

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇOKLU SİSTEMLERDE İLAVE BİLEŞEN KAYNAKLI DÖNEM  
DEĞİŞİMLERİNİN ANALİZİ YAZILIMI

Barış GÜLER

ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

ANKARA  
2025

Her hakkı saklıdır

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## ÇOKLU SİSTEMLERDE İLAVE BİLEŞEN KAYNAKLI DÖNEM DEĞİŞİMLERİNİN ANALİZİ YAZILIMI

Barış GÜLER

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özgür BAŞTÜRK

Bu tez çalışması, temelde ilave bileşen kaynaklı ışık-zaman etkisi olmak üzere, çeşitli fiziksel mekanizmalar kaynaklı Tutulma Zamanlaması Değişimi (ing, Eclipse Timing Variation - ETV) ya da daha yaygın bilinen adıyla O-C eğrisi analizlerini gerçekleştirmeyi amaçlayan bir yazılım paketini (`oc_py`) tanıtmak ve kullanıcı kılavuzunu bir arada sunmayı amaçlamaktadır. Yazılım, çift yıldızların fotometrik gözlemlerle elde edilen örtme / örtülme zamanları ve bir lineer efemeris denklemi üzerinden hesaplanan tutulma zamanları arasındaki farklardan (O-C) hareketle O-C verisini oluşturur, istenen fiziksel mekanizmalara ilişkin teorik O-C modellerinin oluşturulmasını sağlar, bu modellerin veriye en küçük kareler yöntemi, optimizasyon teknikleri ve olasılıkçı modelleme yaklaşımlarıyla uyumlanması için araçlar sunar. O-C değişimine neden olan etkilerden ilave bileşen kaynaklı ışık-zaman etkisi gerek Kepleryan, gerekse de Newtonyan (dinamik) yörünge modelleri bağlamında ele alınmıştır. Yazılım açık kaynak kodlu ve özgür bir yazılım paketi olarak Python dilinde ve modüler yapıda geliştirilmiştir.

**Haziran 2025, 59 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Tutulma Zamanı Değişimi, Yörünge Periyodu Değişimi, O-C Analizi, Çok Bileşenli Sistemler, Ek Cisimler, Çift Yıldızlar, Ötegezegenler, Python

# ABSTRACT

Master Thesis

## A SOFTWARE PACKAGE FOR ANALYSES OF ORBITAL PERIOD VARIATIONS DUE TO ADDITIONAL BODIES IN MULTIPLE SYSTEMS

Barış GÜLER

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Astronomy and Space Sciences

Supervisor: Prof.Dr. Özgür BAŞTÜRK

This thesis introduces a software package, `oc_py`, designed to perform analyses of Eclipse Timing Variations (ETV)—more commonly known as O–C curve analyses—arising from various physical mechanisms, principally the light-time effect due to additional bodies, and to present its user guide alongside. The software constructs observed–calculated (O–C) data by computing the differences between eclipse and occultation times obtained from photometric observations of binary stars and the eclipse times predicted by a linear ephemeris. It enables the generation of theoretical O–C models corresponding to the physical mechanisms of interest and provides tools to fit these models to the data using least-squares methods, optimization techniques, and probabilistic modeling approaches. Among the effects that drive O–C variations, the light-time effect induced by additional bodies is treated within both Keplerian and Newtonian (dynamical) orbital frameworks. The package is implemented in Python as an open-source, free, and modular software.

**June 2025, 59 pages**

**Key Words:** Eclipse Timing Variation (ETV), orbital period variations, O–C analysis, multi-body systems, additional bodies, binary stars, exoplanets, Python

## TEŞEKKÜR

Bu tezi yazmamda başta her konuda yardımını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Özgür Baştürk'e, çalışmamın her noktasında yaptığı yardımlar için Arş. Gör. Dr. Ekrem Murat Esmer'e, çalışma arkadaşlarım Furkan Akar ve Ezgi Sertkan'a bir teşekkürü borç bilirim.

Tez çalışmam süresince bursiyeri bulunduğum 122F358 proje numarası ile TÜBİTAK tarafından desteklenen “Evrimleşmiş Çift Yıldızlar Etrafında Gezegen Araştırmaları” başlıklı 1001 Ar-Ge projesi kapsamındaki verilen destek için ayrıca teşekkür ederim.

Bu süreç boyunca her zaman maddi ve manevi yanımda olan annem Şerife GÜLER ve kardeşim Kaan GÜLER'e teşekkür ederim.

Bütün bunlar dışında lisans ve yüksek lisans hayatım boyunca gerek verdiği derslerle gerek fikirleriyle bana çok şey katan bütün öğretmenlerime teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca aklımı yitirmememi sağlayan tüm arkadaşlarıma ve Hayalet Sevgilim (İrem 2006) şarkısını yazdığı için İrem'e teşekkür ederim.

Barış GÜLER  
Ankara, Haziran 2025

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                              |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| TEZ ONAY SAYFASI                                                                                             |      |
| ETİK . . . . .                                                                                               | i    |
| ÖZET . . . . .                                                                                               | ii   |
| ABSTRACT . . . . .                                                                                           | iii  |
| TEŞEKKÜR . . . . .                                                                                           | iv   |
| SİMGELER DİZİNİ . . . . .                                                                                    | vi   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .                                                                                    | vii  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .                                                                                  | viii |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                                                           | 1    |
| 2. YÖNTEM . . . . .                                                                                          | 3    |
| 2.1 O-C Analizi . . . . .                                                                                    | 3    |
| 2.1.1 Tutulma zamanı ve ölçümü. . . . .                                                                      | 3    |
| 2.1.2 O-C grafiğinin oluşturulması . . . . .                                                                 | 4    |
| 2.1.3 O-C grafiğinin analizi . . . . .                                                                       | 5    |
| 2.1.4 İlave bileşenler kaynaklı ışık-zaman etkisi . . . . .                                                  | 7    |
| 2.1.5 N-Cisim yaklaşımı ile Newtonyan LiTE modeli. . . . .                                                   | 9    |
| 2.2 Eğri Uyumlama Yöntemleri . . . . .                                                                       | 11   |
| 2.2.1 En küçük kareler yöntemi. . . . .                                                                      | 11   |
| 2.2.2 Nelder–Mead optimizasyonu. . . . .                                                                     | 12   |
| 2.2.3 Markov Zincirli Monte Carlo (MCMC) . . . . .                                                           | 12   |
| 2.2.4 Lomb–Scargle periyodogramlarıyla frekans analizi . . . . .                                             | 14   |
| 2.3 oc_py Yazılımı . . . . .                                                                                 | 14   |
| 2.3.1 oc_py için kullanılanlar . . . . .                                                                     | 14   |
| 2.3.2 oc_py Özellikleri. . . . .                                                                             | 15   |
| 2.3.3 Parameter (Parametre). . . . .                                                                         | 16   |
| 2.3.4 Model Bileşenleri. . . . .                                                                             | 16   |
| 2.3.5 Model (OC_model) . . . . .                                                                             | 19   |
| 2.3.6 Veri nesnesi: OC_data. . . . .                                                                         | 21   |
| 2.4 Uyum Nesnesi: fit. . . . .                                                                               | 27   |
| 2.4.1 Levenberg–Marquardt ile uyum (fit_model) . . . . .                                                     | 27   |
| 2.4.2 Bayesçi uyum (fit_model_prob) . . . . .                                                                | 32   |
| 2.4.3 Newtonyan uyumlama. . . . .                                                                            | 37   |
| 2.4.4 fit_plot metodu: parametreler . . . . .                                                                | 38   |
| 3. SONUÇLAR VE BULGULAR . . . . .                                                                            | 40   |
| 3.1 Kepleryan Model Kullanılarak Oluşturulan Verinin Modellen-<br>mesi Sonucu Elde Edilen Sonuçlar . . . . . | 40   |
| 3.2 XY Boo Sisteminin oc_py ile O-C Analizi . . . . .                                                        | 41   |
| 3.3 NY Vir Sisteminin oc_py ile O-C Analizi . . . . .                                                        | 45   |
| 3.4 HT Cas . . . . .                                                                                         | 49   |
| 3.5 MR Del, DD Crb, DW Uma . . . . .                                                                         | 52   |
| 4. TARTIŞMA VE SONUÇ . . . . .                                                                               | 53   |
| KAYNAKLAR . . . . .                                                                                          | 56   |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                                                                           | 59   |

## SİMGELER DİZİNİ

|                      |                                            |
|----------------------|--------------------------------------------|
| $\Delta$             | Parametre değişimi                         |
| $\beta$              | Kuadratik katsayı                          |
| $\chi^2$             | Chi-kare istatistiği                       |
| $\chi^2_\nu$         | İndirgenmiş chi-kare ( $\chi^2/(N - k)$ )  |
| $\theta$             | Model parametreleri vektörü                |
| $\sqrt{\phantom{x}}$ | Kök alma operatörü                         |
| $ x $                | Mutlak değer (norm)                        |
| $\odot$              | Güneş simgesi                              |
| $T_0$                | Referans minimum zamanı                    |
| $P$                  | Yörünge periyodu                           |
| $E$                  | Epoch (çevrim sayısı)                      |
| $O$                  | Gözlenen minimum zamanı                    |
| $C$                  | Hesaplanan minimum zamanı                  |
| $O - C$              | Gözlenen eksi hesaplanan farkı             |
| $T_c$                | Hesaplanan minimum zamanı                  |
| $dP$                 | Periyot kayması                            |
| $dT$                 | Minimum zaman kayması                      |
| $Q$                  | Kuadratik katsayı                          |
| $e$                  | Yörünge dışmerkezliği                      |
| $\omega$             | Enberinin argümanı                         |
| $P_{\text{LiTE}}$    | Işık-zaman etkisi periyodu                 |
| $T_{\text{LiTE}}$    | Işık-zaman etkisi enberi zamanı            |
| amp                  | Işık-zaman etkisi yarı-genliği             |
| $A_{\text{LiTE}}$    | Işık-zaman etkisi yarı-genliği             |
| $a_{12} \sin i'$     | Merkez ikili sisteminin ışık-zaman genliği |
| $f(m_3)$             | Üçüncü cismin kütle fonksiyonu             |
| $m_3 \sin i'$        | Üçüncü cismin minimum kütlesi              |
| $a_3 \sin i'$        | Üçüncü cismin yörünge yarı büyük eksen     |
| $G$                  | Evrensel çekim sabiti                      |
| $\vec{r}_i$          | $i$ 'inci cismin konum vektörü             |
| $Z_0(t)$             | Z doğrultusundaki yer değiştirme           |
| $c$                  | Işık hızı                                  |

## Kısaltmalar

|      |                                                    |
|------|----------------------------------------------------|
| AIC  | Akaike Bilgi Kriteri                               |
| BIC  | Bayesyen Bilgi Kriteri                             |
| MCMC | Markov Zincirli Monte Carlo                        |
| LM   | Levenberg–Marquardt yöntemi                        |
| ETV  | Eclipse Timing Variation (Tutulma Zamanı Değişimi) |
| LiTE | Light-Time Effect (Işık-Zaman Etkisi)              |
| HJD  | Helyosentrik Julian Günü                           |
| BJD  | Baryosentrik Julian Günü                           |
| CCD  | Yüksek verimli dedektör (Charge-Coupled Device)    |
| AB   | Astronomik Birim                                   |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|            |                                                                                                           |    |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1  | V1828 Aql sisteminin bir yörünge dönemini kapsayan ışık eğrisi . . .                                      | 3  |
| Şekil 2.2  | XY Leo O-C grafiği . . . . .                                                                              | 8  |
| Şekil 2.3  | Elde edilen O-C modelinin grafiği . . . . .                                                               | 21 |
| Şekil 2.4  | XY Boo O-C grafiği (var.astro.cz verisi) . . . . .                                                        | 22 |
| Şekil 2.5  | “vis” grubunun çıkarılması sonrası O-C grafiği . . . . .                                                  | 23 |
| Şekil 2.6  | Global sigma-clipping uygulanmış O-C grafiği . . . . .                                                    | 24 |
| Şekil 2.7  | Moving-window + sigma-clipping ile aykırı değerleri bulunan O-C grafiği . . . . .                         | 24 |
| Şekil 2.8  | 20000-30000 çevrim aralığı normal noktaya indirilmiş veri grafiği . . .                                   | 25 |
| Şekil 2.9  | Kepleryan olarak %10 standart sapma ile oluşturulan O-C grafiği . . .                                     | 26 |
| Şekil 2.10 | En-küçük-kareler uyumu öncesi model ve veri . . . . .                                                     | 29 |
| Şekil 2.11 | En küçük kareler yöntemi ile elde edilen uyum grafiği . . . . .                                           | 30 |
| Şekil 2.12 | Nelder-Mead optimizasyonu ile elde edilen uyum grafiği . . . . .                                          | 32 |
| Şekil 2.13 | Yürüyücü izleri ( <code>trace_plot</code> ) . . . . .                                                     | 34 |
| Şekil 2.14 | Örneklerin ardıl (posterior) dağılımları ( <code>corner_plot</code> ) . . . . .                           | 34 |
| Şekil 2.15 | MCMC sonrası oluşan eğri ( <code>fit_plot</code> ) . . . . .                                              | 35 |
| Şekil 2.16 | Temizlenmiş örnek kümesi için köşe grafiği . . . . .                                                      | 35 |
| Şekil 2.17 | Ardıl (posterior) medyanyla nihai uyum eğrisi . . . . .                                                   | 36 |
| Şekil 3.1  | Kepleryan modellerle üretilen verinin farklı yöntemlerle çözümü . . . .                                   | 40 |
| Şekil 3.2  | XY Boo sisteminin O-C eğrisinin en küçük kareler uyumlaması ve artık grafiği . . . . .                    | 43 |
| Şekil 3.3  | XY Boo sisteminin O-C eğrisinin MCMC ve 2 adet ışık zaman etkisiyle uyumlaması ve artık grafiği . . . . . | 43 |
| Şekil 3.4  | XY Boo’nun bütün modellerinin bir arada bulunduğu O-C grafiği . . .                                       | 44 |
| Şekil 3.5  | NY Vir Q+2-LiTE köşe grafiği . . . . .                                                                    | 45 |
| Şekil 3.6  | NY Vir Q+2-LiTE $\text{ecc}=0$ $\omega = 0$ köşe grafiği . . . . .                                        | 46 |
| Şekil 3.7  | NY Vir’in bütün modelleri içeren grafiği . . . . .                                                        | 49 |
| Şekil 3.8  | HT Cas LiTE köşe grafiği . . . . .                                                                        | 50 |
| Şekil 3.9  | HT Cas LiTE+Q köşe grafiği . . . . .                                                                      | 51 |
| Şekil 3.10 | HT Cas uyum grafiği . . . . .                                                                             | 52 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|             |                                                                                                                                                        |    |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Çizelge 2.1 | En küçük kareler yöntemi ile bulunan parametreler . . . . .                                                                                            | 31 |
| Çizelge 2.2 | Nelder-Mead ile bulunan parametreler . . . . .                                                                                                         | 32 |
| Çizelge 2.3 | Model parametreleri ve belirsizlikleri (güncel değerler) . . . . .                                                                                     | 36 |
| Çizelge 2.4 | <code>fit_plot</code> fonksiyonunun parametreleri ve açıklamaları . . . . .                                                                            | 39 |
| Çizelge 3.1 | 4 farklı model çözümü sonuçları . . . . .                                                                                                              | 41 |
| Çizelge 3.2 | 4 farklı model çözümüne ait uyum başarımını gösteren istatistiksel parameterlerin ( $\chi^2$ , AIC, BIC) değerleri . . . . .                           | 41 |
| Çizelge 3.3 | Farklı uyum yöntemleriyle elde edilen parametre değerleri ve uyum istatistiklerinin karşılaştırılması . . . . .                                        | 42 |
| Çizelge 3.4 | 2×LiTE Modeli Parametreleri ve Uyum İstatistikleri . . . . .                                                                                           | 44 |
| Çizelge 3.5 | Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE Çözüm 1 ile <code>oc_py</code> Q+2×LiTE çözümünün karşılaştırılması . . . . .                                                | 47 |
| Çizelge 3.6 | Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE Çözüm 2 ile <code>oc_py</code> Q+2×LiTE çözümünün karşılaştırılması . . . . .                                                | 47 |
| Çizelge 3.7 | Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE ( $e = 0$ , $\omega = 0$ ) ile <code>oc_py</code> Q+2×LiTE ( $e = 0$ , $\omega = 0$ ) modellerinin karşılaştırması . . . . . | 48 |
| Çizelge 3.8 | Han vd. (2023) ve <code>oc_py</code> ile yapılan modellerin karşılaştırılması .                                                                        | 51 |

## 1. GİRİŞ

Bu tez çalışması, örten çift yıldızlarda gözlenen dönem değişimlerinin Tutulma Zamanlaması Değişimi (Eclipse Timing Variations, ETV) yöntemi ya da daha yaygın bilinen adıyla O-C analizlerini, Python dilinin olanaklarından faydalanarak gerçekleştirmek için bu tez kapsamında geliştirilen bir yazılım paketini (OCPy) tanıtmaktadır.

Yörünge eğim açısı uygun çift sistemlerde (örten çift yıldızlar), bileşenler ortak kütle merkezi etrafındaki hareketleri sırasında gözlemcinin bakış doğrultusunda birbirlerinin önünden geçerler. Bu sırada gözlemci tarafından alınan ışıpta bir kayıp gerçekleşir. Bu olgular tutulma ve örtme adını alır. Sistematik gözlemlerine ilişkin en eski gözlem kayıtları bulunan bir örten çift yıldız olan Algol ( $\beta$  Persei), 17. yüzyılda Geminiano Montanari tarafından keşfedilmiştir. 19. yüzyılda ise bu yıldızın parlaklığının zamanla değiştiği John Goodricke tarafından ortaya atılmıştır. O günden bu güne binlerce örten çift yıldız keşfedilmiştir.

Kepleryan yörünge hareketi gereği tutulmaların dönemli olması beklenir. Ancak bazı olgular (ilave cisim kaynaklı ışık-zaman etkisi, bileşenler arası kütle aktarımı, eksen dönmesi, kütleçekimsel ısıma (gravitasyonel radyasyon), manyetik aktivite vb.) lineer bir efemerisle öngörülen tutulma zamanlarının değişimine ya da değişiyormuş gibi gözlenmesine neden olur. Gözlenen tutulma zamanları (ing. Observed, O) ile, bir referans tutulma zamanı ve yörünge dönemine dayanan lineer efemeris denklemi kullanılarak hesaplanan (ing. Calculated, C) değerler arasındaki farkların zamana göre değişiminin irdelenmesine O-C analizi denir. Bu değişimin sebebi ilave cisimler ise O-C değişimi Kepleryan ya da Newtonyan yaklaşımla modellenabilir ve bu modellerden hareketle ilave cismin parametrelerine erişilebilir.

Işık-zaman etkisine neden olan cismin gezegen kütle limitleri dahilinde olması durumunda gezegen keşfini olanaklı hale getirdiği için ETV yöntemi aynı zamanda

bir gezegen keşif yöntemidir. Bugüne kadar bu yöntemle 25 çift yıldız sisteminde 37 ötegezegen keşfi önerilmiştir (Sertkan 2025). Bu keşif çalışmalarında, gezegen kütlesinde bir cismin gözlenebilir düzeyde bir O-C değişimine neden olabilmesi için bileşenlerinin toplam kütlesi küçük olan, ortak zarf evresini tamamlamış, evrimleşmiş çift yıldız sistemleri hedeflenmektedir (Baştürk vd. 2023). Bu yöntemle yapılan keşiflerin en son örneklerinden biri Kepler-451 c ve Kepler-451 d (Esmer vd. 2022) keşifleridir.

Bu tez çalışmasında temelde ilave cisimler kaynaklı ışık-zaman etkisinin Kepleryan ve Newtonyan modellerinin yanı sıra O-C değişimine neden olan diğer etkilerin de en küçük kareler yöntemi, optimizasyon teknikleri ve olasılıkçı (Bayesci) modelleme yaklaşımlarıyla modellenmesine yönelik olarak Python programlama dilinde OCPy isimli bir yazılım paketi geliştirilmiştir. Yazılım, tutulma zamanlaması verilerinden O-C eğrisi oluşturur. Bu verileri belirli kriterlere göre süzer. Birim dönüşümlerini gerçekleştirir. Birden fazla fiziksel mekanizmayı içeren bileşik O-C modelleri kurulmasına imkan sağlar. Bu modelleri veriye uyumlayarak performans istatistiklerini hesaplar ve sonuçları görselleştirir. Modele özgü fiziksel parametrelerin türetilmesine olanak tanır.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>[https://github.com/etvproject122f358/oc\\_py](https://github.com/etvproject122f358/oc_py)

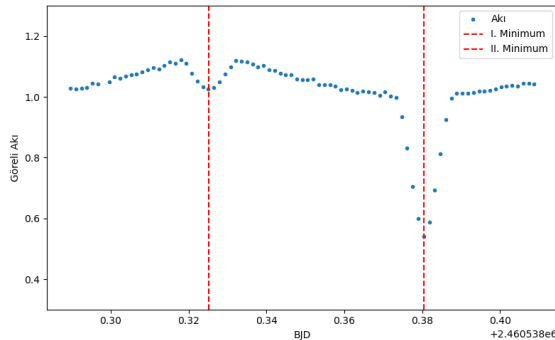
## 2. YÖNTEM

### 2.1 O-C Analizi

#### 2.1.1 Tutulma zamanı ve ölçümü

Çoklu sistemlerin yörünge dönem değişimleri, bu çoklu sistemin bileşenleri arasındaki etki-leşmeler, kütle kaybı, manyetik etkinlik, eksen dönmesi ve ilave bileşenlerin varlığı gibi olguların anlaşılmasında önemli rol oynar (Sterken 2005, Borkovits vd. 2015). Bu değişimleri anlamak için çift yıldızların ışık minimumlarının gözlenen zamanlarıyla, bir lineer efemeris denklemi kullanılarak hesaplanan zamanları arasındaki farkların (O-C) analizine ihtiyaç duyulur. Bunun için öncelikle minimum zaman kavramını tanıtmak gerekir. Minimum zaman, sistem bileşenlerinden birinin, gözlemcinin bakış doğrultusunda, diğerinin arkasında kaldığı zaman sistemden alınan toplam ışık seviyesinin yerel bir minimuma indiği tutulma zamanıdır. Genellikle ışığın daha fazla azaldığı, yani daha parlak cismin örtüldüğü zamana birinci minimum; daha az parlak cismin örtüldüğü zamana ise ikinci minimum adı verilir.

Bu minimum zamanlar, sistemin fotometrik (ışıkölçüm) gözlemleri yapılarak oluşturulan ışık eğrisi üzerindeki minimum profillerinden kiriş yöntemi, parabol uyumlaması, Kwee–van Woerden yöntemi (Kwee ve van Woerden 1956) gibi tekniklerle ölçülür (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 V1828 Aql sisteminin bir yörünge dönemini kapsayan ışık eğrisi (mavi veri noktaları) üzerinden Kwee–van Woerden yöntemi ile ölçülen 1. ve 2. minimum zamanları (kırmızı dik doğrular).

### 2.1.2 O-C grafiğinin oluşturulması

Örten çift yıldızların ışık eğrilerinde iki birinci minimum veya iki ikinci minimum arasındaki zaman farkı yörünge dönemini verir. Dönemin sabit olması durumunda sistemin sürekli aynı zaman aralıklarıyla minimum ışık seviyesinin gözlenmesi beklenir. Fakat sistemlerin yörünge dönemleri çeşitli nedenlerle sabit olmayabildiği için bu zaman aralıklarında değişimler gözlenebilir. Bu durumda gözlenen minimum zamanlarla (O: observed), geçmişte gözlenen bir minimum zamana sabit bir yörünge döneminin tam katlarının eklenmesiyle hesaplanan (C: calculated) minimum zamanlar arasında bir fark (O-C) oluşur. Bu farkın zamana ya da yörünge çevrim sayısına (epoch, E) karşılık çizdirilmesi sonucu O-C grafiği (eğrisi) elde edilir. Çift yıldızların yörünge dönem değişimleri, O-C eğrisinin oluşturulması ve analizi ile incelenir. Bu yöntemle bu nedenle, kısaca "O-C Yöntemi" ya da güncel literatürde daha yakın tarihli kullanılmaya başlayan adıyla "Tutulma Zamanları Değişimi Yöntemi (İng. Eclipse Timing Variations—ETV)" adı verilir.

Gözlenen minimum zaman, yıldızın fotometrik *gözlemleri sonucu elde edilen ışık eğrisi üzerinden ölçülen* minimum zamandır. Bu değere ulaşmak için sistem belirli zamanlarda bir minimumun başlangıç zamanından bitiş zamanına kadar gözlenir. Ardından bu yıldızın gözlem süreci boyunca etrafında bulunan ve ışığı sabit olan mukayese yıldızlarına göre ışık değişimi hesaplanır. Bu hesaplamaların sonucunda yıldızın diferansiyel parlaklık değerine ulaşılır. Bu değerler kullanılarak bir zaman-diferansiyel parlaklık grafiği (ışık eğrisi) elde edilir. Bu grafik, ideal durumda zaman sürekliliğinde elde edilebilmiş olsaydı, diferansiyel parlaklık değerinin en düşük olduğu akıya karşılık gelen zaman değeri minimum zaman olurdu. Fakat, gözlemlerin sürekli olmaması, gözlemsel belirsizlikler ve duyarlılık yetersizliklerinden dolayı diferansiyel parlaklık değerinin en düşük olduğu bu zaman değerinin üzerinde de bir belirsizlik bulunur. Gözlenen minimum zamanlarını belirleyebilmek için Kwee-Van Woerden, kiriş Yöntemi, parabol uyumlaması, ışık eğrisi modeli üzerinden zaman hesabı (Esmer 2022, Esmer vd. 2023) gibi yöntemler kullanılır. Bu yöntemlerin doğası da ölçülen minimum zaman üzerine ek belirsizlikler getirir.

Hesaplanan minimum zamanı (C) bulmak için en az bir referans minimum zamanına ( $T_0$ ) ihtiyaç vardır. Bu minimum zaman herhangi bir gözlenen minimum zamana eşit olabilir. Ardından sistemin yörünge dönemi kullanılarak belirlenen referans minimum zaman sonrası her bir çevrim ( $E$ : *epoch*) için bir minimum zaman lineer *efemeris* denklemiyle (Denklem-2.1) hesaplanabilir.

$$T_c = T_0 + P \times E \quad (2.1)$$

Burada  $T_0$  referans minimum zaman,  $P$  yörünge dönemi,  $E$  ise hesaplanması gereken zamanın çevrim sayısıdır. Dolayısıyla her gözlenen zaman ( $T$ ) için gözlenen zaman – hesaplanan zaman (O–C) Denklem-2.2’deki gibi yazılabilir. Bu denklem lineer efemeris denklemi olarak da bilinir.

$$O - C = T - (T_0 + P \times E) \quad (2.2)$$

### 2.1.3 O-C grafiğinin analizi

Çift yıldızlarda yörünge dönemi ve buna bağlı olarak tutulma zamanları çeşitli fiziksel nedenlerle değişir veya gözlemci tarafından değişiyor gibi gözlenir:

- **Lineer değişim:** O–C grafiğindeki doğrusal trend (eğilim), başlangıç efemeris elemanları (ışık elemanları) ( $T_0$ ,  $P$ ) üzerindeki sistematik hataların zamanla birikmesiyle ortaya çıkar ve bu eğilim, basit bir doğrusal model uyumlanarak, bu modelin y-eksenini kestiği noktadan  $\Delta T_0$  ve eğiminden  $\Delta P$  düzeltmelerinin hesaplanıp, efemerise uygulanmasıyla giderilebilir. Bu işleme lineer efemeris düzeltmesi adı verilir.
- **Kütle Transferi ve Kütle Kaybı:** Yakın çift yıldızlarda, bir bileşenin evrimleşerek Roche lobunu doldurmasıyla, 1. Lagrange noktasından ( $L_1$ ) diğer bileşene kütle transferi başlar. Kütle oranını değiştirecek şekilde korunumlu gerçekleşen bu kütle transferi ya da korunumsuz bir şekilde sistemden madde

uzaklaşmasıyla gerçekleşen kütle kaybı, açısal momentumda değişikliğe neden olarak yörünge periyodunu etkiler. Yörünge dönemindeki değişim O–C eğrisinde kuadratik (parabolik) eğilimler olarak kendini gösterir. Yörünge döneminin kısalması durumunda kolları aşağı bakan bir parabol gözlenirken, yörünge döneminin uzaması durumunda ise kolları yukarı bakan bir parabol gözlenir. Nitekim parabolün maksimum ya da minimumuna denk gelen referans minimum zamandan her iki yönde hareket edildiğinde kolları aşağı bakan parabolün eğimi negatif; dolayısıyla yörünge dönem değişimi azalma yönündeyken, kollar yukarı bakan parabolde ise bunun tersidir. Dolayısıyla O–C eğrisinde gözlenen söz konusu parabolün türevi dönem değişim hızını ve yönünü verir. Bu türden bir değişim, sistemden yıldız rüzgarları ve flare aktivitesiyle korunumsuz kütle kaybı, bileşenler arası korunumlu / korunumsuz kütle transferi gibi olguların sonucu olup; bu olgular sistemin kütle oranını değiştirdiğinden, kaybın hangi bileşenden olduğuna bağlı olarak değişen yönde seküler (tek yönlü) dönem değişimine neden olur.

- **Manyetik Etkinlik:** Manyetik etkinlik (aktivite), bileşenlerin dönme hızları ve kütlelerin yıldız içine dağılımını etkileyerek açısal momentum değişimine, dolayısıyla uzun vadeli ve çevrimsel yapıda yörünge değişimine neden olabilir. Bu değişimin nedeni, manyetik aktivite gösteren bileşenin dönme açısal momentumunun değişmesi ve bunun da toplam açısal momentum (dörtlü (ing. quadrupole) moment) üzerinden yörünge hareketine yansımasıdır. Bu mekanizma literatürde Applegate (1992) mekanizması olarak bilinir.

Ayrıca, manyetik etkinlik minimum profillerini simetrik olmaktan uzaklaştırdığı için minimum zaman ölçümünü zorlaştırabilir ve özellikle Kwee–van Woerden, kiriş yöntemi gibi temelde geometrik yaklaşımlarla, simetrik profillere dayanan tekniklerle ölçülen minimum zamanlardan oluşan O–C diyagramlarında, ölçüm belirsizliklerinin üzerinde saçılmalar ve yarı-dönemli değişimlere yol açar.

Bu olgular O–C grafiğinde manyetik aktivite çevrimleriyle korele, tekrarlayan düşük ve değişken genlikli saçılımlar şeklinde gözlenir.

- **Kütleçekimsel Işıma:** Özellikle kompakt çift yıldızlarda (nötron yıldızları,

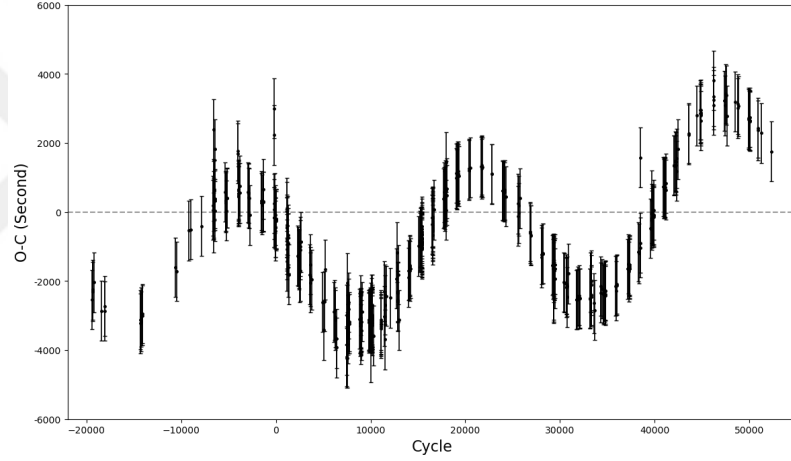
kara delikler), kütleçekimsel (gravitasyonel) dalgalar yoluyla enerji kaybı, bileşenlerin giderek birbirine yaklaşmasına ve buna bağlı olarak yörünge döneminin azalmasına neden olur. Uzun vadede tek yönlü (seküler), negatif kuadratik katsayılı, parabolik trend oluşturur; O–C grafiğinde sürekli azalan dönem nedeniyle kolları aşağı bakan bir parabol görülür.

- **Eksen dönmesi:** İki bileşenli sistemlerde eliptik yörüngenin çeşitli nedenlerle uzayda dönmesi sonucu enberi noktasının boylamının ( $\omega$ ) zamanla değişmesi durumudur. En iyi bilinen örneklerinden biri, Merkür’ün yörüngesinin Güneş’in kuvvetli kütleçekimsel alanı içinde bulunmasından dolayı görelilik etkileri nedeniyle yüzyılda 43 yay-saniyelik eksen dönmesi hareketidir ve Einstein’ın Genel Görelilik Kuramı’nın gözlemsel kanıtlarından biridir. Eksen dönmesinin bir diğer nedeni, yakın diğer cisimlerin değişen kütleçekimsel etkileridir. Yine Merkür için diğer Güneş Sistemi cisimlerinin değişen kütleçekim etkileri kaynaklı eksen dönmesi yaklaşık 532 yay-saniye/yıl olup, genel görelilik etkisinin 10 katından fazladır. Aynı olgu yüksek dışmerkezlikli (eksantrik) yörüngelere sahip çift yıldız ve ötegezegen sistemlerinde de gözlenebilmektedir (Wolf vd. 2024, Bernabò vd. 2025) Bu değişim nedeniyle tutulmaların yörüngenin farklı enberi uzaklıklarında gerçekleşmesi sebebiyle birbirini takip eden birinci minimum ile ikinci minimumlar arasındaki süre eşit olmaz. Eksen dönmesi dönemli bir hareket olduğu için O–C diyagramında birincil ve ikincil minimumlarda *ters farzda gerçekleşen, dönemli değişimler* olarak gözlenir. Bu nedenle eksen dönmesini çözümlemek için birinci ve ikinci minimum türlerini ayrı ayrı analiz etmek gerekir. Bu tezin yazılımı henüz eksen dönmesi çözmeye yönelik olmasa da gelecekte bu özelliğin de yazılıma eklenmesi planlanmaktadır.

#### 2.1.4 İlave bileşenler kaynaklı ışık-zaman etkisi

Işık-zaman etkisi (LITE), sistemin kütle merkezinin görünmeyen ilave bileşen(ler)le ortak kütle merkezi etrafındaki hareketi kaynaklı olarak gözlemciye yaklaşıp uzaklaşması sonucu, ışığın gözlemciye ulaşma süresindeki değişimler kaynaklıdır. Örneğin örten çift yıldız sistemlerinde ilave bir bileşenin varlığında, çift sistemin bu ilave bileşenle ortak kütle merkezi etrafında bir harekete sahip olacak olması nedeniyle

gözlemciye yaklaşp uzaklaşması sonucu oluşur. Örten çift sistemin gözlemciye yakın olduğu zamanlarda gözlenen tutulmalar daha erken gözlenirken, sistem gözlemciye uzak olduğunda, ışığın aradaki mesafeyi de kat etmesi gerektiğinden, tutulmalar olması gerekenden daha geç göz-lenir. Bu nedenle bu etki, gözlemlenen tutulma zamanlarında değişimlere ve sonuç olarak gözlenen minimum zamanları ile bir lineer efemeris kullanılarak hesaplanan minimum zamanları arasında bir fark oluşmasına neden olur. Bu durum, örten çift sistem örneğinde çift sistemin Kepleryan kabul edilebilecek bir yörünge hareketinin sonucu olduğu için O-C diyagramında Kepleryan yaklaşımla modellenabilir. XY Boo sisteminde LiTE kaynaklı olarak gerçekleştiği düşünülen ve Kepleryan bir fonksiyon ile modellenilebilecek bir O-C değışimi Şekil 2.2'de görölmektedir.



Şekil 2.2 XY Leo O-C grafiğı

Işık-Zaman Etkisi'nin yarı-genliğı ( $A_{LiTE}$ ), gözlenen çift sistemin kütle merkezinin görünmeyen üçüncü cisimle ortak kütle merkezi etrafındaki yörüngesinin büyüklüğüne ( $a_{12}$ ), üçüncü cismin yörünge eğim açısına ( $i'$ ), dış merkezliğine ( $e_3$ ) ve enberisinin boylamına ( $\omega_3$ ) bağlıdır (Irwin 1952). Bu ilişki aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$A_{LiTE} = \frac{1}{2} [(O - C)_{maks} - (O - C)_{min}] = \frac{a_{12} \sin i'}{\sqrt{1 - e_3^2 \cos^2 \omega_3}} \cdot \frac{1}{173.15} \quad (2.3)$$

O-C eğrisinin *Kepleryan* modeliyle elde edilen  $A_{LiTE}$ ,  $e_3$  ve  $\omega_3$  kullanılarak  $a_{12} \sin i'$  değeri elde edilebilir. Bu formölde kullanılan 173.15 sabiti  $a_{12} \sin i'$  değerin As-

tronomi Birimi (AB) cinsinden elde edilmesini sağlayan bir sabittir. Aynı zamanda *Kepleryan* model kullanılarak ışıık-zaman etkisinin döneminin bulunması da mümkündür. Kepler'in üçüncü yasası yardımıyla dönem ve  $a_{12} \sin i'$  değerlerini kullanarak cismin kütle fonksiyonu ( $f(m_3)$ ) elde edilir (Denklem-2.4).

$$f(m_3) = \frac{(a_{12} \sin i')^3}{P_{\text{LiTE}}^2} \quad (2.4)$$

Bu kütle fonksiyonunda  $P_{\text{LiTE}}$  yıl biriminde,  $a_{12} \sin i'$  AB biriminde alınırsa,  $f(m_3)$  Güneş kütlesi biriminde olacaktır. Birinci ve ikinci cismin kütlesi biliniyorsa, ilave cismin kütlesine yörünge eğim açısı dejenerasyonu altında ( $m_3 \sin i'$ ) ulaşılabilir (Denklem-2.5).

$$\frac{(m_3 \sin i')^3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} = f(m_3) = \frac{(a_{12} \sin i')^3}{P_{\text{LiTE}}^2} = \frac{1}{P_{\text{LiTE}}^2} \left[ \frac{173.15 \cdot A_{\text{LiTE}}}{\sqrt{1 - e_3^2 \cos^2 \omega_3}} \right]^3 \quad (2.5)$$

Çift sistemin kütleleri ( $m_1$  ve  $m_2$ ), dikine hız ve ışıık eğrilerinin eş zamanlı çözümlerinden elde edilir. Bulunan  $m_3 \sin i'$  değerini ve kütle merkezi ifadesini (Denklem-2.6) kullanarak cismin yörünge büyüklüğünün yörünge eğim açısı dejenerasyonu altında ( $a_3 \sin i'$ ) bulunması mümkün olur (Esmer 2022).

$$a_3 \sin i' = \frac{a_{12}(m_1 + m_2)}{m_3 \sin i'} \quad (2.6)$$

### 2.1.5 N-Cisim yaklaşımı ile Newtonyan LiTE modeli

Kepleryan yaklaşımda birden fazla cisim barındıran astrofiziksel sistemlerdeki bileşenler arası kütleçekimsel etkileşimler yok sayılır. Bu nedenle, bu etkilerin tutulma zamanlaması değişimine yansıyan etkilerini açıklayabilmek için Kepleryan modeller yetersiz kalacaktır. Bunun nedeni Kepleryan modelin sadece ana bileşen ve ilave bir bileşen için geçerli olmasıdır. Ama Güneş Sistemi'nden de bilindiği gibi sisteme bağlı her cisim birbirlerinin üzerine de kütleçekimsel etkiler uygular.

Bu kütleçekimsel etkileri hesaplayabilmek için Newtonyan bir yaklaşım izlenmesi gerekir. Bu çalışmada da bu yaklaşım Esmer (2022) ve Esmer vd. (2023) temel alınarak kullanılmıştır. Bu yaklaşım, Newton'un Evrensel Çekim Yasası'na dayalı

olarak tamamen Newton dinamiği çerçevesinde tanımlanır. Her bir cismin ivmesi, diğer tüm cisimlerin konumu ve kütlelerine bağlı olarak hesaplanır ve denklem 2.7'deki şekilde ifade edilir.

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \quad (2.7)$$

Burada  $G$  evrensel çekim sabiti,  $m_j$  diğer  $j$ -inci cisimlerin kütleleri ve  $\vec{r}_i, \vec{r}_j$  konum vektörleridir. Bu diferansiyel denklemler sistemi, başlangıç koşulları verilerek sayısal olarak entegre edilir ve her bir zaman adımı için sistem bileşenlerinin konumları hesaplanır.

Bu çalışmada, söz konusu sayısal entegrasyonlar REBOUND<sup>1</sup> adlı, açık kaynak kodlu N-cisim simülasyon kütüphanesi kullanılarak gerçekleştirilmiştir (Rein ve Liu 2012). Python dilinde çalışan bu yazılım, dinamik sistemlerin kütleçekimsel etkileşimlerini yüksek doğrulukla çözümleyebilmek için tasarlanmıştır.

Sistemin gözlemlerle karşılaştırılabilir fiziksel etkilerini hesaplayabilmek için, modelmede sabit bir kartezyen koordinat sistemi tanımlanır. Bu sistemde X ve Y eksenleri gökyüzü düzlemini, Z eksenini ise gözlemcinin bakış doğrultusunu gösterir. Özellikle merkezi bileşenin Z doğrultusundaki konumu, ışığın gözlemciye ulaşma süresinde değişime neden olur.

Işık-zaman etkisi (LITE), gözlem doğrultusundaki konum değişimine bağlı olarak şu şekilde hesaplanır:

$$\text{LiTE}(t) = \frac{-Z_0(t)}{c} \quad (2.8)$$

Burada  $Z_0(t)$ , merkezi bileşenin zaman  $t$ 'deki Z eksenindeki konumu,  $c$  ise ışık hızıdır. Bu denklem, ışık-zaman etkisinin O-C grafiği üzerindeki etkisini verecektir.

---

<sup>1</sup><https://github.com/hannorein/rebound>

Bu yaklaşımla elde edilen teorik O-C verisi, gözlemsel verilerle karşılaştırılarak sistemin yapısal özellikleri hakkında çıkarımlar yapılabilir. REBOUND yazılımının kullanımı sayesinde sistemin çok bileşenli yapısı sayısal olarak eksiksiz biçimde temsil edilebilmiş ve bu tez kapsamında modelleme ve veri uyumlama süreçlerinde temel araç olarak kullanılmıştır.

## 2.2 Eğri Uyumlama Yöntemleri

Bir sisteme ilişkin O-C grafiğinin analizi, O-C eğrisinin çeşitli yaklaşımlarla modellenmesiyle gerçekleştirilir. O-C değişimine neden olan fiziksel olgu ya da olgular, bu olguların neden olduğu O-C değişimini ifade eden analitik ifadelerin O-C eğrisine uyumlanmasıyla (ing. curve fitting) araştırılır. O-C verisini gerek sistemin ve bileşenlerinin fiziksel özellikleri, gerekse de uyum başarımının gösteren istatistiksel ölçütler bağlamında en iyi ifade eden bir ya da birden fazla olgunun analitik ifadesinden oluşan model, "en olası" model olarak seçilebileceği gibi birden fazla model de karşılaştırmalı olarak verilebilir. Bu amaçlarla bir analitik ifadenin veriye uyumlanması için bilinen birçok yöntem olmakla birlikte en bilinenleri ve bu tez çalışmasına konu programda kullanılan yöntemler aşağıdaki gibidir.

### 2.2.1 En küçük kareler yöntemi

En küçük kareler yöntemi, bir modelin parametrelerini belirlemek için en yaygın kullanılan eğri uyumlama yöntemlerinden biridir. Amaç, her bir gözlemsel veri noktası ile modelin o noktalar için öngördüğü değerler arasındaki farkların karelerinin toplamını minimize etmektir:

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{y_i - f(x_i, \theta)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.9)$$

Burada  $y_i$  gözlemler,  $f(x_i, \theta)$  model,  $\sigma_i$  hata ve  $\theta$  uyarlanacak parametrelerdir.

Lineer en küçük kareler yönteminde modelin analitik ifadesinin parametrelerine göre birinci türevi alınır ve türevin sıfır olduğu "kritik noktalar" aranır. Bu noktalardan global minimuma karşılık gelenleri bulunduğunda, veriyle model arasındaki farkı

minimize eden model parametrelerinin “en iyi” değerleri bulunmuş olur. Ayrıca lineer olmayan en küçük kareler yöntemleri de bulunmaktadır. Örneğin, `oc_py` paketinde kullanılan Levenberg–Marquardt (Levenberg 1944, Marquardt 1963) yöntemi en çok kullanılan lineer olmayan en küçük kareler yöntemlerinden biridir. Bu yöntemlerde başlangıç noktalarına ihtiyaç duyulur ve yöntemler bu başlangıç noktalarından hareket ederek veriyle en iyi uyumu sağlayan model parametrelerini ararlar. Lineer ya da lineer olmayan en küçük kareler yöntemleriyle elde edilen parametre değerleri optimizasyon algoritmaları ya da olasılıkçı modellerin başlangıç parametre değerleri olarak oldukça kullanışlıdır.

### 2.2.2 Nelder–Mead optimizasyonu

Nelder–Mead algoritması, fonksiyona ait türev bilgisi olmadan en düşük değerine ulaşmak için kullanılan basit ve güvenilir bir yöntemdir (Nelder ve Mead 1965). Model uyumlamada öncelikle uyumlanacak hedef fonksiyon (örneğin  $\chi^2$  veya negatif log-olasılık) ve başlangıç parametre tahminleri belirlenir. Bu parametreler kullanılarak parametre uzayında simpleks adı verilen sanal bir çokgen oluşturulur. Bu çokgenin kenarları genişletilip daraltılarak en başarılı sonuca ulaşılmaya çalışılır.

Nelder–Mead algoritması, yalnızca tanımlı bir hedef fonksiyonun minimum noktasını arayan bir optimizasyon yöntemidir. Dolayısıyla değerleri aranan model parametreleri için hata değeri döndürmez.

### 2.2.3 Markov Zincirli Monte Carlo (MCMC)

Karmaşık ve çok parametrelili sistemlerde, lineer olmayan en küçük kareler yöntemi ve Nelder–Mead optimizasyonu gibi teknikler, parametrelerin geniş bir değer aralığında modeli veriyle en iyi uyuma (global minimuma) ulaştırmak yerine, daha dar bir aralıkta yerel minimumlara takılma riski taşır. Bu da elde edilecek yeni modelin parametrelerinin en iyi sonuç değil de parametrelerin yerel minimum veren değerleriyle elde edilmiş en iyi sonuç olmasına neden olur. Parametre değerlerinin geniş bir kümesini, bir başka deyişle parametre uzayını daha iyi tarayabilmek için Markov Zincirli Monte Carlo (MCMC) yöntemlerine başvurulur. Bu yöntemler sonuçta pa-

parametre değerleri için birer olasılık dağılımı verdiğinden, bu dağılımlardan parametre değerlerinin belirsizliklerini daha gerçekçi olarak elde etmek de mümkün olur.

MCMC yöntemleri olasılık yöntemler olduklarından, parametre değerlerinin olasılık dağılımlarını elde etmeye, bu nedenle de pek çoğu Bayesçi (Bayesian) istatistiğe dayanan yaklaşımlardır. Bu yöntemlerde amaç, verilen bir veri seti altında model parametrelerinin uygun öncül dağılımlardan **(rneğin normal (Gaussyen) veya tekdüze dağılımlar gibi) seçilen öncül dağılımlardan (ing. prior)** hareketle, olasılık fonksiyonu (ing. likelihood function) bağlamında en olası ardıl dağılıma (ing. posterior) ulaşmaktır. Daha sonra bu ardıl dağılımdan örneklem oluşturularak, parametre değeri dağılımının medyan veya ortalama noktasından, belirsizliği ise standart sapma kullanılarak elde edilir. Aynı zamanda MCMC, parametreler arası korelasyonların istatistiksel olarak incelenmesine de olanak tanır.

Bayes teoremi (Denklem 2.10) şeklinde ifade edilir:

$$p(\theta \mid D) \propto p(D \mid \theta) \cdot p(\theta) \quad (2.10)$$

Burada

- $p(\theta)$ : Parametrelerin ncl dağılımı (prior),
- $p(D \mid \theta)$ : Verinin, verilen parametreler altında elde edilme olasılığı (likelihood),
- $p(\theta \mid D)$ : Verilen veri bağlamında parametrelerin olası değerlerini tanımlayan ardıl dağılım (posterior).

Veri elde edilme olasılığı  $p(D)$  (kanıt/evidence) genellikle farklı modelleri karşılaştırırken sabit kaldığından, Bayes teoremindeki normalizasyon terimi hesaplanmaz. Bayesçi yöntemlerde, öncül dağılımdan örneklem almak, ardıl dağılımı elde etmek ve bu dağılımdan örnekler oluşturmak (burn-in ile aykırı değerleri elerken), ayrıca parametre uzayını pek çok farklı noktadan başlatılan "yryclerle" (ing. walker) taramak için MCMC algoritmaları kullanılır.

Örneğin Goodman–Weare örnekleme (ing. ensemble sampler) algoritması, birden çok yürüyücü (“walker”) kullanarak parametre uzayını verimli biçimde keşfeder. Tüm yürüyücülerin yeni konumu, parametre uzayından rastgele seçilen bir diğer yürüyücünün konum farkının ölçeklendirilmiş haliyle oluşturulur ve böylece minimumlara takılma azalır (Goodman ve Weare 2010). `oc_py`’da MCMC uyumlamaları için `emcee` kütüphanesi tercih edilmiştir; çünkü `emcee`, Goodman–Weare algoritmasının Python’daki yüksek performanslı bir uygulamasını sunarak büyük boyutlu problemlerde hızlı ve güvenilir örnekleme olanağı sağlar (Foreman-Mackey vd. 2013).

### 2.2.4 Lomb–Scargle periyodogramlarıyla frekans analizi

Lomb–Scargle periyodogramları, eşit aralıkla veri alınmayan (düzensiz) zaman serilerine uygulanan ve periyodik sinyallerin tespiti için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde klasik Fourier dönüşümünün eşit aralıklı veri gereksinimine ihtiyaç duymadan, gözlem zamanlarındaki düzensizliklerden etkilenmeyen güç spektrumları üretilir (Lomb 1976, Scargle 1982). Veri üzerindeki dönemli değişimler, periyodogram üzerindeki olası frekansların en küçük kareler yöntemiyle veriyi uyumlanmasına dayanır. Bu yöntem O-C grafiğiklerinde başlangıç periyodu tahmini için çok kullanışlıdır.

## 2.3 `oc_py` Yazılımı

Bu tez kapsamında üretilen `oc_py` yazılımı, Python ile 122F358 numaralı TÜBİTAK 1001 projesi kapsamında geliştirilmiş olup, projenin GitHub<sup>2</sup> adresinden erişilebilir.

### 2.3.1 `oc_py` için kullanılanlar

`oc_py` yazılımında, Kepleryan yaklaşımdan ve N-cisim yaklaşımlarından elde edilen teorik O-C eğrileri, gözlemsel verilerle uyumlu hale getirilmiştir. Uyumlama için aşağıdaki yöntemler ve yazılım kütüphaneleri kullanılmıştır:

- En küçük kareler yöntemi ve Nelder-Mead optimizasyonu `lmfit` kütüphanesi aracılığıyla uygulanmıştır.

---

<sup>2</sup>[https://github.com/etvproject122f358/oc\\_py](https://github.com/etvproject122f358/oc_py)

- MCMC yöntemi **emcee** kütüphanesi fonksiyonları ile gerçekleştirilmiştir.

Elde edilen parametre değerleri, hem en iyi uyum noktaları hem de belirsizlik analizleri ile birlikte sunulmuştur.

### 2.3.2 oc\_py Özellikleri

Yöntem kısmında verilen yöntemlerle geliştirilen ve bu tezin ana konusu olan yazılım O-C diyagramı oluşturmak, düzenlemek, uyumlamak ve sonuçları kullanıcıya sunmak için birçok özelliğe sahiptir. Bunlar:

- Verilen parametrelerle model oluşturma,
- Verilen minimum zamanlarıyla O-C verisi oluşturma,
- Oluşturulan O-C verisini düzenleme,
- O-C verisinden farklı yöntemlerle aykırı nokta ayıklama,
- İstenen noktaları birleştirip daha hassas veri oluşturma,
- Hatası belli olmayan veya kötü olan veriye hata atama,
- Verinin birimlerini düzeltme ve eş hale getirme,
- Lomb-Scargle yöntemi ile frekans analizi,
- Verilen modeli baz alarak veriye model uyumlama,
- Uyumlanan modelin yörünge parametrelerinin tespiti,
- Uyumlanan modelin hata verilerinin tespiti,
- Bütün bu veri ve modellerin görselleştirilmesi,
- Sonuçların düzgün bir biçimde kullanıcıya aktarılmasıdır.

Tezin bu kısımdan sonrası kod blokları içermektedir. Bu kod bloklarında yorum satırları "#" işareti ile başlar ve Python kod bloğunu tanımlar, ancak çalışmazlar.

### 2.3.3 Parameter (Parametre)

Uygulamadaki en temel yapıtaşı parametrelerdir. Örnek olarak ışık-zaman etkisinin yarı-genliği şu şekilde tanımlanabilir:

```
import oc_py as op

# Işık-zaman etkisinin yarı-genliği
p_amp = op.Parameter(
    value=4,          # Yarı-genlik: 4
    unit="s",         # Birim: saniye
    # Her parametrenin varsayılan bir değeri vardır.
    min=0,            # Alt sınır: 0 s
    max=10,           # Üst sınır: 10 s
    std=3,            # Başlangıç belirsizliği: 3 s.
    # std: Hata hesaplama ve MCMC için kullanılır.
    vary=True         # Uyumlamaya dahil olup olmadığını gösterir.
    # Dahil değilse verilen değer kabul edilir
)
```

Bu örnekte:

- value=4: Yarı genlik 4
- unit="s": Birim saniye
- min=0, max=10: Parametrenin alabileceği aralık [0, 10] saniye
- std=3: Başlangıç belirsizliği 3 saniye
- vary=True: Optimizasyonda serbest bırakılır

### 2.3.4 Model Bileşenleri

Model bileşenleri bir bileşke modeli oluşturan modellerden her biridir. Örneğin sistemdeki her gezegen veya sistemin manyetik aktivitesi birer model bileşeni olarak ele

alınır. Model bileşenleri, o modele özgü parametreler ile oluşturulur. Bu parametreler önceden verilmiş olabileceği gibi model bileşeniyle birlikte de oluşturulabilirler. Örneğin bir ışık eğrisi (LiTE) model bileşeni sistemde ışık-zaman etkisine sebep olan bir cismi temsil etmek için kullanılır. Bir model bileşeninin oluşturulmasına bir örnek aşağıda verilmiştir.

```
import oc_py as op # Kütüphane içe aktarıldı
lite = op.LiTE()
# LiTE (Işık zaman etkisi) adında bir model bileşeni oluşturuldu
lite.amp = op.Parameter(0.002, min=0, max=1e-1, std=1e-3)
lite.e = op.Parameter(.35, min=0, max=.95, vary=True, std=.3)
lite.P_LiTE = op.Parameter(20000, min=0, max=300000, std=100000)
lite.T_LiTE = op.Parameter(13000, min=15000, max=800000, std=100000)
lite.omega = op.Parameter(130, std=180)
# Bu bileşene parametreler atandı
lite.name = "LiTE1"
# Bileşene isim verildi

# Parametreler daha sonradan eklenip düzenlenebilirler

donem_parametre = oc.Parameter(value=2.5, unit=year)
# Yeni dönem parametresi oluşturuldu
lite_comp.P_LiTE = donem_parametre
# dönem parametresi yeni parametreyle değiştirildi
```

Diğer model bileşenleri ve parametreleri aşağıda verilmiştir.

**Lin** Lineer değişimi modelleyen bileşendir. **Parametreler:**

- dP (gün/çevrim) — Dönem kayması katsayısı
- dT (gün) — Minimum zamanın kayması

**Quad** Kuadratik (parabolik) eğilimi modelleyen bileşendir. **Parametreler:**

- $Q$  (gün/çevrim<sup>2</sup>) Kuadratik katsayı

LiTE İlave cismin ışıık-zaman etkisini Kepler yaklaşımıyla modelleyen bileşendir.

**Parametreler:**

- $e$  (birimsiz) — Dışmerkezlik
- $\omega$  (derece) — Enberinin Argümanı
- $P_{LiTE}$  (çevrim) — Ek Cismin Periyodu
- $T_{LiTE}$  (çevrim) — Enberiden Geçiş Zamanı
- $amp$  (gün) - Yarı Genlik

LiTE\_abspar İlave cismin ışıık-zaman etkisini Newtonyan yaklaşımla modelleyen bileşendir. **Parametreler:**

- $mass$  ( $M_{\odot}$ ) — Ek Cismin Kütlesi
- $P_{LiTE}$  (gün) — Ek Cismin Periyodu
- $ecc$  (birimsiz) — Dışmerkezlik
- $\omega$  (derece) — Enberinin Argümanı
- $T_{LiTE}$  (BJD) — Enberiden Geçiş Zamanı
- $inc$  (derece) — Yörünge Eğim Açısı

Grav\_rad Kütteleçekimsel ışıımı (gravitasyonel radyasyon) kaynaklı model bileşenidir.

**Parametreler:**

- $a_{grav}$  (gün) — Kuadratik Terim
- $b_{grav}$  (gün) — Lineer Terim
- $c_{grav}$  (gün) — Sabit Kayma

Mag\_act Manyetik aktivite kaynaklı bileşendir. **Parametreler:**

- $P_{mag}$  (gün) — Salınım (osilasyon) Dönemi
- $A_{mag}$  (gün) — Salınım Genliği
- $\phi$  (gün) — Faz Kayması
- $c$  (gün) — Sabit Kayma

### 2.3.5 Model (OC\_model)

OC\_model sınıfı, gözlem verileri ve seçilen model bileşenleri kullanarak O–C eğrisini oluşturmak, analiz etmek ve görselleştirmek için tasarlanmıştır.

#### Başlıca Özellikler

- `name` (str) Modelin tanımlayıcı adı.
- `epochs` (np.ndarray) Gözlem epoch'larının saklandığı NumPy dizisi.
- `model_components` (list) Eklenmiş tüm `model_component` nesnelerinin listesi.

#### Temel Metotlar

`add_model_component(mc)` Yeni bir model bileşeni ekler, aynı ada sahip bileşen varsa hata verir veya uyarı basar.

`remove_model_component(by_object/by_index/by_name)` Nesne, indeks veya ada göre bileşeni listeden çıkarır.

`calculate_oc(epochs=None)` Tüm bileşenlerin katkısını toplayarak verilen (veya saklı) epoch'lar üzerinden O–C değerlerini hesaplar.

`plot(show=True)` Hesaplanan O–C verisini epoch'lara karşı çizdirir; `show=False` ile ekrana otomatik gösterimi iptal edilebilir.

`summary(return_type=dict)` Model adı ve bileşenlerin adlarını içeren özet bilgiyi sözlük veya pandas DataFrame formatında döndürür.

Bu nesne, eklenen tüm model bileşenleri için bir O–C dizisi üretir. Ardından `plot` ve `summary` metodları ile bu sonuçlar hızlıca görselleştirilebilir.

Aşağıdaki kod bloğunda bir `OC_model` nesnesi oluşturma, birkaç bileşen ekleme ve O–C eğrisini hesaplama örneği yer almaktadır.

```

import oc_py as op
# ana kodun çağırılması
import numpy as np

# 1) Modeli oluştur, referans değerleri atama
model = op.OC_model(
    epochs = np.linspace(-30000, 55000, 60000),
    name    = "OC_Model",
)

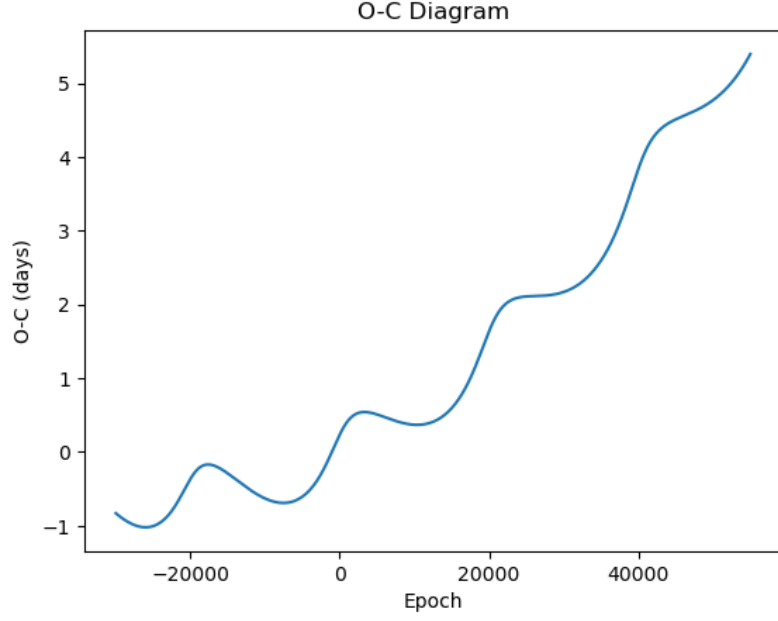
# 2) Lineer ve kuadratik bileşen ekleme
lin  = op.Lin( params={ "dT": 0.003,    "dP": 0.00005 } )
quad = op.Quad(params={ "Q" : 1e-9      } )
model.add_model_component( lin )
model.add_model_component( quad )

# 3) Işık-zaman etkisi bileşeni ekleme
lite = op.LiTE( params={
    "amp"      : 0.4,
    "P_LiTE"   : 20000,
    "T_LiTE"   : 20000,
    "e"        : 0.35,
    "omega"    : 34
} )
model.add_model_component( lite )

# 4) O-C değerlerini hesapla ve çiz
oc_values = model.calculate_oc()
model.plot(show=True)

```

Bu kod bloğunun çalışmasıyla sonuç olarak elde edilen model grafiği Şekil 2.3'deki gibidir.



Şekil 2.3 Elde edilen O-C modelinin grafiği

### 2.3.6 Veri nesnesi: OC\_data

OC\_data nesnesi, minimum zaman ölçümlerinden O-C dizisi üretmek, veriyi temizlemek ve görselleştirmek için tasarlanmıştır. Ardından *fit* nesnesine aktarılıp eğri uyumlamaya temel veri olarak kullanılabilir.

### Data Nesnesinin İşlevleri

- **Veri Okuma** — Excel (.xlsx) veya CSV dosyasındaki `Mintimes`, `Mintypes`, `Errors`, `Units`, `Data Group` sütunlarını otomatik alır.
- **Efemerise Dönüştürme** — Referans efemeris ( $T_0, P$ ) ile

$$E_{\text{corr}} = \frac{T - T_0}{P}, \quad OC = T - (T_0 + P \times E_{\text{corr}})$$

dizilerini hesaplar.

- **Aykırı Nokta Belirleme ve Veri Temizleme**
  - Sigma-clipping, z-skor, boxplot, Chauvenet yöntemleri (Chauvenet 1863),
  - Kayan pencere (moving window) ile yerel aykırı değer analizi,
  - JD - HJD - BJD zaman sistemi dönüşümleri,

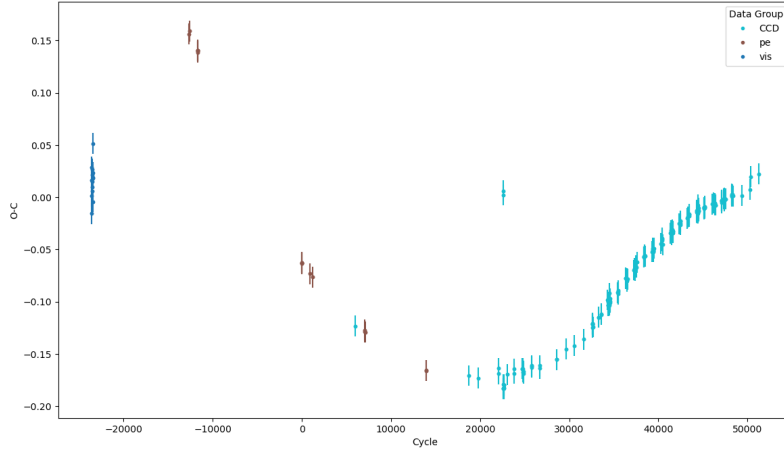
- Eksik olan hata sütununu grup (görsel, fotoelektrik, CCD vs.) bazlı ortalama / medyan değerler ile doldurma.
- **İstatistiksel Araçlar** — Lomb–Scargle periyodogramı, ağırlıklı ortalama ve medyan (ortanca) değerler üzerinden veri "binleme", manuel nokta seçimi,
- **Görselleştirme** — Veri grubuna bağlı olarak renklendirilen ve hata çubuklu O–C grafikleri oluşturma.
- **Veri Kaydetme ve Yükleme** — `save_data()` / `load_data()` (pickle)

### Uygulamalı Akış (xy\_boo.xlsx Örneği)

```
import oc_py as op

# 1) Excel'den veri oku ve ilk O-C grafiği
data = op.OC_data(data_file="xy_boo.xlsx")

# Mintimes → Ecorr & OC otomatik
data.plot_OC() # --> Şekil 2.4
```



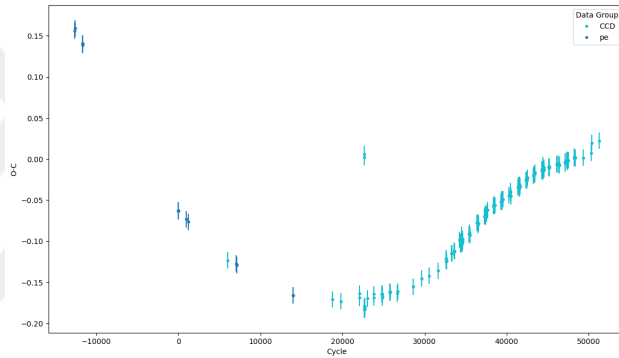
Şekil 2.4 XY Boo O–C grafiği (var.astro.cz verisi)

```
# 1.1) Veriyi model nesnesi yardımıyla oluşturmak mümkündür. örnek:
theoretical_data = model.to_oc_data(Ref_period=.3,
                                     Ref_mintime=2443232,
                                     error_sigma=0.0003)
```

```
# Bu örnekte elimizdeki modeli bir veri nesnesine çevirdik.  
# Oluşan veri Ecorr (düzeltilmiş epoch) verileri model verisinin  
# epoch verilerine eşit olacak biçimde ayarlandı.
```

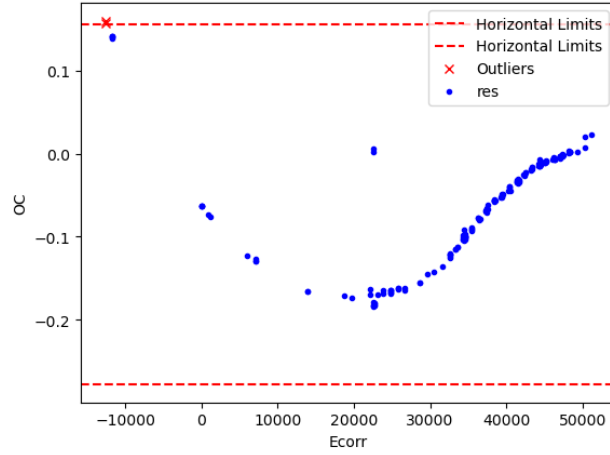
```
theoretical_data.save_data("keplerian_data.data")  
# Eldeki veriler sonrasında tekrar kullanılmak üzere saklanabilir
```

```
# 2) “vis” yöntemiyle gözlenmiş verileri hariç tutma.  
data = data.filter_data_range(dtype="Data_group", noteq="vis")  
data.plot_OC() # --> Şekil 2.5
```



Şekil 2.5 “vis” grubunun çıkarılması sonrası O–C grafiği

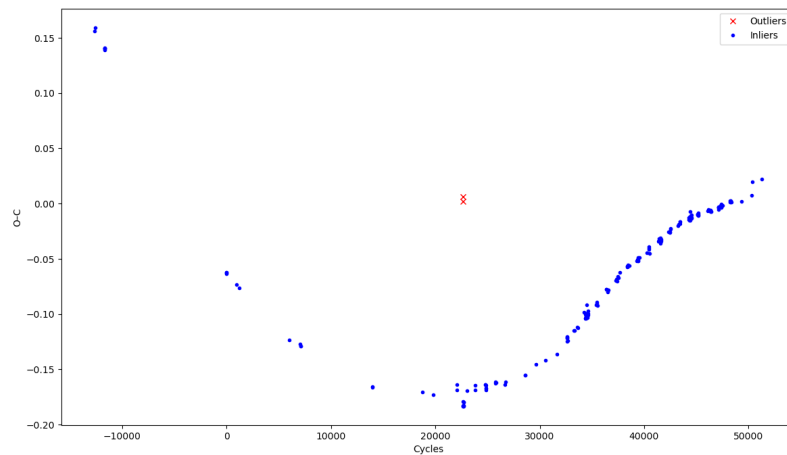
```
# 3) Sigma-clipping ( $\pm 3$  sigma) ile aykırı değerler  
outliers = data.sigma_outliers(threshold=3, plot=True) --> # Şekil 2.6  
data = data.remove_outliers(outliers)
```



Şekil 2.6 Global sigma-clipping uygulanmış O-C grafiği

```
# 4) Kayan pencere (moving window) + sigma-clipping
outliers_mw = data.sigma_outliers(
    threshold=3,
    plot=True,
    additional_method="moving_window",
    additional_params={
        "window_rate"      : 0.10,    # pencere genişliği = %10
        "window_step_rate": 0.03     # pencere adımı      = %3
    }
) # --> Şekil 2.7

data_mw = data.remove_outliers(outliers_mw)
```

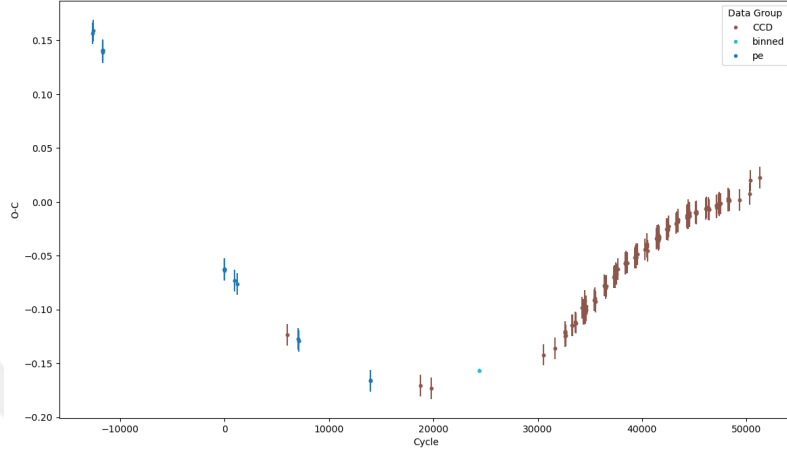


Şekil 2.7 Moving-window + sigma-clipping ile aykırı değerleri bulunan O-C grafiği

```
# 5) 20 000-30 000 epoch aralığını binleme
```

```
binned = data_mw.binning(20000, 30000) # Weighted-mean binning
```

```
binned.plot_OC() # Normale indirilmiş grafik
```



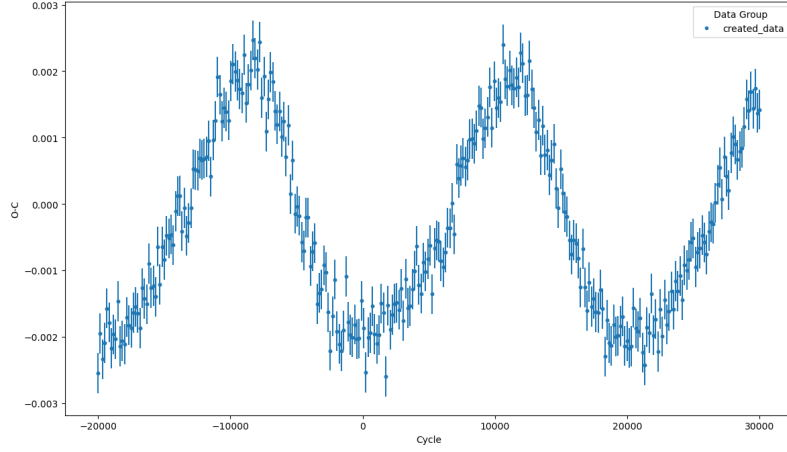
Şekil 2.8 20000-30000 çevrim aralığı normal noktaya indirilmiş veri grafiği

## Outlier Yöntemleri

- **Sigma-clipping** (`sigma_outliers`) — Ortalama  $\pm k\sigma$  dışındaki noktalar.
- **Z-score**, **Boxplot**, **Chauvenet** — Sınıfa gömülü alternatifler.
- **Moving Window** — Sanal bir pencere oluşturur. Bu pencereyi veri boyunca kaydırarak her bir kaydırmada aykırı nokta tespit etmeye çalışır. Küçük veri grupları içerisindeki yerel aykırılıkları yakalamak için kullanışlıdır.

```
# 6) Lomb-Scargle periyodogramı ile dönem bulma
```

`oc_py` Lomb-Scargle periyodogramı ile O-C grafiğinin dönemini bulmanıza olanak sağlar. Bu özelliği örneklemek için XY Boo yerine, dönemi daha net olan olan iyi bir örnek verisi üretilmiştir (Şekil 2.9).



Şekil 2.9 Kepleryan olarak %10 standart sapma ile oluşturulan O-C grafiği

```
freqs, power, f0, P0 = theoric_data.lomb_scargle(
    min_freq=1e-5,
    max_freq=3e-3,
    num_frequencies=20000,
    plot=True
)
```

Burada elde edilen değişkenler:

- **freqs**: Tarama aralığı olan `min_freq` ile `max_freq` arasında, `num_frequencies` adında oluşturulan frekans dizisidir.
- **power**: Her bir frekansa karşılık gelen normalize Lomb–Scargle gücüdür. Küçük değerler gürültüye, büyük değerler baskın periyodik bileşenlere işaret eder.
- **f0**: **power** dizisindeki maksimum değerın bulunduğu baskın frekans (çevrim<sup>-1</sup>).
- **P0**: En olası yörünge dönemidir ve

$$P_0 = \frac{1}{f_0}$$

formülüyle elde edilir.

Bu veriye uygulanan Lomb-Scargle analizinin sonucunda en olası dönem 19997.44 bulunmuştur. Veriyi oluşturan modelin dönemi 20000 olduğu için kabaca %0.012 bir hata payıyla doğru dönemi bulmuştur.

## 2.4 Uyum Nesnesi: `fit`

`fit` sınıfı, oluşturduğumuz `OC_model` ile gözlemsel `OC_data` setini bir araya getirir, eğri uyumlamasını yapar ve diyagnostik/sonuç grafiklerini üretir. İki ana uyum kipi:

- **Deterministik** — `fit_model(method="leastsq")` (Levenberg–Marquardt en-küçük-kareler)
- **Bayesçi** — `fit_model_prob()` (`emcee` ensemble sampler, MCMC)

Yardımcı metotlar:

- `plot()` — Uyum eğrisi  $\pm$  artık paneli
- `trace_plot()`, `corner_plot()` — MCMC diyagnostiği
- `clear_emcee_sample()` — Düşük olasılıklı adımları temizler
- `create_model_from_samples()` — ardıl (posterior) medyanıyla yeni model
- `model_params()` — Son parametre sözlüğü

Aşağıda her iki kip için tam Python akışı gösterilmektedir.

### 2.4.1 Levenberg–Marquardt ile uyum (`fit_model`)

`oc_py` içerisinde Levenberg–Marquardt ile uyumlama yapılabilir. Bu uyumlamayı yapmak için `fit` sınıfı içerisinde bulunan `fit_model` fonksiyonunu kullanmak gerekir. Bu fonksiyonun başlıca parametreleri şunlardır:

- `method`: “leastsq” seçilirse en küçük kareler yöntemi kullanılır.; “nelder” seçilirse Nelder–Mead yöntemi kullanılır.
- `nan_policy`: NaN (sayı olmayan) veriye karşı işlem biçimi (“omit”, “raise” veya varsayılan).
- `max_nfev`: Fonksiyonun maksimum sayım (iteration) sayısını sınırlar.
- `calc_covar`: “True” ise optimizasyondan sonra parametre kovaryansını hesaplar.

## Notlar:

- Bu örnekte, Kepler yörünge modeline dayalı olarak oluşturulmuş 30 adet veri noktası kullanılmıştır.
- Veri noktalarına, modelden elde edilen değerlere eklenen  $\sigma = 0.1$  gün standart sapmalı normal dağılımlı hatalar uygulanmıştır.
- Başlangıç parametreleri ise gerçek model parametrelerinin 0.1 katı büyüklüğünde  $\sigma$  hatası ile seçilerek özellikle kötü bir başlangıç parametreleri oluşturulmuştur.

```
import oc_py as op    # ana kütüphane

# 1) Model oluşturma ve epoch dizisi tanımı
model = op.OC_model()
model.epochs = np.linspace(-2e4, 3e4, 30)

# 2) Bileşenler: Lineer, Kuadratik, LiTE1, LiTE2
lin = op.Lin()
lin.dP = op.Parameter(1.01e-9, min=-1e-8, max=1e-8, std=1e-9)
lin.dT = op.Parameter(9.87e-3, min=-1e-1, max=1e-1, std=1e-3)

quad = op.Quad()
quad.Q = op.Parameter(1.06e-13, min=-1e-10, max=1e-10, std=1e-11)

lite1 = op.LiTE()
lite1.amp = op.Parameter(2.02e-3, min=0, max=1e-1, std=1e-3)
lite1.e = op.Parameter(0.142, min=0, max=0.95, std=0.1)
lite1.P_LiTE = op.Parameter(2.07e4, min=0, max=3e5, std=1e5)
lite1.T_LiTE = op.Parameter(1.47e4, min=0, max=8e5, std=1e5)
lite1.omega = op.Parameter(1.42e2, std=180)
lite1.name = "LiTE1"
```

```

lite2 = op.LiTE()

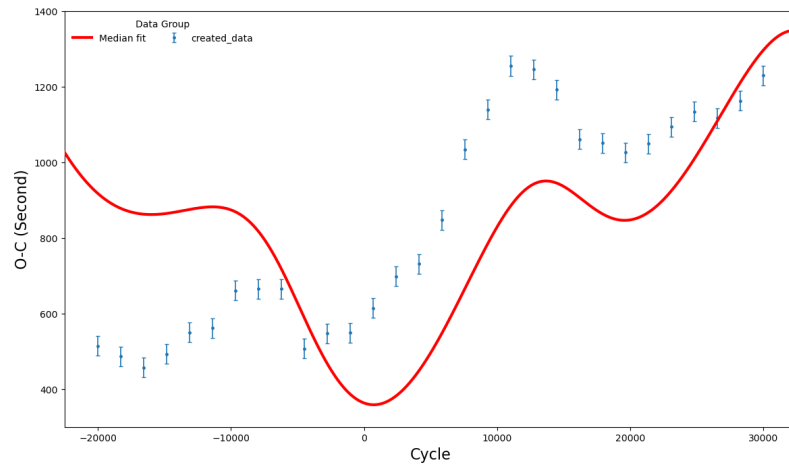
lite2.amp      = op.Parameter(3.72e-3, min=0, max=1e-1, std=1e-3)
lite2.e        = op.Parameter(0.131, min=0, max=0.95, std=0.1)
lite2.P_LiTE   = op.Parameter(5.63e4, min=0, max=3e5, std=1e5)
lite2.T_LiTE   = op.Parameter(4.02e4, min=0, max=8e5, std=1e5)
lite2.omega    = op.Parameter(1.61e2, std=180)
lite2.name     = "LiTE2"

# Bileşenleri modele ekle
for cmp in (lin, quad, lite1, lite2):
    model.add_model_component(cmp)

# 3) OC_data nesnesi alındı
# Bu data nesnesinin oluşturulması OC_data kısmında açıklanmıştır.
data = op.OC_data.load_data("../data_create/keplerian_data.data")

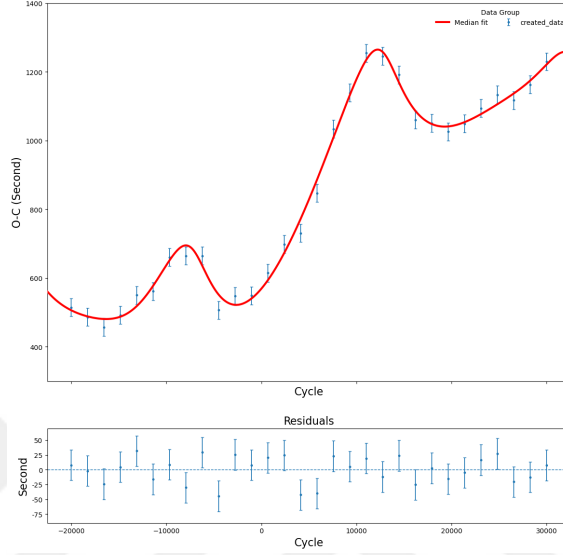
# 4) Fit nesnesi oluşturma ve çizdirme
fit = op.fit(model=model, data=data)
fit.plot(show=False) # --> Şekil 2.10

```



Şekil 2.10 En-küçük-kareler uyumu öncesi model ve veri

```
# 5) En küçük kareler uyumu ve sonuç grafiği
result = fit.fit_model(method="leastsq")
fit.plot(y_lim=(300,1400), res_plot=True,
         res_ylim=(-90,70)) # --> Şekil 2.11
```



Şekil 2.11 En küçük kareler yöntemi ile elde edilen uyum grafiği

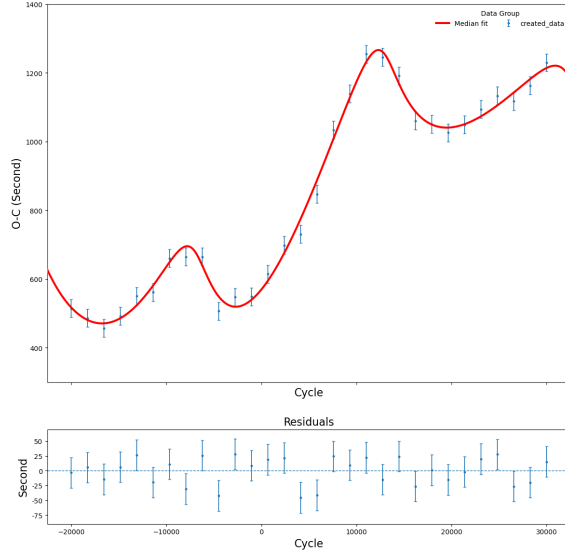
```
# 6) sonuç parametreleri
fit.model_params() # --> Çizelge 2.1
```

Çizelge 2.1 En küçük kareler yöntemi ile bulunan parametreler

| Bileşen | Parametre         | Değer        | Hata         | Birim                   |
|---------|-------------------|--------------|--------------|-------------------------|
| Lin     | $dP$              | 1.396244e-07 | 2.667406e-08 | gün                     |
| Lin     | $dT$              | 9.098128e-03 | 4.099344e-04 | gün                     |
| Quad    | $Q$               | 9.299295e-13 | 1.286984e-12 | gün/çevrim <sup>2</sup> |
| LiTE1   | $e$               | 4.300963e-01 | 1.201707e-01 | -                       |
| LiTE1   | $\omega$          | 1.340481e+02 | 1.660589e+01 | derece                  |
| LiTE1   | $P_{\text{LiTE}}$ | 2.004791e+04 | 6.308599e+02 | çevrim                  |
| LiTE1   | $T_{\text{LiTE}}$ | 1.306202e+04 | 8.426909e+02 | çevrim                  |
| LiTE1   | amp               | 1.991974e-03 | 2.006835e-04 | gün                     |
| LiTE2   | $e$               | 3.660423e-01 | 2.788508e-01 | -                       |
| LiTE2   | $\omega$          | 2.067221e+02 | 2.044733e+01 | derece                  |
| LiTE2   | $P_{\text{LiTE}}$ | 4.300842e+03 | 3.260365e+00 | çevrim                  |
| LiTE2   | $T_{\text{LiTE}}$ | 2.839828e+04 | 8.378930e+03 | çevrim                  |
| LiTE2   | amp               | 2.017149e-03 | 3.053540e-04 | gün                     |

```
# 7) Nelder uyumu ve sonuç grafiği
result = fit.fit_model(method="leastsq")
fit.plot(y_lim=(300,1400), res_plot=True,
         res_ylim=(-90,70)) # --> Şekil 2.12

# 8) sonuç parametreleri
fit.model_params() # --> Çizelge 2.2
```



Şekil 2.12 Nelder-Mead optimizasyonu ile elde edilen uyum grafiği

Çizelge 2.2 Nelder-Mead ile bulunan parametreler

| Bileşen | Parametre  | Değer        | Hata | Birim                   |
|---------|------------|--------------|------|-------------------------|
| Lin     | $dP$       | 2.289318e-09 | —    | gün                     |
| Lin     | $dT$       | 9.946013e-03 | —    | gün                     |
| Quad    | $Q$        | 2.474528e-14 | —    | gün/çevrim <sup>2</sup> |
| LiTE1   | $e$        | 4.734494e-01 | —    | -                       |
| LiTE1   | $\omega$   | 1.342106e+02 | —    | derece                  |
| LiTE1   | $P_{LiTE}$ | 1.990834e+04 | —    | çevrim                  |
| LiTE1   | $T_{LiTE}$ | 1.309289e+04 | —    | çevrim                  |
| LiTE1   | amp        | 1.856825e-03 | —    | gün                     |
| LiTE2   | $e$        | 1.201701e-01 | —    | -                       |
| LiTE2   | $\omega$   | 2.826142e+02 | —    | derece                  |
| LiTE2   | $P_{LiTE}$ | 6.339906e+03 | —    | çevrim                  |
| LiTE2   | $T_{LiTE}$ | 5.470556e+04 | —    | çevrim                  |
| LiTE2   | amp        | 3.912385e-03 | —    | gün                     |

Nelder-Mead bir optimizasyon algoritması olduğundan hata değeri döndürmez.

#### 2.4.2 Bayesçi uyum (`fit_model_prob`)

Bu örnekte aynı model, `fit_model_prob` fonksiyonu kullanılarak uyarlanmıştır. `emcee` kütüphanesi ile hazırlanan bu fonksiyon, uyumlamayı olasılıkçı yöntemlerle gerçekleştirmemizi sağlar. Bu olasılıkçı yaklaşım için ihtiyaç olan temel parametreler şunlardır:

- `walker` (*int*): Yürüyücü sayısı.
- `steps` (*int*): Her bir yürüyücü için toplam adım sayısı.
- `burn_in` (*int*): Bütün adımlar atıldıktan sonra, zincirin başından silinecek adım sayısı.
- `threads` (*int*): Paralel örnekleme sırasında kullanılacak CPU çekirdeği sayısı.
- `std_scale` (*float*): Başlangıç pozisyonlarının yayılım ölçeği. En küçük kareler çözümünün etrafındaki dağılımın  $\sigma$  değeri olarak, her parametrenin tanımlı standart hata değerinin yarısı alınır.
- `prob_prior` (*bool*): Başlangıç parametrelerinin hesaba katılıp katılmayacağı. `False` ise uniform (sabit) önbilgi; `True` ise başlangıç parametreleri etrafında normal dağılım (Gaussian) önbilgisi (ortalama = başlangıç değeri,  $\sigma = \text{std}/2$ ) kullanılır.

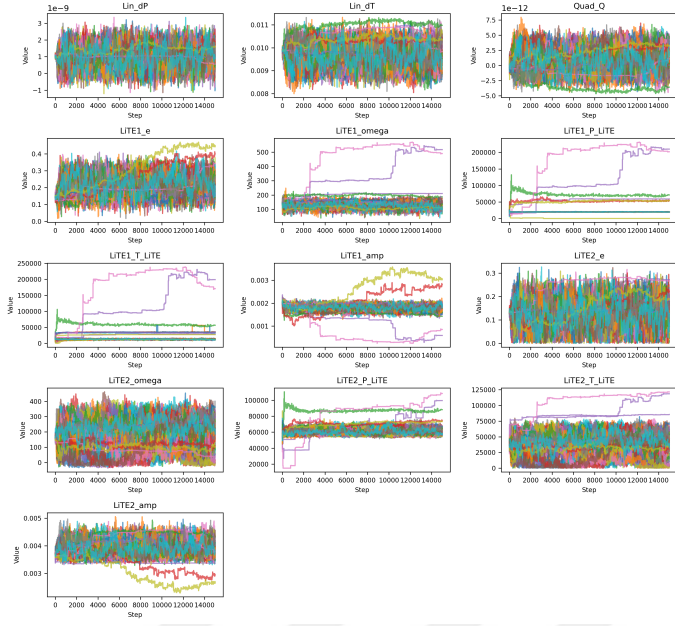
**Notlar:** Yürüyücülerin ilk konumları, her bir parametrenin başlangıç değerinin etrafından, belirtilen  $\pm 1\sigma$  ile tanımlı dağılımdan tekdüze rasgele çekilerek oluşturulur.

`fit` nesnesi oluşturulana kadar kod akışı, tıpkı `fit` ve `fit_model` fonksiyonlarında olduğu gibi işlediğinden bu kısım burada tekrarlanmamıştır.“

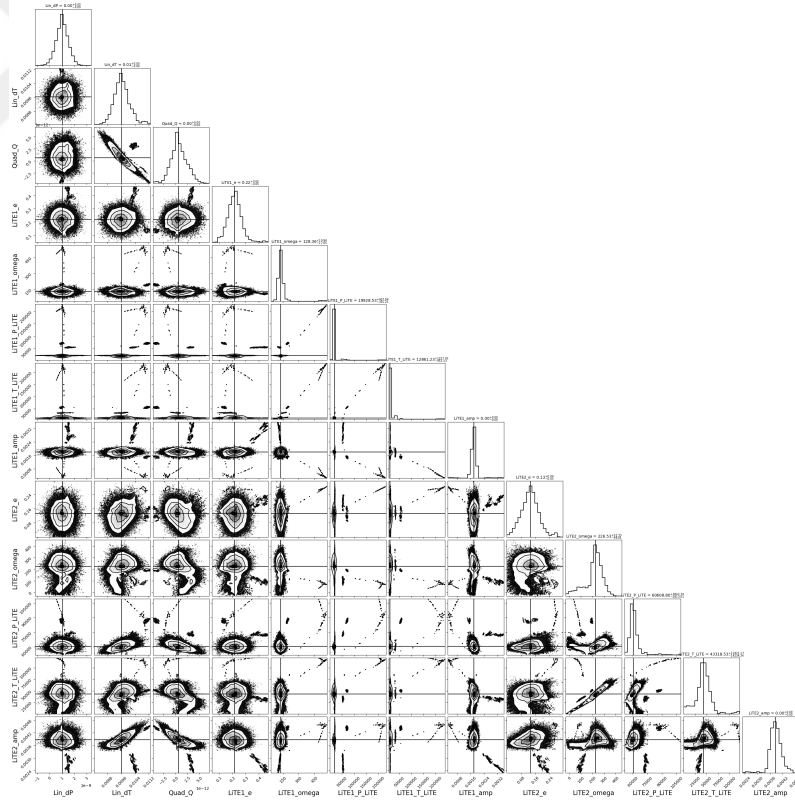
# 1) MCMC çalıştırma ve anlık grafik üretimi

```
samples = fit.fit_model_prob(walker=100, steps=5000, burn_in=3000)
```

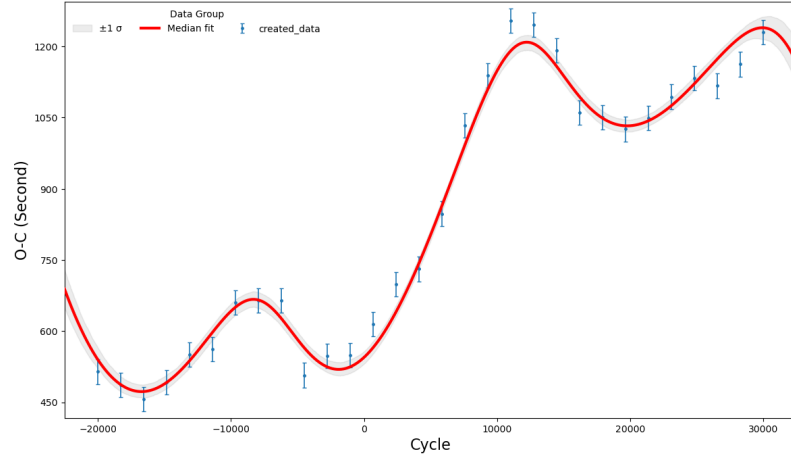
`fit_model_prob` fonksiyonu varsayılan olarak iz, köşe ve O-C grafiklerini üretir (Şekiller: 2.13, 2.14, 2.15)



Şekil 2.13 Yürüyücü izleri (trace\_plot)



Şekil 2.14 Örneklerin ardıl (posterior) dağılımları (corner\_plot)



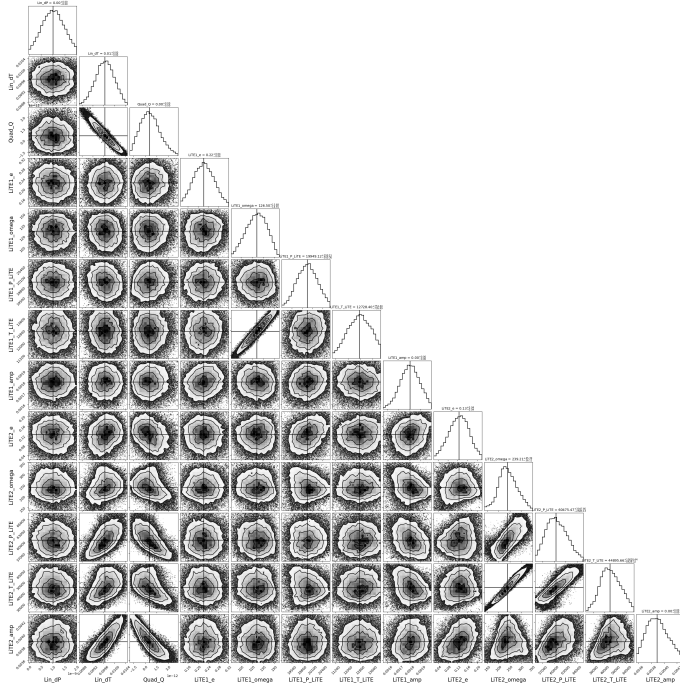
Şekil 2.15 MCMC sonrası oluşan eğri (fit\_plot)

clear\_emcee\_sample işlevi Uzun zincirlerde kimi yürüyücüler, olasılık uzayının çok düşük yoğunluklu yan ceplerinde kalabilir. Bunun için bir temizleme fonksiyonu oluşturuldu. Bu fonksiyon bu yan cepleri temizleyerek en çok adımın atıldığı cebi ana cep kabul edip diğer cepleri temizler.

# 2 clear\_emcee\_samples kullanımı.

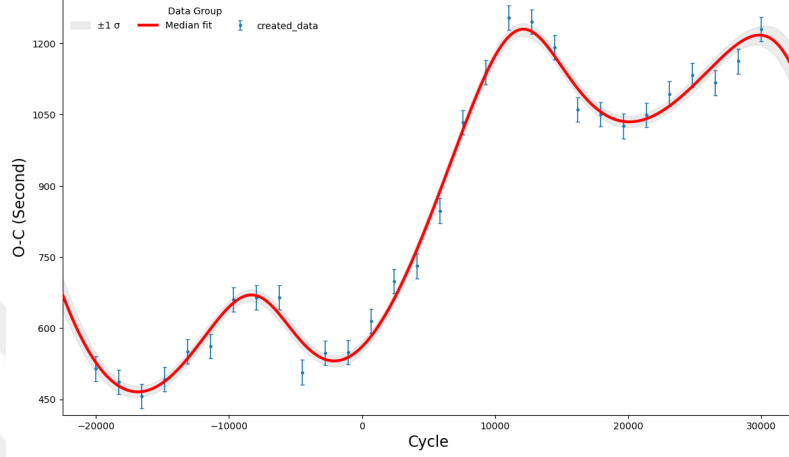
```
cleared_samples = fit.clear_emcee_sample(samples, threshold=0.1)
```

```
fit.corner_plot(cleared_samples, show=True) # --> Şekil 2.16
```



Şekil 2.16 Temizlenmiş örnek kümesi için köşe grafiği

```
# 3) Temiz örneklerle nihai model ve eğri
fit.fitted_model = fit.create_model_from_samples(cleared_samples)
fit.plot(samples=cleared_samples) # --> Şekil 2.17
fit.model_params() # --> Çizelge 2.3
```



Şekil 2.17 Ardıl (posterior) medyanıyla nihai uyum eğrisi

Çizelge 2.3 Model parametreleri ve belirsizlikleri (güncel değerler)

| Bileşen | Parametre         | Değer        | Hata         | Birim                   |
|---------|-------------------|--------------|--------------|-------------------------|
| Lin     | $dP$              | 1.026206e-09 | 4.154056e-10 | gün                     |
| Lin     | $dT$              | 9.644649e-03 | 3.005774e-04 | gün                     |
| Quad    | $Q$               | 5.455299e-13 | 1.094100e-12 | gün/çevrim <sup>2</sup> |
| LiTE1   | $e$               | 2.217347e-01 | 3.701192e-02 | -                       |
| LiTE1   | $\omega$          | 1.268397e+02 | 1.329460e+01 | derece                  |
| LiTE1   | $P_{\text{LiTE}}$ | 1.996552e+04 | 2.826027e+02 | çevrim                  |
| LiTE1   | $T_{\text{LiTE}}$ | 1.275388e+04 | 7.131498e+02 | çevrim                  |
| LiTE1   | amp               | 1.806371e-03 | 8.150259e-05 | gün                     |
| LiTE2   | $e$               | 1.258555e-01 | 3.931171e-02 | -                       |
| LiTE2   | $\omega$          | 2.384898e+02 | 3.487418e+01 | derece                  |
| LiTE2   | $P_{\text{LiTE}}$ | 6.037038e+03 | 2.329603e+00 | çevrim                  |
| LiTE2   | $T_{\text{LiTE}}$ | 4.462296e+04 | 7.462163e+03 | çevrim                  |
| LiTE2   | amp               | 3.895929e-03 | 1.533029e-04 | gün                     |

### 2.4.3 Newtonyan uyumlama

Newtonyan çözüm N-cisim yaklaşımıyla yapılan model uyumlamasıdır. Kod içerisinde kullanımı aynı olmakla birlikte model bileşeni olarak `lite_abspar` nesnesini kullanır. `lite_abspar` nesnesi aslında `lite` nesnesinin parametre olarak yörünge parametrelerini içeren halidir. `oc_py` verilen parametrelerle REBOUND kütüphanesi kullanılarak bir simülasyon oluşturur. Simülasyon, örten çift yıldız tek bir cisim gibi kabul eder ve bu simülasyon kullanılarak, ilave bileşen nedeniyle çift yıldız temsil eden cisme etki eden ışık-zaman etkisini hesaplar.

Ek olarak Newtonyan uyumlama için kullanılan REBOUND paketi bir simülasyon oluşturmak için entegrasyon algoritmaları sunar. REBOUND dokümantasyonunda önerilene göre farklı entegrasyon algoritmalarının avantajları şu şekildedir:

- **WHFast**: Hamiltonyen hızlı bir Wisdom–Holman tabanlı algoritmadır. Uzun zaman aralığına sahip ve az cisimli simülasyonlarda yüksek hesap hızı sunar (Rein ve Tamayo 2015).
- **IAS15**: 15. dereceden, Gauss–Radau tabanlı bir integratördür. Makine hassasiyetine yakın doğrulukla çalışır ve yüksek dış merkezliğe sahip veya yakın geçiş içeren yörüngeler için idealdir (Rein ve Spiegel 2015).
- **Mercurius**: WHFast ile IAS15’in güçlü yönlerini birleştiren melez bir algoritmadır. Uzak etkileşimlerde hızlı WHFast’i, yakın geçişlerde ise yüksek doğruluklu IAS15’i kullanarak hem verimlilik hem de hassasiyeti dengeler (Rein vd. 2019).

`oc_py` denemeleri sırasında WHFast ve IAS15 denenmiş olup sonuç açısından çok büyük bir farka rastlanmamıştır. Ama potansiyel çok yakın geçişler için IAS15 tavsiye edilir.

örnek bir `lite_abspar` nesnesinin oluşturulması örneği şu şekildedir:

```
model = op.OC_model()
lite = op.LiTE_abspar()
lite.mass = op.Parameter(0.0345690895692, min=0, std=1e-1)
```

```

lite.ecc      = op.Parameter(0.341804631, min=0, max=.95, std=.3)
lite.P_LiTE   = op.Parameter(3906.345217220328, std=100000)
lite.T_LiTE   = op.Parameter(2692166.9796054685, std=100000)
lite.omega    = op.Parameter(139.9766514789878, std=180)
lite.inc      = op.Parameter(90, vary=False, std=0)
lite.name     = "LiTE1"

lite2 = op.LiTE_abspar()
lite2.mass    = op.Parameter(0.06325536026151579, std=1e-1)
lite2.ecc     = op.Parameter(0.095365823071, min=0, std=.3)
lite2.P_LiTE  = op.Parameter(9534.270246429744, std=100000)
lite2.T_LiTE  = op.Parameter(2499038.794262112, std=100000)
lite2.omega   = op.Parameter(105.12735681944864, std=180)
lite2.inc     = op.Parameter(90, vary=False, std=0)
lite2.name    = "LiTE2"

# Model bileşenler eklendi
model.add_model_component(lite)
model.add_model_component(lite2)

```

Oluşturulan bu model sonrasında aynı şekilde `fit` nesnesine eklenebilir. Kullanılacak olan entegrasyon algoritması `fit` nesnesi oluşturulurken veya eğri uyumlama yapılırken verilebilir.

```

fit = op.fit(model=model, data=data, integrator="IAS15")
#veya
samples = fit.fit_model(integrator="IAS15")

```

#### 2.4.4 `fit_plot` metodu: parametreler

`fit_plot` metodu parametreleri verilen veya uyumlanan model ile verisi verilen veriyi O-C grafiğinde göstermeye yarayan methodtur. Dört temel işlevi yerine getirir. İçerisinde bulunan parametreler Çizelge 2.4’da verilmiştir

1. Verilen model ve datayla (veya ikisini de içeren `fit` nesnesiyle) O-C diyagramını çizer.
2. İsteğe bağlı olarak medyan uyum eğrisi,  $\pm 1\sigma$  zarfı ve rastgele MCMC örnekleri ekler.
3. Opsiyonel artık (residual) grafiği oluşturur.
4. Table 2.1'deki değişkenlerle grafiğin görüntüsünü belirler.

Çizelge 2.4 `fit_plot` fonksiyonunun parametreleri ve açıklamaları

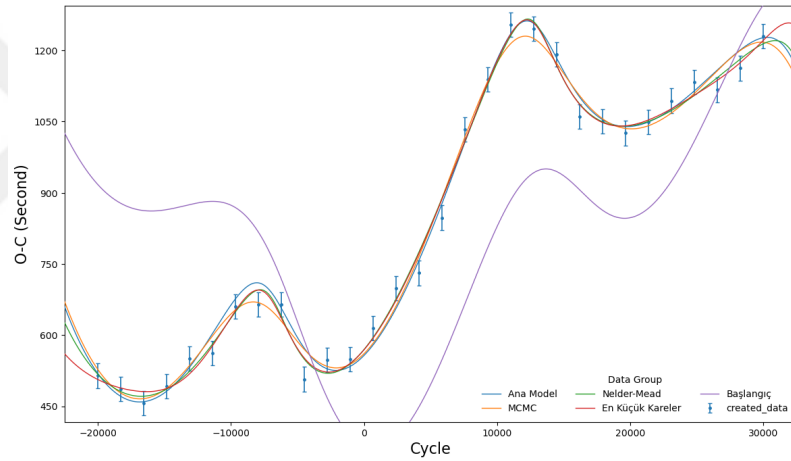
| Parametre                            | Açıklama                                                                                                                                           |
|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>samples</code>                 | MCMC örnekleri; MCMC ile üretilen medyan eğrisi etrafında ve $\pm 1\sigma$ zarfını üretir, rastgele <code>nrandom_samples</code> adet çizgi ekler. |
| <code>nrandom_samples</code>         | MCMC ile üretilen rastgele eğrileri çizer.                                                                                                         |
| <code>res_plot</code>                | artık grafiği çizer.                                                                                                                               |
| <code>res_height_ratios</code>       | Ana grafik / artık paneli yükseklik oranı.                                                                                                         |
| <code>res_hspace</code>              | Ana grafik ile artık paneli arasındaki dikey boşluk.                                                                                               |
| <code>y_axis_left/right</code>       | Sol ve sağ $y$ -ekseni birimleri ( <code>day hour second</code> ).                                                                                 |
| <code>x_axis_bot/top</code>          | Alt ve üst $x$ -ekseni birimleri ( <code>epoch bjd year</code> ).                                                                                  |
| <code>extend_graph_factor</code>     | Model eğrisi hesap aralığını belirtilen % oranında genişletir. Böylelikle grafiğin nereye gideceği görülebilir                                     |
| <code>group_colors</code>            | Veri gruplarının rengi                                                                                                                             |
| <code>group_shapes</code>            | Veri gruplarının şekli                                                                                                                             |
| <code>group_sizes</code>             | Veri gruplarının boyutları                                                                                                                         |
| <code>draw_legend</code>             | Grafik göstergesi (legend) açıp kapatma                                                                                                            |
| <code>legend_position</code>         | Grafik göstergesi (legend) konumu                                                                                                                  |
| <code>legend_shape</code>            | Grafik göstergesi (legend) boyutları                                                                                                               |
| sütun düzeni ve görünürlük anahtarı. |                                                                                                                                                    |
| <code>tick_size</code>               | Tüm eksenlerin varsayılan etiket boyutunu belirler.                                                                                                |
| <code>tick_size_x_bottom/top</code>  | Alt ve üst eksenlerin etiket boyutunu ayarlar                                                                                                      |
| <code>tick_size_y_left/right</code>  | Sağ ve sol eksenlerin etiket boyutunu ayarlar boş bırakılırsa <code>tick_size</code> .                                                             |
| <code>save_plots</code>              | True ise grafiği PNG biçiminde kaydeder.                                                                                                           |
| <code>outfile_tag</code>             | Kaydedilen dosya adına eklenecek isteğe bağlı etiket (ör. “_v2” → <code>grafik_v2.png</code> ).                                                    |

### 3. SONUÇLAR VE BULGULAR

oc\_py birçok sistemin O-C analizleriyle test edilmiş durumdadır. Bu sistemlerden bazılarının çözümleri için kullanılan başlangıç ve sonuç parametre değerleri bu bölümde verilmiştir.

#### 3.1 Kepleryan Model Kullanılarak Oluşturulan Verinin Modellenmesi Sonucu Elde Edilen Sonuçlar

Kepleryan model kullanarak üretilen veriye uygulanan uyumlamanın sonucunda elde edilen modeller, üretilen verinin üzerine çizdirildiğinde elde edilen grafik Şekil 3.1’de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Kepleryan modelle üretilen verinin farklı yöntemlerle çözümü

Başlangıç modeli olası en iyi modellerle aynı olmak zorunda olmadığından başlangıçta iyi bir sonuç elde edilmemiş olması doğal karşılanmalıdır. Grafikte de görüldüğü gibi farklı modeller farklı sonuçlara yol açar; çünkü modellerin karşılığı temel mekanizmalar birbirinden farklıdır. Her birinin farklı amaçları, farklı artıları ve eksileri vardır. Çözüm başarısını test etmek için grafik halinde bütün sonuçların ve verinin oluşturulduğu temel modelin parametreleri Çizelge 3.1’de verilmiştir.

Çizelge 3.1 4 farklı model çözümü sonuçları

| Parametre (Birim)              | Ana Model              | MCMC                                            | Nelder–Mead            | En Küçük Kareler                                |
|--------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------|
| <b>Lin</b>                     |                        |                                                 |                        |                                                 |
| $dP$ (gün)                     | $1.00 \times 10^{-9}$  | $1.03 \times 10^{-9} \pm 4.15 \times 10^{-10}$  | $2.29 \times 10^{-9}$  | $1.40 \times 10^{-7} \pm 2.67 \times 10^{-8}$   |
| $dT$ (gün)                     | $1.00 \times 10^{-2}$  | $9.64 \times 10^{-3} \pm 3.01 \times 10^{-4}$   | $9.95 \times 10^{-3}$  | $9.10 \times 10^{-3} \pm 4.10 \times 10^{-4}$   |
| <b>Quad</b>                    |                        |                                                 |                        |                                                 |
| $Q$ (gün/çevrim <sup>2</sup> ) | $1.00 \times 10^{-13}$ | $5.46 \times 10^{-13} \pm 1.09 \times 10^{-12}$ | $2.47 \times 10^{-14}$ | $9.30 \times 10^{-13} \pm 1.29 \times 10^{-12}$ |
| <b>LiTE1</b>                   |                        |                                                 |                        |                                                 |
| $e$ (-)                        | 0.35                   | $0.22 \pm 0.037$                                | 0.47                   | $0.43 \pm 0.12$                                 |
| $\omega$ (derece)              | 130                    | $126.84 \pm 13.29$                              | 134.21                 | $134.05 \pm 16.61$                              |
| $P_{\text{LiTE}}$ (çevrim)     | 20000                  | $19965.52 \pm 282.60$                           | 19908.34               | $20047.91 \pm 630.86$                           |
| $T_{\text{LiTE}}$ (çevrim)     | 13000                  | $12753.88 \pm 713.15$                           | 13092.89               | $13062.02 \pm 842.69$                           |
| amp (gün)                      | $2.00 \times 10^{-3}$  | $1.81 \times 10^{-3} \pm 8.15 \times 10^{-5}$   | $1.86 \times 10^{-3}$  | $1.99 \times 10^{-3} \pm 2.01 \times 10^{-4}$   |
| <b>LiTE2</b>                   |                        |                                                 |                        |                                                 |
| $e$ (-)                        | 0.15                   | $0.13 \pm 0.039$                                | 0.12                   | $0.37 \pm 0.28$                                 |
| $\omega$ (derece)              | 210                    | $238.49 \pm 34.87$                              | 282.61                 | $206.72 \pm 20.45$                              |
| $P_{\text{LiTE}}$ (çevrim)     | 60000                  | $60370.38 \pm 2329.60$                          | 63399.06               | $43008.43 \pm 3260.36$                          |
| $T_{\text{LiTE}}$ (çevrim)     | 40000                  | $44622.96 \pm 7462.16$                          | 54705.56               | $28398.28 \pm 3873.90$                          |
| amp (gün)                      | $4.00 \times 10^{-3}$  | $3.90 \times 10^{-3} \pm 1.53 \times 10^{-4}$   | $3.91 \times 10^{-3}$  | $2.02 \times 10^{-3} \pm 3.05 \times 10^{-4}$   |

Çizelge 3.2 4 farklı model çözümüne ait uyum başarımını gösteren istatistiksel parameterlerin ( $\chi^2$ , AIC, BIC) değerleri

| Değer          | Ana Model | MCMC   | Nelder-Mead | En Küçük Kareler |
|----------------|-----------|--------|-------------|------------------|
| $\chi^2$       | 31.739    | 32.780 | 23.459      | 22.512           |
| $\chi^2_{\nu}$ | 1.058     | 1.093  | 0.782       | 0.750            |
| AIC            | 31.739    | 32.780 | 23.459      | 22.512           |
| BIC            | 31.739    | 32.780 | 23.459      | 22.512           |

### 3.2 XY Boo Sisteminin oc\_py ile O-C Analizi

XY Boo, kısa yörünge dönenmi, etkileşen bir çift yıldız sistemidir ve W UMa tipi değişenler sınıfında yer almaktadır. O-C analizinde bol verisi ve basit yapısı sayesinde birçok kez çözülmüştür. Son çözüm Özavcı vd. (2020) tarafından yapılmıştır. Karşılaştırmanın iyi yapılması amacıyla bu çalışmada da aynı veri seti kullanılmıştır ve bu veri tezin Materyal ve Yöntem bölümündeki veriden farklıdır.

Görsel (vis) veriler çok fazla saçılmış ve güvenilmez olduğu için tek bir normal minimuma indirgenmiş şekilde uyumlamaya dahil edilmiştir. Veriler çok az güvenilir olduğu için bu teze dahil edilmeyecektir. Onun dışında kalan veriler var.astro.cz sitesinden alınmıştır ve belirsizlik değerlerini içermemektedir. Bu nedenle fotoelek-

trik plakla yapılan gözlemlere 0.05, CCD kamera ile yapılan gözlemlere 0.01 hata değeri atanmıştır. Bu yöntem bilimsel bir uyumlama için ideal olmamakla birlikte programın başarısını test etmek için yeterli görülmektedir.

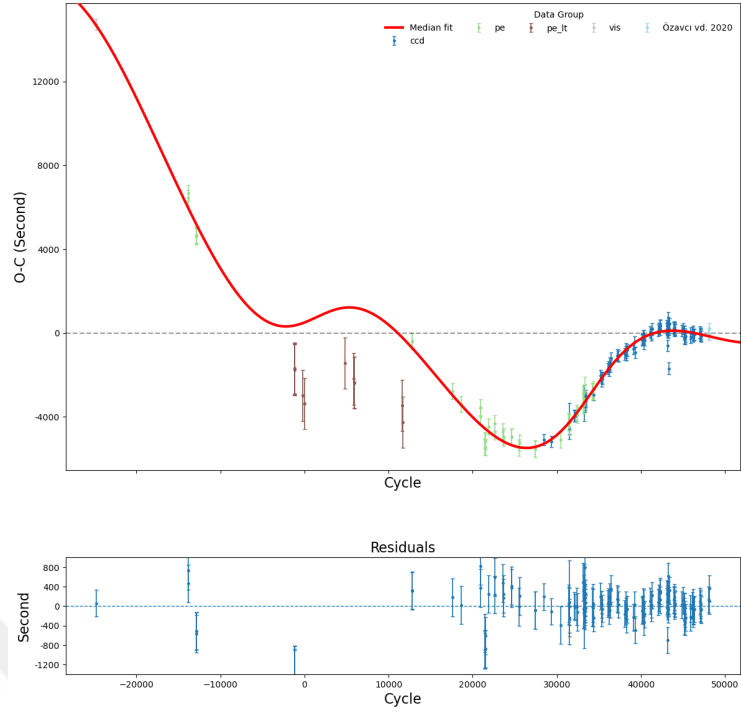
O-C analizi, çözümlerin başarısını test etmek amacıyla hem en küçük kareler hem MCMC hem de Nelder-Mead yöntemleriyle gerçekleştirilmiştir.

Ayrıca sistemin yörünge parametreleri için Yang vd. (2005) tarafından verilen parametre değerleri kullanılmıştır. Sonuç Çizelge 3.3’de verilmiştir.

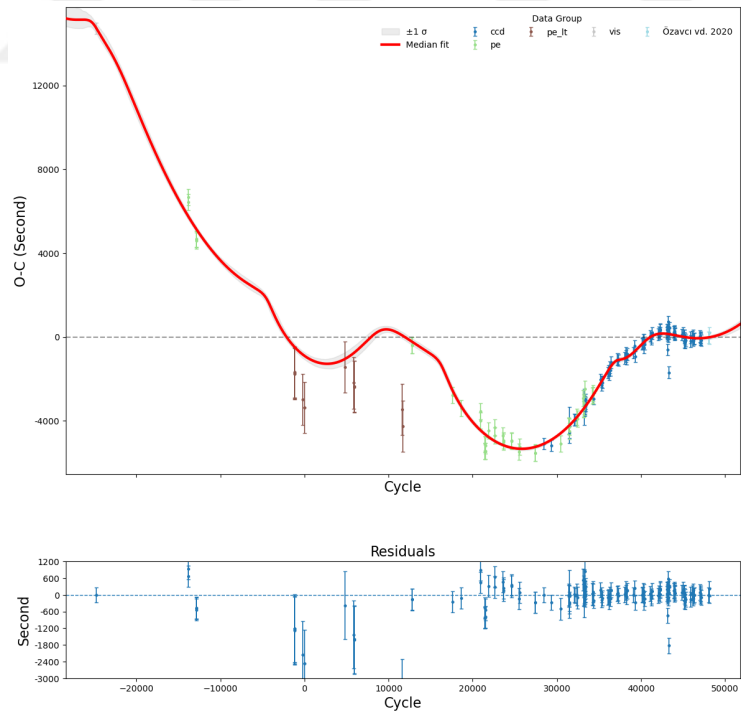
Çizelge 3.3 Farklı uyum yöntemleriyle elde edilen parametre değerleri ve uyum istatistiklerinin karşılaştırılması

| Parametre (Birim)                 | MCMC modeli                                         | En küçük kareler                                    | Nelder–Mead              | Özavcı (2023)                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------|
| $\Delta P$ (gün)                  | $-3.6933 \times 10^{-6} \pm 3.7214 \times 10^{-8}$  | $-3.7079 \times 10^{-6} \pm 6.0 \times 10^{-8}$     | $-3.7079 \times 10^{-6}$ | $-3.6505 \times 10^{-6} \pm 1.0 \times 10^{-7}$ |
| $\Delta T$ (gün)                  | $1.5134 \times 10^{-2} \pm 4.9545 \times 10^{-5}$   | $1.1456 \times 10^{-2} \pm 2.0109 \times 10^{-3}$   | $1.1456 \times 10^{-2}$  | $1.5145 \times 10^{-2} \pm 1.0 \times 10^{-4}$  |
| $Q$ (gün/çevrim <sup>2</sup> )    | $6.5927 \times 10^{-11} \pm 1.1702 \times 10^{-12}$ | $6.8335 \times 10^{-11} \pm 2.5214 \times 10^{-12}$ | $6.8335 \times 10^{-11}$ | $6.4446 \times 10^{-11} \pm 1.0 \times 10^{-9}$ |
| $e$                               | $0.1395 \pm 0.0408$                                 | $0.1671 \pm 0.0453$                                 | $0.1671$                 | $0.2259 \pm 0.3000$                             |
| $\omega$ (derece)                 | $392.1747 \pm 16.9326$                              | $365.7664 \pm 16.1469$                              | $365.7658$               | $357.8707 \pm 180.0000$                         |
| $P_{\text{LiTE}}$ (çevrim)        | $3.2690 \times 10^4 \pm 3.1031 \times 10^2$         | $3.2660 \times 10^4 \pm 6.2772 \times 10^2$         | $3.2660 \times 10^4$     | $3.3516 \times 10^4 \pm 1.0 \times 10^4$        |
| $T_{\text{LiTE}}$ (çevrim)        | $3.6559 \times 10^4 \pm 1.4694 \times 10^3$         | $3.4111 \times 10^4 \pm 1.3752 \times 10^3$         | $3.4111 \times 10^4$     | $3.3707 \times 10^4 \pm 2.0 \times 10^4$        |
| amp (gün)                         | $2.5189 \times 10^{-2} \pm 7.8824 \times 10^{-4}$   | $2.4703 \times 10^{-2} \pm 1.2339 \times 10^{-3}$   | $2.4703 \times 10^{-2}$  | $2.5146 \times 10^{-2} \pm 4.3200 \times 10^3$  |
| $f_{\text{mass}}$ ( $M_{\odot}$ ) | $0.0770 \pm 0.0075$                                 | $0.0743 \pm 0.0116$                                 | $0.0743$                 | $0.0772 \pm 3.9789 \times 10^4$                 |
| $m_3 \sin i$ ( $M_{\odot}$ )      | $0.6020 \pm 0.0315$                                 | $0.5927 \pm 0.0444$                                 | $0.5927$                 | $0.6026 \pm 1.3597 \times 10^5$                 |
| $a_3 \sin i$ (AB)                 | $8.4481 \pm 0.2300$                                 | $8.4741 \pm 0.2805$                                 | $8.4741$                 | $8.5876 \pm 4.6237 \times 10^5$                 |
| $\chi^2$                          | 153.02                                              | 144.58                                              | 144.58                   | 156.06                                          |
| $\chi^2_{\text{red}}$             | 1.078                                               | 1.018                                               | 1.018                    | 1.099                                           |
| AIC                               | 169.02                                              | 160.58                                              | 160.58                   | 172.06                                          |
| BIC                               | 193.10                                              | 184.66                                              | 184.66                   | 196.14                                          |

Bu çözümler sonucu oluşan artık grafiklerinde artık noktaların bir sinüs eğrisi içerdiği fark edilmiş ve bu yüzden sisteme bir tane daha ek cisim ekleyip çözülme kararı alınmıştır. Bu en küçük kareler eğrisi ve  $2 \times \text{LiTE}$  eğrisi Şekil 3.2 ve 3.3’teki gibidir. Aynı zamanda  $2 \times \text{LiTE}$  sonuçları Çizelge 3.4’te verilmiştir.



Şekil 3.2 XY Boo sisteminin O-C eğrisinin en küçük kareler uyumlaması ve artık grafiği

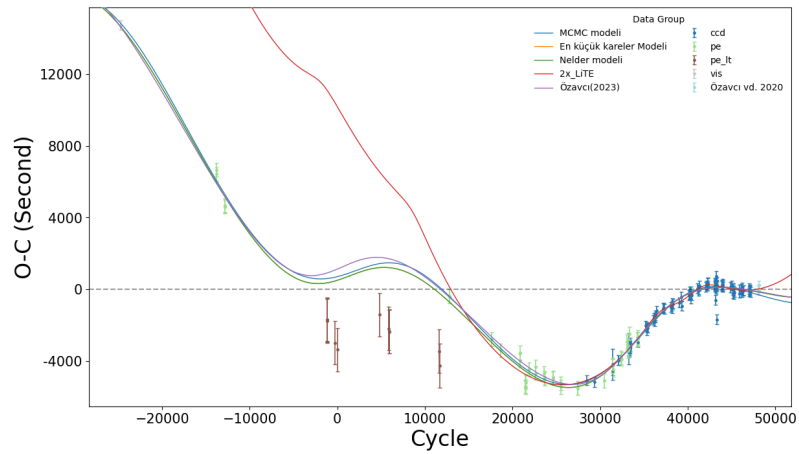


Şekil 3.3 XY Boo sisteminin O-C eğrisinin MCMC ve 2 adet ışık zaman etkisiyle uyumlaması ve artık grafiği

Çizelge 3.4 2×LiTE Modeli Parametreleri ve Uyum İstatistikleri

| Parametre                        | Değer                    | Std. hata                | Birim                   |
|----------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| $\Delta P$                       | $-8.8224 \times 10^{-6}$ | $6.5768 \times 10^{-5}$  | gün                     |
| $\Delta T$                       | $1.0612 \times 10^{-1}$  | $1.3161 \times 10^0$     | gün                     |
| $Q$                              | $1.4101 \times 10^{-10}$ | $7.2161 \times 10^{-10}$ | gün/çevrim <sup>2</sup> |
| <b>LiTE<sub>3</sub> bileşeni</b> |                          |                          |                         |
| $e_3$                            | 0.6607                   | 1.7413                   | —                       |
| $\omega_3$                       | 67.7153                  | 35.6495                  | derece                  |
| $P_3$                            | $4.3666 \times 10^4$     | $3.9970 \times 10^5$     | çevrim                  |
| $T_3$                            | $4.1628 \times 10^4$     | $7.4198 \times 10^2$     | çevrim                  |
| $\text{amp}_3$                   | $2.2527 \times 10^{-2}$  | $1.8313 \times 10^{-1}$  | gün                     |
| $f_{\text{mass},3}$              | $3.3319 \times 10^{-2}$  | $1.0163 \times 10^0$     | $M_\odot$               |
| $m_3 \sin i$                     | $4.2227 \times 10^{-1}$  | $5.2824 \times 10^0$     | $M_\odot$               |
| $a_3 \sin i$                     | $1.1048 \times 10^1$     | $8.5496 \times 10^1$     | AB                      |
| <b>LiTE<sub>4</sub> bileşeni</b> |                          |                          |                         |
| $e_4$                            | 0.5916                   | 0.2201                   | —                       |
| $\omega_4$                       | 100.1182                 | 67.6528                  | derece                  |
| $P_4$                            | $2.8249 \times 10^4$     | $3.9881 \times 10^3$     | çevrim                  |
| $T_4$                            | $3.6901 \times 10^4$     | $1.3971 \times 10^3$     | çevrim                  |
| $\text{amp}_4$                   | $1.4512 \times 10^{-2}$  | $6.0443 \times 10^{-3}$  | gün                     |
| $f_{\text{mass},4}$              | $1.9630 \times 10^{-2}$  | $2.5505 \times 10^{-2}$  | $M_\odot$               |
| $m_4 \sin i$                     | $3.4114 \times 10^{-1}$  | $1.7623 \times 10^{-1}$  | $M_\odot$               |
| $a_4 \sin i$                     | $8.5751 \times 10^0$     | $1.1974 \times 10^0$     | AB                      |
| $\chi^2$                         | 11361.38                 | —                        | —                       |
| $\chi^2_{\text{red}}$            | 82.93                    | —                        | —                       |
| AIC                              | 11387.38                 | —                        | —                       |
| BIC                              | 11426.52                 | —                        | —                       |

Her ne kadar grafiğin sonundaki artık sinüsü iyi uyumlanmış olsa da elde edilen  $\chi^2_\nu$  ve BIC değerleri diğer modellere göre çok daha yüksektir. Aynı zamanda aynı sistemin Newtonyan çözilememesinin de başarılı olmadığı görülmektedir. Sonuç olarak elde edilen tüm modeller bir arada Şekil 3.4’de verilmiştir.

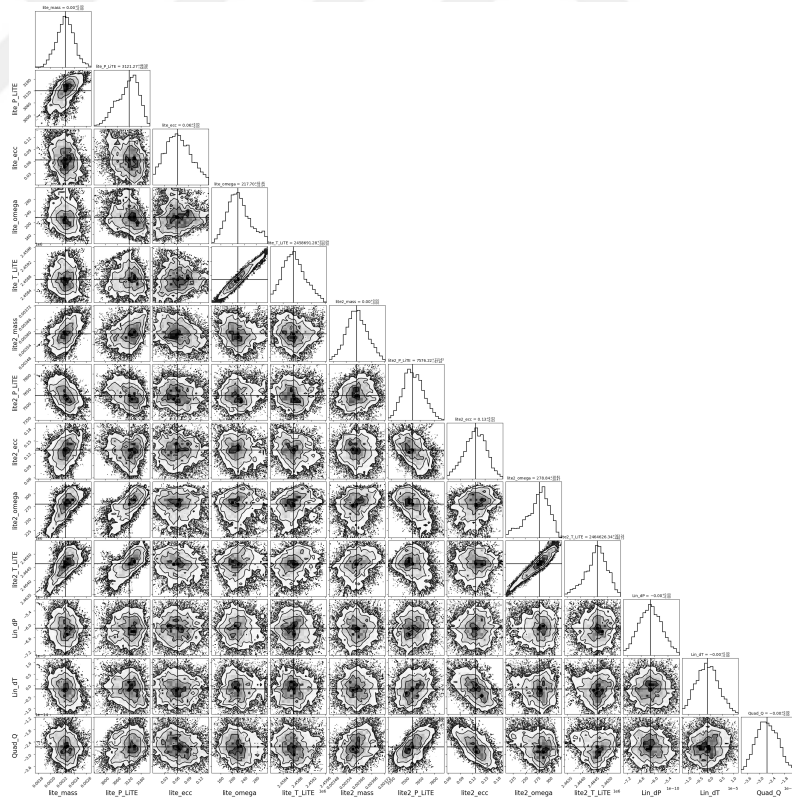


Şekil 3.4 XY Boo’nun bütün modellerinin bir arada bulunduğu O-C grafiği

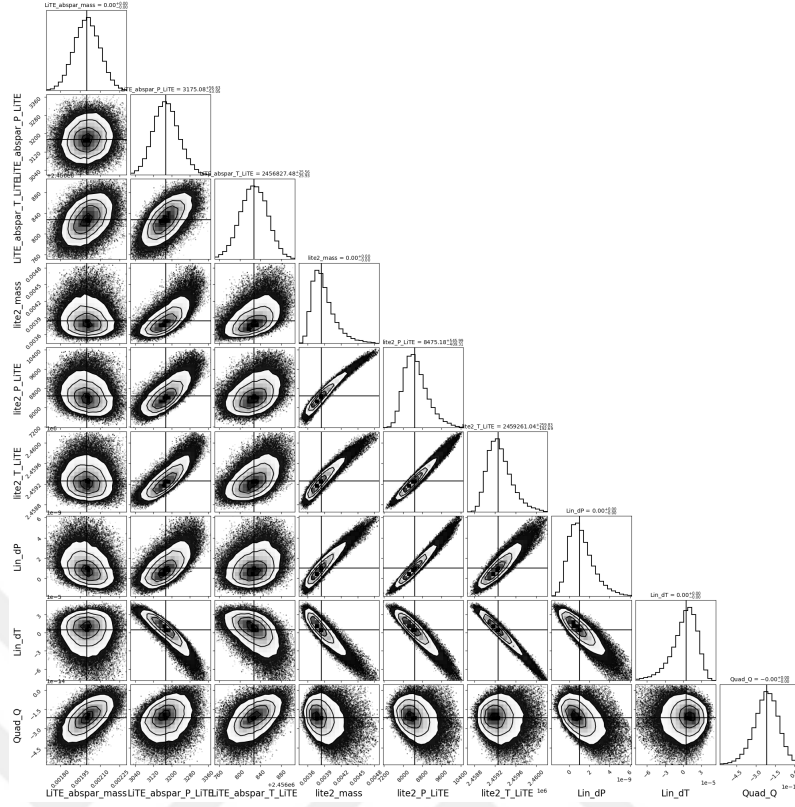
### 3.3 NY Vir Sistemini oc\_py ile O-C Analizi

NY Vir sistemi, Eclipse Timing Variation (ETV) yöntemiyle gezegen keşfedilen nadir ikili yıldızlardan biridir. Bu sistemde önerilen ilk gezegen Qian vd. (2012), ikinci gezegen ise Song vd. (2019) tarafından bildirilmiştir. Bu öngörülerin en son doğrulaması Esmer vd. (2023) tarafından yapılmış; burada test amaçlı yalnızca kuadratik (quad) terim içeren modeller kullanılmıştır.

Esmer vd. (2023) çalışmasında çözüm Newtonyan ve olasılıkçı yöntemle yapılmıştır. REBOUND için kullanılan sayısal entegrasyon algoritması IAS15 olarak seçilmiştir. Dolayısıyla test için aynı yöntemler tercih edilmiştir.  $Q+2\times LiTE$  ve  $Q+2-LiTe$  için yürüyücü sayısı (walker) 200 adım sayısı (step) 5000 ayıklanan adım sayısı (burn-in) 3000 verilmiştir. Ortaya çıkan örnekler temizlendikten sonra ortaya çıkan köşe grafikleri Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'daki, gibidir.



Şekil 3.5 NY Vir Q+2-LiTE köşe grafiği



Şekil 3.6 NY Vir Q+2-LiTE  $ecc=0$   $\omega = 0$  köşe grafiği

Esmer vd. (2023) makalesinde Q+2×LiTE Çözüm 2 modelleri için iki farklı çözüm bulunmuştur. Yapılan yörünge kararlılık testlerinde bu çözümlerin kararlı olmadığı sonucuna varılmıştır. Bu tezde `oc_py` ve Esmer vd. (2023) ile neredeyse aynı verileri kullanarak uyum oranları karşılaştırılmıştır. MCMC'nin döndürdüğü sonuçlar giriş parametrelerine göre büyük değişkenlik gösterdiği ve farklı başlangıç değerleriyle görece kabul edilebilir sonuçlar elde edildiği için, birçok deneme sonrasında en iyi olduğu gözlenen ve  $\chi^2$  ile onaylanan çözüm buraya eklenmiştir. `oc_py` ile bulunan 2-LiTE+Q modeli ile Esmer vd. (2023)'e ait 2 farklı 2-LiTE+Q modeli birbiriyle, ayrıca sabit ( $e = 0$ ,  $\omega = 0$ ) modelleri de birbirleriyle karşılaştırılmıştır (Çizelge 3.5, 3.6, 3.7). Bu karşılaştırmaların birbiriyle olan uyum oranı ise Esmer vd.(2021) örnek alınarak  $\frac{|X-Y|}{\sqrt{dX^2+dY^2}}$  şeklinde hesaplanmıştır.

Çizelge 3.5 Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE Çözüm 1 ile *oc\_py* Q+2×LiTE çözümünün karşılaştırılması

| Parametre (Birim)                  | Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE Çözüm 1                            | <i>oc_py</i> Q+2×LiTE                               | Uyum Oranı ( ) |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------|
| $T_0$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2453174.442700^{+3.8 \times 10^{-5}}_{-5.0 \times 10^{-5}}$ | $2453174.442749 \pm 7.26 \times 10^{-5}$            | 0.58           |
| $P_0$ (gün)                        | $0.1010159724^{+2.2 \times 10^{-9}}_{-1.7 \times 10^{-9}}$   | $0.1010159696 \pm 2.15 \times 10^{-9}$              | 0.96           |
| $\beta$ (gün/çevrim <sup>2</sup> ) | $-4.9186^{+2.4}_{-3.7} \times 10^{-14}$                      | $3.6367 \times 10^{-15} \pm 9.7392 \times 10^{-15}$ | 1.65           |
| $T_b$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2455571^{+248}_{-400}$                                      | $2457912 \pm 298$                                   | 5.32           |
| $P_b$ (gün)                        | $3030^{+56}_{-61}$                                           | $5828 \pm 77$                                       | 28.93          |
| $e_b$ (–)                          | $0.1743^{+0.1000}_{-0.0786}$                                 | $0.09911 \pm 0.03622$                               | 0.78           |
| $\omega_b$ (°)                     | $226^{+34}_{-54}$                                            | $172.6494 \pm 19.3058$                              | 1.11           |
| $m_b$ (M <sub>Jup</sub> )          | $1.940^{+0.182}_{-0.138}$                                    | $5.905 \pm 0.967$                                   | 4.05           |
| $a_b$ (AB)                         | $3.457^{+0.042}_{-0.046}$                                    | $5.3655 \pm 0.0476$                                 | 29.44          |
| $T_c$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2455797^{+661}_{-537}$                                      | $2462590 \pm 141$                                   | 11.04          |
| $P_c$ (gün)                        | $9624^{+850}_{-731}$                                         | $7118 \pm 143$                                      | 3.12           |
| $e_c$ (–)                          | $0.2386^{+0.0655}_{-0.0708}$                                 | $0.29422 \pm 0.04067$                               | 0.70           |
| $\omega_c$ (°)                     | $214^{+32}_{-25}$                                            | $188.3256 \pm 4.9647$                               | 0.79           |
| $m_c$ (M <sub>Jup</sub> )          | $4.160^{+0.256}_{-0.205}$                                    | $9.835 \pm 0.964$                                   | 5.73           |
| $a_c$ (AB)                         | $7.48^{+0.44}_{-0.38}$                                       | $6.1431 \pm 0.0825$                                 | 3.20           |
| $\chi^2$                           | 986.0953                                                     | 969.5243                                            | —              |
| $\chi^2_\nu$                       | 1.02398                                                      | 1.00677                                             | —              |
| AIC                                | 1012.0953                                                    | 995.5243                                            | —              |
| BIC                                | 1075.5803                                                    | 1059.0093                                           | —              |

Çizelge 3.6 Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE Çözüm 2 ile *oc\_py* Q+2×LiTE çözümünün karşılaştırılması

| Parametre (Birim)                  | Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE Çözüm 2                            | <i>oc_py</i> Q+2×LiTE                               | Uyum Oranı ( ) |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------|
| $T_0$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2453174.442255^{+4.0 \times 10^{-5}}_{-5.0 \times 10^{-5}}$ | $2453174.442749 \pm 7.26 \times 10^{-5}$            | 5.78           |
| $P_0$ (gün)                        | $0.1010159771^{+2.9 \times 10^{-9}}_{-2.3 \times 10^{-9}}$   | $0.1010159696 \pm 2.15 \times 10^{-9}$              | 2.22           |
| $\beta$ (gün/çevrim <sup>2</sup> ) | $-1.3772^{+0.4}_{-0.6} \times 10^{-13}$                      | $3.6367 \times 10^{-15} \pm 9.7392 \times 10^{-15}$ | 2.77           |
| $T_b$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2453242^{+399}_{-322}$                                      | $2457912 \pm 298$                                   | 9.98           |
| $P_b$ (gün)                        | $5954^{+137}_{-183}$                                         | $5828 \pm 77$                                       | 0.71           |
| $e_b$ (–)                          | $0.2362^{+0.0517}_{-0.0498}$                                 | $0.09911 \pm 0.03622$                               | 2.20           |
| $\omega_b$ (°)                     | $270^{+32}_{-25}$                                            | $172.6494 \pm 19.3058$                              | 2.83           |
| $m_b$ (M <sub>Jup</sub> )          | $3.553^{+0.457}_{-0.499}$                                    | $5.905 \pm 0.967$                                   | 2.18           |
| $a_b$ (AB)                         | $5.428^{+0.083}_{-0.112}$                                    | $5.3655 \pm 0.0476$                                 | 0.58           |
| $T_c$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2455498^{+92}_{-124}$                                       | $2462590 \pm 141$                                   | 39.93          |
| $P_c$ (gün)                        | $8820^{+791}_{-655}$                                         | $7118 \pm 143$                                      | 2.31           |
| $e_c$ (–)                          | $0.4470^{+0.0463}_{-0.0435}$                                 | $0.29422 \pm 0.04067$                               | 2.52           |
| $\omega_c$ (°)                     | $216^{+12}_{-14}$                                            | $188.3256 \pm 4.9647$                               | 1.99           |
| $m_c$ (M <sub>Jup</sub> )          | $7.766^{+0.565}_{-0.510}$                                    | $9.835 \pm 0.964$                                   | 1.87           |
| $a_c$ (AB)                         | $7.07^{+0.42}_{-0.35}$                                       | $6.1431 \pm 0.0825$                                 | 2.35           |
| $\chi^2$                           | 1435.7324                                                    | 969.5243                                            | —              |
| $\chi^2_\nu$                       | 1.49090                                                      | 1.00677                                             | —              |
| AIC                                | 1461.7324                                                    | 995.5243                                            | —              |
| BIC                                | 1525.2174                                                    | 1059.0093                                           | —              |

Çizelge 3.7 Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE ( $e = 0$ ,  $\omega = 0$ ) ile oc\_py Q+2×LiTE ( $e = 0$ ,  $\omega = 0$ ) modellerinin karşılaştırması

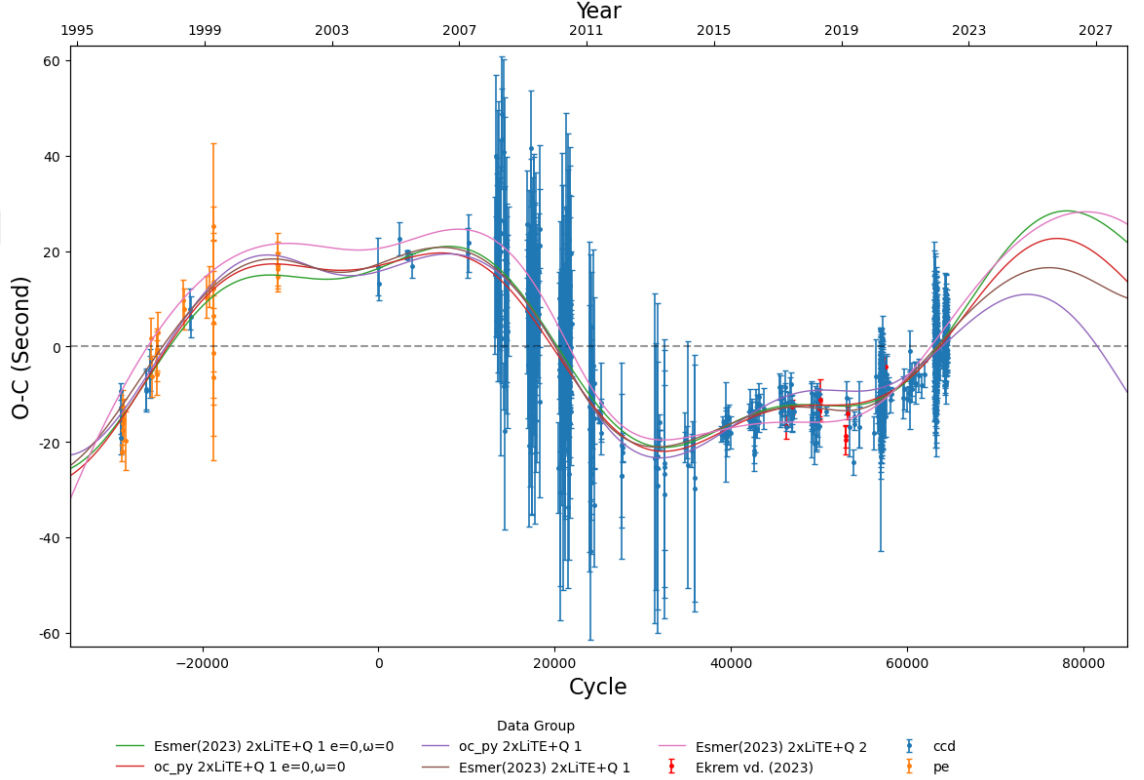
| Parametre (Birim)                  | Esmer vd. (2023) Q+2×LiTE ( $e = 0$ , $\omega = 0$ )         | oc_py Q+2×LiTE ( $e = 0$ , $\omega = 0$ )            | Uyum Oranı ( $\sigma$ ) |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------|
| $T_0$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2453174.442449^{+8.0 \times 10^{-5}}_{-8.0 \times 10^{-5}}$ | $2453174.4427683 \pm 5.08 \times 10^{-6}$            | 3.98                    |
| $P_0$ (gün)                        | $0.1010159693^{+0.9 \times 10^{-9}}_{-0.7 \times 10^{-9}}$   | $0.1010159684 \pm 5.03 \times 10^{-11}$              | 1.12                    |
| $\beta$ (gün/çevrim <sup>2</sup> ) | $-1.5950^{+0.7}_{-0.7} \times 10^{-14}$                      | $-2.1513 \times 10^{-14} \pm 9.5164 \times 10^{-15}$ | 0.43                    |
| $T_b$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2453653^{+40}_{-40}$                                        | $2456827 \pm 25.60$                                  | 66.68                   |
| $P_b$ (gün)                        | $3140^{+50}_{-48}$                                           | $3175.08 \pm 54.68$                                  | 0.41                    |
| $e_b$ (–)                          | 0                                                            | 0                                                    | —                       |
| $\omega_b$ (°)                     | 0                                                            | 0                                                    | —                       |
| $m_b$ (M <sub>Jup</sub> )          | $2.164^{+0.100}_{-0.099}$                                    | $2.0976 \pm 0.1015$                                  | 0.47                    |
| $a_b$ (AB)                         | $3.540^{+0.038}_{-0.036}$                                    | $3.5717 \pm 0.0410$                                  | 0.51                    |
| $T_c$ (BJD <sub>TDB</sub> )        | $2450955^{+183}_{-218}$                                      | $2459261 \pm 235.34$                                 | 25.61                   |
| $P_c$ (gün)                        | $8309^{+398}_{-326}$                                         | $8475.18 \pm 493.76$                                 | 0.33                    |
| $e_c$ (–)                          | 0                                                            | 0                                                    | —                       |
| $\omega_c$ (°)                     | 0                                                            | 0                                                    | —                       |
| $m_c$ (M <sub>Jup</sub> )          | $3.939^{+0.159}_{-0.113}$                                    | $4.0280 \pm 0.2197$                                  | 0.28                    |
| $a_c$ (AB)                         | $6.52^{+0.22}_{-0.18}$                                       | $6.8799 \pm 0.2672$                                  | 0.98                    |
| $\chi^2$                           | 1007.8423                                                    | 942.3056                                             | —                       |
| $\chi^2_\nu$                       | 1.04116                                                      | 0.97446                                              | —                       |
| AIC                                | 1023.8423                                                    | 960.3056                                             | —                       |
| BIC                                | 1062.9100                                                    | 1004.2567                                            | —                       |

Elde edilen sonuçlara bakıldığında  $ecc = 0$ ,  $\omega = 0$  modellerinin aralarında iyi bir uyum gösterdiğini ama diğer modellerinin aralarında iyi bir uyum göstermediği görülmektedir. Bunun birkaç sebebi olabilir.

- Verilerde veri atma ve birleştirme gibi değişimler yapılmış, dolayısıyla biraz değiştirilmiş bir veri kullanılıyor olabilir.
- Yazılımda yuvarlama, hassasiyet farkları veya adım büyüklüğü olabilir veya kodlardan bir tanesinde hesaplama yöntemi olarak farklı metod kullanılmış olabilir.
- Başlangıç parametreleri farklı olabilir. Farklı başlangıç parametreleri girilen bir MCMC uygulaması çok farklı sonuçlarla sonlanabilir.
- Kurulan simulasyonun uzunluğu farklı olabilir. Kurulan simulasyon daha uzun veya daha kısa ise veriye kadar olan kütleçekim etkileri veriye uyumlanan modelin değişmesine yol açabilir.

oc\_py ile yapılan uyumlamanın uyum kriterleri ( $\chi^2_\nu$ , AIC, BIC) daha başarılı olup, bu da uyumlamanın daha iyi olduğunun bir göstergesi olarak değerlendirilebilir.

Ama yine de bu yörüngenin stabil olduğunu veya daha uzun bir simulasyon zamanında daha başarılı olduğunu göstermez. Bu nedenlerden Esmer vd. (2023) bulduğu BIC değeri ile *oc\_py* yazılımının bulduğu BIC değerinden çok farklıdır. Bu konu not edilmiş olup, yazılımın ileriki versiyonlarında ele alınarak, nedeni araştırılacak ve bu bağlamda yazılım güncellenebilecektir. Bu modellemeler ve çıkarımlar sonucunda bütün modellerin uyum grafikleri çizildiğinde Şekil 3.7 elde edilmiştir.



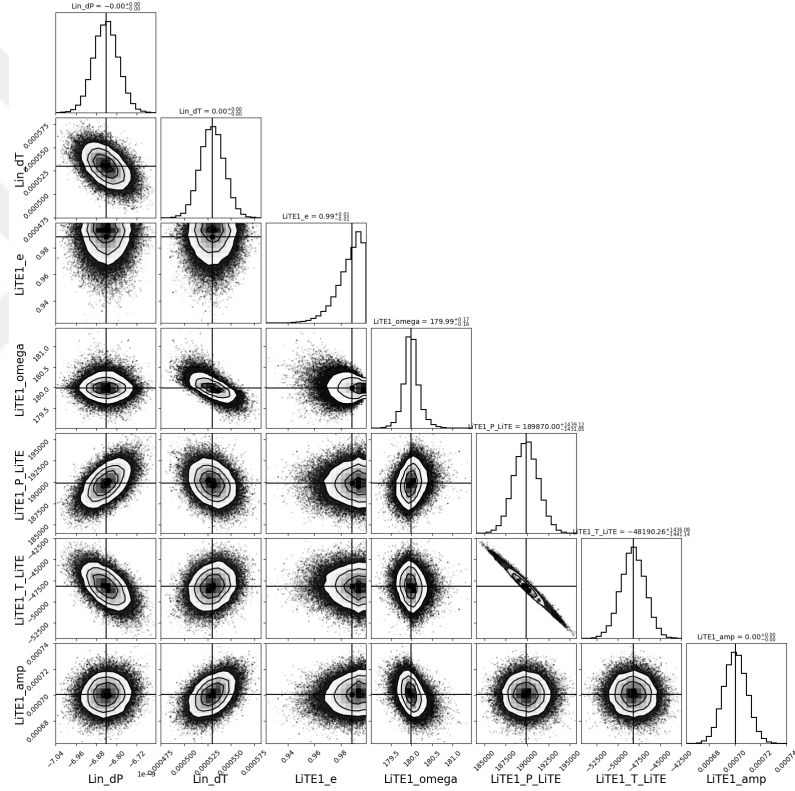
Şekil 3.7 NY Vir'in bütün modelleri içeren grafiği

### 3.4 HT Cas

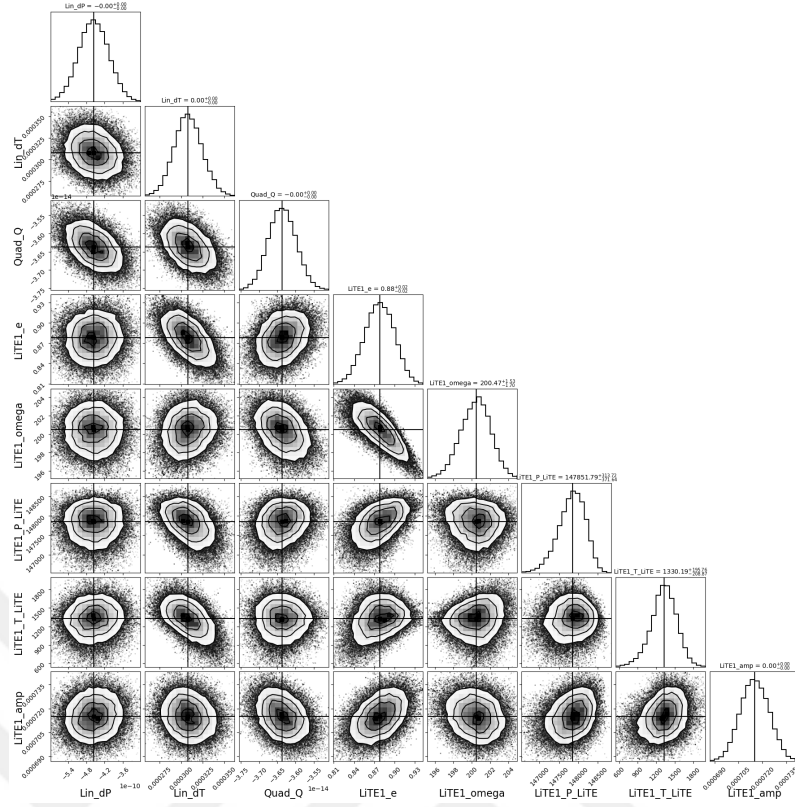
HT Cas örten çift sisteminin O-C eğrisi en son Han vd. (2023) tarafından modellenmiştir. Bu modellemenin üzerinde geçen zamanda 122F358 numaralı TÜBİTAK 1001 projesi kapsamında toplanan yeni veri dahilinde yeni verinin bu modelden çok farklılaştığı görülmüştür.

Bu yeni verileri ekleyerek hem kuadratik parametrelili hem de kuadratik parametre olmadan birer model yapılmıştır. Bu modeller MCMC yöntemi ile yapılmış olup

200 yürüyücü, 3000 adım, 2000 ayıklanan adım sayısıyla çözülmüştür. Bu çözümlerin köşe grafikleri Şekil 3.8 ve Şekil 3.9’da sonucunda oluşan parametreler Çizelge 3.8’de verilmiştir. Çizelgede verilen Han vd. (2023)’a ait parametreler makalesinden alınmış olup, bu çalışma kapsamında elde edilen sonuçlarla tutarlı olmadığı bulunmuştur. Ayrıca, Han vd. (2023) tarafından verilen genlik parametresinin verildiği şekliyle yarı-genlik ( $A_{ETV}$ ) değil, ancak tam-genlik olabileceği değerlendirilmiştir. Söz konusu çalışmada ilave cismin yörüngesi için verilen enberinin argümanı değeri ( $\omega_3$ ) de çözümle tutarlı görülmemekte, verilen değerin biriminin derece değil, radyan olabileceği düşünülmektedir.



Şekil 3.8 HT Cas LiTE köşe grafiği

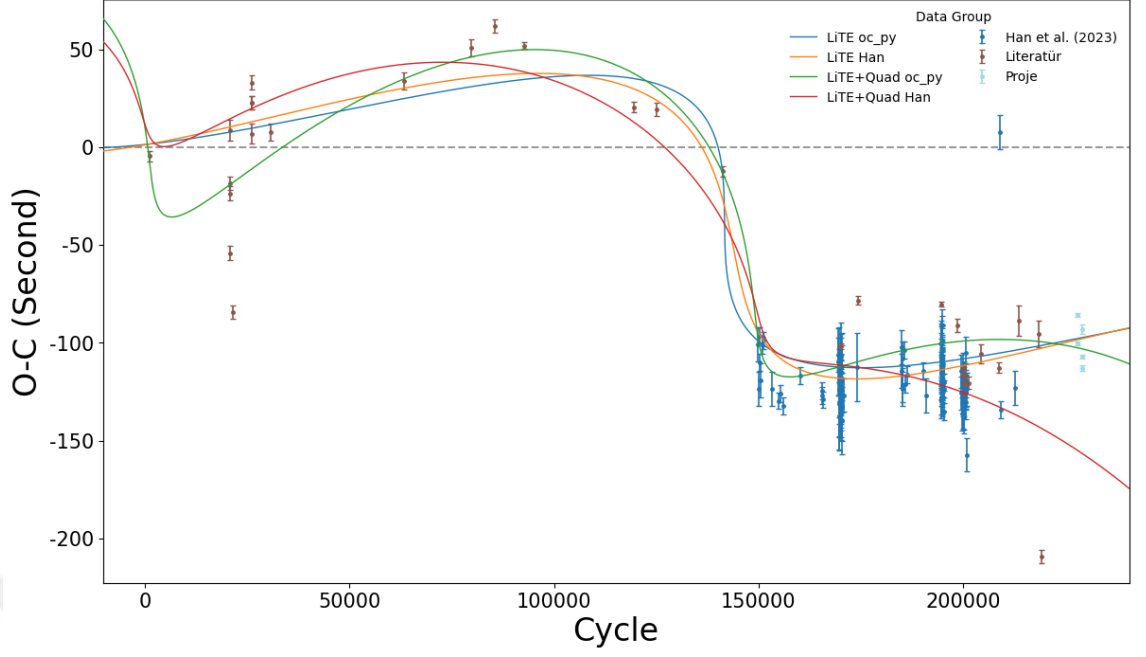


Şekil 3.9 HT Cas LiTE+Q köşe grafiği

Çizelge 3.8 Han vd. (2023) ve oc\_py ile yapılan modellerin karşılaştırılması

| Parametre (Birim)               | oc_py LiTE                                      | Han 2023 LiTE                                  | oc_py LiTE+Q                                     | Han 2023 LiTE+Q                                  |
|---------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $dP$ (gün)                      | $-6.84 \times 10^{-9} \pm 4.35 \times 10^{-11}$ | $-6.87 \times 10^{-9} \pm 0.90 \times 10^{-9}$ | $-4.53 \times 10^{-10} \pm 5.07 \times 10^{-11}$ | $-4.03 \times 10^{-10} \pm 0.86 \times 10^{-10}$ |
| $dT$ (gün)                      | $5.30 \times 10^{-4} \pm 1.09 \times 10^{-5}$   | $4.76 \times 10^{-4} \pm 1.26 \times 10^{-4}$  | $3.06 \times 10^{-4} \pm 4.66 \times 10^{-5}$    | $4.65 \times 10^{-4} \pm 0.42 \times 10^{-4}$    |
| $Q$ (gün)                       | —                                               | —                                              | $-3.63 \times 10^{-14} \pm 2.43 \times 10^{-15}$ | $-9.72 \times 10^{-14} \pm 0.85 \times 10^{-14}$ |
| $e$ (birimsiz)                  | $0.989 \pm 0.008$                               | $0.81 \pm 0.04$                                | $0.880 \pm 0.028$                                | $0.82 \pm 0.05$                                  |
| $\omega$ (°)                    | $179.98 \pm 0.14$                               | $3.24 \pm 0.04$                                | $200.28 \pm 3.42$                                | $3.71 \pm 0.08$                                  |
| $P_{\text{LiTE}}$ (çevrim)      | $1.90 \times 10^5 \pm 1.23 \times 10^3$         | $1.94 \times 10^5 \pm 1.00 \times 10^5$        | $1.48 \times 10^5 \pm 9.16 \times 10^3$          | $1.50 \times 10^5 \pm 1.00 \times 10^5$          |
| $P_{\text{LiTE}}$ (yıl)         | $38.29 \pm 0.25$                                | $39.13 \pm 2.61$                               | $29.82 \pm 1.85$                                 | $30.28 \pm 0.13$                                 |
| $T_{\text{LiTE}}$ (BJD)         | $2440175 \pm 91$                                | $2440048.87 \pm 963.99$                        | $2443824 \pm 747$                                | $2443737.16 \pm 69.86$                           |
| amp (gün)                       | $7.01 \times 10^{-4} \pm 7.92 \times 10^{-6}$   | $0.001391 \pm 0.000189$                        | $7.15 \times 10^{-4} \pm 9.26 \times 10^{-6}$    | $0.000918 \pm 0.000095$                          |
| Kütle fonksiyonu $f(M_{\odot})$ | $3.97 \times 10^{-4} \pm 4.36 \times 10^{-4}$   | $9.13 \times 10^{-6} \pm 3.92 \times 10^{-6}$  | $1.19 \times 10^{-5} \pm 3.00 \times 10^{-6}$    | $4.38 \times 10^{-6} \pm 1.35 \times 10^{-6}$    |
| $m_3 \sin i$ ( $M_{\odot}$ )    | $5.66 \times 10^{-2} \pm 2.20 \times 10^{-2}$   | $0.017 \pm 0.004$                              | $1.69 \times 10^{-2} \pm 1.62 \times 10^{-3}$    | $0.013 \pm 0.002$                                |
| $a_3 \sin i$ (AB)               | $9.25 \pm 0.23$                                 | $9.81 \pm 3.43$                                | $8.15 \pm 0.36$                                  | $8.31 \pm 3.73$                                  |
| $\chi^2$                        | 4642.04                                         | —                                              | 4105.12                                          | —                                                |
| $\chi^2_{\nu}$                  | 30.14                                           | —                                              | 26.83                                            | —                                                |
| AIC                             | 4656.04                                         | —                                              | 4121.12                                          | —                                                |
| BIC                             | 4677.61                                         | —                                              | 4145.77                                          | —                                                |

Bu nedenlerle, Han vd. (2023) makalesinde verilen değerlerin birimleri tabloya aynen yazılsa da şeklini çizdirmek için yarı genlik 2'ye bölünmüş olup,  $\omega$  da radyan biriminde kabul edilmiştir. Yine de çizilen eğri ile makaledeki eğri birbirini tutmamaktadır. Bu yaklaşım altında bütün modellerin verinin üzerine çizildiği grafik Şekil 3.10'te verilmiştir.



Şekil 3.10 HT Cas uyum grafiği

Bulunan sonuçlar Han vd. (2023) sonuçlarından önemli ölçüde farklıdır. Bu durumun en önemli nedeni yeni verinin eklenmiş ve eski verinin eğilimini takip etmiyor olmasıdır. Yeni verilerle yapılan uyumlamada sadece LiTE içeren modelin dışmerkezliğinin maksimuma yakınsadığı gözlenmiştir.

### 3.5 MR Del, DD Crb, DW Uma

MR Del'in O-C grafiği Akar (2025)'in "Çoklu Sistemlerin Çok Boyutlu Yörünge Analizleri" başlıklı ve bu dönem Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı'nda savunulan yüksek lisans tez çalışmasında; DD CrB ve DW UMa'nın O-C grafikleri ise Sertkan (2025) tarafından aynı dönemde aynı enstitüde "Etrafında Gezegen Önerilmiş Ortak Zarf Sonrası Çift Sistemlerin Bir Kataloğu ve Bazı Benzer Sistemlerin İncelenmesi" başlığıyla savunulan yüksek lisans tez çalışmasında bu teze konu *oc\_py* kodu ile çözülmüştür.

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında örten çift yıldızların özellikle ilave bileşenleri kaynaklı ışık-zaman etkisini Kepleryan ve Newtonyan yaklaşımla gözlemsel veriye uygulayan bir yazılım olan *oc\_py* yazılımı geliştirilmiş, yazılım O-C verisinin analize hazırlığı, O-C analizi ve sonuçların yorumlanması için pek çok fonksiyona sahip olacak şekilde ve modüler bir yaklaşımla geliştirilmiştir. Yazılım sentetik O-C verisinin yanı sıra, O-C değişimi iyi bilinen XY Boo, NY Vir, HT Cas sistemlerine bu tez kapsamında, MR Del, DD CrB ve DW UMa sistemlerine ise sırasıyla Akar (2025) ve Sertkan (2025) tarafından uygulanarak test edilmiştir.

Kepleryan bir yörünge için oluşturulan bir O-C modeli kullanılarak ve 0.0003 gün merkezli bir normal (Gaussian) dağılımdan rastgele türetilen "beyaz" gürültü eklenerek oluşturulan sentetik O-C verisinden elde edilen sonuçlara göre olasılıkçı çözüm verinin oluşturulduğu modele yakınsarken en küçük kareler ve Nelder-Mead çözümlerinin sonuçlarının aşırı uyum (ing. overfit) içeriyor olduğu gözlemlenmiştir. Aşırı uyumun muhtemel sebebi sentetik verinin çok az noktayla oluşturulmuş olmasıdır. Veri eksikliği kaynaklı bu tür durumlarda başka sorunlarla karşılaşılıp karşılaşılmayacağını daha net gözlemlemek için daha fazla noktalı ve hata değeri daha düşük teorik verilerle daha çok test yapılmalıdır.

XY Boo örneğinde bütün yöntemlerle elde edilen parametreler Özavcı vd. (2020) tarafından elde parametrelere çok yakın bulunmuştur. Dolayısıyla verilerin benzer olduğu, Kepleryan yaklaşımla modellenen bu sistem için programın başarılı bir şekilde çalıştığını ifade etmek yanlış olmayacaktır. Fakat sisteme bir adet daha ek ışık-zaman etkisi bileşeni eklendiğinde elde edilen sonucun gözlem verilerine uyumunun daha iyi olmadığı ve sistem Newtonyan yaklaşımla çözülemediği için ikinci bir ek bileşenli çözümü olası bulunmamıştır.

NY Vir sistemi için elde edilen  $e = 0$  ve  $\omega = 0$  değerleri, Esmer vd. (2023) ile

uyumlu bulunmuştur. Bununla birlikte, dışmerkezlik ve enberinin argümanının serbest bırakıldığı uyumlamalarda belirgin farklılıklar gözlenmiştir. Bu farklılıklar, NY Vir için daha önce belirtilen veri seti, başlangıç parametreleri ve hassasiyet farklılıklarının yanı sıra, Esmer vd. (2023) çalışmasında referans çevrim (epoch) dönüşümlerinin uygulanmış olmasından kaynaklanmaktadır. `oc_py` yazılımında referans çevrim parametresi henüz yer almamaktadır. Gelecek sürümlerde bu işlevselliğin eklenerek tam bir REBOUND entegrasyonu gerçekleştirilmesi planlanmaktadır.

HT Cas sistemi cüce nova tipi bir kataklizmik değişken olup, O–C eğrisindeki değişimlerin büyük çoğunluğu ek cisim etkisinden ziyade akış diski dinamikleriyle açıklanabilmektedir. Buna rağmen, tek bileşenli Kepler uyumlaması denenmiş; bu model, Han vd. (2023) makalesinde kullanılan veri setiyle gerçekleştirilen çalışmadan belirgin ölçüde farklı sonuçlar vermiştir. Öte yandan, Han vd. (2023) çalışmasında O–C genliği ve ilave bileşenin yörüngesinin enberi noktasının argümanı muhtemelen hatalı girilmiş olduğu ve / veya bu tez kapsamında referans çevrim dönüşümlerinin henüz uygulanmamış olması nedenleriyle, iki çalışmanın sonuçları doğrudan karşılaştırılamamıştır. Sonuç olarak, ne Han vd. (2023) ne de bu tezde elde edilen modeller, hem yeni hem de eski O–C verilerini tatmin edici şekilde temsil edememektedir.

Program Kepleryan uyumlama için yeterince iyi bir sonuç vermekle birlikte Newtonyan uyumlama için görece yavaş çalışmakta ve zaman zaman tutarsız sonuçlar üretebilmektedir. Bu durumun kullanıcı tarafından değerlendirilerek kodun uygun başlangıç parametreleriyle çalıştırılması önerilir. Kod yaşayan bir kod olup, bir taraftan gerek geliştiricileri, Github platformunda açık olduğundan, gerekse de kullanıcılar tarafından geliştirilebilecektir. Bununla birlikte programın, bir parçası olduğu 122F358 proje numaralı TÜBİTAK projesi kapsamında bundan sonraki ilerleme planı aşağıda sunulmuştur.

- Mevcut hataların (bug) tespit edilerek giderilmesi,
- Daha çok farklı sistemle ve daha kapsamlı testlerin yapılması,
- Eksen dönmesi modelinin entegrasyonu,

- Daha iyi tablolar ve çıktıların üretilmesi,
- Görsel bir arayüzün hazırlanması,
- Kullanım kolaylığına yönelik geliştirmelerin planlanması.

Bu haliyle dahi program kullanılabilir durumda olup gerek Akar (2025), gerek Sertkan (2025) tarafından yapılan yüksek lisans tez çalışmalarında kullanılmış durumdadır.



## KAYNAKLAR

- Akar, F. 2025. Çok Boyutlu Sistemlerin Çok Boyutlu Analizi. Yüksek lisans tezi (basılmamış). Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı, Ankara.
- Applegate, J. H. 1992. A mechanism for orbital period modulation in close binaries. *The Astrophysical Journal*, 385, 621–628.
- Baştürk, Ö., Esmer, E. M., Demir, E. ve Selam, S. O. 2023. Eclipse timing variations observed in PCEB systems. *Bull. Soc. R. Sci. Liège*, 92(2), 8–19.
- Beuermann, K., Hessman, F. V., Dreizler, S., Marsh, T. R., Parsons, S. G., Winget, D. E., Miller, G. F., Schreiber, M. R., Kley, W., Dhillon, V. S., Littlefair, S. P., Copperwheat, C. M. ve Hermes, J. J. 2010. Two planets orbiting the recently formed post-common-envelope binary NN Serpentis. *Astronomy & Astrophysics*, 521, L60.
- Bernabò, L. M., Csizmadia, Sz., Smith, A. M. S., Harre, J.-V., Kálmán, Sz., Cabrera, J., Rauer, H., Gandolfi, D., Pino, L., Ehrenreich, D. ve Hatzes, A. 2025. Characterising WASP-43b’s interior structure: unveiling tidal decay and apsidal motion. *Astronomy & Astrophysics*, 694, A233.
- Borkovits, T., Rappaport, S., Hajdu, T. ve Sztakovics, J. 2015. Light-travel-time effect in eclipsing binaries. II. 62 new triple systems from *Kepler* data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 448(1), 946–993.
- Chauvenet, W. 1863. *A Manual of Spherical and Practical Astronomy*, 2nd ed. J. B. Lippincott & Co., 708, Philadelphia.
- Esmer, E. M. 2022. Çoklu yıldız sistemlerindeki yıldızaltı cisimlerin yörünge kararlılıkları. Doktora tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı, 135, Ankara.
- Esmer, E. M., Baştürk, Ö., Hinse, T. C., Selam, S. O. ve Correia, A. C. M. 2021. Revisiting the analysis of HW Virginis eclipse timing data. I. A frequentist data-modelling approach and a dynamical stability analysis. *Astronomy & Astrophysics*, 648, A85.
- Esmer, E. M., Baştürk, Ö. ve Selam, S. O. 2022. Detection of two additional circumbinary planets around Kepler-451. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 511(4), 5207–5216.
- Esmer, E. M., Baştürk, Ö. ve Selam, S. O. 2023. Testing the planetary hypothesis of NY Virginis: anticipated change in the eclipse-timing trend within the next five years. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 525, 6050–6063.
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D. ve Goodman, J. 2013. *emcee*: the MCMC hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925), 306–312.

- Goodman, J. ve Weare, J. 2010. Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5(1), 65–80.
- Güler, B., Baştürk, Ö., Esmer, E. M., Sertkan, E. ve Akar, F. 2025. ObserPy: a tool for efficient observation planning in astronomy. *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso*, 55, 466–469.
- Han, Z.-T., Qian, S.-B., Han, Q.-W., Zang, L., Soonthornthum, B., Li, L.-J., Zhu, L.-Y., Liu, W., Fernández Lajús, E., Dai, Z.-B. ve Na, W.-W. 2023. Orbital-period variations in HT Cas: evidence for additional angular-momentum loss and a high-eccentricity giant planet. *The Astrophysical Journal*, 953(1), 63.
- Irwin, J. B. 1952. The determination of a light-time effect for binary stars. *Astrophysical Journal*, 116, 211–219.
- Kwee, K. K. ve van Woerden, H. 1956. A method for computing accurately the epoch of minimum of an eclipsing variable. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 12, 327–330.
- Levenberg, K. 1944. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2), 164–168.
- Lomb, N. R. 1976. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 39, 447–462.
- Marquardt, D. W. 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431–441.
- Nelder, J. A. ve Mead, R. 1965. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4), 308–313.
- Özavcı, İ., Özuyar, D., Şenavcı, H. V., Yılmaz, M., Bahar, E., Baştürk, Ö., Kılıçoğlu, T., Elmaslı, A., Çalışkan, Ş., İzci, D. D., Yörükoğlu, O. ve Selam, S. O. 2020. Orbital-period analysis of four eclipsing binaries XY Boo, RW Com, MR Del and AK Her. *Acta Astronomica*, 70(1), 33–52.
- Qian, S.-B., Liao, W.-P., Zhu, L.-Y. ve Dai, Z.-B. 2010. Detection of a giant extrasolar planet orbiting the eclipsing polar DP Leo. *Astrophysical Journal Letters*, 708, L66–L68.
- Qian, S.-B., Zhu, L.-Y., Dai, Z.-B., Fernández Lajús, E., Xiang, F.-Y. ve He, J.-J. 2012. Circumbinary planets orbiting the rapidly pulsating subdwarf B-type binary NY Vir. *Astrophysical Journal Letters*, 745, L23.
- Rein, H. ve Liu, S.-F. 2012. REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 537, A128.
- Rein, H. ve Spiegel, D. S. 2015. IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(2), 1424–1437.

- Rein, H. ve Tamayo, D. 2015. WHFast: a fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom–Holman integrator for long-term gravitational simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452, 376–388.
- Rein, H., Tamayo, D. ve Brown, G. 2019. MERCURIUS: a hybrid symplectic integrator for planetary dynamics with close encounters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 485, 5490–5500.
- Scargle, J. D. 1982. Studies in astronomical time-series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, 263, 835–853.
- Sertkan, E. 2025. Etrafında gezegen önerilmiş ortak zarf sonrası çift sistemlerin bir kataloğu ve bazı benzer sistemlerin incelenmesi. Yüksek lisans tezi (basılmamış). Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı, Ankara.
- Song, S., Mai, X., Mutel, R. L., Pulley, D., Faillace, G. ve Watkins, A. 2019. Circumbinary planets orbiting the sdB binary NY Virginis: an updated two-planet solution. *The Astronomical Journal*, 157, 184.
- Sterken, C. 2005. The O-C diagram: basic procedures, In: *The Light-Time Effect in Astrophysics: Causes and Cures of the O-C Diagram*. Sterken, C. (ed), Astronomical Society of the Pacific, 3–25, San Francisco.
- Wolf, M., Zasche, P., Kára, J., Zejda, M., Janík, J., Mašek, M., Lehký, M., Merc, J., Richterková, A., Hanžl, D., Mikulášek, Z., de Villiers, S. N. ve Liška, J. 2024. Apsidal motion and TESS light curves of three southern close eccentric eclipsing binaries: GM Nor, V397 Pup, and PT Vel. *Astronomy & Astrophysics*, 690, A231.
- Yang, Y.-G., Qian, S.-B. ve Zhu, L.-Y. 2005. Deep, low-mass-ratio overcontact binary systems. IV. V410 Aurigae and XY Bootis. *The Astronomical Journal*, 130(5), 2252–2261.