

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ALT MANİFOLDLARDA MİNİMAL YÜZEYLER

Çağla RAMİS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

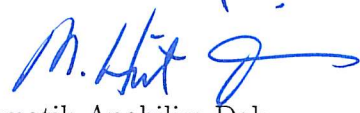
Çağla RAMİS tarafından hazırlanan " ALT MANİFOLDLARDA MİNİMAL YÜZEYLER " adlı tez çalışması 04/02/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Hürşit ÖNSİPER



Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI



Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ



Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK



Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Murat BEKAR



Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

04/02/2019



Çağla RAMİS

ÖZET

Doktora Tezi

ALT MANİFOLDLARDA MİNİMAL YÜZEYLER

Çağla RAMİS

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm, tezde işlenecek konu hakkındaki tarihçeye ve tezin süreç yönetim bilgisine ayrılmıştır.

İkinci bölüm, tezde gerekli olan ön bilgiler ile diğer bölümlerde kullanılan yöntem ve teoremleri içermektedir.

Üçüncü bölümde, $H(1,1)$ üç boyutlu Heisenberg grupta öteleme yüzeyleri tanımlanıp minimallik koşulları hesaplanmıştır, bunlarla ilgili sonuçlar ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, homotetik yüzeyler üç boyutlu Heisenberg grupta tanımlanıp minimallik koşulları araştırılmıştır. Elde edilen denklemler sonucunda belirlenen koşullar altında elemanter ve nümerik yöntemler kullanılarak sonuçlar ve teoremler verilmiş, çeşitli örneklerle teori desteklenmiştir.

Son olarak beşinci bölümde, tezden elde edilen veriler sonuçlandırılmış ve çeşitli öneriler paylaşılmıştır.

Şubat 2019, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lagrange denklemi, minimal yüzey, öteleme yüzeyi, homotetik yüzeyi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

MINIMAL SURFACES IN SUBMANIFOLDS

Çağla RAMİS

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the history of the subject covered in the thesis and the process knowledge of the thesis.

The second chapter contains the pre-information required in the thesis and the methods and theorems to be used in other chapters.

Translation surfaces are defined in the three-dimensional Heisenberg group, $H(1, 1)$ and their minimality conditions are calculated. As a result, the conclusions and theorems are given in chapter three.

The definition of homothetical surfaces are characterized and their minimality conditions are searched in the three-dimensional Heisenberg group. The results and theorems are given using elementary and numerical methods under the conditions determined by the obtained equations, also the theory are supported by several examples in chapter four.

At last, the data obtained from the thesis are finalized and various suggestions are shared in the fifth chapter.

February 2019, 51 pages

Key Words: Lagrange's equation, minimal surface, translation surface, homothetical surface.

TEŞEKKÜR

Beni öğrencisi kabul ederek önce yüksek lisans sonra doktora eğitimimi beraber yürüttüğümüz, danışmanlığın yanında yeri geldiğinde ailesinden biri olarak davranan; insanlığıyla, her konudaki bilgisiyle, enerjisiyle, sabrıyla, bey efendiliğiyle her zaman örnek aldığım ve alacağım canım hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya ve tez çalışmasının her aşamasında bilgilerini, yardımlarını ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen tez izleme kurulu üyeleri Sayın Prof. Dr. Hürşit ÖNSİPER (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye ayrıca değerli zamanlarını ayıran tez savunma jüri üyelerim Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. Murat BEKAR (Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten saygılarımı sunar ve teşekkürü bir borç bilirim.

Araştırmalarımın bir bölümünü yaptığım Romanya'da, kaldığım sürece misafirperverliği ve katkılarından dolayı unutmayacağım Sayın Marian Ioan Muntenau (Alexandru Ioan Cuza University)'ya ve Ailesine gönülden teşekkür ederim.

Varlıklarıyla bu günlere gelmemi sağlayan, en önemli güç kaynaklarım, haklarını ödeyemeyeceğim annem Cumaziye RAMİS, babam Ahmet RAMİS ve neşe kaynağım, biricik kardeşim Emre RAMİS'e bütün desteklerinden ötürü teşekkür ederim.

Eğitim zamanlarımda yanımda olan sadece matematiği değil acı, tatlı günleri de paylaştığım arkadaşlarım Beyhan YILMAZ, Seher KAYA ve Derya KAHVECİ'ye diğer yandan destek ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli mesai arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN'e ve Ailesine teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a eğitim sürem boyunca verdiği destekten dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çağla RAMİS
Ankara, Şubat 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Öteleme Yüzeyleri.....	6
2.2 Homoteti Yüzeyleri	8
2.3 Heisenberg Grup.....	10
2.4 Alternatif Çözüm Metodları.....	12
3. 3-BOYUTLU HEISENBERG GRUPTA MİNİMAL ÖTELEME YÜZEYLERİ	14
3.1 Tip I - Minimal Öteleme Yüzeyleri	15
3.2 Tip II - Minimal Öteleme Yüzeyleri	18
3.3 Tip III - Minimal Öteleme Yüzeyleri	21
4. 3-BOYUTLU HEISENBERG GRUPTA MİNİMAL HOMOTETİ YÜZEYLERİ	27
4.1 Tip I - Minimal Homoteti Yüzeyleri	27
4.2 Tip II - Minimal Homoteti Yüzeyleri	34
4.3 Tip III - Minimal Homoteti Yüzeyleri.....	40
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	47
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu reel uzay
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar uzayı
$\mathbb{E}^n$	n –boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{H}^n$	n –boyutlu hiperbolik uzay
$\mathbb{L}_k^n$	k indisli, n –boyutlu Minkowski uzayı
$H(p, 1)$	$(2p + 1)$ –boyutlu Heisenberg grup
C^n	n . dereceden diferensiyellenebilir yapı
$\cup$	Bileşke işlemi
$\oplus$	Direkt toplam
$\tilde{\nabla}$	Manifold üzerindeki Riemann konneksiyonu
$\langle, \rangle$	Metrik iç çarpımı
Σ	Toplam

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	$\alpha_1(u)$ uzay eğrisi	18
Şekil 3.2	$\mathcal{F}_1(u, v)$, Tip I minimal öteleme yüzeyi	18
Şekil 3.3	$\alpha_2(u)$ uzay eğrisi	21
Şekil 3.4	$\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip II minimal öteleme yüzeyi	21
Şekil 3.5	$\alpha_3(u)$ taban eğrisi	26
Şekil 4.1	$\mathcal{F}_1(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi	33
Şekil 4.2	$\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi	33
Şekil 4.3	$\mathcal{F}_3(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi	34
Şekil 4.4	$\mathcal{F}_4(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi	34
Şekil 4.5	$f(u)$ yaklaşımı (1)	38
Şekil 4.6	$\mathcal{F}_1(u, v)$, Tip II minimal homoteti yüzeyi	39
Şekil 4.7	$f(u)$ yaklaşımı (2)	39
Şekil 4.8	$\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip II minimal homoteti yüzeyi	40
Şekil 4.9	$f(u)$ yaklaşımı ($a = 1$)	45
Şekil 4.10	$\mathcal{F}_1(u, v)$ Tip III minimal homoteti yüzeyi	45
Şekil 4.11	$f(u)$ yaklaşımı ($a = 2$)	46
Şekil 4.12	$\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip III minimal homoteti yüzeyi	46

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	RKN Algoritması Katsayılar Tablosu	13
Çizelge 4.1	RKN algoritma sonuçları (1)	38
Çizelge 4.2	RKN algoritma sonuçları (2)	39
Çizelge 4.3	RKN algoritma sonuçları ($a = 1$)	45
Çizelge 4.4	RKN algoritma sonuçları ($a = 2$)	46



1. GİRİŞ

Matematik tarihinde minimal yüzey teorisinin kökenleri 18. yüzyıl, Euler'in ve Lagrange'nin çalışmalarına dayanır. Bu çalışmalar incelendiğinde yüzeyin minimallığı aynı sınırlara sahip olan yüzeyler arasında en küçük yüzey alanına sahip olma olarak tanımlanmıştır. Verilen tanım doğrultusunda Euler düzlem ve katenodin bir minimal yüzey olduğunu bulmuştur (Euler 1744). Lagrange ise 3-boyutlu Öklid uzayında yüzeylerin C^2 sınıfından diferensiyellenebilir, $z = f(x, y)$ parametresiyle tanımını kullarıp minimallik tanımından bütün Lagrange diferensiyel denklemi olarak da bilinen

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0 \quad (1.1)$$

denklemini elde etmiştir. Fransız matematikçi kısaca analitik fonksiyonlarla tanımlanan yüzeylerin minimal olması için gerek koşulun (1.1) denklemini sağlaması gerektiğini ortaya çıkarırken tersine belirlenen sınırdaki yüzey için elde edilen kısmi türevli denklemin analitik çözümü olmadığı durumlarda belirlenen sınırdaki bir minimal yüzey olamayacağını da göstermiştir (Lagrange 1760). 1776'da Meusnier o zamana kadar elde edilen verilerin geometrik yorumunu yaparak yani bir yüzeyin minimal olmasının yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olmasıyla mümkün olduğunu elde ederek teoriyi geliştirmekle kalmamış aynı zamanda helikoidin bir minimal yüzey olduğunu da ispatlamıştır (Meusnier 1785). Bu gelişmelerin ardından minimal yüzey teorisi elli yıldan fazla süren bir durgunluk dönemine girmiştir.

Teorinin altın çağı 1835'de Scherk tarafından (1.1) denkleminin $f(x, y) = g(x) + h(y)$ formundaki analitik fonksiyonlar için çözümlenmesiyle başlamıştır ve 1890'a kadar devam etmiştir. Alman matematikçinin minimallik koşulunu araştırdığı yüzeyler ayrıca öteleme yüzeyi olarak da bilinir ve Öklid uzayında minimal öteleme yüzeyleri $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(x) = \frac{1}{a} \log(\cos ax) \text{ ve } h(y) = -\frac{1}{a} \log(\cos ay) \quad (1.2)$$

fonksiyonları ile bellidir (Scherk 1835). Scherk daha sonra bütün minimal regle yüzeyleri belirlemeye çalışmış fakat problemi 1842'de Catalan çözmüştür ve he-

likoidin üç boyutlu reel uzayda minimal tek regle yüzey olduğunu ispatlamıştır (Catalan 1842). Dahası bilim insanları farklı yapılar kullanarak yeni minimal yüzey örnekleri bulmayı amaçlamışlardır. Örneğin, Enneper yüzeyi

$$enneper(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right) \quad (1.3)$$

açık parametrelendirme kullanılarak elde edilen ve kendini kesen ilk minimal yüzey olma özelliği taşır. Weierstrass ise izotermal parametrizasyonu kullanarak minimal yüzeyler için ilk genel çözümü elde etmiştir (Weierstrass 1866).

Dahası, bu dönemde matematikte yapılan bahsi geçen gelişmelere ek olarak minimal yüzeyleri fizik alanında araştıran Plateau'yu da gözönünde bulundurmalıyız. Uzay eğrileri biçimindeki telleri sabunlu ve gliserinli çözelti içine daldırarak yaptığı deneylerle Belçikalı fizikçi minimal yüzeyleri en az potansiyel yüzey enerjisine sahip olanlar olarak belirlemiştir. Böylece, Plateau problemi olarak da bilinen verilen bir eğriyi sınır kabul eden minimal yüzeyi bulma problemi doğmuştur ve 1914-1950 yılları arasında geçen minimal yüzeyin ikinci altın çağı da başlamıştır. Plateau probleminin çözümü için bir çok matematikçi çalışmıştır bunlardan Bernstein, Courant ve 1936'da elde ettiği çözümle ilk Fields madalyasını alan Douglas'ın katkıları büyüktür (Osserman 1986).

Minimal yüzey teorisinin üçüncü altın çağı ise teknolojiye erişimle matematiksel problem çözümlerinde ortaya çıkan yöntem ve araştırmaların artışı göz önüne alındığında 1960'da başladığı ve günümüze kadar devam ettiği söylenebilir. Araştırmalar özellikle Lagrange denkleminin genel çözümünü elde etmek yerine Scherk gibi belirli bir yüzey ailesi için minimal alt yüzey ailesini belirlemeye yönelmiştir. Bu yönelmeler ışığında, minimal yüzeyler üzerine yapılan çalışmalardan 1993'te I. Van de Woestyne'nin minimallik koşulunu homotetik yüzeyler için ele almasıyla minimal alt aileyi sadece düzlemler ve helikoidler olarak belirlemesi dikkat çekmektedir. Yani, $f(x, y) = g(x)h(y)$ fonksiyonu ile parametrelendirilen iki boyutlu yüzeyler için Lagrange denkleminin çözümleri düzlemler ya da helikoidlerdir (Van de Woestyne 1993). Eğer minimallik teorisini öteleme ve homoteti yüzeyleri için incelersek; 21.yüzyılda teori üzerindeki gelişmeler hız kazanmış, n -boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında

yüzeyler genelleştirilmiş ve minimallik sonuçları elde edilmiştir. Dahası, öteleme yüzeyleri için farklı metriklerle tanımlanan alt manifoldlarda araştırmalar yapılmıştır, bunlara hiperbolik uzay, Sol_3 uzayı, nilpotent gruplar örnek verilebilir.

3-boyutlu Heisenberg grupta minimal öteleme ve homoteti yüzeylerini belirleme bu tez çalışmasında ele alınan iki ana problemidir. Öncelikle, Heisenberg grubun metrik yapısına uygun olarak öteleme ve homoteti yüzeyleri tanımlanmış sonra minimallik koşulu Meusnier'in geometrik yorumu baz alınarak hesaplanmıştır. Minimallik koşulu olarak bulunan kısmi türevli denklemlerin çözüm yöntemleri iki yüzey ailesi için farklılık göstermektedir. Öteleme yüzeyleri için denklem çözümleri elemanter yöntemlerle elde edilip, minimal öteleme yüzeylerinin düzlemler ve silindirler olduğu belirlenmiştir. Diğer yandan, homoteti yüzeyleri için ortaya çıkan minimallik koşullarının yapısından ötürü problem polinom halkalarında ele alınmış, indirgenen denklemin profiline göre elemanter ya da nümerik metodlar kullanılmış ve sonuçları elde edilmiştir. Dahası, bu çalışma da elde edilen sonuçların diğer alt manifoldlarda bulunan çözümlerle karşılaştırılmasının yapılabilmesi için ikinci bölümde öteleme ve homoteti yüzeylerinin minimalliği ile ilgili çeşitli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ m -boyutlu bir Riemann manifoldu, (M, g) n -boyutlu bir manifold ve $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ bir immersiyon olsun. M üzerindeki metrik, indirgenmiş Riemann metriği $g := \iota^* \tilde{g}$ olarak ele alınırsa bu durumda ι bir izometrik immersiyon olur. Eğer ι birebilirlik özelliğine sahipse, bu durumda M manifoldu, $\tilde{M}$ 'nin bir alt manifoldudur dolayısıyla M 'ye $\tilde{M}$ 'nin Riemannian alt manifoldu denir. M alt manifoldunun teğet ve normal demetleri sırasıyla

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p \tilde{M} \text{ ve } NM = \bigcup_{p \in M} N_p \tilde{M} \quad (2.1)$$

dir. Ayrıca her $p \in M$ için $T_p \tilde{M}$ teğet uzayı, $T_p M$ teğet uzayı ve bu uzayın komplementi $T_p M^\perp$ olmak üzere

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp \quad (2.2)$$

direk toplamı olarak ifade edilir. Yani $v \in T_p \tilde{M}$, $p \in M$ için $v = v^T + v^N$ olacak şekilde $v^T \in T_p M$ ve $v^N \in T_p M^\perp$ vektörleri mevcuttur.

M manifoldu üzerindeki lokal vektör alanları $X, Y \in TM$, $\tilde{M}$ manifoldundaki vektör alanlarına genişletilebilir ve $\tilde{\nabla}$ kovaryant türev operatörü uygulanabilir. O halde $\nabla_X Y = \left(\tilde{\nabla}_X Y \right)^\top$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_X Y = \left(\tilde{\nabla}_X Y \right)^\top + \left(\tilde{\nabla}_X Y \right)^\perp \quad (2.3)$$

dir.

M manifoldunun ikinci temel formunu simetrik bilineer dönüşüm II ile

$$II : TM \times TM \rightarrow NM, \quad II(X, Y) := \left(\tilde{\nabla}_X Y \right)^\top \quad (2.4)$$

tanımlayabiliriz.

Eğer ekboyut 1 ise yalnız bir tane N normal vektörü olacağından vektör değerli ikinci temel form tanımını kullanmaktansa daha basit skalar tanımı kullanabiliriz.

M manifoldunun simetrik, 2-tensör skalar ikici temel formu

$$h(X, Y) = \langle II(X, Y), N \rangle \quad (2.5)$$

dir. Diğer yandan ikinci temel form için bir başka karakterizasyon M manifoldunun S şekil operatörü ile

$$h(X, Y) = \langle X, SY \rangle \quad (2.6)$$

verilir. (2.5) ve (2.6) denklemleri ile h ve S tensor alanları cinsinden aşağıdaki iki denklem mevcuttur:

i. Gauss formülü: $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N$

ii. Weingarten formülü: $\tilde{\nabla}_X N = -SX$

O halde iki boyutlu bir alt manifold için $\{E_1, E_2\}$ teğet uzayının ortonormal bazı olmak üzere yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} [h(E_1, E_1) + h(E_2, E_2)] \quad (2.7)$$

elde edilir. Eğer normal uzayının boyutu bire eşit değilse, $\eta_i \in NM$, $3 \leq i \leq m$ olmak üzere

$$2H = \sum_{i=3}^m [h^i(E_1, E_1) + h^i(E_2, E_2)] \eta_i \quad (2.8)$$

dir.

Tanım 2.1 Her noktasında ortalama eğriliği sıfır olan yüzeye **minimaldir** denir (Gray 1993).

Şimdi, M yüzeyini $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$ parametrizasyonu ile ele alalım ve teğet uzayının ortonormal bir bazı $\{E_1, E_2\}$ olsun. $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f_u = aE_1 + bE_2,$$

$$f_v = \alpha E_1 + \beta E_2,$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun bileşenleri:

$$E = g(f_u, f_u) = a^2 + b^2,$$

$$F = g(f_u, f_v) = a\alpha + b\beta,$$

$$G = g(f_v, f_v) = \alpha^2 + \beta^2,$$

ve ikinci temel formun bileşenleri:

$$h_{11} = h(f_u, f_u), \quad h_{12} = h(f_u, f_v), \quad h_{22} = h(f_v, f_v)$$

elde edilir. Böylece (2.7), yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{Gh_{11} - 2Fh_{12} + Eh_{22}}{2(EG - F^2)} \quad (2.9)$$

bulunur ve minimallik koşulu ise

$$Gh_{11} - 2Fh_{12} + Eh_{22} = 0 \quad (2.10)$$

dir (do Carmo 1976).

2.1 Öteleme Yüzeyleri

Tanım 2.2 $z = f(x) + g(y)$ olmak üzere $X : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3 : (x, y) \rightarrow (x, y, z)$ immersiyonu ile verilen yüzeye **öteleme yüzeyi** denir (Gray 1993).

Ayrıca, X immersiyonu ile belli olan öteleme yüzeyi ortogonal düzlemlerde yatan $\alpha(x) = (x, 0, f(x))$ ve $\beta(y) = (0, y, g(y))$ eğrilerinin toplamı olarak da yorumlanabilir. Şimdi öteleme yüzeylerinin minimallik tarihçesi hakkında bilgi verelim.

- 2-boyutlu öteleme yüzeylerinin minimallik koşulunun çözümü düzlemler dışında **Scherk yüzeyi** olarak adlandırılan yüzeylerdir ve $a \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere

$$z = \frac{1}{a} \log \left(\frac{ax}{ay} \right) \quad (2.11)$$

fonksiyonu ile karakterize edilirler (Scherk 1835).

- 3-boyutlu Öklid uzayı, $\mathbb{E}^3$ de herhangi iki uzay eğrisinin toplamı şeklinde yazılabilen yüzey aşikar olmayan bir minimal yüzeydir ancak ve ancak yüzey parametrelendirilmesi $\theta \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}_0$ olmak üzere

$$X(s, t) = \left(s + t \sin \theta, t \cos \theta, \frac{1}{c} \log(cs) - \frac{1}{c} \log(ct) \right) \quad (2.12)$$

ile tanımlıdır (Dillen vd. 1998).

- $n > 3$, n -boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin iki çeşit genelleştirmesi yapılabilir.

- i. $n \geq 2$ için $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayında $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$ olmak üzere $x_{n+1} = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ parametrelendirmesiyle tanımlanan M^n **öteleme hiperyüzeyinin** minimal olması için gerek ve yeter şart yüzeyin bir hiperdüzlem olması ya da M^2 Scherk yüzeyi olmak üzere

$$M^n = M^2 \times \mathbb{E}^{n-2} \quad (2.13)$$

formunda bir çarpım manifoldu olmasıdır (Dillen vd. 1991).

Burada dikkat edilirse öteleme hiperyüzeyi n tane eğrinin toplamı biçiminde ifade edilebilir.

- ii. $\mathbb{E}^n$ uzayında M **genelleştirilmiş öteleme yüzeyi**

$$h_i(x, y) = f_i(x) + g_i(y), \quad 3 \leq i \leq n$$

fonksiyonları ile

$$X : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n : (x, y) \rightarrow (x, y, h_3(x, y), \dots, h_n(x, y))$$

immersiyonuyla tanımlanır. M yüzeyi minimaldir ancak ve ancak $h_i(x, y)$ fonksiyonları $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ ve $b_1, b_2, c, d \in \mathbb{R}$ sabitleri ile

$$h_i(x, y) = \frac{c_i}{\sum c_i^2} \left[\log \left| \frac{\cos a_1 u}{\cos a_2 v} \right| + b_1 u + b_2 v \right] + cu + dv \quad (2.14)$$

bellidir (Verstraeten vd. 1994).

- 3-boyutlu Minkowski uzayı, $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 - dz^2)$ de ortalama eğriliği sıfır olan spacelike yüzeylere **maksimal yüzey** denir. $\mathbb{L}^3$ uzayındaki maksimal yüzeyler, Kobayashi tarafından birinci ve ikinci çeşit Weierstrass-Enneper formülleri kullanılarak düzlem, katenoid, Enneper yüzeyi ve helikoide denk olmak üzere sınıflandırılmıştır (Kobayashi 1983). Son dönemlerde yapılan çalışmalarla, n -boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{L}^n$ de genelleştirilmiş öteleme yüzeylerinin minimallik karakterizasyonu da spacelike ve timelike durumları için elde edilmiştir (Yang vd. 2018).

- Üst-yarı uzay modeli: Hiperbolik uzayda $\mathbb{H}^3 = \left(\mathbb{R}_+^3, \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} \right)$ minimal öteleme yüzeyleri incelenmiş, uzayın yapısının z -koordinatının diğer koor-

dinatlarla değişememe özelliği de baz alınarak iki tür olacak şekilde tanım verilmiştir. Bunlardan ilk tür için minimal yüzey bulunamayacağı, ikinci türde ise sadece düzlemlerin minimallik koşulunu sağladığı elde edilmiştir (Lopez 2011).

- $\mathbb{H}^{n+1}$ hiperbolik uzayında öteleme hiperyüzeyleri için genelleştirilme yapılmış; birinci tür için minimallığın sağlanmadığı, ikinci türde ise İspanyol matematikçinin üç boyutta kullandığı hesaplamardan farklı bir yöntem kullanarak düzlemden başka var olan minimal öteleme yüzeyleri için genel karakterizasyon elde edilmiştir (Seo 2013).
- $\mathbb{R}^3$ uzayının $ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$ sol invaryant metriği ile oluşan modeli, Sol_3 uzayı olarak bilinir. Bu uzayda öteleme yüzeyleri üç farklı türde parametrelenmiş ve minimallik koşullarını sağlayan alt aileler elde edilmiştir (Lopez ve Munteanu 2012).
- Son dönemlerde ise öteleme yüzeyleri eğrilerin toplamı dışında farklı tanımlarla ele alınmıştır. Örneğin, $\mathbb{E}^4$ uzayında öteleme yüzeyleri bir eğri ve bir yüzeyin toplamı olarak tanımlanabilir. Bu durumda üç boyutlu M öteleme yüzeyinin parametrelendirmesi

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad u \rightarrow (u, 0, 0, f(u))$$

eğrisi ve

$$\Gamma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (v, w) \rightarrow (0, v, w, g(v, w))$$

yüzeyi ile tanımlanan

$$F : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (u, v, w) \rightarrow (u, v, w, f(u) + g(v, w)) \quad (2.15)$$

immersiyonu ile verilir, minimallik koşulunu sağlayan alt öteleme ailesi için çözümler (Moruz ve Munteanu 2016)'de elde edilmiştir.

2.2 Homoteti Yüzeyleri

Tanım 2.3 $z = f(x)g(y)$ olmak üzere $X : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3 : (x, y) \rightarrow (x, y, z)$ immersiyonu ile verilen yüzeye **homoteti yüzeyi** denir (Gray 1993).

Homoteti yüzeylerinin minimalliğini araştırma aşlında öteleme yüzeylerinden önce başlamıştır fakat probleme resmi yaklaşım ilk olarak Belçikalı matematikçi Ignace Van de Woestyne tarafından yapılmıştır. Woestyne minimal yüzey araştırmalarına 3–boyutlu Minkowski uzayında başlamış, (Van de Woestyne 1990) ve (Van de Woestyne 1991)’de elde ettiği çözümlerle ve bu uzayda daha önceden (Kobayashi 1983)’de verilen sonuçlarla birlikte maksimal yüzey teorisini tamamlamıştır. Daha sonra, helikoidin fonksiyonel yapısı ve Scherk yüzeylerinden ilham alarak fonksiyon toplamı yerine çarpımını düşünmüş böylece homoteti yüzeyleri için minimallik koşullarını çözümlemiştir. Sonunda, düzlemden başka sadece helikoid yüzeyinin 3–boyutlu Öklid uzayında minimal homoteti yüzeyi olduğunu ispatlamıştır (Van de Woestyne 1993). Dahası, homotetik hiperyüzeylerin $(n + 1)$ boyutlu yarı-Öklidiyen uzayda karakterizasyonları elde edilmiş ve sıradaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 2.1 M^n , $\mathbb{L}_v^{n+1}$ uzayında non-dejenere minimal homoteti hiperyüzeyi ise M^n ya bir hiperdüzlem ya da aşağıdaki hiper yüzeylerden biridir.

$1, 2, \dots, n+1$ ’in permütasyonu p ve $C, D, \alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2, p_3, q$ ve $L_j, (1 \leq j \leq n)$ sabitler olmak üzere;

- i. $x_{p(n+1)} = Ce^{\sum_{j=1}^n L_j x_{p(j)}}, \quad \sum_{j=1}^n \varepsilon_{p(j)} L_j^2 = 0$
- ii. $x_{p(n+1)} = (x_{p(1)} + \alpha_1) \tan(\alpha_2 x_{p(2)} + q), \quad \varepsilon_{p(1)} \varepsilon_{p(n+1)} = 1$
- iii. $x_{p(n+1)} = (x_{p(1)} + \alpha_1) \tanh(\alpha_2 x_{p(2)} + q), \quad \varepsilon_{p(1)} \varepsilon_{p(n+1)} = -1$
- iv. $x_{p(n+1)} = (x_{p(1)} + \alpha_1) \coth(\alpha_2 x_{p(2)} + q), \quad \varepsilon_{p(1)} \varepsilon_{p(n+1)} = -1$
- v. $x_{p(n+1)} = (Cx_{p(1)} + D) e^{\sum_{j=2}^n L_j x_{p(j)}}, \quad \sum_{j=2}^n \varepsilon_{p(j)} L_j^2 = 0$
- vi. $x_{p(n+1)} = \pm \frac{(x_{p(1)} + p_1)(x_{p(2)} + p_2)}{(x_{p(3)} + p_3)}, \quad \varepsilon_{p(1)} \varepsilon_{p(2)} \varepsilon_{p(3)} \varepsilon_{p(n+1)} = 1$

(Van de Woestyne 1995).

Minkowki uzayındaki minimal homoteti yüzeylerinin genelleştirmesindeki son eksik parça ise Sağlam ve Sabuncuoğlu’nun çalışması ile tamamlanmıştır.

Teorem 2.2 $\mathbb{L}_v^{n+1}$ yarı-Öklidiyen uzayında bütün lightlike homotetik hiperyüzeyler minimaldir (Sağlam ve Sabuncuoğlu 2011).

Yakın tarihte yaptıkları homotetik yüzeylerin minimalliğiyle ilgili çalışmalarıyla Jiu ve Sun teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Öklid uzayında minimal homotetik hiperyüzeylerin hiper düzlemler, kuadratik koniler, kuadratik konide yatan silindirler ve helikoidde yatan silindirler olduğu elde edilmiştir (Jiu ve Sun 2007).

2.3 Heisenberg Grup

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan alt manifold ve üzerindeki Riemann metriğini tanıtır, minimal yüzey teorisinin buradaki uygulanabilirliğinden bahsedilecektir.

Nobel ödüllü Alman fizikçi Werner Heisenberg tarafından kuantum mekanik sistemlerini tanımlamak için kurduğu matematiksel yapı Heisenberg grup olarak bilinir (Heisenberg 1925). Gözlenemeyen büyüklükler için verilen bu karakterizasyon 20. yüzyılın fizikçi ve tarihçilerini çok şaşırtmıştır. Verilen karakterizasyonun ana ilham kaynağı fizikteki karşılık gelme kuramına dayanarak matrislerin değişmeli olmayan özelliklerinin fiziksel yorumlaması olarak kabul edilebilir. Matematiksel anlamda matris teorisine çok da aşina olmayan Heisenberg'in yaklaşımı (MacKinnon 1977) ve (Aitchison vd. 2004) de yeniden inşa edilmiş ve Heisenberg grup yapısı Riemann metrikleriyle birlikte tanımlanmıştır.

$(2p + 1)$ boyutlu reel diferensiyellenebilir manifoldu Heisenberg grup; $p \times p$ birim matris I_p , $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & A & c \\ 0 & I_p & B^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$(p + 2) \times (p + 2)$ tipindeki üst üçgensel matrislerinden oluşup kısaca $H(p, 1)$ ile gösterilir. Matris çarpımı altında

$$i. \begin{pmatrix} 1 & A & c \\ 0 & I_p & B^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \check{A} & \check{c} \\ 0 & I_p & \check{B}^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A + \check{A} & c + \check{c} + A \cdot \check{B} \\ 0 & I_p & (B + \check{B})^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

10

$$ii. \begin{pmatrix} 1 & A & c \\ 0 & I_p & B^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -A & A \cdot B - c \\ 0 & I_p & -B^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

özelliklerinden $H(p, 1)$ 'nin grup yapısına sahip olduğu bellidir.

Şimdi $p = 1$ için 3-boyutlu Heisenberg grubu Riemann metrik yapısıyla ele alalım.

Eğer $H(1, 1)$ için global koordinat sistemini

$$x = A, \quad y = B \quad \text{ve} \quad z = c$$

kabul edersek, $H(1, 1)$ üzerinde

$$g = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2 \quad (2.17)$$

sol-invaryant metriği tanımlanır.

Böylece, $H(1, 1)$ de sol-invaryant vektör alanlarının ortonormal bir bazı

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.18)$$

elde edilir. O zaman manifold üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \xi &= \tilde{\nabla}_\xi X = \frac{-1}{2} Y \\ \tilde{\nabla}_Y \xi &= \tilde{\nabla}_\xi Y = \frac{1}{2} X \\ \tilde{\nabla}_X Y &= -\tilde{\nabla}_Y X = \frac{1}{2} \xi \end{aligned} \quad (2.19)$$

ve diğer durumlarda sıfır olur (Gonzalez ve Chinae 1989).

$H(1, 1)$ de bir M manifoldu için $\{E_1, E_2\}$ cümlesi $T_p M$ teğet uzayının bir bazı ve E, F, G birinci temel formun bileşenleri olmak üzere yüzeyin ortalama eğrilik fonksiyonu

$$H = \frac{Gg(N, \tilde{\nabla}_{E_1} E_1) - 2Fg(N, \tilde{\nabla}_{E_1} E_2) + Eg(N, \tilde{\nabla}_{E_2} E_2)}{2(EG - F^2)} \quad (2.20)$$

ile tanımlıdır (Thurston 1997).

Heisenberg grup üzerinde verilen (2.17) metriği dışında farklı metrikler de tanımlanabilir. Şimdiye kadar yapılan minimal yüzey araştırmalarında homojen Riemann metriği

$$\tilde{g} = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2} (ydx - xdy) \right)^2 \quad (2.21)$$

ile tanımlı Nil_3 uzayı olarak da bilinen Heisenberg grup yapısı kullanılmıştır (Abresch ve Rosenberg 2005). İlk sonuçlar minimal yüzeyler için Weierstrass gösterimlerinin sınıflandırılmasıyla verilmiştir (Inoguchi 2008). Daha sonra, minimal yüzeylerin ortalama eğriliğinin sıfır olma özelliği üzerinden çözüm (2.21) metriğinin yapısından ötürü 6 farklı şekilde tanımlanan öteleme yüzeyleri için sonuçlar elde edilmiştir (Inoguchi vd. 2012). Öklid uzayında yapılan yaklaşıma benzer olarak burada verilen altı çeşit öteleme yüzeyi için minimallik çözümleri iki uzay eğrisinin toplamı tanımından yararlanılarak ele alınarak bazı yüzey karakterizasyonları ile verilmiştir (Yoon vd. 2013).

2.4 Alternatif Çözüm Metodları

Bir yüzeyin minimalliğinin araştırılması için bir çok yöntem mevcuttur. Bu bölüme kadar bahsedilen minimal yüzeylerle ilgili sonuçlara farklı metrik uzaylarda, farklı yöntemlerle ulaşılmıştır. Bu tezde (2.17) Riemann metriği ile tanımlı 3-boyutlu Heisenberg grupta öteleme ve homoteti yüzeylerinin minimalliği yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olması tanımı kullanılarak ele alınacaktır. Bu yaklaşımla minimallik koşulları non-lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözülmesine indirgenmiş olmaktadır. Öteleme yüzeyleri için çeşitli elemanter işlemler ve diferensiyel denklem çözüm yöntemleri kullanılarak minimallik koşullarının çözümleri elde edilmiştir. Diğer yandan, homoteti yüzeylerinin her koşulu için analitik çözümün elde edilmesinin doğurduğu zorluktan ötürü bazı problemler polinom halkalarında ele alınmış, hatta gerekli şartlarda başlangıç değer problemleri olarak incelenip nümerik çözümlere ulaşılmıştır.

Alman matematikçiler Carl David Tolme Runge ve Wilhelm Kutta tarafından 1900’li yıllarda geliştirilen Runge-Kutta (RK) yöntemleri adi diferensiyel denklemlerin çözüm yaklaşımları için kapalı ve açık iterasyonlu yöntemler ailesinin önemli bir tipidir. RK yöntemleri aslında Euler yöntemi gibi tek adımlı diferensiyel eşitlik çözüm yöntemlerinin temelini oluşturmaktadır. Bu yöntemlerin temelinde verilen diferensiyel denklemin istenen bir noktadaki bağımlı değişken değerini bulmaktır ve bunun için başlangıç değerinin üzerine, tahmini yapılan eğimle aralık büyüklüğünün çarpımı eklenmektedir. Bu çalışmada ise bu yöntemlerden ikinci mertebeden diferensiyel den-

klemlerin çözümü için kullanılan Runge-Kutta-Nyström (RKN) yöntemiyle nümerik yaklaşım yapacağız.

RKN yöntemi algoritması $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_N = x_0 + Nh$ olmak üzere N eşit aralıklı noktalarda $y'' = f(x, y, y'), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ başlangıç değer probleminin çözümünü hesaplar. Burada f fonksiyonu $[x_0, x_N]$ aralığında tek bir çözüme sahiptir. $x_{n+1} = x_0 + (n+1)h, 0 \leq n \leq N$ noktaları için **çizelge 2.1**'den belli olan algoritmanın dört adımı:

$$k_i = f \left(x_n + c_i h, y_n + c_i h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^4 \bar{a}_{ij} k_j, y'_n + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} k_j \right), \quad 1 \leq i \leq 4 \quad (2.22)$$

olup $y(x_{n+1})$ ve $y'(x_{n+1})$ için yaklaşık değerler sırasıyla

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^4 \bar{b}_j k_j \quad (2.23)$$

ve

$$y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=1}^4 b_j k_j \quad (2.24)$$

dir (Hairer ve Wanner 1973).

Çizelge 2.1 RKN Algoritması Katsayılar Tablosu

c_1	0									
c_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$				$\frac{1}{2}$				
					$\bar{a}_{ij}$			a_{ij}		
c_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0			0	$\frac{1}{2}$			
c_4	1	0	0	$\frac{1}{2}$		0	0	1		
$\bar{b}_i$	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\leftarrow b_i$

3. 3-BOYUTLU HEISENBERG GRUPTA MİNİMAL ÖTELEME YÜZEYLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Heisenberg grupta öteleme yüzeyleri tanımlanıp, minimallik koşulları elde edilerek, çözümleri verilecektir. Ayrıca çözümler Öklid geometrisi bakış açısıyla yorumlanıp, örneklerle açıklanacaktır. $H(1,1)$, 3-boyutlu Heisenberg grubun metrik özelliklerinden koordinat fonksiyonlarının izometrik olmaması gözönüne alındığında bu uzayda öteleme yüzey tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 3.1 $H(1,1)$ Heisenberg uzayında M öteleme yüzeyi $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow H(1,1)$ immersiyonu ile

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)), \quad (\text{Tip I}) \quad (3.1)$$

veya

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + g(v), v), \quad (\text{Tip II}) \quad (3.2)$$

veya

$$\mathcal{F}(u, v) = (f(u) + g(v), u, v), \quad (\text{Tip III}) \quad (3.3)$$

olarak f ve g türevlenebilir fonksiyonlarıyla üç farklı şekilde tanımlanır.

M yüzeyinin $T_p M$ teğet uzayının bir bazı $\{\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v\}$ ve yüzeyin birinci temel formunun bileşenleri

$$E = g(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u), \quad F = g(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v), \quad G = g(\mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v) \quad (3.4)$$

olmak üzere (2.20)'den yüzeyin ortalama eğriliği H

$$H = \frac{Gg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) - 2Fg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) + Eg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v)}{2(EG - F^2)} \quad (3.5)$$

denklemleriyle ifade edilir. Dolayısıyla M yüzeyi için minimallik koşulu

$$Gg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) - 2Fg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) + Eg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) = 0 \quad (3.6)$$

dir.

Şimdi öteleme yüzeyinin üç durumu için minimallik koşullarını araştıralım.

3.1 Tip I - Minimal Öteleme Yüzeyleri

$H(1, 1)$ uzayında $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$ formunda parametrelenmiş M öteleme yüzeyi için minimallik koşulunu elde edelim.

M yüzeyinin teğet uzayı

$$\mathcal{F}_u = X + f'(u)\xi \text{ ve } \mathcal{F}_v = Y + (g'(v) - u)\xi \quad (3.7)$$

vektörleriyle gerilir. Yüzeyin birim normal vektörü ise

$$N = \frac{1}{\alpha} (-f'(u)X - (g'(v) - u)Y + \xi) \quad (3.8)$$

$\alpha^2 = 1 + f'(u)^2 + (g'(v) - u)^2$ ile ifade edilir.

Birinci temel form katsayıları

$$\begin{cases} E = 1 + f'(u)^2 \\ F = f'(u)(g'(v) - u) \\ G = 1 + (g'(v) - u)^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

ve yüzey üzerindeki Levi-Civita konneksiyonun bileşenleri

$$\begin{cases} \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u = -f'(u)Y + f''(u)\xi \\ \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v = [g'(v) - u]X + g''(v)\xi \\ \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v = \frac{1}{2} [f'(u)X - (g'(v) - u)Y - \xi] \end{cases} \quad (3.10)$$

dir. Öyleyse (3.6) denklemiyle verilen minimallik koşulu

$$f''(u) + g''(v) + f''(u)[g'(v) - u]^2 + f'(u)^2 g''(v) + f'(u)[g'(v) - u] = 0 \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

Tip I minimal öteleme yüzeylerini bulmak için (3.11) kısmi türevli denkleminin çözümleri olan $f(u)$ ve $g(v)$ fonksiyonlarını elde etmeliyiz. Öncelikle f', f'', g' ve g'' fonksiyonlarının her noktada sıfırdan farklı olduklarını varsayalım. (3.11) denkleminin sırasıyla u ve v değişkenlerine göre türevleri alınırsa

$$2 \left(\frac{f'''}{f'f''} + \frac{g'''}{g'g''} \right) = \frac{1}{g'} \left(\frac{1}{f'} + \frac{2uf'''}{f'f''} \right) \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.12) için aynı işlem yani sırasıyla u ve v değişkenlerine göre türev alma tekrarlanırsa

$$\left(\frac{1}{g'}\right)' \left(\frac{1}{f'} + \frac{2uf'''}{f'f''}\right)' = 0 \quad (3.13)$$

bulunur ve ilk terim sıfır olamayacağından bir $c_1 \in \mathbb{R}$ sabiti ile

$$\frac{1}{f'} + \frac{2uf'''}{f'f''} = c_1 \quad (3.14)$$

sağlanır. (3.12) ve (3.14) denklemlerinin kombinasyonu ile

$$\frac{f'''}{f'f''} = \frac{c_1}{2g'} - \frac{g'''}{g'g''} \quad (3.15)$$

elde edilir. Dikkat edilirse (3.12) de eşitliğin sol kısmı u değişkenin bir fonksiyonu iken sağ kısım v değişkenin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sabitleri ile

$$f'' = \frac{c_2}{2}f'^2 + c_3 \quad (3.16)$$

ve

$$\frac{g'''}{g''} = \frac{c_1}{2} - c_2g' \quad (3.17)$$

eşitlikleri mevcuttur.

Şimdi (3.16) ifadesini (3.14) denkleminde gerekli işlemlerle yerleştirirsek sonuçta

$$f' = \frac{1}{c_1 - 2c_2u} \quad (3.18)$$

olduğu görülür. Ayrıca $f'' \neq 0$ olduğundan c_2 sabiti sıfırdan farklı olmak zorundadır.

f fonksiyonun türev değerlerinin (3.16) denkleminde yerine konmasıyla

$$8c_2^2c_3u^2 - 8c_1c_2c_3u + 2c_1^2c_3 - 3c_2 = 0 \quad (3.19)$$

formundaki u değişkenin ikinci dereceden fonksiyonu elde edilir. Polinomun bütün katsayıları sıfırlanmalıdır, dolayısıyla c_2 sıfırdır. Sonuçta bu durum $f'' \neq 0$ kabulüyle çelişir.

Diğer taraftan, eğer her noktada $f'' \neq 0$ fakat $f'(u_0) = 0$ olacak şekilde bir $u_0 \in (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ için benzer çelişki g fonksiyonu için de elde edilir. Dolayısıyla (3.11) minimallik koşulu $f'' = 0$ veya $g'' = 0$ koşulları altında incelenmelidir.

1. Kabul edelim ki $f(u) = Au + B$, $A, B \in \mathbb{R}$ bir afin fonksiyon olsun. (3.11) denklemini

$$(1 + A^2)g'' + Ag' = Au \quad (3.20)$$

haline gelir. Açıkça görülüyor ki A sıfır olmalıdır ve $g'' = 0$ elde edilir.

Böylelikle, Tip I minimal yüzeyi olarak $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, av + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ düzlemi elde edilir.

2. Eğer g fonksiyonunu afin olacak biçimde yani $g(v) = av + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ kabul edersek (3.11) minimallik koşulundan

$$[1 + (a - u)^2] f'' + (a - u)f' = 0 \quad (3.21)$$

elde edilir.

(3.21) diferensiyel denkleminin çözümü $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(u) = c_1 \left[(u - a) \sqrt{1 + (u - a)^2} - \log \left(\sqrt{1 + (u - a)^2} - (u - a) \right) \right] + c_2 \quad (3.22)$$

dir. Burada ayrıca, (3.22) eşitliğinde c_1 sabitinin sıfır değeri için, minimal yüzey olarak $(u, v, au + b)$ denklemiyle belli olan düzlem ele edilir.

Böylece, Tip I öteleme yüzeylerinin minimallik durumunu açıklayan teoremi verebiliriz.

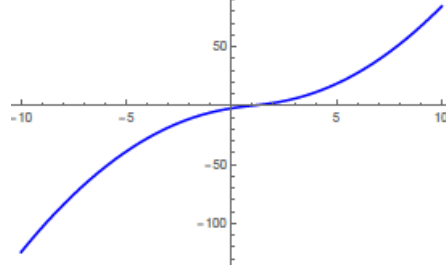
Teorem 3.1 $H(1, 1)$, 3-boyutlu Heisenberg uzayında Tip I minimal öteleme yüzeylerinin denklemini $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, c \left[(u - a) \sqrt{1 + (u - a)^2} - \log \left(\sqrt{1 + (u - a)^2} - (u - a) \right) \right] + av + b) \quad (3.23)$$

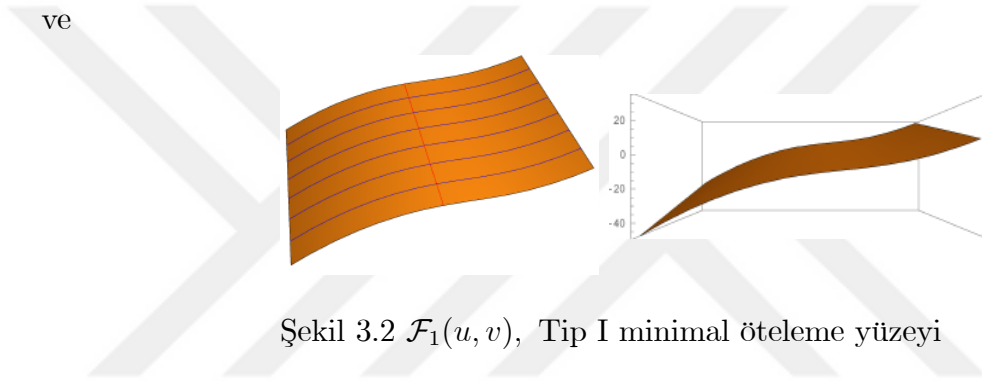
dir.

Örnek 3.1 $a = 1$, $b = 1$ ve $c = 1$ değerleri için (3.23) parametresiyle verilen $\mathcal{F}_1(u, v)$ Tip I minimal öteleme yüzeyini oluşturan fonksiyonlar $g_1(v) = v + 1$ ve $f_1(u) = (u - 1) \sqrt{1 + (u - 1)^2} - \log \left(\sqrt{1 + (u - 1)^2} - u + 1 \right)$ dir. Dahası $\mathcal{F}_1(u, v)$

yüzeyi $d_1 = (0, v, g_1)$ doğrusunun $\alpha_1 = (u, 0, f_1)$ uzay eğrisi boyunca kendine paralel hareketiyle oluşur ve Öklid anlamında bir silindir yüzeyi belirtir. Öyleyse



Şekil 3.1 $\alpha_1(u)$ uzay eğrisi



Şekil 3.2 $\mathcal{F}_1(u, v)$, Tip I minimal öteleme yüzeyi

grafikleri elde edilir.

3.2 Tip II - Minimal Öteleme Yüzeyleri

3-boyutlu Heisenberg uzayında M öteleme yüzeyi $\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + g(v), v)$ parametresiyle verilsin. $T_p M = Sp\{\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v\}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}_u = X + f'(u)Y - uf'(u)\xi \text{ ve } \mathcal{F}_v = g'(v)Y + (1 - ug'(v))\xi \quad (3.24)$$

dir. M yüzeyin birim normal vektörü $\mu^2 = f'(u)^2 + g'(v)^2 + (1 - ug'(v))^2$ ile

$$N = \frac{1}{\mu} (f'(u)X - (1 - ug'(v))Y + g'(v)\xi) \quad (3.25)$$

ifade edilir.

Gerekli işlemlerle (3.6) denklemini sonucu M , Tip II öteleme yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$f'' [g'^2 + (1 - ug')^2] + g'' [1 + (1 + u^2)f'^2] + f'g' [1 - ug'] = 0 \quad (3.26)$$

olur. Önceki bölümde yapılan işlemlere benzer olarak burada (3.26) kısmi diferensiyel denkleminin çözümleri elde edilecektir.

$g'g'' \neq 0$ koşulu altında v değişkenine göre (3.26)'ın türevi alınır

$$\left(\frac{g'''}{g'g''}\right) [1 + (1 + u^2)f'^2] + \left(\frac{1}{g'}\right) [f' - 2uf''] + 2[(1 + u^2)f'' - uf'] = 0 \quad (3.27)$$

elde edilir.

v değişkenine göre (3.27) denkleminin türevini bulup belirli düzenlemeler yaptıktan sonra $c, c_1 \in \mathbb{R}$ sabitleri ile aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{g'''}{g'g''} = \frac{c}{g'} + c_1 \quad (3.28)$$

$$2uf'' - f' = c[1 + (1 + u^2)f'^2] \quad (3.29)$$

Ayrıca (3.28) ve (3.29) denklemlerinin (3.27) ile kombinasyonu

$$2[uf' - (1 + u^2)f''] = c_1[1 + (1 + u^2)f'^2] \quad (3.30)$$

bulunur.

Minimallik koşulu, (3.26) denklemini yeniden

$$g''[1 + (1 + u^2)f'^2] + g'[f' - 2uf''] + g'^2[(1 + u^2)f'' - uf'] + f'' = 0 \quad (3.31)$$

ile ifade edelim.

(3.29) ve (3.30) ifadelerinin (3.31) denklemine yerleştirilmesiyle

$$[1 + (1 + u^2)f'^2] \left(g'' - cg' - \frac{c_1}{2}g'^2\right) + f'' = 0 \quad (3.32)$$

elde edilir. Burada terimleri u ve v değişkenlerine göre inceleneyerek, aşağıdaki çıkarımları $k \in \mathbb{R}$ sabitinin varlığıyla yapabiliriz.

$$g'' - cg' - \frac{c_1}{2}g'^2 = k \quad (3.33)$$

$$f'' = -k[1 + (1 + u^2)f'^2] \quad (3.34)$$

(3.29) ve (3.30), (3.34) ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} f' + (c + 2uk) [1 + (1 + u^2)f'^2] &= 0 \\ 2uf' - [c_1 - 2k(1 + u^2)] [1 + (1 + u^2)f'^2] &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerine dönüştürler. Eğer $f' \neq 0$ ise iki denklem

$$c_1 - 2k(1 + u^2) + 2u(c + 2uk) = 0 \quad (3.35)$$

ile u değişkeninin ikinci dereceden bir polinomunu temsil ederler. Burada katsayıların sıfırlanmasıyla k, c ve c_1 sabitlerinin sıfır olması zorunluluğu ortaya çıkar. Dolayısıyla $f' = 0$ olup, çelişki elde edilir. Diğer taraftan, f' lokal olarak sıfırsa g lineer fonksiyon olur ve $g'g'' \neq 0$ koşulu ile tekrar çelişki elde edilir.

Sonuçta minimallik koşulunun çözümü için $g'' = 0$ yani $g(v) = av + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmasının gerekliliği açıktır. Böylece (3.26) denklemi

$$[(1 - au)^2 + a^2] f'' + a(1 - au) f' = 0$$

olur.

- Eğer $a = 0$ ise f fonksiyonu lineerdir.
- Eğer $a \neq 0$ ise o halde $\bar{f}(u) = \sqrt{a^2 + (au - 1)^2}$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(u) = c_1 [(au - 1) \bar{f}(u) + a^2 \log(au - 1 + \bar{f}(u))] + c_2. \quad (3.36)$$

dir.

Tip II öteleme yüzeylerinin minimallığı ile sıradaki teoremi verebiliriz.

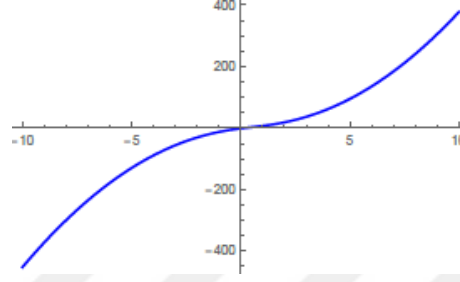
Teorem 3.2 3-boyutlu Heisenberg uzayında Tip II minimal öteleme yüzeylerinin denklemleri

- Düzlemler: $\mathcal{F}(u, v) = (u, \alpha u + b, v)$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$ ve
- Silindirler: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f(u)$ fonksiyonu (3.36) denklemini sağlamak üzere

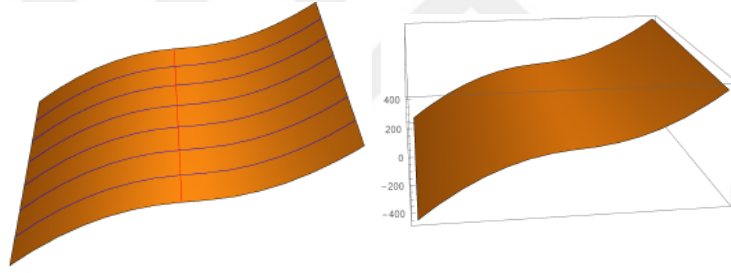
$$\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + av, v) \quad (3.37)$$

dir.

Örnek 3.2 $a = 2$, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ değerleri için (3.36) parametresiyle verilen $f_2(u)$ ve $g_2(v) = 2v$ fonksiyonlarıyla belli olan $\mathcal{F}_2(u, v) = (u, f_2(u) + g_2(v), v)$ Tip II minimal öteleme yüzeyi $d_2 = (0, g_2, v)$ doğrusunun $\alpha_2 = (u, f_2, 0)$ uzay eğrisi boyunca kendine paralel hareketiyle oluşan bir silindir yüzeyidir ve grafikleri



Şekil 3.3 $\alpha_2(u)$ uzay eğrisi



Şekil 3.4 $\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip II minimal öteleme yüzeyi

dir.

3.3 Tip III - Minimal Öteleme Yüzeyleri

$H(1, 1)$, 3-boyutlu Heisenberg uzayında $\mathcal{F}(u, v) = (f(u) + g(v), v, u)$ parametresiyle verilen M öteleme yüzeyinin minimallik koşulunu araştıralım. Yüzeyin teğet düzlemi $T_p M$ nin bir bazı ve normal vektörü

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = f'(u)X + \xi \\ \mathcal{F}_v = g'(v)X + Y - (f(u) + g(v))\xi \\ N = \frac{1}{\eta} [-X + [g'(v) + f'(u)(f(u) + g(v))]Y + f'(u)\xi] \end{cases} \quad (3.38)$$

olup $\eta = [1 + f'(u)^2 + [g'(v) + f'(u)(f(u) + g(v))]^2]^{1/2}$ dir.

(3.6) denklemindeki gerekli elemanların Tip III öteleme yüzeyi için elde edilmesiyle minimallik denklemi

$$f'' [1 + g'^2 + (f + g)^2] + g''[1 + f'^2] + f'^2(f + g) + f'g' = 0 \quad (3.39)$$

dir.

(3.39) denkleminin sırasıyla u ve v değişkenlerine göre türevleri alınır

$$2f'''g' [f + g + g''] + 2f'f'' [2g' + g'''] + f''g'' = 0 \quad (3.40)$$

elde edilir. Burada $f'''g'$ teriminin sıfırdan farklı olduğunu kabul edersek (3.40) sıradaki denkleme denktir,

$$2f + 2(g + g'') + \frac{2f'f''}{f'''} \left(2 + \frac{g'''}{g'}\right) + \frac{f''}{f'''} \frac{g''}{g'} = 0. \quad (3.41)$$

Tekrar sırasıyla u ve v değişkenlerine göre türevleri alınır

$$\left(\frac{f''}{f'''}\right)' \left(\frac{g''}{g'}\right)' + \left(\frac{2f'f''}{f'''}\right)' \left(\frac{g'''}{g'}\right)' = 0 \quad (3.42)$$

elde edilir.

Şimdi (3.42) denklemini çeşitli durumlara ayırarak incelememiz gerekmektedir.

A. Kabul edelim ki $\frac{f'f''}{f'''}$ ve $\frac{g''}{g'}$ terimleri sabitten farklı fonksiyonlar olsun. O zaman $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{f''}{f'''} = 2c \frac{f'f''}{f'''} + c_1 \quad (3.43)$$

ve

$$\frac{g'''}{g'} = -c \frac{g''}{g'} + c_2 \quad (3.44)$$

elde edilir.

(3.43) ve (3.44) eşitliklerinin (3.41)'de yerine yazılmasıyla

$$\left[f + (2 + c_2) \frac{f'f''}{f'''}\right] + \left[(g + g'') + c_1 \frac{g''}{2g'}\right] = 0 \quad (3.45)$$

bulunur. Burada diğer bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti ile

$$f + (2 + c_2) \frac{f'f''}{f'''} = \lambda \quad (3.46)$$

ve

$$2(g + g'') + c_1 \frac{g''}{g'} = -2\lambda \quad (3.47)$$

elde edilir.

A.1. $c \neq 0$ olsun. (3.43) ve (3.46) birleştirilmesiyle $x = 2c\lambda + c_1(2 + c_2)$ ve $y = -2c$ olmak üzere

$$f' = \frac{\lambda - f}{x + yf} \quad (3.48)$$

bulunur. Dahası

$$f'' = \frac{-(x + \lambda y)(\lambda - f)}{(x + yf)^3} \quad (3.49)$$

dir.

(3.43)'nin integrallenmesiyle

$$f' = cf'^2 + c_1 f'' + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.50)$$

elde edilip, (3.48) ve (3.49) türev değerleri burada yerine yazılırsa $f(u)$ fonksiyonunun üçüncü dereceden bir polinomu elde edilir. Polinomlar teorisinden en az bir reel kökün varlığı aşikar olduğundan, çelişkiyi önlemek için polinomun bütün katsayıları sıfır olmak zorundadır. Böylece $\alpha = \frac{1}{4c}$, $x = 2c\lambda$ olur ve $x + \lambda y = 0$ dir. Sonuçta $f'' = 0$ olup bu durum hipotezimiz $f'''g' \neq 0$ ile çelişir.

A.2. Eğer $c = 0$ ise $\frac{f''}{f'''} = c_1$ ve $\frac{g''}{g'} = c_2$ dir. Ayrıca

$$f + (2 + c_2)c_1 f' = \lambda \quad \text{ve} \quad (g + g'') + c_1 \frac{g''}{g'} = -2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.51)$$

dir. Buradan takiben $f'' + (2 + c_2)c_1 f''' = 0$ dir, böylece $c_1(3 + c_2)f''' = 0$ elde edilir. Hipotez gereği c_1 sıfırdan farklı olduğundan ve f''' sıfır olamayacağından, $c_2 = -3$ dir. Böylece

$$g'' = -3g + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (3.52)$$

bulunur. Elde edilen verileri kullanarak (3.51) denklemlerini

$$f - c_1 f' = \lambda \quad (3.53)$$

ve

$$g' = c_1 \frac{\beta - 3g}{2g - \beta - 2\lambda} \quad (3.54)$$

olarak yazabiliriz.

(3.54) ifadesi (3.52) de kullanılırsa

$$(\beta - 3g) \left[1 - \frac{c_1^2 (\beta + 6\lambda)}{(2g - \beta - 2\lambda)^3} \right] = 0 \quad (3.55)$$

elde edilir. Bu eşitlik g fonksiyonunun sabit olduğunu belirtir ki bu da $f'''g' \neq 0$ ile çelişir.

B. Eğer $\frac{f'f''}{f'''} = \text{sabit}$ fonksiyon ise (3.42) eşitliğinden aşağıdaki çıkarımlar yapılabilir.

- $\frac{f''}{f'''} = \text{sabit}$ fonksiyondur, dolayısıyla f' de sabit fonksiyon olmak zorundadır ve bu durum $f'''g' \neq 0$ ile çelişir.
- ya da $\frac{g''}{g'} = \text{sabit}$ dir.

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için $\frac{f'f''}{f'''} = a_1$ ve $\frac{g''}{g'} = a_2$ olsun, ayrıca $\frac{g'''}{g'} = a_2^2$ dir. (3.41) denklemini kullanarak $c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz,

$$f + \frac{a_2 f''}{2f'''} = c \quad \text{ve} \quad g + g'' = -a_1 (2 + a_2^2) - c. \quad (3.56)$$

(3.56) de ilk denklemi f' ile çarparsak $f' = \frac{a_1 a_2}{2(c - f)}$ elde ederiz, buradan $f'' = \frac{a_1^2 a_2^2}{4(c - f)^3}$ dir. Diğer yandan, $f'f'' = a_1 f'''$ olduğundan $f'^2 = a_1 f'' + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dir. Böylece

$$(c - f)a_1^2 a_2^2 = 2a_1^3 a_2^2 + 4\alpha(c - f)^3 \quad (3.57)$$

bulunur. Dahası her u değişkeni için (3.57) polinomunu sağlayan f fonksiyonunun varlığından $\alpha = 0$ ve $a_2 = 0$ (a_1 sıfırdan farklı olduğundan) olmalıdır.

Dolayısıyla, (3.56) dan $f = c$ elde edilir ki böyle bir ifade mümkün değildir.

Buraya kadar $f'''g' \neq 0$ hipotezi altında yapılan işlemler de minimallik koşulunu sağlayan f ve g fonksiyonları bulunamamıştır, bu nedenle $M-$ Tip III öteleme yüzeyinin minimal olabilmesi için $f'''g'$ teriminin sıfır olmasının gerekliliği aşıkardır.

- C. $g(v) = a$ sabit bir fonksiyon olsun. Dolayısıyla (3.39) minimallik koşulu f fonksiyonun ikinci dereceden lineer olmayan diferensiyel denklemine dönüştür,

$$f''[1 + (f + a)^2] + f'^2(f + a) = 0. \quad (3.58)$$

(3.58) diferensiyel denkleminin kapalı çözümü tanımladığımız

$$I(x) = x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad (3.59)$$

fonksiyonu yardımıyla $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$I(f(u) + a) = k_1u + k_2 \quad (3.60)$$

elde edilir.

- D. Kabul edelim ki $f''' = 0$, yani $f(u) = au^2 + bu + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonunun ve türev değerlerinin minimallik koşuluna yazılmasıyla (3.39) denklemi katsayıları v değişkenine bağlı olan u değişkeninin dördüncü dereeden bir polinomu halini alır. Birçok u değeri için denklemin sağlanması gerektiğinden, katsayıların sıfır olma zorunluluğu açıktır. Polinomun baş katsayısı $6a^3$ dir. Dolayısıyla $a = 0$ olup,

$$g''(1 + b^2) + b^2(bu + c + g) + bg' = 0 \quad (3.61)$$

elde edilir.

(3.61) u değişkenin lineer bir denklemini ifade eder, ilk duruma benzer olarak çözümlerin varlığı için $b = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak g bir afin fonksiyondur.

Tip III minimal öteleme yüzeylerini bulmak için yaptığımız bütün hesaplamaları özetlemek adına sıradaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3 3–boyutlu Heisenberg uzayında, Tip III öteleme yüzeyleri aşağıdaki koşulları sağladığı durumlar için minimaldir.

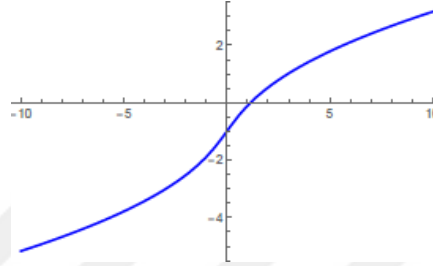
- i. $\mathcal{F}(u, v) = (\alpha v + b, v, u)$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$,
- ii. $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ve I fonksiyonu (3.59) tanımıyla olmak üzere

$$\mathcal{F}(u, v) = (I^{-1}(k_1u + k_2), v, u). \quad (3.62)$$

Örnek 3.3 (3.59) eşitliğiyle verilen I fonksiyonu ile $a = 1$, $k_1 = 1$ ve $k_2 = 0$ için elde edilen

$$u = (f_3 + 1) \sqrt{1 + (f_3 + 1)^2} + \log \left(1 + f_3 + \sqrt{1 + (f_3 + 1)^2} \right)$$

$f_3(u)$ kapalı fonksiyonuyla (3.62) eşitliğinde verilen $\mathcal{F}_3(u, v)$ Tip III minimal öteleme yüzeyi elde edilebilir. Ayrıca yüzey taban eğrisi $\alpha_3 = (f_3, 0, u)$ ve doğrultmanı $(0, 1, 0)$ olan bir açık silindir belirtir.



Şekil 3.5 $\alpha_3(u)$ taban eğrisi

Şekil 3.5' den anlaşılacağı üzere $\mathcal{F}_3(u, v)$ minimal yüzeyinin görüntüsü **şekil 3.2** veya **şekil 3.4'**de verilen silindir yüzeylerine benzer.

4. 3-BOYUTLU HEISENBERG GRUPTA MİNİMAL HOMOTETİ YÜZEYLERİ

Tanım 4.1 $H(1, 1)$, 3-boyutlu Heisenberg uzayında M homoteti yüzeyi $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow H(1, 1)$ immersiyonu ile f ve g türevlenebilir fonksiyonlarıyla üç farklı şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u)g(v)), \quad (\text{Tip I}) \quad (4.1)$$

veya

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u)g(v), v), \quad (\text{Tip II}) \quad (4.2)$$

veya

$$\mathcal{F}(u, v) = (f(u)g(v), u, v), \quad (\text{Tip III}) \quad (4.3)$$

M yüzeyinin $T_p M$ teğet uzayının bir bazı $\{\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v\}$ ve birim normali N olmak üzere, M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$Gg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) - 2Fg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) + Eg(N, \tilde{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) = 0 \quad (4.4)$$

dir.

Bu bölümde 3-boyutlu Heisenberg grupta verilen üç tip homoteti yüzeyi için (4.4) minimallik koşulu araştırılmıştır. Yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilen şartlar gözönüne alındığında öteleme yüzeylerindeki işlemlerden farklı olarak problemler polinom halkalarında uygulanmıştır. Dahası, bu bölümde gerekli görülen denklemler için nümerik çözümler elde edilmiştir. Şimdi sırasıyla yüzeylerin minimallik durumunu inceleyelim.

4.1 Tip I - Minimal Homoteti Yüzeyleri

$H(1, 1)$ uzayında $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u)g(v))$ formunda parametrelenmiş M homoteti yüzeyi için minimallik koşulunu elde edelim.

M yüzeyinin teğet uzayının bir bazı

$$\mathcal{F}_u = X + f'(u)g(v)\xi \text{ ve } \mathcal{F}_v = Y + [f(u)g'(v) - u]\xi \quad (4.5)$$

vektörlerinden oluşur. Yüzeyin birim normal vektörü ise $\alpha^2 = 1 + [f'(u)g(v)]^2 + [f(u)g'(v) - u]^2$ olmak üzere

$$N = \frac{1}{\alpha} [f'(u)g(v)X + (f(u)g'(v) - u)Y - \xi] \quad (4.6)$$

dir. Gerekli işlemlerin ardından (4.4) denklemiyle verilen minimallik koşulu

$$\begin{aligned} f''(u)g(v)[1 + (f(u)g'(v) - u)^2] + f(u)g''(v)[1 + f'(u)^2g(v)^2] + \\ f'(u)g(v)[f(u)g'(v) - u][1 - 2f'(u)g'(v)] = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir.

(4.7) ikinci dereceden lineer olmayan kısmi türevli denkleminin çözümünü fonksiyon değerleri için önce $f(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$ sonra $g(v) = \sum_{j=0}^n b_j v^j$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, polinomları kullanılarak incelendiğinde her iki durumda da çözümler için f ve g fonksiyonlarının afin olması koşulu ortaya çıkmıştır.

1. (4.7) minimallik koşulu $f(u) = cu + d$, $c, d \in \mathbb{R}$ için

$$cu [(1 + c^2 g^2)g'' + g(1 - 2cg')(cg' - 1)] + d[(1 + c^2 g^2)g'' + cgg'(1 - 2cg')] = 0 \quad (4.8)$$

katsayıları v değişkenine bağlı olan u değişkenin lineer fonksiyonuna indirgenir.

Dolayısıyla denklem çözümlerinin elde edilmesi için katsayıların sıfır olması gerekmektedir. Sonuçları çeşitli adımlarla ele alalım.

- 1.a. Eğer $c = 0$ ise $dg'' = 0$ olup $g(v)$ afin fonksiyonu elde edilir. Tip I minimal homoteti yüzeyi olarak $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, av + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ düzlemi bulunur.

- 1.b. $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için (4.8) koşulu

$$(1 + c^2 g^2)g'' + g(1 - 2cg')(cg' - 1) = 0 \quad (4.9)$$

ve

$$(1 + c^2 g^2)g'' + cgg'(1 - 2cg') = 0 \quad (4.10)$$

denklemleri ile mümkündür.

(4.10) eşitliği (4.9) de yerine yazılırsa

$$g' = \frac{1}{2c} \quad (4.11)$$

bulunur.

Dolayısıyla $f(u)$ ve baş katsayısı (4.11) koşulunu sağlayan $g(v)$ lineer fonksiyonları ile

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{uv}{2} + \alpha u + \beta v + \gamma \right), \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

semer yüzeyi formundaki Tip I minimal homoteti yüzeyleri elde edilir.

1.c. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $d = 0$ ise minimallik koşulu için (4.9) ikinci dereceden lineer olmayan diferensiyel denkleminin çözümleri bulunmalıdır. Açıkça görüldüğü ki, eğer $g' = \frac{1}{2c}$ veya $g' = \frac{1}{c}$ ise minimallik koşulu sağlanır sırasıyla $\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{uv}{2} + a_1 u \right)$ ve $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, uv + a_2 u)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ formunda Tip I minimal homoteti yüzeyleri elde edilir.

g' fonksiyonun bu durumları elenerek, $g'(u) = y(u)$ fonksiyon dönüşümü ile (4.9) de indirgeme yapılırken $A = 1 + a(1 + c^2 g^2)$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g' = \frac{1}{c} \left[A + \sqrt{A(A-1)} \right] \quad (4.12)$$

veya

$$g' = \frac{1}{c} \left[A - \sqrt{A(A-1)} \right] \quad (4.13)$$

elde edilir.

(4.12) ve (4.13) eşitliklerinde g' fonksiyonun reel değerlere sahip olduğu aralığın belirlenmesi için g fonksiyonun dördüncü dereceden polinomu olan $A(A-1)$ teriminin kökleri incelendiğinde gereken koşulun

$$-1 \leq a \leq 0 \quad (4.14)$$

olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla belirlenen aralıktaki a değerleri ile (4.12) ve (4.13) denklemlerinden minimallik için gereken g fonksiyon çözümleri aşağıdaki iki durumla belirlenir:

- $a = -1$ için çözümler

$$k_1 + v = cg + \frac{\sqrt{g^2 + c^2 g^4}}{g} + \log \left(\frac{g^2}{g + \sqrt{g^2 + c^2 g^4}} \right), \quad k_1 \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

ve

$$k_2 - v = -cg + \frac{\sqrt{g^2 + c^2 g^4}}{g} + \log \left(\frac{g^2}{g + \sqrt{g^2 + c^2 g^4}} \right), \quad k_2 \in \mathbb{R} \quad (4.16)$$

olarak elde edilir.

- $a \in (-1, 0)$ ise $\check{F}$ birinci tür eliptik integral, $\check{E}$ ikinci tür eliptik integral ve $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.12) denkleminin çözümü

$$n_1 + v = cg + i \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \left[(a+1) \check{E} \left(i \operatorname{Arcsinh}(cg) \left| \frac{a}{a+1} \right. \right) - \check{F} \left(i \operatorname{Arcsinh}(cg) \left| \frac{a}{a+1} \right. \right) \right] \quad (4.17)$$

ve (4.13) denkleminin çözümü

$$n_2 + v = cg - i \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \left[(a+1) \check{E} \left(i \operatorname{Arcsinh}(cg) \left| \frac{a}{a+1} \right. \right) - \check{F} \left(i \operatorname{Arcsinh}(cg) \left| \frac{a}{a+1} \right. \right) \right] \quad (4.18)$$

dür.

Dikkat edilirse, $a = 0$ değeri için $g' = \frac{1}{c}$ fonksiyonu bulunur. Öyleyse, elde edilen sonuçlar doğrultusunda Tip I minimal homoteti yüzeyleri (4.15), (4.16), (4.17) veya (4.18) eşitliklerini sağlayan $g(v)$ fonksiyonları ile $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, cug(v))$ olarak elde edilmiştir.

2. $g(v) = av + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu için (4.7) minimallik koşulu f fonksiyonun ikinci dereceden lineer olmayan diferensiyel denklemi olarak elde edilir:

$$f''[1 + (af - u)^2] + f'(af - u)(1 - 2af') = 0. \quad (4.19)$$

2.a. $g(v)$ bir sabit fonksiyon ise (4.19) denklemi

$$f''[1 + u^2] - uf' = 0$$

değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denklemine dönüştür. Gerekli hesaplamalar sonucunda $f(u)$ fonksiyonu

$$f(u) = c_1 \left[u\sqrt{1 + u^2} + \log \left(u + \sqrt{1 + u^2} \right) \right] + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4.20)$$

elde edilir.

- 2.b.** Eğer $a \neq 0$ ise öncelikle $f(u) = \frac{1}{a}u$ ve $f(u) = \frac{1}{2a}u + c$, $c \in \mathbb{R}$ afin fonksiyonları için (4.19) koşulunun sağlandığı açıktır ve yüzeylerin denklemleri 1.b ve 1.c bölümlerinde ifade edilmiştir. f fonksiyonu için bu iki durumu elimine edersek (4.19) çözümü için $y(u) = af(u) - u$ değişken değişimi ile

$$y' = \lambda(1 + y^2) - 1 + \sqrt{\lambda(1 + y^2)[\lambda(1 + y^2) - 1]} \quad (4.21)$$

ve

$$y' = \lambda(1 + y^2) - 1 - \sqrt{\lambda(1 + y^2)[\lambda(1 + y^2) - 1]} \quad (4.22)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin reel çözümlerinin varlığı $\lambda = 0$ veya $0 < \lambda \leq 1$ sabitleri ile (4.21) denklemi için $y < -\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ fonksiyon değer aralığı, ayrıca (4.22) denklemi için $\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} < y < -\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ değer aralığı ile mümkündür.

- $\lambda = 0$ ise $y' = -1$ olup f bir sabit fonksiyondur. Tip I minimal öteleme yüzeyi olarak $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, \alpha v + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ düzlemi elde edilir.
- $\lambda \in (0, 1)$ için $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\check{F}$ birinci tür eliptik integral, $\check{E}$ ikinci tür eliptik integral olmak üzere (4.21) ve (4.22) denklemlerinin çözümleri sırasıyla

$$c_1 - u = y + i \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} \left[\check{F} \left(i \operatorname{Arcsinh}(y) \middle| \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) + (\lambda - 1) \check{E} \left(i \operatorname{Arcsinh}(y) \middle| \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) \right] \quad (4.23)$$

ve

$$c_2 - u = y - i \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} \left[\check{F} \left(i \operatorname{Arcsinh}(y) \middle| \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) + (\lambda - 1) \check{E} \left(i \operatorname{Arcsinh}(y) \middle| \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) \right] \quad (4.24)$$

bulunur.

- $\lambda = 1$ ise minimallik koşulunu sağlayan fonksiyon çözümleri

$$k_1 + u = -y + \frac{\sqrt{y^4 + y^2}}{y} + \log \left(\frac{y^2}{y + \sqrt{y^4 + y^2}} \right), \quad k_1 \in \mathbb{R} \quad (4.25)$$

ve

$$k_2 - u = y + \frac{\sqrt{y^4 + y^2}}{y} + \log \left(\frac{y^2}{y + \sqrt{y^4 + y^2}} \right), \quad k_2 \in \mathbb{R} \quad (4.26)$$

dir.

Dolayısıyla, elde edilen diğer çözümlerden farklı olarak (4.23), (4.24), (4.25) veya (4.26) eşitliklerini sağlayan $f(u)$ fonksiyonları ile

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, (av + b)f(u))$$

Tip I minimal homoteti yüzeyleri elde edilir.

Sonuç 4.1 (4.1) formunda tanımlanan Tip I homoteti yüzeyi $f(u)$ veya $g(v)$ fonksiyonlarının sabit olma durumunda Tip I öteleme yüzeyine dönüşür. Dolayısıyla, 1.a ve 2.a bölümlerinde elde edilen sonuçlar, Teorem 3.1 de gerekli koşulların uygulanmasıyla da elde edilebilir.

Sonuç 4.1 ve konulan koşullar altında elde edilen çözümler ile Tip I homoteti yüzeyleri için sıradaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1 3-boyutlu Heisenberg uzayında Tip I minimal homoteti yüzeylerinin denklemleri

- Düzlemler: $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, \alpha v + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- Tip I öteleme yüzeyleri: $f(u)$ veya $g(v)$ fonksiyonlarından biri sabit fonksiyon ise,
- Semer yüzeyleri: $\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{uv}{2} + au + bv + c\right)$ veya $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, uv + \hat{a}u)$, $\{a, \hat{a}, b, c\} \in \mathbb{R}$
- $\tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $g(v)$ fonksiyonu (4.15), (4.16), (4.17) veya (4.18) eşitliklerinden birini sağlamak üzere

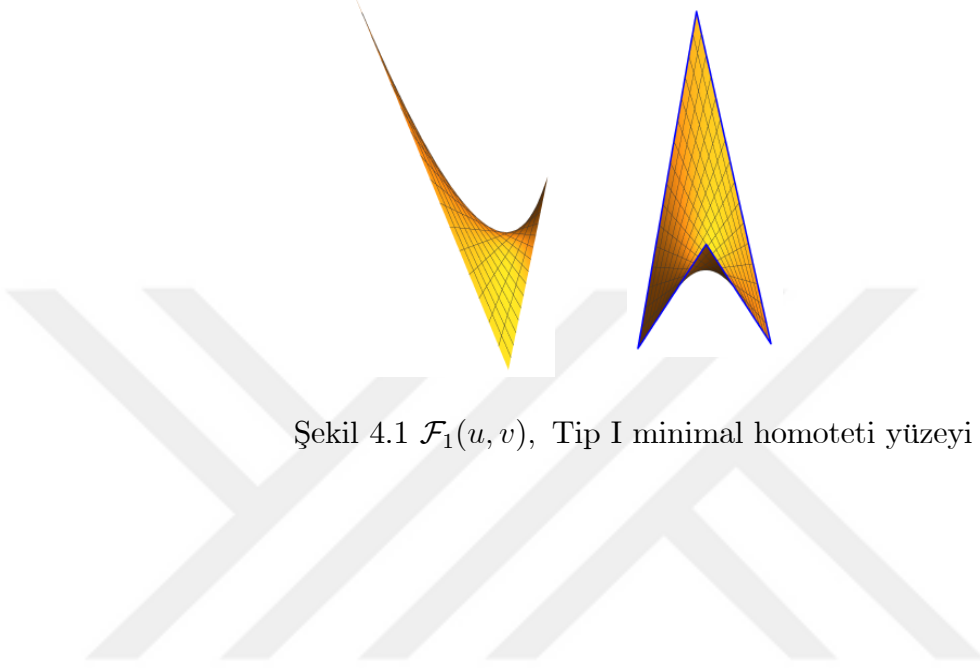
$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, \tilde{c}ug(v))$$

- $\tilde{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ ve $f(u)$ fonksiyonu (4.23), (4.24), (4.25) veya (4.26) eşitliklerinden birini sağlamak üzere

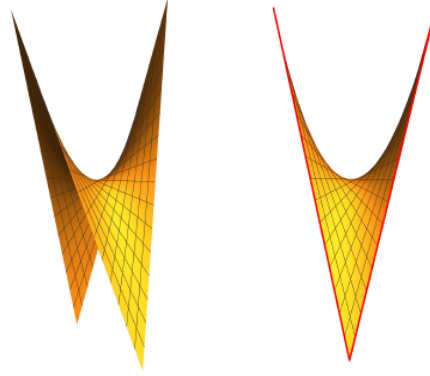
$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, (\tilde{a}v + \tilde{b})f(u)\right)$$

dir.

Örnek 4.1 $z_1 = \left(\frac{u}{2} + 1\right)(v + 1)$, $z_2 = u(v + 1)$ fonksiyonları ile tanımlı $\mathcal{F}_1(u, v) = (u, v, z_1)$ ve $\mathcal{F}_2(u, v) = (u, v, z_2)$ semer yüzeyleri üç boyutlu Heisenberg grupta minimal homoteti yüzeyi belirtir.



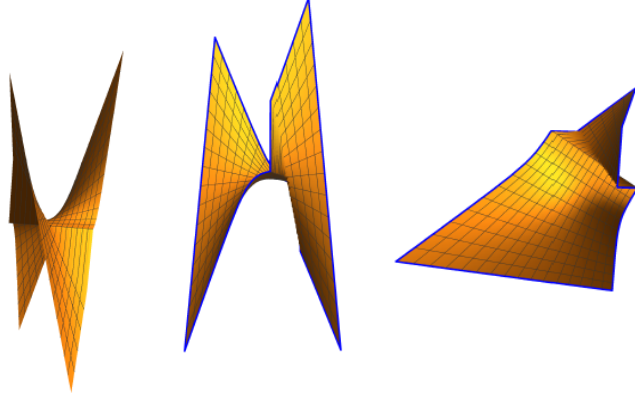
Şekil 4.1 $\mathcal{F}_1(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi



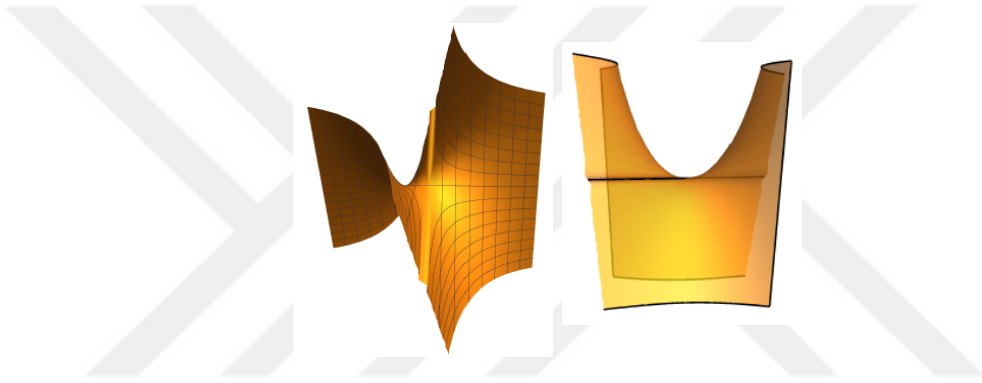
Şekil 4.2 $\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi

Örnek 4.2 $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $c = 1$ için (4.15), (4.16) denklemlerini sağlayan fonksiyonlar sırasıyla $g_1(v)$ ve $g_2(v)$ olmak üzere $H(1, 1)$ Heisenberg grupta minimal homoteti yüzeyleri $\mathcal{F}_3(u, v) = (u, v, ug_1(v))$ ve $\mathcal{F}_4(u, v) = (u, v, ug_2(v))$ elde edilir,

grafikleri sırasıyla **şekil 4.3** ve **şekil 4.4**'de verilir.



Şekil 4.3 $\mathcal{F}_3(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi



Şekil 4.4 $\mathcal{F}_4(u, v)$, Tip I minimal homoteti yüzeyi

4.2 Tip II - Minimal Homoteti Yüzeyleri

$H(1, 1)$ uzayında $\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u)g(v), v)$ parametresiyle tanımlanan M , Tip II homoteti yüzeyi için minimallik koşulunu elde edelim.

M yüzeyinin teğet uzayının bir bazı

$$\mathcal{F}_u = X + f'(u)g(v) [Y - u\xi] \text{ ve } \mathcal{F}_v = f(u)g'(v) [Y - u\xi] + \xi \quad (4.27)$$

ve normal uzayı $\beta = [(f'(u)g(v))^2 + (f(u)g'(v))^2 + (1 - uf(u)g'(v))^2]^{1/2}$ olmak üzere

$$N = \frac{1}{\beta} [f'(u)g(v)X - (1 - uf(u)g'(v))Y + f(u)g'(v)\xi] \quad (4.28)$$

vektöründen oluşur.

Gerekli işlemlerin ardından (4.4) minimallik koşulu için

$$\begin{aligned} f''g [(ufg' - 1)^2 + f^2g'^2] + fg'' [1 + f'^2g^2(1 + u^2)] + \\ f f' g g' [1 - g' [uf + 2f' (1 + u^2)]] + 2uf'^2 g g' = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

lineer olmayan kısmi türevli denklemi elde edilir.

Tip I minimal homoteti yüzeylerini elde etmek için yapılan işlemlere benzer olarak, (4.29) denklemi için çözüm reel katsayılı polinom halkalarında incelenmiş, $f(u)$ ve $g(v)$ fonksiyonlarının afin olma koşulu ortaya çıkmıştır. Sırasıyla (4.29) çözümleri f ve g fonksiyonlarının lineerlik durumlarına göre elde edilecektir.

A. $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(u) = cu + d$ afin fonksiyonu için minimallik koşulunu sağlayan g fonksiyonlarını çeşitli adımlarla bulalım.

A.1. $f(u)$ sabit fonksiyon ise (4.29) denkleminden $g'' = 0$ olup,

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, av + b, v), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

düzlemleri Tip II minimal homoteti yüzeyleri olarak elde edilir.

A.2. $c \neq 0$ sabitleri için minimallik koşulu

$$\begin{aligned} & c^3 g(3g'^2 - gg'')u^3 + c^2 dg(4g'^2 - gg'')u^2 + \\ & c[gg'^2 d^2 - g'' - 3cgg' - c^2 g(gg'' - 2g'^2)]u + \\ & d[cgg'(2cg' - 1) - g''(1 + c^2 g^2)] = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

u değişkeninin katsayıları v değişkenine bağlı olan üçüncü dereceden polinomuna dönüştür. Her u değeri için polinom çözümünün olması katsayıların sıfır olamasıyla mümkündür. Baş katsayıyı oluşturan g fonksiyonun ikinci dereceden diferensiyel denklemi çözülerek

$$\begin{cases} g' = ag^3 \\ g'' = 3a^2 g^5 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (4.31)$$

elde edilir. Bir sonraki katsayının (4.31) türev değerleri ile kombinasyonundan

$$c^2 a^2 dg^7 = 0 \quad (4.32)$$

elde edilir ve burada hipotezlerimizle çelişmemek koşuluyla iki olası durum vardır.

- $a = 0$ yani g sabit fonksiyondur. Böylece, Tip II minimal homoteti yüzeyleri olarak $\mathcal{F}(u, v) = (u, cu + d, v)$ düzlemleri elde edilir.

- Ya da $d = 0$ dır. Bu durumda (4.30) polinomunun ikinci ve dördüncü terimleri kaybolur, (4.31) eşitlikleri geriye kalan son terimde yerine yazılırsa

$$c^2 ag^3 + 3ag + 3c = 0 \quad (4.33)$$

bulunur. (4.31) sisteminin çözümleri

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c_1 - av}} \text{ ve } g(v) = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{c_2 - av}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4.34)$$

dir. g fonksiyonunun bu değerlerinin (4.33) denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart c ve a sabitlerinin sıfır olmasıdır. Bu koşul hipotezimizle çelişir.

B. (4.29) minimallik koşulu lineer $g = av + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ fonksiyonları için ele alınırsa

$$f'' [(auf - 1)^2 + a^2 f^2] + af f' [1 - a [uf + 2f' (1 + u^2)]] + 2auf'^2 = 0 \quad (4.35)$$

ikinci dereceden lineer olmayan diferensiyel denklemi elde edilir.

B.1. f lineer fonksiyon ise (4.35) denklemi

$$af' [1 - a [uf + 2f' (1 + u^2)]] + 2uf'^2 = 0 \quad (4.36)$$

diferensiyel denklemine indirgenir. Burada üç olasılık meydana gelir. Eğer $a = 0$ veya $f' = 0$ koşulları için minimal yüzeyleri bulursak sonuçlar bir önceki bölümde de elde edilen düzlemlerdir. Şimdi son olasılık, yani (4.36) eşitliğindeki üçüncü terimin sıfır olması durumunu ele alırsak u değişkenin bir kübik polinomu elde edilir. Çözüm için katsayıların sıfırlanmasıyla ilk iki olasılıktaki koşullar ortaya çıkar.

B.2. Eğer $f'' \neq 0$ kabulüyle minimallik koşulunu çözümlemek istersek (4.35) diferensiyel denkleminin non-lineer yapısından ötürü elementer işlemlerle sonuç elde etmek zordur. Bu yüzden çözüm için başlangıç değer koşulları belirlenerek, Runge-Kutta-Nyström algoritması kullanılarak nümerik çözümler elde edilecektir.

f'' teriminin katsayısının hiçbir değer için sıfır olamayacağı aşıkardır, dolayısıyla algoritmayı uygulamak için $f'' = F(u, f, f')$ olmak üzere

$$F(u, f, f') = \frac{af' [f (2a(1 + u^2)f' - 1) + u (af'^2 - 2f'')]}{(auf - 1)^2 + a^2 f^2} \quad (4.37)$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

$f(u_0) = f_0$ ve $f'(u_0) = f'_0$ başlangıç koşulları, h adım uzunluğu, N adım sayısı ve $0 \leq n \leq N$ olmak üzere (2.22) RKN algoritma adımları ile $u_{n+1} = u_n + h$ noktalarında (2.23), (2.24) eşitlikleriyle verilen f_{n+1} , f'_{n+1} fonksiyon değerleri elde edilir.

Bu bölümde konulan koşullar altında minimalliği sağlayan Tip II homoteti yüzeyleri için sıradaki teoremi verelim.

Teorem 4.2 3-boyutlu Heisenberg grup $H(1, 1)$ 'de Tip II minimal homoteti yüzeylerinin denklemleri $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu (4.35) denklemini sağlamak üzere

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, (av + b)f(u), v)$$

dir.

Örnek 4.3 (4.35) denklemini $a = 1$ ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ başlangıç koşullarıyla birlikte RKN algoritmasıyla $h = 0.2$ ve $0 \leq n \leq 5$ için çözelim. (??) algoritma adımları $K = 0.1f'_n + 0.005k_1$, $L = 0.2f'_n + 0.02k_3$ olmak üzere

$$k_1 = \frac{f'_n [f_n (2(1 + u_n^2)f'_n - 1) + u_n (f_n^2 - 2f'_n)]}{(u_n f_n - 1)^2 + f_n^2}$$

$$k_2 = \frac{\{(f'_n + 0.1k_1) [(f_n + K) (2(1 + (u_n + 0.1)^2) (f'_n + 0.1k_1) - 1) + (u_n + 0.1) ((f_n + K)^2 - 2(f'_n + 0.1k_1))]\}}{[(u_n + 0.1) (f_n + K) - 1]^2 + (f_n + K)^2}$$

$$k_3 = \frac{\{(f'_n + 0.1k_2) [(f_n + K) (2(1 + (u_n + 0.1)^2) (f'_n + 0.1k_2) - 1) + (u_n + 0.1) ((f_n + K)^2 - 2(f'_n + 0.1k_2))]\}}{[(u_n + 0.1) (f_n + K) - 1]^2 + (f_n + K)^2}$$

$$k_4 = \frac{\{(f'_n + 0.2k_3) [(f_n + L) (2(1 + (u_n + 0.2)^2) (f'_n + 0.2k_3) - 1) + (u_n + 0.2) ((f_n + L)^2 - 2(f'_n + 0.2k_3))]\}}{[(u_n + 0.2) (f_n + L) - 1]^2 + (f_n + L)^2}$$

elde edilir. Böylece,

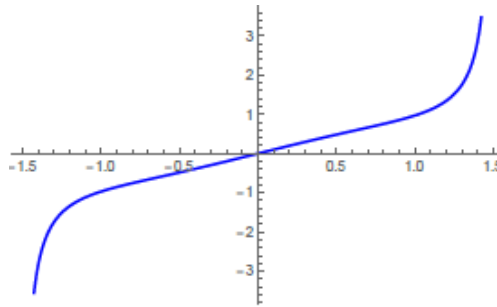
$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + 0.2f'_n + 0.0066(k_1 + k_2 + k_3) \\ f'_{n+1} &= f'_n + 0.033(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

fonksiyonları için **çizelge 4.1**'deki değerler elde edilir.

Çizelge 4.1. RKN algoritma sonuçları (1)

n	u_n	f_n	f'_n
0	0.0	0.000000	1.000000
1	0.2	0.198713	0.981418
2	0.4	0.390674	0.93669
3	0.6	0.573733	0.900362
4	0.8	0.756174	0.945319
5	1.0	0.970446	1.26393

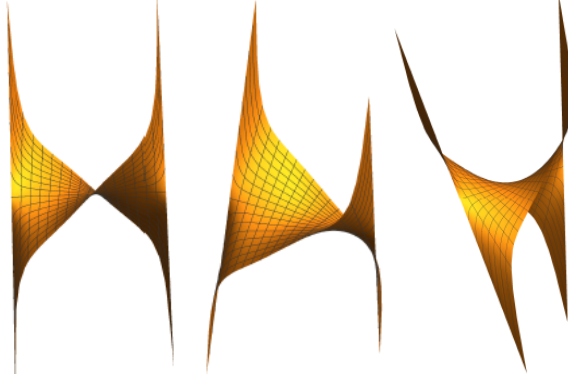
n , adım sayısının arttırılmasıyla elde edilecek fonksiyon değerleri f_n fonksiyonu için yapılacak yaklaşımı daha da iyileştirecektir. Bu bakış açısıyla, f fonksiyonun grafiği **şekil 4.1**'de elde edilir.



Şekil 4.5 $f(u)$ yaklaşımı (1)

Dahası, $g(v) = v$ lineer fonksiyonu ve RKN algoritmasıyla elde edilen f fonksiyonu ile tanımlanan $\mathcal{F}_1(u, v) = (u, vf(u), v)$ Tip II minimal homoteti yüzeyinin **şekil**

4.6'da çeşitli açılardan verilen görüntüsü elde edilir.



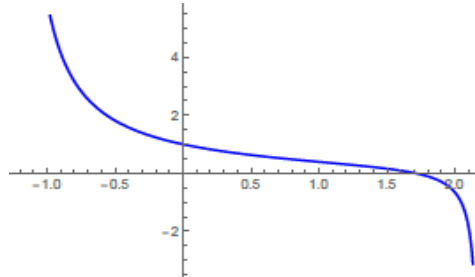
Şekil 4.6 $\mathcal{F}_1(u, v)$, Tip II minimal homoteti yüzeyi

Örnek 4.4 Örnek 4.1 de verilen başlangıç değer problemini $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$ koşulları ile ele alırsak, RKN metodu ile **çizelge 4.2**'de verilen sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.2. RKN algoritma sonuçları (2)

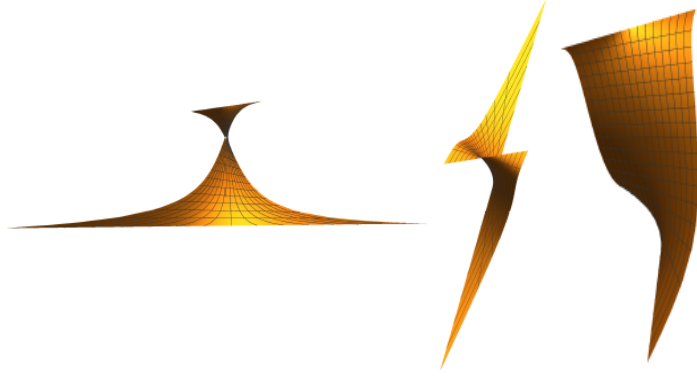
n	u_n	f_n	f'_n
0	0.0	0.000000	-1.000000
1	0.2	-0.206735	-1.10276
2	0.4	-0.459557	-1.48502
3	0.6	-0.842159	-2.50251
4	0.8	-1.60116	-5.80038
5	1.0	-4.0287	-25.2573

Diğer yandan, $\mathcal{F}_2(u, v) = (u, vf(u), v)$ parametresiyle verilen Tip II minimal yüzeyi ve $f(u)$ fonksiyonun grafikleri



Şekil 4.7 $f(u)$ yaklaşımı (2)

ve



Şekil 4.8 $\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip II minimal homoteti yüzeyi

dir.

4.3 Tip III - Minimal Homoteti Yüzeyleri

3-boyutlu Heisenberg grupta $\mathcal{F}(u, v) = (f(u)g(v), u, v)$ parametresiyle verilen M , Tip III homoteti yüzeyinin teğet uzayı $T_p M = Sp\{\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v\}$ olup

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = f'(u)g(v)X + Y - f(u)g(v)\xi \\ \mathcal{F}_v = f(u)g'(v)X + \xi \end{cases} \quad (4.38)$$

ve normal uzayı $\gamma = \left[1 + (f(u)g'(v))^2 + g(v)^2 (f^2(u)g'(v) + f'(u))^2\right]^{1/2}$ olmak üzere

$$N = \frac{1}{\gamma} [X - (f^2(u)g'(v) + f'(u))g(v)Y - f(u)g'(v)\xi] \quad (4.39)$$

dir.

(4.4) minimallik koşulunun hesaplanmasıyla

$$f'' \left(fg'^2 + \frac{1}{f} \right) + g'' \left[g(f^2 + f'^2) + \frac{1}{g} \right] + g' [3f' + (f^2 - 2f'^2)g'] = 0 \quad (4.40)$$

lineer olmayan kısmi türevli denklemi elde edilir. $f'' \neq 0$ ve $g'' \neq 0$ kabülleri altında denklem çözümünü araştıralım. Burada minimallik koşulu önce u değişkenine göre türev

$$\left(\frac{f''}{f} \right)' + [f(f'' + f) - 2f'^2]'g'^2 + (f'^2 + f^2)'gg'' + 3f''g' = 0 \quad (4.41)$$

ve daha sonra v değişkenine göre türev alınarak

$$2 [f (f'' + f) - 2f'^2]' + (f'^2 + f^2)' \left[1 + \frac{gg'''}{g'g''} \right] + 3 \frac{f''}{g'} = 0 \quad (4.42)$$

denklemlerine indirgenir. Tekrar, v değişkenine göre bir türevleme işlemi daha uygulanırsa

$$\frac{(f'^2 + f^2)'}{f''} \left(\frac{gg'''}{g'g''} \right)' + 3 \left(\frac{1}{g'} \right)' = 0 \quad (4.43)$$

elde edilir. Eğer $\frac{gg'''}{g'g''}$ sabit bir fonksiyon ise eşitliğin sağlanması g' sabit fonksiyonu ile mümkündür fakat $g'' \neq 0$ hipoteziyle çelişir. Dolayısıyla denklem (u, v) için iki boyutlu belirli bir bölgede

$$A(u)B(v) + C(v) = 0$$

formundadır ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$A(u) = c \text{ ve } C(v) = -cB(v)$$

dir. (4.43) denklemine geri dönersek

$$cf'' = (f'^2 + f^2)' \quad (4.44)$$

dir.

Diğer taraftan, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$cgg''' + (3 - c_1g')g'' = 0 \quad (4.45)$$

ve denklemin bir derece indirgenmesiyle

$$cgg'' + \left(3 - \frac{c_1 + c}{2}g' \right) g' = c_2 \quad (4.46)$$

elde edilir.

(4.42) denklemini (4.44) ve (4.45) ile kombine edilirse

$$(c + c_1) f'' = -2 [f (f'' + f) - 2f'^2]' \quad (4.47)$$

bulunur.

Önce f'' türev fonksiyonun (4.44) ve (4.47) değerlerinin (4.41) denkleminde kullanılmasıyla, sonra çıkan sonucun (4.46) kombinasyonu ile $c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f'' + c_2 f f' = c_3 f \quad (4.48)$$

elde edilir.

Şimdi (4.44) ve (4.48) denklemlerindeki f'' türev fonksiyonunun eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$2c_2 f'^2 - (cc_2 + 2c_3 + 2) f' + cc_3 = 0 \quad (4.49)$$

f' türevinin ikinci dereceden polinomu elde edilir. Burada $f'' \neq 0$ ve $g'' \neq 0$ hipotezleriyle çelişmeden her u değişkeni için çözümün var olması polinom katsayılarının sıfır olması anlamına gelir. Öyleyse $c = 0$, $c_2 = 0$ ve $c_3 = -1$ elde edilir. (4.46) denklemi bu koşullarda çözümlenirse $g'' = 0$, diğer yandan (4.47) ve (4.48) nin birleştirilmesiyle çıkan sonuç $f'' = 0$ hipoteziyle çelişir.

Dolayısıyla yapılan işlemlerle (4.40) denkleminin çözümünün $f(u)$ ve $g(v)$ fonksiyonlarından birinin lineer olmasıyla mümkün olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

1. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(u) = au + b$ lineer fonksiyonu için (4.40) denklemi

$$\begin{cases} \mathcal{A}(v) = g(g''g + g'^2) \\ \mathcal{B}(v) = a^2(A(v) - 3gg'^2) + 3agg' + g'' \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathcal{A}(v)f^2 + \mathcal{B}(v) = 0 \quad (4.50)$$

formunda u değişkenin ikinci dereceden polinomuna dönüştür. Burada denklemin çözümü iki durumda mümkündür:

- 1.a. Eğer f sabit fonksiyon ise (4.50)

$$g''(c^2g^2 + 1) + c^2gg'^2 = 0, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (4.51)$$

ikinci dereceden diferensiyel denklemine indirgenir. Burada sabitten farklı çözümleri elde etmek için öncelikle

$$\frac{d}{dv} \log [c^2g'^2 (1 + c^2g^2)] = 0 \quad (4.52)$$

olduğu sonucuna ulaşabiliriz. Öyleyse $c^2 g'^2 (1 + c^2 g^2) = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$ olur.

$$I(x) = x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad (4.53)$$

fonksiyonunu tanımlayarak, (4.52) m integrallenmesiyle $g(v)$ fonksiyonu için $I(cg) = k_1 v + k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$ kapalı çözümlerini elde ederiz. Elde edilen Tip III minimal homoteti yüzey denklemi ise $\mathcal{F}(u, v) = (I^{-1}(k_1 v + k_2), u, v)$ olur.

1.b. $\mathcal{A}(v) = 0$ ise $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g' = \frac{\lambda}{g} \text{ ve } g'' = \frac{-\lambda^2}{g^3} \quad (4.54)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bulunan değerler $\mathcal{B}(v)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$3a\lambda g^3 - a^2\lambda^2 g^2 - \lambda^2 = 0 \quad (4.55)$$

üçüncü derecen polinomuna elde edilir. Polinomun en az bir reel kökünün varlığı bilindiğinden ve yüzey denkleminin her v değeri için bulunması amaçlandığından $\lambda = 0$ olmak zorundadır. (4.54) dan g sabit fonksiyonu elde edilir. Dolayısıyla Tip III minimal homoteti yüzeyi $\mathcal{F}(u, v) = (\alpha u + \beta, u, v)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ düzlemidir.

2. $g(v) = av + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ afin fonksiyonları için (4.40) minimallik koşulu

$$f''(a^2 f^2 + 1) + af(a f^2 - 2a f'^2 + 3f') = 0 \quad (4.56)$$

dir. Burada diferensiyel denklemin ikinci dereceden ve non-linear olması çözümün elemanter yöntemlerle elde edilmesini zorlaştırmaktadır. Dolayısıyla $\mathcal{F}(u, v) = ((av + b)f(u), u, v)$ formundaki Tip III minimal homoteti yüzeyleri için (4.56) denklemini sağlayan $f(u)$ fonksiyonları RKN metodu ile nümerik çözümlerle elde edilecektir.

RKN algoritması için fonksiyonu $f'' = G(u, f, f')$ olmak üzere

$$G(u, f, f') = \frac{af(2af'^2 - 3f' - af^2)}{a^2 f^2 + 1} \quad (4.57)$$

tanımlarız.

$f(u_0) = f_0$ ve $f'(u_0) = f'_0$ başlangıç koşulları, h adım uzunluğu, N adım

sayısı ve $0 \leq n \leq N$ olmak üzere RKN algoritma adımları $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ ile G fonksiyonu için $u_{n+1} = u_n + h$ noktalarında f_{n+1} , f'_{n+1} fonksiyon ve türev değerleri elde edilir.

Teorem 4.3 3-boyutlu Heisenberg grupta Tip III minimal homoteti yüzeyleri

i. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $I(x)$ fonksiyonu (4.53) tanımıyla olmak üzere

$$\mathcal{F}(u, v) = (I^{-1}(c_1 v + c_2), u, v)$$

silindirleri ve

ii. $a, b \in \mathbb{R}$ ve (4.56) denklemini sağlayan $f(u)$ fonksiyonları için

$$\mathcal{F}(u, v) = ((av + b) f(u), u, v)$$

yüzeyleridir.

Şimdi uygun şekilde belirlenen koşullarla $f(u)$ fonksiyonu için (4.56) başlangıç değer problemini RKN metodu kullanarak çözüp, Tip III minimal homoteti yüzey örneklerini elde edelim.

Örnek 4.5 $g(v) = v$ ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ile belli olan (4.56) başlangıç değer problemini $h = 0.2$ ve $N = 5$ alarak çözelim. RKN algoritma adımları $M = 0.1f'_n + 0.005k_1$, $N = 0.2f'_n + 0.02k_3$ olmak üzere

$$k_1 = \frac{f_n(2f_n'^2 - 3f_n' - f_n^2)}{1 + f_n^2}$$

$$k_2 = \frac{(f_n + M) [2(f_n' + 0.1k_1)^2 - 3(f_n' + 0.1k_1) - (f_n + M)^2]}{1 + (f_n + M)^2}$$

$$k_3 = \frac{(f_n + M) [2(f_n' + 0.1k_2)^2 - 3(f_n' + 0.1k_2) - (f_n + M)^2]}{1 + (f_n + M)^2}$$

$$k_4 = \frac{(f_n + N) [2(f_n' + 0.2k_3)^2 - 3(f_n' + 0.2k_2) - (f_n + N)^2]}{1 + (f_n + N)^2}$$

elde edilir. Böylece,

$$f_{n+1} = f_n + 0.2f'_n + 0.0066(k_1 + k_2 + k_3)$$

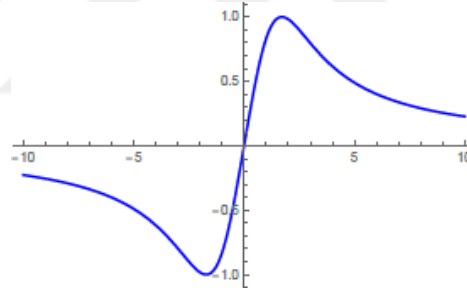
$$f'_{n+1} = f'_n + 0.033(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

fonksiyonları için **çizelge 4.3**'teki değerler elde edilir.

Çizelge 4.3 RKN algoritma sonuçları ($a = 1$)

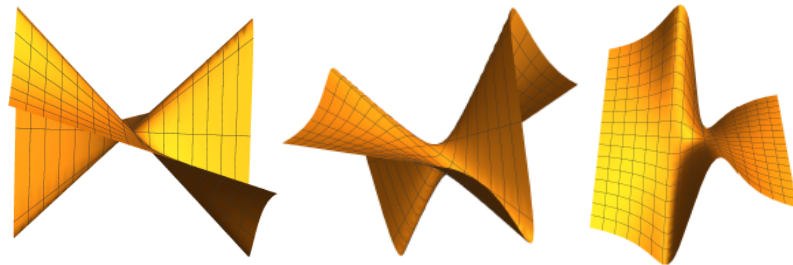
n	u_n	f_n	f'_n
0	0.0	0.000000	1.000000
1	0.2	0.198674	0.980081
2	0.4	0.389304	0.919317
3	0.6	0.563634	0.817378
4	0.8	0.713834	0.679538
5	1.0	0.83389	0.518611

Eğer N adım sayısını artırırsak bulunacak u_n , f_n ve f'_n değerleri ile $f(u)$ fonksiyon grafiği



Şekil 4.9 $f(u)$ yaklaşımı ($a = 1$)

olur ve $\mathcal{F}_1(u, v) = (vf(u), u, v)$ Tip III minimal homoteti yüzeyi



Şekil 4.10 $\mathcal{F}_1(u, v)$, Tip III minimal homoteti yüzeyi

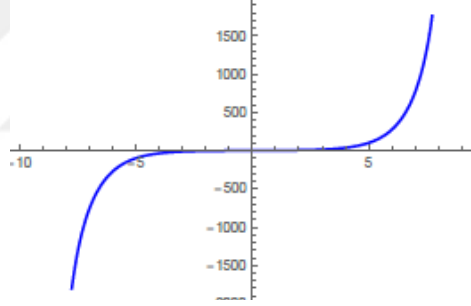
elde edilir.

Örnek 4.6 $a = 2$ ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ile belli olan (4.56) başlangıç değer problemini RKN metoduyla çözülürse 5 adımlı nokta ve fonksiyon sonuçları **çizelge 4.4'** de elde edilir.

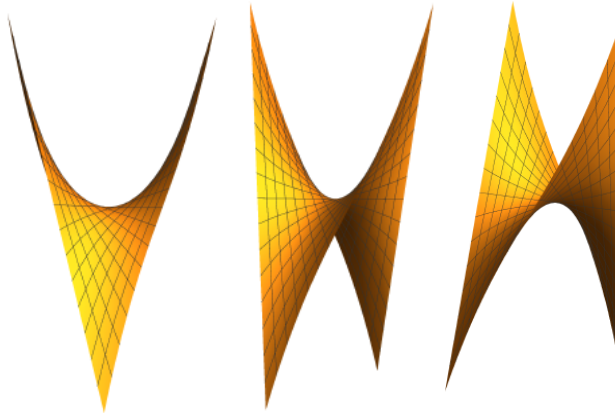
Çizelge 4.4 RKN algoritma sonuçları ($a = 2$)

n	u_n	f_n	f'_n
0	0.0	0.000000	1.000000
1	0.2	0.202663	1.04075
2	0.4	0.42262	1.17981
3	0.6	0.686263	1.50847
4	0.8	1.06503	2.529
5	1.0	2.03263	11.7444

Verilen değerlerle belli olan $f(u)$ fonksiyonu ve $\mathcal{F}_2(u, v) = ((2v + 1)f(u), u, v)$ Tip III minimal homoteti yüzeyinin grafiği aşağıdaki görsellerde verilmiştir.



Şekil 4.11 $f(u)$ yaklaşımı ($a = 2$)



Şekil 4.12 $\mathcal{F}_2(u, v)$, Tip III minimal homoteti yüzeyi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez çalışmasında ele alınan yüzeylerin minimalliği problemi 18. yüzyıldan itibaren önemli matematikçiler tarafından incelenmiş, bazen duraklama dönemine girmiş olsa da popülerliğini kaybetmeden ilerlemiştir. Günümüzde daha çok özel tanımlı metrik uzaylarda belirli yüzeyler için problem çözümleri araştırılmaktadır. Bu tezde ise üç boyutlu Heisenberg grupta tanımlanan öteleme ve homoteti yüzeyleri için bulunan sonuçlarla minimal yüzey teorisinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu iki aile için elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda, bir sonraki hedefimiz öteleme ve homoteti yüzeylerinin genelleştirmesi olarak

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, \lambda(f(u) + g(v)) + \mu f(u)g(v)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile tanımladığımız yüzeylerin minimalliğini incelemektir.

Diğer yandan, Öklid uzayının temel minimal yüzeyleri olan düzlemlerin üç boyutlu Heisenberg grupta da minimal olduğu elde edilmiştir. $H(1, 1)$ uzayında ayrıca, minimal homoteti yüzeylerinin üç tipi için $z = cf(u)$ parametrelendirmesiyle verilen silindirik yüzeylerinin aynı zamanda minimal öteleme yüzeyi olarak ele alınabileceği 3. ve 4. bölümde verilen teoremlerle de ispat edilmiştir. Bunun yanında, minimal homotetik yüzey olarak elde ettiğimiz, günlük hayatımızda da sıkça karşımıza çıkan semer yüzeylerinin minimalliği bize farklı bir bakış açısı kazandırmış, bu yüzeylerin minimal olduğu metrik uzayın keşfi ortaya çıkmıştır. Doğal olarak bu durum Öklid uzayında minimal olmayan paraboloid gibi diğer yüzeylerin de minimalliğinin mümkün olabileceği metrik uzayların varlığını sorgulamamıza neden olmuştur. Dolayısıyla, 21. yüzyılda da bizleri hala şaşırtmaya devam eden minimal yüzey teorisinde araştırılacak birçok metrik uzay, tanımlanacak bir çok yüzeyin mevcut olduğunu söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

- Abresch, U., Rosenberg, H., 2005. *Generalized Hopf differentials*, Mat. Contemp. 28, 1-28.
- Aitchison, I. J. R., MacManus, D. A., Snyder, T. M., 2004. *Understanding Heisenberg's 'magical' paper of July 1925: A new look at the calculational details*, American Journal of Physics. 72 (11), 1370-9.
- Catalan, E., 1842. Journal de Mathem, 7, 203.
- Dillen, F., Van De Woestyne, I., Verstraelen, L. Walrave, J., 1998. *The surface of Scherk in $\mathbb{R}^3$ a special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two curves*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 26, 257-267.
- Dillen, F., Verstraelen, L. Zafindratafa, G., 1991. *A generalization of the translation surfaces of Scherk*, Differential Geometry in Honor of Radu Rosca, K.U.L., 107-109.
- do Carmo, M.P., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Enneper, A., 1864. *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, Z. Math. Phys. 9, 96-125.
- Euler, L., 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Opera omnia (1) 24, in 1954 reprint.
- Gonzalez, J. C., Chinea, D., 1989. *Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group $H(p; 1)$* , Proceedings of the AMS 105 (1), 173-184.
- Gray, A., 1993. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press.
- Hairer, E., Wanner, G., 1973. *Multistep-multistage-multiderivative methods for ordinary differential equations*, Computing, Vol.11, 287-303.
- Heisenberg, W., 1925. *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Zeitschrift für Physik, 33, 879-893.
- Inoguchi, J., 2008. *Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group*, Diff. Geom. Dyn. Syst. 10, 163-169.
- Inoguchi, J., Lopez, R., Munteanu, M. I., 2012. *Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3* , Geom. Dedicata 161, 221-231.
- Jiu, L., Sun, H., 2007. *On minimal homothetical hypersurfaces*, Colloq. Math. 109, no. 2, 239-249.
- Kobayashi, O., 1983. *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , Tokyo J. Math. 6(2), 297-309.

- Lagrange, J. L., 1760. *Essai d'une nouvelle m'ethode pour d'eterminer les maxima et les minima des formules int'egrales ind'efinies*, Miscellanea Taurinensia 2, 173-195.
- Lopez, R., 2011. *Minimal translation surfaces in hyperbolic space*, Beitr. Algebra Geom. 52, 105-112.
- Lopez, R., Munteanu, M.I., 2012. *Minimal translation surfaces in Sol_3* . J. Math. Soc. Jpn. 64(3), 985-1003.
- MacKinnon, E., 1977. *Heisenberg, Models, and the Rise of Quantum Mechanics*, Historical Studies in the Physical Sciences 8, 137-188.
- Meusnier, J. B., 1785. *M'emoire sur la courbure des surfaces*, M'emoires des savans 'etrangers 10, 477-510.
- Moruz, M., Munteanu, M.I., 2016. *Minimal translation hypersurfaces in E^4* , J. Math. Anal. Appl. 439, 798-812.
- Osserman, R., 1986. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Phoenix Editions.
- Sağlam, D., Sabuncuoğlu, A., 2011. *Minimal homothetical lightlike (degenerate) hypersurfaces of semi-Euclidean spaces*, Kuwait J. Sci. Eng. 38(1A), 1-14.
- Scherk, H. F., 1835. *Bemerkung uber die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*, J. Reine Angew. Math. 13, 185-208.
- Seo, K., 2013. *Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms*, Osaka J. Math. 50, 631-641.
- Thurston, W., 1997. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton Math. Ser. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Van de Woestyne, I., 1990. *Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space*, Geometry and Topology of Submanifolds II, World Scientific Pub., 344-369.
- Van de Woestyne, I., 1991. *Minimal S^1 -symmetric surfaces*, Geometry and Topology of Submanifolds III, World Scientific Pub., 294-303.
- Van de Woestyne, I., 1993. *A new characterization of the helicoids*, Geometry and Topology of Submanifolds V, World Sci., Singapore, 267-273.
- Van de Woestyne, I., 1995. *Minimal homothetical hypersurfaces of a semi-Euclidean space*, Results in Mathematics 27, Birkhauser Verlag, 333-342.
- Verstraelen, L., Walrave, J., Yaprak, S., 1994. *The minimal translation surfaces in Euclidean space*, Soochow J. Math. 20 (1), 77-82.
- Weierstrass, K., 1866. *Untersuchungen uber die Flächen, deren mitlere Krümmung überall gleich Null ist*, Moatsber. Berliner Akad., 612-625.

- Yang, D., Dan, W., Fu, Y., 2018. *A classification of minimal translation surfaces in Minkowski space*, J. Nonlinear Sci. Appl. 11, 437-443.
- Yoon, D.W., Lee, C.W., Karacan, M.K., 2013. *Some translation surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group*. Bull. Korean Math. Soc. 50 (4), 1329-1343.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Çağla RAMİS

Doğum Yeri : ANKARA

Doğum Tarihi : 22/08/1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Aydın YDA Efeler Lisesi

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Yayınları: Ramis, Ç. and Yaylı, Y., *Dual split quaternions and Chasles's theorem in 3-dimensional Minkowski space*, Adv. Appl. Clifford Algebras 23 (4), 951-964, 2013.

Yılmaz, B., Ramis, Ç. and Yaylı, Y., *On curves of N_k -slant helix and N_k -constant precession in Minkowski 3-space*, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories 12:2, 175-189, 2014.

Yılmaz, B., Ramis, Ç. and Yaylı, Y., *On developable ruled surface of the principal direction curves*, Konuralp Journal of Mathematics 5 (2), 172-180, 2017.

Ramis, Ç., Yılmaz, B. and Yaylı, Y., *Slant helices and isothermic surfaces*, Beitr Algebra Geom. 59, 145-154, 2018.

Ramis, Ç. and Munteanu, M. I., *Minimal translation surfaces in the three-dimensional Heisenberg group*, Filomat (preprint), 2019.