

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MOYAL FORMALİZMİNDE KANONOİD DÖNÜŞÜMLER

Mehmet Ali KOÇMEN

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Mehmet Ali KOÇMEN tarafından hazırlanan “**Moyal Formalizminde Kanonoid Dönüşümler**” adlı tez çalışması 11/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Adnan TEĞMEN

Jüri Üyeleri :

Başkan: Prof. Dr. Adnan TEĞMEN
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Hüseyin ÜNVER
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Bora ALKAN
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ahmet KILIÇ
Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüsnü AKSAKAL
Niğde Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

MOYAL FORMALİZMİNDE KANONOİD DÖNÜŞÜMLER

Mehmet Ali KOÇMEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Adnan TEĞMEN

Bu tezde, son yıllardaki bilimsel çalışmalarla yoğun bir araştırma alanı haline gelmiş olan kanonik ve kanonoid dönüşümler hem klasik hem de kuantum mekaniği açısından incelenerek örneklendirilmiştir. Bilindiği gibi bu dönüşümler Hamilton hareket denklemlerini daha basit bir forma indirgemek için kullanılan terslenebilen gönderimlerdir. Bir dönüşümün kanonik ve kanonoid olması için gerek ve yeter şartlar verilmiş ve klasik mekanik ile kuantum mekaniğini ilişkilendiren Moyal formalizmi sayesinde, dönüşümler teorisinde oldukça önemli bir yer tutan ve daha önce yapılmamış olan kuantum kanonoid dönüşümlerin klasik faz uzayında formüle edilmiştir. Kanonoid dönüşümlerde, Hamilton hareket denklemlerini değişmez bırakan yeni bir Hamilton fonksiyonunun varlığı yeterli olurken, kanonik dönüşümlerde, yeni Hamilton fonksiyonunun varlığının yanı sıra yeni faz uzayı değişkenlerinin Poisson parantezinin de değişmez kalmasını gerektirmektedir. Her iki dönüşümün de bu tanımlarından yararlanarak bir kıyaslama kurulmuş ve kanonik dönüşümlerin, kanonoid dönüşümlerin özel bir alt sınıfı olduğu sonucu çıkarılmıştır. Ayrıca klasik Hamilton formalizmindeki hareket denklemleri, kuantum mekaniği için Moyal formalizminde kurulmuştur.

Haziran 2013, 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: Faz uzayı, kanonik ve kanonoid dönüşümler.

ABSTRACT

Ph.D.Thesis

CANONOID TRANSFORMATIONS IN MOYAL FORMALISM

Mehmet Ali KOÇMEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof.Dr. Adnan TEĞMEN

In this thesis, canonical and canonoid transformations being an intensive research area by means of studies made widely in this area in recent years are investigated and exemplified. As known, these are invertible transformations used to reduce the Hamilton's equations of motion to a simpler form. The necessary and sufficient conditions for these transformations to be canonoid and canonical are given, and quantum canonoid transformations which are important in the transformation theory are constructed using the Moyal formalism being a bridge between classical and quantum mechanics. For a transformation to be canonoid, while it is enough that it preserves the form of the Hamilton's equations of motion; in the case of a canonical transformation, the invariance of the Poisson bracket of new phase space variables is required. By constructing a comparison of these transformations both, it is shown that the canonoid transformation is a special case of the canonical transformation. Finally, quantum Hamilton's equations of motion corresponding to the classical case are constructed in Moyal formalism.

June 2013, 35 pages

Key Words: Phase space, canonical and canonoid transformations.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeye katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Adnan TEĞMEN'e(Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı) çalışma grubumuzun başkanı sayın Prof. Dr. Hüseyin ÜNVER'e ve Prof. Dr. Bora ALKAN'a, çalışmalarım sürecinde manevi desteklerini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. R. Gökhan TÜRECİ ve Yrd. Doç. Dr. Zafer NERGİZ'e, tezin yazılması sırasında ifade bozuklukları ve kelime hatalarımı düzelten değerli eşim Kübra KOÇMEN'e ve mesai arkadaşım Tolga ÖNCÜ'ye, Fen Bilimleri Enstitüsü çalışanlarına bunun yanı sıra Fizik bölümünün değerli ve saygıdeğer tüm öğretim üyelerine en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Mehmet Ali KOÇMEN

Ankara, Haziran 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KLASİK MEKANİKTE KANONOİD VE KANONİK DÖNÜŞÜMLER.....	3
2.1 Kanonoid Dönüşüm Örnekleri.....	4
3. KLASİK FAZ UZAYINDA KUANTUM MEKANİĞİ	19
3.1 Weyl Kuantumlaması.....	20
3.2 Bazı Sayısal (c-number) Fonksiyonların Kuantumlanma Halleri	21
3.3 Moyal (*) Çarpımı.....	21
3.4 Moyal (*) Çarpımının Özellikleri	22
3.5 Bazı Moyal Çarpım Örnekleri.....	24
3.6 Moyal Parantezinin Bazı Özellikleri.....	28
4. MOYAL FORMALİZMİNDE HAREKET DENKLEMLERİ	30
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	32
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	35

SİMGELER DİZİNİ

q	Genelleştirilmiş Koordinat
p	Genelleştirilmiş Momentum
$H(q,p,t)$	Hamilton Fonksiyonu
$L(q,p,t)$	Lagrange Fonksiyonu
$K(q,p,t)$	Kamiltonian
$*$	Moyal Çarpım
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$C(q,p,t)$	Hareket Sabiti
$\hat{p}, \hat{q}$	Operatörler
$A(q,p,t)$	Reel Değerli Fonksiyon
$\hbar$	Planck Sabit

1.GİRİŞ

Öteden beri, hem klasik hem de kuantum mekaniğini tek bir kaynaktan türetme düşüncesi, başta P.A.M. Dirac olmak üzere pek çok fizikçiyi meşgul etmiştir. Moyal formalizmi sayesinde klasik faz uzayı kullanılarak kuantum mekaniği tasvir edilebilmektedir. Bunun anlamı, klasik faz uzayında yapılan her türlü işlemin kuantum mekaniğinde de yapılabilecek olmasıdır. Günümüzde, Moyal formalizmi bu özlemi gidermiş olarak görünmektedir. Moyal formalizmi sayesinde, dönüşümler teorisinde oldukça önemli bir yer tutan kanonoid dönüşümler, klasik faz uzayı kullanılarak kuantum mekaniği için de tanımlanabilecektir.

Moyal gösteriminde, konum ve momentum sayısal (c-number) fonksiyonlar olduğundan tıpkı klasik mekanikte olduğu gibi kuantum mekaniğinde de faz-uzayı kavramı tanımlanabilir, dolayısıyla kanonoid dönüşümler uygulanabilir. Kanonoid dönüşümler, gücü kuantum mekaniğinde tam olarak fark edilememiş olmasına rağmen klasik mekaniğin etkili araçlarından biridir. Dönüşümler teorisinin kuantum mekaniğinin gelişimine katkısı o kadar büyüktür ki, çok yakın bir gelecekte kuantum mekaniğinin , Poisson, Jakobi, Appell ve Hamilton tarafından başlatılan kanonik formalizmin yeni bir evresi olan analitik dinamiğe benzer bir yapıya sahip olmasına neden olabilecektir.

Bilindiği gibi kanonik dönüşümler ve onun daha geniş bir formu olan kanonoid dönüşümler Hamilton mekaniğinde çok önemli bir yere sahiptir. Bu dönüşümler Hamilton hareket denklemlerini daha basit bir forma indirgemek için kullanılan terslenebilir gönderimlerdir. Böyle dönüşümler, Hamilton denklemlerini biçim olarak değişmez bırakan yeni bir Hamilton fonksiyonunun varlığını gerektirirken, yeni faz uzayı değişkenlerinin Poisson parantezini de değişmez bırakması gerekir. Kanonoid dönüşümler, kanonik dönüşümlere göre daha geniş bir sınıfa sahip olup, daha basit ve bilinen sistemlere geçmek için yeni bir Hamilton fonksiyonu üretebilen terslenebilir bir gönderim bulmak yeterli olur.

Başlangıç olarak, bu dönüşümlerin daha iyi anlaşılması ve teorik alt yapının oluşması için kanonik ve kanonoid dönüşümler klasik kökenli olduğundan öncelikle klasik mekanikte bir dönüşümün kanonoid olması ve kanoniklik şartı genel olarak incelenerek

örneklendirilmiş, klasik faz uzayında kuantum mekaniği tanımı ve örneklendirilmesi, Weyl Kuantumlaması ve Moyal formalizminde yıldız çarpımı($*$) denilen, abelyen olmayan fakat asosiyatif olan, etkili bir çarpımın özellikleri ve hareket denklemleri araştırılmış, kanonik ve kanonoid kıyaslaması yapılarak kanonoidlikte $\{Q,P\}$ parantezi üzerinde hiç bir şart olmadığı ve bir dönüşümün, her H 'ye göre kanonoid ise o dönüşüm kanonik olacağı tespit edilmiştir. Eşdeğer olarak bu durum, $\{Q,P\}$ parantezinin sabit bir değere eşit olması demektir. Geleneksel olarak $Sabit=1$ (bir) alınır. Dolayısıyla kanonoid dönüşümler, dinamik sistemlerin çözülmesinde daha geniş ve rahat bir hareket alanı sağlamakla birlikte kanonik dönüşümler, kanonoid dönüşümlerin özel bir alt sınıfı olarak kalmaktadır.

2. KLASİK MEKANİKTE KANONİD VE KANONİK DÖNÜŞÜMLER

Fiziğin temel amacı doğayı anlama çabasıdır. Bu söylem, matematiksel olarak nesnelerin hangi zamanda, hangi konumda ve hızda olacağını belirlenmesi anlamına gelir. Daha teknik bir söylemle, bu işlem sistemin hareket denklemlerinin çözümünü bulmaya özdeştir. Fizikte tam olarak çözüme kavuşturulabilmiş sistem sayısı oldukça azdır. Bunlar arasında en bilinenler, serbest parçacık ve harmonik salıncı sistemleridir. Dinamik sistemler matematiksel olarak Hamilton fonksiyonu veya hamiltoniyen ile karakterize edilirler. Bu durumda çözülebilen hamiltoniyen sayısı oldukça azdır diyebiliriz.

Çözülmesi oldukça zor görünen hamiltoniyenleri çözüme ulaştırmak için kullanılan en etkili yöntem kanonik dönüşüm kullanmaktır. Bu yöntemde, çözümünde güçlük çıkan hamiltoniyen, konum ve momentumlar değiştirilerek çözümü iyi bilinen veya çözülmesi çok daha kolay olan bir hamiltoniyene dönüştürülmeye çalışılır. Bu yöntemin uygulanabilir olması için yeni konum ve momentum cinsinden yazılan sistemin Hamilton hareket denklemlerini biçim olarak bozmaması gerekir. Uzun yıllar boyunca, bu şartın sağlanabilmesi için yeni değişkenlerin Poission parantezinin bire eşit olması gerektiğine inanılmıştır. Artık bilinmektedir ki böyle bir şartın sağlanabilmesi için Poission parantezinin sistemin herhangi bir hareket sabitine eşit olması yeterlidir (Leubner ve Monika 1984). Diğer taraftan herhangi bir sabit sayı da doğrudan bir hareket sabiti olduğundan, bu tespit dikkate alındığında, kanonik dönüşümlerden daha genel bir dönüşümün varlığı söz konusu olmaktadır. Kanonik dönüşümlerden daha genel olan bu dönüşümlere Kanonoid dönüşümler denilmektedir. Dolayısı ile öncelikle kanonoid dönüşümleri tanımlayıp, örneklendirerek konuya giriş yapmak daha yerinde olacaktır.

Tanım 2.1

$H(p, q, t)$ hamiltoniyeni ile karakterize edilen ve hareket denklemleri

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.1)$$

ile verilen dinamik bir sistem için; eğer zamanı koruyan ve $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ genişletilmiş faz uzayı üzerinde tanımlı olan

$$(q, p, t) \rightarrow (Q(q, p, t), P(q, p, t), t) \quad (2.2)$$

dönüşümü, yeni değişkenler cinsinden yazılan

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q} \quad (2.3)$$

Hamilton denklemlerini sağlıyorsa, bu dönüşüme H hamiltoniyenine göre *kanonoid* bir dönüşümdür denir. Burada $K(Q, P, t)$ kamiltoniyen denilen dönüşmüş Hamilton fonksiyonudur. Çoğu zaman böyle bir dönüşüm hatalı olarak kanonik bir dönüşüm, olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca dikkat edildiğinde, yeni (Q, P) değişkenlerinin Poisson parantezi üzerinde hiçbir şart yoktur.

2.1 Kanonoid Dönüşüm Örnekleri

1. $H = \frac{p^2}{2}$ serbest parçacık hamiltoniyeni için Hamilton hareket denklemleri,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \quad (2.4)$$

şeklindedir. Bu dinamik sistem için

$$Q = q, \quad P = p^{\frac{1}{2}} - q^2 \quad (2.5)$$

dönüşümü uygulandığı zaman $K = \frac{1}{3}(P + Q^2)^3$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemleri değişmez kalır. Gerçekten, yeni değişkenler cinsinden yazılan

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = (P + Q^2)^2, \quad \dot{Q} = \dot{q}, \quad (2.6)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial P} = -2Q(P+Q^2)^2, \quad \dot{P} = \frac{\dot{P}}{2p^{\frac{1}{2}}} - 2q\dot{q} = -2qp \quad (2.7)$$

Denklemleri kendi içinde tutarlı kalacaktır. Dolayısı ile bu dönüşüm $H(q,p)$ Hamilton fonksiyonuna göre kanonoidir.

2. $H = qp$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = q, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p \quad (2.8)$$

Bu sistem için $Q = qe^{2t}$, $P = p^3$ dönüşümü yazıldığında $K = 3QP$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemlerinin değişmezliği sağlanır:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \dot{q}e^{2t} + 2qe^{2t} \\ &= \dot{q}e^{2t} + 2qe^{2t} = 3Q \\ &= qe^{2t} + 2qe^{2t} = 3qe^{2t} \\ 3qe^{2t} &= 3qe^{2t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial P} = 3p^2 \dot{p} = -3p^3 = 3P \quad (2.10)$$

dolayısı ile bu dönüşüm $H(q,p)$ Hamilton fonksiyonuna göre kanonoidir.

3. Hamilton fonksiyonu $H = \frac{p^2}{2} - q$ olan bir dinamik sistem için Hamilton hareket denklemleri şu şekildedir.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 1 \quad (2.11)$$

Bu dinamik sistem için faz uzayında,

$$Q = e^{\frac{p^2}{2}-q} + p^2, \quad P = p \quad (2.12)$$

dönüşümü yapılsın. Bu durumda dönüşümden sonra $K = P^2 - Q$ Hamilton fonksiyonu için hareket denklemlerinin değişmezliği sağlanmış olur. Gerçekten,

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 2P = p \cdot e^{\frac{p^2}{2}-q} \cdot \dot{p} + 2p \cdot \dot{p} - \dot{q} e^{\frac{p^2}{2}-q} = 2p, \quad (2.13)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 1 = \dot{p} \quad (2.14)$$

olduğundan, verilen dönüşüm $H = \frac{p^2}{2} - q$ Hamilton fonksiyonuna göre kanonoiddir.

Verilen bir Hamilton fonksiyonuna göre Kanonoid olan bir dönüşüm ikinci hatta üçüncü bir Hamilton fonksiyonunu da, hareket denklemlerini değişmez bırakacak şekilde kanonoid olarak kabul edebilir; fakat bu Hamilton fonksiyonlarının sayısı sonsuz olamaz.

Aşağıdaki teorem ile bir dönüşümün hangi şartlar altında kanonoid olduğu açık bir şekilde verilmiştir.

Teorem 2.1

$(q, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$ dönüşümünün kanonoid olması için gerek ve yeter şart Q ve P nin

Poisson parantezinin yani, $\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}$ ifadesinin bir hareket sabiti

olmasıdır.

Dolayısıyla, özdeş olarak

$$Q, P_{q,p} = C(q, p, t) \quad (2.15)$$

veya

$$\dot{C}(q, p, t) = 0 \quad (2.16)$$

şartları geçerlidir.

İspat:

Yeter şart ; $\Rightarrow$:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P}, \frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} \right) \Rightarrow \dot{C}(q, p, t) = 0 = \frac{d}{dt} Q, P_{q,p} \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt} Q, P_{q,p} = \left\{ \frac{dP}{dt}, Q \right\}_{q,p} + \left\{ P, \frac{dQ}{dt} \right\}_{q,p}$$

$$= \left(\left\{ \frac{dP}{dt}, Q \right\}_{Q,P} + \left\{ P, \frac{dQ}{dt} \right\}_{Q,P} \right) Q, P_{q,p}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} \right) Q, P_{q,p} \quad (2.18)$$

Bu aşamada $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}$ ve $\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$ ifadelerinin gerekli olduğu kabul edilirse

$\frac{d}{dt} Q, P = \dot{C}(q, p, t) = 0$ sonucuna ulaşılır.

Gerek Şart ; $\Leftarrow$:

$$\left(\dot{C}(q, p, t) = \frac{d}{dt} Q, P = 0 \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P}, \frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} \right) \quad (2.19)$$

(2.19) denklemini (2.18) denkleminde yerine yazıp, sıfır olduğunu kabul edersek

$$\frac{\partial}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial}{\partial Q} \dot{Q} = 0 \quad (2.20)$$

elde ederiz. (2.20) denkleminin geçerli olması $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}$ ve $\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$ şartını sağlayan $K(Q, P, t)$ gibi bir fonksiyonun varlığını gerektirir. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Örnek:

1. $H = \frac{1}{2} p^2 e^{-\gamma t} + g q e^{\gamma t}$ Hamilton fonksiyonu ile verilen örnek bir sistemi göz önüne alalım. Sistemin hareket denklemi, sistemin hareket sabiti ise

$$\dot{q} = \frac{\partial H_1}{\partial p} = p e^{-\gamma t}, \quad \dot{p} = \frac{\partial H_1}{\partial q} = g e^{\gamma t} \quad (2.21)$$

ile verilir. Gerçekten

$$\begin{aligned} C(q, p, t) &= \left(\dot{q} + \frac{g}{\gamma} \right) e^{\gamma t} \\ &= \left(p e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma} \right) e^{\gamma t} = p + \frac{g}{\gamma} e^{\gamma t}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\dot{C}(q, p, t) = \dot{p} + g e^{\gamma t}$$

$$= -ge^{\gamma t} + ge^{\gamma t} = 0 \quad (2.25)$$

Bu aşamada $Q, P = C$ koşulunu sağlayan Q ve P 'yi bulmaya çalışalım. Bu durumda $P = p$ olduğunu kabul ederek Q bulmaya çalışalım.

$$P = p, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = p + \frac{g}{\gamma} e^{\gamma t} \quad (2.26)$$

$$Q = qp + \frac{g}{\gamma} qe^{\gamma t} \quad (2.27)$$

$$q = Q \left(P + \frac{g}{\gamma} e^{\gamma t} \right)^{-1} \quad (2.28)$$

Böylece Q, P kanonoid çiftini belirlemiş oluruz. Şimdi de Hamilton hareket denklemlerini değişmez bırakan $K(Q, P, t)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım. $K(Q, P, t)$ fonksiyonu $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}$ ve $\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$ eşitliklerini sağlamak zorundadır. Dolayısı ile

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -p\dot{p} + \frac{g}{\gamma} \dot{p}e^{\gamma t} + gpe^{\gamma t}$$

$$= -pge^{\gamma t} + \frac{g}{\gamma} ge^{\gamma t} + gpe^{\gamma t}$$

$$= \frac{g^2}{\gamma} e^{\gamma t} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial P} &= \dot{Q} = \dot{q}p + q\dot{p} + \frac{g}{\gamma}\dot{q}e^{\gamma t} + gqe^{\gamma t} \\ &= pe^{-\gamma t}p + q - ge^{\gamma t} + \frac{g}{\gamma}pe^{-\gamma t}e^{\gamma t} + gqe^{\gamma t},\end{aligned}\quad (2.30)$$

$$\frac{\partial K}{\partial P} = p^2 e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma} p \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{p} = ge^{\gamma t} \quad (2.32)$$

$$K = \frac{p^3}{3} e^{-\gamma t} + \frac{g}{2\gamma} p^2 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}K, C &= \frac{\partial K}{\partial Q} \frac{\partial C}{\partial P} - \underbrace{\frac{\partial K}{\partial P} \frac{\partial C}{\partial Q}}_0 \\ &= ge^{\gamma t} = \frac{\partial C}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.34)$$

eşitlikleri iddiamızı doğrulamış olur.

2. $H = \frac{p^2}{2} + ge^{\gamma t}$ ç, Hamilton fonksiyonu ile verilen bir sistemi göz önüne alalım.

Sistemin hareket denklemleri

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -ge^{\gamma t}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad (2.35)$$

ve hareket sabiti ise,

$$C(q, p, t) = p + \frac{g}{\gamma} e^{\gamma t} \quad (2.36)$$

ile verilsin. Dolayısıyla,

$$\dot{C}(q, p, t) = \dot{p} + g e^{\gamma t} = -g e^{\gamma t} + g e^{\gamma t} = 0 \quad (2.37)$$

ifadesi, $C(q, p, t)$ 'nin bir hareket sabiti olduğunu gösterir.

Böylece $Q, P_{q,p} = C(q, p, t)$ koşulu sağlandığı bilindiğinden, $P = p$ olduğunu kabul ederek Q 'yu bulmaya çalışalım. Bu durumda (2.26) ifadesini tekrar göz önüne alınıp, eşitliğin her tarafının integrali alındığında

$$Q = qp + \frac{g}{\gamma} q e^{\gamma t} \quad (2.38)$$

ifadesi bulunmuş olur. Dolayısıyla Q, P kanonoid çiftini belirlemiş oluruz. Şimdi de Hamilton hareket denklemlerini değişmez bırakan $K(Q, P, t)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım. $K(Q, P, t)$ fonksiyonu, $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}$ ve $\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$ eşitliklerini sağlamak zorundadır.

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{p} = -g e^{\gamma t} \quad (2.39)$$

ve

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = P^2 + \frac{g}{\gamma} P e^{\gamma t} \quad (2.40)$$

$$K = \frac{p^3}{3} + \frac{g}{\gamma} \frac{P^2}{2} e^{\gamma t} + g Q e^{\gamma t} \quad (2.41)$$

Bu iki örnek göstermiştir ki, ortak hareket sabitine sahip sistemler, aynı zamanda ortak bir kanonoid dönüşüme de sahiptir.

Teorem 2.2

$(q, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$ dönüşümünün *bütün* Hamilton fonksiyonlarına göre kanonoid olması için gerek ve yeter şart;

$$Q, P = \text{sabit} \quad (2.42)$$

olmasıdır [Leubner ve Monika 1984].

İspat:

Yeni değişkenler cinsinden yazılmış Hamilton hareket denklemleri

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad (2.43)$$

şeklinde yazılıp, her iki tarafın çapraz türevleri alındığında

$$\frac{\partial}{\partial P} \frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{\partial \dot{P}}{\partial P}, \quad \frac{\partial}{\partial Q} \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} \quad (2.44)$$

eşitliği elde ederiz. Dolayısıyla çapraz türevli terimler eşit olmak zorunda olduğundan

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} + \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} = 0 \quad (2.45)$$

eşitliğini bulmuş oluruz. Burada

$$\dot{Q} = Q, H, \quad \dot{P} = P, H \quad (2.46)$$

şeklinde olup açık halleri

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.47)$$

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.48)$$

olduğundan;

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0 \quad (2.49)$$

buluruz. Bu adımdan devam ederek;

$$-\frac{\partial H}{\partial q} \left(\frac{\partial}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) + \frac{\partial H}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) = 0 \quad (2.50)$$

ifadesini elde ederiz. (2.50) eşitliğini, seçilen bütün Hamilton fonksiyonları için geçerli olmasını istersek; parantezli terimlerin her birinin sıfır olması gerekir. (2.50) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\frac{\partial}{\partial Q} Q, P = 0, \quad \frac{\partial}{\partial P} Q, P = 0 \quad (2.51)$$

ifadelerini elde ederiz ki, bu sonuçta bize $Q, P = \text{sabit}$ olduğunu söyler.

Tanım 2.2

$Q, P = 1$ özel şartını sağlayan kanonoid dönüşümlere kanonik dönüşüm denir.

Örnek:

1. İki koordinat takımı arasındaki dönüşüm şu şekilde verilsin

$$Q = \ln \left(1 + q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p \right); \quad P = 2 \cdot \left(1 + q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p \right) \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot \sin p \quad (2.52)$$

Bu dönüşümün kanonik olduğunu gösterelim; Bu dönüşümün kanonik olması için gerek ve yeter şart $Q, P = 1$ olmasıdır. Dolayısıyla bu ifadeyi daha açık

$$Q, P = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 1 \quad (2.53)$$

şeklinde yazıp, (52) ifadelerinden gerekli türevler alınırsa,

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\frac{1}{2} \cdot q^{\frac{-1}{2}} \cdot \cos p}{1 + q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-q^{\frac{1}{2}} \cdot \sin p}{1 + q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = q^{\frac{-1}{2}} \cdot \sin p + \sin 2p, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 2 \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p + 2q \cdot \cos 2p \quad (2.55)$$

İfadelerini elde etmiş oluruz. Dolayısıyla, (2.54) ve (2.55) denklemlerini (2.53) denkleminde yerine yazdığımızda,

$$Q, P = \cos^2 p - \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p \sin^2 p}{1 + q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p} + \sin^2 p + \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p \sin^2 p}{1 + q^{\frac{1}{2}} \cdot \cos p} = 1 \quad (2.56)$$

olduğundan verilen iki koordinat takımı arasındaki dönüşüm kanoniktir.

2. $n = 2$ serbestlik dereceli bir sistemde verilen

$$Q_1 = q_1, \quad P_1 = p_1 - 2p_2$$

$$Q_2 = p_2, \quad P_2 = -2q_1 - q_2 \quad (2.57)$$

dönüşümlerinin kanonik olduğunu gösterelim. Öncelikle kanonikliği göstermemiz için (2.57) ifadesinin ters dönüşümlerini yazarsak;

$$q_1 = Q_1, \quad q_2 = -2Q_1 - P_2$$

$$p_1 = P_1 + 2Q_2, \quad p_2 = Q_2 \quad (2.58)$$

şeklinde yazılır. Verilen dönüşümlerin kanonik olması için gerek ve yeter şart $Q, P = 1$ olması yeterlidir. Dolayısıyla bu ifadeyi $n = 2$ serbestlik dereceli sistemler için daha açık olarak

$$Q_1, P_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \quad (2.59)$$

ve

$$Q_2, P_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \quad (2.60)$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla, (2.57) ve (2.58) ifadelerini Poisson parantez açılımları olan (2.59) ve (2.60) denklemlerinde yerlerine yazıldığında $Q_1, P_1 = 1$, $Q_2, P_2 = 1$ olduğundan verilen dönüşümler kanoniktir.

3. İki koordinat takımı arasındaki dönüşüm şu şekilde verilsin

$$Q = \log\left(\frac{1}{q} \sin(p)\right), \quad P = q \cot(p) \quad (2.61)$$

Bu dönüşümün kanonik olduğunu gösterelim; Bu dönüşümün kanonik olması için gerek ve yeter şart $Q, P = 1$ olmasıdır. Dolayısıyla bu ifadeyi daha açık

$$Q,P = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 1 \quad (2.62)$$

şeklinde yazıp, (2.61) ifadelerinden gerekli türevler alınırsa,

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{1}{q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \cot(p)$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \cot(p), \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{\sin^2(p)} \quad (2.63)$$

ifadelerini elde ederiz. Şimdi de (2.61) ifadesinin ters dönüşümlerini yazarsak;

$$q = e^{-Q} \sin(p) = \frac{e^{-Q}}{\sqrt{1 + \cot^2(p)}} = \frac{e^{-Q}}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{q}\right)^2}},$$

$$p = \text{Arc cos}(Pe^Q) \quad (2.64)$$

şeklinde yazılır. (2.64) ifadelerinden

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = -\frac{q}{\sin^2(p)}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = -\cot(p) \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = \cot(p), \quad \frac{\partial p}{\partial P} = -\frac{1}{q} \quad (2.66)$$

Şeklinde türevler alınarak Poisson parantez açılımı olan (2.62) denkleminde yerlerine yazıldığında $Q, P = 1, \quad q, p = 1$ olduğundan verilen dönüşümler kanoniktir.

4. α -bir sabit olmak üzere bir serbestlik dereceli sistem için,

$$Q = \text{Arc tan}\left(\frac{\alpha q}{p}\right), \quad P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right) \quad (2.67)$$

dönüşümlerinin kanonik olduğunu gösterelim. Bu dönüşümün kanonik olması için gerek ve yeter şart $Q, P = 1$ olmasıdır. Dolayısıyla bu ifadeyi daha açık

$$Q, P = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 1 \quad (2.68)$$

şeklinde yazıp, (2.67) ifadelerinden gerekli türevler alınır,

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2 q^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2 q^2} \quad (2.69)$$

ve

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{p}{\alpha}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \alpha q \quad (2.70)$$

ifadelerini elde ederiz. Şimdi de (2.67) ifadesinin ters dönüşümlerini yazarsak;

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\alpha}} \sin(Q), \quad p = \sqrt{2\alpha P} \cos(Q) \quad (2.71)$$

şeklinde yazılır. (2.71) ifadelerinden gerekli türevler aldığımızda

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = \sqrt{\frac{2P}{\alpha}} \cos(Q), \quad \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{1}{\alpha q \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right)} \quad (2.72)$$

ve

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{p}{\alpha q^2 (1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2})}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\sqrt{\alpha} q \quad (2.73)$$

elde ederiz. Dolayısıyla (2.69) ve (2.70) denklemleri ile (2.72) ve (2.73) denklemlerini Poisson parantez açılımı olan (2.68) denkleminde yerlerine yazıldığında $Q, P = 1$, $q, p = 1$ olduğundan verilen dönüşümler kanoniktir.

3. KLASİK FAZ UZAYINDA KUANTUM MEKANİĞİ

Bu tezin başlıca önerisi, Weyl'in kovaryant faz uzayı formalizmi dahilinde, kuantum kanonoid ve kanonik dönüşümlerin formüle edilmesidir. Bu formülasyon kurulduğunda, önemli bir lineer olmayan kanonik dönüşüm olarak, eylem-açı değişkenlerinin kuantum mekaniksel versiyonunu da formüle etmek mümkün olacaktır.

Kuantumlamanın üç ana yolu vardır. *İlki*, 1920'lerde Heisenberg, Schrödinger, Dirac ve diğerleri tarafından geliştirilen, Hilbert uzayında operatörleri kullanan ve kuantum dilinde “*standart*” adı ile anılandır. *İkincisi*, yol integrallerine dayanır ve Dirac (1933) tarafından tasarlanıp Feynman tarafından inşa edilmiştir. *Üçüncü* olanı ise, Wigner'in yarı-dağılım fonksiyonuna (1932) ve Hilbert uzayındaki kuantum mekaniksel operatörler ile faz uzayındaki alışılmış sayısal (c-number) fonksiyonlar arasındaki Weyl karşılama ilkesine dayanan faz-uzayı formülasyonudur. Son çeyrek yüzyılda, kuantum mekaniğinin bu üçüncü formülasyonunun dikkate değer bir etkisi ortaya çıkmıştır.

Konum ve momentum sayısal (c-number) fonksiyonlar olduğundan tıpkı klasik mekanikte olduğu gibi kuantum mekaniğinde de faz-uzayı kavramı tanımlanabilir, dolayısı ile kanonik dönüşümler uygulanabilir. Kanonik dönüşümler, gücü kuantum mekaniğinde tam olarak fark edilmemiş olmasına rağmen klasik mekaniğin etkili araçlarından biridir. Kanonik dönüşümler kuantum mekaniğinin gelişiminde de hayati bir rol oynamıştır. Dönüşümler teorisinin kuantum mekaniğinin gelişimine katkısı o kadar büyüktür ki, çok yakın bir gelecekte kuantum mekaniğinin, Poisson, Jacobi, Poincare, Appell ve Hamilton tarafından başlatılan, kanonik formalizmin yeni bir evresi olan analitik dinamiğe benzer bir yapıya sahip olmasına neden olabilecektir.

Weyl kuantumlamasının lineer dönüşümler yanında lineer olmayan kanonik dönüşümler altında da değişmezlik göstermesi, değişik Weyl gösterimlerinin uygun bir kanonik dönüşümle birbirlerine bağlanmasına izin vererek, değişmezlik kavramına daha geniş bir anlam kazandırmaktadır. Genişletilmiş bu değişmezlik kavramı ise Dirac-Jordan dönüşüm teorisinin, Weyl kuantumlamasının Hilbert uzayı gösterimleri olarak doğal bir şekilde ortaya çıkmasına olanak vermektedir. Dirac'ın kuantum mekaniğini formüle ederken en büyük amaçlarından biri, klasik mekanik ile bağlantılarının araştırılması idi.

Dirac bu yüzden her iki mekaniği kanonik dönüşümler cinsinden anlamaya çalıştı. Bugün konu üzerine yapılan çalışmalarda, Dirac'ın hayal ettiği bağ ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu çalışmalar kapsamında ortaya konan klasik-kuantum kanonik dönüşümlerdeki evrensellik ise, en azından bazı sistemleri, eş zamanlı olarak hem klasik hem de kuantum mekaniksel olarak inceleme imkanı verdiğinden, Dirac'ın ünlü kitabı *The Principles of Quantum Mechanics*'de bahsedilen klasik ve kuantum mekaniğinin aynı kaynaktan türetilmesinin gerçekleştirilmesinde önemli bir adım anlamına gelmektedir.

Bilindiği gibi, Schrödinger ve Heisenberg temsillerine bir alternatif olarak kuantum mekaniğinin faz uzayı tasviri tıpkı klasik mekanikte olduğu gibi pek çok simplektik tekniğin uygulanabilmesine olanak vermektedir. Bu benzeşimin bir avantajı olarak bazı kuantum mekaniksel yapıların tanımlanması, açıklanması ve yorumlanması daha kolay olmaktadır.

3.1 Weyl Kuantumlaması

Kuantum kanonoid-kanonik dönüşümlerinin (QCT) kullanım alanı kuantum faz uzayıdır. QCT'ler ve onların sayısal (c-number) faz-uzay gösterimleri arasında bir bağlantı olması doğaldır. Verilen sayısal (c-number) faz-uzay monomiali $q^m p^n$ (burada m ve n negatif olmayan tamsayılardır.) ve onun simetrik olarak sıralanmış Hilbert uzayında bulunan operatörü, Fourier dönüşümü tarafından belirlenir:

$$\hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma d\tau dq dp F(q, p) e^{\frac{i}{\hbar} [\sigma \hat{q} - q + \tau \hat{p} - p]} \quad (3.1)$$

Bu ifade Weyl kuantumlaması olarak adlandırılan kuantumlama türüdür. Bunun tersi olarak, verilen $\hat{F}(\hat{q}, \hat{p})$ operatörü, faz uzay çekirdeği $F(q, p)$ basitçe aşağıdaki karşı gelmeyle özelleştirilir.

$$\hat{q} \rightarrow q, \quad \hat{p} \rightarrow p \quad (3.2)$$

Burada $\hat{F}(\hat{q}, \hat{p})$ nin simetrik olarak sıralanması şartı vardır.

3.2 Bazı Sayısal (c-number) Fonksiyonların Kuantumlanma Halleri

$$1- F(q, p) = qp \rightarrow \hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) \quad (3.3)$$

$$2- F(q, p) = qp^2 \rightarrow \hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{q}) \quad (3.4)$$

$$3- F(q, p) = q^2 p^2 \rightarrow \hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{6} (\hat{q}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q}^2 + \hat{p}\hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{p}\hat{q}^2\hat{p} + \hat{q}\hat{p}\hat{q}\hat{p} + \hat{q}\hat{p}^2\hat{q}) \quad (3.5)$$

Genel kuantumlanma kuralı ise

$$F(q, p) = q^n p^m \rightarrow \hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \hat{q}^r \hat{p}^m \hat{q}^{n-r} = \hat{t}_1^{(0)}$$

$$= \frac{1}{2^m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \hat{p}^s \hat{q}^n \hat{p}^{m-s} = \hat{t}_2^{(0)} \quad n, m \geq 0 \quad (3.6)$$

bağıntıları ile verilir.

3.3 Moyal (*) Çarpımı

Weyl - Wigner - Groenewold - Moyal (WWGM) formalizmi, kuantum mekanik operatörleri ve sayısal (c-number) faz-uzay fonksiyonları arasında, ‘Wigner’in yarı kararlı dağılım fonksiyonu’ ile ‘Weyl’in karşı gelme kuralını’ temel alan kuantumlamadır. Bu fonksiyonların çarpım kuralı Groenewold-Moyal’in * - çarpımı ile verilir.

Hilbert uzayı içinde operator çarpımına karşı gelen * - çarpımı aşağıdaki ifade ile verilir.

$$* = e^{\frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial q} \overrightarrow{\partial p} - \overrightarrow{\partial p} \overrightarrow{\partial q}} \quad (3.7)$$

Burada oklar türevlerin uygulama yönünü göstermektedir.

* - çarpımının açık formu ise aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} F(q, p) * G(q, p) &= F\left(q + i\frac{\hbar}{2}\partial p, p - i\frac{\hbar}{2}\partial q\right) G(q, p) \\ &= G\left(q - i\frac{\hbar}{2}\partial p, p + i\frac{\hbar}{2}\partial q\right) F(q, p) \\ &= G\left(q - i\frac{\hbar}{2}\partial p, p + i\frac{\hbar}{2}\partial q\right) F(q, p) \\ &= F\left(q + i\frac{\hbar}{2}\partial p, p\right) G\left(q - i\frac{\hbar}{2}\partial p, p\right) \\ &= F\left(q, p - i\frac{\hbar}{2}\partial q\right) G\left(q, p + i\frac{\hbar}{2}\partial q\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.4 Moyal (*) Çarpımının Özellikleri

$$1 - \left[F(q, p) * G(q, p) \right] * H(q, p) = F(q, p) * \left[G(q, p) * H(q, p) \right] \quad (3.9)$$

$$2 - \left[F(q, p) G(q, p) \right] * H(q, p) = \left[G(q, p) F(q, p) \right] * H(q, p) \quad (3.10)$$

$$3 - \left[F(q, p) G(q, p) \right] * H(q, p)$$

$$= \left[F\left(q + i\frac{\hbar}{2}\partial p, p - i\frac{\hbar}{2}\partial q\right) G\left(q + i\frac{\hbar}{2}\partial p, p - i\frac{\hbar}{2}\partial q\right) \right] * H(q, p) \quad (3.11)$$

$$4 - F(q, p) * G(q, p) * G^{-1}(q, p) = F(q, p) \quad (3.12)$$

$$5 - [F(q, p) * G(q, p)] * G^{-1}(q, p) = F(q, p) * [G(q, p) * G^{-1}(q, p)] \quad (3.13)$$

$$6 - F(q, p) G(q, p) * G^{-1}(q, p) \neq F(q, p) \quad (3.14)$$

$$7 - [F(q, p) G(q, p)] * H(q, p) \neq F(q, p) [G(q, p) * H(q, p)] \quad (3.15)$$

$$8 - q * p^{-1 \ n} = q^n p^{-n} - \left(\frac{n}{2}\right) i\hbar \frac{q^{n-1}}{p^{n+1}} \quad (3.16)$$

$$9 - q * p^{-1 \ n} = q^n p^{-n} - \left(\frac{n}{2}\right) i\hbar \frac{q^{n-1}}{p^{n+1}} \quad p^{-1} * q^n = q^n p^{-n} + \left(\frac{n}{2}\right) i\hbar \frac{q^{n-1}}{p^{n+1}} \quad (3.17)$$

$$10 - q^n p^{-n} + \left(\frac{n}{2}\right) i\hbar \frac{q^{n-1}}{p^{n+1}} q^n p^{-n} = \frac{1}{2} \left[q * p^{-1 \ n} * + p^{-1} * q^n * \right] \quad (3.18)$$

$$11 - F(q, p) * = F\left(q + i\frac{\hbar}{2}\partial p, p - i\frac{\hbar}{2}\partial q\right)$$

$$= F(q, p) + i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial F}{\partial q}\partial p + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\partial p^2$$

$$-i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\partial q + \frac{1}{2!}\left(-i\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\partial q^2 + \left(i\frac{\hbar}{2}\right)\left(-i\frac{\hbar}{2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial q\partial p}\partial q\partial p + \dots \quad (3.19)$$

$$12 - *F(q, p) = F\left(q - i\frac{\hbar}{2}\partial p, p + i\frac{\hbar}{2}\partial q\right)$$

$$= F(q, p) - i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial F}{\partial q}\partial p + \frac{1}{2!}\left(-i\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\partial p^2$$

$$+i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\partial q+\frac{1}{2!}\left(i\frac{\hbar}{2}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\partial q^2+\left(i\frac{\hbar}{2}\right)\left(-i\frac{\hbar}{2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial q\partial p}\partial q\partial p+.... \quad (3.20)$$

$$13 - *f(q, p) = [F(q, p) *]^* \quad (3.21)$$

$$14 - F(q) * G(q) = F(q) G(q) \quad (3.22)$$

$$15 - F(p) * G(p) = F(p) G(p) \quad (3.23)$$

$$16 - \frac{\partial}{\partial p} F * F^{-1} = \frac{\partial F}{\partial p} * F^{-1} + F * \frac{\partial F^{-1}}{\partial p} = 0 \quad (3.24)$$

$$17 - \frac{\partial f(q, p)}{\partial q} * = \frac{\partial}{\partial q} [f(q, p) *] \quad (3.25)$$

$$18 - \frac{\partial}{\partial q} f * g = \frac{\partial f}{\partial q} * g + f * \frac{\partial g}{\partial q} \quad (3.26)$$

$$19 - f(q) * e^{g(p+\frac{\hbar}{2})} = f\left[q+\frac{i\hbar g}{2}\right] e^{g(p+\frac{\hbar}{2})} \quad (3.27)$$

3.5 Bazı Moyal Çarpım Örnekleri

$$\begin{aligned} 1 - e^{q+p} * e^{-q-p} &= e^{\left(q+\frac{i\hbar}{2}\overline{\partial p}\right)+p} \cdot e^{-\left(q-\frac{i\hbar}{2}\overline{\partial p}\right)-p} \\ &= e^{q+\left(p+\frac{i\hbar}{2}\right)} \cdot e^{-q-\left(p+\frac{i\hbar}{2}\right)} = 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$2 - qp * = \left(q+\frac{i\hbar}{2}\partial p\right)\left(p-\frac{i\hbar}{2}\partial q\right)$$

$$= qp - \frac{i\hbar}{2} q \partial q + \frac{i\hbar}{2} p \partial p + \frac{\hbar^2}{4} \partial q \partial p \quad (3.29)$$

$$3 - *qp = qp + \frac{i\hbar}{2} q \partial q - \frac{i\hbar}{2} p \partial p + \frac{\hbar^2}{4} \partial q \partial p \quad (3.30)$$

$$4 - q * p = \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right) p = qp + \frac{i\hbar}{2} \quad (3.31)$$

$$5 - p * q = \left(p - \frac{i\hbar}{2} \partial q \right) q = qp - \frac{i\hbar}{2} \quad (3.32)$$

$$6 - q^2 * = \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right) \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right) = q^2 + i\hbar q \partial p - \frac{\hbar^2}{4} \partial p^2 \quad (3.33)$$

$$7 - *q^2 = \left(q - \frac{i\hbar}{2} \partial p \right) \left(q - \frac{i\hbar}{2} \partial p \right) = q^2 - i\hbar q \partial p - \frac{\hbar^2}{4} \partial p^2 \quad (3.34)$$

$$8 - q, q^2 + p^2{}^M = 2i\hbar p$$

$$p, q^2 + p^2{}^M = -2i\hbar q \quad (3.35)$$

$$9 - \frac{1}{q} * = \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right)^{-1} = \frac{1}{q} - \frac{i\hbar}{2q^2} \partial p - \frac{\hbar^2}{4q^3} \partial p^2 + \dots \quad (3.36)$$

$$10 - * \frac{1}{q} = \left(q - \frac{i\hbar}{2} \partial p \right)^{-1} = \frac{1}{q} + \frac{i\hbar}{2q^2} \partial p - \frac{\hbar^2}{4q^3} \partial p^2 - \dots \quad (3.37)$$

$$11 - q^2 * e^p * e^{-p} = \left[\left(q^2 + i\hbar q - \frac{\hbar^2}{4} \right) e^p \right] * e^{-p}$$

$$= e^{p - \frac{i\hbar}{2} \partial q} \left[\left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right)^2 + i\hbar \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right) - \frac{\hbar^2}{4} \right] e^{-p}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{p-\frac{i\hbar}{2}\partial q} \left(q^2 + i\hbar q \partial p - \frac{\hbar^2}{4} \partial p^2 + i\hbar q - \frac{\hbar^2}{2} \partial p - \frac{\hbar^2}{4} \right) e^{-p} \\
&= e^{p-\frac{i\hbar}{2}\partial q} \left(q^2 - i\hbar q - \frac{\hbar^2}{4} + i\hbar q + \frac{\hbar^2}{2} - \frac{\hbar^2}{4} \right) e^{-p} \\
&= e^{p-\frac{i\hbar}{2}\partial q} q^2 e^{-p} = q^2 e^{p-\frac{i\hbar}{2}\partial q} e^{-p} = q^2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
12 - q^2 * e^p * e^{-p} &= q^2 * e^p * e^{-p} \\
&= q^2 * e^p * e^{-p} = q^2
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
13 - q^2 * e^p &= \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right)^2 e^p \\
&= \left(q^2 + i\hbar q \partial p - \frac{\hbar^2}{4} \partial p^2 \right) e^p \\
&= e^{\left(p + \frac{i\hbar}{2} \partial q \right)} q^2 = \left(q + \frac{i\hbar}{2} \partial p \right)^2 e^p \\
&= \left(q^2 + i\hbar q - \frac{\hbar^2}{4} \right) e^p
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Sayısal (c-number) faz uzayı monomiallerinin * - çarpımları ile bunların görüntülerinin operatör çarpımları arasındaki ilişki

$$\hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) \hat{G}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma d\tau dq dp [F(q, p) * G(q, p)] e^{\frac{i}{\hbar} [\sigma \hat{q} - q + \tau \hat{p} - p]} \quad (3.41)$$

izomorfizimi ile verilir.

Örneğin, $q * p^2$ ifadesi $\hat{q}\hat{p}^2$ ye giderken, $qp * p$ ifadesi $\hat{q}\hat{p}^2 - i\hbar \frac{\hat{p}}{2}$ ye gider ki bu da qp ve p nin simetrik olarak düzenlenmiş çarpımlarına eşittir. Bu izomorfizim sayesinde, bazı basit de- kuantumlama operasyonlarını pratik olarak yapmak mümkün olabilmektedir.

Örneğin simetrik olarak düzenlenmemiş $\hat{p}\hat{q}$ operatörü $p * q = qp - \frac{i\hbar}{2}$ nin kuantumlanmış versiyonudur. Bunun tersi olarak, sayısal (c-number) $qp = \frac{1}{2} q * p + p * q$ fonksiyonunun kuantumlanmış versiyonu $\frac{1}{2} \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}$ dir. Sonuç olarak bu örnekler, sayısal (c-number) fonksiyonunun Weyl kuantumlama prosedürünün, otomatik olarak yıldız (*) çarpımları cinsinden yazılmasına indirgendiğini kanıtlar. Aynı zamanda, de-kuantumlama prosedürünün daha kolay olduğu açıktır.

Genel karşı gelme ilkesi aşağıdaki gönderimlerle özetlenebilir.

$$F(q, p) \leftrightarrow \hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) \quad (3.42)$$

$$F(q, p) * G(q, p) \leftrightarrow \hat{F}(\hat{q}, \hat{p}) \hat{G}(\hat{q}, \hat{p}) \quad (3.43)$$

Dolayısı ile bu izomorfizm sayesinde Poisson ve kuantum parantezine karşı gelen Moyal parantezi

$$Q, P^M = i\hbar, \quad Q, P^M = Q * P - P * Q \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

3.6 Moyal Parantezinin Bazı Özellikleri

$$1 - \{q, f\}_{q,p}^M = i\hbar \partial_p f \quad (3.45)$$

$$2 - \{p, f\}_{q,p}^M = -i\hbar \partial_q f \quad (3.46)$$

$$3 - \{f\}_{q,p} * \{g\}_{q,p}, h\}_{q,p}^M = \{f\}_{q,p} * \{g\}_{q,p}, h\}_{q,p}^M + \{f\}_{q,p}, h\}_{q,p}^M * g\}_{q,p} \quad (3.47)$$

$$4 - e_*^{\lambda f\}_{q,p} * \mu\}_{q,p} * e_*^{-\lambda f\}_{q,p} = \mu + \lambda \{f, \mu\}^M + \frac{\lambda^2}{2!} \{f, \{f, \mu\}^M\}^M + \frac{\lambda^3}{3!} \left\{ f, \{f, \{f, \mu\}^M\}^M \right\}^M + \dots \quad (3.48)$$

$$5 - \left\{ \underbrace{q, q, \dots, q, f^M \dots^M}_{n-\text{tan e}} \right\}^M = i\hbar^n \partial_p^n f \quad (3.49)$$

$$6 - \left\{ \underbrace{p, p, \dots, p, f^M \dots^M}_{n-\text{tan e}} \right\}^M = -i\hbar^n \partial_q^n f \quad (3.50)$$

$$7 - \{f, g\}_M \neq i\hbar \{f, g\}_p, \quad (m = f * g - g * f) \quad (3.51)$$

$$8 - \{f, q\} \text{ veya } \{p, f\}_M = i\hbar \{f, q\} \text{ veya } \{p, f\}_p \text{ burada}$$

$$\{f, q\}_M = -i\hbar \partial_p f \text{ ve } \{f, p\}_M = i\hbar \partial_q f \quad (3.52)$$

şeklinde yazılabilir. Kısaca Moyal parantezlerine aşağıdaki örnekler verilebilir.

$$1- \quad q, q^2 + p^2 \quad^M = 2i\hbar p \quad (3.53)$$

$$2- \quad p, q^2 + p^2 \quad^M = -2i\hbar q \quad (3.54)$$

4. MOYAL FORMALİZMİNDE HAREKET DENKLEMLERİ

Klasik faz uzayında tanımlanmış reel değerli $A(q, p, t)$ gibi bir fonksiyonumuz olsun. Moyal parantezi ile donatılmış klasik faz uzayında, $A(q, p, t)$ fonksiyonunun zaman içindeki değişimi Moyal parantezi cinsinden

$$\dot{A}(q, p, t) = [A(q, p, t), H(q, p)]_{q, p} \quad (4.1)$$

ile verilir. Burada $H(q, p)$ gerçel değerli olup $\hbar$ 'dan bağımsızdır. Ayrıca $A(q, p, t)$ fonksiyonu $A(q, p, t=t_0) = A_0(q, p)$ başlangıç şartlarını sağlar. Bu değişim özellikle q, p değişkenleri için

$$\begin{aligned} \dot{Q}(q, p, t) &= [Q(q, p, t), H(q, p)]_{q, p}, \\ \dot{P}(q, p, t) &= [P(q, p, t), H(q, p)]_{q, p} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ile verilir. Burada $Q(q, p, t)$, $P(q, p, t)$ değişkenleri

$$Q(q, p, t=t_0) = q, \quad P(q, p, t=t_0) = p \quad (4.3)$$

başlangıç şartlarını sağlar. (4.2) ve (4.3) denklemlerinden $t=t_0$ anı için

$$\begin{aligned} \dot{Q}(q, p, t=t_0) &= \frac{\partial}{\partial p} H(q, p), \\ \dot{P}(q, p, t=t_0) &= -\frac{\partial}{\partial q} H(q, p) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu son eşitliklerin

$$\dot{Q}(q, p, t) = \frac{\partial}{\partial P} H(Q, P),$$

$$\dot{P}(q, p, t) = -\frac{\partial}{\partial Q} H(Q, P) \quad (4.5)$$

ile verilen klasik Hamilton denklemlerine çok benzediğine dikkat edelim. Elde edilen bu sonuçlar kuantum mekaniksel dinamik bir sistemin, klasik faz uzayındaki karşılığının değişimine özdeş olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla klasik mekanikteki kanonoidlik ile Moyal formalizmindeki kanonoidlik kavramı tamamen birbirlerine özdeştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

1. Kanonik ve kanonoid dönüşümler hem klasik hem de kuantum mekaniği açısından incelenerek örneklendirilmiş ve bu dönüşümlerin Hamilton hareket denklemlerini daha basit bir forma indirgemek için kullanılan terslenebilen gönderimler olduğu gösterilmiştir.
2. Bir dönüşümün kanonik ve kanonoid olması için gerek ve yeter şartlar bulunmuştur.
3. Klasik mekanik ile kuantum mekaniğini ilişkilendiren Moyal formalizmi sayesinde, dönüşümler teorisinde oldukça önemli bir yer tutan ve daha önce yapılmamış olan kuantum kanonoid dönüşümler klasik faz uzayında formüle edilmiştir.
4. Kanonoid dönüşümlerde, Hamilton hareket denklemlerini değişmez bırakan yeni bir Hamilton fonksiyonunun varlığı yeterli olurken, kanonik dönüşümlerde, yeni Hamilton fonksiyonunun varlığının yanı sıra yeni faz uzayı değişkenlerinin Poisson braketinin de değişmez kalması gerektiği gösterilmiştir.
5. Kanonik ve kanonoid dönüşümlerin tanımlarından yararlanarak bir kıyaslama yapılmış ve kanonik dönüşümlerin, kanonoid dönüşümlerin özel bir alt sınıfı olduğu sonucu çıkarılmıştır.

KAYNAKLAR

- Anderson A. 1994. Canonical transformations in quantum mechanics, Ann. Physics, Vol. 232; pp. 292-331.
- Currie, D.G. and Saletan, E.J. 1972. Canonical transformations and quadratic hamiltonians. Nuovo Cimento B, Vol. 9; p 143.
- Carinena, J.F. and Ranada, M.F. 1989. Poisson maps and Canonoid transformations for time-dependent hamiltonian systems. Journal of Mathematical Physics, Vol. 30; pp. 2258-2266.
- Deenen, J. 1991. Generators for nonlinear canonical transformations. Journal of Physics A, Vol. 24; pp. 3851-3858.
- Dias, N.C. and Prata, J.N. 2007. Features of Moyal trajectories. Journal of Mathematical Physics, Vol. 48; pp. 12-109.
- Eraz, Ş. 2008. Kuantum kanonik dönüşümler. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, 36 s., Ankara.
- Groenewold, H. 1946. On the principles of elementary quantum mechanics. Physica, Vol. 12; pp. 405-460.
- Goldstein, H., Charles, P. and John, S. 1980. Classical mechanics, 2nd edition, Addison-Wesley Reading, 346 p., London.
- Gürkanlı, E. 2011. Klasik mekanikte bazı terslenebilir dönüşümler. Yüksek lisans tezi. Ankara Üniversitesi, 46 s., Ankara.
- Hurley, J. 1971. Necessary and sufficient conditions for a canonical transformation. Amerrican Journal of Physics, Vol. 40; pp. 533-535.
- Hakioğlu, T., Teğmen, A. and Demircioğlu, B. 2007. $\hbar$ -independent universality of the quantum-classical canonical transformations. Physics Letters A, Vol. 360; pp. 501-506.

- Jose, J.V. and Saletan, E.J. 1988. Classical dynamics - A contemporary approach, Cambridge University Press; pp. 201-226, Cambridge.
- Kibble, T.W. and Berkshire, F.H. 1999. Klasik Mekanik (çeviri: K. Çolakoğlu), Palme Yayıncılık, 361 s., Ankara.
- Leubner, C. and Marte, A.M. 1984. Generalized canonical transformations and constants of motion. Physics Letters A, Vol. 101; pp. 179-181.
- Leyvraz, F. and Seligman, T. H. 1989. Sequences of point transformations and linear canonical transformations in classical and quantum mechanics. Journal of Mathematical Physics, Vol. 30; pp. 2512-2515.
- Moyal, J. 1949. Quantum mechanics as a statistical theory. Proc. Cambridge Philos. Soc, Vol. 45; pp. 99-124.
- Teixeira, M.J., Negri, L.J., and Oliveira, L.C. 1989. Canonoid transformations in generalized mechanics. Journal of Mathematical Physics, Vol. 30; pp. 2062-2064.
- Teixeira, M.J., Negri, L.J., and Oliveira, L.C. 1987. Canonoid transformations and constants of motion. Journal of Mathematical Physics, Vol. 28; pp. 2369-2372.
- Teğmen, A., Dereli, T. and Hakioglu, T. 2009. Canonical transformations in three - dimension Phase-Space. International Journal of Modern Physics A, Vol. 24; pp. 4769-4788.
- Vegas, F.J.D. 1989. On the Canonical transformation theorem of currie and saletan. Journal of Physics A: Math. Gen. Vol. 22; pp. 1927-1931.
- Zachos, C. K., Fairline, D. B. and Curtright, T. L. 2005. Quantum Mechanics in Phase Space. World Scientific Publishing Company; pp.1-28, Singapore.
- Weyl, H. 1927. Quantenmechanik und gruppentheorie. Z. Physics, Vol. 46; pp. 1-46.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Ali KOÇMEN

Doğum Tarihi : 15/10/1973

Doğum Yeri : Muş

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve yıl)

Lise : Muş Lisesi-1992

Lisans : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik
Anabilim Dalı (1998)

Yüksek Lisans : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik
Anabilim Dalı(2000)

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Van Yüzüncü Yıl Üniv. Fizik Bölümü-1998-2000

Ankara Üniv. Fizik Bölümü-2001-2003

Türkiye Atom Enerjisi Kurumu -2003..

Yayınları (SCI ve diğer)

Koçmen, M.A., Teğmen, A., Türeci, D., Güleçyüz, M.Ç., Türeci, R.G. 2013. The Albedo and Constant Source Problems for Extremely Anisotropic Scattering, Kerntechnik. (Basım Aşamasında)