

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI TEMİZ HALKA SINIFLARI

Mete Burak ÇALCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2014

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Mete Burak ÇALCI tarafından hazırlanan “BAZI TEMİZ HALKA SINIFLARI” adlı tez çalışması 17/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Murat ŞAHİN
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17/07/2014

Mete Burak ÇALCI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI TEMİZ HALKA SINIFLARI

Mete Burak ÇALCI

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı açıklanmaktadır. İkinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan temel bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde değişim halkası tanımlanıp değişim halkalarının temel özellikleri verilmektedir. Dördüncü bölümde temiz halka tanımlanmakta ve temiz halkaların temel özellikleri araştırılmaktadır. Son bölümde $M_n(R)$ ve $K_s(R)$ halkalarının kuvvetli temiz olması için gerekli şartlar incelenmektedir.

Temmuz 2014, 92 sayfa

Anahtar Kelimeler : Temiz halka, matris halkası, değişim halkası, kuvvetli temiz halka, tek türlü temiz halka, kuvvetli π -düzenli halka, kuvvetli düzenli halka

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME CLASS OF CLEAN RINGS

Mete Burak ÇALCI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

This thesis is consisted of five chapters. In the first chapter, the aim of the thesis is explained. The second chapter is a preparatory section that includes known results will be used later. In the third chapter, an exchange ring is defined and its fundamental properties are given. In the fourth chapter, a clean ring is defined and its basic properties are investigated. In the last chapter, necessary conditions for the rings $M_n(R)$ and $K_s(R)$ to be strongly clean considered.

July 2014, 92 pages

Key Words : Clean ring, matrix ring, exchange ring, strongly clean ring, uniquely clean ring, strongly π -regular ring, strongly regular ring

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimi boyunca bilgisinden faydalandığım, birlikte çalışmaktan gurur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU' na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); bu tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren, hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI' ya (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); tez çalışmalarımı titizlikle izleyen, bilgi, öneri ve düşünceleriyle yol gösteren Sayın Dr. Burcu ÜNGÖR' e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve Sayın Orhan GÜRGÜN' e; tez çalışmamı Yurt İçi Yüksek Lisans burs programıyla destekleyerek bana maddi olanak sağlayan TÜBİTAK' a; tüm süreç boyunca her an yanımda olan, kahrımı çeken, tezin her aşamasında büyük emekleri olan, sürekli sevgisini hissettiğim sevgili eşim Tuğçe ÇALCI' ya; bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan kıymetli anne ve babama tüm kalbimle teşekkür ederim.

Mete Burak ÇALCI

Ankara, Temmuz 2014

İçindekiler

1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1 Temel Tanımlar ve Özellikler	3
3. DEĞİŞİM HALKALARI	11
3.1 Değişim Halkaları	11
4. TEMİZ HALKALAR	19
4.1 Temiz Halkalar	19
4.2 Değişim Halkaları Hangi Durumlarda Temizdir?	27
4.3 Kuvvetli Temiz Halkalar	31
4.4 Tek Türlü Temiz Halkalar	40
5. MATRİS HALKALARINDA KUVVETLİ TEMİZLİK	46
5.1 $M_n(R)$ Halkasında Kuvvetli Temizlik	46
5.2 $K_s(R)$ Halkasında Kuvvetli Temizlik	76
6. SONUÇ	88

SİMGELER DİZİNİ

$\det A$	A matrisinin determinantı
$\operatorname{tr} A$	A matrisinin izi
$r(a)$	a nın R deki sağ sıfırlayanı
$l(a)$	a nın R deki sol sıfırlayanı
$l_M(A)$	$A \subseteq R$ nin M_R deki sol sıfırlayanı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\operatorname{der}(f(x))$	$f(x)$ polinomunun derecesi
$I \trianglelefteq R$	I, R halkasının bir ideali
$\operatorname{Hom}_R(M, N)$	M den N ye R -modül homomorfizmalarının sınıfı
$\prod_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt çarpımı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt toplamı
$\operatorname{end}(M)$	M modülünün endomorfizma halkası
M_R	M sağ R -modül
$N \leq M$	N, M nin bir alt modülü
$N \ll M$	N, M nin dar alt modülü
$r_R(N)$	$N \subseteq M_R$ nin R deki sıfırlayanı
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$N(R)$	R halkasının asal radikali
R/I	R halkasının I idealine göre bölüm halkası
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$\operatorname{char}(R)$	R halkasının karakteristiği
$R \propto M$	R halkasının M modülü ile oluşturulan aşık genişlemesi
$C(R)$	R halkasının merkezi
$U(R)$	R halkasının tersinir elemanlarının kümesi
$I(R; V)$	R halkasının V modülü ile oluşturulan ideal genişlemesi
$R[[x]]$	R halkası üzerine kurulan kuvvet serisi halkası
$R[x]$	R halkası üzerine kurulan polinomlar halkası
R_P	R halkasının P idealine göre lokalizasyonu

$K_s(R)$	R üzerindeki Morita içeriği halkası
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipinde matris halkası
$T_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris halkası
$Q_c(R)$	R tamlık bölgesinin kesir cismi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\ker \theta$	θ homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im} \theta$	θ homomorfizmasının görüntü kümesi
$\alpha _P$	α dönüşümünün P ye kısıtlanması

1. GİRİŞ

Crawley ve Jonnson (1964) yılında bir M modülünün değişim özelliğine sahip olmasını “ I bir indeks kümesi ve X bir modül olmak üzere $X = M' \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} N_i$ ve $M \cong M'$ ise $X = M' \oplus (\bigoplus N'_i)$ olacak şekilde $N'_i \subseteq N_i$ alt modülleri bulunabiliyorsa M ye *değişim özelliğine (exchange property)* sahip bir modül denir” şeklinde vermişlerdir. Ayrıca I nın sonlu olması durumunda M yi sonlu değişim özelliğine sahip modül olarak tanımlamışlardır. Son olarak R bir halka olmak üzere ${}_R R$ modülü değişim özelliğine sahip ise R ye değişim halkası denilmiştir.

Nicholson (1977) yılında yayınlanan “Lifting idempotent and exchange rings” başlıklı çalışmasında değişim halkaları için yeni bir karakterizasyon vermiş, daha sonra bu karakterizasyon yardımıyla ele aldığı halkaların değişim halkası olması için denklemler elde etmiştir. Ardından bilinen bazı halka sınıflarının değişim halkası olup olmadığı incelemiştir. Ayrıca ilk defa bu makalesinde bir tersinir ve eşkare elemanın toplamı olarak yazılabilen elemanları temiz olarak adlandırmış, her elemanı bu özelliğe sahip halkalara da temiz halka demiştir. Sonrasında her temiz halkanın değişim halkası olduğunu göstermiştir. Ek olarak değişim halkaların temiz olabilmesi için eşkare elemanlarının merkezde olmasının gerek ve yeter şart olduğunu ortaya koymuştur.

Camillo ve Khurana (2001) de değişim halkası olup temiz olmayan halka örneği vermiştir. Chen “Exchange rings with artinian primitive factors” isimli makalesinde bir değişim halkasının hangi şartlar altında temiz halka olduğunu incelemiştir. Benzer olarak Yu bir halkanın sol (sağ) yakın duo olması durumunda değişim halkası olması ile temiz halka olmasının denk olduğunu söylemiştir.

Nicholson (1999) yılında kuvvetli π -düzenli halka tanımını verdikten sonra, yeni bir halka sınıfı olan kuvvetli temiz halkayı tanımlamıştır. Ardından kuvvetli π - düzenli halkaların kuvvetli temiz olduğunu göstermiştir. Yine aynı çalışmasında kuvvetli temizlik ve kuvvetli π -düzenlilik tanımlarını bir modülün endomorfizma halkasına genişletmiş ve bunun için gerekli denk şartları araştırmıştır.

Nicholson ve Zhou (2004) te yeni bir halka sınıfı olan tek türlü temiz halkaları

tanımlamıştır. Ardından tek türlü temiz halka ve eleman örnekleri vermiştir. Aynı makalede yerel halkalar için yeni bir karakterizasyon elde edilmiş ve tek türlü temiz halka için denk şartlar incelenmiştir.

2006 yılında kuvvetli temiz olma özelliği matris halkaları için araştırılmaya başlanmıştır. Bir tamlık bölgesi veya yerel halka üzerine kurulu matris halkalarının hangi durumlarda kuvvetli temiz olup olmadığı araştırılmıştır. Son olarak (2012) yılında Tang ve Zhou kuvvetli temiz olma özelliğini Morita içeriği halkası için incelemiş, Morita içeriği halkasının kuvvetli temiz olması için gerekli şartları araştırmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezin daha sonraki bölümlerinde kullanılacak bazı temel tanım ve önermeler verilmektedir. Bu tez boyunca R birimli halka olarak ele alınmaktadır. Ayrıca bundan sonra bir R halkasının tersinir elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilmektedir.

2.1 Temel Tanımlar ve Özellikler

Tanım 2.1.1. R bir halka olmak üzere $e \in R$ için $e^2 = e$ sağlanıyorsa e ye *eşkare (idempotent) eleman* denir. Ayrıca $e_1, e_2 \in R$ eşkare elemanlar olmak üzere $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ ise, e_1 ve e_2 elemanlarına *dik eşkare (orthogonal idempotent)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.2. R bir halka olsun. $C(R) = \{x \in R : \text{Her } y \in R \text{ için } yx = xy\}$ şeklinde tanımlı kümeye R halkasının *merkezi (center of R)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.3. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Eğer $e \in C(R)$ ise e ye *merkezil eşkare (central idempotent)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.4. Bir R halkasının bütün elemanları eşkare ise R ye *Boolean halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.5. R bir halka olsun. $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcutsa a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.6. R bir halka ve $a \in R$ üstel sıfır eleman olsun. Eğer $a \in C(R)$ ise a ya *merkezil üstel sıfır (central nilpotent)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.7. R bir halka olmak üzere her $x \in R$ için $nx = 0$ şartını sağlayan en küçük n pozitif tamsayısına R halkasının *karakteristiği* denir ve $\text{char}(R)$ ile gösterilir. Eğer bu şartı sağlayan pozitif bir tamsayı mevcut değilse R halkasının karakteristiği 0 dır denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.8. Sıfırdan farklı üstel sıfır elemana sahip olmayan halkaya *indirgenmiş (reduced) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.9. R bir halka olsun. Eğer R nin ideallerinin $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ şeklindeki her azalan dizisi sonlu bir adımda duruyorsa R ye *Artin (Artinian) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.10. R bir halka olsun. Eğer R nin bir I idealinin her elemanı üstel sıfır ise I ya *nil ideal* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.11. R bir halka olsun. Eğer R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise R ye *bölümlü (division) ring* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.12. R bir halka olsun. $r(a) = \{x \in R : ax = 0\}$ şeklinde tanımlı kümeye a nın R deki *sağ sıfırlayana (right annihilator)* denir. Benzer şekilde $l(a) = \{y \in R : ya = 0\}$ şeklinde tanımlı kümeye a nın R deki *sol sıfırlayana (left annihilator)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.13. R bir halka olmak üzere $x \in R$ için $xyx = x$ şartını sağlayan $y \in R$ mevcut ise x e *düzenli (regular)* denir. R nin her elemanı düzenli ise R ye *düzenli (regular) halka* denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.14. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $1 - x \in R$ de sol terse sahip ise x e *sol yakın düzenli (left quasi-regular)*; $1 - x \in R$ de sağ terse sahipse x e *sağ yakın düzenli (right quasi-regular)*; $1 - x \in R$ de sağ ve sol terse sahipse x e *yakın düzenli (quasi-regular)* eleman denir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.1.15. R bir halka olmak üzere R nin bir I sol ideali için aşağıdakiler denktir.

- (1) I sol yakın düzenlidir.
- (2) I yakın düzenlidir.
- (3) I sol ideali R de dardır (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.16. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $x = xux$ olacak şekilde $u \in U(R)$ elemanı mevcutsa x e *tersinir düzenli* (*unit regular*) eleman denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.17. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a aşağıdaki denk şartlardan birini sağlıyorsa a ya *kuvvetli düzenli* (*strongly regular*) eleman denir.

- (1) R de $a^2x = a = ya^2$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır.
- (2) $aR = a^2R$ ve $r(a) = r(a^2)$ dir.
- (3) $R = aR \oplus r(a)$ dir.
- (4) R de $aba = a$ ve $ab = ba$ olacak şekilde bir $b \in R$ elemanı vardır.
- (5) R de $aua = a$ ve $au = ua$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır.
- (6) R de $e^2 = e \in R$ için $a = ue = eu$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır.
- (7) R de $a^2u = a = ua^2$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır.

Ayrıca R halkasının bütün elemanları kuvvetli düzenli ise R ye *kuvvetli düzenli* (*strongly regular*) halka denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.18. R bir halka olsun. R nin bütün maksimal sol ideallerinin veya denk olarak bütün maksimal sağ ideallerinin arakesatine *Jacobson radikali* denir ve $J(R)$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.1.19. R bir halka olsun. Aşağıdaki kümeler eşittir.

- (1) $J(R)$,
- (2) R nin bütün maksimal sol (sağ) ideallerinin arakesiti,
- (3) $\{x \in R : \text{Her } r, s \in R \text{ için } rxs \text{ yakın düzenli}\}$,
- (4) $\{x \in R : \text{Her } r \in R \text{ için } rx \text{ yakın düzenli}\}$,
- (5) $\{x \in R : \text{Her } s \in R \text{ için } xs \text{ yakın düzenli}\}$,
- (6) R nin bütün yakın düzenli sol (sağ) ideallerinin birleşimi,

(7) R nin bütün yakın düzenli ideallerinin birleşimi (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.20. R bir halka olmak üzere $R/J(R)$ bölümlü halka ise, R ye *yerel (local) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.1.21. Bir R halkası için aşağıdaki şartlar denktir.

- (1) R yerel halkadır.
- (2) R halkası tek maksimal ideale sahiptir.
- (3) $J(R)$ maksimal sol idealdir.
- (4) R nin sol terse sahip olmayan elemanlarının kümeleri toplamaya göre kapalıdır.
- (5) $J(R) = \{x \in R \mid Rx \neq R\}$
- (6) $J(R) = \{x \in R \mid x \notin U(R)\}$
- (7) Her $x \in R$ için $x \in U(R)$ ya da $1 - x \in U(R)$ dir (Anderson ve Fuller 1992).

Uyarı 2.1.22. R bir halka olsun. Her $u \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ için $u + j \in U(R)$ dir.

Tanım 2.1.23. R bir halka olsun. Bir $p \in R$ için $p = ab$ iken $a \in U(R)$ ya da $b \in U(R)$ ise p ye *indirgenemez (irreducible) eleman* denir (Lam 1998).

Tanım 2.1.24. R bir halka olsun. $a, b \in R$ için $a = bu$ olacak şekilde $u \in U(R)$ mevcut ise a ile b *ilgilidir (associate)* denir (Lam 1998).

Tanım 2.1.25. R bir tamlık bölgesi olsun. R nin $I \subset R$ şartını sağlayan her ideali tek üreteçli ise R ye *temel ideal bölgesi (principal ideal domain)* denir (Lam 1998).

Tanım 2.1.26. R bir tamlık bölgesi olsun. R nin her elemanı ilgililik ve sıra farkı gözetmeksizin indirgenemez elemanların kuvvetlerinin çarpımı şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa R ye *tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge (uniquely factorization domain)* denir (Lam 1998).

Tanım 2.1.27. R bir halka olsun. R nin bütün asal ideallerinin arakesitine *asal radikal (prime radical)* denir ve $N(R)$ ile gösterilir (Lam 2001).

Lemma 2.1.28. R değişmeli bir halka olsun. R nin bir I ideali için aşığıdakiler denktir.

(1) I nil idealdir.

(2) I asal radikaldir (Lam 2001).

Tanım 2.1.29. M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N + K = M$ olacak şekilde M nin her K alt modülü için $K = M$ ise, N ye *dar (small) alt modül* adı verilir ve $N \ll M$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.30. $0 \neq R$ bir halka olsun. R nin sıfır ve kendisinden başka ideali yoksa R ye *basit (simple) halka* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.31. R bir halka olsun. Eğer R halkası basit ideallerinin direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa R ye *yarı basit (semisimple) halka* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.32. Sıfırdan farklı M modülünün sıfır ve kendisinden başka alt modülü yoksa M ye *basit (simple) modül* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.33. Bir M modülü basit modüllerin direkt toplamı ise, M ye *yarı basit (semisimple) modül* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.34. M bir R -modül, $N \subseteq M$ ve $A \subseteq R$ olsun. $r_R(N) = \{r \in R : Nr = 0\}$ kümesine N nin R de sağ sıfırlayanı, $l_M(A) = \{x \in M : xA = 0\}$ kümesine A nın M de sol sıfırlayanı adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.35. R bir halka olsun. R nin bir I ideali ve $X \subseteq R$ basit sol (sağ) ideali verilsin. Eğer I ideali X in R deki sıfırlayanı ise I ya *sol (sağ) ilkel ideal (primitive ideal)* denir (Lam 2001).

Sonuç 2.1.36. R bir halka ve her $i \in I$ için I_i ler ilkel sol (sağ) ideal olsun. Bu durumda $J(R) = \bigcap_{i \in I} I_i$ dir (Lam 2001).

Tanım 2.1.37. M, K ve U R -modüller olmak üzere her $f : M \rightarrow K$ R -modül epimorfizması ve her $\gamma : U \rightarrow K$ R -modül homomorfizması için $f\bar{\gamma} = \gamma$ olacak biçimde $\bar{\gamma} : U \rightarrow M$ R -modül homomorfizması varsa U ya M -projektif modül denir. Eğer U her M modülü için M -projektif ise U ya *projektif modül* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow \bar{\gamma} & & \searrow \gamma & \\ M & \xrightarrow{f} & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tanım 2.1.38. Bir M R -modülünün X alt kümesi için

- (1) Eğer $XR = \left\{ \sum_{\text{sonlu}} x_i r_i : x_i \in X, r_i \in R \right\} = M$ ise X kümesi M yi üretir denir.
- (2) Eğer $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ için $x_i \in X$ ve $r_i \in R$ olmak üzere eğer $x_1 r_1 + \dots + x_n r_n = 0$ iken, her i için $r_i = 0$ oluyorsa X e R -bağımsız denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.39. Bir M R -modülünün X alt kümesi hem M yi üretmekte hem de R -bağımsız ise X e M nin bir bazı (R -bazı) denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.40. Bir M R -modülü bir X bazına sahipse M ye *serbest (free) modül* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Lemma 2.1.41. Her serbest modül projektiftir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.42. M bir modül olmak üzere bir P projektif modülü için $\varphi : P \rightarrow M$ epimorfizma olsun. Eğer $\text{Ker}\varphi \ll P$ ise P ye M nin *projektif örtüsü (projective cover)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.43. R bir halka olsun. Eğer her sağ (sol) R -modül bir projektif örtüye sahip ise R ye *sağ (sol) mükemmel (perfect) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.44. A, B iki halka, ${}_A N_B$ ve ${}_B M_A$ ikili modüller olsun. $\Psi : N \otimes_B M \rightarrow A$ ve $\Phi : M \otimes_A N \rightarrow B$ modül homomorfizmaları olmak üzere $m, m' \in M, n, n' \in N$ için $\Psi(n \otimes m)n' = n\Phi(m \otimes n')$ ve $\Phi(m \otimes n)m' = m\Psi(n \otimes m')$ olsun. Bu durumda

(A, B, M, N, Ψ, Φ) yapısına *Morita yapısı* (*Morita context*) denir.

$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & n \\ m & b \end{bmatrix} : a \in A, b \in B, m \in M, n \in N \right\}$ kümesinin yukarıdaki eşitlikler yardımıyla bir halka yapısı vardır. Bu halkaya *Morita içeriğinin halkası* denir (Tang vd. 2014).

Tanım 2.1.45. R bir halka ve ${}_R M_R$ ikili modül olmak üzere R nin M ile olan *aşık ar genişlemesi* (*trivial extension*) $R \propto M = R \oplus M$ bileşensel toplama işlemi ve $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir halkadır. Bu halka $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & r \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm matrislerden oluşan halkaya izomorftur (Tang ve Zhou 2012).

Tanım 2.1.46. R bir halka ve ${}_R V_R$ ikili modül olsun. R nin V ile olan *ideal genişlemesi* (*ideal-extension*) $I(R; V)$ ile gösterilir. $I(R; V) = R \oplus V$ kümesi bileşensel toplama işlemi ile abel gruptur ve $(r, v)(s, w) = (rs, rw + vs + vw)$ şeklinde tanımlı çarpma işlemi ile birimi $(1, 0)$ olan bir halkadır (Nicholson ve Zhou 2004).

Uyarı 2.1.47. Bir R halkasının $I(R; V)$ ideal genişlemesi verilsin. Burada $(R, 0) = \{(r, 0) : r \in R\}$ ve $(0, V) = \{(0, v) : v \in V\}$ olmak üzere $(R, 0)$ kümesi R nin bir alt halkasıdır ve $(R, 0) \cong R$ dir. Ayrıca $(0, V)$ kümesi $I(R; V)$ nin bir ideali olup $(0, V) \cong V$ ve $I(R; V)/(0, V) \cong R$ dir.

Uyarı 2.1.48. Bir R halkası ve $S = I(R; V)$ için aşağıdakiler denktir.

- (1) $(0, V) \subseteq J(S)$ dir.
- (2) Eğer $u \in U(R)$ ve $v \in V$ ise $(u, v) \in U(S)$ dir.
- (3) Eğer $v \in V$ ise $v + w + vw = 0$ olacak şekilde $w \in V$ mevcuttur.

Tanım 2.1.49. p bir asal sayı olmak üzere $R = \widehat{\mathbb{Z}}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i : a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}$ kümesi aşağıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya p tabanına göre tamsayılar (p -adic integers) halkası denir. R değişmeli yerel halkadır ve $J(R) = pR$ dir. Toplama işlemi

$$a_0 + b_0 \equiv c_0 \pmod{p}, a_0 + b_0 = c_0 + k_0 p; a_1 + b_1 + k_0 \equiv c_1 \pmod{p}, a_1 + b_1 + k_0 = c_1 +$$

$k_1p; \dots$ olmak üzere $(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots) + (b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots) = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots$

ve çarpma işlemi

$a_0b_0 \equiv d_0 \pmod{p}$, $a_0b_0 = d_0 + l_0p$; $a_0b_1 + a_1b_0 + l_0 \equiv d_1 \pmod{p}$, $a_0b_1 + a_1b_0 + l_0 = d_1 +$

$l_1p; \dots$ olmak üzere $(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots) + (b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots) = d_0 + d_1p + d_2p^2 + \dots$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 2.1.50. (*Zorn Lemma*) X kısmi sıralı bir küme olmak üzere eğer X teki her zincir (tam sıralı küme) bir üst sınıra sahip ise o zaman X en az bir maksimal eleman içerir (Anderson ve Fuller 1992)

3. DEĞİŞİM HALKALARI

Bu bölümde değişim halkaları tanımlanmakta ve bazı özellikleri incelenmektedir.

3.1 Değişim Halkaları

Önerme 3.1.1. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır.
- (2) $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ olacak şekilde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ vardır.
- (3) $R = Re + R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır.
- (4) $1 - e \in R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır (Nicholson 1977).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $e - x \in R(x - x^2)$ olacak biçimde $e^2 = e$ mevcut olsun. Buradan $e - x = r(x - x^2)$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. $e = rx - rx^2 + x = (r - rx + 1)x = r_1x \in Rx$. O halde $1 - e = (1 - rx)(1 - x)$ olur. Son durumda $c = (1 - rx) \in R$ olarak seçilirse $(1 - e) - c(1 - x) = 0 \in J(R)$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ olacak şekilde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ mevcut olsun. O halde $1 - ((1 - e) - c(1 - x)) = e + c(1 - x) \in U(R)$ ve $u(e + c(1 - x)) = 1$ olacak şekilde $u \in R$ mevcuttur. Sonuç olarak $ue + uc(1 - x) = 1$ olduğundan $R = Re + R(1 - x)$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $R = Re + R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ mevcut olsun. Bu nedenle $1 = te + s(1 - x)$ olacak şekilde $s, t \in R$ vardır. Eğer $f = e + (1 - e)te$ olarak seçilirse $f^2 = f \in Rx$ ve $1 - f = (1 - e)s(1 - x) \in R(1 - x)$ bulunur.

(4) $\Rightarrow$ (1) $1 - e \in R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ var olsun. O halde $e = rx$ ve $1 - e = r_1x$ olacak şekilde $r, r_1 \in R$ mevcuttur. Böylece $e - x = e(1 - x) - (1 - e)x = rx(1 - x) - (r_1(1 - x)x) = (r - r_1)(x - x^2) \in R(x - x^2)$ dir.

Tanım 3.1.2. R bir halka olsun. Eğer R halkasının her elemanı Önerme 3.1.1 deki denk şartlardan birini sağlıyor ise R ye *sol değişim (exchange) halkası* denir (Nicholson 1977).

Uyarı 3.1.3. Halkalar için değişim özelliği simetriktir. Bundan dolayı her sol (sağ) değişim halkası sağ (sol) değişim halkasıdır. Bu sebeple bu tür halkalar sol (sağ) değişim halkası yerine değişim halkası olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.4. R bir halka ve L de R nin toplamsal bir alt grubu olsun. $x - x^2 \in L$ şartını sağlayan $x \in R$ için $e - x \in L$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ varsa *eşkare elemanlar L ye göre yükselir* denir (Nicholson 1977).

Sonuç 3.1.5. R nin değişim halkası olması için gerek ve yeter şart R nin eşkare elemanlarının her sol ideale göre yükselmesidir (Nicholson 1977).

İspat: R bir değişim halkası ve R nin bir sol ideali L olsun. Bu durumda $x - x^2 \in L$ olacak şekildeki $x \in R$ alınsın. R değişim halkası olduğundan Önerme 3.1.1 in (1) şartını sağlar. Yani $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcuttur. O halde $R(x - x^2) \leq L$ olup $e - x \in L$ olur. Karşıt olarak eşkare elemanlar her sol ideale göre yükselsin ve $x \in R$ olsun. $R(x - x^2)$ bir sol ideal ve $x - x^2 \in R(x - x^2)$ olur. Hipotez gereğince $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcut olup ispat biter.

Önerme 3.1.6. Değişim halkasının her homomorfik görüntüsü de bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: Bir L ideali için R nin homomorfik görüntüleri R/L şeklindedir. Eğer $x + L \in R/L$ ise $x \in R$ ve R değişim halkası olduğundan $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. O halde $(e - x) + L \in (R/L)(x - x^2 + L)$ ve $(e + L)(e + L) = e^2 + L = e + L \in R/L$ vardır. Sonuçta R bir değişim halkasıdır.

Önerme 3.1.7. R nin değişim halkası olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ nin değişim halkası olması ve eşkare elemanlarının $J(R)$ ye göre yükselmesidir (Nicholson 1977).

İspat: R bir değişim halkası olsun. Önerme 3.1.6 dan dolayı $R/J(R)$ bir değişim halkası olur ve Sonuç 3.1.5 gereğince eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. Karşıt olarak $R/J(R)$ değişim halkası ve eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselsin. $x \in R$

alınsın. $x + J(R) = \bar{x} \in \bar{R}$ elemanı için $(\bar{1} - \bar{e}) - \bar{c}(\bar{1} - \bar{x}) \in J(\bar{R})$ olacak şekilde $\bar{e}^2 = \bar{e} \in \bar{R}\bar{x}$ ve $\bar{c} \in \bar{R}$ mevcuttur. $J(\bar{R}) = 0$ olduğundan $(\bar{1} - \bar{e}) = \bar{c}(\bar{1} - \bar{x})$ sağlanıp $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ elde edilir. Eşkere elemanlar $J(R)$ ye göre yükseldiğinden $e^2 = e \in Rx$ olup istenilen elde edilir.

Önerme 3.1.8. Her düzenli halka bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R düzeli bir halka ve $x \in R$ olsun. Buradan $xyx = x$ olacak şekilde $y \in R$ vardır. $f = yx$ olarak seçilirse $f^2 = f$ sağlanır. f nin seçimine bağlı olarak $e = f + (1 - f)xf$ biçiminde belirlenirse $e \in Rx$ bir eşkere eleman olur. $1 - e = (1 - f)(1 - x) \in R(1 - x)$ olduğu kolayca görülebilir. Bu ise Önerme 3.1.1 in denk şartlarından birinin sağlandığını gösterir. Dolayısıyla R bir değişim halkasıdır.

Önerme 3.1.9. Her bölümlü halka düzenli halkadır (Nicholson 1977).

İspat: R bir bölümlü halka ve $x \in R$ olsun. $x = 0$ ise $xxx = x$ dir. Eğer $x \neq 0$ ise R bölümlü halka olduğundan $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ olacak biçimde $x^{-1} \in R$ vardır. Buradan $x = xx^{-1}x$ elde edilir. Dolayısıyla R düzenli bir halka olur.

Tanım 3.1.10. R bir halka olsun. Eğer $R/J(R)$ düzenli ve eşkere elemanlar $J(R)$ ye göre yükseliyor ise R ye *yarı düzenli (semiregular) halka* denir (Nicholson 1977).

Önerme 3.1.11. Her yarı düzenli halka bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R yarı düzenli bir halka olduğundan $R/J(R)$ düzenlidir ve eşkere elemanlar $J(R)$ ye göre yükselirler. Önerme 3.1.7 den dolayı R düzenli bir halka kabul edilebilir. O halde Önerme 3.1.8 den dolayı ispat biter.

Önerme 3.1.12. Her yerel halka bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R bir yerel halka ve $x \in R$ olsun. $x \in J(R)$ ise $0^2 = 0 \in Rx$ ve $c = 1 \in R$ olacak şekilde seçilirse $(1 - e) - c(1 - x) = x \in J(R)$ olduğundan Önerme 3.1.1 sağlanır ve R değişim halkası olarak bulunur. Eğer $x \notin J(R)$ ise R yerel olduğundan $x \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $ux = xu = 1$ olacak biçimde $u \in R$ mevcuttur. Ayrıca $Rx = R$ ve $1 - ux = 0 \in J(R)$ dir. $1^2 = 1 = f \in Rx = R$ ve $c = 1 \in R$ için $(1 - e) - c(1 - ux) = -(1 - ux) \in J(R)$ olduğundan R halkası değişim halkasıdır.

Düzenli halkalar değişim halkası olmasına rağmen değişim halkaları düzenli olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.13. $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : 2 \nmid b\}$ kümesi $\mathbb{Q}$ nun yerel bir alt halkasıdır. Önerme 3.1.12 den dolayı bir değişim halkasıdır. Fakat $2 \in \mathbb{Z}_{(2)}$ elemanı için $2 = 2x2$ olacak şekilde $x \in \mathbb{Z}_{(2)}$ bulunamadığından düzenli bir halka değildir.

Örnek 3.1.14. D bir bölümlü halka ve S de D nin birimi içeren bir alt halkası olsun.

$$R(D, S) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, s, \dots) : n \geq 1, x_i \in D, s \in S\}$$

şekinde tanımlansın. Bileşensel işlemlerle R bir halkadır. Bununla birlikte R nin değişim halkası olması için gerek ve yeter şart S nin değişim halkası olmasıdır. R bir değişim halkası kabul edilsin. S halkası R nin homomorfik görüntüsü olduğundan Önerme 3.1.6 dan dolayı S bir değişim halkası olur. Karşıt olarak S bir değişim halkası ve $r = (x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, s, \dots) \in R$ olsun. S değişim halkası olduğundan $s \in S$ için $1 - f \in S(1 - s)$ olacak şekilde $f^2 = f \in Ss$ vardır. $e = (1, 1, \dots, 1, f, f, \dots) \in R$ olmak üzere $e^2 = e \in R$ dir. $f \in Ss$ ve $1 - f \in S(1 - s)$ olduğundan $f = s's$ ve $1 - f = s''(1 - s)$ olacak biçimde $s', s'' \in S$ vardır. Her i için $x_i \neq 0$ olsun. D bölümlü halka olduğundan $x_i x_i^{-1} = x_i^{-1} x_i = 1$ olacak şekilde $x_i^{-1} \in D$ vardır. $e = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}, s', s', \dots)(x_1, x_2, \dots, x_n, s, s, \dots) \in Rr$ olup $1 - e = (0, 0, \dots, 0, s'', s'', \dots)(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n, 1 - s, 1 - s, \dots) \in R(1 - r)$ bulunur. Diğer durumlarda benzer biçimde görülebilir. O halde R bir değişim halkası olur.

Tanım 3.1.15. R bir halka olsun. Eğer eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseliyor ve $J(R)$ tarafından kapsanmayan her sol (sağ) ideal sıfırdan farklı bir eşkare eleman içeriyorsa R halkasına *güçlü (potent) halka* denir (Nicholson 1977).

Önerme 3.1.16. Her değişim halkası güçlü halkadır (Nicholson 1977).

İspat: R bir değişim halkası olsun. O halde eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselirler. Bu durumda $x \notin J(R)$ elemanı için $0 \neq e = e^2 \in Rx$ in varlığını göstermek yeterli olacaktır. $x \in R$ için $e^2 = e \in Rx$ olması halinde $e = 0$ olsun. Hipotez gereğince R bir değişim halkası olduğundan $a \in R$ için $1 - e \in R(1 - ax)$ olacak şekilde

$e^2 = e \in Rax$ vardır. Kabulden $e = 0$ olup $1 \in R(1 - ax)$ elde edilir. Bu durumda $x \in J(R)$ olur. Halbuki $x \notin J(R)$ olacak şekilde seçilmişti. Sonuç olarak $e \neq 0$ olur ve R güçlü halka bulunur.

Önerme 3.1.17. R bir değişim halkası ve $e^2 = e \in R$ ise eRe bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R değişim halkası olduğundan $x \in eRe$ elemanı için $f^2 = f \in Rx$ ve $1 - f \in R(1 - x)$ olacak şekilde x ve f elemanları mevcuttur. Buradan $fe = f$ dir. Dolayısıyla $(ef)^2 = ef \in eRe$ için $e - ef = e(1 - f)e \in eRe(e - x)$ bulunur. Bu ise eRe nin değişim halkası olması demektir.

Tanım 3.1.18. M bir R -modül olsun. I herhangi bir indeks kümesi ve X bir modül olsun. $X = M' \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} N_i$ ve $M \cong M'$ olmak üzere $X = M' \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i)$ olacak şekilde $N'_i \subseteq N_i$ alt modülleri bulunulabiliyorsa M ye *değişim özelliğine* (*exchange property*) sahip bir modül denir (Crawley ve Jonsson 1964).

Tanım 3.1.19. Eğer bir M modülü yukarıdaki şartları sonlu bir I indeks kümesi için sağlarsa M ye *sonlu değişim özelliğine* (*finite exchange property*) sahip modül denir (Crawley ve Jonsson 1964).

Ayrıca M modülü sonlu değişim özelliğine sahip ise $|I| = 2$ almak yeterlidir.

Uyarı 3.1.20. (1) Değişim özelliği modül izomorfizması altında korunur.

(2) Bir M modülü $|I_m| = m$ olan bir indeks kümesi için sonlu değişim özelliğine sahip ise $k \leq m$ olacak şekilde indekse sahip bütün I_k indeks kümeleri içinde sonlu değişim özelliğine sahiptir (Crawley ve Jonsson 1964).

Lemma 3.1.21. M değişim özelliğine sahip bir modül ve $X = M \oplus X_0 \oplus Y = (\bigoplus_{i \in I} N_i) \oplus Y$ olsun. Bu durumda $X = M \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i) \oplus Y$ şartını sağlayan $N'_i \leq N_i$ alt modülleri mevcuttur (Crawley ve Jonsson 1964).

İspat: $f : X \rightarrow X/Y$ olacak şekildeki örten dönüşümü alınsın. Buradan $Xf = Mf \oplus X_0f = \bigoplus_{i \in I} (N_i f)$ ve $Mf \cong M$ olur. M değişim özelliğine sahip olduğundan $Xf = Mf \oplus (\bigoplus_{i \in I} K_i)$ şartını sağlayan $K_i \leq N_i f$ olacak şekilde alt modülleri mevcut-

tur. $N'_i = \{x \in N_i \mid xf \in K_i\}$ olacak şekilde seçilsin. İddia $X = M \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i) \oplus Y$ şeklinde olmasıdır. $x \in X$ için $xf = mf + (\sum k_i)$ olacak şekilde $m \in M$ ve $k_i \in K_i$ elemanları mevcuttur. $K_i \subseteq N_i f$ olduğundan $k_i = n_i f$ olacak şekilde $n_i \in N_i$ vardır. Bu durumda $n_i \in N'_i$ ve $(x - m - \sum n_i) \in \ker(f) = Y$ olur. $X = M + (\sum N'_i) + Y$ toplamının direkt toplam olduğu gösterilirse ispat biter. $m + \sum n'_i + y = 0$ iken $mf + (\sum n_i f) = 0$ olup buradan $mf = 0$ ve her i için $n_i f = 0$ elde edilir. $mf = 0$ ise $m \in M \cap Y = 0$ ve $n_i f = 0$ olması da $n_i \in N_i \cap Y = 0$ olmasını gerektirir. Böylece her i için $m = n_i = 0$ ve $y = 0$ olup istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.1.22. $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M nin değişim özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2 nin değişim özelliğine sahip olmasıdır (Crawley ve Jonsson 1964).

İspat: M değişim özelliğini sağlasın ve $X = M_1 \oplus X_0 = \bigoplus_{i \in I} N_i$ olsun. Buradan $M_2 \oplus X = M_2 \oplus M_1 \oplus X_0 = \bigoplus_{i \in I} N_i \oplus M_2$ elde edilir. O halde $M_2 \oplus X = M_2 \oplus M_1 \oplus \bigoplus_{i \in I} N_i \oplus (N'_i) \oplus M'_2$ olacak şekilde $N'_i \subseteq N_i$ ve $M'_2 \subseteq M_2$ alt modülleri mevcuttur. Sonuçta $M'_2 = 0$ olup $X = M_1 \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i)$ elde edilir. Bu ise M_1 in değişim özelliğine sahip olması anlamına gelir. Benzer şekilde M_2 nin de değişim özelliğine sahip olduğu gösterilebilir.

Karşıt olarak M_1 ve M_2 değişim özelliğini sağlasın ve $X = M \oplus X_0 = \bigoplus_{i \in I} N_i$ olsun. Buradan $X = M_1 \oplus M_2 \oplus X_0 = \bigoplus_{i \in I} N_i$ dir. M_1 değişim özelliğine sahip olduğundan $X = M_1 \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i)$ olacak şekilde $N'_i \subseteq N_i$ alt modülleri mevcuttur. Bu durumda $M_2 \oplus X_0 \oplus M_1 = (\bigoplus_{i \in I} N'_i) \oplus M_1$ olur. M_2 değişim özelliğine sahip olduğundan Önerme 3.1.21 gereğince $X = M_2 \oplus (\bigoplus_{i \in I} N''_i) \oplus M_1$ şartını sağlayan $N''_i \subseteq N_i$ alt modülleri mevcuttur. Sonuçta $M_1 \oplus M_2$ nin değişim özelliğine sahip olduğu görülür.

Tanım 3.1.23. M bir modül ve $n \leq m$ doğal sayıları verilsin. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$ şeklinde iki farklı ayrışımı verildiğinde her bir M_i için $M_i = \bigoplus_{j \in J} N_j$ olacak şekilde $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ varsa M nin bu iki parçalanışına *izomorf incelmeye (isomorphic refinements) sahip modül* denir (Crawley ve Jonsson 1964).

Sonuç 3.1.24. M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (1) M nin bütün direkt toplananları aynı değişim (sonlu değişim) özelliğine sahiptir.
- (2) M modülü sonlu değişim özelliğine sahip ise M nin iki farklı sonlu direkt toplamı izomorf incelmeye sahiptir (Crawley ve Jonsson 1964).

Teorem 3.1.25. I bir indeks kümesi olmak üzere $i \in I$ için M_i modülleri sayılabilir üreteçli ve değişim özelliğine sahip olsunlar. O halde $\sum_{i \in I} M_i$ nin herhangi iki direkt toplamı izomorf incelmeye sahiptir (Crawley ve Jonsson 1964).

Tanım 3.1.26. M bir modül olmak üzere eğer M sayılabilir üreteçli alt modüllerinin direkt toplamı olarak ifade edilebiliyorsa M ye K tipindendir (*type K*) denir (Kaplansky 1958).

Teorem 3.1.27. M bir modül olsun. Eğer M modülü K tipinden ise M nin bütün direkt toplananları da K tipindendir (Kaplansky 1958).

Her serbest modül R nin kopyalarının direkt toplamı olduğundan K tipindendir.

Sonuç 3.1.28. Her projektif modül sayılabilir üreteçli projektif modüllerin direkt toplamıdır (Kaplansky 1958).

Lemma 3.1.29. $X = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ ve her M_i değişim özelliğine sahip olsun. Her i için $M_i \cong M'_1 \oplus \dots \oplus M'_n$ olacak şekilde M_i nin M'_i direkt toplananları vardır (Crawley ve Jonsson 1964).

Tanım 3.1.30. Her bir $M_i (i \in I)$ sayılabilir üreteçli olmak üzere, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ sonlu değişim özelliğine sahip olsun. M_i lerin direkt toplananlarının bir direkt toplamına izomorf olan M nin bir alt modülüne *hoş (nice) modül* denir (Crawley ve Jonsson 1964).

Teorem 3.1.31. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i modülleri sayılabilir üreteçli ve sonlu değişim özelliğine sahip ise M nin her direkt toplananı hoştur (Crawley ve Jonsson 1964).

Sonuç 3.1.32. R bir değişim halkası olsun. Her P projektif modülü için $P = \bigoplus Re_i$ olacak şekilde $e_i^2 = e_i$ vardır (Crawley ve Jonsson 1964).

Teorem 3.1.33. R bir halka ve M bir sağ R -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $\text{end}(M)$ sağ değişim halkasıdır.
- (2) M sonlu değişim özelliğine sahiptir.
- (3) $\text{end}(M)$ sol değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

Bir R halkası için $\text{end}({}_R R) \cong R$ olduğundan R nin sol (sağ) değişim halkası olması için gerek ve yeter şart ${}_R R$ nin sonlu değişim özelliğine sahip olmasıdır. Buradan sağ ve sol değişim halkalarının aynı olduğu açıkça görülmektedir.

4. TEMİZ HALKALAR

Bu bölümde ilk kez Nicholson tarafından 1977 yılında tanımlanmış olan temiz eleman ve temiz halka kavramı verilerek bazı özellikleri incelenecektir.

4.1 Temiz Halkalar

Tanım 4.1.1. R bir halka olsun. $a \in R$ için $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcutsa a ya *temiz (clean) eleman* denir. Eğer R halkasının her elemanı temiz ise R ye *temiz (clean) halka* denir (Nicholson 1977).

Örnek 4.1.2. (1) Bir R halkasında u tersinir eleman ise $u = u + 0$ ve $0^2 = 0$ olduğundan u temiz elemandır.

(2) Bir R halkasında e eşkare eleman ise $e = (1-e) + (2e-1)$ yazılırsa $(1-e)^2 = 1-e$ ve $(2e-1)(2e-1) = 1$ olup e temiz eleman bulunur.

(3) Bir R halkasında $a = e + u$ olacak şekilde e eşkare elemanı ve u tersinir elemanı mevcut ise $1-e$ eşkare elemanı ve $-u$ tersinir elemanı için $1-a = (1-e) + (-u)$ olacağından $1-a$ temiz eleman olur.

(4) Bir R halkasında m üstel sıfır eleman ise $1-m \in U(R)$ dir. Böylece $m = 1 + (m-1)$ şeklinde yazılabileceğinden m temizdir (Han ve Nicholson 2001).

Örnek 4.1.3. (1) Boolean halkalar temiz halkadır.

(2) Cisimler ve bölümlü halkalar temiz halkalardır.

(3) R bir yerel halka olsun. Her $x \in R$ için x ya da $1-x$ tersinirdir. x tersinir ise tersinir elemanlar temiz olduğundan istenilen elde edilir. $1-x$ tersinir ise $x = (x-1)+1$ olarak yazılırsa 1 eşkare eleman olur ve x temiz olarak bulunur. Dolayısıyla R temiz halka olur.

Önerme 4.1.4. (1) Her temiz halka değişim halkasıdır.

(2) Eşkare elemanları merkezde olan bir halkanın temiz olması için gerek ve yeter şart değişim halkası olmasıdır (Nicholson 1977).

İspat: (1) R bir temiz halka olsun. O halde her $x \in R$ için $x = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcuttur. $x^2 - x = u(x - u^{-1}(1-e)u) = ue + u^2 - u + eu$

dur. $f = u^{-1}(1 - e)u$ olacak şekilde seçilirse $f^2 = f$ olur. Böylece $x - x^2 = u(f - x)$ elde edilir. Sonuç olarak $f - x = u^{-1}(x - x^2) \in R(x - x^2)$ olup R değişim halkası bulunur.

(2) R eşkare elemanları değişmeli olan bir değişim halkası olsun. Bu durumda $1 - e \in R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ mevcuttur. Yani $e = ax$ olacak şekilde $a \in R$ elemanı vardır. Genelliği bozmaksızın $ea = a$ alınırsa $axa = a$ olup xa ve ax eşkaredir. Eşkare elemanlar merkezde olduğundan $xa = x(axa) = x(ax)a = (ax)xa = (xa)ax = a(xa)x = ax$ dir. Ayrıca $1 - e \in R(1 - x)$ olduğundan $1 - e = b(1 - x)$ olacak şekilde $b \in R$ mevcuttur. e için yapılan işlemler $1 - e$ için de tekrar edilirse $(1 - e)b = b$ ve $b(1 - x) = (1 - x)b$ olur. Sonuç olarak $x = x - (1 - e) + (1 - e)$ olacak şekilde $1 - e$ eşkare elemanı ve $(a - b)(x - (1 - e)) = (x - (1 - e))(a - b) = 1$ den $x - (1 - e)$ tersinir elemanı var olduğundan x elemanı temizdir. Dolayısıyla R halkası temizdir.

Örnek 4.1.5. k bir cisim olmak üzere k cisminin kuvvet serisi $A = k[[x]]$ olsun. K A nın kesir cismi olmak üzere $R = \{r \in \text{end}(A_k) : \text{her } a \in (x^n) \text{ için } r(a) = qa \text{ olacak şekilde } q \in K \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ vardır}\}$ şeklinde tanımlansın. R değişim halkası olmasına rağmen temiz halka değildir (Camillo ve Khurana 2001).

Önerme 4.1.6. Temiz halkaların homomorfik görüntüleri de temiz halkadır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: R bir temiz halka olsun. R nin her I ideali için R den R/I ya örten bir homomorfizma mevcuttur. $a + I \in R/I$ alınsın. R temiz olduğundan $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcuttur. Son olarak $(e + I)^2 = e + I \in R/I$ ve $(u + I)^{-1}(u + I) = (u + I)(u + I)^{-1} = 1 + I$ olup $a + I = e + u + I$ elde edilir. Buradan R/I temiz halka elde edilir.

Önerme 4.1.7. İndirgenmiş halkaların eşkare elemanları değişmelidir (Nicholson 1977).

İspat: R halkası indirgenmiş bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Her $a \in R$ elemanı için $(ea - eae)^2 = (ea - eae)(ea - eae) = eaea - eaeae - eaeae + eaeae = 0$ olur. R indirgenmiş olduğundan $ea - eae = 0$ ve böylece $ea = eae$ elde edilir. Aynı

işlemler $(ae - eae)^2 = 0$ için yapılırsa $ae = eae$ bulunur. Sonuçta $ea = ae$ olup eşkare elemanların değişmeli olduğu görülür.

Önerme 4.1.8. R değişmeli veya indirgenmiş bir halka olsun. R nin değişim halkası olması için gerek ve yeter şart R nin temiz halka olmasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R temiz halka olsun. Önerme 4.1.4 ten dolayı R değişim halkasıdır. Karşıt olarak R değişim halkası olsun. R değişmeli veya indirgenmiş halka olduğundan eşkare elemanlar merkezlidir. Önerme 4.1.7 göz önüne alınırsa R temiz halka olur.

Lemma 4.1.9. Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) R kuvvetli düzenli halkadır.
- (2) Her $x \in R$ için $x = x^2y = zx^2$ olacak biçimde $y, z \in R$ vardır.
- (3) R düzenli ve indirgenmiş halkadır.
- (4) R düzenli ve eşkare elemanları merkezde olan halkadır.
- (5) Her $x \in R$ için $xR = x^2R$ ve $r_R(x) = r_R(x^2)$ dir.
- (6) Her $x \in R$ için $x = xax$ ve $xa = ax$ olacak biçimde $a \in R$ vardır.
- (7) Her $x \in R$ için $x = xux$ ve $xu = ux$ olacak biçimde $u \in U(R)$ vardır.
- (8) Her $x \in R$ için $x = ue = eu$ olacak biçimde $e = e^2 \in R$ ve $u \in U(R)$ vardır.
- (9) Her $x \in R$ için $x^2u = x = ux^2$ olacak biçimde $u \in U(R)$ vardır (Tuganbaev 2002).

Önerme 4.1.10. Her kuvvetli düzenli halka temiz halkadır (Nicholson 1977).

İspat: R kuvvetli düzenli bir halka olsun. Bu durumda Lemma 4.1.9 gereğince R düzenlidir ve eşkare elemanlar değişmelidir. Ayrıca Önerme 3.1.8 den R değişim halkası olur. Sonuç olarak R değişim halkası ve eşkare elemanlar merkezde olduğundan Önerme 4.1.4 gereğince R temiz halka elde edilir.

Önerme 4.1.10 un karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 4.1.11.

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : 2 \nmid b \right\}$$

olmak üzere $R = R(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{(2)})$ bir temiz halkadır. Fakat $(2, 2, \dots, 2, 2, \dots) \in R$ için $(2, 2, \dots, 2, 2, \dots) = (2, 2, \dots, 2, 2, \dots)^2 y$ olacak şekilde $y \in R$ mevcut olmadığından R kuvvetli düzenli değildir (Nicholson 1977).

Önerme 4.1.12. R halkasının bir ideali I olsun. Eğer R temiz ise R/I temizdir ve eşkare elemanlar I ya göre yükselirler. Eğer $I \leq J(R)$ ise önermenin karşıtı da doğrudur (Han ve Nicholson 2001).

İspat: R temiz bir halka olsun. R temiz halka olduğundan R değişim halkası olur. Bu durumda eşkare elemanlar I ya göre de yükselir. R den R/I ya her zaman f örten homomorfizması var olduğundan her $r + I \in R/I$ için $f(a) = r + I$ olacak şekilde $a \in R$ vardır ve R temiz halka olduğundan $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcuttur. Ayrıca $f(e)f(e) = f(e^2) = f(e)$ ve $f(u)f(u^{-1}) = f(uu^{-1}) = f(1) = 1 + I$ olduğundan R/I temiz olur.

R/I temiz bir halka olmak üzere her $\bar{r} \in R/I$ için $\bar{r} = \bar{e} + \bar{u}$ olacak şekilde $\bar{e}^2 = \bar{e} \in R/I$ ve $\bar{u}$ vardır. Eşkare elemanlar I ya göre yükseldiğinden $e^2 = e \in R$ mevcuttur. Ayrıca $(\overline{r-e})\bar{t} = \bar{u}\bar{t} = \bar{1}$ olup $ut - 1 \in I \subseteq J(R)$ olduğundan $ut \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $u \in U(R)$ olur. Sonuç olarak R temiz halka bulunur.

Sonuç 4.1.13. R halkasının temiz halka olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ nin temiz halka olması ve eşkare elemanların $J(R)$ ye göre yükselmesidir (Nicholson 1977).

Uyarı 4.1.14. $M = A \oplus B$ ve $U = \begin{bmatrix} \text{end}(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & \text{end}(B) \end{bmatrix}$ olsun. $f \in \text{end}(M)$ ve $a \in M$ için $a_1 \in A$ ve $b_1 \in B$ olmak üzere $f(a) = a_1 + b_1$ olarak alınsın. $f_1 : A \rightarrow A$, $f_2 : B \rightarrow A$, $f_3 : A \rightarrow B$ ve $f_4 : B \rightarrow B$ dönüşümleri sırasıyla $f_1(a) = a_1$, $f_2(b) = a_1$, $f_3(a) = b_1$ ve $f_4(b) = b_1$ ile tanımlansın. $\varphi(f) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}$ ile tanımlı $\varphi : \text{end}(M) \rightarrow U$ dönüşümünün iyi tanımlı, birebir ve halka homomorfizması olduğu açıktır. $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \in U$ için $f : M \rightarrow M$ dönüşümü $f(a+b) = (g_1 + g_2)(a) + (g_3 + g_4)(b)$ ile tanımlansın. Bu durumda $\varphi(f) = g$ olduğundan φ örten olup

$$\text{end}(M) \cong \begin{bmatrix} \text{end}(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & \text{end}(B) \end{bmatrix}$$

dir. Böylece e_1 ve e_2 eşkare elemanlar olmak üzere

$$\text{end}(e_1 R \oplus e_2 R) \cong \begin{bmatrix} \text{end}(e_1 R) & \text{Hom}(e_2 R, e_1 R) \\ \text{Hom}(e_1 R, e_2 R) & \text{end}(e_2 R) \end{bmatrix}$$

sağlanır. Diğer taraftan $f(e_2) = e_1 r$ olmak üzere $\phi : \text{Hom}(e_2 R, e_1 R) \rightarrow e_1 R e_2$ dönüşümü $\phi(f) = e_1 r e_2$ ile tanımlansın. ϕ dönüşümünün iyi tanımlı, örten ve halka homomorfizması olduğu açıktır. $e_1 r e_2 = 0$ olmak üzere $f(e_2) = f(e_2^2) = e_1 r e_2 = 0$ olduğundan $f = 0$ olup ϕ birebirdir. Dolayısıyla

$$\text{end}(e_1 R \oplus e_2 R) \cong \begin{bmatrix} e_1 R e_1 & e_1 R e_2 \\ e_2 R e_1 & e_2 R e_2 \end{bmatrix}$$

dir. Daha genel olarak $e = e^2$ için $\text{end}(e R) \cong e R e$ olduğundan

$$\text{end}(e_1 R \oplus e_2 R \oplus \cdots \oplus e_n R) \cong \begin{bmatrix} e_1 R e_1 & \cdots & e_1 R e_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n R e_1 & \cdots & e_n R e_n \end{bmatrix}$$

sağlanır.

Lemma 4.1.15. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. $e R e$ ve $(1 - e) R (1 - e)$ temiz halka ise R temiz halkadır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: R halkası için Uyarı 4.1.14 göz önünde bulundurulursa

$R \cong \begin{bmatrix} e R e & e R (1 - e) \\ (1 - e) R e & (1 - e) R (1 - e) \end{bmatrix}$ olur. $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in R$ olsun. $e R e$ ve $(1 - e) R (1 - e)$ temiz olduğundan $a = f + u$ olacak şekilde $f^2 = f \in e R e$ ve $u u' = 1_{e R e} = e$ şartını sağlayan $u' \in e R e$ vardır. Ayrıca $b - y u' x = g + v$ olacak şekilde $g^2 = g \in (1 - e) R (1 - e)$ ve $v v' = 1_{(1 - e) R (1 - e)} = 1 - e$ şartını sağlayan $v' \in (1 - e) R (1 - e)$ vardır.

$A = \begin{bmatrix} f + u & x \\ y & g + v + y u' x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & x \\ y & v + y u' x \end{bmatrix}$ olarak ifade edilsin. Bura

dan $\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$ nin bir eşkare eleman olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan

$$\begin{bmatrix} e & 0 \\ -y u' & 1 - e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x \\ y & v + y u' x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -u' x \\ 0 & 1 - e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & x \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -u' x \\ 0 & 1 - e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$$

olur. $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 - e \end{bmatrix}$ olduğundan $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ matrisi tersinirdir.

Dolayısıyla $\begin{bmatrix} u & x \\ y & v + y u' x \end{bmatrix}$ matrisi de tersinirdir. Sonuç olarak R halkası temiz olur.

Lemma 4.1.15 tümevarım yardımıyla genellenerek aşağıdaki teorem verebilir.

Teorem 4.1.16. R bir halka, $e_1, e_2, \dots, e_n \in R$ dik eşkare elemanlar ve $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$ olsun. Her $e_i R e_i$ temiz halka ise R temiz halkadır (Han ve Nicholson 2001).

Sonuç 4.1.17. R halkası temiz ise $M_n(R)$ halkası da temizdir (Han ve Nicholson 2001).

İspat: R temiz bir halka, $e_{ii}^2 = e_{ii} \in M_n(R)$ dik eşkare elemanlar ve $e_{11} + \dots + e_{nn} = I$ olsun. Her e_{ii} için $e_{ii} M_n(R) e_{ii} \cong R$ olduğundan Teorem 4.1.16 gereğince $M_n(R)$ halkası temiz olur.

Sonuç 4.1.18. $M_1, M_2, \dots, M_n$ modüller ve $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. Her $\text{end}(M_i)$ halkası temiz ise $\text{end}(M)$ halkası da temizdir (Han ve Nicholson 2001).

İspat: $\pi_i : M \rightarrow M_i$ izdüşüm dönüşümü olsun. Bu durumda $\pi_i^2 = \pi_i \in \text{end}(M_i)$ ve $\pi_i + \dots + \pi_n = 1$ olur. Ayrıca $\ker \pi_i = M_1 \oplus \dots \oplus M_{i-1} \oplus M_{i+1} \oplus \dots \oplus M_n$ dir ve $i \neq j$ için $\pi_i \pi_j = 0$ olur. Sonuçta $\pi_i \text{end}(M) \pi_i \cong \text{end}(M_i)$ olduğundan Teorem 4.1.16 gereğince $\text{end}(M)$ temiz halka olarak bulunur.

Sonuç 4.1.19. A, B birer halka ve ${}_A V_B$ bir ikili modül olsun. $M = \begin{bmatrix} A & V \\ 0 & B \end{bmatrix}$ nin temiz olması için gerek ve yeter şart A ve B halkalarının temiz olmasıdır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: M temiz olsun. $I = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \trianglelefteq M$ dir. $f : M \rightarrow M/I$ her zaman mevcuttur ve $M/I \cong A \oplus B$ dir. Temiz halkaların homomorfik görüntüsü de temiz olduğundan $A \oplus B$ temizdir. Buradan A ve B halkaları temizdir. Karşıt olarak A ve B halkaları temiz olsun. Ayrıca $e_{11}^2 = e_{11}$, $e_{22}^2 = e_{22}$ olmak üzere $e_{11} + e_{22} = I$ ve $e_{11} e_{22} = 0$ dir. $e_{11} M e_{11} \cong A$ ve $e_{22} M e_{22} \cong B$ olduğundan Teorem 4.1.16 gereğince M temiz olarak bulunur.

Sonuç 4.1.20. R halkasının temiz olması için gerek ve yeter şart $T_2(R)$ halkasının temiz olmasıdır.

İspat: Sonuç 4.1.19 da $A = B = V = R$ olarak alınır ise istenilen elde edilir.

Eğer Sonuç 4.1.20 üzerinde tümevarım uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.21. R halkasının temiz olması için gerek ve yeter şart $T_n(R)$ halkasının temiz olmasıdır.

Tanım 4.1.22. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. R nin I -güçlü (I -potent) olması için gerek ve yeter şart I idealinin aşağıdaki denk şartlardan birini sağlamasıdır.

- (1) $L \not\subseteq I$ şartını sağlayan L sol ideali için $e^2 = e \in L - I$ mevcuttur.
- (2) $T \not\subseteq I$ şartını sağlayan T sağ ideali için $e^2 = e \in T - I$ mevcuttur.
- (3) $c \notin I$ olmak üzere $bc b = b \notin I$ şartını sağlayan $b \in R$ mevcuttur (Han ve Nicholson 2001).

Uyarı 4.1.23. e ve f bir R halkasının eşkare elamanları olsun. Eğer $ef = e = fe$ şartı sağlanıyor ise e ve f ye *kısmi sıralı eşkare elemanlar* denir, $e \leq f$ veya $eRe \subseteq fRf$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.24. $0 \neq e^2 = e \in R$ aşağıdaki denk şartlardan birini sağlarsa e ye *ilkel eşkare* (*primitive idempotent*) denir.

- (1) Re parçalanamaz.
- (2) eRe halkasının 0 ve e den başka eşkare elemanı yoktur.
- (3) e verilen kısmi sıralama bağıntısına göre minimaldir (Han ve Nicholson 2001).

Tanım 4.1.25. $0 \neq e^2 = e \in R$ için eRe halkası yerel ise e ye *yerel eşkare* (*local idempotent*) denir (Han ve Nicholson 2001).

Uyarı 4.1.26. Her yerel eşkare eleman ilkel eşkaredir. Fakat karşıtı her zaman sağlanmaz. $1 \in \mathbb{Z}$ ilkel eşkare olmasına rağmen yerel değildir.

Önerme 4.1.27. R temiz bir halka olsun.

- (1) R güçlü bir halkadır.
- (2) R halkasındaki her ilkel eşkare eleman yereldir (Han ve Nicholson 2001).

İspat: (1) R bir temiz halka olsun. Önerme 4.1.4 gereğince R değişim halkasıdır ve Önerme 3.1.16 gereğince R güçlü halka olur.

(2) R bir temiz halka ve f ilkel eşkare olsun. fRf halkasından $a \notin J(fRf) = J(R) \cap fRf$ şartını sağlayan bir eleman alınsın. a nın tersinir olduğu gösterilebilirse yerel halka tanımı gereğince sonuca ulaşılır. $0 \neq g^2 = g \in aR \subseteq fR$ olacak şekilde seçilsin. Buradan $gR \subseteq aR \subseteq fR$ elde edilir. f ilkel eşkare olduğundan fR parçalanamaz ve $aR = gR = fR$ bulunur. Bir $b \in R$ için $f = ab$ ise fbf , $a \in fRf$ nın sağ tersidir ve $fbf \notin J(fRf)$ dir. a nın sol tersinin de fbf olduğu gösterilirse sonuca ulaşılır. f ilkel olduğundan fRf nin eşkare elemanları sadece 0 ve f dir. Buradan hareketle $f = xy = afbf$ denilirse $(yx)^2 = yxyx = yfx = fbffa = fbfa = yx = f$ olmak zorundadır. Sonuçta $fbfa = f$ olup sol ters de aynı değer olduğundan istenilen elde edilir.

Önerme 4.1.28. $0 \neq R$ bir halka olmak üzere $R[x]$ polinomlar halkası asla temiz olamaz (Han ve Nicholson 2001).

İspat: $x \in R[x]$ in temiz olmadığı gösterilirse ispat tamamlanır. x in temiz olduğu kabul edilsin. Bu durumda $x = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R[x]$ ve $u \in U(R[x])$ mevcuttur. O halde $e = e_0 + e_1x + \dots + e_nx^n$ ve $u = u_0 + u_1x + \dots + u_mx^m$ için polinom eşitliği kullanılırsa $e_0 = -u_0$ olarak bulunur. e_0 hem tersinir hem de eşkare olmasından dolayı $e_0 = 1$ dir. e nin birimden farklı olduğu kabul edilirse $m \geq 1$ ve $a \neq 0$ için $g(x) = a + bx + \dots + cx^f$ olmak üzere $e = 1 + x^t g(x)$ şeklinde olacaktır. Eşkare eleman tanımı gereği $e^2 = e$ olduğundan x^m li ifadelerin katsayıları kıyaslanırsa $2a = a$ elde edilir, bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $e = 1$ olarak bulunur. Böylece $1 - x = -u \in R[x]$ tersinirdir. $(1 - x)^{-1} = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ olsun. Tekrar polinom eşitliği kullanılırsa $a_0 = 1$, $a_1 - a_0 = 0$, $\dots$, $a_n - a_{n-1} = 0$, $a_n = 0$ elde edilir ve $1 = 0$ bulunur. Sonuçta yine bir çelişki doğduğundan $R[x]$ asla temiz olamaz.

Önerme 4.1.29. R bir halka olsun. $R[[x]]$ halkasının temiz olması için gerek ve yeter şart R halkasının temiz olmasıdır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: $R[[x]]$ halkası temiz olsun. R halkası $R[[x]]$ halkasının homomorfik görüntüsü olduğundan R temizdir. Karşıt olarak R halkası temiz ve $f = a + bx + cx^2 + \dots \in$

$R[[x]]$ olsun. R temiz olduğundan $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcuttur. Buradan $f = e + (u + bx + cx^2 + \dots)$ olarak yazılırsa $u + bx + cx^2 + \dots \in U(R[[x]])$ ve $e^2 = e \in R[[x]]$ elde edilir. O halde $R[[x]]$ temiz olarak bulunur.

Önerme 4.1.30. I bir indeks kümesi ve her $i \in I$ için R_i bir halka olsun. Her $i \in I$ için R_i nin temiz halka olması için gerek ve yeter şart $\prod_{i \in I} R_i$ halkasının temiz halka olmasıdır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: Her $i \in I$ için R_i temiz olsun. Bu durumda her $a_i \in R_i$ için $a_i = e_i + u_i$ olacak şekilde $e_i^2 = e_i \in R_i$ eşkare elemanı ve $u_i \in U(R_i)$ tersinir elemanı mevcuttur. $\prod_{i \in I} R_i$ bileşensel işlemlerle bir halka olduğundan temizdir. Karşıt olarak $\prod_{i \in I} R_i$ temiz halka olsun. Her $i \in I$ için R_i halkası $\prod_{i \in I} R_i$ halkasının homomorfik görüntüsü olduğundan R_i temiz olur.

4.2 Değişim Halkaları Hangi Durumlarda Temizdir?

Önceki bölümde her temiz halkanın değişim halkası olduğu görüldü. Daha sonra Örnek 4.1.5 de karşıtının her zaman doğru olmadığı ifade edildi. Bu bölümde değişim halkalarının hangi şartlar altında temiz halka olduğu gösterilecektir.

Tanım 4.2.1. Bir R halkasının nil olmayan tek yönlü her ideali sıfırdan farklı eşkare eleman içeriyorsa R ye I -halka (I -ring) denir (Yu 1997).

Tanım 4.2.2. R bir halka ve I da R nin ideali olsun. R/I halkası Artin ve ilkel ise R/I ya R nin *Artin ilkel bölüm halkası* (*Artinian primitive factor*) denir (Yu 1997).

Lemma 4.2.3. R bir I -halka, R/I Artin ilkel ve $J(R) = 0$ olsun. Bu durumda R nin sıfırdan farklı her ideali sıfırdan farklı merkezde eşkare eleman içerir. Özel olarak R parçalanamaz ise R basit Artin halkadır (Yu 1997).

Teorem 4.2.4. D bir bölümlü halka ve n pozitif bir tamsayı olsun. Bir R halkasının basit Artin halka olması için gerek ve yeter şart $R \cong M_n(D)$ olmasıdır (Anderson ve Fuller 1992).

Teorem 4.2.5. R bir değişim halkası ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer R/I Artin ilkel halka ise R halkası temizdir (Chen 1999).

İspat: R halkası temiz olmasın. Bu durumda $x \neq e + u$, $e^2 = e$ ve $u \in U(R)$ olacak şekilde $x \in R$ nin var olduğunu göstermek yeterli olur. R halkasının tüm iki yönlü I ideallerini içeren küme Ω olsun ve $x + I \in R/I$ ise $x + I$ temiz olmasın. Açıkça görülür ki $\Omega \neq \emptyset$ dir.

Ω kümesinden herhangi bir $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$ artan zinciri alınsın. Şimdi $M = \bigcup_{1 \leq n < \infty} I_n$ olacak şekilde seçilirse M bir ideal olur. İddia $M \in \Omega$ olmasıdır. Aksi kabul edilirse $x + M = (g + M) + (w + M)$ ve $(g + M)^2 = (g + M)$ ve $(w + M) \in U(R/M)$ olsun. Bu durumda $x - (g + w), g - g^2, ws - 1, sw - 1 \in M$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. M nin seçiminden dolayı $x - (g + w) \in I_{n_1}, g - g^2 \in I_{n_2}, ws - 1 \in I_{n_3}, sw - 1 \in I_{n_4}$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Bu şekilde seçilen n_i sayılarının en büyüğüne p denilirse $x - (g + w), g - g^2, ws - 1, sw - 1 \in I_p$ dir. Ancak bu R/I_p nin temiz olduğunu söyleyeceğinden bir çelişkidir. Böylece $M \in \Omega$ dır. Zorn lemmadan dolayı Ω nın bir Q maksimal ideali vardır. $S = R/Q$ olacak şekilde seçilsin. Q maksimal olduğundan dolayı S parçalanamazdır.

$J(S) \neq 0$ olarak alınırsa $Q \subset N$ için $J(S) = N/Q$ formundadır. Q nun maksimalliğinden dolayı $N \notin \Omega$ ve $x + N$ temiz olur. $J(S) = N/Q$ olduğundan $S/J(S) \cong R/N$ dir. Buradan $(x + Q) + J(S) = ((f + Q) + J(S)) + ((v + Q) + J(S))$ ve $(f + Q) + J(S) = ((f + Q) + J(S))^2 \in S/J(S), (v + Q) + J(S) \in U(S/J(S))$ olur. Değişim halkalarının her homomorfik görüntüsü de değişim halkası olduğundan S değişim halkasıdır. O halde $f + Q = (f + Q)^2 \in R/Q$ olsun. Tersinir elemanlar $J(S)$ ye göre yükseldiğinden $v + Q \in U(S)$ olur. Böylece $r + Q \in J(S)$ için $x + Q = (f + Q) + ((v + Q) + (r + Q))$ dur. Her $m \in U(R)$ ve $j' \in J(R)$ için $m + j' \in U(R)$ olduğundan $(v + Q) + (r + Q) \in U(S)$ bulunur. Bu durum $Q \in \Omega$ olduğundan bir çelişki oluşturur. Bu nedenle $J(S) = 0$ olup S parçalanamaz olarak bulunur.

R bir değişim halkası ve R/I Artin ilkel bölüm halkası olduğundan Lemma 4.2.3 gereğince S basit Artindir. Teorem 4.2.4 gereği $S = R/Q \cong M_n(D)$ olacak şekilde D bölümlü halkası mevcuttur. Bölümlü halkalar temiz olduğunda Sonuç 4.1.17 gereğince $M_n(D)$ temizdir. Bu durumda $x + Q \in S$ temiz olarak bulunur ve çelişki oluşur. Bundan dolayı R temiz halka edilir.

Tanım 4.2.6. Bir R halkasının tüm üstel sıfır x elemanları için $x^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı varsa R ye *üstel sıfırlığın sınırlı indeksine sahip (bounded index of nilpotence) halka* denir (Chen 1999).

Teorem 4.2.7. R üstel sıfırlığın sınırlı indeksine sahip bir değişim halkası olsun. R nin ilkel bölüm halkaları Artindir (Yu 1995).

Sonuç 4.2.8. R üstel sıfırlığın sınırlı indeksine sahip bir değişim halkası olsun. R temizdir (Chen 1999).

İspat: Teorem 4.2.7 ve Teorem 4.2.5 ten açıkça görülür.

Teorem 4.2.9. R Artin ilkel bölüm halkasına sahip ve $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ye homomorf görüntüye sahip olmayan π -düzenli bir halka olsun. R nin her elemanı iki tersinir elemanın toplamı olarak yazılabilir (Fischer ve Snider 1976).

Teorem 4.2.10. R Artin ilkel bölüm halkasına sahip bir değişim halkası olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R nin her elemanı iki tersinirin toplamı olarak yazılabilir.
- (2) $1 = a + b$ olacak şekilde $a, b \in U(R)$ mevcuttur.
- (3) R nin $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ye izomorf bir görüntüsü yoktur (Chen 1999).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Açıkça görülür.

(2) $\Rightarrow$ (3) Kabul edelim ki $f : R \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olacak şekilde örten bir homomorfizma olsun. Hipotezden $1 = a + b$ olacak şekilde $a, b \in U(R)$ mevcuttur. Buradan $f(1) = f(a) + f(b)$ olur. a, b tersinir olduğundan $f(a) = f(b) = 1$ dir. Dolayısıyla $1 + 1 = 1$ bulunur ve çelişki meydana gelir. Bu durumda ispat elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $x = u + v$ olacak şekilde $u, v \in U(R)$ mevcut olmasın. R nin iki yönlü ideallerinin kümesi Ω olsun. Ayrıca $I \in \Omega$ ise her $x + I \in R/I$ elemanı iki tersinirin toplamı olarak yazılamasın. Tersinir elemanlar $J(R)$ ye göre yükseldiğinden Teorem 4.2.5 in ispatına benzer şekilde R/Q basit Artin bulunur ve $x + Q$ iki tersinirin toplamı olarak yazılamaz. Fakat $R/Q \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olmadığı sürece R/Q nun her elemanı iki tersinirin toplamı şeklinde yazılabilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece R nin her elemanı iki tersinirin toplamı şeklinde yazılabilir.

Tanım 4.2.11. Bir R halkasının tüm eşkare elemanları merkezde ise R ye *normal halka* (*normal ring*) denir (Yu 1995).

Sonuç 4.2.12. R normal bir değişim halkası olsun. Aşağıdakiler ifadeler denktir.

- (1) R nin her elemanı iki tersinin toplamı olarak yazılabilir.
- (2) $1 = a + b$ olacak şekilde $a, b \in U(R)$ mevcuttur.
- (3) R halkası $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ye izomorf bir görüntüye sahip değildir (Chen 1999).

Tanım 4.2.13. R halkasının her maksimal sağ (sol) ideali, iki yönlü ideal oluyor ise R ye *sağ (sol) yakın duo* (*right (left) quasi-duo*) halka denir (Yu 1995).

Önerme 4.2.14. R bir değişim halkası ve $J(R) = 0$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R sol yakın duo halkadır.
- (2) R indirgenmiş halkadır.
- (3) R normal halkadır (Yu 1995).

Teorem 4.2.15. R sol (sağ) yakın duo halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R değişim halkasıdır.
- (2) R temiz halkadır (Yu 1995).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R değişim halkası olduğundan $R/J(R)$ değişim halkasıdır ve eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. Ayrıca R nin temiz olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ nin temiz ve eşkare elemanların $J(R)$ ye göre yükselmesidir. Bu durumda $R/J(R)$ nin temiz olduğunu göstermek yeterlidir. $S = R/J(R)$ olarak alınırsa $J(S) = 0$ dır. $S = R/J(R)$ değişim halkası ve $J(S) = 0$ olduğundan Önerme 4.2.14 gereği $R/J(R)$ normal olup Önerme 4.1.4 ten $R/J(R)$ temizdir. Sonuç olarak $R/J(R)$ temiz ve eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseldiğinden R temizdir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Önerme 4.1.4 gereği açıktır.

4.3 Kuvvetli Temiz Halkalar

Bu bölümde Nicholson tarafından 1999 yılında tanımlanmış olan kuvvetli temiz halkaların temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.3.1. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a = e + u$ ve $eu = ue$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$, $u \in U(R)$ mevcut ise a ya *kuvvetli temiz (strongly clean)* denir (Nicholson 1999).

Tanım 4.3.2. Bütün elemanları kuvvetli temiz olan halkaya *kuvvetli temiz (strongly clean) halka* denir (Nicholson 1999).

- Örnek 4.3.3.** (1) Bir R halkasındaki tüm tersinir elemanlar kuvvetli temizdir.
(2) Bir R halkasında bütün eşkare elemanlar kuvvetli temizdir.
(3) Bir R halkasında $a \in R$ kuvvetli temiz ise $1 - a \in R$ de kuvvetli temizdir.
(4) $a \in R$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart $u \in U(R)$ için $u^{-1}au$ nun kuvvetli temiz olmasıdır.
(5) Üstel sıfır her eleman kuvvetli temizdir.

- Örnek 4.3.4.** (1) Her yerel halka kuvvetli temizdir.
(2) Her Boolean halka kuvvetli temizdir.
(3) Bütün cisimler kuvvetli temizdir.
(4) Kuvvetli düzenli her halka kuvvetli temizdir.
(5) Her bölümlü halka kuvvetli temizdir.

Tanım 4.3.5. R halkasındaki bir a elemanı aşağıdaki denk şartlardan birini sağlıyorsa, a ya *sağ π -düzenli (right π -regular)* denir.

- (1) $a^n \in a^{n+1}R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
- (2) $a^n R = a^{n+1}R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
- (3) $aR \supseteq a^2R \supseteq \dots$ zinciri sonlu bir adımda durur.

Benzer şekilde *sol π -düzenlilik* tanımı da yapılabilir (Nicholson 1999).

Önerme 4.3.6. (*Dischinger Lemma*) Bir R halkasının bütün elemanları sağ π -düzenli ise R nin bütün elemanları sol π -düzenlidir (Dischinger 1976).

Tanım 4.3.7. Bir R halkasının bir a elemanı hem sağ π -düzenli hemde sol π -düzenli ise a elemanına *kuvvetli π -düzenli* (*strongly π -regular*) denir. Bir R halkasının bütün elemanları kuvvetli π -düzenli ise R ye *kuvvetli π -düzenli halka* (*strongly π -regular ring*) denir (Nicholson 1999).

Önerme 4.3.8. (*Azumaya Lemma*) R halkasının bir a elemanı kuvvetli π -düzenli olsun ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a^n R = a^{n+1} R$ şartı sağlansın. O zaman a^n kuvvetli düzenlidir ve $ab = ba$ ve $a^n = a^{n+1}b$ şartlarını sağlayan bir $b \in R$ vardır (Azumaya 1954).

Önerme 4.3.9. Bir R halkasının bir a elemanı için aşağıdakiler denktir.

- (1) a kuvvetli π -düzenlidir.
- (2) $a^n = fw = wf$ şartını sağlayan herbiri aralarında değişmeli $f^2 = f$, $w \in U(R)$ elemanları için $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur.
- (3) a^m kuvvetli düzenli olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır (Nicholson 1999).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $a \in R$ kuvvetli π -düzenli olsun. Bu durumda Önerme 4.3.8 gereğince bazı $n \geq 1$ tamsayıları için $ab = ba$ ve $a^n = a^{n+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. Buradan $a^n = a^n(ab) = a^{n+1}b(ab) = \dots = a^{n+k}b^k$ elde edilir. Son durumda $k = n$ alınırsa $a^n = a^{2n}b^n$ olur. Ayrıca $a^n b^n = b^n a^n$ olduğundan $a^n = a^n b^n a^n$ dir. $f = a^n b^n$ olarak alınacak olursa $f^2 = f \in R$ bulunup $af = fa$ ve $a^n f = a^n b^n a^n = a^n$ dir. Burada $c = b^n f$ şeklinde seçilsin. Açıkça $c \in fRf$ ve $a^n c = ca^n$ olduğu görülür. $w = a^n + (1 - f)$ elemanının tersi $w^{-1} = c + (1 - f)$ olup $fw = wf = a^n f = a^n$ dir. (2) $\Rightarrow$ (3) $a^n w^{-1} a^n = a^n (c + (1 - f)) a^n = a^n c a^n + a^n (1 - f) a^n = f a^n + a^{2n} - a^n f a^n = a^n$ ve $a^n w - 1 = w^{-1} a^n$ olduğundan a^n kuvvetli düzenlidir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $m \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için a^m kuvvetli düzenli olsun. Böylece $a^m = a^{2m} b_1$ ve $a^m = b_2 a^{2m}$ olacak şekilde $b_1, b_2 \in R$ mevcuttur. $a^m = a^{m+1} (a^{m-1} b_1)$ ve $a^m = (b_2 a^{m-1}) a^{m+1}$ olarak yazılabileceğinden a kuvvetli π -düzenli olarak bulunur.

Teorem 4.3.10. R bir halka olsun. $a \in R$ kuvvetli π -düzenli ise kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

İspat: $a \in R$ kuvvetli π -düzenli olsun. Önerme 4.3.9 gereğince bir $n \geq 0$ tamsayısı için $a^n = fw = wf$ olacak şekilde $f^2 = f \in R$ ve $w \in U(R)$ mevcuttur ve bu elemanlar aralarında değişmelidir. $u = a(1 - f)$ ve $v = a^{n-1}w^{-1}f - (1 + a + \dots + a^{n-1})(1 - f)$ olarak seçilsin. Buradan $uv = vu$ bulunur ve $u = af - (1 - a)(1 - f)$ dir. Ayrıca $a^n f = fa^n = a^n$ dir. Bu veriler ışığında

$$\begin{aligned} uv &= [af - (1 - a)(1 - f)][a^{n-1}w^{-1}f - (1 + a + \dots + a^{n-1})(1 - f)] \\ &= a^n w^{-1}f + (1 - a)(1 + a + \dots + a^{n-1})(1 - f) \\ &= f + (1 - a^n)(1 - f) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $u \in U(R)$ ve $(1 - f)^2 = 1 - f$ olup $a = (1 - f) + u$ elde edilir. Ayrıca $(1 - f)u = u(1 - f)$ olduğundan a kuvvetli temizdir.

Sonuç 4.3.11. Her kuvvetli π -düzenli halka kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

Sonuç 4.3.12. Her kuvvetli düzenli halka kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

Örnek 4.3.13. Her sol (sağ) mükemmel halkanın tek üreteçli sol (sağ) idealleri üzerinde azalan zincir kuralı sağlandığından kuvvetli π -düzenlidir. Böylece Sonuç 4.3.11 gereği mükemmel her halka kuvvetli temiz olur (Nicholson 1999).

Sonuç 4.3.11 ifadesinin karşısı her zaman doğru değildir. Yani her kuvvetli temiz halka kuvvetli π -düzenli olmayabilir.

Örnek 4.3.14. $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : 2 \nmid b\}$ halkası yereldir. Buradan her yerel halka kuvvetli temiz olduğundan $\mathbb{Z}_{(2)}$ halkası kuvvetli temizdir. Fakat $2 \in \mathbb{Z}_{(2)}$ için $2^n = 2^{n+1}b$ olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}_{(2)}$ mevcut olmadığından $\mathbb{Z}_{(2)}$ kuvvetli π -düzenli değildir.

Önerme 4.3.15. R bir halka ve $\{R_i\}_{i \in I}$ bir halka ailesi olsun.

- (1) R halkası kuvvetli temiz ise R nin her homomorfik görüntüsü de kuvvetli temizdir.
- (2) Her $i \in I$ için R_i nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart $\prod_{i \in I} R_i$ halkasının kuvvetli temiz olmasıdır.

(3) $2 \in U(R)$ olsun. R nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart her $a \in R$ için $a = k + u$ olacak şekilde $k^2 = 1 \in R$, $u \in U(R)$ mevcut ve $uk = ku$ sağlanmasıdır (Nicholson 1999).

İspat: (1) R halkası kuvvetli temiz olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e$, $u \in U(R)$ vardır ve $eu = ue$ sağlanır. Temiz halkaların her homomorfik görüntüsü de temiz olduğundan her I ideali için R/I da temizdir. O halde $\bar{a} = \bar{e} + \bar{u} \in R/I$ için $\bar{e}^2 = \bar{e}$ ve $\bar{u} \in U(R/I)$ vardır. Son olarak $\bar{e}\bar{u} = eu + I = ue + I = \bar{u}\bar{e}$ olduğundan R/I kuvvetli temiz olur.

(2) Her $i \in I$ için R_i temiz olsun. O halde her $a_i \in R_i$ için $a_i = e_i + u_i$ olacak şekilde $e_i^2 = e_i$, $u_i \in U(R_i)$ mevcut olup $e_i u_i = u_i e_i$ sağlanır. Böylece $(a_i) = (e_i) + (u_i)$ olup $(u_i)_{i \in I} \in U(\prod_{i \in I} R_i)$ ve $((e_i))^2 = (e_i) \in \prod_{i \in I} R_i$ olur. Dahası her $i \in I$ için $e_i u_i = u_i e_i$ olduğundan $(e_i)(u_i) = (u_i)(e_i)$ dir. Böylece $\prod_{i \in I} R_i$ kuvvetli temizdir. Karşıt olarak $\prod_{i \in I} R_i$ kuvvetli temiz olsun. (1) den kuvvetli temiz halkaların her homomorfik görüntüsü de kuvvetli temiz olduğundan her $i \in I$ için R_i kuvvetli temizdir.

(3) R halkası kuvvetli temiz ve $2 \in U(R)$ olsun. Bu durumda $2^{-1}(a+1) = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e$, $u \in U(R)$ vardır ve $eu = ue$ sağlanır. Buradan $a = (2u) + (2e - 1)$ olup $2u \in U(R)$, $(2e - 1)(2e - 1) = 1$ ve $(2e - 1)(2u) = (2u)(2e - 1)$ olur. Karşıt olarak $2a - 1 = u + k$ olacak şekilde $u \in U(R)$, $k^2 = 1$ mevcut olup $uk = ku$ sağlansın. Buradan $a = 2^{-1}u + 2^{-1}(k+1)$ olup $2^{-1}u \in U(R)$ ve $2^{-1}(k+1)$ bir eşkaredir. Ayrıca $2^{-1}(k+1)2^{-1}u = 2^{-1}u2^{-2}(k+1)$ olduğundan a kuvvetli temizdir.

Önerme 4.3.16. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Eğer $a \in eRe$ kuvvetli temiz ise a , R halkasında da kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

İspat: $a \in eRe$ kuvvetli temiz olsun. Bu durumda $a = f + v$ olacak şekilde $f^2 = f \in eRe$, $v \in U(eRe)$ vardır ve $fv = vf$ sağlanır. u elemanın tersi w olmak üzere $uw = wu = e$ dir. Buradan $u = v - (1 - e) \in R$ olarak seçilirse $(v - (1 - e))(w - (1 - e)) = 1 = (w - (1 - e))(v - (1 - e))$ olup $u \in U(R)$ bulunur. Ayrıca $a - u = f + (1 - e)$ olup $f + (1 - e)$ eşkare olarak bulunur. Sonuçta a elemanı R de kuvvetli temiz olur.

Lemma 4.3.17. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere $a \in R$ için $ae = ea$ sağlanıyorsa aşağıdakiler denktir.

- (1) $ae \in eRe$ tersinirdir.
- (2) $e \in Ra$ ve $l(a) \subseteq l(e)$ dir.
- (3) $e \in aR$ ve $r(a) \subseteq r(e)$ dir (Nicholson 1999).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $ea = ae$ elemanın tersi x olsun. O halde $xea = eax = e$ olup $x \in Ra$ dır. Ayrıca $ra = 0$ olarak alınsın. Buradan $re = r(eax) = r(aex) = ra(ex) = 0$ olacağından $l(a) \subseteq l(e)$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $e \in Ra$ olduğundan $e = ba$ olacak şekilde $b \in R$ mevcuttur. $x = ebe$ olacak şekilde seçilsin. Buradan $xa = ebea = ebae = e^3 = e$ dir. Ayrıca $(e - ax)a = ea - axa = ea - ae = 0$ dır ve hipotezden $0 = (e - ax)e = e - axe = e - ax$ bulunur. Böylece $e = ax = xa$ için $xae = e = aex$ elde edilir.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) (1) ve (2) önermelerinin denkliğine benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.3.18. R bir halka olsun. $a \in R$ için aşağıdakiler denktir.

- (1) $a = (1 - e) + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$, $u \in U(R)$ vardır ve $eu = ue$ sağlanır.
- (2) $ea = ae$ için $l(a) \subseteq R(1 - e) \subseteq R(1 - a)$ ve $l(1 - a) \subseteq Re \subseteq Ra$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcuttur.
- (3) $ea = ae$ için $r(a) \subseteq (1 - e)R \subseteq (1 - a)R$ ve $r(1 - a) \subseteq eR \subseteq aR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcuttur.
- (4) $ea = ae \in U(eRe)$ ve $(1 - e)(1 - a) \in U((1 - e)R(1 - e))$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcuttur.
- (5) $ea = ae \in eRe$ kuvvetli temiz ve $(1 - e)(1 - a) \in (1 - e)R(1 - e)$ kuvvetli temiz olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcuttur.
- (6) $ea = ae \in eRe$ kuvvetli temiz ve $(1 - e)a \in (1 - e)R(1 - e)$ kuvvetli temiz olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcuttur.
- (7) R halkasının biriminin aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde bir $1 = e_1 + \dots + e_n$ parçalanışı mevcuttur: $n \geq 1$ tamsayı, her $1 \leq i \leq n$ için e_i ler dik eşkaredir, $e_i a = a e_i$ ve $e_i R e_i$ de kuvvetli temiz halkadır (Nicholson 1999).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $ra = 0$ olsun. (1) den dolayı $r(1 - e) + ru = 0$ olup $ru = -r(1 - e)$ dir. Buradan $r = (ru)u^{-1} = -r(1 - e)u^{-1} \in R(1 - e)$ olur ve $l(a) \subseteq R(1 - e)$ bulunur. Ayrıca $ae = ue = ea$ olduğundan $e = u^{-1}ae = u^{-1}ea \in Ra$ olduğundan $Re \subseteq Ra$ dır. $1 - a = e + (-u)$ olmak üzere $s(1 - a) = 0$ olsun. Buradan $s(e - u) = se - su = 0$ olup $se = su$ elde edilir. Böylece $s = seu^{-1} = su^{-1}e \in Re$ olur ve $l(1 - a) \subseteq Re$ bulunur. $(1 - a)(1 - e) = -u(1 - e) = (1 - e)(1 - a)$ olduğundan $1 - e = (-u)^{-1}(1 - a)(1 - e) = (-u)^{-1}(1 - e)(1 - a)$ ve $R(1 - e) \subseteq R(1 - a)$ olur.

(1) $\Rightarrow$ (3) Yukarıda verilen ispata benzer şekilde yapılabilir.

(2) $\Rightarrow$ (4) $e \in Re \subseteq Ra$ ve $l(a) \subseteq R(1 - e) = l(e)$ olduğundan Lemma 4.3.17 gereğince $ea = ae$ elemanı eRe de tersinirdir. Benzer şekilde $(1 - e) \in R(1 - a)$ ve $l(1 - a) \subseteq l(1 - e)$ olduğundan Lemma 4.3.17 gereği $(1 - a)(1 - e) = (1 - e)(1 - a)$ elemanı da $(1 - e)R(1 - e)$ de tersinirdir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Yukarıda verilen ispata benzer şekilde yapılabilir.

(4) $\Rightarrow$ (5) Tersinir elemanlar kuvvetli temiz olduğundan ispat açıktır.

(5) $\Rightarrow$ (6) a nın kuvvetli temiz olması, $1 - a$ nın kuvvetli temiz olmasını gerektirdiğinden ispat açıktır.

(6) $\Rightarrow$ (7) $1 = e + (1 - e)$ için $e(1 - e) = 0$ olduğundan e ve $1 - e$ dik eşkarelerdir. Ayrıca $(1 - e)a = a(1 - e)$ olup hipotezden $(1 - e)a \in (1 - e)R(1 - e)$ kuvvetli temizdir.

(7) $\Rightarrow$ (1) Hipotez gereği her i için $e_i a = f_i + u_i$ olacak şekilde $f_i^2 = f_i$, $u_i \in U(e_i R e_i)$ vardır ve $f_i u_i = u_i f_i$ sağlanır. Her i için $u_i v_i = v_i u_i = e_i$ olsun. e_i elemanları dik eşkareler olduğundan $f = \sum f_i$ eşkare ve $u = \sum u_i$ de tersinir olur ve $u^{-1} = \sum v_i$ dir. Ayrıca $f u = \sum f_i u_i = \sum u_i f_i = u f$ ve $f + u = \sum (f_i + u_i) = \sum e_i a = a$ olur ve a kuvvetli temiz bulunur.

Teorem 4.3.18 de verilen (2) şartı her kuvvetli temiz halkanın değişim halkası olduğunu söylemektedir. Ayrıca (2) ve (3) şartının denk olmasından dolayı sağ değişim halkalarının sol değişim halkalarına denk olduğu sonucuna varılır.

Son kısımda, Teorem 4.3.18 bir modülün endomorfizma halkasına genişletilerek bir endomorfizmanın kuvvetli temiz veya kuvvetli π -düzenli olması için gerekli şartlar üzerinde durulacaktır.

Uyarı 4.3.19. Eğer M bir sol R -modül ise M bir sağ $end(M)$ modüldür.

Tanım 4.3.20. ${}_R M$ bir modül olmak üzere her $f \in \text{end}({}_R M)$ için $M = Mf^n \oplus \ker(f^n)$ olacak şekilde $n \geq 1$ tamsayısı mevcut ise ${}_R M$ ye *Fitting lemmayı sağlar* (*satisfy Fitting's lemma*) denir (Armendariz vd. 1978).

Lemma 4.3.21. $\alpha \in E = \text{end}({}_R M)$ ve $\pi^2 = \pi \in \text{end}({}_R M)$ olsun.

- (1) $M\pi\alpha \leq M\pi$ olması için gerek ve yeter şart $\pi\alpha = \pi\alpha\pi$ olmasıdır.
- (2) $M\pi\alpha \leq M\pi$ ve $M(1-\pi)\alpha \leq M(1-\pi)$ olması için gerek ve yeter şart $\pi\alpha = \alpha\pi$ olmasıdır (Nicholson 1999).

İspat: (1) $M\pi\alpha \leq M\pi$ olsun. Bu durumda her $m_1 \in M$ için $m\pi\alpha = m_1\pi$ olacak şekilde $m \in M$ mevcuttur. O halde $m\pi\alpha\pi = m_1\pi$ dir. Sonuçta her $m \in M$ için $m\pi\alpha = m\pi\alpha\pi$ olur. Karşıt olarak $\pi\alpha = \pi\alpha\pi$ olsun. $(M\pi)\alpha = M\pi\alpha\pi \subseteq M\pi$ olduğundan ispat biter.

(2) $M\pi\alpha \leq M\pi$ ve $M(1-\pi)\alpha \leq M(1-\pi)$ olsun. Bu durumda (1) den $\pi\alpha = \pi\alpha\pi$ ve $(1-\pi)\alpha = (1-\pi)\alpha(1-\pi)$ olur. Buradan $\alpha - \pi\alpha = (\alpha - \alpha\pi)(1-\pi) = \alpha - \alpha\pi - \pi\alpha + \alpha\pi = \alpha - \alpha\pi$ olup $\pi\alpha = \alpha\pi$ bulunur. İfadenin yeter kısmının ispatı açıkça görülür.

Lemma 4.3.22. $\alpha \in E = \text{end}({}_R M)$, $P\alpha \leq P$ ve $Q\alpha \leq Q$ olmak üzere $M = P \oplus Q$ şeklindeki ayrışımı için aşağıdakiler denktir.

- (1) $\alpha|_P$ bir izomorfizmadır.
- (2) $\ker\alpha \leq Q$ ve $P \leq M\alpha$ dır (Nicholson 1999).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\alpha|_P$ bir izomorfizma olsun. $p \in P$ ve $q \in Q$ için $m = p + q \in \ker\alpha$ alınsın. $m\alpha = 0 = (p\alpha + q\alpha)$ ve hipotezden $P \cap Q = 0$ olduğundan $p\alpha = q\alpha = 0$ olur. Ayrıca $\alpha|_P$ izomorfizma olduğundan $p\alpha = 0$ olması $p = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $m = q \in Q$ olup $\ker\alpha \leq Q$ bulunur. Yine hipotezden $P = P\alpha|_P = P\alpha \leq M\alpha$ olduğu açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\ker\alpha|_P = \ker\alpha \cap P \leq Q \cap P = 0$ olduğundan $\alpha|_P$ birebirdir. $(\pi)^2 = \pi \in E$ için $\ker\pi = Q$ ve $M\pi = P$ olsun. Lemma 4.3.21 gereğince $\pi\alpha = \alpha\pi$ dir ve $P = P\pi \leq M\alpha\pi = M\pi\alpha = P\alpha$ bulunur. Böylece $\alpha|_P$ örten olur. Sonuçta $\alpha|_P$ bir izomorfizmadır.

Teorem 4.3.23. $E = \text{end}({}_R M)$ olmak üzere $\alpha \in E$ için aşağıdakiler denktir.

- (1) $\alpha \in E$ kuvvetli temizdir.
- (2) $\pi\alpha = \alpha\pi \in U(\pi E \pi)$ ve $(1 - \pi)(1 - \alpha) \in U((1 - \pi)E(1 - \pi))$ olacak şekilde $\pi^2 = \pi \in E$ vardır.
- (3) $P\alpha \leq P$ ve $Q\alpha \leq Q$ olmak üzere $M = P \oplus Q$ olup $\alpha|_P$ ve $(1 - \alpha)|_Q$ izomorfizmadır.
- (4) $P\alpha \leq P$ ve $Q\alpha \leq Q$ olmak üzere $M = P \oplus Q$ olup $\ker \alpha \leq Q \leq M(1 - \alpha)$ ve $\ker(1 - \alpha) \leq P \leq M\alpha$ sağlanır.
- (5) Bir $n \geq 1$ tamsayısı için $M = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$ dir, burada $1 \leq i \leq n$ şartını sağlayan her i için $P_i\alpha \leq P_i$ ve $\alpha|_{P_i} \in \text{end}(P_i)$ kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\alpha \in E$ kuvvetli temiz olduğundan $\alpha = (1 - \pi) + \sigma$ olacak şekilde $\sigma \in U(E)$, $(1 - \pi)^2 = 1 - \pi \in E$ mevcuttur ve $(1 - \pi)\sigma = \sigma(1 - \pi)$ sağlanır, böylece $\pi\sigma = \sigma\pi$ dir. $\sigma\pi = \pi\sigma \in \pi E \pi$ olduğundan $\pi\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\pi$ olup $\sigma^{-1}\pi = \pi\sigma^{-1}\pi \in \pi E \pi$ dir. Ayrıca $\alpha - \sigma = 1 - \pi$ için $\alpha\pi = \sigma\pi$ gerçekleşir. Bu durumda $(\alpha\pi)(\sigma^{-1}\pi) = (\sigma\pi)(\sigma^{-1}\pi) = \pi$ ve $(\sigma^{-1}\pi)(\alpha\pi) = \pi$ olup $\alpha\pi \in U(\pi E \pi)$ dir. α nın kuvvetli temiz olması $1 - \alpha$ nın da temiz olmasını gerektirdiğinden benzer işlemler yardımıyla $(1 - \alpha)(1 - \pi) \in U((1 - \pi)E(1 - \pi))$ olarak bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (3) (2) de verilen koşulları sağlayan $\pi \in E$ için $P = M\pi$ ve $Q = M(1 - \pi)$ olsun. Buradan $\alpha\pi = \pi\alpha$ olmak üzere $M = P \oplus Q$ olup $P\alpha = M\pi\alpha \leq M\pi = P$ bulunur. Benzer şekilde $Q\alpha \leq Q$ dur. Hipotez gereği $(\alpha\pi)^{-1} = \pi\lambda\pi$ olacak şekilde $\lambda \in E$ vardır. Ayrıca $\lambda_0 = (\pi\lambda\pi)|_P$ sağlansın. $p \in P$ için $p(\alpha|_P)\lambda_0 = (p\pi)\alpha\lambda_0 = p(\pi\alpha\lambda_0) = p(\alpha\pi\lambda_0) = p\pi = p$ olup $\lambda_0 \in \text{end}(P)$ olur ve $\lambda_0\alpha|_P = 1_P$ bulunur. Bu durumda $\alpha|_P \in U(\text{end}(P))$ dir. Benzer şekilde $(1 - \alpha)|_Q \in U(\text{end}(Q))$ olarak bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (4) Önerme 4.3.22 den ispat açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (5) M modülü (4) şartlarını sağlasın. $\alpha|_P \in U(\text{end}(P))$ olduğundan kuvvetli temizdir. Ayrıca $P(1 - \alpha) \leq P$ ve $Q(1 - \alpha) \leq Q$ olduğundan Önerme 4.3.22 gereği

$(1 - \alpha)|_Q \in U(\text{end}(Q))$ olup kuvvetli temizdir. Buradan $P_1 = P$ ve $P_2 = Q$ olmak üzere $n = 2$ için istenilen elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (1) $\gamma_i \in \text{end}(P_i)$ dönüşümlerinin $\widehat{\gamma}_i \in E$ genişlemeleri $(p_1 + p_2 + \dots + p_n)\widehat{\gamma}_i = p_i\gamma_i$ olarak tanımlansın. Bu durumda $i \neq j$ için $\widehat{\gamma}_i\widehat{\gamma}_j = 0$ olup her $\mu_i \in \text{end}(P_i)$ için $\widehat{\gamma}_i\widehat{\mu}_i = \widehat{\gamma_i\mu_i}$ ve $\widehat{\gamma}_i + \widehat{\mu}_i = \widehat{\gamma_i + \mu_i}$ dir. Hipotez gereği $\alpha|_{P_i} = \pi_i + \sigma_i \in \text{end}(P_i)$ olacak şekilde $\sigma_i \in \text{end}(P_i)$ tersiniri ve $\pi_i^2 = \pi_i \in \text{end}(P_i)$ mevcut olup $\pi_i\sigma_i = \sigma_i\pi_i$ sağlansın. Eğer $\pi = \sum_{i=1}^n \widehat{\pi}_i$ ve $\sigma = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i$ ise $\pi^2 = \sum_{i=1}^n \widehat{\pi}_i \sum_{i=1}^n \widehat{\pi}_i = \sum_{i=1}^n \widehat{\pi}_i = \pi$ ve $\pi\sigma = \sum_{i=1}^n \widehat{\pi}_i \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \sum_{i=1}^n \widehat{\pi}_i = \sigma\pi$ olur. Ayrıca σ nın tersi $\sigma^{-1} = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma_i^{-1}} \in E$ dir. Sonuç olarak $\alpha = \sum_{i=1}^n \widehat{\alpha|_{P_i}} = \sum_{i=1}^n (\widehat{\pi_i + \sigma_i}) = \pi + \sigma$ olup ispat biter.

Teorem 4.3.24. Bir $\alpha \in E = \text{end}({}_R M)$ için aşağıdakiler denktir.

- (1) $\alpha \in E$ kuvvetli π -düzenlidir.
- (2) $M = M\alpha^n \oplus \ker\alpha^n$ olacak şekilde $n \geq 1$ tamsayısı mevcuttur.
- (3) $P\alpha \leq P$ ve $Q\alpha \leq Q$ olmak üzere $M = P \oplus Q$ olup $\alpha|_P \in U(\text{end}(P))$ ve $\alpha|_Q \in \text{end}(P)$ üstel sıfır elemandır.
- (4) $\pi\alpha = \alpha\pi \in U(\pi E \pi)$ ve $(1 - \pi)\alpha = \alpha(1 - \pi) \in (1 - \pi)E(1 - \pi)$ üstel sıfır olacak şekilde $\pi^2 = \pi \in \text{end}(E)$ mevcuttur (Armendariz vd. 1978).

Tanım 4.3.25. M modülü Fitting lemmayı sağlasın. $M = M\alpha^n \oplus \ker\alpha^n$, $P = M\alpha^n$ ve $Q = \ker\alpha^n$ olmak üzere ${}_R M$ modülü Teorem 4.3.24 (3) şartını sağlıyor ise M ye *genel Fitting lemmayı sağlar* (satisfy general Fitting's lemma) denir (Nicholson 1999).

Teorem 4.3.26. Bir M modülünün Fitting lemmayı sağlaması için gerek ve yeter şart $\text{end}(M)$ halkasının kuvvetli π -düzenli olmasıdır (Nicholson 1999).

İspat: Teorem 4.3.24 gereği ispat açıktır.

Teorem 4.3.27. Bir M modülünün genel Fitting lemmayı sağlaması için gerek ve yeter şart $\text{end}(M)$ halkasının kuvvetli temiz olmasıdır (Nicholson 1999).

4.4 Tek Türölü Temiz Halkalar

Tanım 4.4.1. R bir halka ve $a \in R$ olsun. $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$, $u \in U(R)$ mevcut ve bu yazılış tek türölü ise a ya *tek türölü temiz (uniquely clean) eleman* denir (Nicholson ve Zhou 2004).

Tanım 4.4.2. Her elemanı tek türölü temiz olan halkaya *tek türölü temiz (uniquely clean) halka* denir (Nicholson ve Zhou 2004).

Örnek 4.4.3. (1) $e^2 = e \in C(R)$ tek türölü temizdir. $e = (1 - e) + (2e - 1)$ olarak yazıldığından temizdir. Ayrıca $e = f + u$ olacak şekilde $f^2 = f \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcut olsun. e merkezil olduğundan $eu = ue$ dir. Buradan $(f + u) = (f + u)^2 = f + 2fu + u^2$ olup $u = 1 - 2f$ dir. Böylece $f = 1 - e$ olup e tek türölü temizdir.

(2) a üstel sıfır eleman ve $a \in C(R)$ olsun. Bu durumda $a - 1 \in U(R)$ olup $a = 1 + (a - 1)$ olarak yazılabildiğinden a temizdir. $a^n = 0$ ve $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ var olsun. $a \in C(R)$ olduğundan $au = ua$ dir. $0 = (e + u)^n = e + \binom{n}{1}eu + \binom{n}{2}eu^2 + \dots + \binom{n}{n-1}eu^{n-1} + u^n$ dir. Buradan $u^n \in eR$ olup $u = 1$ bulunur. Böylece a tek türölü temizdir (Nicholson ve Zhou 2004).

Sonuç 4.4.4. Her Boolean halkası tek türölü temizdir (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: R bir Boolean halka olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $a^2 = a$ dir. Buradan $(a + a)^2 = a^2 + 2a + a^2 = a + a$ olup $2a = 0$ dir. Böylece $\text{char}(R) = 2$ dir. $a, b \in R$ olmak üzere $a + b = (a + b)^2 = a + ab + ba + b$ ve böylece $ab = ba$ dir. Sonuçta R değişmeli olarak bulunur. O halde R tek türölü temizdir.

Örnek 4.4.5. Cisimler tek türölü temiz halka değildir.

Örnek 4.4.3 de eşkare ve üstel sıfır elemanların merkezde olma şartı kaldırılamaz.

Örnek 4.4.6. R bir halka ve $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. $E^2 = E$ olup E temizdir. Fakat $E \notin C(M_2(R))$ olduğundan $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde iki farklı yazılışa sahip olup tek türölü temiz değildir (Nicholson ve Zhou 2004).

Örnek 4.4.7. Her $i \in I$ için R_i bir halka olsun. $\prod_{i \in I} R_i$ halkasının tek türlü temiz olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için R_i nin tek türlü temiz olmasıdır (Nicholson ve Zhou 2004).

Lemma 4.4.8. R tek türlü temiz bir halka ve $e^2 = e \in R$ ise $e \in C(R)$ dir (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: $e^2 = e \in R$ olsun. $r \in R$ olmak üzere $(e + (er - ere)) = (e + (er - ere))^2$ ve $1 + (er - ere) \in U(R)$ dir. Buradan $(e + (er - ere)) + 1 = e + (1 + (er - ere))$ ve R tek türlü temiz olduğundan $e = e + (er - ere)$ dir. Böylece $er = ere$ olur. Benzer şekilde $re = ere$ olduğundan $e \in C(R)$ dir.

Örnek 4.4.9. $n \geq 2$ bir tamsayı olsun. $M_n(R)$ ve $T_n(R)$ halkalarındaki her eşkare eleman merkezde olmadığından tek türlü temiz değildir. $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$E^2 = E$ olduğu açıktır. Fakat $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup E merkezde olmadığından $M_3(R)$ tek türlü temiz değildir.

Sonuç 4.4.10. R tek türlü temiz bir halka ve $e^2 = e \in R$ ise eRe tek türlü temizdir (Nicholson ve Zhou 2004).

Sonuç 4.4.11. Her tek türlü temiz halka Dedekind sonludur (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: R tek türlü temiz ve $ab = 1$ olsun. Buradan $baba = b(ab)a = ba$ ve R tek türlü temiz olduğundan $ba \in C(R)$ dir. Buradan $ba = ba(ab) = a(ba)b = (ab)(ab) = 1$ dir.

Önerme 4.4.12. R bir halka olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $S = I(R; V)$ tek türlü temizdir.

(1) R tek türlü temizdir.

(2) $e^2 = e \in R$ ve her $v \in V$ için $ev = ve$ dir.

(3) $v \in V$ için $v + w + vw = 0$ olacak şekilde $w \in V$ vardır.

Ayrıca S tek türlü temiz ve V sıfırdan farklı eşkare eleman içermiyorsa ifadenin karşısı da doğrudur (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: (1), (2), (3) sağlansın. Bu durumda $s = (r, v) \in S$ ise $r = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ vardır. Buradan $s = (e, 0) + (u, v)$ dir. Böylece $(e, 0)^2 = (e, 0)$ ve $(u, v) \in U(S)$ olduğundan S temizdir. $(e, x) + (u, v) = (e', x') + (u' + v')$ için $(e, x)^2 = (e, x)$, $(e', x')^2 = (e', x')$ ve $(u, v), (u', v') \in U(S)$ olsun. $e + u = e' + u' \in R$ ve R tek türlü temiz olduğundan $(e, x) = (e', x')$ dir. Ayrıca $(e, x)^2 = (e, x)$ ve $e^2 = e$ olduğundan (2) gereğince $x = 2ex + x^2$ dir. Son eşitlik e ve x ile çarpılırsa sırasıyla $ex + ex^2 = 0$ ve $x^2 = 2ex^2 + x^3$ bulunur. $x^2 = 2ex^2 + x^3$ ve $x = 2ex + x^2$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $x = x^3$ olup x^2 eşkare elde edilir. (3) den dolayı $-x^2 + y + (-x^2)y = 0$ olacak şekilde $y \in V$ vardır. Böylece $w = -y$ için $x^2 + w = x^2w$ dir. Son eşitlik x^2 ile çarpılırsa $x = 0$ dir. Böylece $(e, x) = (e, 0)$ olup S tek türlü temizdir.

Karşıt olarak S tek türlü temiz olsun ve V sıfırdan farklı eşkare içermesin. $e^2 = e \in R$ için $(e, 0)^2 = (e, 0) \in S$ ve $(e, 0) \in C(S)$ dir. Böylece her $(0, v) \in S$ ile değişmeli olduğundan (2) sağlanır. $(1, v) = (e, x) + (u, z)$ için $(e, x)^2 = (e, x)$ ve $(u, z) \in U(S)$ olsun. Buradan $e + u = 1 \in R$ olup $e = 0$ dir ve (1) sağlanır. O halde $x^2 = x \in V$ ise hipotez gereği $x = 0$ dir. Sonuçta $(1, v) \in U(S)$ ve $(1, v)^{-1} = (a, w)$ olup (3) sağlanır.

Örnek 4.4.13. R nin tek türlü temiz olması için gerek ve yeter şart $R[[x]]$ in tek türlü temiz olmasıdır (Nicholson ve Zhou 2004).

Örnek 4.4.14. $0 \neq R$ ise $R[x]$ asla tek türlü temiz olamaz (Nicholson ve Zhou 2004).

Şimdi temel kavramlar bölümünde verilen yerel halkanın denkliklerine bir yenisini ekleyecek olan bir lemma verilecektir.

Lemma 4.4.15. $0 \neq R$ halkasının yerel olması için gerek ve yeter şart R nin temiz ve 0, 1 den başka eşkare elemanın olmamasıdır (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: R yerel olsun. Bu durumda R temizdir ve 0, 1 den başka eşkare elemanı yoktur. Karşıt olarak $a \notin J(R)$ olsun. Buradan $1 - ar \notin U(R)$ olacak şekilde $r \in R$ mevcuttur. R temiz ve yegane eşkare elemaları 0 ve 1 olduğundan $1 - ar = 0 + u$ olacak şekilde $u \in U(R)$ mevcut değildir. Bu durumda $1 - ar = 1 + u'$ olacak şekilde $u' \in U(R)$ mevcut olmalıdır. O halde $a \in U(R)$ dir. Böylece R bir yerel halka olur.

Teorem 4.4.16. $R \neq 0$ halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) R yerel ve tek türlü temizdir.
- (2) R tek türlü temizdir ve R nin 0, 1 den başka eşkare elemanı yoktur.
- (3) $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ dir (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Açıkça görülmektedir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\bar{R} = R/J(R)$ olmak üzere $\bar{0} \neq \bar{a} \in \bar{R}$ alınsın. Bu durumda $a \notin J(R)$ dir. Ayrıca Lemma 4.4.15 gereğince R yerel olduğundan $a \in U(R)$ dir. $\bar{a} = a + J(R) \neq 1 + J(R) = \bar{1}$ olsun. O halde $1 - a \in U(R)$ dir. Bu durumda $0 + (1 - a) = 1 + (-a)$ olur. Fakat R tek türlü temiz olduğundan $0 = 1$ olup çelişki elde edilir. Böylece $\bar{a} = \bar{1}$ olup $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ise R yerel halkadır. Her yerel halka temiz olduğundan R temizdir. $a = e + u = f + v$ olmak üzere $e^2 = e$, $f^2 = f$ ve $u, v \in U(R)$ mevcut olsun. Eğer $e \neq f$ ise R yerel olduğundan genelliği bozmaksızın $e = 0$ ve $f = 1$ alınsın. Bu durumda $u = 1 + v$ olup u ve $1 - u$ tersinirdir. $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan $\bar{u} = \bar{1} = \overline{1 + u}$ dur. Böylece $1 \in J(R)$ çelişkisi ortaya çıkar. Bu durumda R tek türlü temizdir.

Lemma 4.4.17. Bir R temiz halkası için aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Eşkare elemanlar her ideale göre yükselirler.
- (2) $T \not\subseteq J(R)$ şartını sağlayan R nin her sol (sağ) T ideali sıfırdan farklı bir eşkare eleman içerir (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: (1) Önerme 4.1.12 den açıktır.

(2) $T \not\subseteq J(R)$ olacak şekildeki T sağ ideali 0 dan başka eşkare eleman içermesin. $a \in T$ ise $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e$ ve $u \in U(R)$ vardır. Buradan $[a - u(1 - e)u^{-1}]u = eu + ue + u^2 - u = a^2 - a$ olduğundan $u(1 - e)u^{-1} = a - (a^2 - a)u^{-1} \in T$ dir. Böylece $e = 1$ olup $1 - a = -u \in U(R)$ dir. Bu nedenle $T \subseteq J(R)$ çelişkisi elde edilir.

Lemma 4.4.18. R tek türlü temiz halka ise $R/J(R)$ nin karakteristiği 2 dir (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: $2 \notin J(R)$ olsun. Lemma 4.4.17 gereğince $0 \neq e^2 = e \in 2R$ vardır. Buradan $e = 2b$ olacak şekilde $b \in R$ mevcuttur. $eb = b = be$ olsun. Bu durumda $u = (1 - e) - 2e$ ve $v = (1 - e) - b$ olmak üzere $uv = 1 - e - b + eb + 2eb = 1 - 2b - b + b + 2b = 1 = vu$ olduğundan $v = u^{-1}$ dir. Böylece $(1 - e) + (1 - 2e) = 1 + u$ olur. R tek türlü temiz olduğundan $1 - e = 1$ olup $e = 0$ çelişkisi bulunur. O halde $1 + 1 = 2 \in J(R)$ olup $\text{char}(R/J(R)) = 2$ dir.

Teorem 4.4.19. Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) R tek türlü temiz ve $J(R) = 0$ dir.
- (2) R temizdir, R nin karakteristiği 2 dir ve R nin tek tersinir elemanı 1 dir.
- (3) R Boolean halkadır.
- (4) R düzenli ve tek türlü temizdir (Nicholson ve Zhou 2004).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R tek türlü temiz ve $J(R) = 0$ ise Lemma 4.4.18 gereğince $\text{char}(R) = 2$ dir. $1 \neq u \in U(R)$ olsun. Lemma 4.4.17 gereğince $0 \neq e^2 = e \in (1 - u)R$ vardır. Bu durumda $e = (1 - u)r$ olacak şekilde $r \in R$ mevcuttur. R tek türlü temiz olduğundan $e \in C(R)$ dir. Buradan $e(1 - u)e \in U(eRe)$ olup $0 + e(1 - u)e = e - eue$ ve $eue \in U(eRe)$ dir. O halde $e = 0$ olup çelişki oluşur. Bu nedenle $u = 1$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3) R temiz olduğundan $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ vardır. R nin tek tersiniri 1 olduğundan $a = 1 + e = 1 - e$ dir. Böylece R Boolean halka olur.

(3) $\Rightarrow$ (4) ve (4) $\Rightarrow$ (1) Açıkça görülmektedir.

Teorem 4.4.20. Tek türlü temiz halkaların her homomorfik görüntüsü de tek türlü temizdir (Nicholson ve Zhou 2004).

5. MATRİS HALKALARINDA KUVVETLİ TEMİZLİK

5.1 $M_n(R)$ Halkasında Kuvvetli Temizlik

Lemma 5.1.1. R bir tamlık bölgesi ve $E \in M_2(R)$ olsun. $E^2 = E$ olması için gerek ve yeter şart $E = 0$, $E = I_2$ ya da $bc = a - a^2$ şartını sağlayan $a, b, c \in R$ için $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ şeklinde olmasıdır (Chen vd. 2006a).

İspat: $E \in M_2(R)$ bir eşkare eleman ve $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $E^2 = E$ sağlandığından $E^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = E$ olur. Matrislerde eşitlik tanımını gereği,

$$a^2 + bc = a \quad (5.1)$$

$$ab + bd = b \quad (5.2)$$

$$ca + cd = c \quad (5.3)$$

$$bc + d^2 = d \quad (5.4)$$

eşitlikleri elde edilir. (5.1) eşitliğinde $a \neq 0$ alınırsa $bc = a - a^2$ dir ve (5.2) denklemi de $b \neq 0$ ise $a + d = 1$ bulunur. Eğer (5.1) de $a = 0$ alınırsa $bc = 0$ olur. R tamlık bölgesi olduğundan $b = 0$ veya $c = 0$ olur. Birinci durumda $b = 0$ ve $c \neq 0$ alınırsa (5.3) numaralı denklemden $a + d = 1$ ve ayrıca $bc = a - a^2$ elde edilir. Eğer $b \neq 0$ ve $c = 0$ olduğu kabul edilirse (5.2) numaralı denklemden $a + d = 1$ olur ve $bc = a - a^2$ dir. Son olarak $b = 0$, $c = 0$ alınırsa $a^2 = a$ ve $d^2 = d$ bulunur. R tamlık bölgesi olduğundan yegane eşkare elemanları 0 ve 1 dir. Sonuçta istenilen elde edilir. Karşıt olarak $E = 0$ ve $E = 1$ olması durumlarında ispat açıktır. Eğer $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ şeklinde ve $bc = a - a^2$ ise basit bir işlemle sonuç elde edilir.

Bu bölümde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ şeklinde verilen bir matris için $s = a_{11} - a_{22}$ ve $t = \text{tr} A - 4\det A = s^2 + 4a_{12}a_{21}$ ile gösterilecektir. Burada $\det A$ ile A matrisinin determinantı; $\text{tr} A$ ile de A matrisinin izi gösterilmektedir.

Lemma 5.1.2. R değişmeli bir halka olmak üzere $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix} \in M_2(R)$ ve $U = A - E$ olsun. A nın $M_2(R)$ deki kuvvetli temiz parçalanışının $A = E + U$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$bc = a - a^2 \quad (5.5)$$

$$a_{21}b = a_{12}c \quad (5.6)$$

$$sb = a_{12}(2a - 1) \quad (5.7)$$

$$sc = a_{21}(2a - 1) \quad (5.8)$$

$$\det U \in U(R) \quad (5.9)$$

(Chen vd. 2006b).

İspat: $E^2 = E$ olması için gerek ve yeter şart (5.5) in sağlanmasıdır. $EU = UE$ olması için gerek ve yeter şart (5.6), (5.7), (5.8) in sağlanmasıdır. U tersinirdir ancak (5.9) sağlanır.

Lemma 5.1.3. R bir değişmeli tamlık bölgesi ve $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. Eğer A ve $I - A$ matrisleri tersinir değil ve A kuvvetli temiz ise $s^2t \in R$ kareseldir (Chen vd. 2006a).

İspat: A ve $I - A$ tersinir olmayıp ve A kuvvetli temiz olsun. Lemma 5.1.2 den dolayı $sb = a_{12}(2a - 1)$, $sc = a_{21}(2a - 1)$ ve $bc = a - a^2$ dir. Ayrıca t ve s nin tanımlarından $t = s^2 + 4a_{12}a_{21}$ olduğu açıkça görülür. Lemma 5.1.2 de (5.7) ve (5.8) eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa $a_{21}a_{12}(2a - 1)^2 = s^2bc = s^2(a - a^2)$ bulunur. Buradan $t(a^2 - a) + a_{21}a_{12} = 0$ bulunur. Son olarak $s^2t = t(s^2 - t + t) = t(4ta^2 - 4ta + t) = (t(2a - 1))^2 = 0$ olup ispat biter.

Sonuç 5.1.4. R bir değişmeli tamlık bölgesi, $p, q \in R$ ve $p \notin U(R)$ olsun. $A = \begin{bmatrix} p+1 & p \\ q & p \end{bmatrix} \in M_2(R)$ kuvvetli temiz ise $4pq + 1 \in R$ kareseldir (Chen vd. 2006a).

İspat: R halkasında p tersinir olmadığından A ve $I - A$ tersinir değildir. Ayrıca $s = (p + 1) - p = 1$ ve $t = (tr A)^2 - 4\det A = (2p + 1)^2 - 4(p^2 + p - pq) = 1 + 4pq$ olur. Buradan Lemma 5.1.3 gereğince $4pq + 1$ kareseldir.

Lemma 5.1.5. R bir tamlık bölgesi ve $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. A nın kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

(1) A veya $I - A$ tersinirdir.

(2) Bir $u \in U(R)$ için aşağıdaki denklem sistemi çözüme sahiptir.

$$sx + cy + bz = \det A + u$$

$$yz = x - x^2$$

$$sy = b(2x - 1)$$

$$sz = c(2x - 1)$$

(Chen 2013).

İspat: A kuvvetli temiz olsun ve $A, I - A$ tersinir olmasın. Bu durumda $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 - x \end{bmatrix} \in M_2(R)$ eşkare elemanı için $yz = x - x^2$ dir. Ayrıca $A - E \in U(M_2(R))$ ve $AE = EA$ sağlanır. Bu durumda $sy = b(2x - 1)$ ve $sz = c(2x - 1)$ olur.

$$\begin{aligned} u &:= \det(A - E) = (a - x)(d - 1 + x) - (b - y)(c - z) \\ &= \det A - a + sx + bz + cy \in U(R) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $sx + cy + bz = a - \det A + u$ olup istenilen elde edilir. Karşıt olarak A ya da $I - A$ tersinir ise A kuvvetli temizdir. A ve $I - A$ nın tersinir olmadığı kabul edilsin ve teoremden verilen denklem sistemi $u \in U(R)$ için çözüme sahip olsun. $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 - x \end{bmatrix} \in M_2(R)$ alınırsa $E^2 = E$ ve $AE = EA$ olur. Ayrıca $\det(A - E) = \det A - a + sx + bz + cy = u \in U(R)$ olup $A - E$ tersinirdir. Böylece A kuvvetli temiz olur.

Lemma 5.1.6. R bir tamlık bölgesi ve $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. $v \in U(R)$ için $t = v^2$ ve $s \neq 0$ olmak üzere A nın kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

(1) A veya $I - A$ tersinirdir.

(2) Bazı $u \in U(R)$ elemanları için $x^2 - x + t^{-1}bc$ polinomunun kökü $t^{-1}(s(a - \det A + u) + 2bc)$ şeklindedir (Chen 2013).

İspat: A kuvvetli temiz olsun. Eğer A ve $I - A$ tersinir değilse Lemma 5.1.5 gereği bir $u \in U(R)$ için denklem sistemi çözüme sahiptir. Böylece $s^2yz = bc(2x - 1)^2$ olup $s^2(x - x^2) = 4bc(x^2 - x) + bc$ dir. Bu durumda $(s^2 + 4bc)(x - x^2) = bc$ dir ve $t(x - x^2) = bc$ olur. Lemma 5.1.5 gereği $s^2x + c(sy) + b(sz) = s(a - \det A + u)$ elde edilir. Buradan $s^2x + cb(2x - 1) + bc(2x - 1) = s(a - \det A + u)$ dur ve $(s^2 + 4bc)x - (s^2x + csy + bsz) = 4bcx - cb(2x - 1) - bc(2x - 1) = 2bc$ bulunur. Sonuçta $tx = s(a - \det A + u) + 2bc$ elde edilir. O halde $u \in U(R)$ için $x^2 - x + t^{-1}bc = 0$ polinomunun kökü $x = t^{-1}(s(a - \det A + u) + 2bc)$ olduğu görülür. Karşıt olarak bir $u \in U(R)$ için $t(x^2 - x) + bc = 0$ ve $tx = s(a - \det A + u) + 2bc$ denklem sistemi çözülebilir olsun. $t = s^2 + 4bc$ olduğundan $1 - 4t^{-1}bc = s^2t^{-1}$ dir ve buradan $1 - 4(x^2 - x) = s^2v^{-2}$ olur. Son eşitlikten $(1 - 2x)^2 = (sv^{-1})^2$ dir. R bir tamlık bölgesi olduğundan $1 - 2x = sv^{-1}$ ya da $1 - 2x = -sv^{-1}$ olmalıdır. $1 - 2x = sv^{-1}$ olduğu kabul edilsin. Buradan $-sbv^{-1} = b(2x - 1)$ dir. Benzer şekilde $-scv^{-1} = c(2x - 1)$ dir. $y = -bv^{-1}$ ve $z = -cv^{-1}$ olarak seçerirse $yz = bcv^{-2} = t^{-1}bc = x - x^2$ elde edilir. Böylece $sy = b(2x - 1)$ ve $sz = c(2x - 1)$ olur. $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 - x \end{bmatrix}$ olarak alınırsa $E^2 = E$ dir. Ayrıca

$$AE = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + b(1 - x) \\ cx + dz & cy + d(1 - x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + c(1 - x) & bz + d(1 - x) \end{bmatrix} = EA \text{ olduğu açıktır.}$$

Son olarak

$$\begin{aligned} s\det(A - E) &= s(sx + cy + bz - a + \det A) \\ &= s(sx - 2bcv^{-1} - a + \det A) \\ &= s^2x + 2bc(2x - 1) - s(a - \det A) \\ &= (s^2 + 4bc)x - 2bc - s(a - \det A) \\ &= tx - 2bc - s(a - \det A) \\ &= su \end{aligned}$$

bulunur. $s \neq 0$ ve R tamlık bölgesi olduğundan $\det(A - E) = u \in U(R)$ olup $A - E$ tersinirdir. Bu durumda A kuvvetli temizdir. Eğer $1 - 2x = -sv^{-1}$ ise $sbv^{-1} = b(2x - 1)$ dir. Buradan $scv^{-1} = c(2x - 1)$ ve $sbv^{-1} = b(2x - 1)$ olur. $y = bv^{-1}$ ve $z = cv^{-1}$ olarak seçilirse $sy = b(2x - 1)$ ve $sz = c(2x - 1)$ bulunur. İspatın kalan kısmı $1 - 2x = sv^{-1}$ olması haliyle aynı olduğundan A kuvvetli temiz olarak bulunur.

Lemma 5.1.7. R bir tamlık bölgesi olsun. $A, I - A$ tersinir olmayan iki matris ve $s \in U(R)$ alınsın. $A \in M_2(R)$ kuvvetli temiz ise $t = u^2$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır (Chen 2013).

İspat: A kuvvetli temiz ve $A, I - A$ tersinir olmadığından Lemma 5.1.5 gereği $A = E + (A - E)$ olmak üzere $AE = EA, A - E \in U(M_2(R)), E^2 = E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1-x \end{bmatrix} \in M_2(R)$ ve $yz = x - x^2$ şartlarını sağlayan $x, y, z \in R$ mevcuttur. $AE = EA$ olduğundan $sy = a_{12}(2x - 1)$ ve $sz = a_{21}(2x - 1)$ dir. Böylece $s^2(x - x^2) = s^2bc = a_{12}a_{21}(2x - 1)^2$ olup $(s^2 + 4a_{12}a_{21})(x - x^2) = a_{12}a_{21}$ bulunur. $t = s^2 + 4a_{21}a_{12}$ olduğundan $s^2 = t - 4a_{21}a_{12} = t - 4t(x - x^2) = t(1 - 2x)^2$ dir. Hipotezden $s \in U(R)$ olduğundan $(1 - 2x) \in U(R)$ dir. Sonuç olarak $t = (s(1 - 2x)^{-1})^2$ bulunur.

Örnek 5.1.8. $\mathbb{Z}$ halkası bir tamlık bölgesidir. Buradan $p = 3$ ve $q = 2$ için

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ şeklindedir. Böylece $s = 1 \in U(\mathbb{Z}), \det A = 6 \notin U(\mathbb{Z})$ ve $\det(A - I) = 0 \notin U(\mathbb{Z})$ olup A ve $I - A$ tersinir değildir. Son olarak $t = 4pq + 1 = 5^2$ ve $5 \notin U(\mathbb{Z})$ olduğundan Lemma 5.1.7 gereği A matrisi kuvvetli temiz değildir.

Teorem 5.1.9. R bir tamlık bölgesi ve $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. $s \in U(R)$ olmak üzere A nın kuvvetli temiz olması gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

- (1) A veya $I - A$ tersinirdir.
- (2) Bazı $u \in U(R)$ için $x^2 - x + t^{-1}bc$ polinomunun kökü $t^{-1}(s(a - \det A + u) + 2bc)$ şeklindedir (Chen 2013).

İspat: A kuvvetli temiz olsun. $s \in U(R)$ olduğundan Lemma 5.1.7 gereği $t = v^2$ olacak şekilde $v \in U(R)$ mevcuttur. Buradan Lemma 5.1.6 gereği istenilen elde edilir. Karşıt olarak $u \in U(R)$ için $t(x - x^2) + bc = 0, tx = s(a - \det A + u) + 2bc$ denklem sistemi bir köke sahip olsun. $y = s^{-1}b(2x - 1)$ ve $z = s^{-1}c(2x - 1)$ olacak şekilde seçilsin. Böylece $s^2yz = bc(2x - 1)^2 = 4bc(x^2 - x) + bc = s^2(x - x^2) - t(x - x^2) + bc = s^2(x - x^2)$ olarak bulunur. R bir tamlık bölgesi olduğundan $yz = x - x^2$ dir. $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1-x \end{bmatrix}$ alınsın. Buradan $E^2 = E$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
\det(A - E) &= sx + cy + bz - a + \det A \\
&= sx + cs^{-1}b(2x - 1) + bs^{-1}c(2x - 1) - a + \det A \\
&= s^{-1}(s^2x + 2bc(2x - 1) - s(a - \det A)) \\
&= s^{-1}((s^2 + 4bc)x - 2bc - s(a - \det A)) \\
&= s^{-1}(tx - 2bc - s(a - \det A)) \\
&= s^{-1}(s(a - \det A + u) - s(a - \det A)) \\
&= u \in U(R)
\end{aligned}$$

olup $A - E \in U(M_2(R))$ olarak bulunur. Son olarak

$$AE = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + b(1 - x) \\ cz + dz & cy + d(1 - x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + c(1 - x) & bz + d(1 - x) \end{bmatrix} = EA \text{ dır. Böylece } A \text{ kuvvetli temizdir.}$$

Örnek 5.1.10. $R = \mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : 2 \nmid b\}$ olarak verilsin. R bir tamlık bölgesidir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{9} & 0 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ için $s = 1 \in U(R)$ ve $t = \frac{1}{9}$ dır. Ayrıca $\det A = \det(A - I) = \frac{2}{9} \notin U(R)$ olduğundan A ve $I - A$ tersinir değildir. Buradan $u = -\frac{1}{9} \in U(R)$ olarak seçilirse $x^2 - x - 2 = 0$ polinomunun kökü $2 = 9((1 - \frac{2}{9} + (-\frac{1}{9})) + 2(-\frac{2}{9}))$ olur. Böylece Teorem 5.1.9 gereği A matrisi kuvvetli temizdir (Chen 2013).

Sonuç 5.1.11. R bir tamlık bölgesi ve $p, q \in R$ olsun. $p \in J(R)$ ise aşağıdakiler denktir.

$$(1) \begin{bmatrix} p & p \\ q & p+1 \end{bmatrix} \text{ kuvvetli temizdir.}$$

$$(2) x^2 - x + \frac{pq}{1 + 4pq} \text{ polinomu } U(R) \text{ de köke sahiptir (Chen 2013).}$$

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $A = \begin{bmatrix} p & p \\ q & p+1 \end{bmatrix}$ olsun. Buradan $p \in J(R)$ olduğundan $s = -1$ ve $t = 4pq + 1 \in U(R)$ dir. A kuvvetli temiz olduğundan Teorem 5.1.9 gereğince $x^2 - x + \frac{pq}{1 + 4pq} = 0$ polinomunun bir kökü $x = t^{-1}(s(a - \det A + u) + 2bc) = t^{-1}(-p + p(p+1) - pq - u + 2pq) \in U(R)$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki $x^2 - x + \frac{pq}{1 + 4pq} = 0$ polinomu bir $x \in U(R)$ de köke sahip olsun. $u = p^2 - \frac{x}{1 + 4pq} \in U(R)$ olarak seçilsin. $p \in J(R)$ olduğundan $x = t^{-1}(s(a - \det A + u) + 2bc) = t^{-1}(-p + p(p+1) - pq - u + 2pq) \in U(R)$ olup polinomun bir köküdür. O halde Teorem 5.1.9 gereğince A kuvvetli temiz olur.

Sonuç 5.1.12. R bir tamlık bölgesi ve $p, q \in J(R)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & p \\ 1 & 1+q \end{bmatrix} \text{ kuvvetli temizdir.}$$

$$(2) x^2 - x + \frac{p}{(1+p)^2 + 4q} \text{ polinomu } U(R) \text{ de köke sahiptir (Chen 2013).}$$

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $A = \begin{bmatrix} 0 & p \\ 1 & 1+q \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $p, q \in J(R)$ olup $s = 1 - q \in U(R)$ ve $t = (1+q)^2 + 4p \in U(R)$ dir. A kuvvetli temiz olduğundan Teorem 5.1.9 gereğince $x^2 - x - \frac{p}{(1+p)^2 + 4q} = 0$ polinomu $x = t^{-1}(s(a - \det A + u) + 2bc)$ formatında bir köke sahiptir. $x = t^{-1}(s(p + u) + 2p) \in U(R)$ olup istenilen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $x^2 - x + \frac{p}{(1+p)^2 + 4q} = 0$ polinomu $x \in U(R)$ yi kök kabul etsin. $u = s^{-1}(tx - 2p) - p$ olarak seçilsin. Böylece $u \in U(R)$ için $x = t^{-1}(s(a - \det A + u) + 2bc)$ verilen polinomun kökü olduğundan Teorem 5.1.9 gereği A kuvvetli temiz olur.

Tanım 5.1.13. R bir halka ve $A \in M_2(R)$ olsun. $A = E + U$ için $E^2 = E$, $U \in U(M_2(R))$, $EU = UE$ ve $\det E = e$ oluyorsa A matrisi *kuvvetli e-temizdir* (*strongly e-clean*) denir (Chen 2013).

Önerme 5.1.14. R bir tamlık bölgesi ve $A \in M_2(R)$ olsun. A nın kuvvetli 1-temiz olması için gerek ve yeter şart $\det A - \text{tr} A + 1 \in U(R)$ olmasıdır (Chen 2013).

İspat: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun.

A kuvvetli 1-temizdir $\Leftrightarrow A = I + U$ olacak şekilde $U \in U(M_2(R))$ mevcuttur.

$$\Leftrightarrow \det U \in U(R)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(d-1) - bc \in U(R)$$

$$\Leftrightarrow \det A - \text{tr} A + 1 \in U(R).$$

Tanım 5.1.15. $A \in M_2(R)$ ve $x, y \in R$ olsun. Eğer $0 \neq y$ için $sy = b(2x-1)$ ve $t(x^2 - x) + bc = 0$ oluyorsa (x, y) ikilisine *A-indirgenebilir* (*A-reducible*) denir (Chen 2013).

Teorem 5.1.16. R bir tamlık bölgesi ve $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. $s \in U(R)$ için A nın kuvvetli 0-temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

(1) A tersinirdir.

(2) $a \in 1 + U(R)$, $b = c = 0$ ve $d \in U(R)$ dir.

(3) $a \in U(R)$, $b = c = 0$ ve $d \in 1 + U(R)$ dir.

(4) Bir $u \in U(R)$ için $(-b)x^2 + sxy + cy^2 + bx + (detA - a + u)y$ polinomu bir A -indirgenebilir köke sahiptir.

(5) Bir $u \in U(R)$ için $(-c)x^2 + sxy + by^2 + cx + (detA - a + u)y$ polinomu bir A^T -indirgenebilir köke sahiptir (Chen 2013).

İspat: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ kuvvetli 0-temiz olsun. Bu durumda $A = E + U$ olacak şekilde $E^2 = E$, $U \in U(M_2(R))$ mevcut olup $EU = UE$ ve $detE = 0$ dır. $detE = 0$ olduğundan Lemma 5.1.1 kullanılarak durum incelemeli ispat yapılırsa;

1. Durum: $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise A tersinirdir.

2. Durum: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise $a \in 1 + U(R)$, $b = c = 0$ ve $d \in U(R)$ dir.

3. Durum: $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $a \in U(R)$, $b = c = 0$ ve $d \in 1 + U(R)$ dir.

$y \neq 0$ veya $z \neq 0$ olmak üzere $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1-x \end{bmatrix}$ ve $yz = x - x^2$ ise $A - E = \begin{bmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-1+x \end{bmatrix} \in U(M_2(R))$ dir. Buradan $u = (a-x)(d-1+x) - (c-z)(b-y) = -((ad-bc) + (a-d)x + bz + cy - a) \in U(R)$ dir.

4. Durum: Eğer $y \neq 0$ ise $(a-d)xy + b(x-x^2) + cy^2 + (detA - a + u) = 0$ olup $(-b)x^2 + (a-d)xy + cy^2 + bx + (detA - a + u) = 0$ bulunur. $UE = EU$ olduğundan $sy = b(2x-1)$ ve $sz = c(2x-1)$ dir. Böylece $s^2yz = bc(2x-1)^2$ olup $t(x^2-x) + bc = 0$ dir. Sonuçta (x, y) ikilisi A -indirgenebilir kök olarak elde edilir.

5. Durum: Eğer $z \neq 0$ alınırsa benzer şekilde (x, z) ikilisi A^T -indirgenebilir kök olarak bulunur.

Karşıt olarak, eğer A tersinir ise $A = A + 0$ olup A kuvvetli 0-temizdir.

$a \in 1 + U(R)$, $b = c = 0$, $d \in U(R)$ olsun. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ olarak yazılır ve A kuvvetli 0-temiz olur.

$a \in U(R)$, $b = c = 0$, $d \in 1 + U(R)$ olsun. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d-1 \end{bmatrix}$ olarak yazılır ve A kuvvetli 0-temiz bulunur.

$u \in U(R)$ için $(-b)x^2 + (a-d)xy + cy^2 + bx + (detA + u - a)y = 0$ polinomunun A -indirgenebilir kökü (x, y) olsun. O halde $sy = b(2x - 1)$ ve $t(x^2 - x) + bc = 0$ dir. $z = s^{-1}c(2x - 1)$ olarak seçilsin. Böylece $s^2yz = bc(2x - 1)^2 = s^2(x - x^2) - t(x - x^2) + bc = s^2(x - x^2)$ bulunur. $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1-x \end{bmatrix}$ olarak alınırsa $E^2 = E$ dir.

$sy = b(2x - 1)$ ve $sz = c(2x - 1)$ olduğundan

$$AE = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + b(1-x) \\ cx + dz & cy + d(1-x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + c(1-x) & bz + d(1-x) \end{bmatrix} = EA$$

olduğu görülmektedir. Son olarak $det(A - E) = (a - x)(d - 1 + x) - (b - y)(c - z)$
 $= ad - a + ax - dx + x - x^2 - bc + bz + yc - yz = (a - d)x + bz + yc + detA - a$
 olur. Buradan $y(det(A - E)) = ((a - d)x + bz + yc + detA - a)y$

$$= (-b)x^2 + (a - d)xy + cy^2 + bx + (detA - a)y = -uy$$

dir. Sonuçta $y \neq 0$ ve R tamlık bölgesi olduğundan $det(A - E) = -u \in U(R)$ olup A kuvvetli 0-temiz bulunur.

Eğer bir $u \in U(R)$ için $(-c)x^2 + (a - d)xy + by^2 + cx + (detA - a + u)y = 0$ polinomunun bir A^T -indirgenebilir kökü (x, y) ise yukarıdaki ispat benzer şekilde tekrarlanarak sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.1.17. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ olsun. $|a - d| = 1$ olmak üzere A nın kuvvetli 0-temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

(1) $ad - bc = \pm 1$ dir.

(2) $a = 0$ ya da $a = 2$, $b = c = 0$, $d = \pm 1$ dir.

(3) $a = \pm 1$, $b = c = 0$, $d = 0$ ya da $d = 2$ dir.

(4) A nın formatı $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & -1 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

(5) A nın formatı $\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ şeklindedir (Chen 2013).

İspat: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ kuvvetli 0-temiz olsun ve (1), (2), (3) sağlanmasın. Hipotezden $a - d = s = \pm 1$ olduğundan Lemma 5.1.7 den $t = 1$ olur. Böylece $4bc + 1 = 1$ olup $b = 0$ ya da $c = 0$ dır.

1. *Durum:* Eğer $b = 0$ ise $sy = b(2x - 1) = 0$ olup $y = 0$ dır. Böylece Teorem 5.1.16 gereği bir $u \in U(\mathbb{Z})$ için $(-c)x^2 + sxy + by^2 + cx + (detA - a + u)y = 0$ polinomu bir A^T -indirgenebilir (x, y) köke sahiptir. Bundan dolayı $y \neq 0$ dır. A^T matrisi için $d - a = s_{A^T}$ ile gösterilsin. Buradan $s_{A^T}y = c(2x - 1)$ ve $t_{A^T}(x^2 - x) + cb = 0$ olur. $s_{A^T} = s = 1$ ve $t_{A^T} = t = 1$ olduğu açıkça görülebilir. O halde $sy = c(2x - 1)$ ve $x^2 - x = 0$ bulunur. Bu durumda $x = 0$ ya da $x = 1$ olmalıdır. Eğer $x = 0$ ise $y = \pm c$ ve $ad - a \pm 1 = 0$ olur. $s = \pm 1$ olduğunu göz önünde tutarak tüm olasılıklar değerlendirilirse A ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \text{ değerlerini alabilir.}$$

Eğer $x = 1$ ise $y = \pm c$ ve $ad - a \pm 1 = 0$ dır. Benzer şekilde işlemler yapılırsa A ;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

2. *Durum:* Eğer $c = 0$ ise $s_{A^T}y = c(2x - 1) = 0$ olup $y = 0$ bulunur. Böylece Teorem 5.1.7 gereği bir $u \in U(\mathbb{Z})$ için $(-b)x^2 + sxy + cy^2 + bx + (detA - a + u)y = 0$ polinomu bir A -indirgenebilir (x, y) köke sahiptir. Bu durumda $y \neq 0$ olacağından $sy = b(2x - 1)$ ve $t(x^2 - x) + bc = 0$ dır. $s = \pm 1$ ve $t = 1$ olduğundan $y = \pm b(2x - 1)$ ve $x^2 - x = 0$ bulunur. R tamlık bölgesi olduğundan $x = 0$ ya da $x = 1$ olmalıdır.

Eğer $x = 0$ ise $y = \pm b$ ve $ad - a \pm 1 = 0$ dır. Tüm durumlar incelenirse A ;

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Eğer $x = 1$ ise $y = \pm b$ ve $ad - d \pm 1 = 0$ dır. Benzer bir inceleme yapılırsa A ;

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ olup istenilen elde edilir. İspatın karşıtı açıkça görülür.}$$

Örnek 5.1.18. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ matrisi göz önüne alınsın. $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

+ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak yazılırsa A hem kuvvetli temiz hem de kuvvetli 0-temizdir. Fakat $s = -7 \notin U(\mathbb{Z})$ olduğundan Sonuç 5.1.17 verilen matrislerin formatında değildir.

Teorem 5.1.19. $\mathbb{Z}(w)$ tek üreteçli ideal bölgesi olsun. $Q_c(\mathbb{Z}(w))$ nin bir R alt halkası ve $\mathbb{Z}(w)$ nin $S \subseteq R \subseteq Q_c(S)$ şartını sağlayan bir S alt halkası için aşağıdakiler

denktir.

(1) $R=Q_c(R)=Q_c(S)$ dir.

(2) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ kuvvetli temizdir.

(3) $M_n(R)$ kuvvetli temiz olacak şekilde $n > 1$ tamsayıları vardır.

(4) $M_2(R)$ kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006a).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Açıkça görülmektedir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıkça görülmektedir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $i \in \mathbb{Z}^+$ tamsayısı için $M_i(R)$ kuvvetli temiz olsun. R kuvvetli temiz ise

eRe de kuvvetli temizdir. Buradan $e_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde seçilirse

$e_i^2 = e_i$ olup ${}_e M_i(R) e_i \cong M_2(R)$ bulunur. O halde $M_2(R)$ kuvvetli temizdir.

(4) $\Rightarrow$ (1) $R \neq Q_c(R)$ olduğu kabul edilsin.

1. *Durum:* $p \notin U(R)$ ve $p \in S - \mathbb{Z}$ olsun. Aynı zamanda $p \in \mathbb{Z}(w)$ olduğundan $p = u + vw$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır. Ayrıca $p \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $v \neq 0$ dir. $q > \max\{(2v)^2|w^2| + 1, 4|u|\}$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Z}$ asalı seçilsin. $A = \begin{bmatrix} p+1 & p \\ q & p \end{bmatrix}$ matrisi hipotezden dolayı kuvvetli temizdir ve Sonuç 5.1.4 den dolayı $4pq + 1, R$ de kareseldir. $\mathbb{Z}(w)$ tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olduğundan $4pq + 1 = x^2$ olacak şekilde x elemanı vardır. Dahası bu denklemin $Q_c(\mathbb{Z}(w))$ çözümüne sahip olması için denklemin $\mathbb{Z}(w)$ de çözümüne sahip olması gereklidir. O halde $m \in \mathbb{Z}(w)$ bu denklemin bir çözümü ise $m^2 = 4pq + 1$ sağlanır ve $m = n + kw$ olacak şekilde $n, k \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Buradan $4pq + 1 = (n + kw)(n + kw) = n^2 + 2nkw + k^2w^2$ elde edilir. Son eşitlikte p yi de yerine yazarsak $4q + 4qvw + 1 = n^2 + 2nkw + k^2w^2$ sonucuna varılır. $\mathbb{Z}(w)$ de eşitlik tanımından

$$4qu + 1 = n^2 + k^2w^2 \quad (5.10)$$

$$2qv = nk \quad (5.11)$$

olur. Kabul gereği q asal olduğundan $qn_1 = n$ ya da $k = qk_1$ olacak şekilde n_1, k_1 vardır. Eğer $n = qn_1$ ise $2qv = qn_1k$ olup $2v = n_1k$ bulunur. Ayrıca $v \neq 0, n_1 \neq 0$

olduğundan $k = \frac{2v}{n_1}$ dir. Bu k, q değerleri (5.10) da yerine yazılacak olursa

$$4qu + 1 = q^2 n_1^2 + \left(\frac{2v}{n_1}\right)^2 w^2 \quad (5.12)$$

elde edilir ve

$$ql = \left(\frac{2v}{n_1}\right)^2 w^2 - 1 \quad (5.13)$$

olacak şekilde l vardır. Ayrıca

$$\left|\left(\frac{2v}{n_1}\right)^2 w^2 - 1\right| \leq \left(\frac{2v}{n_1}\right)^2 |w^2| + 1 \leq (2v)^2 |w^2| + 1 < q \quad (5.14)$$

her zaman vardır. Bu durumda (5.13) ve (5.14) ten $\left(\frac{2v}{n_1}\right)^2 w^2 - 1 = 0$ dir. Böylece (5.12) den $4qu = q^2 n_1^2$ olup $q = \frac{4u}{n_1^2}$ dir. Bu ise q nun seçimiyle çelişir. O halde $qk_1 = k$ olmalıdır. Bu durumda $2v = nk_1$ elde edilir. Ayrıca $k_1 \neq 0, v \neq 0$ olduğundan $n = \frac{2v}{k_1}$ bulunur. Elde ettiğimiz ifadeler (5.10) da yerine yazılırsa $qt = \left(\frac{2v}{k_1}\right)^2 - 1$ olur. Buradan $\left(\frac{2v}{k_1}\right)^2 - 1 \geq 0$ dir. Ayrıca q nun seçiminden dolayı $q > \left(\frac{2v}{k_1}\right)^2 - 1$ olur. Dolayısıyla $\left(\frac{2v}{k_1}\right)^2 - 1 = 0$ bulunur. Böylece $q = \left(\frac{4u}{m_1^2 w^2}\right) = \frac{4|u|}{m_1^2 |w^2|} \leq 4|u|$ sonucu çıkar. Bu durumda da q nun seçiminden dolayı bir çelişki oluşur.

2.Durum: $0 \neq z \in S \cap \mathbb{Z}$ ve $z \notin U(R)$ olsun. İddia $S = \mathbb{Z}$ olmasıdır. Aksi kabul edilirse bir $n + mw \in S$ elemanı için $m \neq 0$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Kabul gereği $R \neq Q_c(R)$ olduğundan, R de sıfırdan farklı tersinir olmayan $z \in S$ vardır. Fakat hipotezden $z \in \mathbb{Z}$ dir. Böylece $0 \neq z(n + mw)$ elemanı R de tersinir değildir ve $0 \neq zm$ olur. Böylece çelişki ortaya çıkar. Sonuç olarak $S = \mathbb{Z}$ olur. Hipotez gereği $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ olur. R den $\frac{1}{p} \notin R$ olacak şekilde bir p asalı alınsın. Daha sonra

$q > p + 2$ olacak şekilde ikinci bir q asalı seçilsin. Hipotez gereği $A = \begin{bmatrix} p+1 & p \\ q & p \end{bmatrix}$ matrisi kuvvetli temiz olur ve $4pq + 1$ R de kareseldir. $R \subseteq \mathbb{Q}$ ve $4pq + 1 \in \mathbb{Z}$ olduğundan bir $m \in \mathbb{Z}$ için $m^2 = 4pq + 1$ vardır ve $m > 1$ dir. Son eşitlikten $pq = \frac{m+1}{2} \frac{m-1}{2}$ olur. Burada $\frac{m+1}{2}$ nin alabileceği değerler incelenirse sonuca ulaşılır.

$$(i) \quad \frac{m+1}{2} = 1 \text{ ise } m = 1$$

$$(ii) \quad \frac{m+1}{2} = p \text{ ise } q = p - 1$$

(iii) $\frac{m+1}{2} = q$ ise $q = p + 1$

(iv) $\frac{m+1}{2} = pq$ ise $pq = 2$ olur.

Fakat dört durumda da çelişki olduğundan kabul yanlış olur. Sonuç olarak $R = Q_c(R)$ bulunur.

Sonuç 5.1.20. R tek türlü çarpanlara ayrılabilen bir bölge olsun.

- (1) Her $n \geq 2$ tamsayısı için $M_n(R_P)$ kuvvetli temiz olacak şekilde R nin P asal ideali yoktur.
- (2) Her $n \geq 2$ tamsayısı için $M_n(\mathbb{Z}_{(p)})$ kuvvetli temiz olacak şekilde p asalı yoktur (Chen vd. 2006a).

Teorem 5.1.21. S bir tamlık bölgesi, $\text{char}(S) \neq 2$ ve R de $Q_c(S[x])$ kesir cisminin $S[x] \subseteq R$ şartını sağlayan bir alt halkası olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) $R = Q_c(R) = Q_c(S[x])$ dir.
- (2) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ kuvvetli temizdir.
- (3) $M_n(R)$ kuvvetli temiz olacak şekilde $n > 1$ tamsayısı mevcuttur.
- (4) $M_2(R)$ kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006a).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sonuç 5.1.20 den açıkça görülür.

(4) $\Rightarrow$ (1) $R \neq Q_c(R)$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{f(x)} \notin R$ olacak şekilde $0 \neq f(x) \in S[x]$ polinomu vardır. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^k f(x)$ polinomunun derecesi tek olsun. (4) ten dolayı $A = \begin{bmatrix} f(x)+1 & f(x) \\ x^k & f(x) \end{bmatrix} \in M_2(R)$ kuvvetli temizdir. O halde Sonuç 5.1.4 den dolayı $4x^k f(x) + 1 = w^2$ şartını sağlayan $w \in R$ mevcuttur. $g(x), h(x) \in S[x]$ polinoları için $w = \frac{g(x)}{h(x)}$ şeklinde olduğu kabul edilsin. Buradan $g(x)^2 = h(x)^2(4x^k f(x) + 1)$ sağlanır. Eşitliğin sol tarafındaki polinomun derecesi çift olmasına rağmen sağdaki polinomun derecesi tek olduğundan bir çelişki ortaya çıkar. Bu durumda kabul yanlış olup $R = Q_c(R)$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç 5.1.22. S bir tamlık bölgesi, $\text{char}(S) \neq 2$ ve P de $S[x]$ halkasının bir asal ideali olsun. Bu durumda her $n \geq 2$ tamsayısı için $M_n(S[x]_P)$ halkası asla kuvvetli temiz olamaz (Chen vd. 2006a).

Tanım 5.1.23. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $a = u^{-1}bu$ olacak şekilde $u \in U(R)$ mevcut ise a ile b benzerdir denir (Chen vd. 2006a).

Uyarı 5.1.24. R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere a ile b benzer alınsın. a nın kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart b nin kuvvetli temiz olmasıdır.

Lemma 5.1.25. R yerel bir tamlık bölgesi, $J(R) = 2R$, $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ve $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. Eğer s^2t , R de karesel ise A kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006a).

İspat: Genelliği bozmaksızın R cisim olmasın. Ayrıca tersinir elemanlar kuvvetli temiz olduğundan A ve $I - A$ matrisleri de tersinir olmasın. Bu durumda $\det A \in J(R)$ ve $1 - \text{tr} A + \det A = \det(I - A) \in J(R)$ olduğu açıktır. Böylece $1 - \text{tr} A \in J(R)$ ve $\text{tr} A \in U(R)$ dir. Sonuçta $t = (\text{tr} A)^2 - 4\det A \in U(R)$ olup $s^2 = t - 4a_{12}a_{21} \in U(R)$ için $s \in U(R)$ dir.

1. *Durum:* $a_{11} \in J(R)$ olsun. Bu durumda $s^2t = u^2$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır. Ayrıca s, t tersinir olduğundan $t^{-1}u$ da tersinirdir. $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan $1 - t^{-1}u \in J(R)$ olacaktır. Hiptez gereğince $J(R) = 2R$ olduğundan $1 - t^{-1}u = 2r_0$ olacak şekilde $r_0 \in R$ vardır. Matris toplamındaki eşkare elemanın girdileri belirlenmek istenirse

$$a = \begin{cases} r_0 & r_0 \notin J(R) \\ 1 - r_0 & r_0 \in J(R) \end{cases}$$

$b = s^{-1}a_{12}(2a - 1)$ ve $c = s^{-1}a_{21}(2a - 1)$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda $a \in U(R)$, $(2a - 1)^2 = t^{-2}u^2$ ve $4bc = 4s^{-2}a_{12}a_{21}(2a - 1)^2 = 4s^{-2}t^{-2}u^2a_{12}a_{21} = t^{-1}(4a_{12}a_{21}) = t^{-1}(t - s^2) = t^{-1}(t - t^{-1}u^2) = 1 - t^{-2}u^2 = 1 - (2a - 1)^2 = 4(a - a^2)$ elde edilir. R cisim olmadığından $J(R) = 2R \neq 0$ ve böylece $2 \neq 0$ dir. Ayrıca R bir tamlık bölgesi olduğundan $4 \neq 0$ ve $bc = a - a^2$ dir. Bu durumda $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$

ve $U = \begin{bmatrix} a_{11} - a & a_{12} - b \\ a_{21} - c & a_{22} + a - 1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde alınsın. Açıkça görülür ki $A = E + U$ için Lemma 5.1.2 den dolayı $E^2 = E$, $EU = UE$ sağlanır. Son olarak $sa \in U(R)$ ve $\det A - a_{11} + 2a_{12}c \in J(R)$ olduğundan $\det U = \det A + sa - a_{11} + 2a_{12}c \in U(R)$ dir. Böylece U tersinir ve A kuvvetli temizdir.

2. *Durum:* $a_{11} \in U(R)$ olsun. $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ve $s = a_{11} - a_{22} \in U(R)$ olduğundan $a_{22} \in J(R)$ elde edilir. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} =: B$ olsun. Ayrıca $a_{22} \in J(R)$ için birinci durum kontrol edilirse B kuvvetli temiz olur. Kuvvetli temiz olmak benzerlik altında korunduğundan A kuvvetli temiz olur.

Sonuç 5.1.26. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ olsun. A nın kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan en az birinin sağlanmasıdır.

- (1) A matrisi tersinirdir.
- (2) $I - A$ matrisi tersinirdir.
- (3) $s^2t \in M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ kareseldir (Chen vd. 2006a).

Lemma 5.1.27. R bir yerel tamlık bölgesi ve $2 \in U(R)$ olsun. Eğer $A \in M_2(R)$ için $t = (1 + k)^2$ olacak şekilde $k \in J(R)$ mevcutsa A kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006a).

İspat: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olsun. Tersinir elemanlar kuvvetli temiz olduğundan A ve $I - A$ tersinir olmasın. Buradan $1 - tr A \in J(R)$ bulunur. $k_1 \in J(R)$ için $tr A = 1 + k_1$ olarak tanımlansın. Ayrıca $t = (1 + k)^2$ olduğundan $u = (1 + k) \in U(R)$ dir. Böylece $tr A + u = 2 + (k_1 + k) \in U(R)$ olur. $a = \frac{1}{2}(1 - su^{-1})$, $b = a_{12}u^{-1}$ ve $c = -a_{21}u^{-1}$ için $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ olsun. Eğer $A = E + U$ ise $U = \begin{bmatrix} a_{11} - a & a_{12} - b \\ a_{21} - c & a_{22} + a - 1 \end{bmatrix}$ dir. $a_{21}(2a - 1) = sc = (a_{11} - a_{22})c$, $a_{21}(2a - 1) = sb = (a_{11} - a_{22})$ ve $a_{21}b = a_{12}c$ olduğundan $EU = UE$ sağlanır. $s^2 = t - 4a_{12}a_{21}$ için $bc = a_{12}a_{21}u^{-2} = \frac{1}{4}(t - s^2)u^{-2} = \frac{1}{4}(tu - 2 - (su^{-1})^2) = \frac{1}{4}(1 - (2a - 1)^2) = a - a^2$ olup $E^2 = E$ bulunur. $\det U = \det A + as - a_{11} + 2a_{12}c$

$$= \det A + \frac{1}{2}(1 - su^{-1})s - a_{11} - 2a_{12}a_{21}u^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \det A + \frac{1}{2}u^{-1}((s - 2a_{11})u - (s^2 + 4a_{12}a_{21})) \\
&= \det A + \frac{1}{2}u^{-1}(-(trA)u - t) \\
&= \det A - \frac{1}{2}(trA + u) \text{ olur. } \det A \in J(R) \text{ ve } trA + u \in U(R) \text{ olduğundan} \\
&\det U \in U(R) \text{ dir. Lemma 5.1.2 gereğince } A \text{ kuvvetli temizdir.}
\end{aligned}$$

Teorem 5.1.28. Her $p \in \mathbb{Z}$ asalı için $M_2(\widehat{\mathbb{Z}_p})$ kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006a).

Şimdi bundan sonraki ispatları kolaylaştırması amacıyla bir kaç temel lemma verilecektir.

Lemma 5.1.29. R bir yerel halka, $w \in J(R)$ ve $u \in U(R) \cap C(R)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) $x^2 - ux - w$ polinomu R de köke sahiptir.
- (2) $x^2 - ux - w$ polinomu $U(R)$ de köke sahiptir.
- (3) $x^2 - ux - w$ polinomu $J(R)$ de köke sahiptir (Chen vd. 2006b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $x^2 - ux - w$ polinomu R de köke sahip olsun. R yerel halka olduğundan her $a \in R$ için iki durum vardır. Eğer $a \in U(R)$ ise ispat biter. İkinci durumda $a \in J(R)$ bir kök ise $a^2 - ua = w$ dır. $(a - u)a = w$ olduğundan diğer bir kök $a - u$ olur. Buradan $a \in J(R)$ ve $u \in U(R)$ olduğundan $a - u \in U(R)$ olup istenilen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x^2 - ux - w$ polinomu $U(R)$ de köke sahip olsun. Bu durumda bir $v \in U(R)$ için $v^2 - uv = w$ sağlanır. Buradan $(v - u)v = w \in J(R)$ olduğundan $v - u \in J(R)$ bulunur.

(3) $\Rightarrow$ (1) Açıkça görülmektedir.

Lemma 5.1.30. R bir yerel halka olsun. $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olması için gerek ve yeter şart her $u, v \in U(R)$ için $u + v \neq 1$ olmasıdır (Chen vd. 2006b).

İspat: $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olsun. $u + v = 1$ olacak şekilde $u, v \in U(R)$ mevcut olduğu kabul edilsin. Bu durumda $f : R/J(R) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ olacak şekilde bir f izomorfizması mevcuttur. Bu izomorfizma altında her $u \in U(R)$ elemanı $f(u) = \bar{1}$ ve her $j \in J(R)$

elemanı $f(j) = \bar{0}$ elemanı ile eşleşir. Buradan $u, v \in U(R)$ için $f(u + v) = f(1) = \bar{1} = f(u) + f(v) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ dır. Sonuçta bir çelişki olduğundan kabul yanlış olup istenilen elde edilmiş olur. Karşıt olarak $u \in U(R)$ elemanı için $u + (1 - u) = 1$ dir. Kabul gereği $1 - u \in J(R)$ olmalıdır. Böylece $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olup ispat biter.

Lemma 5.1.31. R bir yerel halka ve $2 \in U(R)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) Her $w \in J(R)$ için $x^2 - x - w$ polinomu R de köke sahiptir.
- (2) Her $w \in J(R)$ için $x^2 + 2x - w$ polinomu R de köke sahiptir (Chen vd. 2006b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $w \in J(R)$ ve $x_0 \in R$ için $x_0^2 - x_0 = \frac{w}{4}$ olsun. Buradan $-2x_0 \in R$ nin $x^2 + 2x - w$ polinomu için kök olduğu açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $w \in J(R)$ ve $x_1 \in R$ için $x_1^2 + 2x_1 = 4w$ olsun. Bu durumda $\frac{-x_0}{2} \in R$ elemanı da $x^2 - x = w$ denklemi için bir köktür.

Teorem 5.1.32. R bir değişmeli halka olsun. $M_2(R)$ halkası kuvvetli temiz ise her $w \in J(R)$ için $x^2 - x - w$ polinomu R de köke sahiptir (Chen vd. 2006b).

İspat: $A = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $w \in J(R)$ için $k = w(1 + 4w)^{-1}$ olsun. Hipotez gereği $A = E + U$ olacak şekilde $E^2 = E \in M_2(R)$ ve $U \in U(M_2(R))$ mevcuttur. Ayrıca $EU = UE$ sağlanır. $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olarak alınırsa $U = \begin{bmatrix} 1-a & -k-b \\ 1-c & -d \end{bmatrix}$ şeklindedir. U tersinir olduğundan

$$\det U = d(a - 1) + (k + b)(1 - c) \in U(R) \quad (5.15)$$

olur. Ayrıca Lemma 5.1.2 gereği $EU = UE$ için

$$b = -kc \text{ ve } c = a - d \quad (5.16)$$

sağlanır. $k \in J(R)$ olduğundan $b \in J(R)$ ve böylece $(k + b)(1 - c) \in J(R)$ dir. $\det U \in U(R)$ olduğundan

$$d \in U(R) \text{ ve } a - 1 \in U(R) \quad (5.17)$$

dir. Benzer şekilde $E^2 = E$ ise

$$a - a^2 = bc \text{ ve } d - d^2 = bc \quad (5.18)$$

olur. Yukarıdaki sonuçlar birleştirilirse, $b \in J(R)$ olduğundan (5.17) ve (5.18) gereği $a \in J(R)$ ve $1 - d \in J(R)$ elde edilir. Böylece $1 + a - d \in J(R)$ ve $a - d \in U(R)$ dir. (5.18) den $a - a^2 = d - d^2$ buradan da $(a + d - 1)(a - d) = 0$ bulunur. Son eşitlikte $a - d \in U(R)$ olduğundan sıfırdan farklıdır ve böylece $a + d - 1 = 0$ dan $a + d = 1$ elde edilir. Ayrıca (5.16) dan $c = a - d = a - (1 - a) = 2a - 1$ dir. Bu bilgiler ışığında $a - a^2 = bc = -kc^2 = -k(2a - 1)^2 = -k(4a^2 - 4a + 1) = 4k(a - a^2) - k$ gelir. Böylece $(1 - 4k)(a^2 - a) = k$ ve $a^2 - a = (1 - 4k)^{-1}k = w$ dir. Sonuç olarak a değeri $x^2 - x - w$ polinomu için bir kök olur.

Örnek 5.1.33. S bir tamlık bölgesi ve P de $S[x]$ halkasının bir asal ideali olmak üzere $S[x]$ halkasının P idealine göre lokalizasyonu $S[x]_P$ olarak verilsin. $M_2(S[x]_P)$ kuvvetli temiz değildir (Chen vd. 2006b).

İspat: $S[x]_P = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : g(x) \notin P \right\}$ olarak tanımlıdır. $h(x) \in J(S[x]_P)$ ve $der(h(x)) = 2k + 1$ şeklinde bir tek tamsayı olsun. Eğer $M_2(S[x]_P)$ kuvvetli temiz ise Teorem 5.1.32 gereği $h(x)$ için $y^2 - y = h(x)$ olacak şekilde $y \in S[x]_P$ var olacaktır. $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \in S[x]_P$ nin bu denklemini sağladığı kabul edilsin. Bu durumda $\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)^2 - \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right) = h(x)$ ve böylece $f_1(x)(f_1(x) - g_1(x)) = h(x)g_1^2(x)$ elde edilir. Eğer $der(f_1(x)) \geq der(g_1(x))$ ise son eşitlikte sol tarafın derecesi çift ve sağ tarafın derecesi tek olduğundan çelişki oluşur. O halde $der(f_1(x)) < der(g_1(x))$ olmalıdır. Bu durumda $der(f_1(x)) + der(g_1(x)) = der(h(x)) + 2der(g_1(x))$ olur ve $der(f_1(x)) > der(g_1(x))$ bulunur. Sonuçta çelişki meydana gelir ve böylece $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \in S[x]_P$ sağlamaz. Bundan dolayı $M_2(S[x]_P)$ kuvvetli temiz değildir.

Lemma 5.1.34. R değişmeli bir yerel halka ve $E \in M_2(R)$ olsun. $E^2 = E$ olması için gerek ve yeter şart $E = 0$, $E = I_2$ ya da $bc = a - a^2$ şartını sağlayan $a, b, c \in R$ için $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ şeklinde olmasıdır (Chen vd. 2006b).

İspat: $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $E^2 = E$ olsun. Böylece

$$bc = a - a^2$$

$$b(a + d - 1) = 0$$

$$c(a + d - 1) = 0$$

$$bc = d - d^2$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $a - a^2 = d - d^2$ olup $(a - d)(a + d - 1) = 0$ bulunur.

1. *Durum:* $a + d - 1 \in U(R)$ olsun. Tersinir elemanlar sıfır bölen olamayacağından $b = 0$, $c = 0$ ve $a = d$ bulunur. Bu nedenle $a = a^2$ dir. R yerel halka olduğundan yegane eşkare elemanları 0 ve 1 dir. Bu bilgiler ışığında $E = 0$ ya da $E = I$ olarak bulunur.

2. *Durum:* $a + d - 1 \in J(R)$ olsun. Eğer $a - d \in J(R)$ ise $-4bc + 1 = 4(a^2 - a) + 1 = ((a - d) + (a + d - 1))^2 \in J(R)$ olur. Buradan $bc \in U(R)$ dir. Ayrıca $bc(a + d - 1)^2 = 0$ olduğundan $a + d - 1 = 0$ bulunur. Bu durumda $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ şeklindedir ve $bc = a - a^2$ dir. Eğer $a - d \in U(R)$ ise $a + d - 1 = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ olup $bc = a - a^2$ dir.

Uyarı 5.1.35. A veya $A - I$ matrisinin tersinir olması halinde kuvvetli temizliği aşikar olduğundan bu durumları incelemek gereksizdir. Bu yüzden bundan sonraki ispatlarda R nin yerel olması halinde $\det A \in J(R)$ ve $\det(A - I) \in J(R)$ durumlarını incelemek yeterli olacaktır. Bu durumda $\det(A - I) = 1 - \text{tr} A + \det A$ olduğundan $(\text{tr} A) - 1 \in J(R)$ dir. Böylece $\text{tr} A \in U(R)$ olup $t = (\text{tr} A)^2 - 4\det A \in U(R)$ bulunur.

Teorem 5.1.36. R bir değişmeli yerel halka olsun.

- (1) $2 \in U(R)$ olmak üzere $M_2(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart her $w \in J(R)$ için $x^2 - x - w$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır.
- (2) $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olmak üzere $M_2(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart her $w \in J(R)$ için $x^2 - x - w$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır.
- (3) $2 \in J(R)$ ve $R/J(R) \not\cong \mathbb{Z}_2$ olmak üzere $M_2(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart her $w_1, w_2 \in J(R)$ için $x^2 + (1 + w_1)x - w_2$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır (Chen vd. 2006b).

İspat: (1) Teorem 5.1.32 gereği ispatın gerek kısmı açıktır. Karşıt olarak $2 \in U(R)$ olmak üzere her $w \in J(R)$ için $x^2 - x - w$ polinomu R de köke sahip olsun.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olarak verilsin. $(tr A) - 1 \in J(R)$ olduğundan $tr A = 1 + k_0$ olacak şekilde $k_0 \in J(R)$ mevcuttur. Buradan $w = k_0^2 + 2k_0 - 4det A \in J(R)$ olarak alınırsa $t = (tr A)^2 - 4det A = (1 + k_0)^2 - 4det A = 1 + w$ dir. Hipotez ve Lemma 5.1.31 gereği $x^2 + 2x - w$ polinomu R de köke sahiptir. Ayrıca Lemma 5.1.29 dan dolayı bu polinom $J(R)$ de köke sahiptir. Böylece bir $k \in J(R)$ için $k^2 + 2k = w$ dir. $t = 1 + w$ olduğundan $(k + 1)^2 = t$ olur. $u = 1 + k$ için $a = 2^{-1}(1 - su^{-1})$, $b = -a_{12}u^{-1}$ ve $c = -a_{21}u^{-1}$ olarak alınsın. $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ ve $U = A - E$ olsun. $2a - 1 = su^{-1}$ olduğundan

$$a_{21}b = a_{12}c,$$

$$sb = a_{12}(2a - 1),$$

$$sc = a_{21}(2a - 1),$$

$$bc = a_{21}a_{12}u^{-2} = 4^{-1}(t - s^2)u^{-2} = 4^{-1}(tu^{-2} - (su^{-1})^2) = 4^{-1}(1 - (2a - 1)^2) = a - a^2,$$

$$det U = det A + as - a_{11} + 2a_{12}c$$

$$= det A + 2^{-1}(1 - su^{-1})s - a_{11} - 2a_{12}a_{21}u^{-1}$$

$$= det A + 2^{-1}((s - 2a_{11})u - (s^2 + 4a_{12}a_{21}))$$

$$= det A - 2^{-1}(tr A + u)$$

$$= det A - 1 - 2^{-1}(k_0 + k)$$

olur. $det A, k_0, k \in J(R)$ olduğundan $det U \in U(R)$ dir. Böylece A kuvvetli temiz bulunmuş olur.

(2) İspatın gerek kısmı Teorem 5.1.32 den açıkça görülmektedir. Karşıt olarak

$$R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ olmak üzere } 2 \in J(R) \text{ ve } tr A \in U(R) \text{ olduğundan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

için $s = a_{11} - a_{22} = tr A - 2a_{22} \in U(R)$ dir. Böylece $a_{11}a_{22} \in J(R)$ olur. $det A \in J(R)$

ve $a_{11}a_{22} \in J(R)$ olduğundan $a_{12}a_{21} \in J(R)$ elde edilir. $w = t^{-1}a_{12}a_{21} \in J(R)$ olarak

alınsın. Hipotez ve Lemma 5.1.29 gereği $x^2 - x - w$ polinomu $x_0 \in U(R)$ ve $x_1 \in J(R)$

olacak şekilde köke sahiptir. $a \in \{x_0, x_1\}$, $b = s^{-1}a_{12}(2a - 1)$ ve $c = s^{-1}a_{21}(2a - 1)$

olarak alınsın. Buradan $a_{21}b = a_{12}c$ dir. $a^2 - a = w = -t^{-1}a_{12}a_{21}$ olduğundan

$$t(a^2 - a) = -a_{12}a_{21} \text{ dir. Böylece}$$

$$s^2bc = a_{12}a_{21}(2a - 1)^2$$

$$= a_{12}a_{21}(4(a^2 - a) + 1)$$

$$= 4a_{12}a_{21}(a^2 - a) + a_{21}a_{12}$$

$$= (t - s^2)(a^2 - a) + a_{21}a_{12}$$

$$= t(a^2 - a) - s^2(a^2 - a) + a_{21}a_{12} = -s^2(a^2 - a) \text{ olarak bulunur.}$$

$s \in U(R)$ olduğundan $bc = a^2 - a$ dir. $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ ve $U = A - E$ olsun.

Eğer $a_{11} \in J(R)$ ise $a = x_1$ olarak seçilsin. Buradan $\det U = sa + (\det A - a_{11} + 2a_{12}c) \in U(R)$ dir. Eğer $a_{11} \in U(R)$ ise $a = x_0$ olarak alınsın. Buradan $\det U = -a_{11} + (\det A + as + 2a_{12}c) \in U(R)$ dir. Böylece her iki durumda da U tersinirdir ve $E^2 = E$ olduğundan A kuvvetli temizdir.

(3) Hipotez ve Lemma 5.1.30 gereği $1 = u_1 + u_2$ olacak şekilde $u_1, u_2 \in U(R)$ mevcuttur. $M_2(R)$ kuvvetli temiz olsun. $w_1, w_2 \in J(R)$ olmak üzere $a_{11} = u_1$ ve $a_{22} = u_2 + w_1$ olarak alınsın. Buradan $a_{11} + a_{22} = 1 + w_1$ olup $s = a_{11} - a_{22} = 1 + w_1 - 2a_{22} \in U(R)$ bulunur. Böylece $s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22}) \in J(R)$ dir. $a_{21} = -1$ ve $a_{12} = (s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22}))^{-1}s^2(w_2 + a_{11}a_{22})$ olarak seçilsin ve $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olsun. Buradan $\text{tr} A = a_{11} + a_{22} = 1 + w_1 \in U(R)$ dir.

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= (s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22}))^{-1}(a_{11}a_{22}s^2 + 4a_{11}a_{22}(w_2 + a_{11}a_{22}) + s^2(w_2 + a_{11}a_{22}))$$

$$= (s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22}))^{-1}(w_2s^2 + 2s^2a_{11}a_{22} + 4a_{11}a_{22}(w_2 + a_{11}a_{22})) \in J(R) \text{ dir.}$$

Ayrıca $\det(A - I) = \det A - w_1 \in J(R)$ dir. Hipotezden A kuvvetli temiz olduğundan

$A = E + U$ parçalanışı mevcuttur ve $E^2 = E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ için $bc = a - a^2$ dir.

Ayrıca $a - a^2 = bc = s^{-2}a_{12}a_{21}(2a - 1)^2$ olur. Buradan

$$-a_{12}a_{21} = (s^2 + 4a_{12}a_{12})(a - a^2)$$

$$= ((\text{tr} A)^2 - 4\det A)(a^2 - a)$$

$$= t(a^2 - a) \text{ bulunur.}$$

$x_0 = sa - a_{11}$ seçilirse $a = s^{-1}(x_0 + a_{11})$ dir. O halde

$$-a_{12}a_{21} = t(s^{-2}(x_0 + a_{11}) - s^{-1}(x_0 + a_{11})) \text{ olup}$$

$$-s^2a_{12}a_{21} = t((x_0 + a_{11})^2 - s(x_0 + a_{11})) = t(x_0^2 + \text{tr} Ax_0 + a_{11}a_{22}) \text{ elde edilir. Böylece}$$

$$a_{21} = -1 \text{ olduğundan } x_0^2 + (1 + w_1)x_0 = x_0^2 + \text{tr} Ax_0 = -s^2t^{-1}a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = s^2t^{-1}a_{12} - a_{11}a_{22} \text{ bulunur. } t = s^2 + 4a_{21}a_{12} = s^2 + 4a_{12} \text{ olduğundan}$$

$$t^{-1}a_{12} = (s^2 + 4a_{12})^{-1} + (s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22}))^{-1}s^2(w_2 + a_{11}a_{22})$$

$$= ((s^2 - 4a_{12})(s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})))^{-1}s^2(w_2 + a_{11}a_{22})$$

$$= (s^2(s^2 + 4(w_2 + a_{11}a_{22})) - 4s^2(w_2 + a_{11}a_{22}))^{-1}s^2(w_2 + a_{11}a_{22})$$

$$= (s^4)^{-1} s^2 (w_2 + a_{11} a_{22})$$

$= s^{-2} (w_2 + a_{11} a_{22})$ olarak bulunur. Bu bilgiler ışığında

$x_0^2 + (1 + w_1)x_0 = s^2 t^{-1} a_{12} - a_{11} a_{22} = (w_2 + a_{11} a_{22}) - a_{11} a_{22} = w_2$ dir. Sonuç olarak x_0 değeri $x^2 - (1 + w_1)x = w_2$ polinomu için bir kök olur.

Karşıt olarak $2 \in J(R)$ ve $R/J(R) \not\cong \mathbb{Z}_2$ olsun. $tr A = 1 + w_1 \in U(R)$ olarak alınırsa $s = tr A - 2a_{22} \in U(R)$ dir.

1. *Durum:* $a_{12} a_{21} \in U(R)$ olsun. $det A \in J(R)$ ve $a_{12} a_{21} \in U(R)$ olduğundan $a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21} = det A + 2a_{12} a_{21} \in J(R)$ dir. $w_2 = -t^{-1} (s^2 (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) + 4a_{11} a_{12} a_{21} a_{22})$ olarak alınırsa $w_2 \in J(R)$ dir. Hipotez gereği $x^2 + (1 + w_1)x - w_2$ polinomu R de köke sahiptir. Böylece Lemma 5.1.29 gereğince bir $x_0 \in U(R)$ için $x_0^2 + (1 + w_1)x_0 = w_2$ sağlanır. $a = s^{-1} (a_{11} + x_0)$ alınırsa $as - a_{11} = x_0$ dir. $b = s^{-1} a_{12} (2a - 1)$, $c = s^{-1} a_{21} (2a - 1)$ için $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ ve $U = A - E$ olsun. Buradan $a_{12} c = a_{21} b$ dir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} a^2 - a &= s^{-2} (a_{11} + x_0)^2 - s^{-1} (a_{11} + x_0) \\ &= s^{-2} (x_0^2 + 2a_{11} x_0 + a_{11}^2 - (a_{11} - a_{22})(x_0 + a_{11})) \\ &= s^{-2} (x_0^2 + tr A x_0 + a_{11} a_{22}) \\ &= s^{-2} (x_0^2 + (1 + w_1)x_0 + a_{11} a_{22}) \\ &= s^{-2} (w_2 + a_{11} a_{22}) \\ &= s^{-2} t^{-1} (-s^2 (a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) - 4a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} + a_{11} a_{22} (s^2 + 4a_{12} a_{21})) \\ &= -t^{-1} a_{12} a_{21} \text{ olup } t(a^2 - a) = -a_{12} a_{21} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu durumda (2) nin ispatına benzer şekilde $bc = a - a^2$ elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} det U &= det A + as - a_{11} + 2a_{12} c \\ &= det A + x_0 + 2a_{12} c \\ &= x_0 + (det A + 2a_{12} c) \in U(R) \end{aligned}$$

olup U tersinirdir. Böylece A kuvvetli temiz olup $M_2(R)$ kuvvetli temiz bulunur.

2. *Durum:* $a_{12} a_{21} \in J(R)$ olsun. $w = t^{-1} a_{12} a_{21}$ alınırsa $w \in J(R)$ dir. Hipotez gereği $x^2 - x - w$ polinomu R de köke sahiptir. $2 \in J(R)$ olduğundan ispatın kalan kısmı (2) durumu ile aynıdır. Böylece $M_2(R)$ kuvvetli temiz bulunur.

Örnek 5.1.37. $\mathbb{Z}_{(3)}$ halkası değişmeli yerel ve $2 \in U(\mathbb{Z}_{(3)})$ tür. $\mathbb{Z}_{(3)}$ halkası için $J(\mathbb{Z}_{(3)}) = 3\mathbb{Z}_{(3)}$ olur. $-3 \in J(\mathbb{Z}_{(3)})$ alınırsa $x^2 - x - (-3)$ polinomu $\mathbb{Z}_{(3)}$ te köke sahip

olmadığından $M_2(\mathbb{Z}_{(3)})$ halkası kuvvetli temiz değildir.

Örnek 5.1.38. $\mathbb{Z}_8$ halkası değişmeli ve yereldir. Ayrıca $J(\mathbb{Z}_8) = \langle \bar{2} \rangle$ olup $\mathbb{Z}_8/J(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_2$ dir. Her $\bar{a} \in J(\mathbb{Z}_8)$ için $x^2 - x - \bar{a}$ polinomu $\mathbb{Z}_8$ de köke sahip olduğundan $M_2(\mathbb{Z}_8)$ halkası kuvvetli temizdir.

Uyarı 5.1.39. R bir değişmeli yerel halka ve $S = R[[x]]$ olsun. Bu durumda S bir değişmeli yerel halka olup $J(S) = J(R) + xS$ ve $S/J(S) \cong R/J(R)$ dir (Lam 2001).

Teorem 5.1.40. R bir değişmeli yerel halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) $M_2(R)$ halkası kuvvetli temizdir.
- (2) $M_2(R[[x]])$ halkası kuvvetli temizdir.
- (3) $M_2(R[x]/(x^n))$ halkası her $n \geq 1$ tamsayısı için kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006b).

İspat: Teorem 5.1.36 nın ifadesindeki üç durum ayrı ayrı kontrol edilerek benzer şekilde sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.1.41. Her $p \in \mathbb{Z}$ asalı için $M_2(\widehat{\mathbb{Z}_p[[x]])}$ ve $M_2(\widehat{\mathbb{Z}_p[x]/(x^n)})$ halkaları kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006b).

İspat: Teorem 5.1.28 gereğince $M_2(\widehat{\mathbb{Z}_p})$ halkası kuvvetli temizdir. Teorem 5.1.40 gereği ispat açıktır.

Lemma 5.1.42. R değişmeli bir yerel halka ve C_2 iki mertebeli bir grup olsun.

- (1) $2 \in J(R)$ olmak üzere $J(RC_2) = \{r_0 + r_1g : r_0 + r_1 \in J(R)\}$ dir ve $RC_2/J(RC_2) \cong R/J(R)$ olur. Özel olarak RC_2 halkası yereldir.
- (2) $2 \in U(R)$ ise $RC_2 \cong R \oplus R$ dir (Chen vd. 2006b).

İspat: (1) $RC_2 = \{a + bg : a, b \in R\}$ olsun. $a^2 - b^2 \in U(R)$ ise $(a + bg)^{-1} = (a^2 - b^2)^{-1}(a - bg)$ dir. $H = \{a + bg : a + b \in J(R)\}$ alınsın. H nin alt halka olduğu açıktır. Her $x + yg \in RC_2$ ve $a + bg \in H$ için $(a + bg)(x + yg) = ax + ayg + bxg + by \in H$ olduğundan H bir idealdir. Ayrıca $2 \in J(R)$ ve her $a + bg \in H$ için $a, b \in J(R)$

olacağından $(1+a)^2 - b^2 = 1 + (2a + (a-b)(a+b)) \in U(R)$ olup buradan $1 + (a+bg) \in U(R)$ bulunur. Böylece $H \subseteq J(RC_2)$ olur. Son olarak $f : RC_2/J(RC_2) \rightarrow R/J(R)$ olmak üzere $f(a + bg + J(RC_2)) = (a + b) + J(R)$ ile tanımlı homomorfizma bir izomorfizmadır. Böylece $RC_2/J(RC_2) \cong R/J(R)$ dir. RC_2 nin yerel olduğu açıkça görülmektedir.

(2) $2 \in U(R)$ ve $f : RC_2 \rightarrow R \oplus R$ olmak üzere $f(a + bg) = (a + b, a - b)$ şeklinde tanımlı f bir izomorfizma olup $RC_2 \cong R \oplus R$ dir.

Teorem 5.1.43. R değişmeli bir yerel halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) $M_2(R)$ halkası kuvvetli temizdir.
- (2) $M_2(RC_2)$ halkası kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Teorem 5.1.36 da verilen üç durum ayrı ayrı incelenerek benzer şekilde sonuca ulaşılır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $f : M_2(RC_2) \rightarrow M_2(R) \oplus M_2(R)$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a_1 + b_1g & a_2 + b_2g \\ a_3 + b_3g & a_4 + b_4g \end{bmatrix}$ nin görüntüsü $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ olarak tanımlanacak olursa f bir izomorfizmadır. Buradan $M_2(RC_2) \cong M_2(R) \oplus M_2(R)$ olur. Böylece $M_2(R)$ halkası $M_2(R) \oplus M_2(R)$ halkasının homomorfik görüntüsü olduğundan $M_2(R)$ kuvvetli temiz olur.

Sonuç 5.1.44. $M_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p C_2)$ halkası her $p \in \mathbb{Z}$ asalı için kuvvetli temizdir (Chen vd. 2006b).

İspat: $M_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ kuvvetli temiz olduğundan Teorem 5.1.43 gereğince $M_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p C_2)$ kuvvetli temiz olur.

Lemma 5.1.45. R değişmeli bir halka ve $J(R)$ asal olsun. $w \in J(R)$ ve $u \in U(R)$ için aşağıdakiler denktir.

- (1) $x^2 - ux - w$ polinomu R de köke sahiptir.
- (2) $x^2 - ux - w$ polinomu $J(R)$ de köke sahiptir.
- (3) $x^2 - ux - w$ polinomu $U(R)$ de köke sahiptir (Li 2007).

Önerme 5.1.46. R değişmeli bir halka ve $J(R)$ asal ideal olmak üzere $a_{11}, a_{12} \in U(R)$, $w \in J(R)$ için $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ w & 0 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ şeklinde verilsin ve $\det(I - A) \notin U(R)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) A kuvvetli temizdir.

(2) $x^2 - x - \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A}$ polinomu R de köke sahiptir.

(3) $x^2 - (tr A)x + \det A$ polinomu R de köke sahiptir (Li 2007).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} - a & a_{12} - b \\ w - c & -d \end{bmatrix} = E + U$ olacak şekilde $E^2 = E$, $U \in U(M_2(R))$ mevcut olup $EU = UE$ sağlansın. $EU = UE$ olduğundan $bw = a_{12}c$ ve $a_{11}b = (a - d)a_{12}$ dir. Buradan $a_{11}, a_{12} \in U(R)$, $w \in J(R)$ olduğundan $c = \frac{bw}{a_{12}} \in J(R)$ ve $b = \frac{(a - d)a_{12}}{a_{11}}$ dir.

$\det U = (a_{11} - a)(-d) - (a_{12} - b)(w - c) \in U(R)$ ve $(a_{12} - b)(w - c) \in J(R)$ olduğundan $(a_{11} - a)(-d) \in U(R)$ olup $d, a_{11} - a \in U(R)$ dir. $E^2 = E$ olduğundan $a - a^2 = bc$ ve $d - d^2 = bc$ dir. Buradan $(a - d)(1 - a - d) = 0$ olur. $a(1 - a) = bc \in J(R)$ ve $J(R)$ asal olduğundan $a \in J(R)$ veya $1 - a \in J(R)$ dir. $1 - a \in J(R)$ olsa $d \in U(R)$ olduğundan $1 - a - d \in U(R)$ olup $a - d = 0$ dir ve böylece $a = d$ dir. $b = \frac{(a - d)a_{12}}{a_{11}}$

olduğundan $b = 0$ dir. Benzer şekilde $c = \frac{bw}{a_{12}}$ olduğundan $c = 0$ olur. Bu durumda

$a^2 = a$ için $E = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ şeklindedir. Bu durumda $a(1 - a) = 0 \in J(R)$ ve $J(R)$

asal olduğundan $a = 0$ ya da $a = 1$ olmalıdır. Bu ise A nın ya da $A - I$ nın tersinir olmasını gerektireceğinden kabul ile çelişir. O halde $a \in J(R)$ olmalıdır. Bu durumda $a - d \in U(R)$ olacağından $1 - a - d = 0$ dır ve böylece $a = 1 - d$ olur.

Bu olasılık için $a - a^2 = bc$, $sb = a_{12}(2a - 1)$, $sc = a_{21}(2a - 1)$ sağlanır. Sonuçta $a^2 - a = \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A}$ olup istenilen elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) A nın karakteristik polinomu R de köke sahip olsun. $tr A = a_{11} \in U(R)$, $\det A = -a_{12}w \in J(R)$ olduğundan $x^2 - (tr A)x + \det A$ polinomu Lemma 5.1.45 gereğince $\lambda_1 \in U(R)$ ve $\lambda_2 = tr A - \lambda_1 = a_{11} - \lambda_1 \in J(R)$ olacak şekilde köke sahiptir. $AX_1 = \lambda_1 X_1$, $AX_2 = \lambda_2 X_2$ denklemleri çözülürse λ_1 ve λ_2 değerlerine karşılık gelen öz vektörler sırasıyla $X_1 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ -(a_{11} - \lambda_1) \end{bmatrix}$ ve $X_2 = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 \\ w \end{bmatrix}$ şeklindedir. $P =$

$(X_1, X_2) \in M_2(R)$ olsun. Bu durumda $\det P = (a_{11} - \lambda_1)^2 + a_{12}w \in U(R)$ olduğundan P tersinirdir. Buradan $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 \\ 0 & a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix}$ olarak yazılırsa kuvvetli temiz olduğu açıkça görülmektedir. Kuvvetli temiz olmak benzerlik altında korunduğundan A kuvvetli temizdir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x^2 - x - \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A}$ polinomu R de köke sahip olsun. Bu denklemi karakteristik denklem kabul eden matris $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A} & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir. $\det(B - I) = \det B = -\frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A} \in J(R)$ dir. Bu durumda B bütün kabülleri sağlamış olur. B nin karakteristik polinomu R de köke sahip olduğundan (3) $\Rightarrow$ (1) den B kuvvetli temizdir. (1) $\Rightarrow$ (2) ispatı B ye uygulanırsa $y^2 - y - (-\frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A})$ polinomu R de köke sahiptir.

$\frac{\det B}{(tr B)^2 - 4\det B} = \frac{-\frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A}}{1 - 4(\frac{-\det A}{(tr A)^2 - 4\det A})} = -\frac{\det A}{(tr A)^2}$ olduğundan $y^2 - y = -\frac{\det A}{(tr A)^2}$ dir. $x' = (tr A)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa $x'^2 - (tr A)x' + \det A = 0$ olarak bulunur.

Uyarı 5.1.47. (1) Önerme 5.1.46 nın (2) şartı sağlandığında, $x^2 - x - \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A}$ polinomu Lemma 5.1.45 gereğince $x_0 \in J(R)$ köküne sahip olur. Buradan $a = x_0$, $b = \frac{a_{12}}{a_{11}}(2a - 1)$, $c = \frac{a_{21}}{a_{11}}(2a - 1)$, $d = 1 - a$ olarak alınıp $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ ve $U = A - E$ olsun. Bu durumda Lemma 5.1.2 yi sağlar. Dolayısıyla A kuvvetli temiz olarak bulunur.

(2) Önerme 5.1.46 nın ispatı incelendiğinde, “ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ w & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart A nın köşegenleşebilir olmasıdır” sonucu açıkça ortaya çıkmaktadır.

Teorem 5.1.48. R bir değişmeli yerel halka ve $A \in M_2(R)$ olsun. $\det A \in J(R)$ ve $\det(A - I) \in J(R)$ verilsin. Aşağıdakiler denktir.

(1) A kuvvetli temizdir.

(2) $x^2 - x - \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A}$ polinomu R de köke sahiptir.

(3) $x^2 - (tr A)x + \det A$ polinomu R de köke sahiptir.

(4) A matrisi $M_2(R)$ de köşegenleşebilir.

$$(5) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A} & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisi kuvvetli temizdir (Li 2007).}$$

İspat: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\det A \in J(R)$ ve $\det(A - I) \in J(R)$ olsun. Buradan $tr A = 1 + \det A - \det(A - I) \in U(R)$ dir. İddia A matrisinin bazı $b_{12} \in U(R)$ için $\begin{bmatrix} tr A & b_{12} \\ -\frac{\det A}{b_{12}} & 0 \end{bmatrix}$ matrisine benzer olmasıdır. R yerel olduğundan $a_{12} \in U(R)$ ya da $a_{12} \in J(R)$ dir.

1. *Durum:* $a_{12} \in U(R)$ olsun. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Buradan

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tr A & a_{12} \\ -\frac{\det A}{a_{12}} & 0 \end{bmatrix} \text{ olup ispat biter.}$$

2. *Durum:* $a_{12} \in J(R)$ olsun. $a_{21} \in U(R)$ alınsın. A matrisi $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ e benzer olduğundan birinci durumda da görüldüğü gibi ispat biter. Şimdi de $a_{21} \in J(R)$ olması durumu kontrol edilirse; $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in J(R)$ olduğundan $a_{11}a_{22} \in J(R)$ ve $a_{12}a_{22} \in J(R)$ dir. Ayrıca $tr A = a_{11} + a_{22} \in U(R)$ olduğundan $a_{11} \in U(R)$, $a_{22} \in J(R)$ ya da $a_{22} \in U(R)$, $a_{11} \in J(R)$ dir. A benzer $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ olduğundan genelliği bozmaksızın $a_{11} \in U(R)$ ve $a_{12}, a_{21}, a_{22} \in J(R)$ alınsın. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{21} & a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22} \\ a_{21} & a_{21} + a_{22} \end{bmatrix} \text{ dir. Birinci durumun ispatına dönecek}$$

olursa A bazı $b_{12} \in U(R)$ için $\begin{bmatrix} tr A & b_{12} \\ -\frac{\det A}{b_{12}} & 0 \end{bmatrix}$ a benzer olur. $\det A$, $\det(A - I)$, $tr A$ ve kuvvetli temizlik benzerlik altında korunduğundan istenilen elde edilmiş olur.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) Önerme 5.1.46 ve Uyarı 5.1.47 gereğince açıkça görülmektedir.

(5) $\Leftrightarrow$ (2) $\det B = \det(B - I) = -\frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A} \in J(R)$ ve B nin karakteristik polinomu $x^2 - x - \frac{\det A}{(tr A)^2 - 4\det A}$ dir. Buradan istenilen sonuç açıkça görülmektedir.

Uyarı 5.1.49. (1) R değişmeli yerel bir halka olmak üzere $A \in M_2(R)$ ve $A - I \in M_2(R)$ tersinir olmasın. Teorem 5.1.48 den A nın kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart A köşegenleşebilir olmasıdır.

(2) Her zaman kuvvetli temiz bir matris köşegenleşmeyebilir. Örneğin F bir cisim olmak üzere $M_2(F)$ halkasında $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ kuvvetli temiz olmasına rağmen köşegenleşemez.

Teorem 5.1.50. R değişmeli yerel bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) $M_2(R)$ halkası kuvvetli temizdir.
- (2) $\det A \in J(R)$ ve $\det(I - A) \in J(R)$ şartını sağlayan her $A \in M_2(R)$ matrisi için $x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A$ polinomu R de köke sahiptir.
- (3) $\det A \in J(R)$ ve $\det(I - A) \in J(R)$ şartını sağlayan her $A \in M_2(R)$ matrisi için $x^2 - x - \frac{\det A}{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A}$ polinomu R de köke sahiptir.
- (4) $\det A \in J(R)$ ve $\det(I - A) \in J(R)$ şartını sağlayan her $A \in M_2(R)$ matrisi $M_2(R)$ de köşegenleşebilir.
- (5) Her $w \in J(R)$ için $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -w & 0 \end{bmatrix}$ matrisi kuvvetli temizdir.
- (6) Her $w \in J(R)$ için $x^2 - x + w$ polinomu R de köke sahiptir.
- (7) Her $w \in J(R)$ ve $u \in U(R)$ için $x^2 - ux + w$ polinomu R de köke sahiptir (Li 2007).

İspat: $A \in M_2(R)$ olmak üzere A veya $A - I$ nın tersinir olması halinde kuvvetli temiz olması aşıkâr olduğundan A ve $A - I$ nın tersinir olmaması durumunu incelemek yeterli olacaktır. R yerel halka olduğundan $\det A \in J(R)$, $\det(A - I) \in J(R)$ ve $\operatorname{tr} A \in U(R)$ dir. Bu durumda Teorem 5.1.48 den (1), (2), (3), (4), (5) ifadelerinin denkliği açıktır.

(5) $\Leftrightarrow$ (6) $w \in J(R)$ olmak üzere $\det B = \det(B - I) = w$ ve B kuvvetli temiz olsun. B nin karakteristik polinomu $x^2 - x + w$, Teorem 5.1.48 gereğince R de köke sahip olur.

(6) $\Leftrightarrow$ (7) $u \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olmak üzere $y^2 - y + \frac{w}{u^2} = 0$ verilsin. $\frac{w}{u^2} \in J(R)$ olduğundan kabul gereği R de köke sahiptir. $y_0 \in R$ bu polinomun bir kökü olmak üzere $x_0 = uy_0$ dönüşümü yapılırsa $x^2 - x + w$ polinomunun R de köke sahip olduğü açıkça görülür.

(7) $\Leftrightarrow$ (2) $u = \operatorname{tr} A \in U(R)$ ve $w = \det A \in J(R)$ olarak alınır sa ispat açıktır.

Sonuç 5.1.51. R değişmeli yerel bir halka olsun. $M_2(R)$ halkasının kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart her $w \in J(R)$ için $x^2 - x + w$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır (Li 2007).

Sonuç 5.1.20 de $M_2(\mathbb{Z}_{(p)})$ halkası kuvvetli temiz olacak şekilde bir p asalının mevcut olmadığı gösterildi. Şimdi $M_2(\mathbb{Z}_{(p)})$ halkasının hangi şartlar altında kuvvetli temiz olduğu incelenecektir.

Önerme 5.1.52. R bir değişmeli yerel halka olsun. $A \in M_2(R)$ kuvvetli temiz ise aşağıdakilerden biri sağlanır.

(1) A veya $I - A$ tersinirdir.

(2) $\det A \in J(R)$, $\det(I - A) \in J(R)$ ve bazı $u \in U(R)$ için $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = u^2$ dir (Li 2007).

İspat: A kuvvetli temiz olsun. $\det A, \det(A - I) \in J(R)$ olarak alınsın. Bu durumda $\operatorname{tr} A \in U(R)$ olup $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A \in U(R)$ dir. Teorem 5.1.48 gereğince $x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A$ polinomu R de köke sahiptir. $x_0 \in R$ bu polinomun kökü ise $(2x_0)^2 - 2(\operatorname{tr} A)(2x_0) + 4\det A = 0$ dir. Buradan $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = (2x_0 - \operatorname{tr} A)^2 = u^2$ olur. $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A \in U(R)$ olduğundan $u \in U(R)$ olur.

Teorem 5.1.53. Bir R değişmeli yerel halkası için $J(R) = 2R$ ve R tamlık bölgesi ya da $2 \in U(R)$ olsun. $A \in M_2(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

(1) A veya $I - A$ tersinirdir.

(2) $\det A \in J(R)$, $\det(I - A) \in J(R)$ ve bazı $u \in U(R)$ için $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = u^2$ dir (Li 2007).

İspat: $A \in M_2(R)$ olsun. $\det A \in J(R)$, $\det(A - I) \in J(R)$ ve $u \in U(R)$ için $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = u^2$ olarak alınsın.

1. *Durum:* $2 \in U(R)$ ve $x_0 = \frac{\operatorname{tr} A + u}{2}$ olsun. Bu durumda $x_0 \in R$ için $x_0^2 - (\operatorname{tr} A)x_0 + \det A = 0$ sağlanır. Teorem 5.1.48 gereğince A kuvvetli temizdir.

2. *Durum:* $J(R) = 2R$ ve R tamlık bölgesi olsun. $J(R) = 0$ olması durumunda ispat açık olduğundan $J(R) \neq 0$ alınsın. $(\operatorname{tr} A + u)^2 = 2(\operatorname{tr} A)^2 + 2(\operatorname{tr} A)u - 4\det A \in J(R)$ ve R yerel olduğundan $\operatorname{tr} A + u \in J(R)$ dir. Bu durumda $\operatorname{tr} A + u = 2r$ olacak şekilde $r \in R$ mevcuttur. İddiamız r nin, A nın karakteristik polinomunun bir kökü olmasıdır.

Kontrol edilecek olursa $4(r^2 - (trA)r + detA) = (2r - trA)^2 + 4detA - (trA)^2 = u^2 - u^2 = 0$ dır. R tamlık bölgesi ve $4 \neq 0$ olduğundan $r^2 - (trA)r + detA = 0$ bulunur. Teorem 5.1.48 gereğince A kuvvetli temizdir.

Sonuç 5.1.54. Bir $p \in \mathbb{Z}$ asalı için $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ olsun. $A \in M_2(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

(1) A veya $I - A$ tersinirdir.

(2) $detA \in J(R)$, $det(I - A) \in J(R)$ ve bazı $u \in U(R)$ için $(trA)^2 - 4detA = u^2$ dir (Li 2007).

Önerme 5.1.55. $R = \mathbb{Z}_{(2)}$ olsun. $A \in M_2(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

(1) A veya $I - A$ tersinirdir.

(2) $detA \in J(R)$, $det(I - A) \in J(R)$ ve $s, l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere aralarında asal $(2l + 1)^2 = m, s(s + 1) - l(l + 1) = 2n \in \mathbb{Z}$ için $w = \frac{detA}{(trA)^2 - 4detA} = \frac{2n}{m}$ şeklindedir (Li 2007).

İspat: A ve $A - I$ nin tersinir olması durumunda ispat açık olacağından bu durum dışındaki durumları kontrol etmek yeterli olacaktır. Ayrıca $J(R) = 2R$ ve R yereldir. $detA \in J(R)$ ve $det(A - I) \in J(R)$ olsun. Teorem 5.1.48 gereğince A matrisinin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart A nin $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{detA}{(trA)^2 - 4detA} & 0 \end{bmatrix}$ matrisine benziyor olmasıdır. O halde genelliği bozmaksızın $w = \frac{2n}{m} \in J(R)$, m tek tamsayı ve $ebob(n, m) = 1$ için $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ w & 0 \end{bmatrix}$ olarak alınsın. Buradan $u \in U(R)$ için $(trA)^2 - 4detA = 1 + \frac{8n}{m} = \frac{(2l + 1)^2 + 4(s(s + 1) - l(l + 1))}{(2l + 1)^2} = \frac{(2s + 1)^2}{(2l + 1)^2} = u^2$ olup Sonuç 5.1.55 gereğince A kuvvetli temizdir. Karşıt olarak A kuvvetli temiz olsun. Sonuç 5.1.55 gereğince $(trA)^2 - 4detA = u^2$ olacak şekilde $u \in U(R)$ mevcuttur. $u \in U(R)$ ve R yerel olduğundan $u = \frac{2s + 1}{2l + 1}$ ve $ebob(2s + 1, 2l + 1) = 1$ olacak şekilde $s, l \in R$ mevcuttur. Ayrıca $(trA)^2 + 4detA = 1 + 4w = 1 + \frac{8n}{m}$ dir. Böylece $\frac{m + 8n}{m} = \frac{(2s + 1)^2}{(2l + 1)^2}$ dir. Buradan $m = (2l + 1)^2$ ve $8n = (2s + 1)^2 - (2l + 1)^2$ olup $2n = s(s + 1) - l(l + 1)$ bulunur.

5.2 $K_s(R)$ Halkasında Kuvvetli Temizlik

Bu bölümde Tanım 2.1.44 de verilen Morita içeriği yapısında $A = B = N = M = R$ alınması sonucu ortaya çıkan $K_s(R)$ halkasının kuvvetli temiz olması için gerekli şartlar incelenecektir.

Lemma 5.2.1. R bir halka olsun. $f : \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b & y \\ x & a \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlı f homomorfizması $K_s(R)$ üzerinde bir monomorfizmadır (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.2.2. R bir halka ve $s \in C(R)$ olsun.

(1) $(s : J(R)) = \{r \in R : rs \in J(R)\}$ olmak üzere $J(K_s(R)) = \begin{bmatrix} J(R) & (s : J(R)) \\ (s : J(R)) & J(R) \end{bmatrix}$ dir.

(2) R halkası yerel ve $s \in J(R)$ ise $J(K_s(R)) = \begin{bmatrix} J(R) & R \\ R & J(R) \end{bmatrix}$ dir.

(3) R yerel ve $s \in J(R)$ olsun. $\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in K_s(R)$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart $a, b \in R$ nin tersinir olmasıdır (Krylov ve Tuganbaev 2010).

Tanım 5.2.3. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $b = uav$ olacak şekilde $u, v \in U(R)$ mevcut ise a ile b denktir denir (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.2.4. $E \in K_s(R)$ eşkare olsun. E bir köşegensel matrise denk ise E köşegensel bir matrise benzerdir (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.2.5. R bir yerel halka ve $s \in C(R)$ olsun. $A \in K_s(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

(1) A veya $A - I$ tersinirdir.

(2) $a, b \in R$ için A ile $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ benzerdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) durumunun sağlanması halinde sonuç aşıkardır. $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in K_s(R)$ alınsın. R yerel olduğundan kuvvetli temizdir. Bu durumda $a = e_1 + u_1$ ve $b = e_2 + u_2$ olacak şekilde $e_i^2 = e_i, u_i \in U(R)$ var olup $e_i u_i = u_i e_i$ sağlanır. $B = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$

olarak yazılırsa A nın kuvvetli temiz olduğu görülür.

A kuvvetli temiz olsun ve (1) sağlanmasın. Bu durumda $A = E + U$ olacak şekilde $E^2 = E \in K_s(R)$, $U \in U(K_s(R))$ vardır ve $EU = UE$ sağlanır. $E = \begin{bmatrix} c & x \\ y & d \end{bmatrix}$ alınsın.

Eğer $c \in U(R)$ ise $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -yc^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & x \\ y & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{-1} & -c^{-1}x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d - sy c^{-1}x \end{bmatrix}$ olur. Böylece E bir köşegensel matrise denk olur. Eğer $d \in U(R)$ ise Lemma 5.2.1 kullanılıp benzer

şekilde E köşegensel bir matrise denk bulunur. Eğer $c, d \in J(R)$ ise Lemma 5.2.2 gereğince $E \in J(K_s(R))$ olur. $J(K_s(R))$ sıfırdan farklı eşkare içermeyeceğinden $E = 0$ olmalıdır. Bu ise A nın tersinir olmasını gerektirdiğinden çelişki oluşur. Bu du-

rumda $s \in U(R)$ olup $x \in U(R)$ veya $y \in U(R)$ dir. Genelliği bozmaksızın $x \in U(R)$

olsun. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in U(K_s(R))$ olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tersinirdir. Ayrıca

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & x \\ y & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & c \\ d & sy \end{bmatrix}$ ve $sx \in U(R)$ olduğundan E köşegensel bir

matrise denk olur. $y \in U(R)$ olması halinde Lemma 5.2.1 gereğince benzer işlemler

yapılarak E köşegensel olarak bulunur. Böylece Lemma 5.2.4 gereğince $PEP^{-1} =$

$\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $P \in U(K_s(R))$ vardır. R bir yerel halka ve E aşık ar olmayan eşkare olduğundan $f = 0$ ve $g = 1$ ya da $f = 1$ ve $g = 0$ olmalıdır. Kuvvetli

temiz olmak benzerlik altında korunduğundan $PAP^{-1} = PEP^{-1} + PUP^{-1}$ kuvvetli

temizdir. Burada PEP^{-1} ile PUP^{-1} in değişmeli olması kontrol edildiğinde PUP^{-1}

in köşegensel bir matris olduğu görülür. Sonuçta iki köşegensel matrisin toplamı da

köşegensel olacağından PAP^{-1} köşegenseldir.

Lemma 5.2.6. R yerel bir halka ve $s \in C(R) \cap U(R)$ olsun. Ayrıca $A \in K_s(R)$

olmak üzere A ve $A - I$ tersinir olmasın. Bu durumda $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve

$w \in J(R)$ için A ya $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ ile ya da $\begin{bmatrix} w & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$ ile benzerdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. A ya da $I - A$ tersinir olmadığından Lemma 5.2.2 gereği $a \in 1 + J(R)$, $d \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$, $d \in 1 + J(R)$ olacaktır.

1. *Durum:* $a \in 1 + J(R)$ ve $d \in J(R)$ olsun. Bu durumda $P = \begin{bmatrix} 1 & a^{-1}(b-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a^{-1}(b-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}(b-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 + sa^{-1}(b-1)c & 1 - sa^{-1}(b-1)ca^{-1}(b-1) + a^{-1}(b-1)d \\ c & -sca^{-1}(b-1) + d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d_1 \end{bmatrix} \text{ olup } a_1 \in U(R), b_1 \in 1 + J(R) \subseteq U(R) \text{ ve } d_1 \in J(R) \text{ dir. Eğer}
\end{aligned}$$

$b \in 1 + J(R)$ alınırsa

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ bc & bdb^{-1} \end{bmatrix} := B$ olup A ile B benzerdir. Bu durum için $c \in U(R)$ ise istenilen elde edilir. Eğer $c \in J(R)$ ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ bc & bdb^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-s & 1 \\ a+bc-s-bdb^{-1} & s+bdb^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \text{ olup}$$

$u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ dir. Böylece B ile $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ benzer bulunur.

Benzerlik geçişmeli olduğundan A ile $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ benzerdir.

2. *Durum:* $a \in J(R)$ ve $d \in 1 + J(R)$ olması durumunda Lemma 5.2.1 gereğince (1) durumuna benzer ispat yapılarak sonuca ulaşılır.

Tanım 5.2.7. R bir halka ve $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \in R[t]$ olsun. Eğer $r \in R$ için $a_0 + ra_1 + r^2a_2 + \dots + r^na_n = 0$ oluyorsa r ye $f(t)$ nin *sol kökü* (*left root*) denir. Benzer şekilde $s \in R$ için $a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n = 0$ oluyorsa s ye $f(t)$ nin *sağ kökü* (*right root*) denir (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.2.8. Bir R halkası ve $f(t) = t^2 - at + b \in R[t]$ için aşağıdakiler sağlanır.

- (1) $c \in R$ nin, $f(t)$ nin sol kökü olması için gerek ve yeter şart $a - c \in R$ nin, $f(t)$ nin sağ kökü olmasıdır.
- (2) $a \in 1 + J(R)$ olsun. $f(t)$ nin $1 + J(R)$ de sol (sağ) köke sahip olması için gerek ve yeter şart $f(t)$ nin $J(R)$ de sağ (sol) köke sahip olmasıdır (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $f(t)$ nin sol kökü $c \in R$ olsun. Bu durumda $c^2 - ca + b = 0$ dir. $c^2 - ca + b = (c - a)^2 - a(a - c) + b = 0$ olduğundan $c - a \in R$ $f(t)$ nin sağ köküdür.

(2) $c \in 1 + J(R)$ $f(t)$ nin sol kökü ve $a \in 1 + J(R)$ olsun. (1) den $a - c \in J(R)$ sağ kök olur. Karşıt olarak $d \in J(R)$ $f(t)$ nin sağ kökü olsun. Bu durumda (1) den $a - d \in 1 + J(R)$ sol kök olur.

Lemma 5.2.9. R bir yerel halka ve $s \in C(R) \cap J(R)$ olsun. $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olmak üzere $A = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \in K_s(R)$ için aşağıdakiler denktir.

(1) A kuvvetli temizdir.

(2) $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) A kuvvetli temiz, $A \notin U(K_s(R))$ ve $I - A \notin U(K_s(R))$ olduğundan Lemma 5.2.5 gereğince A bir köşegensel matrise benzerdir. Buradan $\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in$

$U(K_s(R))$ ve $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \in K_s(R)$ için $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ dir. Matris eşitliği tanımından

$$ua + sy = a\lambda_1 \quad (5.19)$$

$$va + wy = y\lambda_1 \quad (5.20)$$

$$ux + b = x\lambda_2 \quad (5.21)$$

$$svx + wb = b\lambda_2 \quad (5.22)$$

olur. Lemma 5.2.2 gereğince $a, b \in U(R)$ olacağından (5.19) ve (5.22) eşitliklerinden $\lambda_1 \in U(R)$, $\lambda_2 \in J(R)$ dir. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \notin U(K_s(R))$ olduğundan Lemma 5.2.2 gereği $\lambda_1 \in 1 + J(R)$ dir. Ayrıca (5.20) ve (5.21) eşitliklerinden $x, y \in U(R)$ olarak bulunur. Buradan $\lambda'_1 = y\lambda_1y^{-1} = w + vay^{-1} \in 1 + J(R)$ ve $\lambda'_2 = x\lambda_2x^{-1} = u + bx^{-1} \in J(R)$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} (\lambda'_1)^2 - (vuv^{-1} + w)\lambda'_1 + vuv^{-1}w &= (w + vay^{-1})^2 - (vuv^{-1} + w)(w + vay^{-1}) + vuv^{-1}w \\ &= (vay^{-1})(vay^{-1} + w) - v u a y^{-1} \\ &= (vay^{-1})y\lambda_1y^{-1} - v u a y^{-1} \\ &= va\lambda_1y^{-1} - v u a y^{-1} \\ &= v(ua + sy)y^{-1} - v u a y^{-1} \\ &= sv \text{ olur. Ayrıca} \end{aligned}$$

$$(\lambda'_2)^2 - (u + w)\lambda'_2 + wu = (u + bx^{-1})^2 - (u + w)(u + bx^{-1}) + wu$$

$$\begin{aligned}
&= bx^{-1}(bx^{-1} + u) - wbx^{-1} \\
&= (bx^{-1})x\lambda_2x^{-1} - wbx^{-1} \\
&= b\lambda_2x^{-1} - wbx^{-1} \\
&= (svx + wb)x^{-1} - wbx^{-1} = sv \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Buradan $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomunun sağ kökü $\lambda'_1 \in 1 + J(R)$ ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomunun sağ kökü $\lambda'_2 \in J(R)$ olduğu açıkça görülmektedir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomunun sağ kökü $\lambda'_1 \in 1 + J(R)$ ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomunun sağ kökü $\lambda'_2 \in J(R)$ olsun. Lemma 5.2.2 gereği $P = \begin{bmatrix} v^{-1}(\lambda_1 - w) & 1 \\ 1 & \lambda_2 - u \end{bmatrix} \in U(K_s(R))$ olup $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ dir. Buradan Lemma 5.2.5 gereğince A kuvvetli temizdir.

Teorem 5.2.10. R bir yerel halka ve $s \in C(R) \cap U(R)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.
- (2) Her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir.
- (3) Her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomu $J(R)$ de sol köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir.
- (4) Her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \in K_s(R)$ kuvvetli temizdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Açıkça görülmektedir.

(1) $\Rightarrow$ (4) Açıkça görülmektedir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Lemma 5.2.8 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (4) $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olsun. $vuv^{-1} \in 1 + J(R)$ olduğundan (2) gereğince $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir. Buradan

Lemma 5.2.9 gereğince $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ kuvvetli temizdir.

(4) $\Rightarrow$ (2) $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$, $w \in J(R)$ olmak üzere $A = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} vuv^{-1} & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ alınsın. $vuv^{-1} \in 1 + J(R)$ olduğundan hipotez gereği A ve B kuvvetli temizdir. Lemma 5.2.9 gereğince $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + (vuv^{-1} - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir. (4) $\Rightarrow$ (1) $A \in K(R)$ olmak üzere A ve $A - I$ tersinir olmasın. Lemma 5.2.6 gereğince $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olmak üzere A ile $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ benzerdir ya da A ile $\begin{bmatrix} w & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$ benzerdir. Hipotezden ilk durum aşikar olduğundan $A = \begin{bmatrix} w & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$ olması durumu incelensin. Lemma 5.2.1 gereği $B = \begin{bmatrix} u & v \\ 1 & w \end{bmatrix}$ nın kuvvetli temiz olduğunu kontrol etmek yeterlidir. Lemma 5.2.6 nın ispatından $u' \in 1 + J(R)$, $v' \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olmak üzere $\begin{bmatrix} u & v \\ 1 & w \end{bmatrix}$ ile $\begin{bmatrix} u' & 1 \\ v' & w' \end{bmatrix} := C$ benzerdir. Hipotezden C kuvvetli temizdir. Kuvvetli temiz olmak benzerlik altında korunduğundan B kuvvetli temizdir.

Uyarı 5.2.11. R değişmeli bir halka ve $s \in R$ olsun. $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in K_s(R)$ olmak üzere $\det_s(A) = ab - sxy$ ve $\text{tr} A = a + b$ ile tanımlıdır. Ayrıca $rA = \begin{bmatrix} ra & rx \\ ry & rb \end{bmatrix} \in K_s(R)$ dir.

Lemma 5.2.12. R bir değişmeli halka ve $s \in R$ olmak üzere $A, B \in K_s(R)$ için aşağıdakiler sağlanır.

$$(1) \det_s(AB) = \det_s(A)\det_s(B)$$

(2) A nın $K_s(R)$ de tersinir olması için gerek ve yeter şart $\det_s(A) \in R$ de tersinir olmasıdır. Ayrıca $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$ tersinir ise $A^{-1} = \det_s(A)^{-1} \begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$ şeklindedir.

(3) A ve B benzer ise $\det_s(A) = \det_s(B)$ ve $\text{tr} A = \text{tr} B$ dir (Tang ve Zhou 2012).

Uyarı 5.2.13. $A \in K_s(R)$ olsun. $A \in U(K_s(R))$ veya $A - I \in U(K_s(R))$ olması halinde A nın kuvvetli temiz olduğu açıktır. Eğer A bu durumlardan birini sağlıyorsa A ya *aşıkarak kuvvetli temiz* denir.

Teorem 5.2.14. R değişmeli yerel bir halka ve $s \in R$ olsun. $A \in K_s(R)$ için aşağıdakiler denktir.

(1) A aşıkarak olmayan kuvvetli temizdir.

(2) $ab \in J(R)$ ve $a + b \in 1 + J(R)$ olmak üzere A ile $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ benzerdir.

(3) $\det_s(A) \in J(R)$, $\text{tr}A \in 1 + J(R)$ ve A köşegensel bir matrise benzerdir.

(4) $\det_s(A) \in J(R)$, $\text{tr}A \in 1 + J(R)$ ve $t^2 - (\text{tr}A)t + \det_s(A)$ polinomu R de köke sahiptir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) Lemma 5.2.5 ve Lemma 5.2.12 gereğince açıkça görölmektedir.

(3) $\Rightarrow$ (4) A ile $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ benzer olsun. Lemma 5.2.12 gereğince $\det_s(A) = ab \in J(R)$ ve $\text{tr}A = a + b \in 1 + J(R)$ dir. Bu durumda a ve b $t^2 - (\text{tr}A)t + \det_s(A)$ polinomunun kökleri olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) $t^2 - (\text{tr}A)t + \det_s(A)$ polinomunun kökü $a \in R$ olsun. Buradan $b = \text{tr}A - a \in R$ polinomun diğerk köküdür. Böylece $\det_s(A) = ab$ ve $\text{tr}A = a + b$ dir. $\text{tr}A \in 1 + J(R) \subseteq U(R)$ ve $\det_s(A) \in J(R)$ olduğundan $a \in U(R)$, $b \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$, $b \in U(R)$ dir. Genelliği bozmaksızın $a \in U(R)$ ve $b \in J(R)$ olsun. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ alınsın. $a_{11} + a_{22} = \text{tr}A \in U(R)$ olduğundan $a_{11} \in U(R)$ ya da $a_{22} \in U(R)$ dir. $A' = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ olsun. Buradan $\text{tr}A = \text{tr}A'$ ve $\det_s(A) = \det_s(A')$ olup Lemma 5.2.1 gereğince A nın kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart A' nün kuvvetli temiz olmasıdır. Genelliği bozmaksızın $a \in U(R)$ olsun. $a + b = a_{11} + a_{22} = \text{tr}A \in U(R)$ olduğundan $a - a_{22} = a_{11} - b \in U(R)$ dir. $P = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}(b - a_{11})^{-1} \\ a_{21}(a - a_{22})^{-1} & 1 \end{bmatrix}$ olarak seçilsin. $\det_s(P) = \frac{-aa_{11} + (a - a_{22})b + \det_s(A)}{(a - a_{22})(b - a_{11})} \in U(R)$ olup P tersinirdir. Buradan

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{\det_s(P)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{(b-a_{11})} \\ \frac{a_{21}}{(a-a_{22})} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{(b-a_{11})} \\ \frac{a_{21}}{(a-a_{22})} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det_s(P)} \begin{bmatrix} * & \frac{a_{12}(b^2-(trA)b+\det_s(A))}{(b-a_{11})^2} \\ \frac{a_{21}(a^2-(trA)a+\det_s(A))}{(a-a_{22})^2} & * \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Hipotezden A ve $A - I$ nin tersinir olmadığı görülmektedir. Lemma 5.2.5 gereğince A kuvvetli temiz olup (1) elde edilir.

Sonuç 5.2.15. R değişmeli yerel bir halka ve $s \in U(R)$ olsun. $K_s(R)$ halkasının kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart her $w \in J(R)$ için $t^2 - t - w$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır (Tang ve Zhou 2012).

İspat: $w \in J(R)$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s^{-1}w & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $\det_s(A) = \det_s(A - I) = -w \in J(R)$ dir. Böylece A aşıkâr olmayan kuvvetli temizdir. Teorem 5.2.14 gereğince $t^2 - (trA)t + \det_s(A)$ polinomu R de köke sahiptir. A için $trA = 1$ ve $\det_s(A) = -w$ olduğundan ispat biter. Karşıt olarak her $w \in J(R)$ için $t^2 - t - w$ polinomu R de köke sahip olsun. $A \in K_s(R)$ için $\det_s(A) \in J(R)$ ve $trA \in 1 + J(R)$ alınsın. Hipotez gereği $r^2 - r - \frac{\det_s(A)}{(trA)^2} = 0$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $((trA)r)^2 - (trA)((trA)r) + \det_s(A) = 0$ olup $t = (trA)r \in R$, $t^2 - (trA)t + \det_s(A) = 0$ için bir çözümdür. Teorem 5.2.14 gereğince A kuvvetli temizdir.

Lemma 5.2.16. R bir değişmeli yerel halka olsun. $K_s(R) \cong K_1(R)$ olması için gerek ve yeter şart $s \in U(R)$ olmasıdır (Krylov 2008).

Uyarı 5.2.17. $s = 1 \in R$ için $K_1(R) = M_2(R)$ dir. Lemma 5.2.16 gereğince $s \in U(R)$ olması durumunda $K_s(R) \cong K_1(R) = M_2(R)$ olup Bölüm 5.1 de R değişmeli yerel halkası için $M_2(R)$ halkasının kuvvetli temiz olması ile denk olan şartlar incelenmiştir. Bu nedenle $K_s(R)$ nin kuvvetli temiz olması incelenirken sadece $s \in J(R)$ durumu göz önünde bulundurulacaktır.

Lemma 5.2.18. R değişmeli bir halka ve $s \in J(R)$ olsun. $a \in U(R)$, $d \in J(R)$, $I = (sc)R + dR$ ve $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n \in U(R)$,

$b_n \in I^n$, $d_n \in I$ olmak üzere A ile benzer olacak şekilde $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c & d_n \end{bmatrix}$ vardır (Tang ve Zhou 2012).

İspat: n üzerinden tümevarım uygulanırsa, $n = 0$ için $I^0 = R$ olup $a_0 = a$, $b_0 = b$ ve $d_0 = d$ için sonuç açıktır. $n \geq 1$ için $a_{n-1} \in U(R)$, $b_{n-1} \in I^{n-1}$, $d_{n-1} \in I$ ve A ile benzer olacak şekilde $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c & d_n \end{bmatrix}$ var olsun. Bu durumda $P = \begin{bmatrix} 1 & -a_{n-1}^{-1}b_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c & d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{n-1} + \frac{scb_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}(d_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}) \\ c & d_{n-1} - \frac{scb_{n-1}}{a_{n-1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c & d_n \end{bmatrix} \text{ ve } a_n \in U(R), b_n \in I^n, d_n \in I \text{ olup istenilen elde edilir.} \end{aligned}$$

Teorem 5.2.19. R değişmeli yerel bir halka, $s \in J(R)$ ve $n \geq 0$ tamsayısı için aşağıdakiler denktir.

- (1) $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.
- (2) Her $w_0 \in U(R)$ ve $w_1 \in J(R)$ için $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomu R de köke sahiptir.
- (3) Her $w_0 \in J(R)^n$ ve $w_1 \in J(R)$ için $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomu R de köke sahiptir.
- (4) Her $w_0 \in J(R)^n$ ve $w_1 \in J(R)$ için $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ w_0 & w_1 \end{bmatrix}$ kuvvetli temizdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomunun köke sahip olması için gerek ve yeter şart $(\frac{t}{u})^2 - (1 + \frac{w}{u})(\frac{t}{u}) + (\frac{w}{u} - s\frac{v}{u^2})$ polinomunun köke sahip olmasıdır. Teorem 5.2.10 un (3) şartı gereğince her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomunun $J(R)$ de köke sahip olması için gerek ve yeter şart her $w_0, w_1 \in J(R)$ için $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomunun $J(R)$ de köke sahip olmasıdır. Lemma 5.2.8 (2) den denklik açıkça görülmektedir.

(1) $\Rightarrow$ (4) Açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (3) $w_1 \in J(R)$, $w_0 \in J(R)^n$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ w_0 & w_1 \end{bmatrix}$ olsun. Buradan $\det_s(A) = w_1 - sw_0 \in J(R)$ ve $\det_s(A - I) = -sw_0 \in J(R)$ dir. Böylece A aşikar olmayan kuvvetli temizdir. Teorem 5.2.14 gereğince $t^2 - (tr A)t + \det_s(A)$ polinomu R de köke sahiptir. $tr A = 1 + w_1$ ve $\det_s(A) = w_1 - sw_0$ olduğundan istenilen elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$ olsun. A ve $A - I$ tersinir olmasın. Bu durumda $\det_s(A) = ab - sxy \in J(R)$ ve $\det_s(A - I) \in J(R)$ olduğundan $tr A = a + b = 1 - \det_s(A - I) - \det_s(A) \in 1 + J(R)$ dir. Böylece $a \in U(R)$, $b \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$, $b \in U(R)$ dir. Lemma 5.2.1 gereği $a \in U(R)$ ve $b \in J(R)$ alınsın. Buradan $(sy)R + bR \subseteq J(R)$ dir. Lemma 5.2.18 gereğince $u \in U(R)$, $w \in J(R)^n$ ve $d \in J(R)$ için A ile benzer olan $B = \begin{bmatrix} u & v \\ y & d \end{bmatrix}$ mevcuttur. Hipotezden $r^2 - (1 + \frac{d}{u})r + (\frac{d}{u} - s(\frac{wy}{u^2})) = 0$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $(ur)^2 - (tr B)(ur) - \det_s(B) = 0$ olup $t^2 - (tr B)t + \det_s(B) = 0$ dir. $tr B \in 1 + J(R)$ ve $\det_s(B) \in J(R)$ olduğundan Teorem 5.2.14 gereğince B kuvvetli temizdir. Kuvvetli temiz olmak benzerlik altında korunduğundan A da kuvvetli temiz olur.

Sonuç 5.2.20. Bir R değişmeli yerel halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) $K_1(R)$ kuvvetli temizdir.
- (2) Her $s \in R$ için $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.
- (3) Her $s \in J(R)$ için $K_s(R)$ kuvvetli temizdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Eğer $s \in U(R)$ ise $K_1(R) \cong K_s(R)$ olduğundan ispat biter. $s \in J(R)$ olsun. Sonuç 5.2.15 ve hipotezden her $w_0 \in R$ ve $w_1 \in J(R)$ için $t^2 - t + \frac{w_1 - sw_0}{(1 + w_1)^2}$ polinomu R de köke sahiptir. Buradan $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomu R de köke sahiptir. Böylece Teorem 5.2.19 gereğince $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıkça görülmektedir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $w \in J(R)$ olsun. $s = w$, $w_0 = -1$ ve $w_1 = 0$ olarak seçilsin. Teorem 5.2.19 gereğince $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomu R de köke sahiptir. Verilen ifadeler polinomda yazılırsa $t^2 - t - w$ polinomu R de köke sahip olur. Böylece Sonuç 5.2.15 gereğince $K_1(R)$ kuvvetli temizdir.

Sonuç 5.2.21. R değişmeli yerel bir halka ve $J(R) = sR$ olsun. $K_1(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart $K_s(R)$ nin kuvvetli temiz olmasıdır (Tang ve Zhou 2012).

İspat: $K_s(R)$ kuvvetli temiz ve $s' \in J(R)$ olsun. Buradan $s' = sr$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. $w_0 \in R$ ve $w_1 \in J(R)$ alınsın. $K_s(R)$ kuvvetli temiz olduğundan Teorem 5.2.19 gereğince $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - srw_0) = t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - s'w_0)$ polinomu R de köke sahiptir. Bu durumda $K_{s'}(R)$ polinomu kuvvetli temizdir. Her $s' \in J(R)$ için $K_{s'}(R)$ kuvvetli temiz olduğundan Sonuç 5.2.20 gereği $K_1(R)$ kuvvetli temizdir. İspatın diğer yönü Sonuç 5.2.20 gereği açıktır.

Sonuç 5.2.22. R değişmeli yerel bir halka, $\text{char}(R) = 2$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $s \in J(R)$ için aşağıdakiler denktir.

(1) $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.

(2) Her $w \in J(R)^n$ için $t^2 - t - sw$ polinomu R de köke sahiptir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Teorem 5.2.19 dan açıkça görülmektedir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $w_0 \in J(R)^n$ ve $w_1 \in J(R)$ olsun. Hipotezden $a^2 - a - s\frac{w_0}{(1 + w_1)^2} = 0$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. $b = (1 + w_1)a$ alınsın. Buradan $b^2 - (1 + w_1)b - sw_0 = 0$ dir. Ayrıca $c = b + 1 \in R$ için $c^2 - (1 + w_1)c + (w_1 - sw_0) = 0$ dir. Teorem 5.2.19 gereğince $K_s(R)$ kuvvetli temiz olur.

Teorem 5.2.23. R değişmeli yerel bir halka ve $s \in R$ üstel sıfır eleman olsun. Bu durumda $K_s(R)$ kuvvetli temizdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: Her $k \geq 0$ tamsayısı için $W_k = \{s^k t^2 - ut + w \in R[t] : u \in 1 + J(R), w \in J(R)\}$ olarak tanımlansın. Her $f(t) = s^k t^2 - ut + w \in W_k$ için

$$\begin{aligned} f(u^{-1}w + st) &= s^k(u^{-1}w + st)^2 - u(u^{-1}w + st) + w \\ &= s(s^{k+1}t^2 - (u - 2s^k u^{-1}w)t + s^{k-1}u^{-2}w^2) \\ &= sg(t) \text{ olup } g(t) = s^{k+1}t^2 - (u - 2s^k u^{-1}w)t + s^{k-1}u^{-2}w^2 \in W_{k+1} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$s^n = 0$ olsun. Ayrıca her $0 \leq k < n$ tamsayısı için $f_{k-1}(v_k + st) = sf_k(t)$ şartını sağlayan $f_k(t) \in W_k$ ve $v_k \in R$ vardır. Böylece $a_n \in R$ için $f_n(a_n) \in R$ olup

$$a_{n-1} \in R \text{ için } f_{n-1}(a_{n-1}) \in sR$$

$$a_{n-2} \in R \text{ için } f_{n-2}(a_{n-2}) \in s^2R$$

$$a_{n-3} \in R \text{ için } f_{n-3}(a_{n-3}) \in s^3R$$

$$\vdots$$

$$a_1 \in R \text{ için } f_1(a_1) \in s^{n-1}R$$

$a_0 \in R$ için $f_0(a_0) \in s^n R = 0$ ve $f_0 \in W_0 = \{t^2 - ut + w \in R[t] : u \in 1 + J(R), w \in J(R)\}$ dir. $f_0(t) \in W_0$ polinomu R de bir köke sahip olduğundan Teorem 5.2.19 gereğince $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.

Örnek 5.2.24. M sıfırdan farklı bir $\mathbb{Z}_{(p)}$ ikili modül, $R = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes M$ olsun. Bu durumda $s \in R$ olmak üzere $K_s(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart $s \in N(R)$ olmasıdır (Tang ve Zhou 2012).

6. SONUÇ

Bu çalışmada Nicholson tarafından (1977) yılında tanımlanmış olan temiz eleman ve halka kavramı incelenmiştir. Temiz halkaların bilindik halkalarla olan ilişkisi araştırılmış ve çokca temiz halka ve temiz eleman örnekleri sunulmuştur. Her temiz halkanın bir değişim halkası olduğu ispat edilmiş ve karşının her zaman doğru olmayacağı örnek verilerek açıklanmıştır. Ardından değişim halkalarının hangi durumlarda temiz halka olduğunu gösteren teoremler verilmiştir.

Kuvvetli temiz eleman ve halka kavramı incelenmiş, örneklerle kavramın anlaşılabilirliği sağlanmış ve bu kavram endomorfizma halkalarına genelleştirilmiştir. Ardından tek türlü temiz eleman ve halka tanımı verilip örneklerle konu pekiştirilmiştir. Ayrıca yerel halka tanımı için tek türlü temiz halkalar yardımıyla alternatif bir tanım üretilmiştir.

Son bölümde kuvvetli temiz halka tanımı matris halkaları üzerinde çalışılmış ve bir matris halkasının hangi durumlarda kuvvetli temiz olduğu araştırılmıştır. Ayrıca Morita içeriğinin halkasının özel bir hali olan $K_s(R)$ matris halkası tanımlanmış ve kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer-Verlag, 376 p., Berlin.
- Armendariz, E.P., Fisher, J.W. and Snider, R.L. 1978. On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules. Comm. Algebra, Vol. (6); 659-672.
- Armendariz, E.P., Fisher, J.W. and Snider, R.L. 2002. On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules. Acta. Math. Hungarica, Vol. (94); 53-58.
- Azumaya, G. 1954. Strongly π -regular rings. J. Fac. Sci. Hokkaido U., Vol. (13); 34-39.
- Camillo, V.P. and Yu, H.P. 1994. Exchange rings, units and idempotents. Comm. Algebra, Vol. (22); 4737-4749.
- Camillo, V.P. and Khurana, D. 2001. A characterization of unit-regular rings. Comm. Algebra, Vol. (29); 2293-2295.
- Chen, H. 1999. Exchange rings with artinian primitive factors. Algebras and Representation Theory 2; 201-207.
- Chen, H. 2013. On 2×2 Strongly Clean Matrices. Bull. Korean Math. Soc., 50; 125-134.
- Chen, J., Yang, X. and Zhou, Y. 2006a. On strongly clean matrix and triangular matrix rings. Comm. Algebra, Vol.(34); 3659-3674.
- Chen, J., Yang, X. and Zhou, Y. 2006b. When is 2×2 matrix ring over a commutative local ring strongly clean? J. Algebra, 301 ; 280-293.
- Crawley, P. and Jonsson, B. 1964. Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems. Pacific J. Math., Vol. (14); 797-855.
- Dischinger, M.F. 1976. Sur les anneaux fortement π -reguliers. C.R. Acad. Sc. Paris, Vol. (283); 571-573.
- Fisher, J.W. and Snider, R.L. 1976. Rings generated by their units. J. Algebra, Vol. (42); 363-368.
- Goodearl, K.R. 1979. Von Neumann Regular Rings. Krieger Pub Co, 369 s.,

Pitman.

- Han, J. and Nicholson, W.K. 2001. Extensions of clean rings. *Comm. Algebra*, Vol. (29); 2589-2595.
- Kaplansky, I. 1958. Projective Modules. *Annals of Mathematics*, Vol. (68)2; 372-377.
- Krylov, P.A. 2008. Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra Logic*, Vol. (47)4; 258-262.
- Krylov, P.A. and Tuganbaev, A. A. 2010. Modules over formal matrix rings. *J. Math. Sci.*, Vol. (171)2; 248-295.
- Lam, T.Y. 1998. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Verlag, 557 p., Berlin.
- Lam, T.Y. 2001. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 441 p., Berlin.
- Li, Y. 2007. Strongly clean matrix ring over local rings. *J. Algebra*, Vol. (1)312; 397-404.
- Monk, G.S. 1972. A characterizations of exchange rings. *Proc. Amer.Math. Soc.*, Vol. (35); 344-353.
- Nicholson, W.K. 1977. Lifting idempotents and exchange rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. (229); 269-278.
- Nicholson, W.K. and Varadarajan, K. 1998. Countable linear transformation are clean. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol.(126); 61-64.
- Nicholson, W.K. 1999. Strongly clean rings and Fitting's lemma. *Comm. Algebra*, Vol. (27); 3583-3592.
- Nicholson, W.K. and Zhou, Y. 2004. Rings which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit. *Glasgow Math. J.*, Vol.(46); 227-236.
- Stock, J. 1986. On rings whose projective modules have the exchange property. *J. Algebra*, Vol. (103); 437-453.
- Tang, G. and Zhou, Y. 2012. Strongly cleanness of generalized matrix rings over a local ring. *Linear Algebra Appl.*, Vol.(437); 2546-2559.
- Tang, G. Li, C. and Zhou, Y. 2014. Study of Morita contexts *Comm. Algebra.*, Vol.(42); 1668-1681.
- Tuganbaev, A. 2002. Semiregular, Weakly Regular and π -Regular Rings.

- J. Math. Sci., Vol. (3); 1509-1588.
- Wang, Z. and Chen, J. 2004. On two open problems about strongly clean rings. Bull. Austral. Math. Soc., Vol.(70)2; 279-282.
- Warfield Jr., R.B. 1972. Exchange rings and decompositions of modules. Math. Ann., Vol. (199); 31-36.
- Yu, H. P. 1995. On quasi-duo rings. Glasgow Math. J., Vol. (37); 21-31.
- Yu, H. P. 1995. Stable range one for exchange rings. J. Pure App. Algebra, Vol. (98); 105-109.
- Yu, H.P. 1997. On the structure of exchange rings. Comm. Algebra, Vol. (25); 661-670.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mete Burak ÇALCI
Doğum Yeri : İstanbul
Doğum Tarihi : 23.01.1989
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Ekrem Cevahir Ç. P. Lisesi, İstanbul (2006)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Eylül 2012-Temmuz 2014)