

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KÜBİK DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ ÜSTEL DAĞILIM**

**Gülseren ERSAN**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2020**

**Her hakkı saklıdır**

## TEZ ONAYI

Gülseren ERSAN tarafından hazırlanan “Kübik Dönüştürülmüş Üstel Dağılım” adlı tez çalışması 06/02/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Mehmet YILMAZ  
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



### Jüri Üyeleri:

**Başkan:** Prof. Dr. Mehmet YILMAZ  
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



**Üye** : Dr. Öğretim Üyesi Sibel AÇIK KEMALOĞLU  
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



**Üye** : Dr. Öğretim Üyesi Nihan POTAS  
Hacı Bayram Veli Üniversitesi İ.İ.B.F. Sağlık Yönetimi Bölümü



**Yukarıdaki sonucu onaylarım.**

**Prof. Dr. Özlem YILDIRIM**  
Enstitü Müdürü

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

06.02.2020

Gülseren ERSAN



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### KÜBİK DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ ÜSTEL DAĞILIM

Gülseren ERSAN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

Biyoistatistik, güvenilirlik yaşam analizi, bir parçanın bozuluncaya kadar olan ömrü, bebek ölüm hızı vb. gibi olayların çoğunun modellenmesinde yaşam dağılımları (lifetime distribution) kullanılır. Bu modellenmelerde kullanılan belli yaşam dağılımları vardır. (Üstel dağılım, weibull dağılımı, gamma dağılımı vs.) Ancak bu dağılımlar, uygulamada verileri modellemede her zaman yeterli olmaz. Bu nedenle dağılımları zaman zaman simetrikleştirmek, zaman zaman da basık veya çarpık hale getirmek için rank dönüşümlerinden yararlanılır. (rank transmuted map(RTM)) Bu çalışmada üstel dağılımın kübik rank dönüşümü incelenecektir. Simetrik kübik dönüştürülmüş üstel dağılım ve simetrik olmayan kübik dönüştürülmüş üstel dağılımın bazı istatistiki ve güvenilirlik fonksiyonları incelenip, ek olarak gerçek veri setini bu dağılımlarla modelleyerek diğer dağılımlarla karşılaştırması yapılacaktır.

**Şubat 2020, 36 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Kübik rank dönüşümü, üstel dağılım, yaşam analizi, yaşam dağılımları

## ABSTRACT

Master Thesis

### CUBIC RANK TRANSMUTED EXPONENTIAL DISTRIBUTION

Gülseren ERSAN

Ankara University  
Graduate School of Nature and Applied Sciences  
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

Bio-statistic, reliability life analysis, life of a until it breaks down, infant mortality rate etc... Life distributions are used in the modeling of such events. There are certain distributions of life used in these models. However, these distributions are not always sufficient in modeling details in practice. The rank transforms are used to make these transformation distributions symmetrical and sometimes to make them flat or crooked. (Rank Transmuted Map(RTM)) This section will examine the cubic rank transformation of the exponential distribution. The symmetric cubic transformed exponential distributions and the asymmetric cubic transformed exponential distributions are evaluated for detailed statistical and reliability purposes. In addition, they are modeled with the real data set and compared other distributions.

**February 2020, 36 page**

**Key Words:** Cubic rank transmuted, exponential distributions, survival analysis, lifetime distributions

## **ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR**

Tez çalışmam boyunca her türlü desteği sağlayarak gelişimime yardımcı olan danışman hocam Ankara Üniversitesi İstatistik Bölüm Başkanı sayın Prof. Dr. Mehmet YILMAZ' a, süreç boyunca en büyük destekçim olan aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Gülseren ERSAN  
Ankara, Ocak 2020



## İÇİNDEKİLER

### TEZ ONAY SAYFASI

|                                                                 |      |
|-----------------------------------------------------------------|------|
| ETİK .....                                                      | i    |
| ÖZET.....                                                       | ii   |
| ABSTRACT .....                                                  | iii  |
| ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....                                          | iv   |
| SİMGELER DİZİNİ .....                                           | vi   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                           | vii  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                         | viii |
| 1. GİRİŞ .....                                                  | 1    |
| 2. TEMEL İSTATİSTİKİ KAVRAMLAR.....                             | 5    |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....                                      | 9    |
| 3.1 Parametre Tahmini.....                                      | 17   |
| 3.1.1 Momentler yöntemi.....                                    | 18   |
| 3.1.2 En çok olabilirlik tahmin edicisi .....                   | 20   |
| 4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....                                    | 22   |
| 5. UYGULAMA.....                                                | 29   |
| 6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....                                       | 31   |
| KAYNAKLAR .....                                                 | 33   |
| EK 1 DELTA( $\delta$ ) PARAMETRESİ İÇİN ARALIK İNCELEMESİ ..... | 34   |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                   | 36   |

## SİMGELER DİZİNİ

|                                   |                                                |
|-----------------------------------|------------------------------------------------|
| $x$                               | Rasgele değişkenin aldığı değer                |
| $X$                               | Rasgele değişken                               |
| $E(X)$                            | Beklenen değer                                 |
| $E(X^2)$                          | Merkezi moment                                 |
| $Var(X)$                          | Varyans                                        |
| $f(x)$                            | Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu                 |
| $F(x)$                            | Dağılım fonksiyonu                             |
| $G_{R_{12}}$                      | Dönüştürülmüş dağılıma ait dağılım fonksiyonu  |
| $g_{r_{12}}$                      | Dönüştürülmüş dağılıma ait olasılık fonksiyonu |
| $M_X(t)$                          | Moment üreten fonksiyon                        |
| $R(t)$                            | Güvenirlilik fonksiyonu                        |
| $h(t)$                            | Bozulma oranı fonksiyonu                       |
| $\mu_3$                           | Çarpıklık                                      |
| $\mu_4$                           | Basıklık                                       |
| $L(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n)$ | Olabilirlik fonksiyonu                         |

### **Kısaltmalar**

|         |                                     |
|---------|-------------------------------------|
| MOM     | Momentler tahmin edicisi            |
| EÇOT    | En çok olabilirlik tahmin edicisi   |
| KDUD    | Kübik dönüştürülmüş üstel dağılım   |
| D-USTEL | Karesel dönüştürülmüş üstel dağılım |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 3.1 Farklı parametre değerlerine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri ( $\beta = 1$ ).....          | 10 |
| Şekil 3.2 Farklı parametre değerlerine ilişkin dağılım fonksiyonu grafikleri ( $\beta = 1$ ).....                    | 11 |
| Şekil 3.3 KDUD ve üstel dağılıma ait beklenen değer grafiği( $\beta = 1$ ) .....                                     | 12 |
| Şekil 3.4 KDUD ve üstel dağılıma ait varyans grafiği( $\beta = 1$ ).....                                             | 13 |
| Şekil 3.5 Delta parametresine göre Üstel dağılım ve KDUD' a ait çarpıklık grafiği ( $\beta = 1$ ) .....              | 14 |
| Şekil 3.6 Delta parametresine göre Üstel dağılım ve KDUD' a ait basıklık grafiği .....                               | 15 |
| Şekil 3.7 Farklı parametre değerleri için bozulma oranı grafikleri ( $\beta = 1$ ) .....                             | 16 |
| Şekil 3.8 Farklı parametre değerleri için güvenilirlik fonksiyonu grafikleri .....                                   | 17 |
| Şekil 5.1 50 cihazın yaşam sürelerine ait veri setinin, KDUD, D-Ustel dağılım ve üstel dağılıma göre grafikleri..... | 30 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Çizelge 4.1 $\beta=0,1$ iken farklı $\delta$ parametrelerine göre momentler tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri .....                                                                                     | 23 |
| Çizelge 4.2 $\beta=0,2$ iken farklı $\delta$ parametrelerine göre momentler tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri .....                                                                                     | 24 |
| Çizelge 4.3 $\beta=0,3$ iken farklı $\delta$ parametrelerine göre momentler tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri .....                                                                                     | 25 |
| Çizelge 4.4 $\beta=0,1$ iken farklı $\delta$ parametrelerine göre en çok olabilirlik tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri.....                                                                             | 26 |
| Çizelge 4.5 $\beta=0,2$ iken farklı $\delta$ parametrelerine göre en çok olabilirlik tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri.....                                                                             | 27 |
| Çizelge 4.6 $\beta=0,3$ iken farklı $\delta$ parametrelerine göre en çok olabilirlik tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri.....                                                                             | 28 |
| Çizelge 5.1 100 banka müşterisinin işlem görmeden önceki bekleme süreleri veri setinin farklı dağılımlara ait en çok olabilirlik tahmin edicisi parametre tahminleri, AIC ve Kolmogorov-Simirnov test istatistiği değerleri..... | 29 |
| Çizelge 5.2 50 cihazın yaşam süreleri veri setinin, KDUD, D-USTEL VE USTEL dağılıma ait en çok olabilirlik tahmin edicisi parametre tahmin değerleri, AIC ve K-S test istatistiği değerleri .....                                | 30 |

## 1. GİRİŞ

Yaşam dağılımlarında kullanılmak üzere verilerin dağılıma uygunluğu, ilgilenilen dağılımların çarpık veya basık olma durumlarına göre elde var olan yaşam dağılımlarına rank dönüşümlerinin uygulanması söz konusudur. Bu dönüşümler ilk başta karesel(quadratic) olarak uygulanmaya başlanmıştır. Karesel rank dönüşümü formu;

$$G(x) = (1 + \lambda) F(x) - \lambda F^2(x), \quad |\lambda| < 1 \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Burada  $G(x)$  karesel dönüşüme ait dağılımın fonksiyonu,  $F(x)$  karesel dönüşüme tabi olan dağılımın birikim fonksiyonu ve  $\lambda$  ise tanımlı olduğu aralıkta seçilecek herhangi bir sabit değeri ifade etmektedir.

Bu form altında yaşam dağılımlarına karesel dönüşüm uygulayarak dönüştürülmüş dağılım elde edilen pek çok çalışma mevcuttur.

Bu çalışmalara yaşam dağılımlarında modellemenin daha iyi yapılması, verilerin daha iyi bir yüzde ile açıklanması için Shaw ve Buckley (2009) tarafından başlanmıştır.

Shaw ve Buckley (2009) tarafından önerilen rank dönüşüm formu genel olarak;

$$G_{R_{12}}(u) = u + u(1 - u) \lambda \quad (1.2)$$

olarak belirlenmiştir.

Burada  $u$  olarak tanımlanan değişken dönüşümü yapılacak olan dağılımın birikimli fonksiyonunu ve  $\lambda$  olarak tanımlanan parametre ise genel olarak  $[-1,1]$  aralığından seçilmiş keyfi bir sayıdır. Bu dönüşüm altında elde ettiğimiz yeni fonksiyon, karesel (quadratic) rank dönüşümüne tabii tutulmuş dağılımın dağılım fonksiyonudur. Bu

fonksiyonun ( $G_{R_{12}}$ ) türevini almak veya rank dönüşümünü yapılan dağılımın olasılık fonksiyonunu bu dönüşüme tabii tutmak, karesel dönüştürülmüş dağılımın olasılık fonksiyonunu verecektir. Bu bilgiler ışığında karesel olarak dönüştürülmüş dağılımın diğer istatistiksel ve güvenilirlik fonksiyonları da bulunur.

Daha sonraki yıllarda Shaw ve Buckley (2009) bu çalışmaları baz alınarak tıp, mühendislik, finans gibi uygulama alanlarında yaşam dağılımlarının daha iyi modellenebilmesi için karesel dönüştürülmüş Rayleigh dağılımı elde edilmiştir. (Merovci, 2013)

Sonrasında Merovci (2013) tarafından Karesel Dönüştürülmüş Pareto Dağılımı ve yine Merovci (2014) tarafından Karesel Dönüştürülmüş Lindley Dağılımı ortaya atılmış ve yaşam analizlerinde önemli verilerin açıklanmasında kullanılmıştır.

Log- lojistik modeller ve dönüştürülmüş Log-lojistik modeller için Markov vd. (2018) yürütmüş olduğu çalışmalarda da yine karesel dönüşüm uygulanmıştır.

Ancak karesel dönüşüm uygulanan bu dağılımların da eksik kaldığı, ilgilenilen veri setini iyi açıklayamadığı durumlar ortaya çıkmıştır. Bunun için Shaw ve Buckley (2009) tarafından karesel dönüşüm formu genellenerek kübik dönüşüm formu ortaya atılmış ve bu dönüşümün ilgili veri setlerini açıklamada daha başarılı olduğu görülmüştür.

$$G_{R_{12}}(u)= u + u(1 - u)P(u) \quad (1.3)$$

Burada  $u$  yine dönüşümü yapılacak dağılıma ait dağılım fonksiyonunu temsil ederken,  $P(u)$  olarak tanımlanan birinci dereceden bir fonksiyonu temsil etmektedir. Bu şekilde elde edilmiş bir dönüşüm, kübik rank dönüşümü olarak tanımlanmaktadır. Yine karesel rank dönüşümünde olduğunu gibi, yeni dağılıma ait diğer istatistiksel ve güvenilirlik fonksiyonları bulunur.

Al-Kadim ve Mohammed (2017) nin çalışmaları baz alınarak kübik rank dönüşümü ile ilgili günümüze kadar bir çok çalışma yapılmıştır.

$$G_{R_{12}}(x) = (1 + \lambda_1)G(x) + (\lambda_2 - \lambda_1)G^2(x) - \lambda_2 G^3(x)$$

Burada  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  değişim parametreleri olup;  $\lambda_1 \in [-1,1]$  ,  $\lambda_2 \in [-1,1]$  ve  $-2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$  dir.  $G(x)$  dönüşüm uygulanacak dağılıma ait dağılım fonksiyonu olup,  $G_{R_{12}}$  dönüştürülmüş dağılıma ait dağılım fonksiyonunu ifade eder.

Sonrasında Al-Kadim ve Mohammed (2017) nin diğer bir çalışmalarında ise elde ettikleri kübik rank dönüşüm formunu, Weibull dağılımına uygulayarak, elde ettikleri dönüştürülmüş dağılımın istatistiki ve güvenilirlik fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Granzotto vd. (2017) yaptıkları çalışmada ise Al-Kadim ve Mohammed (2017) de yapılan çalışmaya benzer olarak, iki en çok bilinen yaşam dağılımları olan Weibull ve Log-logistic dağılım için, kübik rank dönüşümü gerçekleştirmişlerdir. Her iki dağılım için çıkarımlarda bulunarak Monte-Carlo simülasyonu ile yaptıkları uygulama çalışmalarında, kübik rank dönüşümünün kullanışlı olduğu sonucuna varmışlardır.

Rahman vd. (2018) ortaya koydukları çalışmada, kübik rank dönüşümünü kullanarak olasılık dağılımları için genel bir dönüşüm formu vermişlerdir. İki dönüşüm parametrelili bu formu olasılık dağılımlarına uygulamışlardır. Kübik dönüşüme tabi tutulan dağılımların, kübik dönüşüm uygulanmayan dağılımlara göre, istatistiki olarak verileri açıklama oranlarının daha iyi olduğunu gösterilmiştir.

Sonrasında Rahman vd. (2018), yaptıkları diğer bir çalışma ile Pareto dağılımını kübik dağılıma tabi tutmuşlardır. Bu çalışmada yeni oluşturulan kübik dönüştürülmüş Pareto dağılımına ait en çok olabilirlik tahmin edicisi değerlerini bulmuş, güvenilirlik analizini yapmışlardır.

Bu çalışmada kullanılacak olan dönüşüm tekniği; Shaw ve Buckley (2009)' un yaptığı çalışmada ortaya koydukları teknikle aynı olup, (1.3) de verilen eşitlik kullanılarak elde edilecektir.

Yine bu çalışmada, sabit hata oranı sebebiyle kuvvet eğrisinin düz kısmının modellenmesinde yaygın olarak kullanılan üstel dağılımı kübik dönüşüme tabi tutulacaktır.

Dönüştürülmüş dağılımın, dönüşüm parametresi için aralık incelemesi yapıldıktan sonra, kübik dönüşüme tabi tutulan üstel dağılım için temel istatistik fonksiyonları ve güvenilirlik fonksiyonları elde edilecek, bu fonksiyonlara ait grafikler üstel ( $\beta = 1$ ) ile karşılaştırılarak yorumlanacaktır. Dönüştürülmüş dağılımın parametreleri için parametre tahminleri yapılarak ve bu tahminlere ilişkin simülasyon çalışmalarıyla en başarılı tahmin edici bulunacaktır.

Son olarak uygulama çalışmaları gerçek veri setleri üzerinde Kübik Dönüştürülmüş Üstel Dağılım test edilecektir.

## 2. TEMEL İSTATİSTİKİ KAVRAMLAR

Bu bölümde dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu, basıklık ve çarpıklık değerleri, bozulma oranı fonksiyonu ve güvenilirlik fonksiyonu gibi karakteristiklerin tanımları yapıp genel formüllerine yer verilecektir.

Dağılım fonksiyonu;

$$F_X : R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F_X(x) = P\{w: X(w) \leq x\}$$

şeklinde tanımlanan ve birikimli olasılık fonksiyon değerlerini veren karakteristiklerdir.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (2.1)$$

sürekli dağılımlar için dağılım fonksiyonunu hesaplamada kullanılan matematiksel ifadedir. Eğer ilgilenilen dağılım kesikli ise integral yerine toplam ( $\sum f(u)$ ) ile aynı işlemlere devam edilir.

Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu ise değer kümesindeki ( $X = x$ ) değerinin ilgili olasılık dağılımında aldığı değer olarak tanımlanabilir.

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & , x \in D_X \\ 0 & , dy. \end{cases} \quad (2.2)$$

olarak ifade edilir.

Aynı zamanda olasılık (yoğunluk) fonksiyonundan, dağılım fonksiyonuna veya dağılım fonksiyonundan da olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna geçiş yapılabilir. Dağılım fonksiyonunun ( $F_X$ ) türevi, olasılık(yoğunluk) fonksiyonunu verirken,

olasılık(yoğunluk) fonksiyonunun integral alınmış hali de dağılım fonksiyonunu verir. O halde;

$$\frac{dF(X)}{dx} = f_X(x)$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

eşitliklerini yazmak doğrudur.

$X$  rasgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu;

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum e^{tx} P(x), & X \text{ kesikli} \\ \int e^{tx} f(x), & X \text{ sürekli} \end{cases} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Ardışık olarak türevlenebildiği için moment üreten fonksiyon adını almıştır.

Birinci moment türevinde,  $t = 0$  hali her zaman beklenti değerini ( $E(X)$ ) ifade eder. Böylece dağılıma ait beklenen değer ve varyans gibi karakteristikler buradan hesaplanabilir.

Basıklık ve çarpıklık katsayıları bir veri kümesinin dağılışının şekli hakkında bilgi sahibi olmaya yardımcı olan katsayılardır.

Çarpıklık katsayısı; veri kümesinin ortalamadan sapmasına bağlı olarak dağılım sağa veya sola çarpık olma durumu hakkında bilgi verir. Bu sayı sıfırsa simetriklik söz konusudur. Sıfırdan büyükse sağa çarpık, sıfırdan küçük ise sola çarpıklık durumu söz konusudur.

Çarpıklık katsayısı;

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \frac{\mu^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)\mu + 2\mu^3}{\sigma^3}\end{aligned}\quad (2.4)$$

olarak verilir.

Basıklık katsayısı; veri kümesinin histogram grafiği çizildiği zaman bu grafiğin daha sivri veya daha basık olup olmadığı hakkında bilgi verir. Eğer bir normallik söz konusu ise basıklık katsayısı sıfır, basıklık söz konusu ise bu katsayı negatif, sivrilik söz konusu ise de bu katsayı pozitif değerler alır.

Basıklık katsayısı;

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \frac{\mu^4}{\sigma^4} \\ &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)\mu + 6E(X^2)\mu^2 - 3\mu^4}{\sigma^4}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Hayatı kolaylaştırmak için kullanılan teknolojik aletler, mutfak gereçleri, makineleşme adına kullanılan en ufak bir aletten insanların hayatta kalma sürelerine kadar her şey yıpranmaya, bozulmaya ve ölmeye programlıdır. Tüm bu durumlar neticesinde kullanılan makinenin veya herhangi bir aletin ne zaman bozulacağını, yıpranacağını bilmek önlem almak bakımından önemlidir. Bu sebeplerden dolayı bozulma oranı fonksiyonu ve güvenilirlik fonksiyonu olarak tanımlanan fonksiyonlar güvenilirlik analizinde sıklıkla kullanılır.

Güvenirlik fonksiyonu; herhangi bir parçanın herhangi bir  $t$  süresinden daha fazla yaşaması olasılığını (çalışmasını) veren fonksiyondur. Buna göre;

$$R(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(x)dx$$

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir.

Bozulma oranı fonksiyonu;  $t$  zamanına kadar çalışmakta olan bir parçanın  $(t, t+\Delta t]$  zaman aralığında bozulması veya hata vermesinin olasılığını veren bir fonksiyon olup;

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, Shaw ve Buckley (2009) ortaya attıkları (1.3) eşitliğinde verilen rank dönüşüm formu kullanılarak önceki bölümde söz edilen karakteristikler elde edilecektir. Aynı zamanda rank dönüşümü uygulanmış dağılım için parametre tahmininde bulunulacaktır.

Shaw ve Buckley (2009) rank dönüşüm formuna göre;

$P(u = \delta(u - \frac{1}{2}))$  olarak seçildiğinde ve  $u$  yerine üstel dağılım fonksiyonu alınırsa  $P$  fonksiyonu  $P(x) = \delta(1 - e^{-\beta x} - \frac{1}{2})$  şeklinde olacaktır. Ayrıca  $P(x)$  in bu özel seçimine ilişkin  $\delta$  parametresi için aralık incelemesi de yapılmıştır.

O halde önerilen dağılıma ait dağılım fonksiyonu;

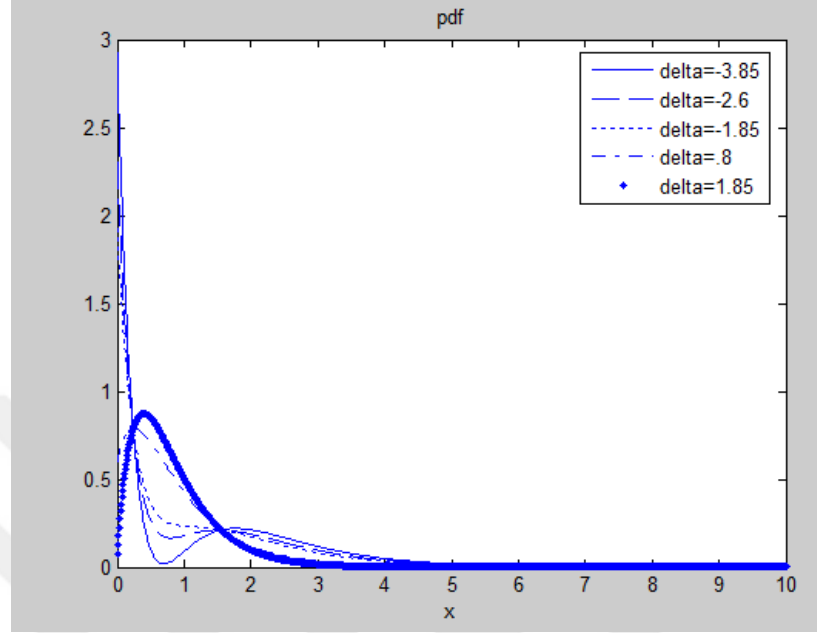
$$\begin{aligned} G_{R_{12}} &= (1 - e^{-\beta x}) + (1 - e^{-\beta x})(e^{-\beta x})(\frac{1}{2}e^{-\beta x})\delta \\ &= (1 - e^{-\beta x}) + (\frac{1}{2}e^{-\beta x} - \frac{3}{2}e^{-2\beta x} + e^{-3\beta x})\delta, \quad -4 < \delta < 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

olarak bulunur. Kübik dönüşüm uygulanılan üstel dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için, dağılım fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} g_{r_{12}} &= \frac{dG_{R_{12}}(X)}{dx} \\ &= (\beta e^{-\beta x}) + (\frac{\beta}{2}e^{-\beta x} + 3\beta e^{-2\beta x} - 3\beta e^{-3\beta x})\delta, \quad -4 < \delta < 2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir.

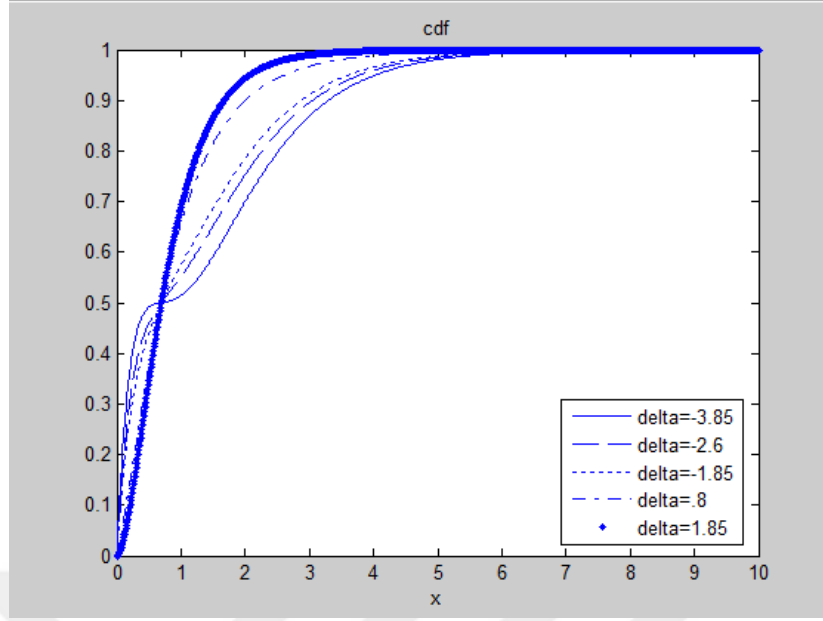
Aşağıdaki Şekil (3.1)'de farklı  $\delta$  parametresi değerlerinde olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafikleri verilmiştir. ( $\beta = 1$ )



Şekil 3.1 Farklı parametre değerlerine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri ( $\beta = 1$ )

Şekildeki grafik (Şekil 3.1) incelendiğinde,  $\delta$  parametresinin negatif değerlerinde hızlı bir azalıştan sonra sıçramalar söz konusu iken, pozitif değerlerinde artış eğiliminden sonra azalma eğilimi söz konusudur.

Şekil 3.2'de farklı  $\delta$  parametresi değerlerinde dağılım fonksiyonunun grafikleri verilmiştir. ( $\beta = 1$ )



Şekil 3.2 Farklı parametre değerlerine ilişkin dağılım fonksiyonu grafikleri ( $\beta = 1$ )

Dağılıma ait k-ıncı dereceden momentini bulmak için moment çıkaran fonksiyondan yararlanılacaktır. k-ıncı moment için, bu fonksiyonun k-ıncı dereceden türevi almalıdır. Moment çıkaran fonksiyon tanımı gereği;

$$M_X(t) = \int e^{tx} f(x) dx$$

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} [(\beta e^{-\beta x}) + (\frac{\beta}{2} e^{-\beta x} + 3\beta e^{-2\beta x} - 3\beta e^{-3\beta x}) \delta] dx$$

$$= \frac{12\beta - 12t + \delta t}{12\beta} \quad (3.3)$$

$$12\beta - 12t + \delta t > 0, \quad \frac{12\beta}{12-\delta} > t \text{ için mevcut}$$

olarak bulunur.

Buradan ilgili dağılıma ait beklenen değer ve varyans karakteristikleri bulunabilir.

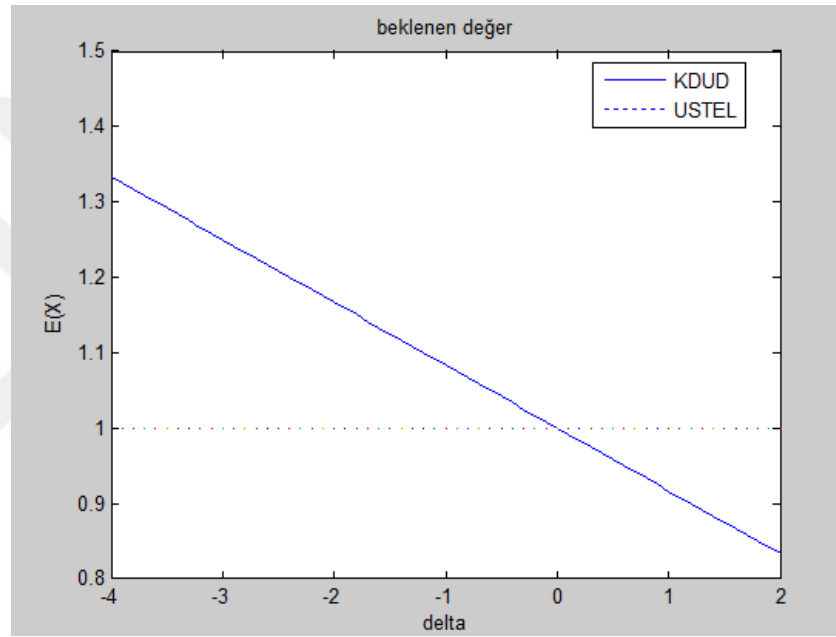
Beklenen değer aynı zamanda moment çıkaran fonksiyonun birinci türevinde  $t = 0$  değerine eşittir. Beklenen değer tanımıyla kolaylıkla elde edilebilir.

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \left[ (\beta e^{-\beta x}) + \left( \frac{\beta}{2} e^{-\beta x} + 3\beta e^{-2\beta x} - 3\beta e^{-3\beta x} \right) \delta \right] dx$$

$$= \frac{12-\delta}{12\beta} \quad (3.4)$$

Şekil (3.3)'de üstel dağılım ve KDUD'un delta parametresine göre beklenen değer grafiği incelenmiştir.



Şekil 3.3 KDUD ve üstel dağılıma ait beklenen değer grafiği( $\beta = 1$ )

Yukarıdaki grafik incelendiğinde; ( Şekil 3.3)  $\delta$  parametresinin negatif değerlerinde KDUD'un beklentisi Üstel Dağılıma göre daha yüksek iken,  $\delta$  parametresinin pozitif değerlerinde Üstel Dağılım, KDUD'a göre daha yüksek beklentiye sahiptir.

Aynı şekilde moment çıkaran fonksiyonun ikinci türevinde  $t = 0$  değeri, ikinci momenti verecektir.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 [(\beta e^{-\beta x}) + (\frac{\beta}{2} e^{-\beta x} + 3\beta e^{-2\beta x} - 3\beta e^{-3\beta x}) \delta] dx$$

$$= \frac{144 - 34\delta}{72\beta^2} \quad (3.5)$$

Buradan varyans;

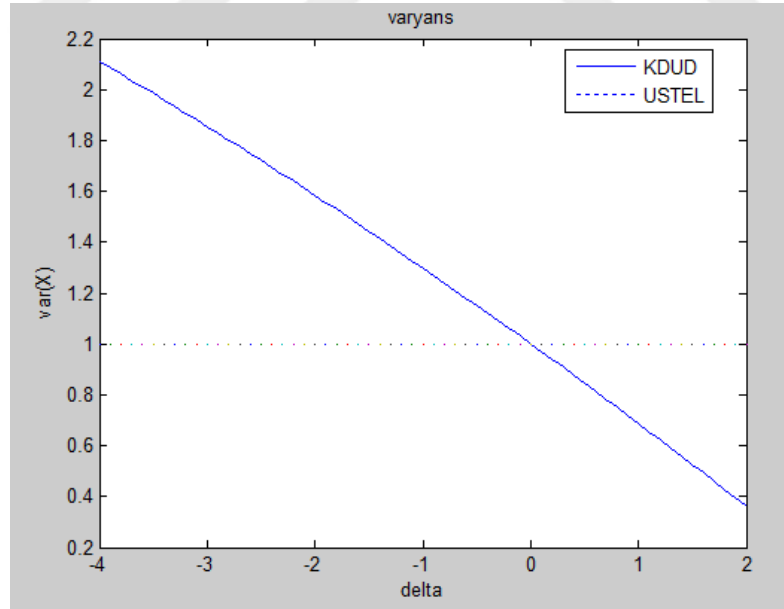
$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\text{Var}(X) = \left(\frac{144 - 34\delta}{72\beta^2}\right) - \left(\frac{12 - \delta}{12\beta}\right)^2$$

$$= \frac{144 - 44\delta - \delta^2}{144\beta^2} \quad (3.6)$$

olarak bulunur

(Şekil 3.4)'de üstel dağılım ve KDUD' ın  $\delta$  parametresine göre varyans grafiği incelenmiştir.



Şekil 3.4 KDUD ve üstel dağılıma ait varyans grafiği ( $\beta = 1$ )

Şekil 3.4 incelendiğinde  $\delta$  parametresinin negatif değerlerinde Üstel Dağılım, KDUD'a göre daha düşük bir varyansa sahipken, pozitif değerlerinde tam tersi durum söz konusudur.

Dağılımın şekli hakkında bilgi sahibi olmaya fayda sağlayacak basıklık ve çarpıklık katsayıları (2.4) ve (2.5) eşitlikleri kullanılarak;

$$\mu_3 = 12 + 12\delta \quad (3.7)$$

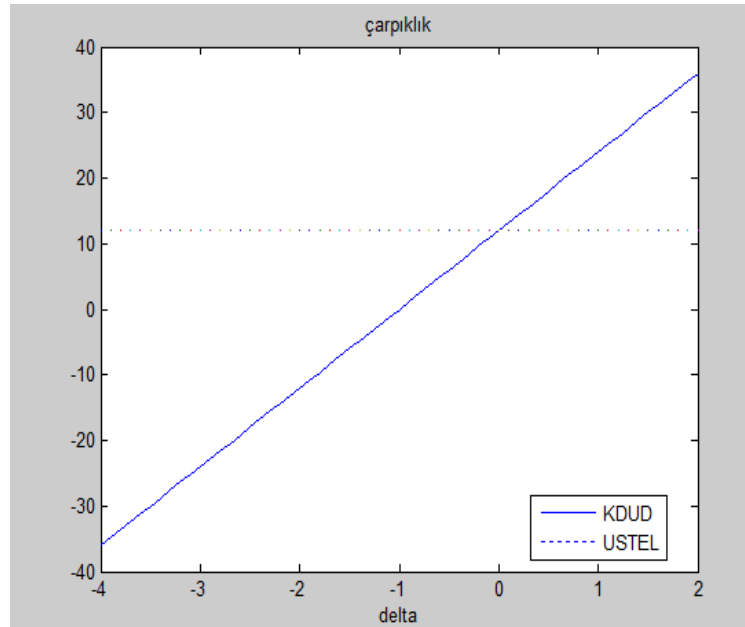
dir.

Basıklık katsayısı;

$$\mu_4 = 9 + 9\delta \quad (3.8)$$

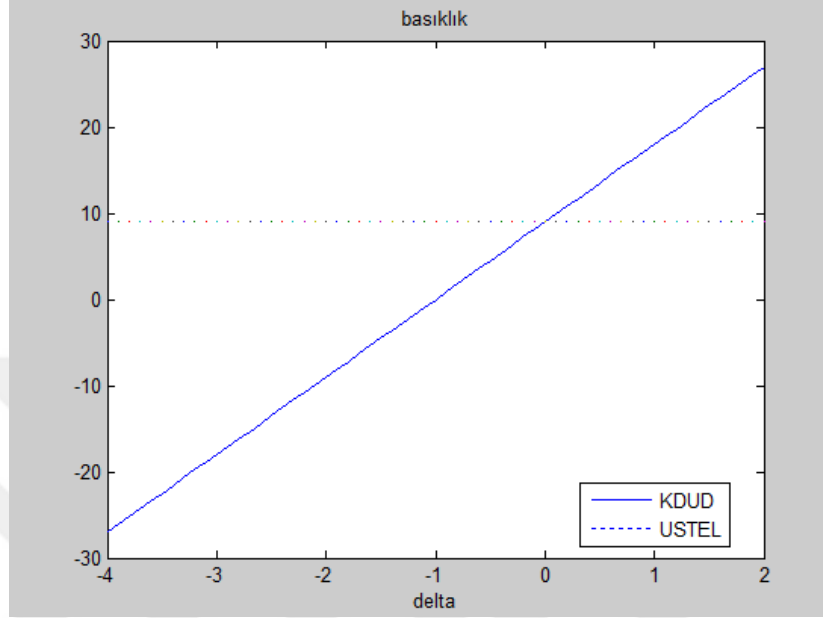
olarak elde edilir.

Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da KDUD'a ait basıklık ve çarpıklık grafikleri Üstel dağılım ile karşılaştırılarak verilmiştir.



Şekil 3.5 Delta parametresine göre Üstel dağılım ve KDUD' a ait çarpıklık grafiği ( $\beta = 1$ )

Şekil 3.5 incelendiğinde,  $\delta = -1$  için simetri durumu söz konusudur.  $\delta < -1$  durumunda KDUD sola çarpık iken,  $\delta > -1$  söz konusu iken sağa çarpık eğilim gösterir.



Şekil 3.6 Delta parametresine göre Üstel dağılım ve KDUD' a ait basıklık grafiği

Şekil 3.6 incelendiğinde KDUD,  $\delta = -1$  için basıklık değeri sıfır iken,  $\delta < -1$  iken basık,  $\delta > -1$  olduğunda daha sivri eğilim gösterir.

Dağılımın güvenilirlik analizinde kullanılacak en önemli iki fonksiyon; güvenilirlik fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonudur. (2.6)'da verilen eşitlik yardımıyla;

$$R(t) = 1 - \left[ (1 - e^{-\beta x}) + \left( \frac{1}{2} e^{-\beta x} - \frac{3}{2} e^{-2\beta x} + e^{-3\beta x} \right) \delta \right]$$

$$= (e^{-\beta x}) + \left( -\frac{1}{2} e^{-\beta x} + \frac{3}{2} e^{-2\beta x} - e^{-3\beta x} \right) \delta, \quad -4 \leq \delta \leq 2 \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.

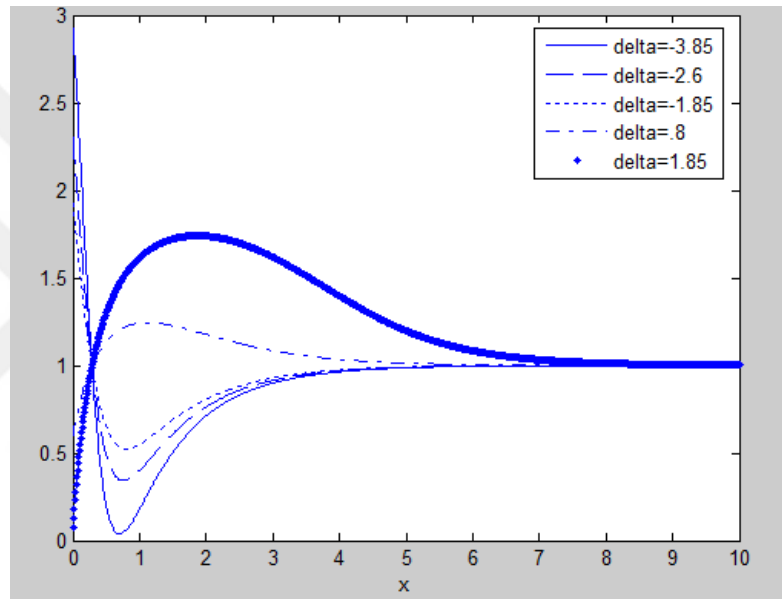
O halde (2.7)'de verilen eşitlik kullanılarak da bozulma oranı fonksiyonu ;

$$h(t) = \frac{(\beta \cdot e^{-\beta x}) + \left( \frac{\beta}{2} e^{-\beta x} + 3\beta \cdot e^{-2\beta x} - 3\beta \cdot e^{-3\beta x} \right) \delta}{(e^{-\beta x}) + \left( -\frac{1}{2} e^{-\beta x} + \frac{3}{2} e^{-2\beta x} - e^{-3\beta x} \right) \delta}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\beta x}(\beta - \frac{\delta}{2} + 3\delta\beta e^{-\beta x} - 3\delta\beta e^{-2\beta})}{e^{-\beta x}(1 - \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}\delta e^{-\beta x} - \delta e^{-2\beta})} \\
&= \frac{\beta(1 - \frac{\delta}{2} + 3\delta e^{-\beta x} - 3\delta e^{-2\beta})}{(1 - \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}\delta e^{-\beta x} - \delta e^{-2\beta})} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

olur.

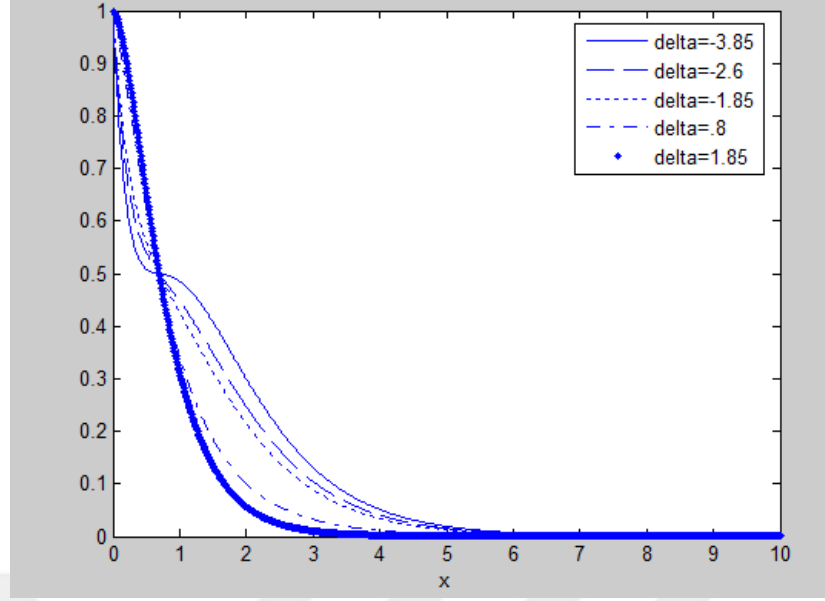
Aşağıdaki grafikte KDUD'ın farklı  $\delta$  parametrelerine göre bozulma oranı grafiği incelenmiştir.



Şekil 3.7 Farklı parametre değerleri için bozulma oranı grafikleri ( $\beta = 1$ )

Bozulma oranı grafiği göz önünde bulundurulduğunda,  $\delta$  parametresinin negatif değerlerinde kuvvet eğrisi şeklini aldığı, pozitif değerlerinde ise ters kuvvet eğrisi şeklini aldığı söylenebilir.

Şekil 3.7 göz önünde bulundurulduğunda bozulma oranı grafikleri kuvvet eğrisi ve ters kuvvet eğrisi şekillerini alabildiği görülmektedir. Bu da elde ettiğimiz dağılımın uygulama yönünde çeşitli alanlarda kullanabilirliğini göstermektedir.



Şekil 3.8 Farklı parametre değerleri için güvenilirlik fonksiyonu grafikleri

### 3.1 Parametre Tahmini

İstatistiki analizlerde en büyük problemlerden biri parametre (veya parametrelerin) tahmin edicilerini belirlemektir. Araştırmacının üzerinde çalıştığı kitleyi tanıması, anlaması, bazı karakteristikleri hakkında tahminlerde bulunması çalışmanın doğru sonuçlanması için gereklidir. Kitleyi karakterize eden özellikler genellikle bilinmemektedir. Bu bilinmeyen karakteristikler parametre olarak adlandırılır.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  herhangi bir  $\theta$  bilinmeyen parametreler vektöründen seçilen  $F_\theta$  dağılımdan bir örneklem olsun.  $\Theta$  bu dağılıma ait parametre uzayını temsil etmek üzere bu bölümde bilinmeyen bu parametrelerin tahmini problemine cevap aranacaktır.

Parametre tahmini için kullanılan bazı yöntemler; momentler yöntemi, en çok olabilirlik tahmin yöntemi ve en küçük kareler yöntemi olarak sıralanabilir.

Bu çalışmada kübik dönüştürülmüş üstel dağılım için bu yöntemlerden momentler yöntemi ile en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak parametre tahmininde bulunulacaktır.

### 3.1.1 Momentler yöntemi

Bu tahmin edici bulma yöntemi, kitle momentine sahip olan dağılımlar için kullanılmaktadır. Kitle momentini örneklem momentine eşitleyerek parametre hakkında bilgi vermeye dayalı bir yöntem olduğu için  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  örneklemini ele alınsın. Bu örnekleme ait ilk k tane örneklem momentleri;

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2$$

⋮

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^k$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde k tane kitle momenti de hesaplanır. Kitleye ait parametre sayısı kadar kitle momentleri ( $E(X), E(X^2), E(X^3), \dots, E(X^k)$ ) ve örneklem momentleri hesaplanarak birbirine eşitlenir. Böylece kitle parametreleri için tahmin ediciler hesaplanmış olur. Bu tahmin ediciler momentler yöntemiyle elde edilmiş tahmin ediciler olarak adlandırılır. Kısaca MOM diye ifade edilebilir.

Kübik dönüştürülmüş üstel dağılım için bu tahmin yöntemini kullanarak  $\beta$  ve  $\delta$  parametreleri için tahmin ediciler elde edilecektir.

Bu dağılıma ait iki tane parametre mevcut olduğu için iki tane örneklem momenti gerekmektedir. Hesaplanan örneklem momenti, kitle momentine aşağıdaki gibi eşitlenir.

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = m_1$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = m_2$$

Buna göre birinci örneklem momenti (3.4) eşitliği ile verilen birinci kitle momentine eşitlenirse;

$$m_1 = \frac{12-\delta}{12\beta}$$

İfadesi elde edilir. Bu ifadeden  $\beta$  parametresi çekilirse;

$$\beta = \frac{12-\delta}{12m_1} \quad (3.11)$$

elde edilmiş olur.

Daha sonra ise ikinci örneklem momenti, (3.5) eşitliği ile elde edilen;

$$m_2 = \frac{144-34\delta}{72\beta^2} \quad (3.12)$$

İkinci kitle momentine eşitlenerek ikinci bir eşitlik elde edilir.

(3.11) de elde ettiğimiz eşitlik ile  $m_2$  eşitlikleri birleştirilerek yeni bir denklem oluşturulur. Buna göre;

$$m_2 = \frac{144-34\delta}{72\left(\frac{12-\delta}{12m_1}\right)^2} \quad (3.13)$$

elde edilmiş olur.

(3.13)'de elde edilen denklem için iç çarpım yapılarak  $\delta$  parametresi için ikinci dereceden bir denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(12 - \delta)^2 m_2 = 144(2m_1) - 68m_1\delta$$

$$\delta^2 m_2 - (24m_2 - 68m_1)\delta + 144(m_2 - 2m_1) = 0$$

Burada elde edilmiş ikinci dereceden denklemde  $\delta$  parametresi için bir kök(ler)

i)  $\Delta > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\Delta = (24m_2 - 68m_1)^2 - 4(144)(m_2 - 2m_1) m_2 > 0$$

$$= 4624m_1^2 - 2112m_1m_2 > 0$$

$$= 16m_1(289m_1 - 132m_2) > 0$$

$$ii) -4 \leq \delta \leq 2$$

koşullarına uygun olacak şekilde belirlenir. O halde  $\tilde{\delta}$  ;

$$\delta_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\delta_{1,2} = \frac{(24m_2 - 68m_1) \pm (4624m_1^2 - 2112m_1m_2)}{2(m_2)}$$

$-4 \leq \delta \leq 2$  arasında olan değerine eşittir.

(3.13)'deki denklemin çözümüyle  $\delta$  parametresi için bir tahmin edici elde edilmiş olur. Elde edilen bu  $\tilde{\delta}$  tahmin edicisi (3.11) deki formülde yerine yazılarak  $\beta$  parametresi için bir momentler tahmin edicisi  $\tilde{\beta}$  elde edilir.

### 3.1.2 En çok olabilirlik tahmin edicisi

$X_1, X_2, \dots, X_n$  olasılık (yoğunluk) fonksiyonu  $f(x; \theta)$  olan dağılımdan bir örneklem olmak üzere; bu örneklem olabilirlik fonksiyonunu en büyük yapan değer,  $\theta$  parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisidir. (EÇOT) Asimptotik yansız ve en küçük varyanslı olmasından dolayı tahmin edici yöntemleri arasında en çok tercih edilen tahmin yöntemidir. (Akdi, 2005)

Olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n) = f(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i; \theta)$$

olarak ifade edilir. Bu fonksiyonu en büyük yapan değer;

$$\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \max_{\theta} L(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n)$$

olur.

Yapılacak olan işlemlerde matematiksel olarak kolaylık sağlaması için en büyük yapma işlemi, olabilirlik fonksiyonun logaritması (log-likelihood) üzerinden yapılır.

$$l(\theta) = \log(L(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n))$$

Bu fonksiyonun ilgili parametreye göre türevi, parametreyi en büyük yapan değerdir yani en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Birden fazla parametre olması durumunda tüm parametreler için eşanlı çözümler elde edilerek en çok olabilirlik tahmin edici değerleri bulunur.

$$\widehat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \max_{\theta} (L(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n))$$

Daha sonrasında ikinci türev değerleri alınarak, bulunan tahmin edicilerin maksimum noktası olduğu görülür.

Kübik dönüştürülmüş üstel dağılımın iki parametresi olan  $\delta$  ve  $\beta$  parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicileri;

$$f(x) = (\beta e^{-\beta x}) + \left( \frac{\beta}{2} e^{-\beta x} + 3\beta e^{-2\beta x} - 3\beta e^{-3\beta x} \right) \delta$$

olmak üzere;

$$L(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f(X_i / \theta)$$

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[ (\beta e^{-\beta x_1}) + \left( \frac{\beta}{2} e^{-\beta x_1} + 3\beta e^{-2\beta x_1} - 3\beta e^{-3\beta x_1} \right) \delta \right] \dots \left[ (\beta e^{-\beta x_n}) + \left( \frac{\beta}{2} e^{-\beta x_n} + 3\beta e^{-2\beta x_n} - 3\beta e^{-3\beta x_n} \right) \delta \right]$$

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \beta^n e^{-\beta(\sum_{i=1}^n x_i)} \prod_{i=1}^n (1 + \delta(-\frac{1}{2} + 3e^{-\beta x_i} - 3e^{-2\beta x_i}))$$

$$\log L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = n \log \beta - \beta \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n (\log(1 + \delta(-\frac{1}{2} + 3e^{-\beta x_i} - 3e^{-2\beta x_i}))) \quad (3.14)$$

denkleminin  $\beta$  ve  $\delta$  parametrelerine göre ayrı ayrı türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile elde edilmiş olur. Dolayısı ile  $\widehat{\beta}$  ve  $\widehat{\delta}$  tahmin edicileri elde edilmiş olur. Bu tahmin ediciler için nümerik bir değer analitik olarak elde edilememektedir. Matlab simülasyon ve uygulama kısmında ‘mle’ komutu ile çözüme gidilmiştir.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Yaşam analizinin bebek ölüm hızı, biyoistatistik veya parçaların(veya sistemlerin) hayatta kalma süresini modellenmesinde kullanıldığı daha önceden belirtilmişti. Kübik dönüştürülmüş üstel dağılımda elde edilen eşitlikler ve karaktereristikler de bu modelleme için gerekli olan matematiksel eşitliklerle elde edilmiş oldu.

Bu kapsamda yapılan, parametre tahminiyle elde edilmiş olan momentler tahmin edicisi ve en çok olabilirlik tahmin edicilerinin olabildiğince parametre değerlerine yakın tahminlerde bulunması, çalışmanın doğruluğu bakımından önem taşımaktadır.

Bu parametre tahminlerinin parametreye yakınlığını ölçmek için, kübik dönüştürülmüş üstel dağılımdan belirli  $\beta$  ve  $\delta$  parametrelerini kullanarak, farklı  $n$  değerlerinden ( $n=20/50/100/250/1000$ ) 1000 tekrarlı örneklemeler matlabda üretilmiştir. Üretilen bu örneklemeler üzerine parametre tahmini yapılmıştır. Böylece parametre tahmini üzerine bir simülasyon yapılmıştır. Aynı zamanda bu simülasyonlarda hata kareler ortalaması ve yan(sapma) değerlerine de bakılmıştır.

$$sapma(yan) = E(\hat{\beta}) - \beta$$

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n}}$$

Momentler tahmin edicisi için elde edilen değerler çizelge 4.1- 4.3 de verilmiştir.

En çok olabilirlik tahmin edicisi için elde edilen değerler çizelge 4.4 - 4.6 da verilmiştir.

Çizelge 4.1  $\beta=0,1$  iken farklı  $\delta$  parametrelerine göre momentler tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri

| n=20   | $\beta$ | $\tilde{\beta}$ | $RMSE(\tilde{\beta})$ | $BİAS(\tilde{\beta})$ | $\delta$ | $\tilde{\delta}$ | $RMSE(\tilde{\delta})$ | $BİAS(\tilde{\delta})$ |
|--------|---------|-----------------|-----------------------|-----------------------|----------|------------------|------------------------|------------------------|
|        | 0,1     | 0,0854          | 0,0013                | -0,0146               | -3,85    | -1,1756          | 0,1064                 | 2,6744                 |
|        |         | 0,0885          | 0,0016                | -0,0115               | -2,6     | -1,07            | 0,0815                 | 1,53                   |
|        |         | 0,0893          | 0,0018                | -0,0107               | -1,85    | -0,9672          | 0,0724                 | 0,8828                 |
|        |         | 0,0613          | 0,0035                | -0,0387               | 0,8      | 0,1454           | 0,0719                 | -0,6546                |
|        |         | 0,021           | 0,0039                | -0,079                | 1,85     | 0,4163           | 0,0907                 | -1,4337                |
| n=50   |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,1     | 0,0863          | 0,0007                | -0,0137               | -3,85    | -1,6155          | 0,0916                 | 2,2345                 |
|        |         | 0,0945          | 0,0007                | -0,0055               | -2,6     | -1,5615          | 0,0673                 | 1,0385                 |
|        |         | 0,098           | 0,0007                | -0,002                | -1,85    | -1               | 0,0604                 | 0,4686                 |
|        |         | 0,0645          | 0,0033                | -0,0355               | 0,8      | 0,226            | 0,0604                 | -0,574                 |
|        |         | -0,0148         | 0,0058                | -0,1148               | 1,85     | -0,2306          | 0,1068                 | -2,0806                |
| n=100  |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,1     | 0,0876          | 0,0006                | -0,0124               | -3,85    | -1,8491          | 0,0818                 | 2,0009                 |
|        |         | 0,0945          | 0,0005                | -0,0055               | -2,6     | -1,7555          | 0,0593                 | 0,8445                 |
|        |         | 0,0982          | 0,0005                | -0,0018               | -1,85    | -1,5332          | 0,0538                 | 0,3168                 |
|        |         | 0,0865          | 0,02                  | -0,0135               | 0,8      | 0,6071           | 0,0418                 | -0,1929                |
|        |         | 0,1033          | 0,0005                | 0,0033                | 1,85     | 1,7088           | 0,0234                 | -0,1412                |
| n=250  |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,1     | 0,0888          | 0,0005                | -0,0112               | -3,85    | -2,0831          | 0,0716                 | 1,7669                 |
|        |         | 0,0956          | 0,0005                | -0,0044               | -2,6     | -1,968           | 0,048                  | 0,632                  |
|        |         | 0,0991          | 0,0004                | -0,0009               | -1,85    | -1,6581          | 0,0457                 | 0,1919                 |
|        |         | 0,0975          | 0,0006                | -0,0025               | 0,8      | 0,9373           | 0,018                  | 0,1373                 |
|        |         | -0,0616         | 0,068                 | -0,1616               | 1,85     | -1,135           | 0,1271                 | -2,985                 |
| n=1000 |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,1     | 0,09            | 0,0004                | -0,01                 | -3,85    | -2,2599          | 0,0613                 | 1,5901                 |
|        |         | 0,0967          | 0,0003                | -0,0033               | -2,6     | -2,0931          | 0,0384                 | 0,5069                 |
|        |         | 0,0987          | 0,0004                | -0,0013               | -1,85    | -1,6259          | 0,0332                 | 0,2241                 |
|        |         | 0,0992          | 0,0002                | -0,0008               | 0,8      | 0,9537           | 0,0082                 | 0,1537                 |
|        |         | 0,0995          | 0,0002                | -0,0005               | 1,85     | 1,4087           | 0,0068                 | -0,4413                |

Çizelge 4.2  $\beta=0,2$  iken farklı  $\delta$  parametrelerine göre momentler tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri

| n=20   | $\beta$ | $\tilde{\beta}$ | $RMSE(\tilde{\beta})$ | $BİAS(\tilde{\beta})$ | $\delta$ | $\tilde{\delta}$ | $RMSE(\tilde{\delta})$ | $BİAS(\tilde{\delta})$ |
|--------|---------|-----------------|-----------------------|-----------------------|----------|------------------|------------------------|------------------------|
|        | 0,2     | 0,0949          | 0,0062                | -0,1051               | -3,85    | -1,8124          | 0,0914                 | 2,0376                 |
|        |         | 0,1298          | 0,0056                | -0,0702               | -2,6     | -1,5368          | 0,0745                 | 1,0632                 |
|        |         | 0,1391          | 0,0053                | -0,0609               | -1,85    | -1,2569          | 0,0705                 | 0,5931                 |
|        |         | 0,2013          | 0,0021                | 0,0013                | 0,8      | 0,8634           | 0,0535                 | 0,0634                 |
|        |         | 0,2044          | 0,0012                | 0,0044                | 1,85     | 1,916            | 0,0244                 | 0,066                  |
| n=50   |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,2     | 0,0384          | 0,0077                | -0,1616               | -3,85    | -2,4221          | 0,07                   | 1,4279                 |
|        |         | 0,1027          | 0,0062                | -0,0973               | -2,6     | -2,0347          | 0,0596                 | 0,5653                 |
|        |         | 0,1307          | 0,0054                | -0,0693               | -1,85    | -1,6672          | 0,0602                 | 0,1828                 |
|        |         | 0,2047          | 0,0011                | 0,0047                | 0,8      | 0,7845           | 0,0417                 | -0,0155                |
|        |         | 0,2022          | 0,0007                | 0,0022                | 1,85     | 1,8896           | 0,0141                 | 0,0396                 |
| n=100  |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,2     | 0,2256          | 0,09                  | 0,0256                | -3,85    | -2,8001          | 0,0548                 | 1,0499                 |
|        |         | 0,101           | 0,0062                | -0,099                | -2,6     | -2,2707          | 0,0522                 | 0,3293                 |
|        |         | 0,1606          | 0,0041                | -0,0394               | -1,85    | -1,7361          | 0,0536                 | 0,1139                 |
|        |         | 0,2027          | 0,0005                | 0,0027                | 0,8      | 0,793            | 0,0317                 | -0,007                 |
|        |         | 0,2001          | 0,0005                | 0,0001                | 1,85     | 1,9195           | 0,0089                 | 0,0695                 |
| n=250  |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,2     | -0,0657         | 0,0102                | -0,2657               | -3,85    | -3,1372          | 0,0372                 | 0,7128                 |
|        |         | 0,1277          | 0,0053                | -0,0723               | -2,6     | -2,2928          | 0,0459                 | 0,3072                 |
|        |         | 0,1878          | 0,0023                | -0,0122               | -1,85    | -1,6655          | 0,0453                 | 0,1845                 |
|        |         | 0,1974          | 0,0007                | -0,0026               | 0,8      | 0,9336           | 0,0186                 | 0,1336                 |
|        |         | 0,1998          | 0,0004                | -0,0002               | 1,85     | 1,9004           | 0,0058                 | 0,0504                 |
| n=1000 |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,2     | 0,1557          | 0,0119                | -0,0443               | -3,85    | -3,4547          | 0,017                  | 0,3953                 |
|        |         | 0,1779          | 0,0027                | -0,0221               | -2,6     | -2,246           | 0,0367                 | 0,354                  |
|        |         | 0,197           | 0,0005                | -0,003                | -1,85    | -1,5725          | 0,0327                 | 0,2775                 |
|        |         | 0,1986          | 0,0002                | -0,0014               | 0,8      | 0,9204           | 0,08                   | 0,1204                 |
|        |         | 0,1997          | 0,0001                | -0,0003               | 1,85     | 1,8977           | 0,0031                 | 0,0477                 |

Çizelge 4.3  $\beta=0,3$  iken farklı  $\delta$  parametrelerine göre momentler tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri

| n=20   | $\beta$ | $\tilde{\beta}$ | $RMSE(\tilde{\beta})$ | $Bias(\tilde{\beta})$ | $\delta$ | $\tilde{\delta}$ | $RMSE(\tilde{\delta})$ | $Bias(\tilde{\delta})$ |
|--------|---------|-----------------|-----------------------|-----------------------|----------|------------------|------------------------|------------------------|
|        | 0,3     | 0,2589          | 0,0034                | -0,0411               | -3,85    | -1,2643          | 0,1058                 | 2,5857                 |
|        |         | 0,2842          | 0,033                 | -0,0158               | -2,6     | -1,133           | 0,0811                 | 1,467                  |
|        |         | 0,3016          | 0,0029                | 0,0016                | -1,85    | -0,5024          | 0,0672                 | 1,3476                 |
|        |         | 0,3082          | 0,0023                | 0,0082                | 0,8      | 0,8544           | 0,052                  | 0,0544                 |
|        |         | 0,3039          | 0,0017                | 0,0039                | 1,85     | 1,9354           | 0,0213                 | 0,0854                 |
| n=50   |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,3     | 0,2625          | 0,0024                | -0,0375               | -3,85    | -1,6975          | 0,0909                 | 2,1525                 |
|        |         | 0,278           | 0,0021                | -0,022                | -2,6     | -1,3896          | 0,0699                 | 1,2104                 |
|        |         | 0,2915          | 0,0021                | -0,0085               | -1,85    | -1,3519          | 0,0607                 | 0,4981                 |
|        |         | 0,3061          | 0,0016                | 0,0061                | 0,8      | 0,7835           | 0,0432                 | -0,0165                |
|        |         | 0,3017          | 0,0011                | 0,0017                | 1,85     | 1,9074           | 0,0139                 | 0,0574                 |
| n=100  |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,3     | 0,2611          | 0,002                 | -0,0389               | -3,85    | -1,7933          | 0,084                  | 2,0567                 |
|        |         | 0,2809          | 0,0017                | -0,0191               | -2,6     | -1,6751          | 0,0597                 | 0,9249                 |
|        |         | 0,295           | 0,0017                | -0,005                | -1,85    | -1,5461          | 0,0537                 | 0,3039                 |
|        |         | 0,3007          | 0,0011                | 0,0007                | 0,8      | 0,8925           | 0,0265                 | 0,0925                 |
|        |         | 0,3001          | 0,0005                | 0,0001                | 1,85     | 1,9102           | 0,09                   | 0,0602                 |
| n=250  |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,3     | 0,2669          | 0,0016                | -0,0331               | -3,85    | -2               | 0,072                  | 1,7627                 |
|        |         | 0,2881          | 0,0013                | -0,0119               | -2,6     | -1,9895          | 0,0486                 | 0,6105                 |
|        |         | 0,2943          | 0,0013                | -0,0057               | -1,85    | -1,5857          | 0,0457                 | 0,2643                 |
|        |         | 0,2992          | 0,0006                | -0,0008               | 0,8      | 0,8692           | 0,0156                 | 0,0692                 |
|        |         | 0,2999          | 0,0004                | 0,0001                | 1,85     | 1,9105           | 0,0057                 | 0,0605                 |
| n=1000 |         |                 |                       |                       |          |                  |                        |                        |
|        | 0,3     | 0,2704          | 0,0013                | -0,0296               | -3,85    | -2,6757          | 0,0608                 | 1,1743                 |
|        |         | 0,2906          | 0,0001                | -0,0094               | -2,6     | -2,1144          | 0,0377                 | 0,4856                 |
|        |         | 0,2975          | 0,0011                | -0,0025               | -1,85    | -1,7141          | 0,0358                 | 0,1359                 |
|        |         | 0,2979          | 0,0003                | -0,0021               | 0,8      | 0,9209           | 0,0082                 | 0,1209                 |
|        |         | 0,2989          | 0,0002                | -0,0011               | 1,85     | 1,8655           | 0,0217                 | 0,0155                 |

Çizelge 4.1 - 4.3 incelendiğinde, momentler tahmin edicisinin  $\delta$  parametresini tahmin etmede başarılı bir yöntem olmadığı hata ve yan değerlerine bakılarak söylenir.

Çizelge 4.4  $\beta=0,1$  iken farklı  $\delta$  parametrelerine göre en çok olabilirlik tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri

| n=20   | $\beta$ | $\hat{\beta}$ | $RMSE(\hat{\beta})$ | $Bias(\hat{\beta})$ | $\delta$ | $\hat{\delta}$ | $RMSE(\hat{\delta})$ | $Bias(\hat{\delta})$ |
|--------|---------|---------------|---------------------|---------------------|----------|----------------|----------------------|----------------------|
|        | 0,1     | 0,1019        | 0,0004              | 0,0019              | -3,85    | -3,78          | 0,0168               | 0,07                 |
|        |         | 0,103         | 0,0007              | 0,003               | -2,6     | -2,6742        | 0,0348               | -0,0742              |
|        |         | 0,104         | 0,0008              | 0,004               | -1,85    | -1,8875        | 0,0395               | -0,0375              |
|        |         | 0,1043        | 0,0008              | 0,0043              | 0,8      | 0,8257         | 0,0334               | 0,0257               |
|        |         | 0,1034        | 0,0006              | 0,0034              | 1,85     | 1,7517         | 0,0154               | -0,0983              |
| n=50   |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,1001        | 0,0002              | 0,0001              | -3,85    | -3,8328        | 0,0083               | 0,0172               |
|        |         | 0,1013        | 0,0004              | 0,0013              | -2,6     | -2,626         | 0,0024               | -0,026               |
|        |         | 0,1018        | 0,0004              | 0,0018              | -1,85    | -1,8513        | 0,0231               | -0,0013              |
|        |         | 0,1016        | 0,0004              | 0,0016              | 0,8      | 0,8634         | 0,0202               | 0,0634               |
|        |         | 0,1015        | 0,0003              | 0,0015              | 1,85     | 1,7945         | 0,102                | -0,0555              |
| n=100  |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,1002        | 0,0001              | 0,0002              | -3,85    | -3,8512        | 0,0057               | -0,0012              |
|        |         | 0,1008        | 0,0002              | 0,0008              | -2,6     | -2,626         | 0,0138               | -0,026               |
|        |         | 0,101         | 0,0003              | 0,001               | -1,85    | -1,8616        | 0,0154               | -0,0116              |
|        |         | 0,1008        | 0,0003              | 0,0008              | 0,8      | 0,824          | 0,014                | 0,024                |
|        |         | 0,101         | 0,0003              | 0,001               | 1,85     | 1,8336         | 0,072                | -0,0164              |
| n=250  |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,1003        | 0,0001              | 0,0003              | -3,85    | -3,8606        | 0,0041               | -0,0106              |
|        |         | 0,1004        | 0,0001              | 0,0004              | -2,6     | -2,6165        | 0,0087               | -0,0165              |
|        |         | 0,1004        | 0,0001              | 0,0004              | -1,85    | -1,8614        | 0,0097               | -0,0114              |
|        |         | 0,1006        | 0,0002              | 0,0006              | 0,8      | 0,8173         | 0,0089               | 0,0173               |
|        |         | 0,1           | 0,0001              | 0                   | 1,85     | 1,8693         | 0,0047               | 0,0193               |
| n=1000 |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,1001        | 0,0005              | 0,0001              | -3,85    | -3,8556        | 0,0021               | -0,0056              |
|        |         | 0,1004        | 0,0009              | 0,0004              | -2,6     | -2,0035        | 0,0048               | 0,5965               |
|        |         | 0,1003        | 0,0009              | 0,0003              | -1,85    | -1,8488        | 0,0047               | 0,0012               |
|        |         | 0,1004        | 0,0009              | 0,0004              | 0,8      | 0,797          | 0,0042               | -0,003               |
|        |         | 0,0999        | 0,0008              | -0,0001             | 1,85     | 1,8835         | 0,0031               | 0,0335               |

Çizelge 4.5  $\beta=0,2$  iken farklı  $\delta$  parametrelerine göre en çok olabilirlik tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri

| n=20   | $\beta$ | $\hat{\beta}$ | $RMSE(\hat{\beta})$ | $Bias(\hat{\beta})$ | $\delta$ | $\hat{\delta}$ | $RMSE(\hat{\delta})$ | $Bias(\hat{\delta})$ |
|--------|---------|---------------|---------------------|---------------------|----------|----------------|----------------------|----------------------|
|        | 0,2     | 0,2005        | 0,001               | 0,0005              | -3,85    | -3,7224        | 0,0207               | 0,1276               |
|        |         | 0,2067        | 0,0015              | 0,0067              | -2,6     | -2,6378        | 0,0336               | -0,0378              |
|        |         | 0,2088        | 0,0017              | 0,0088              | -1,85    | -1,8559        | 0,0396               | -0,0059              |
|        |         | 0,2087        | 0,0017              | 0,0087              | 0,8      | 0,8655         | 0,0314               | 0,0655               |
|        |         | 0,2089        | 0,0012              | 0,0089              | 1,85     | 1,7054         | 0,0173               | -0,1446              |
| n=50   |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,2     | 0,2007        | 0,0005              | 0,0007              | -3,85    | -3,8271        | 0,0084               | 0,0229               |
|        |         | 0,2012        | 0,0007              | 0,0012              | -2,6     | -2,6281        | 0,0197               | -0,0281              |
|        |         | 0,2028        | 0,0009              | 0,0028              | -1,85    | -1,9072        | 0,0218               | -0,0572              |
|        |         | 0,203         | 0,0009              | 0,003               | 0,8      | 0,865          | 0,0201               | 0,065                |
|        |         | 0,2031        | 0,0007              | 0,0031              | 1,85     | 1,8104         | 0,0097               | -0,0396              |
| n=100  |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,2     | 0,2008        | 0,0003              | 0,0008              | -3,85    | -3,8446        | 0,0059               | 0,0054               |
|        |         | 0,2015        | 0,0005              | 0,0015              | -2,6     | -2,6076        | 0,0139               | -0,0076              |
|        |         | 0,2015        | 0,0005              | 0,0015              | -1,85    | -1,8705        | 0,0148               | -0,0205              |
|        |         | 0,2013        | 0,0006              | 0,0013              | 0,8      | 0,8517         | 0,0136               | 0,0517               |
|        |         | 0,2013        | 0,0005              | 0,0013              | 1,85     | 1,8302         | 0,0072               | -0,0198              |
| n=250  |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,2     | 0,2003        | 0,0002              | 0,0003              | -3,85    | -3,8517        | 0,0042               | -0,0017              |
|        |         | 0,2005        | 0,0002              | 0,0005              | -2,6     | -2,623         | 0,0088               | -0,023               |
|        |         | 0,2021        | 0,0004              | 0,0021              | -1,85    | -1,8634        | 0,0099               | -0,0134              |
|        |         | 0,2009        | 0,0003              | 0,0009              | 0,8      | 0,8048         | 0,0047               | 0,0048               |
|        |         | 0,2005        | 0,0003              | 0,0005              | 1,85     | 1,8582         | 0,0048               | 0,0082               |
| n=1000 |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,2     | 0,2001        | 0,0001              | 0,0001              | -3,85    | -3,8579        | 0,0021               | -0,0079              |
|        |         | 0,2003        | 0,0001              | 0,0003              | -2,6     | -2,5991        | 0,0043               | 0,0009               |
|        |         | 0,2013        | 0,0003              | 0,0013              | -1,85    | -1,8624        | 0,0055               | -0,0124              |
|        |         | 0,2004        | 0,0002              | 0,0004              | 0,8      | 0,8042         | 0,0051               | 0,0042               |
|        |         | 0,1999        | 0,0009              | -0,0001             | 1,85     | 1,8821         | 0,0032               | 0,0321               |

Çizelge 4.6  $\beta=0,3$  iken farklı  $\delta$  parametrelerine göre en çok olabilirlik tahmin edicisi değerleri, sapma ve standart hata değerleri

| n=20   | $\beta$ | $\hat{\beta}$ | $RMSE(\hat{\beta})$ | $Bias(\hat{\beta})$ | $\delta$ | $\hat{\delta}$ | $RMSE(\hat{\delta})$ | $Bias(\hat{\delta})$ |
|--------|---------|---------------|---------------------|---------------------|----------|----------------|----------------------|----------------------|
|        | 0,2     | 0,3021        | 0,0015              | 0,0021              | -3,85    | -3,7271        | 0,0221               | 0,1229               |
|        |         | 0,3066        | 0,0021              | 0,0066              | -2,6     | -2,6165        | 0,0347               | -0,0165              |
|        |         | 0,3105        | 0,0025              | 0,0105              | -1,85    | -1,9066        | 0,0396               | -0,0566              |
|        |         | 0,3146        | 0,0023              | 0,0146              | 0,8      | 0,847          | 0,0327               | 0,047                |
|        |         | 0,3139        | 0,0018              | 0,0139              | 1,85     | 1,7307         | 0,016                | -0,1193              |
| n=50   |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,3008        | 0,0007              | 0,0008              | -3,85    | -3,8203        | 0,0087               | 0,0297               |
|        |         | 0,3039        | 0,0013              | 0,0039              | -2,6     | -2,6557        | 0,0201               | -0,0557              |
|        |         | 0,3053        | 0,0014              | 0,0053              | -1,85    | -1,8628        | 0,0231               | -0,0128              |
|        |         | 0,3052        | 0,0014              | 0,0052              | 0,8      | 0,8527         | 0,0205               | 0,0527               |
|        |         | 0,3055        | 0,0011              | 0,0055              | 1,85     | 1,7803         | 0,0102               | -0,0697              |
| n=100  |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,3015        | 0,0005              | 0,0015              | -3,85    | -3,8395        | 0,0062               | 0,0105               |
|        |         | 0,302         | 0,0007              | 0,002               | -2,6     | -2,6353        | 0,0134               | -0,0353              |
|        |         | 0,3031        | 0,0009              | 0,0031              | -1,85    | -1,8652        | 0,0153               | -0,0152              |
|        |         | 0,3041        | 0,0009              | 0,0041              | 0,8      | 0,8055         | 0,0138               | 0,0055               |
|        |         | 0,3023        | 0,0007              | 0,0023              | 1,85     | 1,8256         | 0,0072               | -0,0244              |
| n=250  |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,3004        | 0,0003              | 0,0004              | -3,85    | -3,8536        | 0,0041               | -0,0036              |
|        |         | 0,302         | 0,0005              | 0,002               | -2,6     | -2,6105        | 0,0083               | -0,0105              |
|        |         | 0,3011        | 0,0005              | 0,0011              | -1,85    | -1,8531        | 0,0092               | -0,0031              |
|        |         | 0,3009        | 0,0002              | 0,0009              | 0,8      | 0,7953         | 0,0086               | -0,0047              |
|        |         | 0,3009        | 0,0004              | 0,0009              | 1,85     | 1,8541         | 0,0049               | 0,0041               |
| n=1000 |         |               |                     |                     |          |                |                      |                      |
|        | 0,1     | 0,3004        | 0,0002              | 0,0004              | -3,85    | -3,8539        | 0,0023               | -0,0039              |
|        |         | 0,3013        | 0,0003              | 0,0013              | -2,6     | -2,0093        | 0,0055               | 0,5907               |
|        |         | 0,301         | 0,0003              | 0,001               | -1,85    | -1,8567        | 0,0052               | -0,0067              |
|        |         | 0,3003        | 0,0001              | 0,0003              | 0,8      | 0,8041         | 0,0054               | 0,0041               |
|        |         | 0,2995        | 0,0003              | -0,0005             | 1,85     | 1,8751         | 0,0034               | 0,0251               |

Yapılan simülasyon çalışmaları sonucunda en çok olabilirlik tahmin edicisinin parametre tahmin yöntemi olarak momentler yöntemine göre daha iyi sonuçlar çıkardığı görülmüştür. Parametre tahmin yöntemi olarak en çok olabilirlik tahmin edicisinin kullanılması daha doğru sonuçlar doğurur.

## 5. UYGULAMA

Bu çalışmayı yaparken, kübik dönüştürülmüş dağılımın, Kolmogorov-Simironov test istatistiği ve AIC test istatistiği değerlerine bakarak diğer dağılımlara göre daha iyi olduğu belirtilmişti. Bu bölümde bazı iyi bilinen dağılımların (ErlangLindley, Weibull, Ters Dönüştürülmüş Gauss, Lindley, Log-Logistic, 2 parametrelili Lindley, Frèchet ve Erlang) 100 banka müşterisinin hizmet görmeden önceki bekleme süreleri verisini açıklama yüzdesinde kübik dönüştürülmüş üstel dağılımın daha başarılı olduğu görülmüştür. Aşağıdaki tabloda bu dağılımlara ait en çok olabilirlik tahmin edicisine ait parametre tahminleri, AIC, KS ve p değerleri verilmiştir.

### Örnek1

Burada; KDUD, kübik dönüştürülmüş üstel dağılımı, 2LD ise iki parametrelili Lindley dağılımını temsil etmektedir. Shanker vd. (2016) çalışmasından alınan sonuçlara KDUD eklenerek aşağıdaki çizelge 5.1 elde edilmiştir.

Çizelge 5.1 100 banka müşterisinin işlem görmeden önceki bekleme süreleri veri setinin farklı dağılımlara ait en çok olabilirlik tahmin edicisi parametre tahminleri, AIC ve Kolmogorov-Simironov test istatistiği değerleri

|                       | PARAMETRE TAHMİNİ       |                         | AIC     | KS     | p değeri |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|---------|--------|----------|
| <b>KDUD</b>           | $\hat{\beta} = 0.0844$  | $\hat{\delta} = 2.00$   | 638.486 | 0.0363 | 0.9963   |
| <b>Erlang-Lindley</b> | $\hat{k} = 2.00$        | $\hat{\theta} = 0.1844$ | 640.046 | 0.0377 | 0.9936   |
| <b>Weibull</b>        | $\hat{\alpha} = 1.5654$ | $\hat{\theta} = 10.616$ | 643.118 | 0.0533 | 0.9245   |
| <b>Ters-Gauss</b>     | $\hat{\alpha} = 18.397$ | $\hat{\theta} = 9.877$  | 762.849 | 0.0632 | 0.7931   |
| <b>Lindley</b>        |                         | $\hat{\theta} = 0.187$  | 640.075 | 0.0684 | 0.7225   |
| <b>Log-Logistic</b>   | $\hat{\alpha} = 2.1941$ | $\hat{\theta} = 7.4235$ | 643.376 | 0.0704 | 0.6774   |
| <b>2LD</b>            | $\hat{\alpha} = 0.894$  | $\hat{\theta} = 0.191$  | 642.661 | 0.081  | 0.5114   |
| <b>Frèchet</b>        | $\hat{\alpha} = 1.4763$ | $\hat{\theta} = 5.0804$ | 691.224 | 0.1233 | 0.0878   |
| <b>Erlang</b>         | $\hat{k} = 1$           | $\hat{\theta} = 5.3026$ | 643.386 | 0.3697 | 0.000    |

## Örnek2

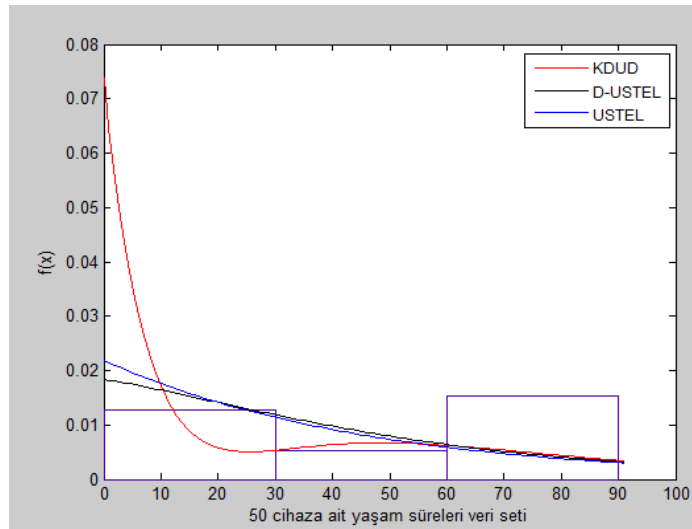
Bu çalışmada ise Lawless (1982) tarafından elde edilen 50 cihaza ait yaşam süreleri veri setini açıklamada üstel dağılım, dönüştürülmüş üstel dağılım ve kübik dönüştürülmüş üstel dağılımın AIC test istatistiği ve Kolmogrov-Simirnov test istatistiği bakımından karşılaştırılmıştır.

Burada KDUD, kübik dönüştürülmüş üstel dağılımı; D-USTEL, dönüştürülmüş üstel dağılımı temsil etmektedir.

Çizelge 5.2 50 cihazın yaşam süreleri veri setinin, KDUD, D-USTEL VE USTEL dağılıma ait en çok olabirlik tahmin edicisi parametre tahmin değerleri, AIC ve K-S test istatistiği değerleri

|                | <i>PARAMETRE TAHMİNİ</i> |                           | <i>AIC</i> | <i>K-S</i> | <i>p değeri</i> |
|----------------|--------------------------|---------------------------|------------|------------|-----------------|
| <b>KDUD</b>    | $\hat{\beta} = 0,0316$   | $\hat{\delta} = -2,6608$  | 4.742.283  | 0.2172     | 0.7916          |
| <b>D-USTEL</b> | $\hat{\beta} = 41,147$   | $\hat{\lambda} = -0,2436$ | 4.853.547  | 0.1838     | 0.6597          |
| <b>USTEL</b>   | $\hat{\beta} = 45,686$   |                           | 4.833.547  | 0.1911     | 0.5134          |

Aşağıdaki grafikte (Şekil 5.1) 50 cihazın yaşam sürelerine ait veri setine ait ilgili dağılımlara göre grafiği verilmiştir.



Şekil 5.1 50 cihazın yaşam sürelerine ait veri setinin, KDUD, D-Ustel dağılım ve üstel dağılıma göre grafikleri

## 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma yapılırken temel amaç, yaşam (güvenirlik) verilerini açıklamada yetersiz kalan yaşam dağılımlarına dönüşüm uygulanarak bu verilerin daha iyi açıklanmasına yardımcı olacak yeni bir form önermektir. Bu yüzden önemli bir yaşam dağılımı olan üstel dağılım Shaw ve Buckley (2009) çalışmasında öne sürülen kübik dönüşüm tekniğine tabi tutulmuştur.

Bu çalışmada ilk önce  $\delta$  parametresi için bir aralık incelenmesi yapılmış ve dağılımın tanımlı olduğu aralık belirlenmiştir. Tanımlı olduğu aralıkta  $\delta$  parametresi için olasılık yoğunluk fonksiyonunu, dağılım fonksiyonu, güvenilirlik fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonunun davranışı incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda  $\delta$  parametresinin negatif değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu hızla azalır, sonra artan bir eğilim gösterirken; pozitif değerleri için tam ters bir durumdan söz edilebilir. Dağılım fonksiyonunun grafik incelenmesinde ise  $\delta$  parametresinin negatif değerlerinin, pozitif değerlerine göre daha basık davrandığı gözlemlenmiştir.

Güvenirlik analizinde kullandığımız önemli karakteristiklerden olan bozulma oranı fonksiyonu ise  $\delta$  parametresinin negatif değerlerinde küvet eğrisi; pozitif değerlerinde ters küvet eğrisi şeklini alabildiği açık bir şekilde görülmektedir.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonlarında  $\delta$  parametresinin bu farklı davranışları elde ettiğimiz yeni kübik dönüştürülmüş bu formun geniş uygulama alanlarında kullanışlı olabileceğini göstermiş olur.

Ayrıca beklenen değer, varyans, basıklık ve çarpıklık karakteristikleri için ise  $\delta$  parametresinin tanımlı olduğu aralıkta üstel dağılımla, KDUD'ın davranışları incelenmiştir. Bu karşılaştırmalar sonucunda  $\delta$  parametresinin negatif değerlerinde KDUD daha yüksek bir beklentiye sahipken, pozitif değerlerinde üstel dağılımın beklentisi KDUD'a göre daha yüksektir. Buna karşın;  $\delta$  parametresinin pozitif değerlerinde üstel dağılımın varyansı KDUD'a göre daha düşüktür.

Yeni elde edilen kübik form için daha sonrasında parametre tahmininde bulunulmuştur. KDUD için hem momentler tahmin edicisi hem de en çok olabilirlik tahmin edicisi yöntemleri kullanılarak dağılım parametrelerine ait tahmin ediciler elde edilmiştir. Matlab yazılımı kullanılarak elde edilen simülasyon çalışmaları sonucunda en çok olabilirlik tahmin edicisinin, parametre tahmininde momentler tahmin edicisine göre daha iyi sonuçlar verdiği sonucuna ulaşılmıştır.

Son olarak elde ettiğimiz yeni form için uygulama çalışmaları yapılmıştır. Yapılan ilk uygulama çalışmasında, KDUD'ın uygulamada kullanılan diğer dağılımlara göre 100 banka müşterinin işlem görmeden önceki bekleme süreleri veri setini AIC, K-S ve p değerlerine göre daha başarılı olduğu görülmektedir.

İkinci uygulama çalışmasında ise negatif değer alan  $\delta$  parametresine örnek verilmek istenilmiştir. Ancak negatif değer alan bir örnek veri seti bulunmasında zorluk çekilmiştir. Çünkü hızlı bir ivme ile dibe vuran ve sonrasında sabitlenene kadar artış gösteren bir veri seti negatif değer alan  $\delta$  parametresini temsil etmektedir.

Bu ikimci uygulamada ise üstel dağılım, D-USTEL dağılım ve KDUD'ın 50 cihaza ait yaşam süreleri veri setini açıklamadaki başarısı AIC ve K-S test istatistiği değerlerine bakılarak karşılaştırılmıştır. Yine bu çalışmada da KDUD'ın D-USTEL ve üstel dağılıma göre daha başarılı olduğu görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- Akdi Y. (2005). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Bıçaklar Yayını, s. 404, Ankara.
- AL-Kadim, K. A., & Mohammed, M. H. (2017). The cubic transmuted Weibull distribution. *Journal of University of Babylon*, 3, 862-876.
- Barreto-Souza, W., & Cribari-Neto, F. (2009). A generalization of the exponential-Poisson distribution. *Statistics & Probability Letters*, 79(24), 2493-2500.
- Granzotto, D. C. T., Louzada, F., & Balakrishnan, N. (2017). Cubic rank transmuted distributions: inferential issues and applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87(14), 2760-2778.
- Markov, S., Iliev, A., Rahnev, A., & Kyurkchiev, N. (2018). A note on the Log-logistic and transmuted Log-logistic models. Some applications. *Dynamic Systems and Applications*, 27(3), 593-607.
- Merovci, F. (2013). Transmuted Rayleigh distribution. *Austrian Journal of Statistics*, 42(1), 21-31.
- Merovci, F. (2013). Transmuted Lindley distribution. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 238(1393), 1-20.
- Rahman, M. M., Al-Zahrani, B., & Shahbaz, M. Q. (2018). Cubic Transmuted Pareto Distribution. *Annals of Data Science*, 1-18.
- Shanker, R., Hagos, F., & Sharma, S. (2016). On two parameter Lindley distribution and its Applications to model Lifetime data. *Biometrics & Biostatistics International Journal*, 3(1), 1-8.
- Shaw, W. T., & Buckley, I. R. (2009). The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. *arXiv preprint arXiv:0901.0434*.

## EK 1 DELTA( $\delta$ ) PARAMETRESİ İÇİN ARALIK İNCELEMESİ

Delta parametresinin sınırlarını belirleyebilmek için aşağıda belirtilen koşullar üzerinden bir yol izleyelim;

- 1)  $g(0) = 0$  (Üstel dağılımın lineer birleşimi olmasından dolayı)
- 2)  $g(1) = 1$
- 3)  $g'(u) \geq 0$

bu koşulları tek tek inceleyelim.

1)

$$g(u) = u + u(1-u)P(u)$$

$$g(u) = u + u(1-u)(u - \frac{1}{2})\delta$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 + 0(1)(-\frac{1}{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2)

$$g(u) = u + u(1-u)P$$

$$g(u) = u + u(1-u)(u - \frac{1}{2})\delta$$

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 + 1(0)(\frac{1}{2}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3)

$$g(u) = u + u(1-u)P(u)$$

$$g(u) = u + u(1-u)(u - \frac{1}{2})\delta$$

$$g'(u) = 1 + (-3u^2 + 3u - \frac{1}{2})\delta \geq 0$$

şimdi  $\delta \geq 0$  ve  $\delta < 0$  durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

a)  $\delta \geq 0$  olsun.

$$g'(u) = 1 + (-\frac{1}{2} + 3u(1-u))\delta \geq 0 (?)$$

$-3u^2 + 3u$  ifadesi  $u > 0$  iken pozitif değer aldığından dolayı;

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\delta \geq 0$$

$1 \geq \frac{\delta}{2}$  olup  $0 \leq \delta \leq 2$  elde edilir.

**b)**  $\delta < 0$  olsun.

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + 3u(1 - u)\right)\delta \geq 0 \text{ olmalı}$$

$3u(1 - u)$  ifadesinin alacağı maksimum değer  $\frac{3}{4}$  dür. Yani ;

$$1 - \frac{\delta}{2} + \frac{3\delta}{4} \geq 0$$

$$1 + \frac{\delta}{4} \geq 0 ; \delta \geq -4 \text{ elde edilir.}$$

O halde  $-4 \leq \delta \leq 2$  bulunur.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülseren ERSAN  
Doğum Yeri : Altındağ/ANKARA  
Doğum Tarihi : 21.08.1994  
Medeni Hali : Bekar  
Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim Durumu

Lise : Gaziçiftliği Lisesi (2012)  
Lisans : Ankara üniversitesi İstatistik(2016)  
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı  
(Mart 2020)

### Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

Ersa Mobilya San. ve Tic. A.Ş. ( Kasım 2019 - )