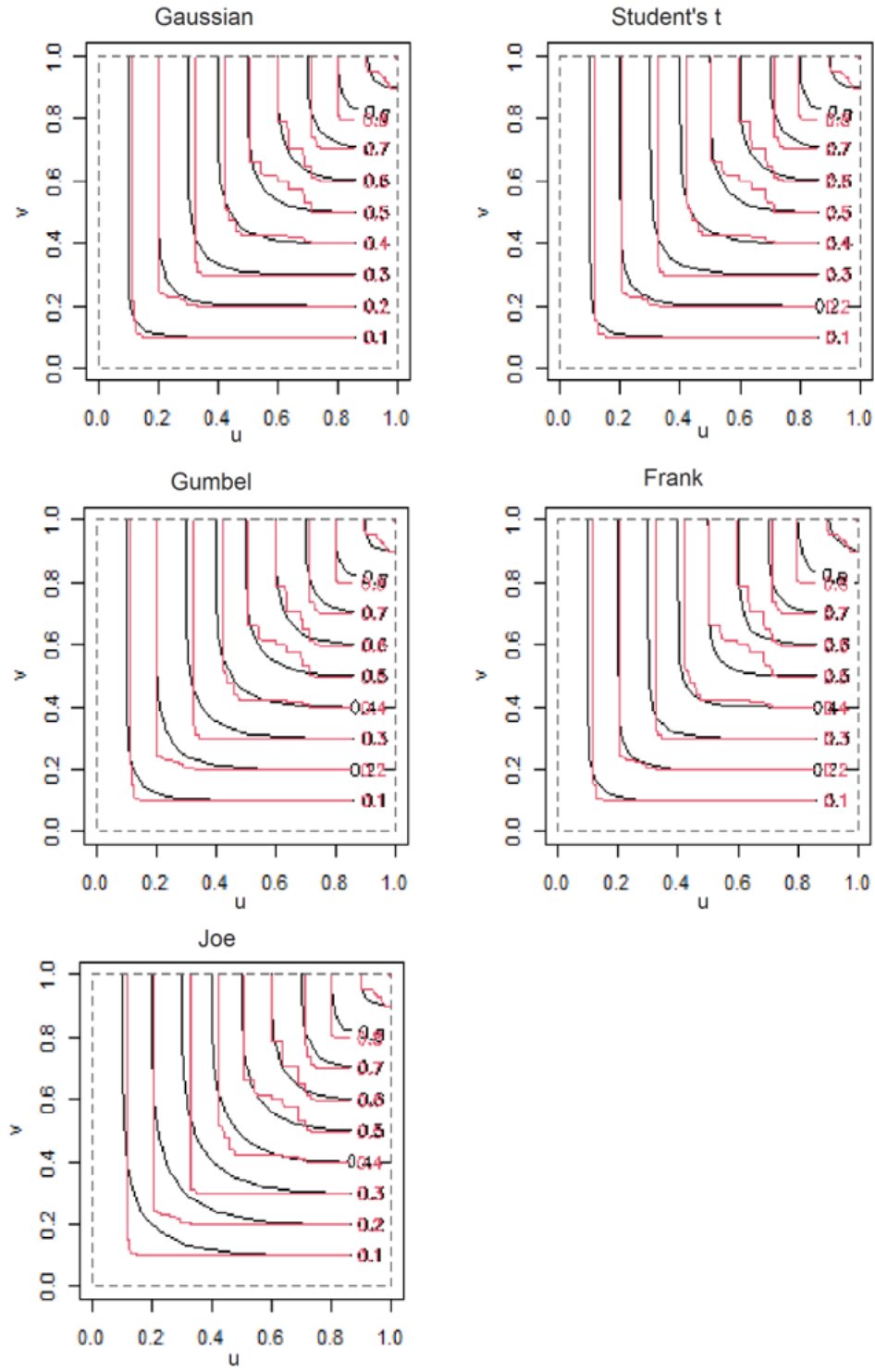
Çizelge 4.14 Motorin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı çifti için kapula model sonuçları

		Gaussian	Student t	Clayton	Gumbel	Frank	Joe
Buğday	$\hat{\rho}$	0.919	0.914	3.594	3.436	15.329	3.975
	std. hata	0.012	0.008	0.392	0.422	2.076	0.585
	$\hat{v}$		29.000				
	std. hata		20.099				
	LL	173.859	172.925	131.004	155.282	182.865	121.169
	AIC	-345.718	-341.850	-260.009	-308.565	-363.731	-240.337
	BIC	-342.461	-335.335	-256.751	-305.307	-360.473	-237.079
Mısır	$\hat{\rho}$	0.907	0.906	3.073	3.262	13.939	3.833
	std. hata	0.012	0.010	0.305	0.367	1.982	0.526
	$\hat{v}$		29.000				
	std. hata		20.096				
	LL	167.531	160.855	114.986	147.244	169.267	116.769
	AIC	-333.062	-317.710	-227.973	-304.928	-336.534	-231.538
	BIC	-329.805	-311.195	-224.715	-301.671	-333.276	-228.280
Arpa	$\hat{\rho}$	0.909	0.911	3.192	3.404	15.004	4.066
	std. hata	0.013	0.010	0.309	0.375	1.849	0.569
	$\hat{v}$		13.999				
	std. hata		10.093				
	LL	162.933	163.263	115.801	153.198	178.866	124.343
	AIC	-323.865	-322.526	-229.603	-304.397	-355.732	-246.685
	BIC	-320.608	-316.011	-226.345	-301.139	-352.475	-243.428
Soya	$\hat{\rho}$	0.917	0.918	3.084	3.685	16.511	4.536
	std. hata	0.012	0.009	0.322	0.437	2.134	0.655
	$\hat{v}$		41.504				
	std. hata		51.269				
	LL	172.622	172.618	114.889	166.360	192.841	137.639
	AIC	-343.243	-341.236	-227.777	-330.720	-383.682	-273.279
	BIC	-339.986	-334.721	-224.519	-327.463	-380.424	-270.022

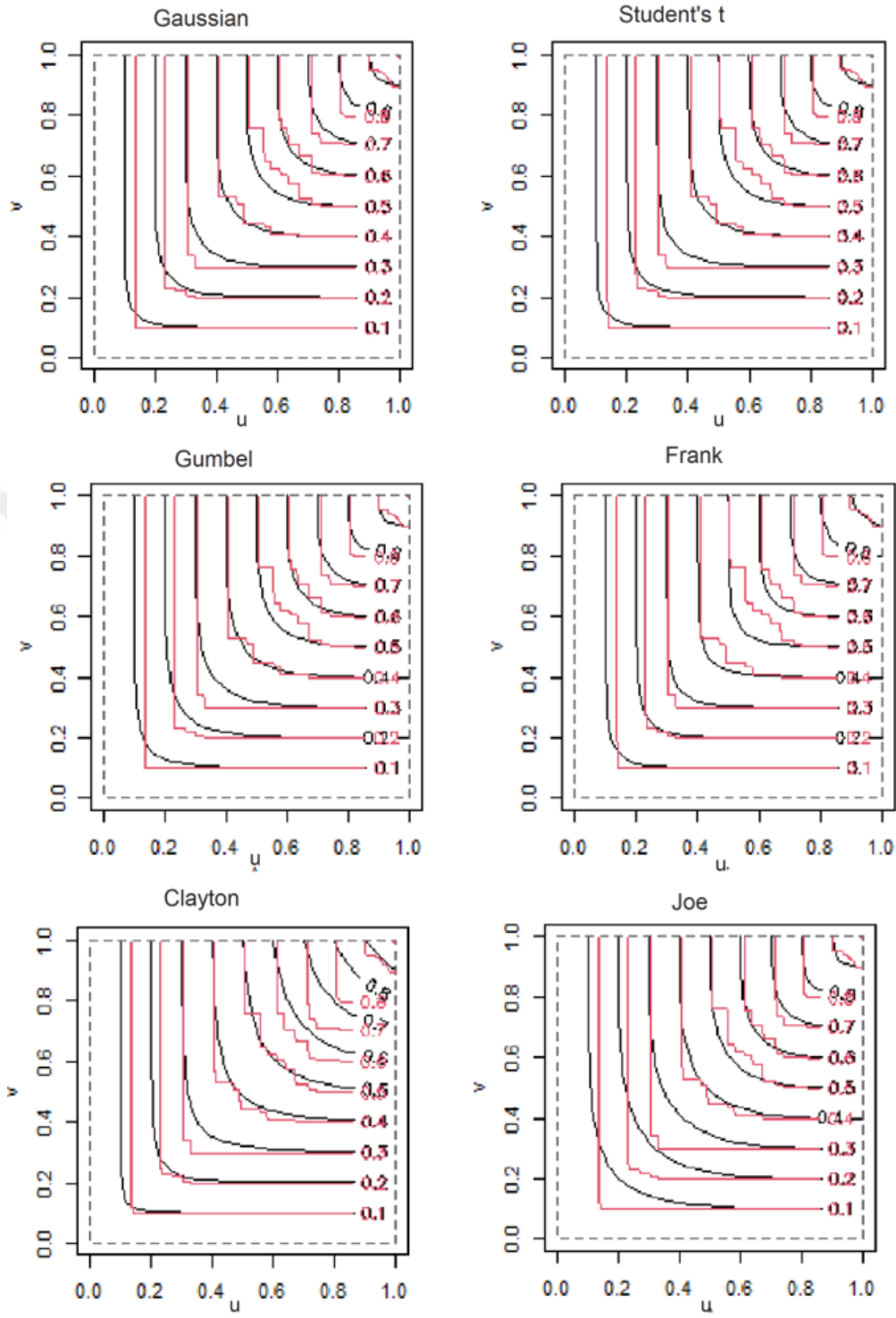
Çizelge 4.14'deki Gaussian, Student t, Clayton, Gumbel, Frank ve Joe kapulaları için bağımlılık parametre tahmininde maksimum olabilirlik metodu kullanılmıştır. Bağımlılık parametre tahminleri her bir motorin fiyatı ile tarımsal ürün fiyatları çifti için anlamlı bulunmuştur. Eliptik kapula ailesinden Gaussian ve Student t kapulalarının korelasyon katsayısı $\hat{\rho}$, 0.906 ile 0.919 aralığında değerler almıştır. Dolayısıyla tüm çiftler için korelasyon katsayısının oldukça yüksek düzeyde pozitif olduğu görülmektedir.

Enerji ve tarımsal ürün fiyatları arasındaki bağımlılık yapısı içerisinde; motorin-buğday fiyatı, motorin-mısır fiyatı, motorin-arpa fiyatı ve motorin-soya fiyatı çiftleri için önemli düzeyde pozitif bağımlılığın olduğu sonucuna varılmıştır. Uygun kapula fonksiyonlarından bağımlılığı en iyi modelleyenini seçimi için LL, AIC ve BIC değerleri kullanılmıştır. Tüm çiftler için LL'nin en yüksek, AIC ve BIC'in ise en küçük değerlerine sahip olan Frank kapula motorin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı arasındaki bağımlılık yapısına en iyi uyan kapuladır. Eliptik kapulalardan Gaussian ve Student t kapulalarının tüm çiftler için uygun kapula olduğu görülmüştür. Bağımlılık parametresi; motorin-buğday fiyatı, motorin-mısır fiyatı, motorin-arpa fiyatı ve motorin-soya fiyatı çiftleri için sırasıyla $\hat{\theta} = 15.329$, $\hat{\theta} = 13.939$, $\hat{\theta} = 15.004$, $\hat{\theta} = 16.511$ olarak tahmin edilmiştir.

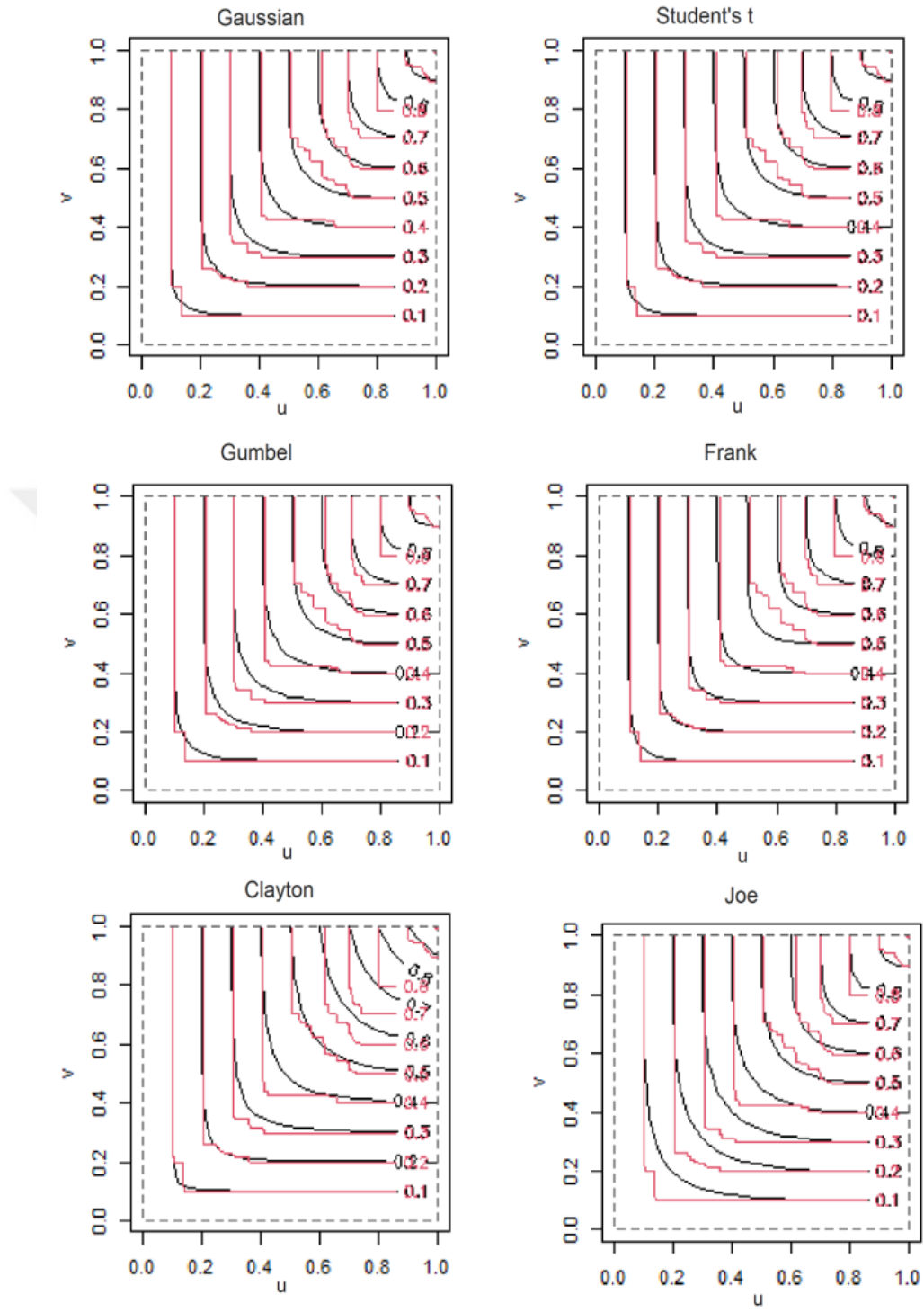
Şekil 4.9-4.12'de motorin ile her bir tarımsal ürün fiyatı çiftleri için uygun kapula kontur grafiği ile deneysel kapula konturları birlikte verilmiştir. Grafiklerde siyah renk ile çizilmiş konturlar ilgili dağılım ile modellenen kapulanın konturlarını, kırmızı ile çizilmiş konturlar ise deneysel kapula konturlarını göstermektedir.



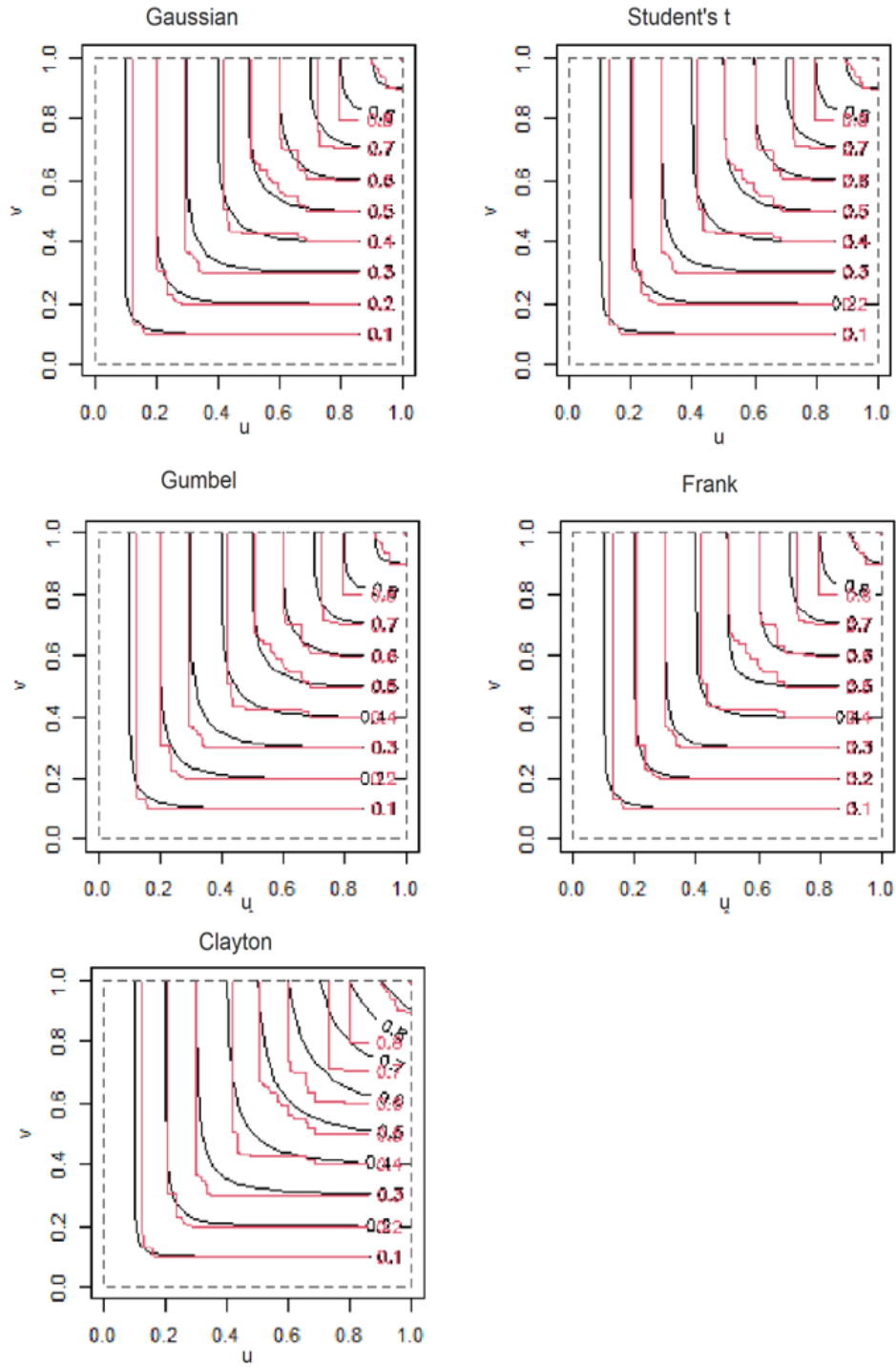
Şekil 4.9 Motorin-buğday fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 4.10 Motorin-mısır fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 4.11 Motorin-arpa fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 4.12 Motorin-soya fiyatı çiftinin kapula ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri

Şekil 4.9-4.12 incelendiğinde, motorin fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı çifti için uygun olan kapulalardan Frank kapula, deneysel kapula konturlarına en yakın konturları olması bakımından en iyi uyan kapuladır. Bu sonuç, her bir çift için model seçim kriterlerine göre uygun bulunan sonuçla da uyşmaktadır.

5. SONUÇ

Ham petrol fiyatları, ekonomi ve finans piyasaları üzerinde çok geniş kapsamlı etkilere sahiptir. Ülke ekonomileri petrol fiyatlarındaki dalgalanmalardan etkilenir, ancak bu etkinin büyüklüğü ülkeden ülkeye değişiklik gösterebilmektedir. Özellikle Türkiye petrol ithalatçısı bir ülke olduğundan petrol fiyatlarındaki değişimlerden önemli ölçüde etkilenmektedir. Petrol fiyatındaki dalgalanmaların etkilediği piyasalar arasında gıda ve tarımsal ürün piyasaları da yer almaktadır. Tarımsal ürün üretici fiyatını etkileyen en önemli değişkenlerden biri petrol fiyatıdır. Son yıllarda artan petrol fiyatları sonrasında değişim gösteren gıda fiyatları ile petrol ve tarımsal ürünler birlikte hareket etme biçimine yani bağımlılıklarına yönelik birçok çalışma farklı yöntemlerle ortaya konulmaktadır. Finans, ekonomi ve aktüerya bilimi gibi alanlarda çok değişkenli verilerin bağımlılığını modellemek için kapulalar kullanılmaktadır. Kapulalar, marjinallerin monoton dönüşümlere göre değişmez olan bağımlılık ölçüleri ile doğrudan ilişki kurabilmekte ve ortak dağılımı bağımlılık yapısını da ortaya koyarak elde etmektedirler.

Bu tez çalışmasında enerji fiyatları ile tarımsal ürün fiyatları arasındaki bağımlılık yapısı kapulalar ile ortaya konulmuştur. Enerji fiyatları için benzin ve motorin fiyatları, tarımsal ürün fiyatları için ise buğday, mısır, arpa ve soya fiyatları ele alınmıştır.

Çalışmada uygulanan metodoloji, zaman serisi yöntemleri ile kapula yaklaşımı olarak iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada analize konu olan değişkenlerin her birinin marjinal dağılımlarının modellenmesinde Box-Jenkins yönteminin aşamaları uygulanmıştır. Model tanımlama aşamasında her bir serinin durağanlığı sağlanıp, modellemeye mevsimsellik de dikkate alınarak uygun ARIMA modelleri oluşturulmuştur. Model tahmini aşamasında en çok olabilirlik yöntemi ile oluşturulan modellerin parametre tahminleri yapılmıştır. Uygun model seçimi AIC değerine göre yapıp model doğrulama aşamasında seçilen modelin uygunluğu değerlendirilmiştir. Uygulamanın ikinci aşamasında marjinal dağılım modellerinden elde edilen standartlaştırılmış hata terimlerinden olasılık integral dönüşümü ile (u, v) çiftleri yani kapula veri seti elde edilmiştir. Gaussian, Student t, Clayton, Gumbel, Frank ve Joe kapula fonksiyonları ile benzin ve her bir tarımsal ürün fiyatı çiftleri ile motorin ve her bir tarımsal ürün fiyatı

çiftleri arasındaki bağımlılık yapısı incelenmiştir. Her iki enerji fiyatı ile tarımsal ürün fiyatı çiftleri arasında pozitif güçlü bağımlılığın olduğu sonucuna varılmıştır. Cramér-von Mises uyum iyiliği sonuçlarına göre uyum sağlayan kapulaların LL, AIC ve BIC değerlerine göre uygun model seçimi yapılmıştır. Her iki enerji fiyatı ile tarımsal ürün fiyatı çiftleri arasında bağımlılığın modellenmesinde en uygun olan Frank kapuladır. Parametrik model ile tahmin edilmiş kapula dağılım fonksiyonu konturları ile deneysel kapula konturlarının karşılaştırmalı grafikleri incelendiğinde her iki enerji fiyatı ile her bir tarımsal ürün fiyatı çifti için en uygun olan Frank kapuladır. Bu sonuç model seçim kriter değerleri ile de uyumludur. Bağımlılıkları simetrik bir kapula ile uygun olan enerji ve tarımsal ürün fiyatlarının piyasalarda yaşanabilecek parlama ve patlama dönemlerinde birlikte hareket edebileceğini göstermektedir.

Bu çalışmadan elde edilen bulgular, benzin ve motorin fiyatlarındaki bir artışın buğday, arpa, mısır ve soya fiyatlarında artışa neden olacağını ortaya çıkarmıştır.

Ülkemizin tahıl ürünlerinin hem ihracatçısı hem de ithalatçısı olduğu göz önüne alındığında, yükselen tarımsal ürün fiyatları ülkemizde ihracatın fazla olduğu dönemlerde ekonomik anlamda kazanca, ithalatın fazla olduğu dönemlerde ise kayba yol açacaktır. Dünyada pek çok ülke petrol fiyatlarındaki aşırı dalgalanmaların etkilerini azaltmak için alternatif yenilenebilir enerji kaynakları arayışına girmişlerdir. Tarımsal ürünlerden mısır, soya gibi yağlı tohumların hammadde olarak geniş tarım alanlarından kolaylıkla sağlanabilmesi, zehirli olmayan ve genel olarak doğada ayrışabilmesinden dolayı biyodizele olan talep artmaktadır. Özellikle ekonomisi tarıma dayalı olan ülkelerde petrole olan bağımlılığı azalacaktır.

Son olarak, bu çalışmadan elde edilen bulgular neticesinde kapula fonksiyonları vasıtasıyla tarımsal ürünler ile enerji fiyatları olarak alınan akaryakıt fiyatları arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesinin literatüre önemli katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Ahmid, A. F. 2020. The Impact of Oil Price and Exchange Rate on Agricultural Commodity Prices:Evidence from Turkey. GSI Journals Serie B: Advancements in Business and Economics, 3(1), 1-15.
- Akdi, Y. 2003. Zaman Serileri Analizi (Birim Kökler ve Kointegrasyon), Bıçaklar Kitabevi, 31-110, 182-185, Ankara.
- Boonyanuphong, P., Sriboonchitta, S. ve Chaiboonsri, C. 2013. Modeling Dependency of Crude Oil Price And Agricultural Commodity Prices: A Pairwise Kapulas Approach. In Uncertainty Analysis in Econometrics with Applications. Springer, 255-267, Berlin.
- Box, G. E., Jenkins, G. M. ve Reinsel, G. C. 2008. Time Series Analysis: Forecasting and Control. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 193, New Jersey.
- Brockwell, P. J. ve Davis, R. A. 2009. Time Series: Theory and Methods, Springer-Verlang,77-325,USA.
- Chang, T. H. ve Su, H. M. 2010. The Substitutive Effect Of Biofuels On Fossil Fuels In The Lower And Higher Crude Oil Price Periods. Energy, 35(7), 2807-2813.
- Cherubini, U., Luciano, E. ve Vecchiado, W. 2004. Kapula Methods In Finance, John Wiley & Sons, 153-176, England.
- Czado, C. 2019. Analyzing Dependent Data with Vine Kapulas. Springer, 27-34, Switzerland.
- Dickey, D. A. ve Fuller, W. A. 1979. Distribution of The Estimates for Autoregressive Time Series With A Unit Root. J. Am. Stat. Assoc. 74, 427-431.
- Genest C. and Favre, A. C. 2007. Everything You Always Wanted to Know About Kapulas But Were Afraid to Ask, Journal of Hydrologic Engineering, 347-368.
- Genest, C., Rémillard, B. ve Beaudoin D. 2009. Goodness-of-fit tests for kapulas: a review and a power study.
- Gujarati, D.N., Porter, D. C. 2006. Temel Ekonometri. Literatür Yayıncılık, 738-746, İstanbul.
- Hoeffding, W. 1940. Scale-Invariant Correlation Theory. In: N. I. Fisher and P. K. Sen (eds.): The Collected Works of Wassily Hoeffding Springer-Verlag, 57–107, New York.

- Hoeffding, W. 1941. Scale-Invariant Correlation Measures For Discontinuous Distributions. In: N. I. Fisher and P. K. Sen (eds.): The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer-Verlag, 109–133, New York.
- Hyrš, M. and Schwarz, J. 2015. Elliptical and archimedean copulas in estimation of distribution algorithm with model migration. In 2015 7th International Joint Conference on Computational Intelligence (IJCCI), vol. 1, 212-219. IEEE.
- Kaynar, O. ve Taştan, S. 2009. Zaman Serisi Analizinde MLP Yapay Sinir Ağları Ve ARIMA Modelinin Karşılaştırılması. Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 161-172.
- Koirala, K. H., Mishra, A. K., D'Antoni, J. M. ve Mehlhorn, J. E. 2015. Energy Prices And Agricultural Commodity Prices: Testing Correlation Using Kapulas Method. Energy, 81, 430-436.
- Lewis, C. D. 1982. Industrial and Business Forecasting Methods, Butterworths Publishing, London.
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Machler, M. ve Yan, J. 2018. Elements of copula modeling with R, Springer International Publishing, 81, USA.
- Montgomery, Douglas C., Jennings, Cheryl L. ve Kulahcı, Murat 2008. Introduction to Time Series and Forecasting, John Wiley & Sons, Hoboken, 231-286, New Jersey.
- Nazlıoğlu, S. ve Soytaş, U. 2012. Oil Price, Agricultural Commodity Prices, and The Dollar: A Panel Cointegration and Causality Analysis. Energy Economics, 34(4), 1098-1104.
- Nelsen, R. B. 1999. An Introduction to Kapulas, Springer Verlag, 5 43,89- 121, 125-179, New York.
- Nelsen, R. B. 2006. An Introduction to Kapula. Springer Science & Business Media, Inc., 1-5, USA.
- Özmen, A. 1986. Zaman serisi analizinde Box-Jenkins Yöntemi ve banka mevduat tahmininde uygulama denemesi. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, 156, Eskişehir.
- Pokorny, M. 1987. An Introduction to Ekonometrics. Basil Blackwell, 343, New York.
- Reboredo, J. C. 2012. Do food and oil prices co-move?. Energy policy, 49, 456-467.
- Rubbert, D. ve Matteson, D. S. 2011. Statistics and Data Analysis for Financial Engineering. Springer Science&Business Media, 183-196, New York.

Sklar, A. 1959. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. Publ. Inst. Statis. Univ. Paris, 8, 229-231.

Sukcharoen, K. 2018. Analyzing extreme comovements in agricultural and energy commodity markets using a regular vine kapula method.

Trivedi, P. K. ve Zimmer, D. M. 2005. Kapula Modeling: An Introduction for Practitioners. Foundations and Trends in Econometrics, Publishers Inc., 63-100, Hanover.

Trivedi, P. K. ve Zimmer, D. M. 2007. Kapula Modeling: An Introduction for Practitioners. Publishers Inc., 1-5, Hanover.

Zhang, Z., Lohr, L., Escalante, C. ve Wetzstein, M. 2010. Food versus fuel: What do prices tell us?. Energy policy, 38(1), 445-451.

