

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

DUAL FRAKTALLAR VE UYGULAMALARI

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2016**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

05/10/2016

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

ÖZET

Doktora Tezi

DUAL FRAKTALLAR VE UYGULAMALARI

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu çalışmada Galile-2 düzleminde deterministik algoritmaların iterasyonu yöntemi ile Sierpinski üçgeni oluşturulmuştur. Shear dönüşümlerini de elde etmeye yarayan dönme matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ 'in Galile düzleminde Sierpinski üçgenine etkisi ve bunun Öklid düzlemindeki karşılığı olan $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ matrisinin Sierpinski üçgenine etkisinin karşılaştırması yapılmıştır. Bunlara ilaveten Öklid düzlemindeki tanımlara paralel olarak Galile kendine benzerlik ve Galile kutu sayma boyutu kavramları elde edilmiştir.

Ekim 2016, 93 sayfa

Anahtar Kelimeler: Galile dönüşümü, dual sayı, fraktal, iterasyon.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DUAL FRACTALS AND APPLICATIONS

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

In this work we study Sierpinski triangle in Galilean-2 plane with using deterministic algorithm iteration method. We investigate the effects of rotation matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$, called shear transformation, to Sierpinski triangle in Galilean plane and compare with $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ in Euclidean plane. Furthermore; we obtain Galilean self-similarity system and Galilean box-counting dimension using the similar idea in Euclidean plane.

October 2016, 93 pages

Key Words: Galilean transformation, dual number, fractal, iteration.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek fikirleriyle gelişmeye katkıda bulunan, manevi desteğini her zaman yanımda hissettiğim kıymetli danışman hocam sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya, (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) varlığını ve desteğini her daim hissettiren, matematik bilimine dair bir bakış açısı edinmemi sağlayan kıymetli hocam Prof. Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU'na, (Emekli) çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen, yönlendiren ve önemli katkılarda bulunan değerli hocam Doç. Dr. İsmail GÖK'e, (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) her daim hoşgörülü hali ve destekleriyle kıymetli hocam Doç. Dr. Ayşe ALTIN'a, (Hacettepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) bu tezde yer alan görsellerin oluşmasında büyük emekler sarf eden arkadaşım Davut ENGİN'e ve çalışmalarım süresince büyük fedakârlık göstererek beni destekleyen kıymetli aileme teşekkürü borç bilirim.

Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Ankara, Ekim 2016

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI SAYFASI

ETİK	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1 Dual Sayılar	3
2.2 Galile Düzlemi ve Geometrisi.....	10
2.2.1 Galile düzleminde uzaklık ve özel uzaklık	11
2.2.2 Galile düzleminde açı.....	15
2.2.3 Galile düzleminde üçgen.....	18
2.2.4 Shear hareketi - Galile düzleminde dönme.....	24
2.3 Fraktallar	31
2.3.1 Metrik kavramlar.....	32
2.3.2 Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri	36
2.3.3 Dönüşümler.....	37
2.3.4 Kendine benzerlik	39
2.3.5 Fraktal boyut	39
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	45
3.1 Sierpinski Üçgeni.....	45
3.1.1 θ dönme açılı Sierpinski-tipi fraktallar.....	49
3.2 Sierpinski Karesi	54
3.2.1 θ dönme açılı Sierpinski karesi-tipi fraktallar	57
4. GALILE DÜZLEMİNDE FRAKTALLAR.....	65
4.1 Galile Sierpinski Üçgeni	65
4.1.1 φ – shear hareketi ve Sierpinski-tipi fraktallar.....	70
4.2 Galile Sierpinski Karesi.....	78

4.2.1 φ – shear hareketi ve Sierpinski-tipi fraktallar.....	80
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	89
KAYNAKLAR	90
ÖZGEÇMİŞ.....	93



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 $\mathbb{D}$ 'de toplama ve çarpma	4
Şekil 2.2 Bir z dual sayısının kutupsal gösterimi	8
Şekil 2.3 Galile düzleminde d_{AB} uzaklığı	11
Şekil 2.4 Galile düzleminde özel uzaklık.....	12
Şekil 2.5 $Q(x_0, y_0)$ merkezli r yarıçaplı Galile çemberi	13
Şekil 2.6 r yarıçaplı Galile çemberi için $r = 0$ durumu	14
Şekil 2.7 S_G^{-1} Galile birim çemberi	15
Şekil 2.8 Galile düzleminde açı	15
Şekil 2.9 $\mathbb{G}^2$ de merkezi O olan doğrular arasındaki açı.....	16
Şekil 2.10 Galile düzleminde l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açı	17
Şekil 2.11 Galile düzleminde paralel l_1 ve l_2 doğruları arasındaki özel $d_{l_1 l_2}$ uzaklığı...	17
Şekil 2.12 Öklid ve Galile geometrisinde bir noktanın bir doğruya uzaklığı	18
Şekil 2.13 Galile düzleminde $\triangle ABC$	19
Şekil 2.14 Galile üçgeninde yükseklik.....	20
Şekil 2.15 Galile düzleminde üçgenlerin KKK ilişkisi.....	21
Şekil 2.16 Galile düzleminde eş üçgenler	22
Şekil 2.17 Galile düzleminde birinci tip benzer üçgenler	23
Şekil 2.18 Galile düzleminde ikinci tip benzer üçgenler	23
Şekil 2.19 Galile düzleminde dönme	24
Şekil 2.20 Öklid ve Galile düzlemlerinde dönme hareketi	26
Şekil 2.21 x – shear dönüşümü	27
Şekil 2.22 y – shear dönüşümü	28
Şekil 2.23 Galile düzleminde $\triangle AOB$ nin dönmesi.....	29
Şekil 2.24 $d_1(A, B)$ Öklid metriği ve $d_2(A, B)$ Manhattan metriği	34
Şekil 2.25 Koch eğrisi	40
Şekil 2.26 Cantor kümesi	41
Şekil 2.27 Kutu sayma boyutunun hesaplanması.....	43
Şekil 3.1 Sierpinski üçgeninin oluşturulması.....	46

Şekil 3.2 Sierpinski üçgeni.....	47
Şekil 3.3 Kutu sayma boyutu	48
Şekil 3.4 $\theta_L = \theta_R = \theta_T = 10$ TFS fraktalının oluşumu.....	50
Şekil 3.5 $\theta_L - \theta_R - \theta_T$ dönme açılı Sierpinski-tipi fraktallar.....	52
Şekil 3.6 $\theta_L = 135, \theta_R = -20, \theta_T = 31.5$ fraktalının kutu sayma boyutu.....	53
Şekil 3.7 Sierpinski karesinin oluşturulması.....	56
Şekil 3.8 Sierpinski karesi.....	56
Şekil 3.9 $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_8 = 30$ TFS fraktalının oluşumu	59
Şekil 3.10 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 45, \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$ TFS fraktalının oluşumu.....	61
Şekil 3.11 Farklı θ değerleri için Sierpinski karesi-tipi fraktallar	63
Şekil 4.1 $\mathbb{G}^2$ de ikizkenar $\triangle ABC$	66
Şekil 4.2 Galile düzleminde Sierpinski üçgeninin oluşturulması	67
Şekil 4.3 Galile Sierpinski üçgeni.....	68
Şekil 4.4 $\varphi_L = \varphi_R = \varphi_T = 1$ için Galile Sierpinski-tipi fraktal.....	72
Şekil 4.5 Farklı $\varphi_L, \varphi_R, \varphi_T$ açıları için Galile Sierpinski-tipi fraktallar	73
Şekil 4.6 Farklı θ ve φ değerleri için Öklid fraktallarının Galile düzleminde karşılıkları	75
Şekil 4.7 $\varphi_L = -1, \varphi_R = -0.34, \varphi_T = 0.65$ fraktalının kutu sayma boyutu.....	77
Şekil 4.8 Galile Sierpinski karesi	79
Şekil 4.9 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 1$ için Galile Sierpinski karesi-tipi fraktalın oluşumu	82
Şekil 4.10 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.6$ (y-shear) fraktal.....	83
Şekil 4.11 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.3$ (x-shear) fraktal.....	84
Şekil 4.12 Farklı $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_8$ değerleri için fraktallar	86
Şekil 4.13 Farklı θ ve φ değerleri için Öklid fraktallarının Galile düzleminde Karşılıkları.....	88

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	Düzlemde Cayley-Klein geometriler	10
Çizelge 3.1	Sierpinski üçgeni TFS	47
Çizelge 3.2	$\theta_L = \theta_R = \theta_T = 10$ TFS	50
Çizelge 3.3	Farklı θ_L, θ_R ve θ_T değerleri için fraktallar	51
Çizelge 3.4	Sierpinski karesi TFS	56
Çizelge 3.5	$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_8 = 30$ TFS	60
Çizelge 3.6	$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 45, \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$ TFS	62
Çizelge 3.7	Farklı θ değerleri için TFS değerleri	64
Çizelge 4.1	Düzlemde İkizkenar Galile Sierpinski üçgeni TFS	68
Çizelge 4.2	$\varphi_L = \varphi_R = \varphi_T = 1$ TFS	71
Çizelge 4.3	Farklı $\varphi_L, \varphi_R, \varphi_T$ açıları için TFS	74
Çizelge 4.4	Galile Sierpinski karesi	80
Çizelge 4.5	$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 1$ TFS	81
Çizelge 4.6	$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.6$ (y-shear) TFS	83
Çizelge 4.7	$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.3$ (x-shear) TFS	84
Çizelge 4.8	Farklı φ değerleri için TFS	85

1. GİRİŞ

İnsanoğlu daima üzerinde yaşadığı dünyayı, hayatı ve evreni anlamlandırma çabası içinde olmuş ve Francis Bacon'un "Bilmek, egemen olmaktır." savını doğrularcasına doğayı anlamaya ve ona hükmetmeye çalışmıştır. Bu sebeple, günlük yaşamın her alanında kullanılan geometrinin geçmişi belki de insanlık tarihi kadar eskidir ancak ispata dayalı ve sistemli bir bilim dalı haline gelmesi M.Ö. 3.yüzyıla Öklid'in Elementler isimli çalışmasına dayanmaktadır. Geometri kelimesi Eski Yunanlılar zamanında ilk defa kullanılmış ve etimolojik olarak dünyanın ölçümü anlamına gelen *geometrein* kelimesinden türetilmiştir. İki bin yılı aşkın bir süredir idealize edilmiş soyutlamalardan oluşan bir geleneksel geometri halini alan Öklid geometrisi, bilim adamları ve matematikçiler için evreni modelleme konusunda tek başına yetersiz kalmıştır. Geometri, yüzyıllardır süregelen çalışmalarla birlikte hep gelişme kaydetmiş ve özellikle 19. yüzyıl geometrinin hızlı bir gelişme dönemi olmuştur. Öklid geometrisinin yanı sıra yeni geometriler keşfedilmiş ve geliştirilmiştir. 1871 yılında Cayley ve Klein tarafından Öklid geometrisini de içine alan dokuz düzlem geometrisi tanımlanmıştır. Bu geometrileri birbirinden farklı kılan metriksel özellikleridir. Klein'e göre geometri, dönüşümler altında değişmez kalan özellikleri inceleyen çalışmaların bütünüdür (Yaglom 1979). Cayley-Klein geometrilerden biri de Galile geometrisidir. Galile geometrisinde öteleme ve büzülme dönüşümleri Öklid geometrisindeki ile aynıdır. Öklid geometrisinde shear (makas) hareketi olarak tanımlanan dönüşüm Galile geometrisinde bir dönme hareketidir ve uzaklık ile açıları korur. Dolayısıyla Galile geometrisi; öteleme, büzülme ve dönmeden oluşan Galile hareketleri altında değişmez kalan şekillerin geometrisi olarak tanımlanmıştır (Yaglom 1979).

Bu çalışmanın temel dayanağını geometriler arasındaki metriksel farklılıklar oluşturmaktadır. Fransız matematikçi Mandelbrot kendi ismiyle anılan Mandelbrot Cümlesini keşfinden sonra aslında bir kuadratik polinoma değer olarak kompleks sayıların verilmesi ve her oluşan değerın yeni bir değer olarak kullanılması, bu döngüsel işleme sonsuza dek devam edilmesi ve sonrasında da oluşan sayı dizilerinin anlamlı bir şekilde sınıflandırılması işlemini oldukça basit ve herkesçe düşünülebilecek bir matematiksel yöntem olarak değerlendirmektedir. Lakin burada önemli olan husus

şudur; var olagelen şeylere farklı bir bakış açısı ile bakabilmek yahut mevcut materyalleri, olguları, düşünceleri farklı kombinasyon ve yöntemlerle bir araya getirebilmektir. Bu çalışmada bu düşünce temeline dayanarak metrik değişikliği ile elde edilecek somut çıktıların ortaya konulması amaçlanmaktadır.

Evreni ve tüm yaşam formlarını modelleme yolunda insanoğlu, bilgisayar tekniklerinin kullanılmaya başlanmasından önce de fraktal tanımlaması yapmaksızın fraktallara dair çalışmalar ortaya koymuştur ancak teknolojinin gelişmesiyle birlikte bilgisayar bilimlerinin geometri ile birleşmesi fraktal geometri çalışmalarını ilerletmiştir. Basit algoritmaların tekrarlanmasıyla oluşan fraktallar doğada bir eğrelti otu formunda, Öklid geometrisine ait kuralları içeren algoritmaların tekrarlanmasıyla Sierpinski üçgeni, Koch kar tanesi, Cantor cümlesi vb. deterministik fraktallar olarak literatürde yerini almıştır.

Fraktallara özgü iki önemli özellik olan kendine benzerlik ve fraktal boyut kavramlarının metrikle ilişkili olması, Öklid düzleminde oluşturulan özel deterministik fraktalların Galile düzleminde nasıl bir görüntüye sahip olacakları sorusunu akıllara getirmiştir. Shear hareketi yaptıran $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Galile dönme matrisi ile oluşan benzerlik

dönüşümlerinin, C# programlama dili ile geliştirilen bilgisayar programında tekrarlanmasıyla oluşan Galile tipi fraktallar, geometrik sistemlerin düzlem geometrilerinde belirleyici bir faktör olduğunu somut olarak ortaya koymuştur. Ayrıca bu çalışmada, değişmezlerin geometrisinden hareketle Galile anlamında kendine benzerlik ve Galile kutu sayma boyutu kavramları tanımlanmış ve Öklid geometrisi ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Bu çalışmada yer alan tekrarlı fonksiyonlar yaklaşımının Galile düzlemindeki sonuçlarına ilaveten farklı düzlem ve uzaylarda ortaya çıkaracağı sonuçlar ise şimdilik keşfedilmeyi bekleyen bir çalışma olarak sırrını korumaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ÖZETLERİ

2.1 Dual Sayılar

Dual sayılar, düzlem ve uzay geometrisinde geometrik uygulamalar bulmakla birlikte cebirsel anlamda genelleştirilmiş kompleks sayılar sınıflaması içinde yer almaktadır. Kompleks sayılar, $x^2 + 1 = 0$ polinomunun köklerinin bulunmasında reel sayıların yetersiz kalması üzerine i imajiner birimi için $i^2 = -1$ tanımlaması yapılarak reel sayıların genişletilmiş olarak Gauss (1861) tarafından ifade edilmiştir. Dual sayılar cebiri ise William Kingdon Clifford (1873) tarafından kompleks sayılara benzer şekilde, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + \varepsilon y$ formundaki sayıların ε dual birimi için $\varepsilon^2 = 0$ tanımlamasıyla oluşturulmuştur. Fizikte robotikler, mekanik, kinematik ve katı vücut hareketleri gibi önemli çalışma konularını modellemede kullanılan dual sayıların mekaniğe uygulanması ve geliştirilmesi Alexander Petrovich Kotelnikov (1865-1944) ve Eduard Study'nin (1862-1930) çalışmalarını beklemiştir. J.Rooney (1978) ve I.M.Yaglom (1979) çalışmalarında dual sayıları düzlemde cebirsel ve geometrik olarak kompleks sayılar ile karşılaştırmalı olarak açıklamışlardır. Genelleştirilmiş kompleks sayılar gruplaması içindeki kompleks sayılar Öklid düzlemi, double sayılar Lorentz (Minkowski) düzlemi ve dual sayılar Galile düzleminin noktaları olarak ifade edilmektedir.

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere (x, y) sıralı ikililerinin cümlesi

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

olmak üzere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

cümlesi üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şöyle tanımlanır:

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{D}$ için

$$+: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

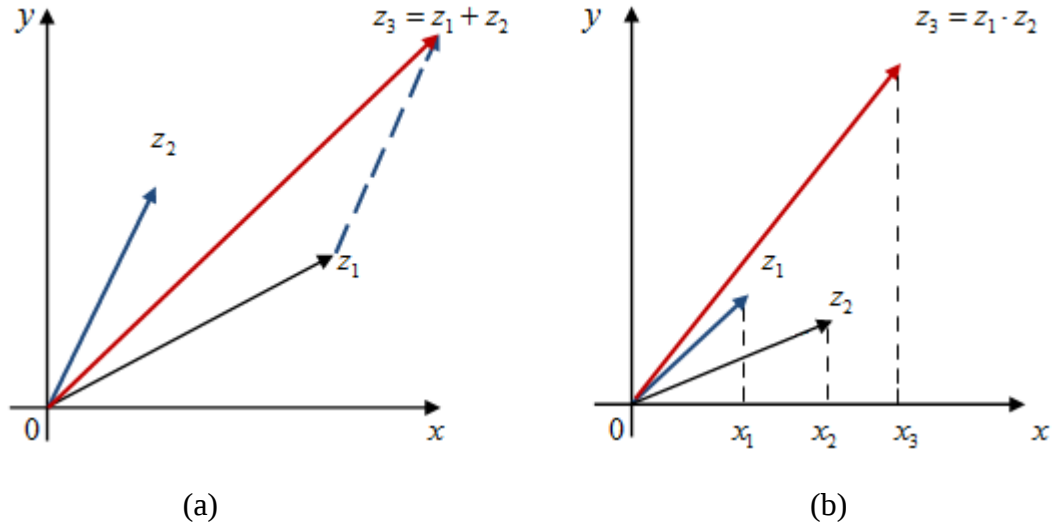
şeklinde tanımlanan “+” işlemi $\mathbb{D}$ ’deki *toplama* (şekil 2.1.a),

$$\cdot: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

şeklinde tanımlanan “.” işlemi $\mathbb{D}$ ’deki *çarpma* (şekil 2.1.b) olarak adlandırılır.

$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{D}$ için $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ ise z_1 ile z_2 eşittir denir ve $z_1 = z_2$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu 1983).



Şekil 2.1.a,b. $\mathbb{D}$ ’de toplama ve çarpma

Tanım 2.1.1

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde toplama “+”, çarpma “.” ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ ’ye *dual sayılar cümlesi* ve $\forall z = (x, y) \in \mathbb{D}$ sayısına bir *dual sayı* denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Şekil 2.1’den görülmektedir ki bir $z = (x, y) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $\mathbb{R}^2$ veya xy – düzleminde bir (x, y) noktası ile eşleşmektedir.

Tanım 2.1.2

Bir $z = (x, y) \in \mathbb{D}$ dual sayısı,

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x(1, 0) + y(0, 1) \end{aligned}$$

olarak yazılırsa $(1, 0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ ’nin “.” işlemine göre *birim elemanı* veya z ’nin *reel birimi*, $(0, 1)$ dual sayısına z ’nin *dual birimi* denir. $(0, 1)$ sayısı ε ile gösterilir ve

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0, 0) = 0$$

dır. O halde bu tanımlar doğrultusunda $\mathbb{D}$ *dual sayılar cümlesi*

$$\mathbb{D} = \{z = x + \varepsilon y \mid x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0\}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.1.3

$z = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ için $|z| = |x + \varepsilon y| = |x|$ sayısına z ’nin *mutlak değeri* denir.

Dual sayılarda mutlak değer özellikleri $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ için;

- i) $|z| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$
- iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

dir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.1.4

$z = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ için $\bar{z} = x - \varepsilon y$ dual sayısına z 'nin eşleniği denir. $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ve $\bar{z}$ dual eşleniği olmak üzere;

- i) $\overline{(\bar{z})} = z$
- ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq (0, y)$
- v) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- vi) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ ve $z - \bar{z} = 2\text{Du}(z)$

dir (Hacısalihoglu 1983).

Tanım 2.1.5 ($\mathbb{D}$ üzerinde iç çarpım)

$z_1 = x_1 + \varepsilon y_1, z_2 = x_2 + \varepsilon y_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = \text{Re} \left(z_1 \bar{z}_2 \right) = x_1 x_2$$

şeklinde tanımlanan $\langle , \rangle$ işlemine $\mathbb{D}$ üzerinde *indefinit iç çarpım işlemi* denir (Tütüncü 2009).

Tanım 2.1.6

$\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı $\langle , \rangle$ işlemine göre bir z dual sayısının O başlangıç noktasına uzaklığı,

$$\begin{aligned}\|\vec{z}\| &= \sqrt{\langle z, z \rangle} \\ &= \sqrt{\operatorname{Re}(z, \bar{z})} \\ &= |z|\end{aligned}$$

olup bu değere z nin normu denir.

Tanım 2.1.7 (Bir dual sayının kutupsal gösterimi)

$\forall z \in \mathbb{D}$ dual sayısı $|z| = r \neq 0$ olmak üzere,

$$z = x + \varepsilon y = r \left(\frac{x}{r} + \varepsilon \frac{y}{r} \right)$$

biçiminde yazılabilir. Burada z nin argümenti,

$$\arg(z) = \frac{y}{x} = \varphi$$

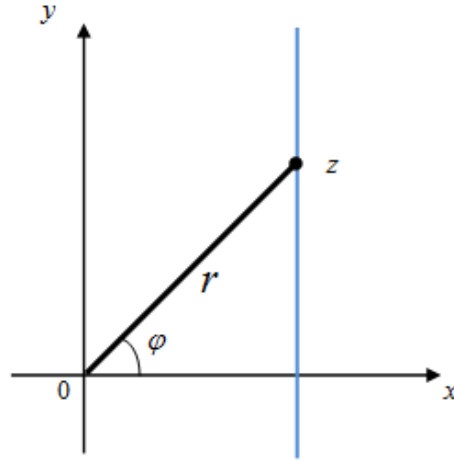
ve normu

$$r = |z|$$

olmak üzere her z dual sayısı r ve φ ye bağlı olarak,

$$z = x + \varepsilon y = r(1 + \varepsilon \varphi)$$

şeklinde *kutupsal* formda yazılabilir (Şekil 2.2), (Yaglom, 1979).



Şekil 2.2 Bir z dual sayısının kutupsal gösterimi

e^z nin kuvvet serisine açılımından $z = \varepsilon\varphi$ için,

$$\begin{aligned} f(\varepsilon\varphi) &= e^{\varepsilon\varphi} = 1 + \varepsilon\varphi + \frac{(\varepsilon\varphi)^2}{2!} + \dots + \frac{(\varepsilon\varphi)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + \varepsilon\varphi \end{aligned}$$

olmak üzere *Euler formülü*,

$$e^{\varepsilon\varphi} = 1 + \varepsilon\varphi$$

olarak elde edilir. Bir z dual sayısının üstel gösterimi

$$z = x + \varepsilon y = r(1 + \varepsilon\varphi) = r e^{\varepsilon\varphi}$$

olup Taylor seri açılımından

$$e^{\varepsilon(\theta+\varphi)} = e^{\varepsilon\theta} e^{\varepsilon\varphi}$$

ve toplam formülleri,

$$\cos g(\theta + \varphi) = \cos g\theta \cos g\varphi$$

$$\sin g(\theta + \varphi) = \sin g\theta \cos g\varphi + \cos g\theta \sin g\varphi$$

dir. Şekil 2.2’de yarıçapı r olan çember üzerindeki her $z = (x, y)$ dual sayısı için

$$x = r \cos g\varphi \quad \text{ve} \quad y = r \sin g\varphi$$

yazılabilir. Birim çember üzerinde bulunan $\forall z = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ dual sayısı için $r = |z| = x = 1$ olduğundan,

$$x = \cos g\varphi = 1 \quad \text{ve} \quad y = \sin g\varphi = \varphi$$

elde edilir. Ayrıca $f(z) = z^n$ fonksiyonunun Binom açılımından faydalanarak $z = \cos g\varphi + \varepsilon \sin g\varphi$ alınırsa,

$$(\cos g\varphi + \varepsilon \sin g\varphi)^n = \cos g(n\varphi) + \varepsilon \sin g(n\varphi)$$

De Moivre formülü elde edilir (Rooney 1978, Yaglom 1979, Akar vd. 2013).

Tanım 2.1.8 (Dual sayıların matris gösterimi)

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{cümlesi matrislerde toplama ve matrislerde çarpma}$$

işlemleriyle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır ve $(M, +, \cdot)$ ile gösterilir.

$(\mathbb{D}, +, \cdot)$ dual sayılar halkası ile $(M, +, \cdot)$ halkası izomorftur.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{D} &\longrightarrow M \\ z = x + \varepsilon y &\longrightarrow f(z) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ile tanımlanan f dönüşümü bir izomorfizmdir (Hacısalıhoğlu 1983).

Böylece $\forall z = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ dual sayısı $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$ matrisi ile temsil edilebilir.

2.2 Galile Düzlemi ve Geometrisi

M.Ö. 3. yüzyılda Öklid'in beş aksiyom üzerine kurduğu Öklid geometrisi, 19. yüzyılın başlarında N.Lobachevsky (1829), J.Bolyai (1832) ve C.F.Gauss'un hiperbolik geometriyi ve G.F.Bernhard Riemann (1854), A.Cayley ve F.Klein'in (1872), içinde hiperbolik ve parabolik geometrilerin de bulunduğu Öklidyen olmayan "Cayley-Klein geometriler"i keşfine kadar ağırlıklı geçerliliğini korumuştur. I.M.Yaglom (1979) çalışmasında iki nokta arasındaki uzaklık ve iki doğru arasındaki açı ölçümünü parabolik, hiperbolik ve eliptik olarak sınıflamış, bu da uzaklık-açı ölçümüne bağlı olarak dokuz düzlem geometrisini oluşturmuştur. Bu çalışmanın temel konusu olan Galile geometrisi de bu sınıflandırmada yer alan geometrilerden biri olup, dokuz düzlem geometrisinin gösterildiği tablo çizelge 2.1'de yer almaktadır.

Çizelge 2.1 Düzlemde Cayley-Klein geometriler

		Uzunluk ölçüsü		
		<i>Eliptik</i>	<i>Parabolik</i>	<i>Hiperbolik</i>
Açı ölçüsü	<i>Eliptik</i>	Eliptik Geometri	Öklid Geometrisi	Hiperbolik Geometri
	<i>Parabolik</i>	Öklid Geometrisi ile birlikte "Anti Newton - Hooke"	Galile Geometrisi	Minkowski Geometrisi ile birlikte "Newton - Hooke"
	<i>Hiperbolik</i>	Hiperbolik Geometri ile birlikte "Anti De – Sitter"	Minkowski Geometrisi	"De-Sitter"

Düzlemde Öklid dışı geometriler $\mathbb{R}^2$ düzleminin farklı iç çarpımlar ile birlikte ele alınmasıyla elde edilen düzlemler üzerinde oluşurlar. Galile ve Lorentz geometrileri buna örnek olarak verilebilir. Galile geometrisi Tanım 2.1.5'te verilen iç çarpım ile birlikte oluşan $\mathbb{G}^2$ Galile düzleminin, Lorentz geometrisi ise $\forall z_1 z_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$ şeklinde tanımlı iç çarpım ile birlikte düşünüldüğünde oluşan $\mathbb{L}^2$ Lorentz düzleminin geometrisidir.

Bu bölümde Galile düzleminin cebirsel ve geometrik özellikleri ele alınmıştır.

Tanım 2.2.1

$\mathbb{D}$ afin uzayı $\mathbb{R}^2$ üzerinde $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$, $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow \langle z_1, z_2 \rangle_g = \text{Re} \left(z_1 \overline{z_2} \right) = x_1 x_2, \quad x_1 \neq x_2$$

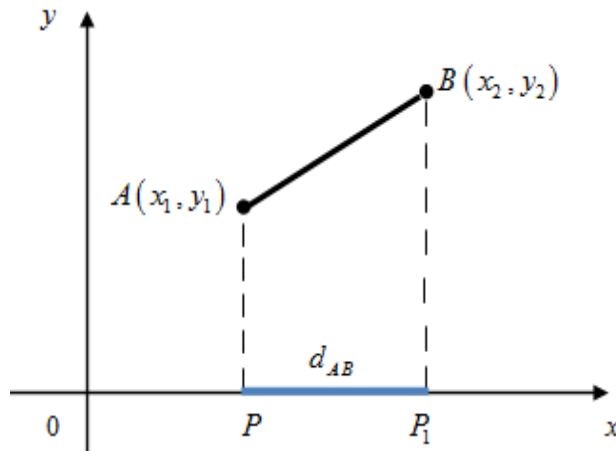
iç çarpımı ile düşünüldüğünde, $\mathbb{D}$ ye *Galile düzlemi* denir ve $(\mathbb{R}^2, \mathbb{D}, \langle , \rangle)$ veya $\mathbb{G}^2$ ile gösterilir (Rooney 1975).

2.2.1 Galile düzleminde uzaklık ve özel uzaklık

Galile düzleminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık AB doğru parçasının x -ekseni üzerindeki PP_1 projeksiyonunun uzunluğudur ve

$$d_{AB} = |x_1 - x_2|$$

ile hesaplanır (Şekil 2.3).

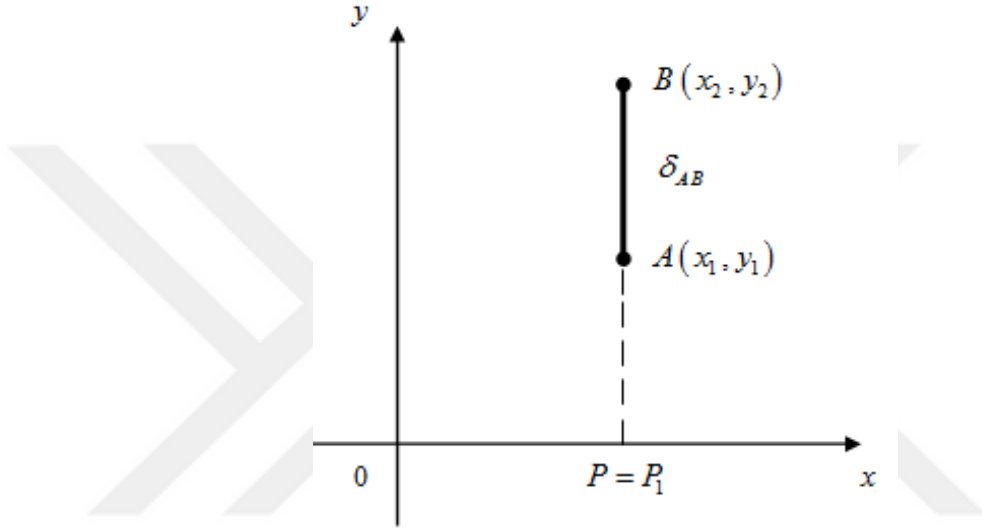


Şekil 2.3 Galile düzleminde d_{AB} uzaklığı

Eğer $d_{AB} = 0$ ise $x_1 = x_2$ ve $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları y – eksenine paralel aynı özel doğru üzerindedir. Bu durumdaki noktalar için şekil 2.4’te gösterilen

$$\delta_{AB} = |y_1 - y_2|$$

özel uzaklık tanımı verilir (Yaglom 1979).



Şekil 2.4 Galile düzleminde özel uzaklık

Tanım 2.2.2 (Galile Norm)

$\forall A(x, y) \in \mathbb{G}^2$ için *Galile düzleminde norm*,

$$\|A\| = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ |y|, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Dual sayılar için tanım 2.1.6 ile verilen norm, Galile norm tanımının içinde yer almaktadır (Yaglom 1979).

Tanım 2.2.3 (Galile Çemberi)

Galile düzleminde sabit bir $Q(x_0, y_0)$ noktasına uzaklığı r ($r \in \mathbb{R}^+$) olan $K(x, y)$ noktalarının cümlesine *Galile çemberi* denir (Şekil 2.5). Bu durumda merkezi $Q(x_0, y_0)$ ve yarıçapı r olan K çemberinin denklemi,

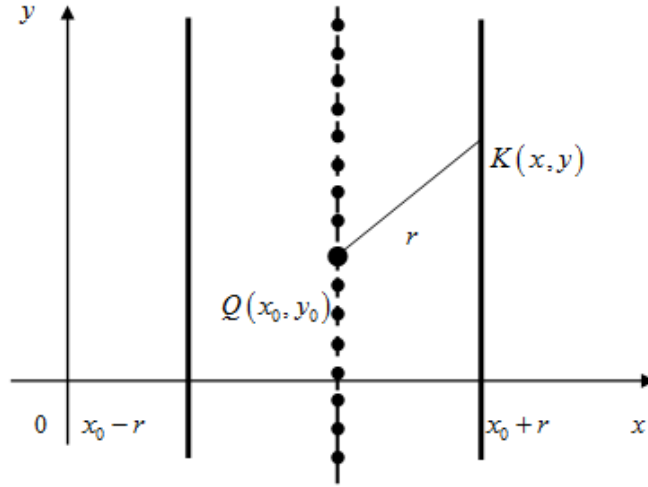
$$d_{QK} = |x - x_0| = r$$

$$(x - x_0)^2 = r^2$$

$$x - x_0 = \pm r$$

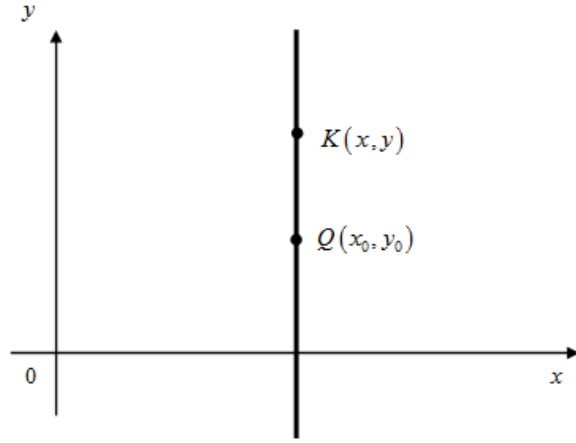
$$x = x_0 \pm r$$

olarak elde edilir.



Şekil 2.5 $Q(x_0, y_0)$ merkezli r yarıçaplı Galile çemberi

O halde daha genel bir ifadeyle Galile düzleminde Q merkezli ve r yarıçaplı çember iki özel (y -eksenine paralel) doğrudan oluşur. Galile çemberine eşit r mesafede olan Q noktaları, çemberin sonsuz çoklukta merkezinin olduğunu göstermektedir. $r = 0$ olması durumunda bu iki özel doğru çakışır (Şekil 2.6).



Şekil 2.6 r yarıçaplı Galile çemberi için $r = 0$ durumu

Galile düzleminde birim çember, merkezi $O(0,0)$ ve yarıçapı $r=1$ olan $P(x,y)$ noktalarının cümlesidir. O halde,

$$S_G^1 = \{P(x,y) | d_{OP} = 1\}$$

yazılabilir.

$$d_{OP} = |x-0| = 1$$

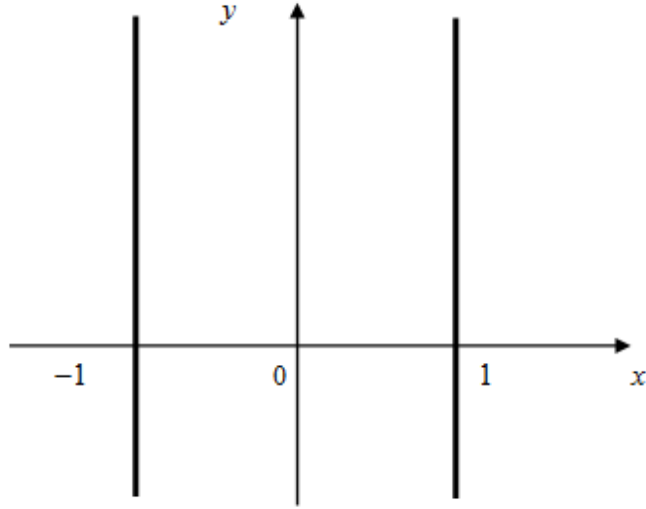
$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

özel doğrularına *Galile birim çemberi* denir (Şekil 2.7) ve

$$S_G^1 = \{P(x,y) | x = \pm 1, y \in \mathbb{R}\}$$

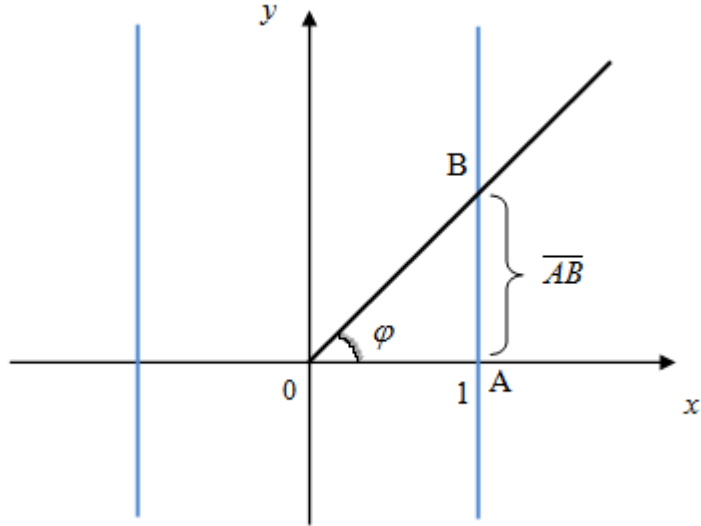
ile gösterilir (Yaglom 1979).



Şekil 2.7 S_G^{-1} Galile birim çemberi

2.2.2 Galile düzleminde açı

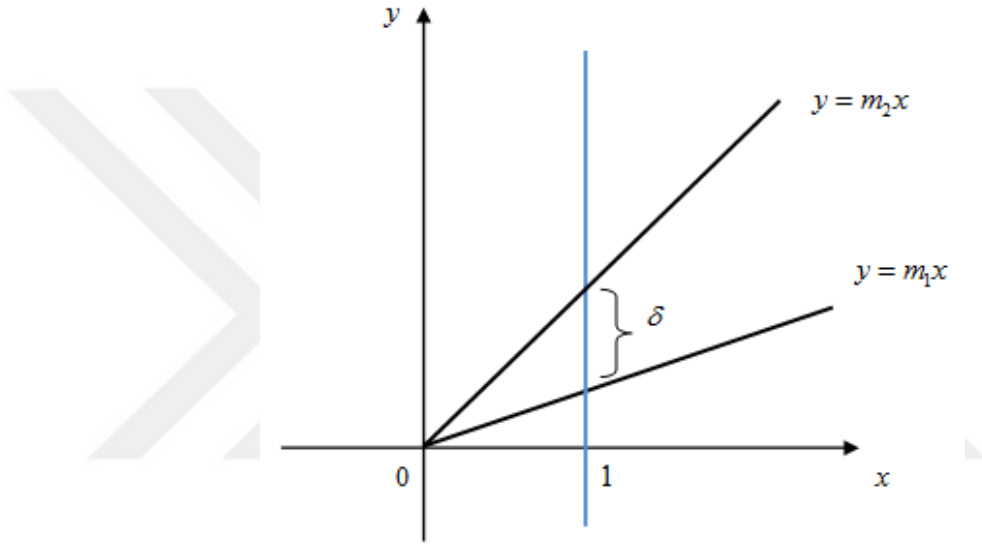
Galile düzleminde Öklid düzlemindeki tanımına benzer olarak; başlangıç noktaları aynı olan iki doğru parçasının birleşimine *açı*, birim çember üzerinde ayırdıkları çember yayına *açının ölçüsü* denir (Şekil 2.8).



Şekil 2.8 Galile düzleminde açı

Galile düzleminde çember yayları doğrulardır. Bu durumda şekil 2.8'den $(\hat{BOA})$ açısı ile gördüğü $\overline{AB}$ yay uzunluğu için $(\hat{BOA}) = \varphi = \overline{AB}$ yazılabilir.

Benzer şekilde merkezi O başlangıç noktasında bulunan $y = m_1x$ ve $y = m_2x$ doğrularının arasındaki açının ölçüsü $\delta = |m_2 - m_1|$ ile hesaplanır ki bu özel uzaklık tanımının ta kendisi olup şekil 2.9'da gösterilmiştir.

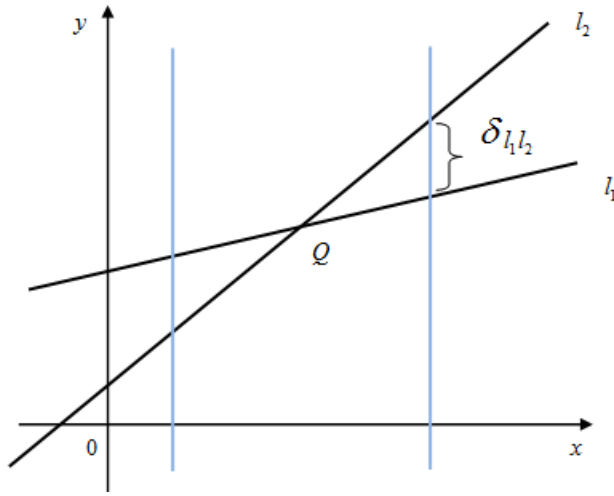


Şekil 2.9 $\mathbb{G}^2$ de merkezi O olan doğrular arasındaki açı

Daha genel bir ifadeyle Galile düzleminde $y = m_1x + n_1$ ve $y = m_2x + n_2$ eşitlikleri ile verilen l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açı da bu doğruların kesişim noktasını (Q) merkez kabul eden birim çember üzerindeki $\delta_{l_1l_2}$ yayının uzunluğu olarak ifade edilebilir (Şekil 2.10) ve ölçüsü,

$$\delta_{l_1l_2} = |m_2 - m_1|$$

ile hesaplanır.

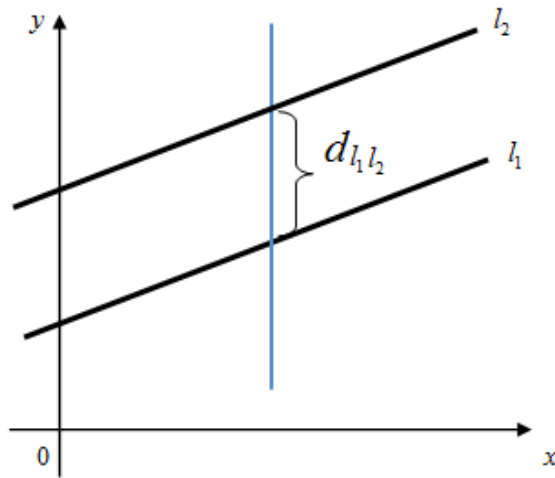


Şekil 2.10 Galile düzleminde l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açı

l_1 ve l_2 doğrularının paralel olması durumunda bir yaydan söz edilemeyeceği için $\delta_{l_1 l_2} = 0$ olacaktır. Bu durumda $y = mx + n_1$ ve $y = mx + n_2$ eşitlikleriyle verilen *paralel doğrular arasındaki özel uzaklık*,

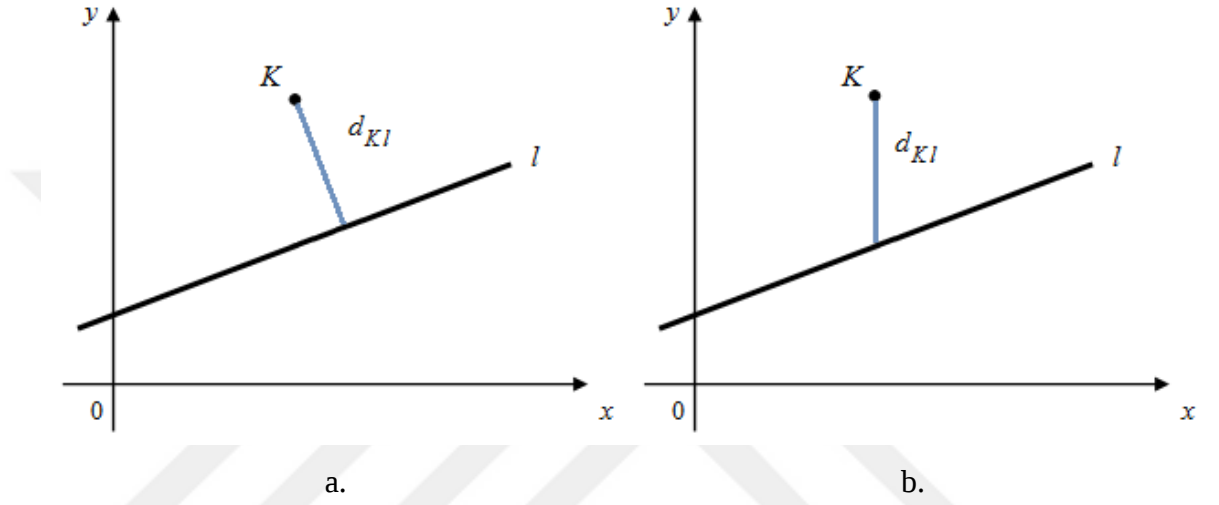
$$d_{l_1 l_2} = |n_2 - n_1|$$

ile hesaplanır (Şekil 2.11), (Yaglom 1979).



Şekil 2.11 Galile düzleminde paralel l_1 ve l_2 doğruları arasındaki özel $d_{l_1 l_2}$ uzaklığı

Öklid geometrisinde bir noktanın bir doğruya uzaklığı diklik kavramı ile ilgilidir (Şekil 2.12.a). Galile düzleminde birbirine paralel iki doğru arasındaki uzaklık tanımından hareketle bir K noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığı özel uzaklık tanımı ile verilir. Bu da Galile geometrisinde bir doğrunun dikmesi rolünü özel doğruların oynadığını göstermektedir (Şekil 2.12.b), (Yaglom 1979).

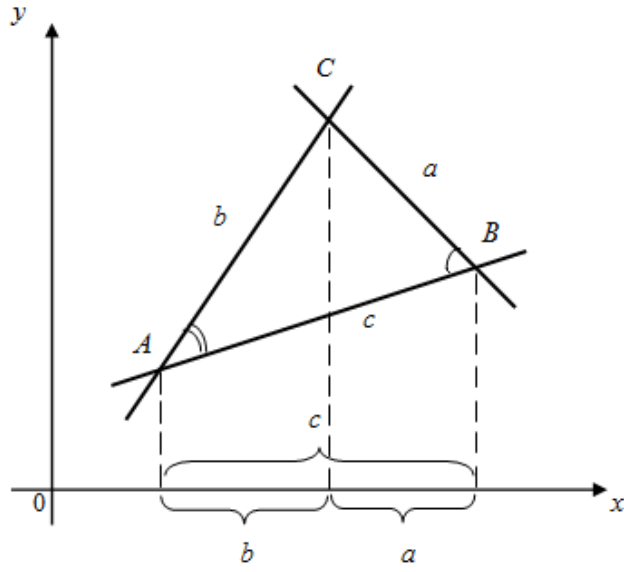


Şekil 2.12.a.b. Öklid ve Galile geometrisinde bir noktanın bir doğruya uzaklığı

2.2.3 Galile düzleminde üçgen

Galile düzleminde en basit çokgen, köşeleri A, B, C , kenar uzunlukları

$d_{BC} = a$, $d_{AC} = b$, $d_{AB} = c$ ve açıları $\delta_{bc} = \hat{A}$, $\delta_{ca} = \hat{B}$, $\delta_{ab} = \hat{C}$ olan bir ABC üçgeni (Şekil 2.13) olmak üzere,



Şekil 2.13 Galile düzleminde $\triangle ABC$

ABC üçgeninin kenar uzunlukları ve açıları arasında,

$$d_{BC} + d_{AC} = d_{AB}$$

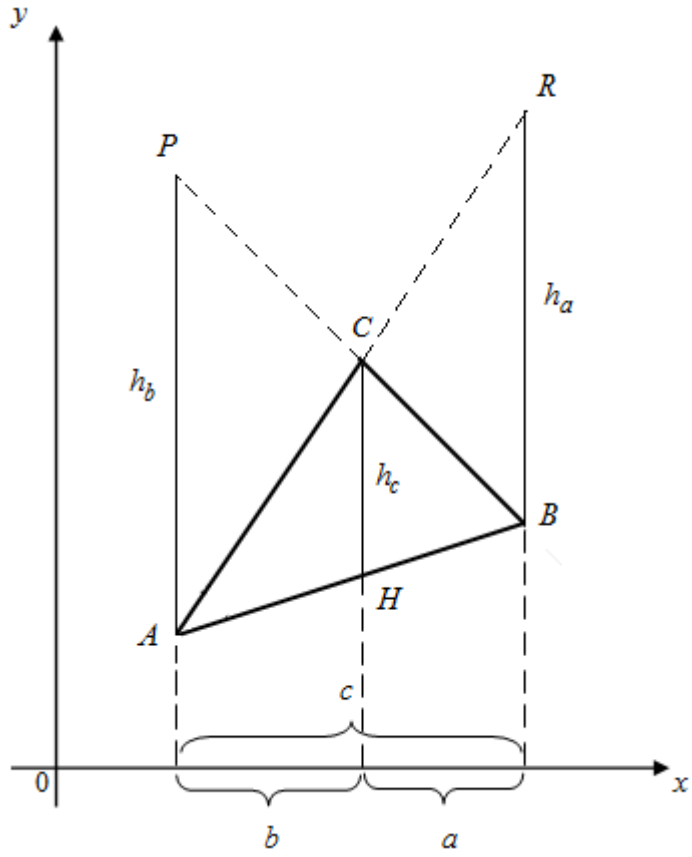
$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}$$

eşitlikleri vardır.

Galile düzleminde bir üçgenin kenarlarına ait yükseklikler, üçgenin köşe noktalarından geçen ve dışından kesen özel doğrular üzerinde bulunur (Şekil 2.14). ABC üçgeninin sırasıyla BC , AC ve AB kenarlarına ait yükseklikler h_a , h_b ve h_c olmak üzere kenar ve açı eşitliklerinden

$$\frac{a}{\hat{A}} = \frac{b}{\hat{B}} = \frac{c}{\hat{C}}$$

elde edilir.



Şekil 2.14 Galile üçgeninde yükseklik

Galile düzleminde bir üçgenin alanı, Öklid düzleminde olduğu gibi tabanı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir. Bu durumda ABC üçgeninin alanı S olmak üzere

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$$

dir. Diğer taraftan

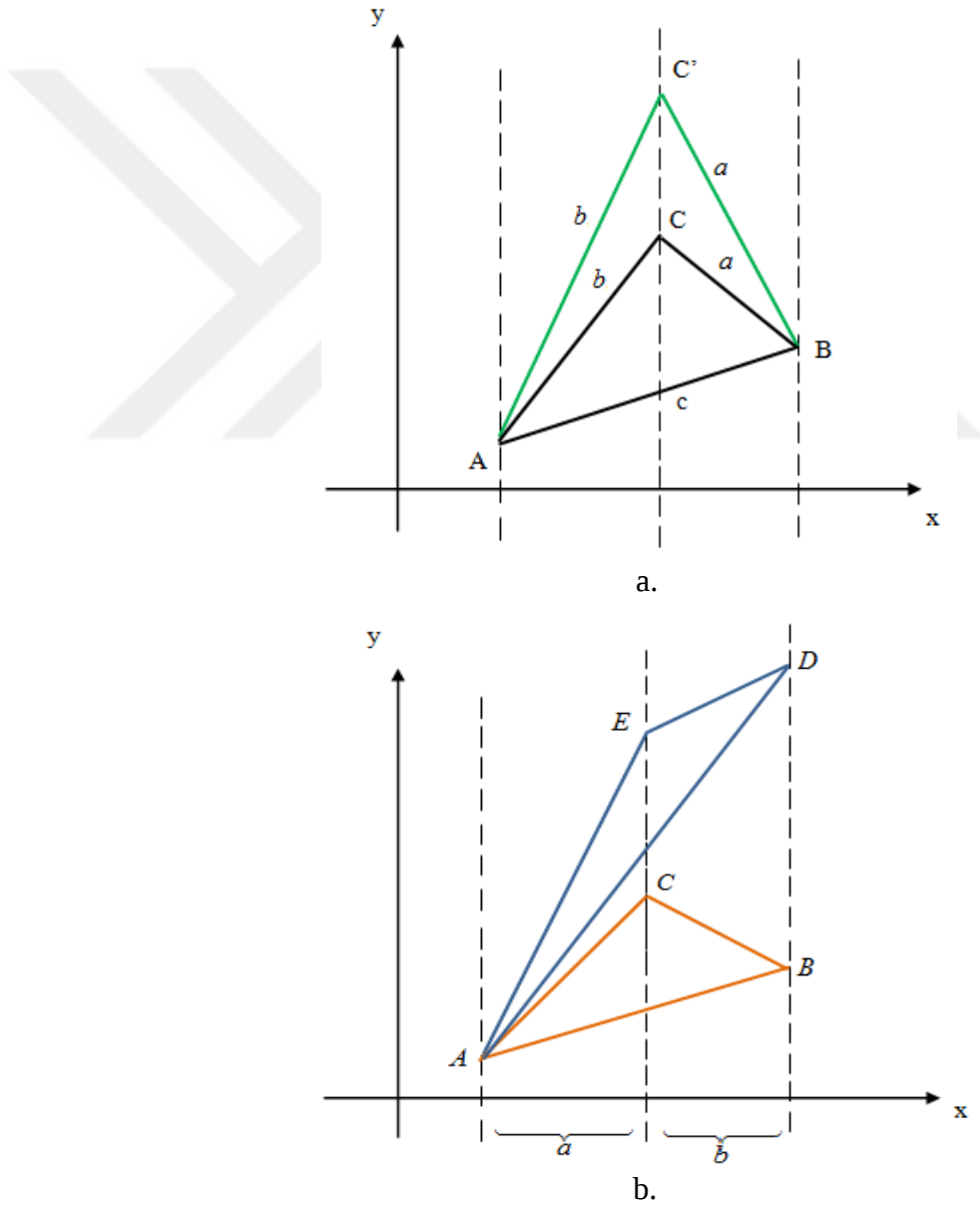
$$S = \frac{1}{2} b c \hat{A} = \frac{1}{2} a c \hat{B} = \frac{1}{2} a b \hat{C}$$

eşitliği Galile geometrisinde bir üçgenin alanının herhangi iki kenarı ile o iki kenar arasında kalan açının çarpımının yarısına eşit olduğunu göstermektedir (Yaglom 1979).

Tanım 2.2.4 (Galile düzleminde üçgenlerde eşlik ve benzerlik)

Galile düzleminde üçgenler Öklid düzleminde olduğu gibi kenar uzunlukları ve açılarına göre sınıflandırılırlar ancak Öklid düzlemindeki üçgenlerin temel eşlik aksiyomlarının hepsi Galile düzleminde sağlanamamaktadır.

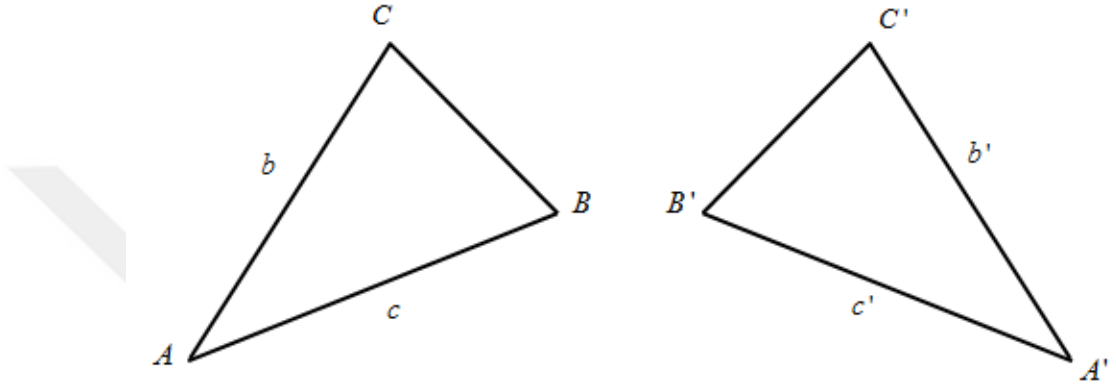
Galile düzleminde üçgenlerin tüm kenar uzunluklarının karşılıklı olarak eşit olması üçgenlerin eşliği için yeterli bir şart değildir. Bu sebeple Öklid düzlemindeki KKK (Kenar-Kenar-Kenar) aksiyomu Galile düzleminde sağlanmaz.



Şekil 2.15.a.b. Galile düzleminde üçgenlerin KKK ilişkisi

Şekil 2.15.a'da kenar uzunlukları eşit olan ABC ve ABC' üçgenleri ve şekil 2.15.b'de ABC ve ADE üçgenleri eş değildir.

Benzer şekilde KAK (Kenar-Açı-Kenar) ve AKA (Açı-Kenar-Açı) aksiyomları da yalnızca aynı yönlü kenar uzunlukları ve aynı yönlü açı değerleri eşit ise geçerlidir ve şekil 2.16'daki ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri eştir.

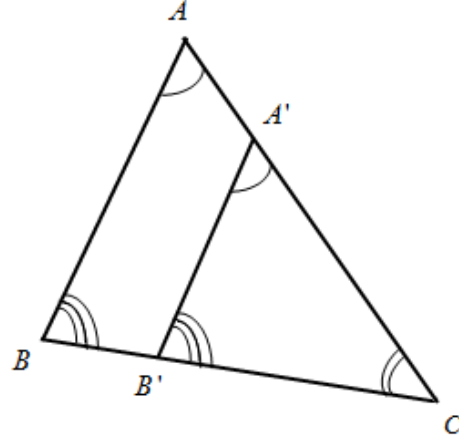


Şekil 2.16 Galile düzleminde eş üçgenler

Galile düzleminde *benzerlik* kavramı Öklid düzlemindeki ile aynıdır. Tanım 2.2.4'teki kenar-açı eşitliğinden açıkça görülmektedir ki karşılıklı açıları eşit olan ABC ve $A'B'C$ üçgenlerinin kenar uzunlukları arasında belli bir oran vardır ve bu orana

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C|}{|AC|} = \frac{|B'C|}{|BC|} = k$$

olmak üzere *birinci tip benzerlik oranı* denir. Galile düzleminde Öklid düzleminde olduğu gibi açıları koruyan ve uzunlukları belli bir oranda azaltan/arttıran benzerlik dönüşümleri (büzülme/genişleme) üçgenleri üçgenlere dönüştürürler. $A'B'C$ üçgeni k birinci tip benzerlik katsayılı benzerlik dönüşümü ile ABC üçgeninden elde edilir (Şekil 2.17).

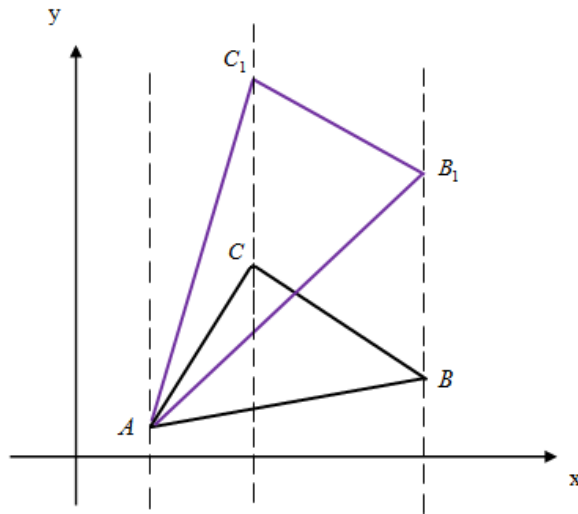


Şekil 2.17 Galile düzleminde birinci tip benzer üçgenler

Benzer şekilde Galile düzleminde karşılıklı kenar uzunlukları eşit olan üçgenlerin açı değerleri arasında belli bir oran vardır ve bu orana

$$\frac{(C_1\hat{A}B_1)}{(C\hat{A}B)} = \frac{(A\hat{B}_1C_1)}{(A\hat{B}C)} = \frac{(A\hat{C}_1B_1)}{(A\hat{C}B)} = \kappa$$

olmak üzere *ikinci tip benzerlik oranı* denir. Şekil 2.18'deki AB_1C_1 üçgeni kenar uzunluklarını koruyan ve açıları belli bir oranda değiştiren κ ikinci tip benzerlik katsayılı benzerlik dönüşümü ile ABC üçgeninden elde edilir (Yaglom 1979).



Şekil 2.18 Galile düzleminde ikinci tip benzer üçgenler

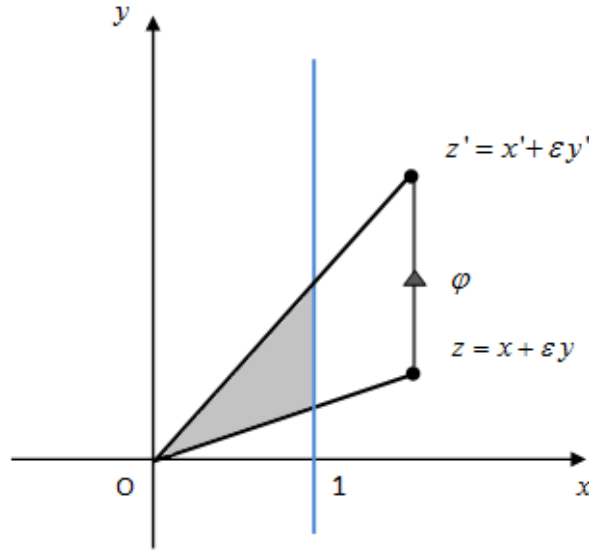
2.2.4 Shear hareketi - Galile düzleminde dönme

Shear hareketi dual sayıların en önemli uygulamalarından biri olup uzay hareketleri ve Öklid dışı geometrilere kullanılır (Yaglom 1979).

Galile düzleminde bir $A(x, y)$ noktası φ kadar döndükten sonra $A'(x', y')$ noktası olmak üzere,

$$\begin{aligned}x &= r \cos g\theta & x' &= r \cos g(\theta + \varphi) \\ y &= r \sin g\theta & y' &= r \sin g(\theta + \varphi)\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir (Şekil 2.19).



Şekil 2.19 Galile düzleminde dönme

Tanım 2.1.7'den

$$\begin{aligned}x' &= x \cos g\varphi + 0y \\ y' &= x \sin g\varphi + y \cos g\varphi\end{aligned}$$

ve $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ için $\cos g\varphi = 1$ ve $\sin g\varphi = \varphi$ olduğundan

$$x' = x$$

$$y' = \varphi x + y$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen dönüşüme $\mathbb{G}^2$ de *Shear hareketi* denir (Yaglom 1979, Akar vd. 2013).

Öklid düzleminde birim kompleks sayıların oynadığı rolü Galile düzleminde birim dual sayılar oynamaktadır. Galile düzleminde bir dual sayının $z = e^{\varepsilon\varphi} = (1 + \varepsilon\varphi)$ birim dual sayısı ile çarpılması, o dual sayının φ kadar dönmesi demektir. Dual sayıların çarpma işleminin bir shear hareketi ifade etmesinden hareketle *Galile düzleminde dönme*, shear

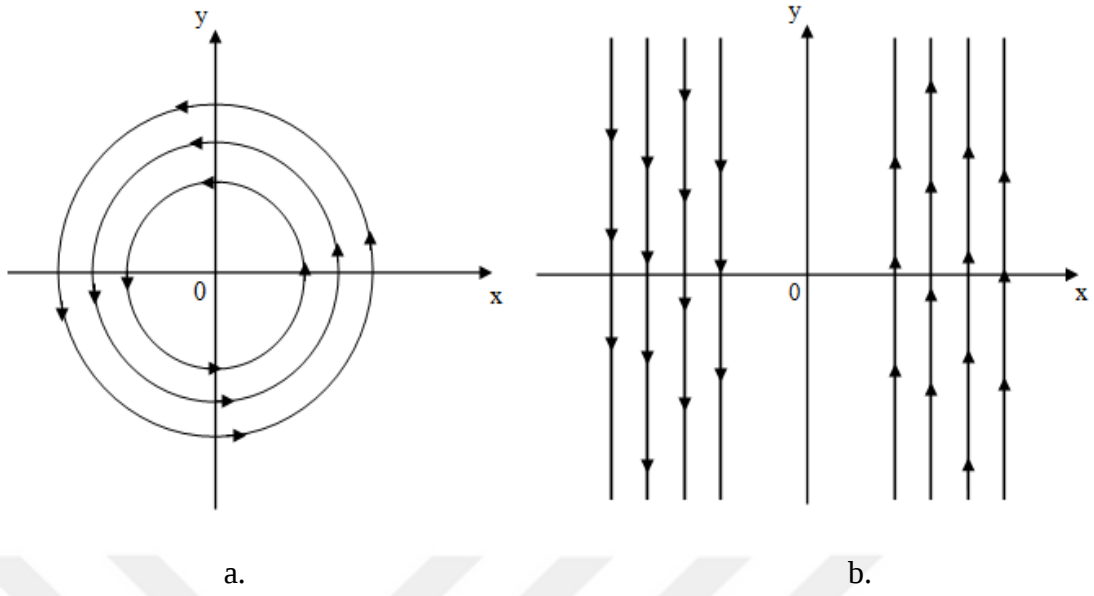
hareketi yaptıran $e^{\varepsilon\varphi} = 1 + \varepsilon\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ operatörü yardımıyla $\forall z = (x, y) \in \mathbb{G}^2$ için,

$$g : \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Öklid ve Galile düzlemindeki dönme hareketleri cebirsel ve geometrik olarak karşılaştırıldığında kompleks ve dual sayıların çarpım kurallarına bağlı olarak farklılık gösterdiği görülmektedir. Dönme hareketi çembersel bir harekettir. Dönme hareketi Öklid (Şekil 2.20.a) ve Galile (Şekil 2.20.b) düzlemlerinde çemberler boyunca gerçekleşir.



Şekil 2.20.a.b. Öklid ve Galile düzlemlerinde dönme hareketi

Tanım 2.2.5 (x-shear ve y-shear Dönüşümü)

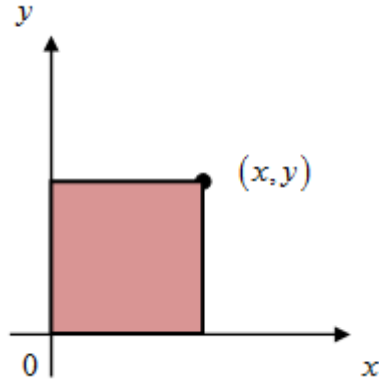
$\mathbb{G}^2$ de $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ için x -shear dönüşümü,

$$F: \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$$

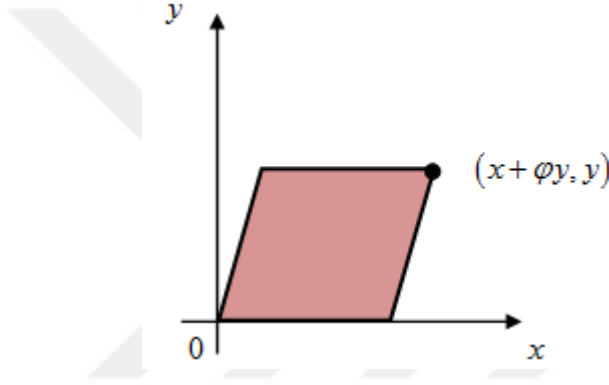
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \varphi y \\ y \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır.

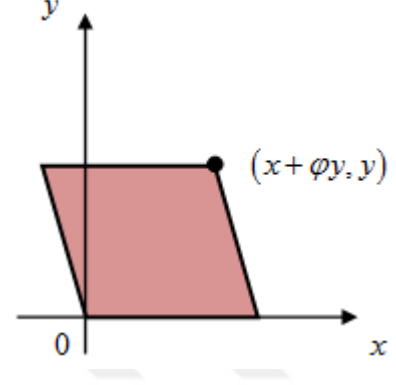
Bir $D \subset \mathbb{G}^2$ bölgesi için $\forall (x, y) \in D$ nin x -shear dönüşümü altındaki görüntüsü şekil 2.21.a.b.c'deki gibidir.



a. $D \subset \mathbb{G}^2$



b. $D_1, \varphi > 0$



c. $D_2, \varphi < 0$

Şekil 2.21.a.b.c. x -shear dönüşümü

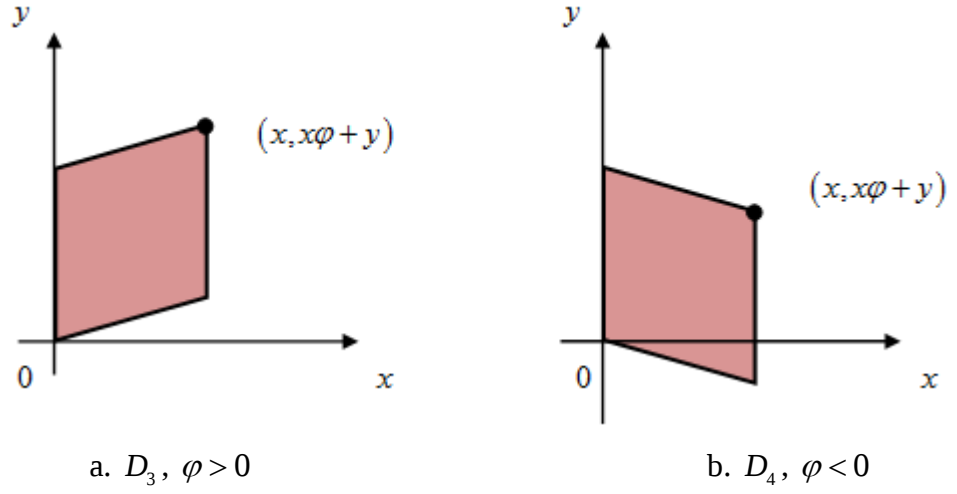
$\mathbb{G}^2$ de $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ için y -shear dönüşümü,

$$H: \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x\varphi + y \end{bmatrix}$$

dir.

$D \subset \mathbb{G}^2$ bölgesi için $\forall (x,y) \in D$ nin y -shear dönüşümü altındaki görüntüsü şekil 2.22'de gösterilmiştir.



Şekil 2.22.a.b y -shear dönüşümü

Örnek 1

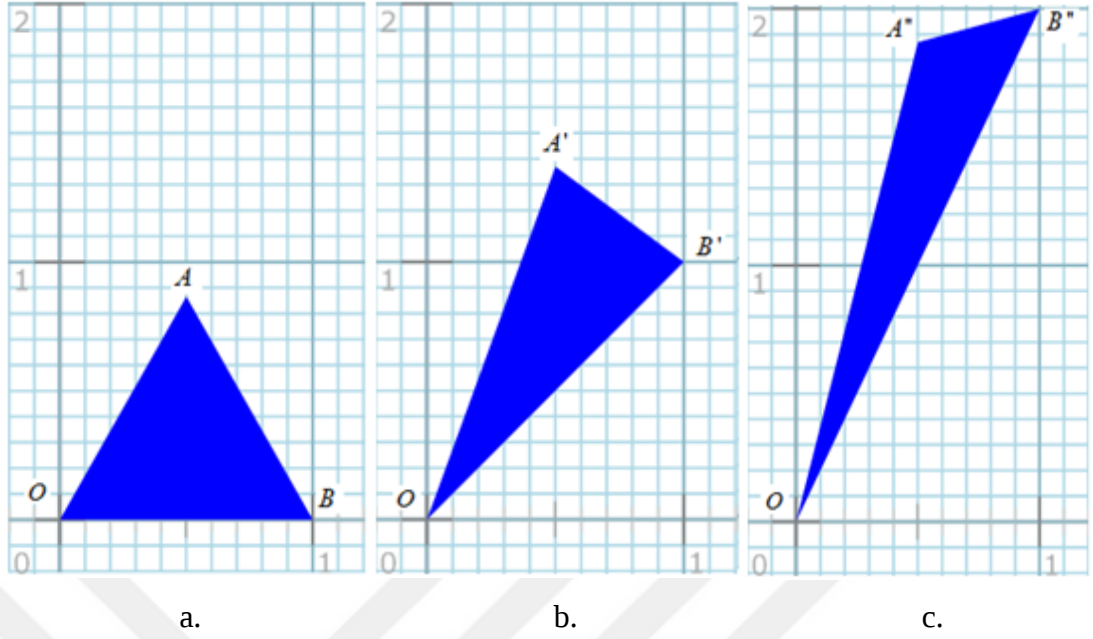
Galile düzleminde kenar uzunlukları $|AO|=0.5$, $|AB|=0.5$ ve $|OB|=1$ olan bir ikizkenar üçgen AOB olsun (Şekil 2.23.a). y -shear dönüşüm matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ olmak

üzere $\varphi=1$ için $z=1+\varepsilon\varphi$ birim dual sayısına karşılık gelen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisi

elde edilsin. AOB üçgeni $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile dönme hareketi yaptığında $A'OB'$ üçgeni

(Şekil 2.23.b) ve $A'OB'$ üçgeni $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile dönme hareketi yaptığında $A''OB''$

üçgeni (Şekil 2.23.c) elde edilir.



Şekil 2.23.a.b.c Galile düzleminde $\triangle AOB$ nin dönmesi

Galile düzleminde shear hareketi uzaklık ve açığı koruyan bir dönüşümdür. Dolayısıyla şekil 2.23'ten görülmektedir ki dönme hareketi sonrası oluşan üçgenlerin kenar uzunlukları arasında $|AO| = |A'O| = |A''O| = 0.5$, $|AB| = |A'B'| = |A''B''| = 0.5$ ve $|OB| = |OB'| = |OB''| = 1$ eşitlikleri vardır. Tanım 2.2.7'den karşılıklı kenar uzunlukları eşit olan AOB , $A'O'B'$ ve $A''O'B''$ üçgenlerinin açı değerleri arasında $\kappa=1$ ikinci tip benzerlik oranı olduğu kolayca hesaplanabilir. Buradan kenar uzunlukları ve açıları eşit bu üçgenlerin Galile anlamında benzer üçgenler olduğu açıktır. Bu durumda şu genelleme yapılabilir:

Köşe noktaları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ olan herhangi bir üçgen $\triangle ABC$ olsun.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisi ile φ -kadar döndükten sonra elde edilen yeni üçgenin köşe noktaları $A'(x_1', y_1')$, $B'(x_2', y_2')$ ve $C'(x_3', y_3')$ olmak üzere üçgenlerin köşe noktaları arasında şu bağıntı vardır:

$$\begin{array}{lll} x_1' = x_1 & x_2' = x_2 & x_3' = x_3 \\ y_1' = \varphi x_1 + y_1 & y_2' = \varphi x_2 + y_2 & y_3' = \varphi x_3 + y_3 \end{array}$$

Dönme sayısı arttırıldığında da görülmektedir ki ABC üçgeninin $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisi ile n . kere dönmesi sonucu oluşacak üçgenlerin köşe noktaları arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} x_n' &= x_1 \\ y_n' &= n\varphi x_1 + y_1 \end{aligned}$$

şeklinde genellenebilir. Buradan şu sonuç elde edilir: Galile düzleminde shear hareketi yaptıran $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisindeki φ dönme açısı, Galile düzleminde ikinci tip benzerlik katsayısı olarak tanımlanan κ değerinden başka bir şey değildir. O halde denilebilir ki; Galile düzleminde shear hareketi şekillerin uzunluklarını ve açılarını korur.

Tanım 2.2.6 ($\mathbb{G}^2$ de Galile hareketi)

$z = (x, y) \in \mathbb{G}^2$ için

$$\begin{aligned} f : \mathbb{G}^2 &\longrightarrow \mathbb{G}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x', y') = (x + 0y + a, \varphi x + y + b) \end{aligned}$$

veya matris formunda,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{G}^2 &\longrightarrow \mathbb{G}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme *Galile hareketi* denir. Galile hareketi bir shear ve bir ötelemenin bileşkesidir.

Bir diğer şekilde

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = \varphi x + y + b \end{cases}$$

eşitlikleri ile tanımlı olan Galile dönüşümleri; doğruları doğrulara, paralel doğruları paralel doğrulara dönüştürürler, doğrusallığı ve alan ölçüsünü korurlar (Yaglom 1979).

2.3 Fraktallar

Fraktalların çok fazla tanımı olmakla birlikte Mandelbrot fraktalları; kendisinin küçük kopyalarını içeren kırıklı ve pütürlü geometrik şekiller olarak tanımlamıştır (Mandelbrot 1982). Mandelbrot, Latince kırıklı anlamına gelen *fractus* kelimesinden türettiği fraktal kelimesinin, bu etkileyici matematiksel kümeleri nitelemek üzere literatüre girmesine büyük katkı sağlamıştır. 1982 yılında yayımlanan “*Doğanın Fraktal Geometrisi (The Fractal Geometry of Nature)*” isimli kitabında Mandelbrot, “Bulutlar küre değildir, dağlar koni, kıyı şeritleri çember değildir. Ne ağaç kabukları düzdür ne de yıldırım düz bir doğrultuda hareket eder.” demektedir ve doğanın klasik geometrik figürler yerine fraktallar ile daha iyi modellenebileceğini öne sürmektedir. Fraktal benzeri özelliklere sahip kar tanesi, brokoli ve eğrelti otu doğal nesnelere örnek olarak verilebilir. Mandelbrot, bilgisayar programları ile geometriyi buluşturup muhteşem görsel sonuçlar elde etmiş ve kendi adını taşıyan Mandelbrot cümlesini keşfetmiştir. Aslında fraktalların tarihi çok daha eskiye dayanmaktadır. İlk matematiksel fraktalın keşfi 1861 yılında Karl Weierstrass tarafından sürekli fakat hiçbir noktada diferensiyellenemeyen, yani köşe noktalarından oluşan bir eğri üzerindeki değişmelerin araştırılması sırasında, hiçbir noktada değişme oranı bulunamayacak olan eğrilerin keşfine dayanmaktadır. O zamandan beri ünlü matematikçiler tarafından sürekli ve diferensiyellenemeyen fonksiyonlar üzerine çalışmalar yapılmaya gelmektedir. Helge Von Koch 1904 yılında kendi adıyla bilinen ünlü Koch eğrisini tanımlamıştır. Georg Cantor tarafından 1884 yılında tanımlanan Cantor cümlesi ve Waclaw Sierpinski tarafından 1916 yılında tanımlanan Sierpinski üçgeni klasik fraktallara örnek olarak verilebilir.

Kendisinin belli oranda küçültülmüş parçalarından dönüşümler vasıtasıyla oluşan fraktalların iki önemli özelliği bulunmaktadır; kendine benzerlik ve fraktal boyut. Karakteristik bir özellik olan fraktal boyut, fraktalların geometrik yapıları ile ilgili bilgiler vermekte ve herhangi bir reel sayı olabilmektedir; fraktalları diğer geometrik şekillerden farklı kılan da budur. Fraktal boyut kavramı tarihsel süreçte Hausdorff

(Hausdorff 1918) ve Falconer'ın (Falconer 1985, 1990, 2003) çalışmalarında yer almıştır. Fraktal boyut için birçok tanım olmakla birlikte bunlardan biri kutu sayma boyutu yöntemidir ve kolaylığı sebebiyle büyük ölçüde bu yöntem kullanılmaktadır. Diğer yöntemler; benzerlik boyutu, topolojik boyut, Hausdorff boyutu olarak örneklendirilebilir.

Fraktalları oluşturan iki tip algoritma vardır; deterministik ve rastgele algoritmalar. Bu çalışmada deterministik algoritmalarca üretilen fraktallar incelenmiştir. Deterministik tekrarlama, belirli bir kuralın rekürsif olarak tekrar edilmesi işlemine dayanır. Sierpinski Üçgeni (1916), Koch eğrisi (1904), Cantor cümlesi (1872) literatürde en bilinen deterministik fraktallar olarak yer almakta olup konunun detayları Peitgen'in (Peitgen 1991, 1992) çalışmalarında yer almaktadır.

Fraktallar, ölçülebilir bir uzaklık kavramının tanımlı olduğu bir uzayda yani metrik uzayda tanımlanır ve oluşturulurlar. Bu bölümde, fraktalların nasıl oluşturulduğunun anlaşılabilmesi için gerekli olan metrik, tekrarlı fonksiyon sistemleri, dönüşümler, kendine benzerlik ve boyut kavramlarına yer verilmiştir.

2.3.1 Metrik kavramlar

Uzay basitçe noktaların koleksiyonu olarak ifade edilebilir. Fraktallar metrik uzaylarda oluşturulur. Metrik uzaylar, noktalar arası uzaklığı ölçmek için metriklerin tanımlı olduğu, uzayın özel türde alt uzaylarıdır. Uzaklık kavramı ise çoğunlukla; sayı doğrusu üzerindeki iki nokta için farklarının mutlak değeri, düzlemdeki iki nokta için ise Pisagor teoremi ile hesaplanan değerdir. Ancak uzaklık kavramı, metrik tanımına bağlı olarak farklılık göstermekte olup geliştirilebilir.

Tanım 2.3.1

X boş olmayan bir küme ve X üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$i) \quad d(x, y) \geq 0,$$

$$\text{ii)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\text{iii)} \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$\text{iv)} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

özelliklerine sahip d fonksiyonuna X kümesi üzerinde *metrik (uzaklık)*, (X, d) ikilisine *metrik uzay* adı verilir.

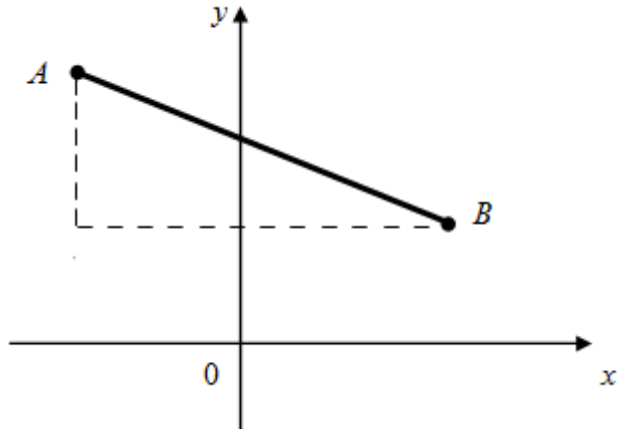
Klasik fraktallarla yakından ilgili olan Öklid metriği $\forall A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_1(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

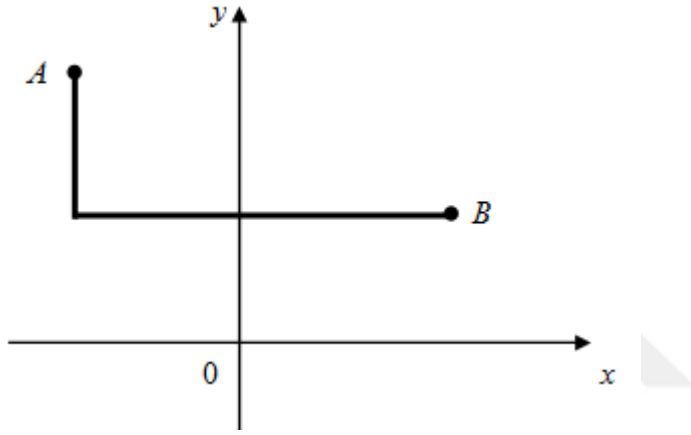
şeklinde tanımlıdır (Şekil 2.24.a). $\mathbb{R}^2$, Öklid metriği ile tam metrik uzaydır. $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı bir başka metrik olan Manhattan metriği ise Öklid metriğinden farklıdır. Bu metrik noktalar arası uzaklığı dikey ya da yatay şekilde ölçer ve $\forall A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_2(A, B) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbb{R}^2$, Manhattan metriği ile birlikte bir metrik uzaydır (Şekil 2.24.b).



a.



b.

Şekil 2.24.a Öklid metriği, $d_1(A, B)$, b. Manhattan metriği, $d_2(A, B)$

Tanım 2.3.2

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere $\forall a \in A$ için,

$$B(a, r) \subseteq A$$

olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı var ise A kümesine *açık küme* denir.

Tanım 2.3.3

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A nın kapanışı $\bar{A} = A \cup \{ A \text{ nın limit noktaları} \}$ kümesine A nın *kapanışı* denir. A tüm limit noktalarını içeriyorsa A *kapalıdır* denir.

Tanım 2.3.4

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun.

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı *açık yuvar*,

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı *kapalı yuvar*,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı *yuvarın sınır kümesi* denir.

Tanım 2.3.5

Bir (X, d) metrik uzayında $A \subseteq B(x_0, M)$ olacak şekilde $M > 0$ ve $x_0 \in A$ var ise A kümesine *sınırlıdır* denir.

Tanım 2.3.6

Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ ve $x \in X$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde ve her $n > N$ olmak üzere bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına *yakınsaktır* denir. Bir diğer ifade ile $x \in X$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limit noktası denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3.7

Bir (X, d) metrik uzayında her $\varepsilon > 0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde tüm $m, n > N$ doğal sayıları için bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 2.3.1

Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise Cauchy dizisidir.

Tanım 2.3.8

Bir (X, d) metrik uzayında her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayı *tamdır*.

Teorem 2.3.2

(X, d) metrik uzayı kompakttır $\Leftrightarrow (X, d)$ tam ve sınırlıdır.

Teorem 2.3.3

(X, d) bir tam metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesi kompakttır $\Leftrightarrow A$ kümesi kapalı ve sınırlıdır.

2.3.2 Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri

İterasyon bir süreç, bir başlangıç durumuna sürekli uygulanan kurallar bütünü demektir. Fraktallar bir matematiksel fonksiyonun başlangıç verisine uygulanması ve oluşan yeni verinin iterasyon metodu ile yeni bir başlangıç verisi olarak alınması ile yani rekürsif olarak elde edilir ve bu tekrarlı dönüşümler altında değişmez kalan yapılar olarak ifade edilirler. Bu konu Edgar'ın (Edgar 1990) çalışmasında yer almaktadır.

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ matematiksel fonksiyonu için $x_{n+1} = f(x_n)$ tekrarlama formülü ile karakterize edilen iterasyon modelinde başlangıç değeri $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonunun iterasyon süreci

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$$

$$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$$

şeklinde ifade edilir. $x_{n+1} = f(x_n)$ iterasyon kuralı ile elde edilen değerlerin dizisi $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere bu dizi x_0 başlangıç değerinin *yörüngesi* adını alır. Kompleks dinamik sistemler sahasında çalışılan bu konu aslında $n \rightarrow \infty$ için $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dizisinin akıbetinin ne olacağı konusudur. Bu yörünge farklı iterasyon modelleri için ve başlangıç değerine bağlı olmak üzere farklı davranışlar sergileyebilir; sonsuza ıraksar, bir değere yakınsar ya da periyodik olarak belli değerleri alabilir.

Bu doğrultuda şu tanımlama yapılabilir; belli özellikte matematiksel fonksiyonların sonlu sayıda koleksiyonundan oluşan sistemlere Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri (TFS) adı verilir ve fraktallar TFS ler ile oluşturulurlar. Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri'ne ilişkin tanımlamalar ilk olarak 1981 yılında Hutchinson ve sonra Barnsley ve Demko'nun (1985) çalışmalarında yer almıştır. Tekrarlı fonksiyon sistemlerini oluşturan dönüşümler en genel anlamda afin dönüşümlerdir.

2.3.3 Dönüşümler

Tanım 2.3.9

$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ için $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$F(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

ve matris formunda

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümlere *afin dönüşümler* denir. Afin dönüşümler önemli geometrik ve cebirsel özelliklere sahiptirler.

Son dönemlerde çalışılan ve McMullen'in (1984) Falconer (1988) ve Bedford (1989), çalışmalarında da yer alan afın büzülme dönüşümlerinden oluşan tekrarlı fonksiyon sistemleri ile oluşan kümeler self-afın kümeler olarak adlandırılmaktadır. Benzerlik dönüşümleri ile oluşturulan kendine benzer kümeler (self-similar) ise self-afin kümelerin özel bir sınıfını teşkil etmektedir. Öklid düzleminde fraktallar bu özel sınıfta yer alan dönüşümler ile oluşturulurlar. Çalışmanın ilerleyen kısımlarında görülecektir ki; Öklid düzleminde bir fraktal benzerlik dönüşümlerinin koleksiyonu olan bir TFS ile oluşurken, Galile düzleminde bir fraktal afın dönüşümler ile oluşabilmektedir.

Tanım 2.3.10

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ için $s, e, f \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ve $x, y \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere s benzerlik katsayılı bir *benzerlik dönüşümü*

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = s \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

Afın dönüşümlerin özel bir formu olan benzerlik dönüşümleri dönme, büzülme, genişleme ve öteleme dönüşümlerinin birleşiminden oluşan katı hareketlerdir. Benzerlik dönüşümlerinin en önemli özelliği açıları korumalarıdır.

Tanım 2.3.11

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^2$ için

$$|F(x) - F(y)| < s|x - y|$$

olacak şekilde bir $0 < s < 1$ var ise s ye *büzülme sabiti*, f fonksiyonuna *büzülme dönüşümü* denir.

$\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ sonlu sayıda büzülme dönüşümünden oluşan bir tekrarlı fonksiyon sistemi olmak üzere

$$S = \bigcup_{i=1}^k F_i(S)$$

şeklindeki $S \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt kümesine F_i dönüşümleri altında sabit kalan küme veya oluşturuvcu denir Hutchinson 1981, (Falconer 1988).

2.3.4 Kendine benzerlik

Fraktalların karakteristik bir özelliği olan kendine benzerlik (self-similarity), bir nesnenin kendisini oluşturan her parçasının kendisine bir benzerlik oranınca benzerliğini ifade etmektedir. $\mathbb{R}^2$ de s ($0 < s < 1$) benzerlik oranlı k adet dönüşüm ile oluşan kapalı ve sınırlı bir küme S olmak üzere,

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k$$

şeklinde ifade edilebilir. $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ kümeleri S kümesine s benzerlik oranınca benzer alt kümelerdir. Bir diğer ifade ile $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ kümeleri S kümesinin s benzerlik oranınca küçültülmüş kopyalarıdır.

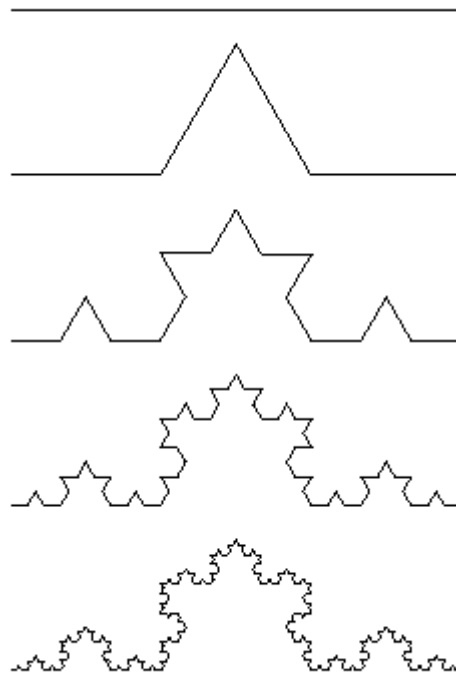
2.3.5 Fraktal boyut

Boyut kavramı genel olarak uzunluk, alan veya hacim gibi Öklid tarzı ölçümlerle ilişkilendirilerek ifade edilmiştir. Bu yaklaşım topolojik boyut kavramına dayanmaktadır. Noktanın topolojik boyutu 0, doğrunun 1 ve düzlemsel bir şeklin ise 2 dir.

Fraktalların bir diğer karakteristik özelliği olan fraktal boyut ise uzaklık kavramından hareketle tanımlanan, metrik bir kavramdır. Fraktal boyutun en önemli özelliği ise kesirli değer alabilmeleridir. Kesirli boyut başka türlü açıkça tanımlanamayan nitelikleri ölçmenin yoludur; pütürlülük, kırıklık ya da düzensizlik derecesi gibi (Gleick 2005). Mandelbrot'un "İngiltere kıyılarının uzunluğu nedir?" ve "Bir iplik yumağının boyutu nedir?" sorularının cevabı ölçek konusu ile ilgilidir. Doğadaki düzensiz şekillerin

ölçülebilmesi konusu, pütürlülük derecesi ile fraktal boyut kavramını bir araya getirmiştir.

En temel ifade ile ‘ölçme, ölçü’ ile ilgili olan boyut; düzensiz, karmaşık şekillerin nasıl ölçüleceğinden hareketle 1919 yılında Felix Hausdorff tarafından kendine benzer kümeler için tanımlanmıştır. Fraktal boyutu Hausdorff’un bu tanımını temel alarak tanımlayan Benoit Mandelbrot fraktalları; “Hausdorff boyutu topolojik boyutundan büyük olan kümeler” olarak ifade etmiştir (Mandelbrot 1982). Örneğin bir doğrunun Hausdorff boyutu 1, Koch eğrisinininki 1,2619 dur. Topolojik olarak Koch eğrisi ile doğru eş yapıda olduğundan topolojik boyutları eşit ve 1 dir. Mandelbrot’un fraktal boyut tanımını örneklendiren ve bilinen fraktallardan biri olan Koch eğrisinin Hausdorff boyutu topolojik boyutundan büyüktür (Şekil 2.25).



Şekil 2.25 Koch eğrisi

Fraktal boyut, kendine benzerlik özelliğinden hareketle hesaplanır. Yani fraktal boyut ile kendine benzerlik birbiriyle doğrudan ilişkili kavramlardır.

Tanım 2.3.12

Kendine benzer şekiller için hesaplanan ve Öklid geometrisinin objeleri kullanılarak kolayca tanımlanabilen benzerlik boyutu D ile gösterilmek üzere kendisinin s oranında küçültülmüş N kopyasından oluşan herhangi bir kendine benzer şekil için

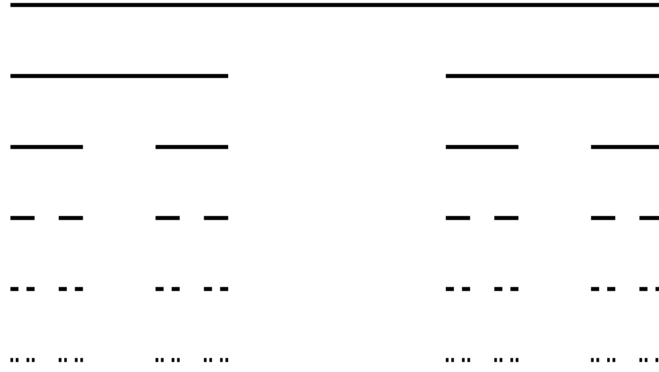
$$s N^D = 1$$

yazılabilir. Buradan benzerlik boyutu

$$D = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{s})}$$

formülü ile bulunur (Peitgen vd. 2004).

Örneğin Cantor cümlesi $[0,1]$ aralığının $s = \frac{1}{3}$ benzerlik oranı ile her adımda $N = 2$ parçaya ayrılması ile oluşur. Bu durumda Cantor cümlesinin benzerlik boyutu $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,631$ olarak hesaplanır.



Şekil 2.26 Cantor cümlesi

Her adımda $s = \frac{1}{2}$ küçültme oranına sahip $N = 3$ parçadan oluşan ve bilinen

fraktallardan biri olan Sierpinski üçgeninin benzerlik boyutu $D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$ dir.

Tanım 2.3.13 (Kutu Sayma Boyutu)

Kutu sayma boyutu daha çok yaklaşık kendine benzer olarak tanımlanan fraktalların boyutlarının hesaplanmasında kullanılmaktadır, (Peitgen vd. 2004). Tüm bilim dallarındaki ölçümlerde en çok kullanılan boyuttur. Rastgele fraktalların boyutu, kutu sayma boyutu ve yapı ile örtme tekniği ile hesaplanabilmektedir.

Bir fraktal cismin kutu sayma boyutu bir kenarının uzunluğu/yarıçapı δ olan N tane kutu/disk ile kaplanması suretiyle hesaplanır. Kutu sayma boyutu D_B ile gösterilmek üzere

$$D_B = \frac{\log N(\delta)}{\log(\frac{1}{\delta})}$$

formülü ile hesaplanır. Ancak kaplanacak cisim, kenar uzunluğu/yarıçapı gittikçe sıfıra yaklaşan ($\delta \rightarrow 0$) kutular/diskler ile kaplandığı takdirde gerçek boyuta yaklaşılr. O halde formül şu şekilde yazılabilir:

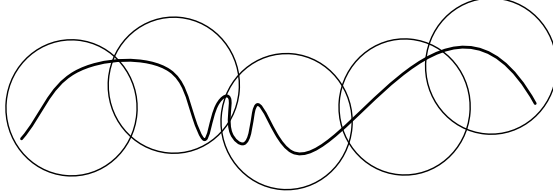
$$D_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Boyutunu hesaplamak üzere alınan keyfi bir küme ve bu kümenin yarıçapı sabit olan disklerle kaplanması işlemi şekil 2.27’de görülmektedir.

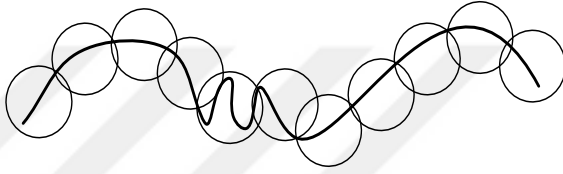
1. Adım



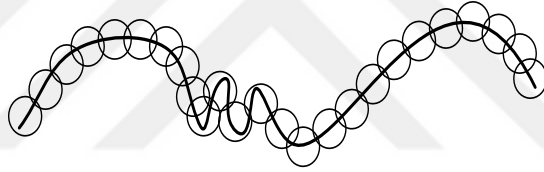
2. Adım



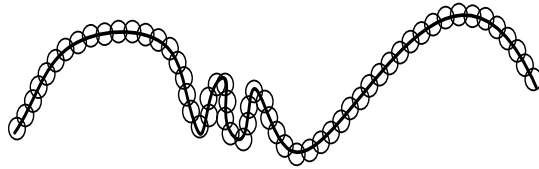
3. Adım



4. Adım



5. Adım



Şekil 2.27 Kutu sayma boyutunun hesaplanması

Her adımda disklerin yarıçapı azalırken ($\delta \rightarrow 0$), kümeyi örtmek için gereken (minimum sayıdaki) disk sayısı $N(\delta)$ artacaktır. Dolayısıyla kutu sayma boyutu olarak verilen formülün hesaplanması görsel olarak da ifade edilmiş olur.

Kutu sayma boyutu hesaplanacak bir kümeyi örtmek için δ - yarıçaplı diskler yerine, kümenin yapısına uygun farklı şekiller de kullanılabilir. Örneğin Koch eğrisinin kutu

sayma boyutu hesaplanırken, her adımda oluşacak şeklin çemberler ve δ kenar uzunluğuna sahip kutularla kaplanması yönteminin sonucu eşit olacaktır. Koch eğrisinin

kutu sayma boyutu yaklaşık olarak $D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,261$ dir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde çalışmanın temel konusu olan Sierpinski üçgeni fraktalı, onu oluşturan dönüşümlerin tekrarlı fonksiyon sistemleri ve bu dönüşümlere dönme dönüşümü ilave edilerek elde edilen Sierpinski-tipi fraktallar Öklid düzleminde oluşturulmuş ve özellikleri bakımından incelenmiştir. Deterministik algoritmalarca oluşturulan Sierpinski tipi fraktallar için C# programlama dili ile geliştirilen bir bilgisayar programı kullanılmıştır. Bu bölümde yer alan fraktal görseller bu program aracılığıyla oluşturulmuştur.

3.1 Sierpinski Üçgeni

Sierpinski üçgeni Waclaw Sierpinski tarafından 1915 yılında, her noktada kendisiyle kesişen bir eğri olarak tanımlanmıştır. Toplam uzunluğu sonsuz ve toplam alanı 0 olan Sierpinski üçgeni kapalı, sınırlı ve irtibatlı bir kümedir. Son yıllarda üzerinde çalışılan fraktal eğrilerin en eski örneklerinden biri olup topolojik boyutu 1 dir.

Sierpinski üçgenini oluşturmak için kenar uzunlukları 1 olan, $(0,0), (0.5,0.86), (1,0)$ köşe noktalarına sahip bir eşkenar üçgen, S_0 , tanımlansın. S_0 üçgeninin kenar orta noktaları birleştirildiğinde, $\frac{1}{2}$ oranında küçültülmüş dört eş üçgen elde edilir. Ortadaki üçgen çıkarıldığında geri kalan küme S_1 olmak üzere $S_0 \supset S_1$ dir. S_1 deki her üçgen için bu adımlar uygulandığında oluşan küme S_2 olup $S_0 \supset S_2$ dir. $k \in \mathbb{N}$ iterasyon sayısını göstermek üzere her iterasyonda $\frac{1}{2^k}$ kenar uzunluklu 3^k adet üçgenden meydana gelen S_k kümeleri oluşacaktır. Bu işleme devam edildiğinde $\{S_k\}$ azalan cümle dizisi için,

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$$

olup dizinin limit değeri S olmak üzere bu limit *Sierpinski üçgeni*dir ve

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$$

ile gösterilir.

En genel anlatımla bu şekilde ifade edilen Sierpinski üçgeni tekrarlı fonksiyon sistemleri ile de oluşturulur.

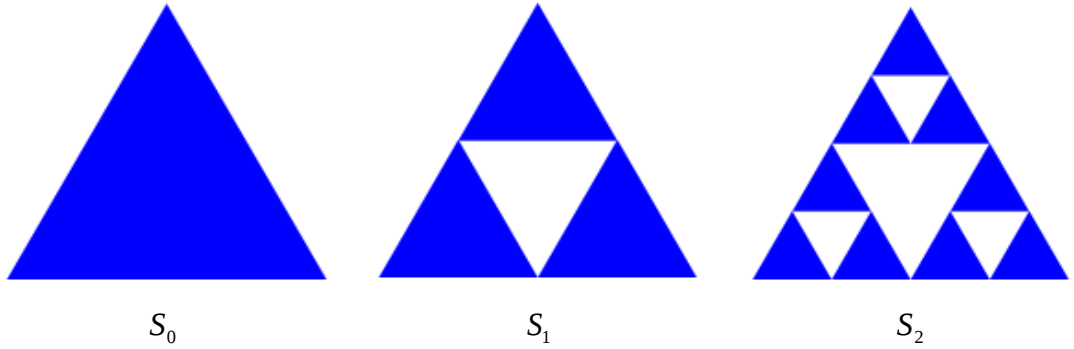
$F_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ve $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere eşkenar Sierpinski üçgenini oluşturan $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ tekrarlı fonksiyon sistemi,

$$F_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$F_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.43 \end{bmatrix},$$

benzerlik dönüşümlerinden oluşmaktadır. $(0,0), (0.5,0.86), (1,0)$ köşe noktalarına sahip S_0 üçgenine F TFS'i uygulandığında oluşan kümeler şekil 3.1'de verilmiştir.

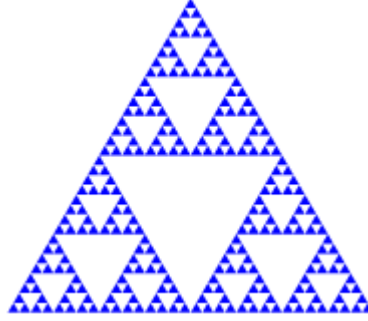


Şekil 3.1 Sierpinski üçgeninin oluşturulması

F TFS'i altında değişmez kalan S Sierpinski üçgeni (Şekil 3.2),

$$S = \bigcup_{i=1}^3 F_i(S) = F_1(S) \cup F_2(S) \cup F_3(S)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.2 Sierpinski üçgeni

Eşkenar Sierpinski üçgeni için TFS tablosu (Çizelge 3.1):

Çizelge 3.1 Sierpinski üçgeni TFS

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.5	0	0.5	0	0	0	0
2	0.5	0	0.5	0	0.5	0	0
3	0.5	0	0.5	0	0.25	0.43	0

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ölçek faktörlü F TFS'i altında değişmez kalan Sierpinski üçgeni kendine benzer 3 parçadan oluşur ve herhangi bir kısmı kendisi ile benzer şekle sahiptir; bu onun kendine benzerlik özelliği ile ilgilidir. Buradan Sierpinski üçgeninin *benzerlik boyutu* D_{Δ} ,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

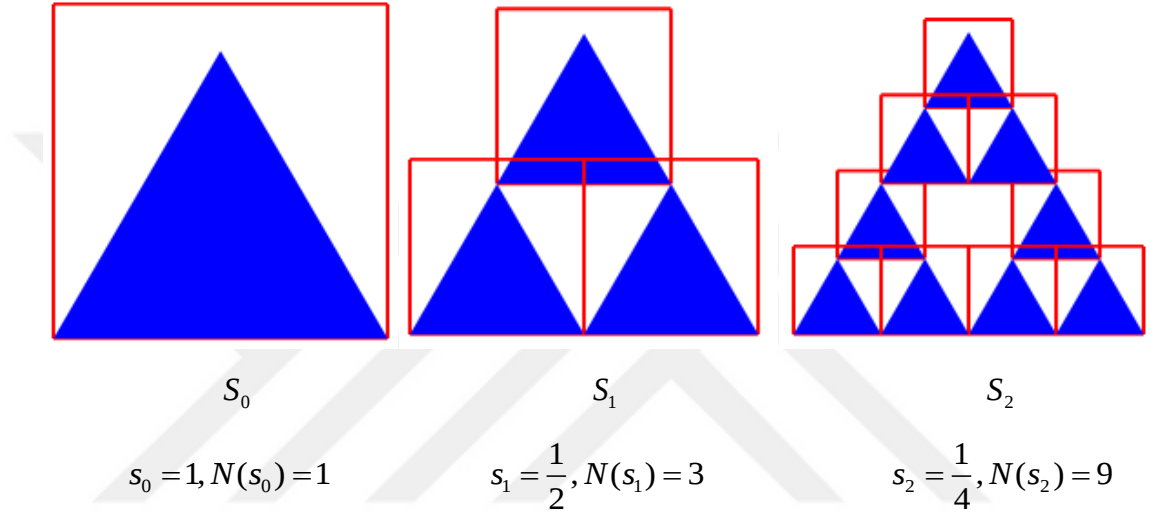
eşitliğinden $D_{\Delta} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$ olarak bulunur.

Sierpinski üçgeninin her S_k kümesi için s ölçek faktörü $s_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ve N kutu sayısı

$N(s_k) = 3^k$ olmak üzere *kutu sayma boyutu*,

$$D_{\Delta} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

olarak hesaplanır ve hesaplanışı şekil 3.3'te gösterilmiştir.



Şekil 3.3 Kutu sayma boyutu

Kenar uzunlukları 1 olan S_0 eşkenar üçgeni ele alındığında; S_0 üçgeninin çevresi

$C_{S_0} = 3$ olup 1. iterasyon sonrasında oluşan S_1 in çevresi $C_{S_1} = \frac{9}{2}$, 2. iterasyon

sonrasında oluşan S_2 nin çevresi $C_{S_2} = \frac{27}{4}$ ve n . iterasyon sonrasında oluşan S_n nin

çevresi $n \geq 0$ olmak üzere,

$$C_{S_n} = 3^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

formülü ile hesaplanır. Buradan C_{S_n} artan dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{S_n} = \infty$ olup S Sierpinski üçgeninin sonsuz uzunluğa sahip olduğu açıkça görülmektedir.

Benzer şekilde kenar uzunlukları 1 olan S_0 eşkenar üçgeninin alanı $A_{S_0} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ olup,

1. iterasyon sonrasında $A_{S_1} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, 2. iterasyon sonrasında S_2 nin alanı $A_{S_2} = \frac{9\sqrt{3}}{64}$

ve n . iterasyon sonrasında $n \geq 0$ olmak üzere S_n nin alanı,

$$A_{S_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} 3^n \sqrt{3}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan A_{S_n} azalan dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{S_n} = 0$ olup S Sierpinski üçgeninin alanının 0 olduğu görülmektedir.

3.1.1 θ Dönme açılı Sierpinski-tipi fraktallar

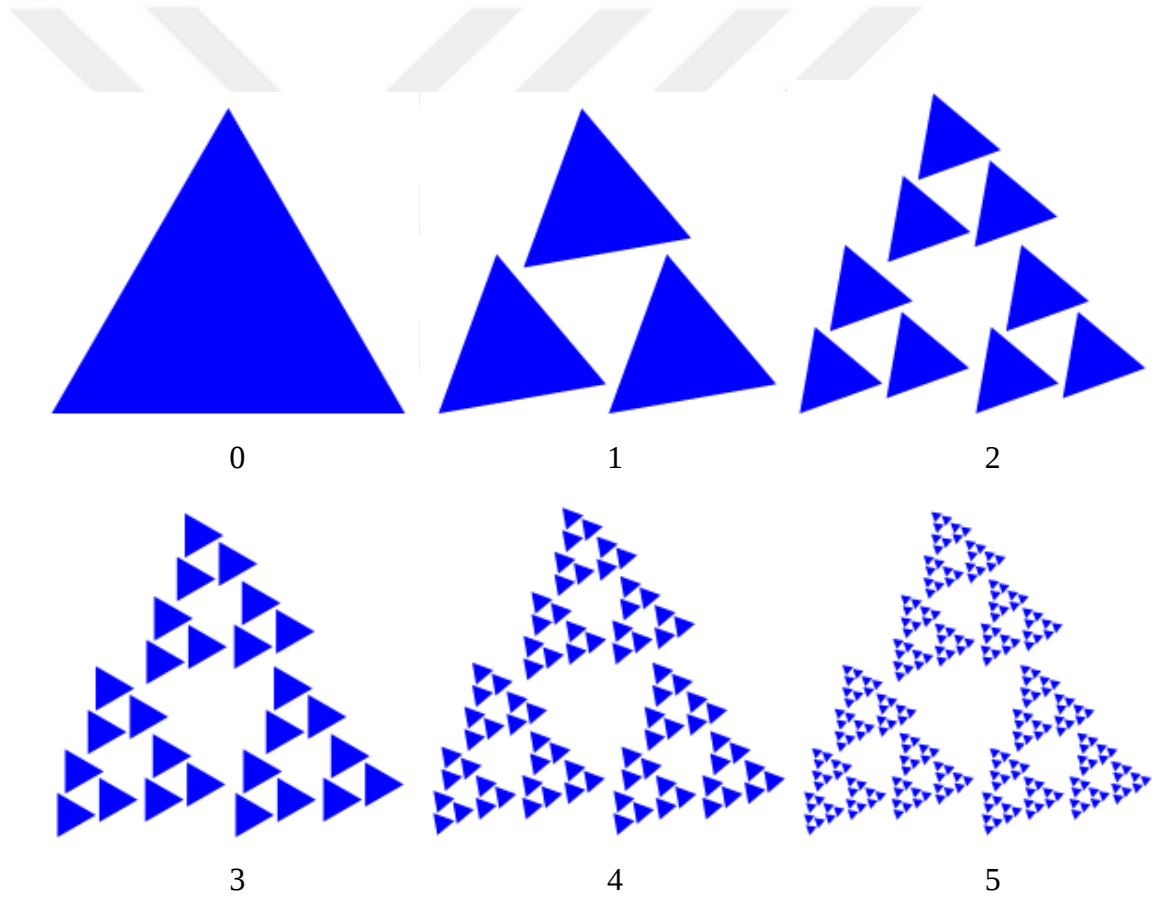
Tanım 2.3.10 ile verilen dönüşümde farklı θ değerleri için Sierpinski tipi fraktallar oluşturulmaktadır. Sierpinski üçgeni ise $\theta = 0$ alınarak oluşturulur. θ – dönme açılı Sierpinski tipi fraktallar ilk olarak Barnsley tarafından rastgele iterasyon algoritması ile oluşturulmuş ve adına “Chaos game” denmiştir. Bu bölümde deterministik iterasyon algoritması ile farklı θ değerleri için oluşturulan Sierpinski tipi fraktalların örnekleri yer almaktadır. Sierpinski tipi fraktalları oluştururken sol köşe noktasını orijin olarak alan bir dönme hareketinden söz edilmektedir. θ_L , θ_R ve θ_T açıları sırasıyla F_1 , F_2 ve F_3 dönüşümlerine ait açılar olmak üzere; örneğin θ_R açısındaki değişiklik, her bir iterasyon adımında F_2 ile oluşacak şekillere tesir etmektedir. Farklı θ değerleri için oluşan fraktallardan sadece Örnek 3.1’deki adım adım anlatılmıştır.

Örnek 3.1

$(0,0), (0.5,0.86), (1,0)$ köşe noktalarına sahip bir eşkenar üçgen olmak üzere, çizelge 3.2'deki TFS değerleri ile şekil 3.4'teki Sierpinski-tipi fraktal oluşur.

Çizelge 3.2 $\theta_L = \theta_R = \theta_T = 10$ TFS

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.49	-0,085	0.49	0,085	0	0	10
2	0.49	-0,085	0.49	0,085	0.5	0	10
3	0.49	-0,085	0.49	0,085	0.25	0.43	10



Şekil 3.4 - $\theta_L = \theta_R = \theta_T = 10$ TFS fraktalının oluşumu

$\theta_L = \theta_R = \theta_T = 10$ dönme açılı fraktalın oluşumunda her bir üçgen her iterasyonda saat yönünün tersinde 10 derece dönmektedir.

Örnek 3.2

$(0,0), (0.5,0.86), (1,0)$ köşe noktalarına sahip eşkenar üçgenin farklı θ_L, θ_R ve θ_T değerlerinin kombinasyonları ile oluşan fraktalların (Şekil 3.5) TFS değerleri çizelge 3.3'te verilmiştir.

Çizelge 3.3 a,b,c,d Farklı θ_L, θ_R ve θ_T değerleri için fraktallar

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.4	-0.3	0.3	0.4	0	0	36.5
2	0.42	0.28	-0.27	0.41	0.5	0.23	-33.5
3	0.5	-0.01	0.01	0.5	0.2	0.53	1

a. $\theta_L = 36.5, \theta_R = -33.5, \theta_T = 1$

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0	-0.5	0.5	0	0	0	90
2	0.46	-0.9	0.9	0.46	0.5	0	10
3	0.5	0	0	0.5	0.25	0.43	0

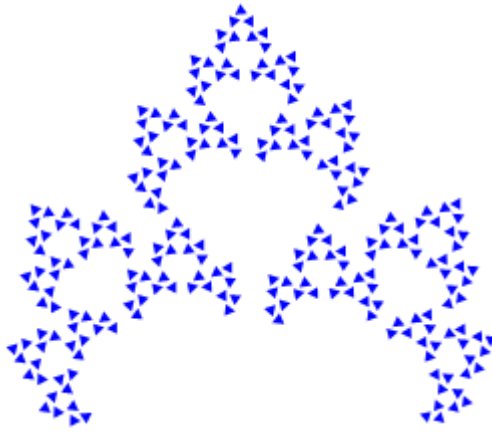
b. $\theta_L = 90, \theta_R = 10, \theta_T = 0$

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.43	-0.25	0.25	0.43	0	0	30
2	0.5	-0.05	0.05	0.5	0.4	0.0	5
3	0.5	0	0.5	0	0.05	0.53	0

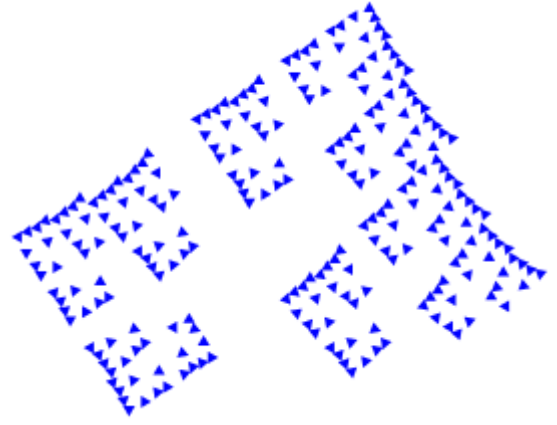
c. $\theta_L = 30, \theta_R = 5, \theta_T = 0$

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	-0.35	-0.35	0.35	-0.35	0	0	135
2	0.47	0.17	-0.17	0.47	0.4	0	-20
3	0.42	-0.26	0.26	0.42	0.15	0.33	31.5

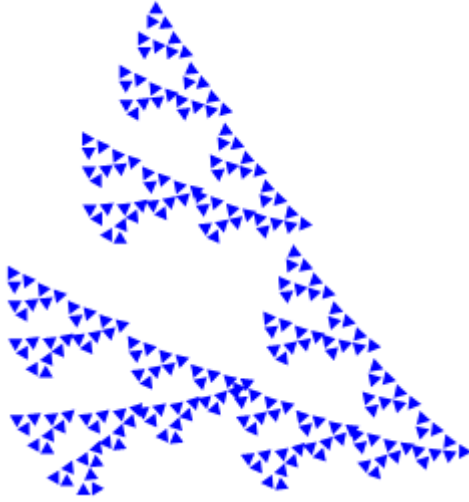
d. $\theta_L = 135, \theta_R = -20, \theta_T = 31.5$



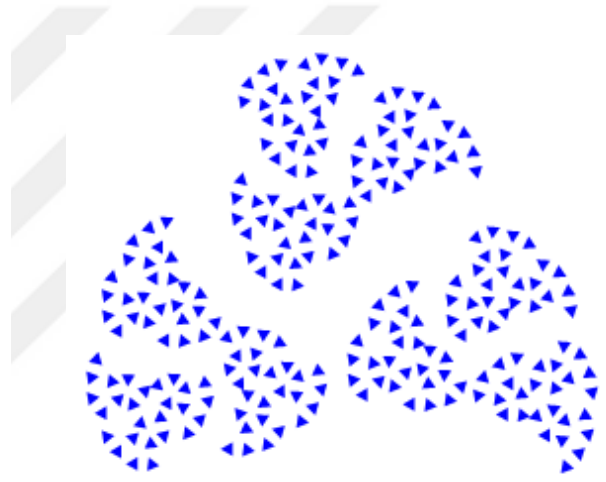
a. $\theta_L = 36.5, \theta_R = -33.5, \theta_T = 1$



b. $\theta_L = 90, \theta_R = 10, \theta_T = 0$



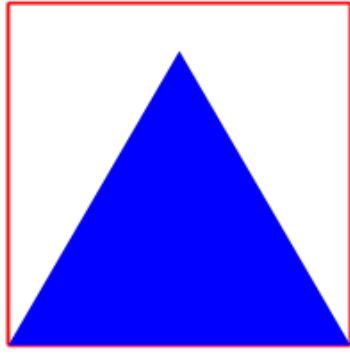
c. $\theta_L = 30, \theta_R = 5, \theta_T = 0$



d. $\theta_L = 135, \theta_R = -20, \theta_T = 31.5$

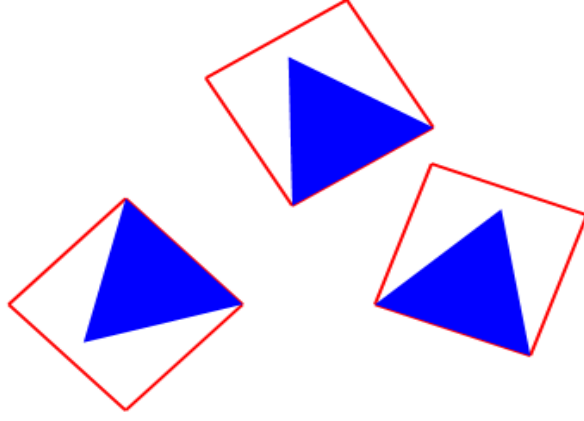
Şekil 3.5 $\theta_L - \theta_R - \theta_T$ dönme açılı Sierpinski-tipi fraktallar

Şekil 3.5'te verilen $\theta_L - \theta_R - \theta_T$ dönme açılı Sierpinski-tipi fraktalların kutu sayma boyutları ile şekil 3.3'teki $\theta = 0$ Sierpinski üçgeninin kutu sayma boyutu eşittir. Bunun sebebi fraktalların, uzunluk, açı ve alan gibi geometrik özellikleri koruyan benzerlik dönüşümleri ile oluşturulmalarıdır. Şekil 3.5.d ile verilen fraktalın kutu sayma boyutunun hesaplanması şekil 3.6'da gösterilmiştir.



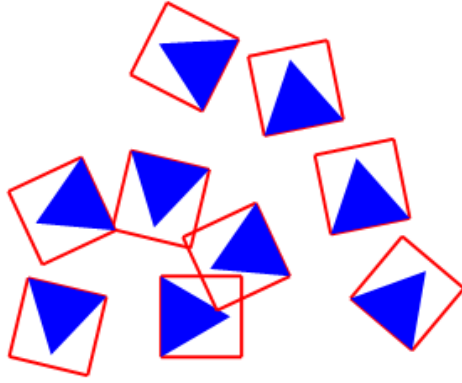
M_0

$$r_0 = 1, N(r_0) = 1$$



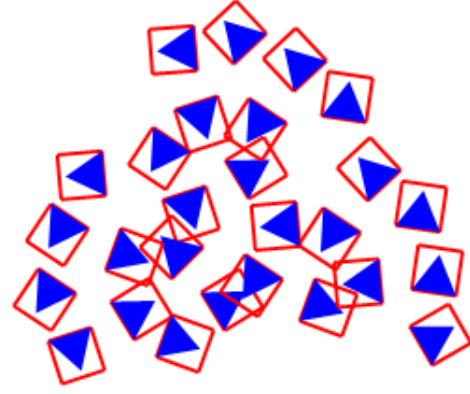
M_1

$$r_1 = \frac{1}{2}, N(r_1) = 3$$



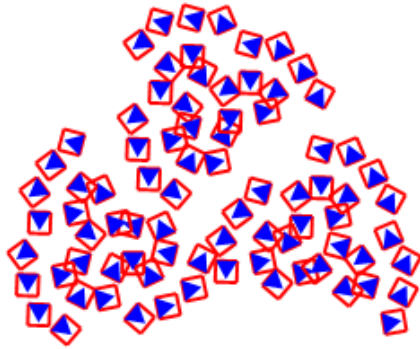
M_2

$$r_2 = \frac{1}{4}, N(r_2) = 9$$



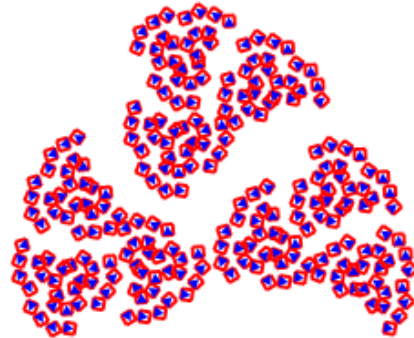
M_3

$$r_3 = \frac{1}{8}, N(r_3) = 27$$



M_4

$$r_4 = \frac{1}{16}, N(r_4) = 81$$



M_5

$$r_5 = \frac{1}{32}, N(r_5) = 243$$

Şekil 3.6 $\theta_L = 135, \theta_R = -20, \theta_T = 31.5$ fraktalının kutu sayma boyutu

Kutu sayma boyutu hesaplanırken, boyutu hesaplanacak fraktal 1 birim kenar uzunluklu kare ile başlamak üzere her iterasyon adımımda c küçölme katsayısı oranınca kareler ile kaplanır. n iterasyon adımımdı olmak üzere $N(r_n)$ n . iterasyonda fraktalı kaplamak için kullanılan karelerin sayısı ve $r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ n . iterasyondaki ölçek miktarı olmak üzere fraktalın kutu sayma boyutu D ,

$$D = \frac{\log N(r_n)}{\log \left(\frac{1}{r_n}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

olarak hesaplanır. Şekil 3.5.a.b.c'deki fraktalların kutu sayma boyutları da benzer şekilde hesaplanmaktadır.

3.2 Sierpinski Karesi (Sierpinski Carpet)

Sierpinski halısı olarak da adlandırılan Sierpinski karesi, Sierpinski üçgeninin rekürsif yapısına benzer yapıya sahip, $\mathbb{R}^2$ nin sınırlı ve irtibatlı bir alt kümesidir. İsmiini Waclaw Sierpinski'den almış olsa da Sierpinski karesini ilk tanımlayan kişi Sierpinski'nin öğrencisidir. Sierpinski, (1915) yılında yayınlanan Sierpinski üçgenini tanımladığı makalesinin Polonya versiyonunda Sierpinski karesinin ilk olarak öğrencisi Stefan Mazurkiewicz (1888-1945) tarafından bulunduğunu ve tanımlandığını ifade etmiştir. Son yıllarda üzerinde çalışılan fraktal eğrilerin ve self-homeomorf uzayların en eski örneklerinden biri olan Sierpinski karesinin toplam uzunluğu sonsuz ve toplam alanı 0 dır.

Sierpinski karesini oluşturmak için kenar uzunlukları 1 ve köşe noktaları $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ olan bir kare, U_0 , tanımlansın. U_0 , kenar uzunluğu $\frac{1}{3}$ olan 9 adet kareye bölünür ve ortadaki köşeleri $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ olan kare

çıkarıldığında geri kalan küme U_1 olmak üzere $U_0 \supset U_1$ dir. U_1 deki her kare için bu adımlar uygulandığında oluşan küme U_2 olup $U_0 \supset U_2$ dir. $k \in \mathbb{N}$ iterasyon sayısını göstermek üzere her iterasyonda $\frac{1}{3^k}$ kenar uzunluklu 8^k adet kareden meydana gelen U_k kümeleri oluşacaktır. Bu işleme devam edildiğinde $\{U_k\}$ azalan dizisi için,

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_k$$

olup dizinin limit değeri U olmak üzere bu limit *Sierpinski karesidir* ve

$$U = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

ile gösterilir.

En genel anlatımla bu şekilde ifade edilen Sierpinski karesi sekiz adet benzerlik dönüşümünden oluşan tekrarlı fonksiyon sistemleri ile de oluşturulur.

$F_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere Sierpinski karesi, U_0 birim karesine ölçek faktörü $\frac{1}{3}$ ve $\theta = 0$ olan

$$F_i \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

benzerlik dönüşümlerinin uygulanması ile oluşur. Burada $\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$ matrislerinin değerleri:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

dir.

$F = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_8\}$ TFS'i altında değişmez kalan U Sierpinski karesi (Şekil 3.8),

$$U = \bigcup_{i=1}^8 F_i(U) = F_1(U) \cup F_2(U) \cup F_3(U) \cup \dots \cup F_8(U)$$

şeklinde ifade edilir.

Figure 1 shows three square domains, U_0 , U_1 , and U_2 , each with a blue boundary. U_0 is a solid blue square. U_1 is a blue square with a white square hole in the center. U_2 is a blue square with a white square hole in the center and eight smaller white square holes arranged in a 3x3 grid around the central hole.

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.33	0	0	0.33	0	0	0
2	0.33	0	0	0.33	0.33	0	0
3	0.33	0	0	0.33	0.66	0	0
4	0.33	0	0	0.33	0.66	0.33	0
5	0.33	0	0	0.33	0.66	0.66	0
6	0.33	0	0	0.33	0.33	0.66	0
7	0.33	0	0	0.33	0	0.66	0
8	0.33	0	0	0.33	0	0.33	0

Sierpinski karesinin her U_k kümesi için s ölçek faktörü $s_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ ve N parça sayısı

$N(s_k) = 8^k$ olmak üzere Moran denkleminde

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^D + \left(\frac{1}{3}\right)^D + \left(\frac{1}{3}\right)^D + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^D}_{8 \text{ adet}} = 1$$

olup Sierpinski karesinin *benzerlik boyutu* $D_\square$,

$$D_\square = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s_k)}{\log\left(\frac{1}{s_k}\right)} = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.892$$

dir.

Kenar uzunluğu 1 olan U_0 birim karesi ele alındığında; U_0 ın alanı $A_{U_0} = 1$ olup, 1.

iterasyon sonrasında oluşan U_1 ın alanı $A_{U_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 8$, 2. iterasyon sonrasında oluşan

U_2 nin alanı $A_{U_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 8^2$, 3. iterasyon sonrasında oluşan U_3 ün alanı $A_{U_3} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot 8^3$

ve k . iterasyon sonrasında oluşan U_k nın alanı $k \geq 0$ olmak üzere,

$$A_{U_k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \cdot 8^k$$

dir. Buradan A_{U_k} azalan dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{U_k} = 0$ olup U Sierpinski karesinin 0 alana sahip olduğu görülmektedir.

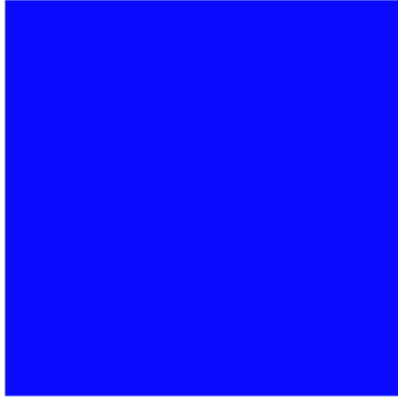
3.2.1 θ Dönme Açılı Sierpinski karesi-tipi fraktallar

Afin dönüşümlerin farklı θ değerleri için Sierpinski-tipi fraktallar oluşturulabilir. θ -dönme açılı bu tip fraktalları oluştururken sol köşe noktasını orijin olarak alan bir

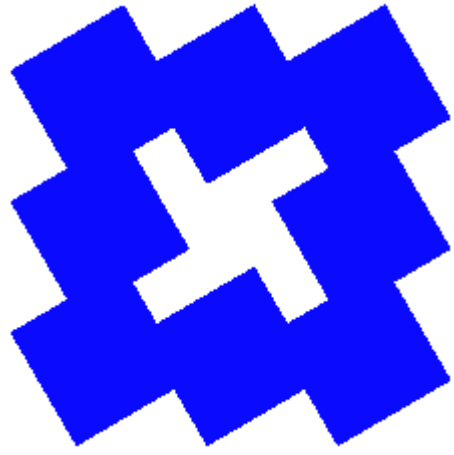
dönme hareketi mevcuttur. $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_8$ değerleri sırasıyla $F_1, F_2, F_3, \dots, F_8$ dönüşümlerine ait açıları göstermektedir. Sierpinski karesi $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_8 = 0$ için özel haldir.

Örnek 3.3

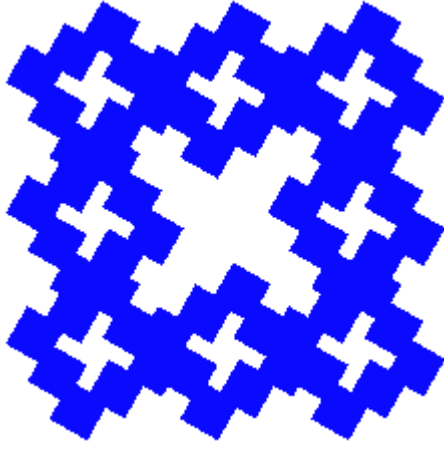
$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ köşe noktalarına sahip bir birim kare olmak üzere $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_8 = 30$ dönme açılı fraktalın oluşma adımları şekil 3.9'da ve uygulanan dönüşümlerin TFS değerleri çizelge 3.5'te verilmiştir. Bu fraktalın her bir F_i dönüşümü için ölçek faktörü $\frac{1}{3}$ ve dönme matrisi $\begin{bmatrix} 0.86 & -0.5 \\ 0.5 & 0.86 \end{bmatrix}$ olup, her bir kare her iterasyon adımımda saat yönünün tersinde 30 derece dönmektedir.



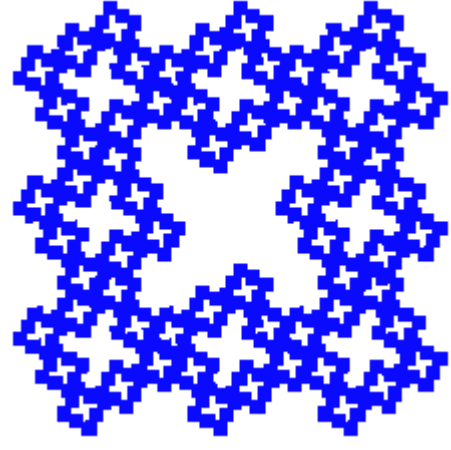
0



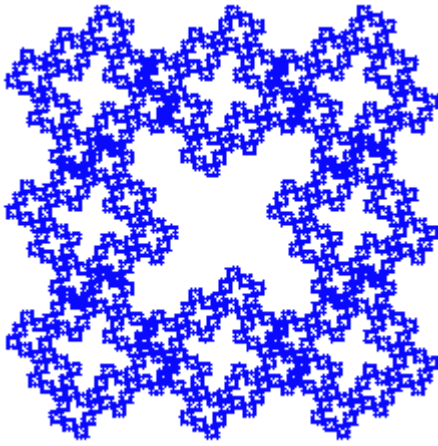
1



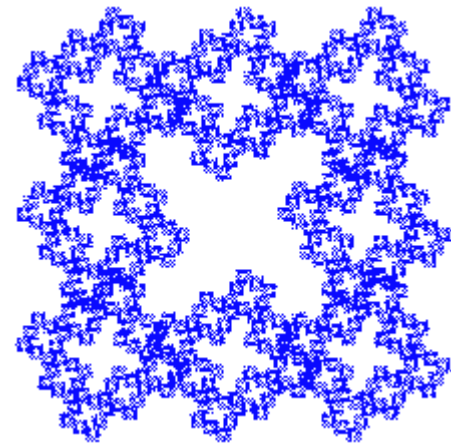
2



3



4



5

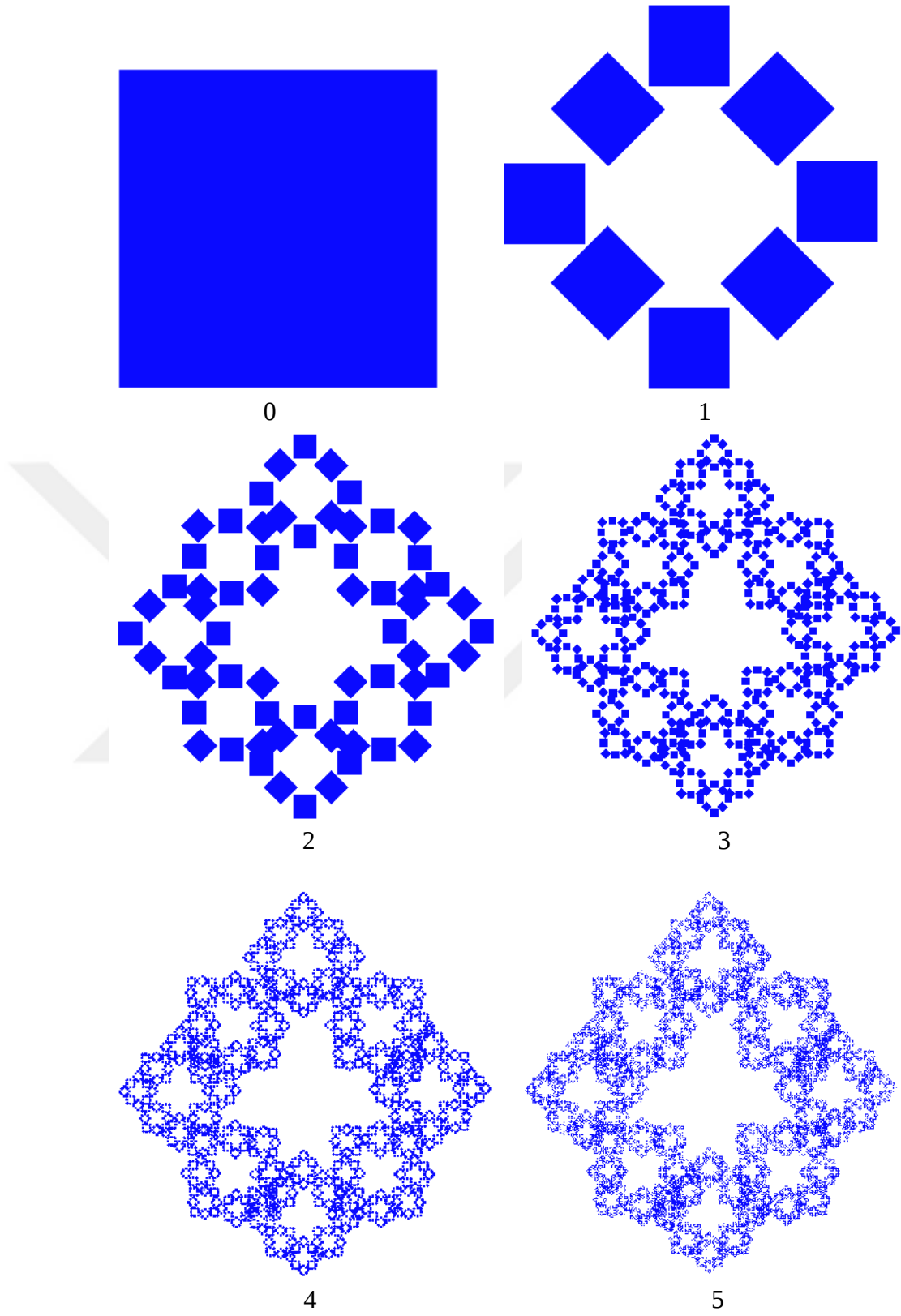
Şekil 3.9 $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_8 = 30$ TFS fraktalının oluşumu

Çizelge 3.5 $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_8 = 30$ TFS

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.29	-0.16	0.16	0.29	0	0	30
2	0.29	-0.16	0.16	0.29	0.33	0	30
3	0.29	-0.16	0.16	0.29	0.66	0	30
4	0.29	-0.16	0.16	0.29	0.66	0.33	30
5	0.29	-0.16	0.16	0.29	0.66	0.66	30
6	0.29	-0.16	0.16	0.29	0.33	0.66	30
7	0.29	-0.16	0.16	0.29	0	0.66	30
8	0.29	-0.16	0.16	0.29	0	0.33	30

Örnek 3.4

$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ köşe noktalarına sahip birim kareden farklı $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_8$ değerlerine sahip dönüşümler ile oluşan fraktal şekil 3.10 ve TFS değerleri çizelge 3.6'da verilmiştir.



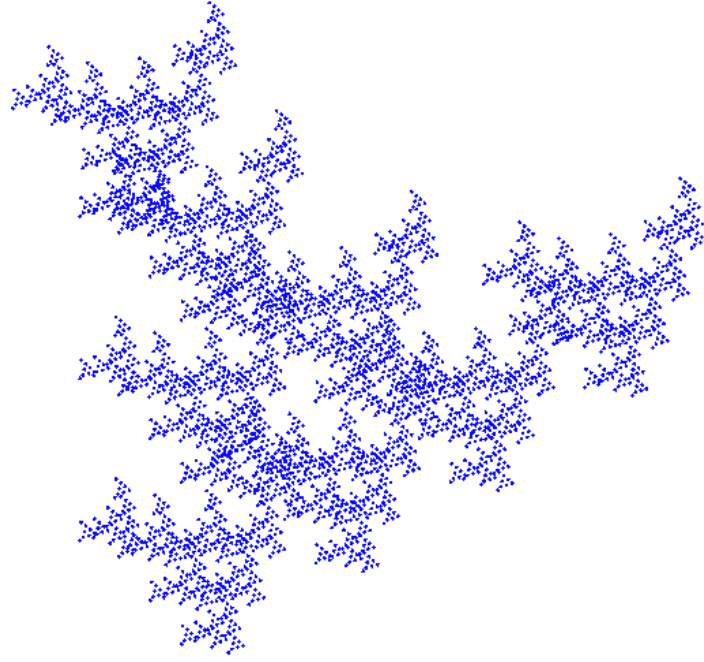
Şekil 3.10 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 45$, $\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$ TFS fraktalının oluşumu

Çizelge 3.6 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 45$, $\theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$ TFS

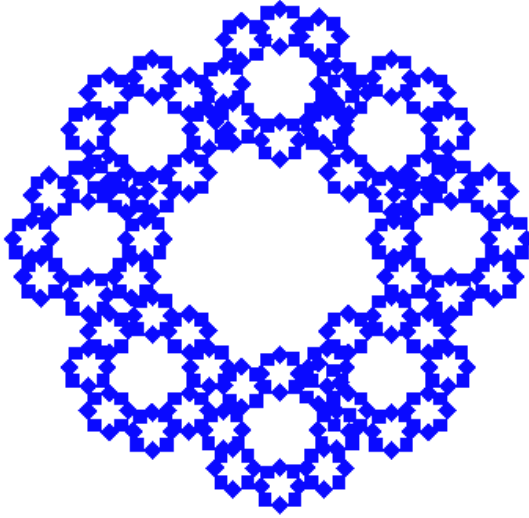
F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.24	-0.24	0.24	0.24	0	0	45
2	0.24	-0.24	0.24	0.24	0	0.72	45
3	0.24	-0.24	0.24	0.24	0.7	0	45
4	0.24	-0.24	0.24	0.24	0.7	0.72	45
5	0.33	0	0	0.33	0.17	-0.2	0
6	0.33	0	0	0.33	0.17	1.05	0
7	0.33	0	0	0.33	0.78	0.41	0
8	0.33	0	0	0.33	-0.43	0.4	0

Örnek 3.5

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ köşe noktalarına sahip birim kare olmak üzere farklı $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_8$ değerleri ve ötelemeler ile oluşturulan fraktallara örnekler şekil 3.11 ve TFS değerleri çizelge 3.7’de verilmiştir.



a. $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 36$



b. $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 45, \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$

Şekil 3.11 Farklı θ değerleri için Sierpinski karesi-tipi fraktallar

Çizelge 3.7 Farklı θ değerleri için TFS değerleri

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.27	-0.19	0.19	0.27	0.5	0.6	36
2	0.27	-0.19	0.19	0.27	0.5	1.2	36
3	0.27	-0.19	0.19	0.27	0.5	0	36
4	0.27	-0.19	0.19	0.27	1	0.3	36
5	0.27	-0.19	0.19	0.27	1	0.9	36
6	0.27	-0.19	0.19	0.27	1.5	0.6	36
7	0.27	-0.19	0.19	0.27	2	0.95	36
8	0.27	-0.19	0.19	0.27	0.25	1.6	36

a. $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 36$ TFS değerleri

F	a	b	c	d	e	f	θ
1	0.24	-0.24	0.24	0.24	0.53	-0.23	45
2	0.24	-0.24	0.24	0.24	1	0.3	45
3	0.24	-0.24	0.24	0.24	0	0.3	45
4	0.24	-0.24	0.24	0.24	0.53	0.73	45
5	1	0	0	1	0.66	0.66	0
6	1	0	0	1	0.66	0	0
7	1	0	0	1	0	0.66	0
8	1	0	0	1	0	0	0

b. $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 45, \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$

4. GALILE DÜZLEMİNDE FRAKTALLAR

Bu bölümde Öklid düzlemi ile karşılaştırmalı olarak Galile düzleminde fraktal tanımı, özellikleri ve Galile düzleminde kutu sayma boyutu hesabı ve kendine benzerliğin tanımı yer almaktadır. Fraktalların iki ayırt edici özelliği olan kendine benzerlik ve fraktal boyut kavramları da Öklid düzlemi ile karşılaştırmalı olarak Galile düzleminde tanımlanacaktır.

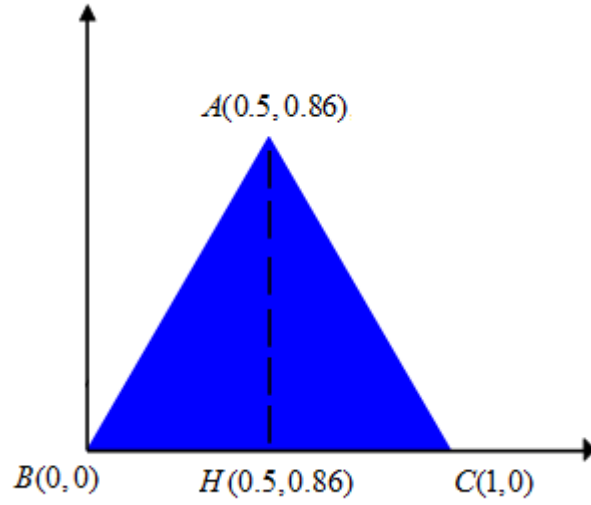
Galile düzleminde fraktallar Öklid düzlemindekine benzer olarak afin dönüşümlerin tekrarlanması ile oluşturulurlar. Galile düzleminde bir afin dönüşüm $F_i : \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$, $1 \leq i \leq n$ ve $a, b, c, d, e, f, x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F_i \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır ve $F = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ kümesi bir tekrarlı fonksiyon sistemidir (TFS). Dönme hareketi olmaksızın bir afin dönüşüm Galile düzleminde Öklid düzlemindekine benzer davranış gösterir. Bu tanım doğrultusunda Galile düzleminde Sierpinski üçgeni ve Sierpinski-tipi fraktallar sırasıyla tanımlanmıştır.

4.1 Galile Sierpinski Üçgeni

Galile düzleminde bir $\triangle ABC$, $A(0.5, 0.86)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$ köşe noktalarına sahip bir üçgen olmak üzere, farklı olarak Galile metrik tanımından $|AB| = |AC| = |BH| = |HC| = 0.5$ ve $|BC| = 1$ olup $\triangle ABC$, $\mathbb{G}^2$ de bir ikizkenar üçgendir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 $\mathbb{G}^2$ de ikizkenar $\triangle ABC$

Galile ve Öklid metriklerine göre öteleme ve büzülme dönüşümleri aynı olduğundan, Galile düzleminde Sierpinski üçgenini oluşturan dönüşümler Öklid düzlemindeki ile aynıdır. Her iki düzlemdeki Sierpinski üçgenleri arasındaki tek fark; Aynı köşe noktalarına sahip üçgenin Öklid düzleminde eşkenar, Galile düzleminde ikizkenar Sierpinski üçgeni oluşturmastır. Dolayısıyla Galile Sierpinski üçgeni,

$$F_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$F_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.43 \end{bmatrix},$$

dönüşümlerinden oluşan $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ tekrarlı fonksiyon sistemi ile oluşturulur (Şekil

4.2). 1. iterasyon sonrasında $\frac{1}{2}$ oranında küçültülmüş 3 adet ikizkenar üçgen; $\triangle AA_1B_1$

$\triangle AB_1C_1$ ve $\triangle B_1C_1C$ elde edilir; bu üçgenlerin kenar uzunlukları

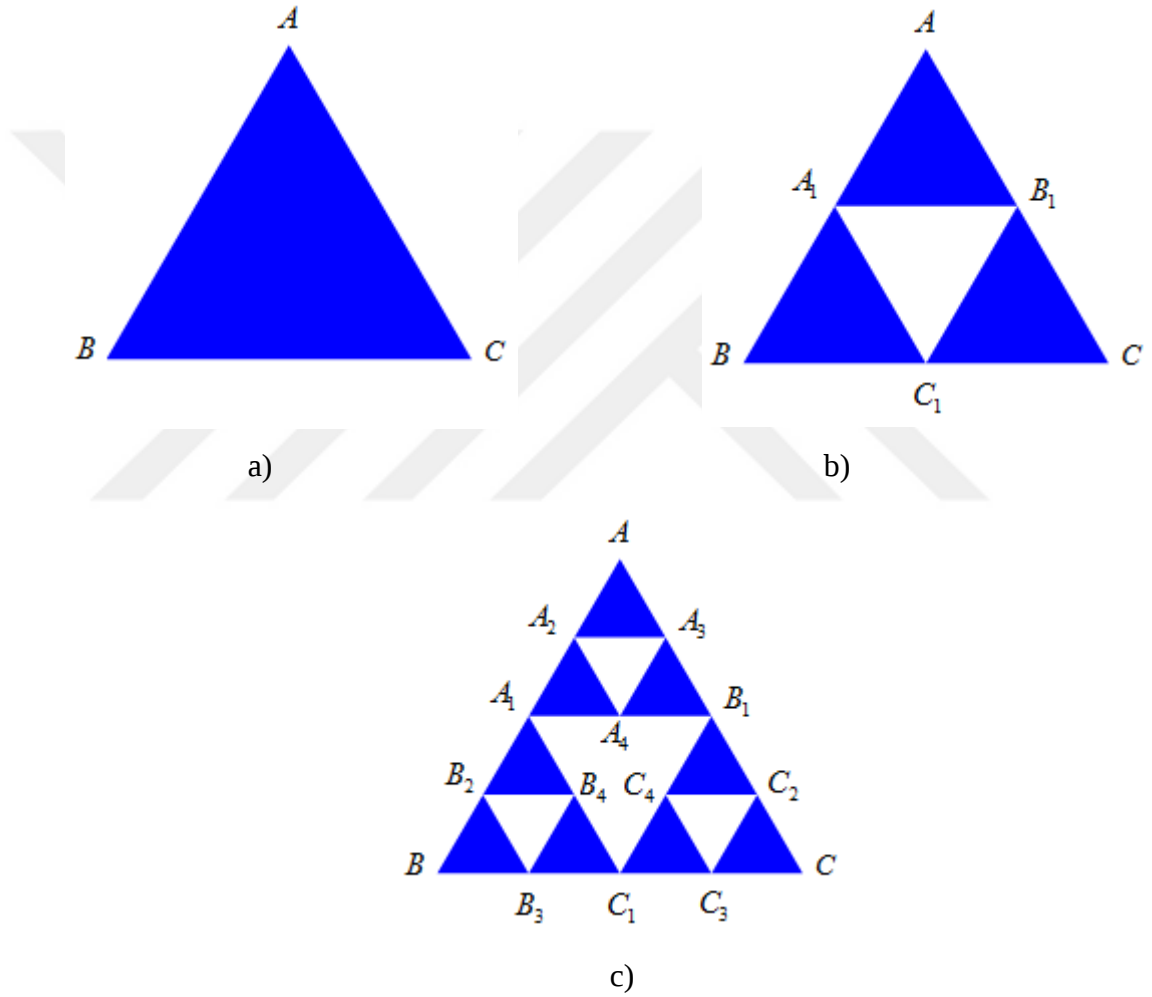
$|AA_1| = |A_1B_1| = |AB_1| = |B_1C_1| = |A_1C_1| = |B_1C_1| = 0.25$ ve $|A_1B_1| = |BC_1| = |C_1C| = 0.5$ dir.

2. iterasyon sonrasında 9 adet ikizkenar üçgen;

$\triangle AA_2A_3$, $\triangle A_2A_1A_4$, $\triangle A_3A_4B_1$, $\triangle A_1B_2B_4$, $\triangle B_2BB_3$, $\triangle B_4B_3C_1$, $\triangle B_1C_4C_2$, $\triangle C_4C_1C_3$ ve $\triangle C_2C_3C$ elde edilir. Bu üçgenlerin kenar uzunlukları

$$\begin{aligned} |AA_2| &= |A_2A_1| = |AA_3| = |A_3B_1| = |A_2A_4| = |A_3A_4| \\ &= |A_1B_2| = |B_2B| = |A_1B_4| = |B_4C_1| = |B_2B_3| = |B_4B_3| \\ &= |B_1C_4| = |C_4C_1| = |B_1C_2| = |C_2C| = |C_4C_3| = |C_2C_3| = 0.125 \text{ ve} \end{aligned}$$

$$|BB_3| = |B_3C_1| = |C_1C_3| = |C_3C| = |A_2A_3| = |A_1A_4| = |A_4B_1| = |B_2B_4| = |C_4C_2| = 0.25 \text{ dir.}$$



Şekil 4.2 Galile düzleminde Sierpinski üçgeninin oluşturulması

Oluşan her bir üçgen için bu işleme devam edilirse, $k \in \mathbb{N}$ iterasyon sayısı olmak üzere

her iterasyonda taban kenarı $\frac{1}{2^k}$ ve eşit iki kenarı $\frac{1}{2^{k+1}}$ uzunluklu 3^k adet üçgenden

meydana gelen S_k kümeleri oluşacaktır. Kolaylık açısından $\triangle ABC, S_0$ ile gösterilmek üzere $\{S_k\}$ azalan dizisi için,

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$$

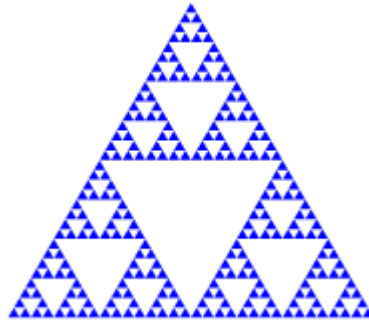
olup dizinin limit değeri S olmak üzere bu limit *Galile Sierpinski üçgeni*dir ve

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$$

ile gösterilir (Şekil 4.3). $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ TFS'i yardımıyla Galile düzleminde S Sierpinski üçgeni,

$$S = \bigcup_{i=1}^3 F_i(S) = F_1(S) \cup F_2(S) \cup F_3(S)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 4.3 Galile Sierpinski üçgeni

Öklid düzlemindeki eşkenar Sierpinski üçgeni ile Galile düzlemindeki ikizkenar Sierpinski üçgenini oluşturan TFS tablosu aynıdır ve çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1 İkizkenar Galile Sierpinski üçgeni TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.5	0	0.5	0	0	0	0
2	0.5	0	0.5	0	0.5	0	0
3	0.5	0	0.5	0	0.25	0.43	0

Galile düzleminde her bir üçgenin en uzun kenarını kenar kabul eden kutular yardımıyla boyut hesaplama yöntemi Öklid düzlemindeki ile birebir aynıdır.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ölçek faktörlü F TFS'i altında değişmez kalan Sierpinski üçgeninin benzerlik boyutu s ,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

eşitliğinden $s = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$ ve her S_k kümesi için ölçek faktörü $s_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ve N

kutu sayısı $N(s_k) = 3^k$ olmak üzere Galile Sierpinski üçgeninin D_G kutu sayma boyutu,

$$D_G = \lim_{s_k \rightarrow 0} \frac{\log N(s_k)}{\log\left(\frac{1}{s_k}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

olarak hesaplanır.

Kenar uzunlukları 1 ve $\frac{1}{2}$ olan ikizkenar $\triangle ABC$ (S_0 üçgeni) için her iterasyonda oluşacak yeni şeklin çevre uzunluğu aşağıdaki gibi hesaplanır:

Başlangıçtaki S_0 üçgeninin çevresi $C_{S_0} = 2$ olup 1. iterasyon sonrasında oluşan S_1 in çevresi $C_{S_1} = 3$, 2. iterasyon sonrasında oluşan S_2 nin çevresi $C_{S_2} = \frac{9}{2}$ ve n . iterasyon sonrasında oluşan S_n nin çevresi $n \geq 0$ olmak üzere,

$$C_{S_n} = 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan C_{S_n} artan dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{S_n} = \infty$ olup Galile Sierpinski üçgeninin sonsuz uzunluğa sahip olduğu açıkça görülmektedir.

Galile geometrisinde üçgenin alan hesabı formülünden görülmektedir ki; Galile ve Öklid metrikleri arasındaki farklılık alan hesabına yansımamaktadır. Dolayısıyla Galile Sierpinski üçgeninin alanı ile Öklid Sierpinski üçgeninin alanları eşittir ve S_0 üçgeninin alanı $A_{S_0} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ olup, 1. iterasyon sonrasında $A_{S_1} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, 2. iterasyon sonrasında S_2 nin alanı $A_{S_2} = \frac{9\sqrt{3}}{64}$ ve n . iterasyon sonrasında $n \geq 0$ olmak üzere S_n nin alanı,

$$A_{S_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot 3^n \sqrt{3}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan A_{S_n} azalan dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{S_n} = 0$ olup Galile Sierpinski üçgeninin alanının 0 olduğu görülmektedir.

4.1.1 φ – shear hareketi ve Sierpinski-tipi fraktallar

Fraktallar büzülme, dönme, öteleme dönüşümlerinin bileşkesi olan afin dönüşümler ile oluşturulurlar. Büzülme ve öteleme dönüşümleri Galile ve Öklid geometrisinde aynı olmakla birlikte dönme dönüşümündeki farklılık bu iki düzlemdeki dönen Sierpinski-tipi fraktalların kıyaslanması açısından sıra dışı görüntüler sunmaktadır. Bu bölümde

$\mathbb{G}^2$ Galile düzleminde $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ için $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisli y –shear ve $\begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

dönme matrisli x –shear dönme hareketlerini içeren dönüşümler ile oluşturulan Galile Sierpinski-tipi fraktallar incelenmiştir. φ_L , φ_R ve φ_T açıları sırasıyla F_1 , F_2 ve F_3 dönüşümlerine ait Galile açıları olmak üzere; örneğin φ_L açısındaki değişiklik, her bir iterasyon adımımda F_1 ile oluşan şekillere tesir etmektedir. İkizkenar Galile Sierpinski üçgeni $\varphi_L = \varphi_R = \varphi_T = 0$ özel halidir. Farklı φ değerleri için oluşan fraktallardan yalnızca örnek 4.1’deki adım adım anlatılmıştır.

Örnek 4.1

$F_i : \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$ ve $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $(0,0)$, $(0.5,0.86)$, $(1,0)$ köşe noktalarına sahip

S_0 ikizkenar Galile üçgenine $\varphi=1$ için $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisli y -shear hareketini içeren dönüşümler,

$$F_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$F_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

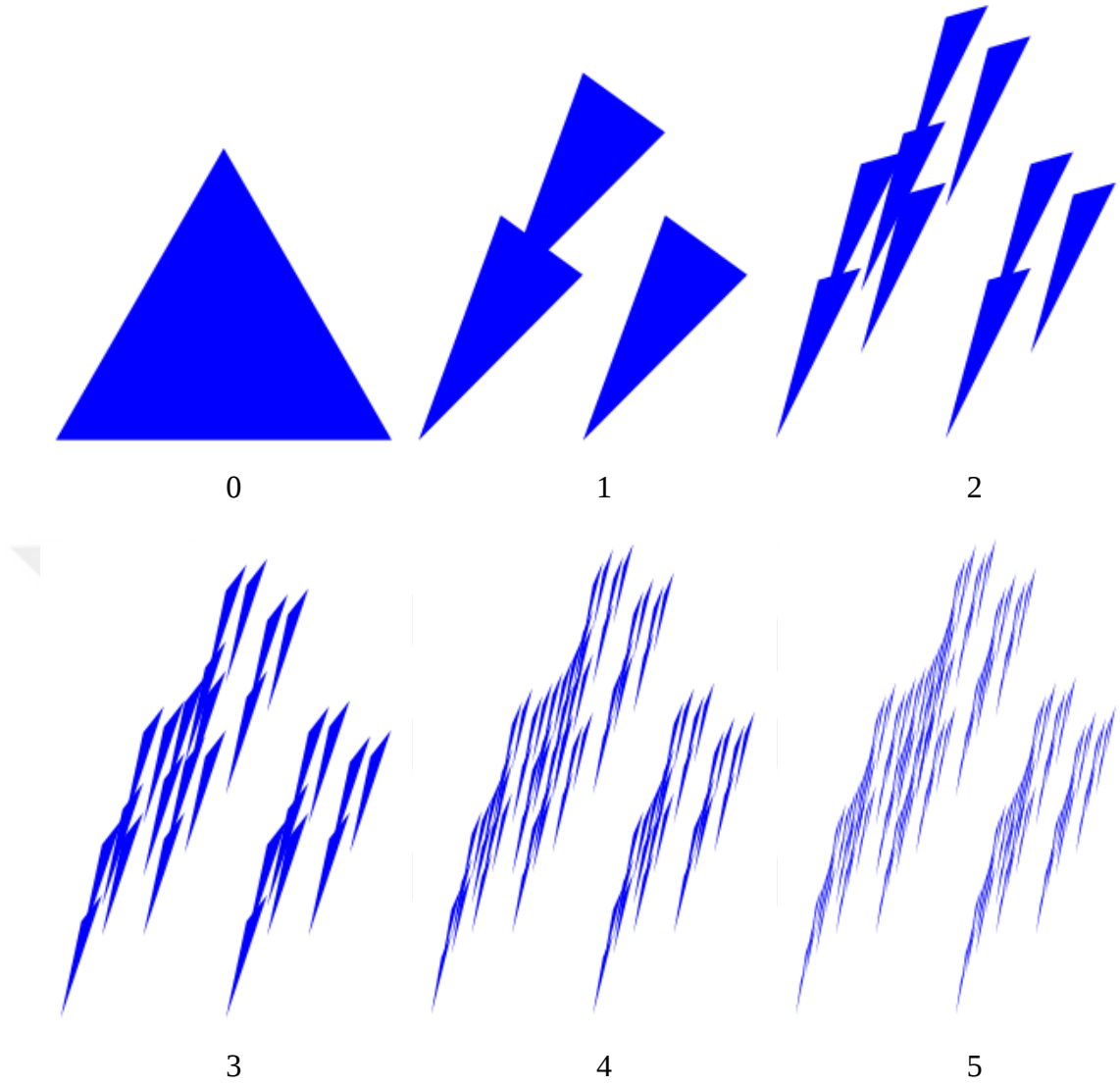
$$F_3 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.43 \end{bmatrix},$$

olmak üzere $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ nin TFS tablosu

Çizelge 4.2 $\varphi_L = \varphi_R = \varphi_T = 1$ TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.5	0	0.5	0.5	0	0	1
2	0.5	0	0.5	0.5	0.5	0	1
3	0.5	0	0.5	0.5	0.25	0.43	1

olup $\varphi_L = \varphi_R = \varphi_T = 1$ TFS ile oluşan Galile Sierpinski-tipi fraktalının oluşma adımları şekil 4.4'te gösterilmiştir.

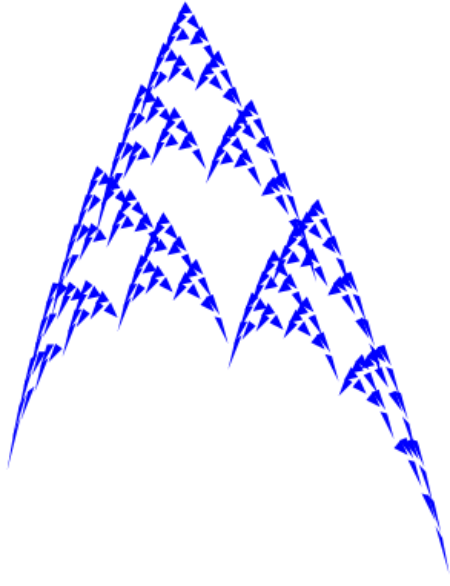


Şekil 4.4 $\varphi_L = \varphi_R = \varphi_T = 1$ için Galile Sierpinski-tipi fraktal

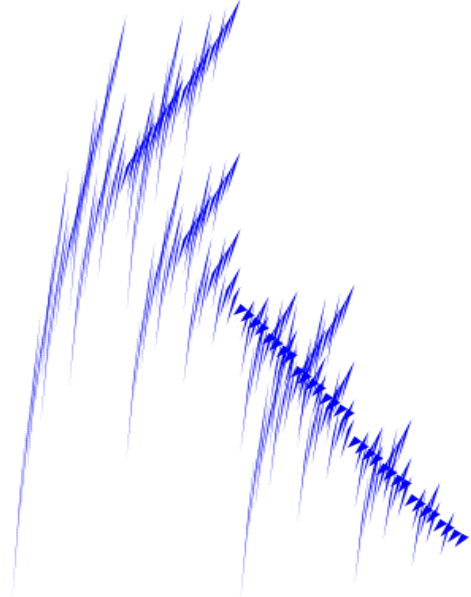
$\varphi_L = \varphi_R = \varphi_T = 1$ Galile dönme açılı bu fraktalı oluşturan her bir iterasyon adımında, TFS'nin tesir ettiği her bir üçgen y eksenine doğrultusunda Galile dönme hareketi (shear hareketi) yapmaktadır.

Örnek 4.2

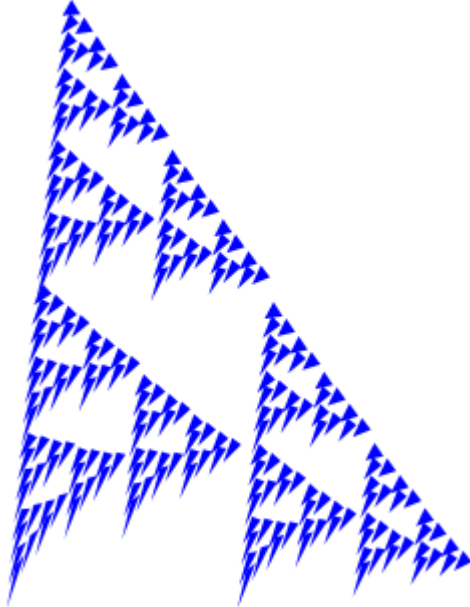
$F_i : \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$ ve $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $(0,0)$, $(0.5,0.86)$, $(1,0)$ köşe noktalarına sahip S_0 ikizkenar Galile üçgeninin farklı φ_L , φ_R ve φ_T açılarını içeren TFS'ler altında görüntüleri şekil 4.5'te ve TFS değerleri çizelge 4.3'te verilmiştir.



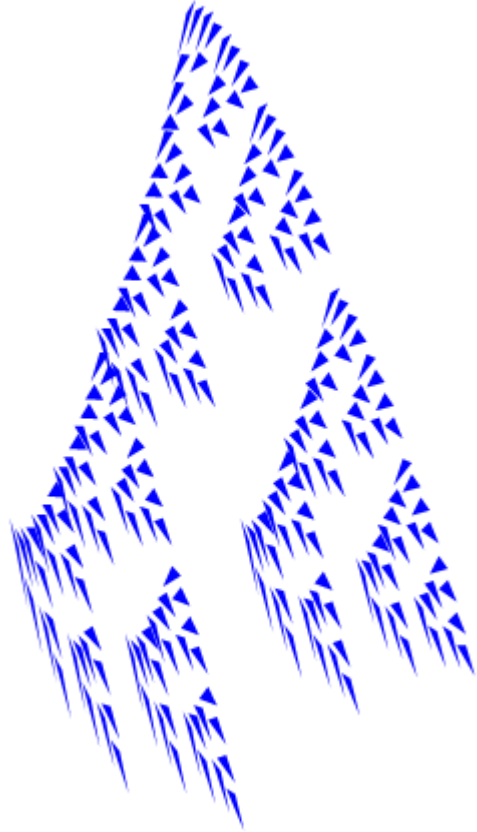
a) $\varphi_L = 0.8, \varphi_R = -0.7, \varphi_T = 0.02$



b) $\varphi_L = 3.5, \varphi_R = 0.2, \varphi_T = 0.1$



c) $\varphi_L = 0.6, \varphi_R = 0.1, \varphi_T = 0.01$



d) $\varphi_L = -1, \varphi_R = -0.34, \varphi_T = 0.65$

Şekil 4.5 Farklı $\varphi_L, \varphi_R, \varphi_T$ açıları için Galile Sierpinski-tipi fraktallar

Çizelge 4.3 Farklı φ_L , φ_R , φ_T açıları için TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.5	0	0.4	0.5	0	0	0.8
2	0.5	0	-0.35	0.5	0.5	0.23	-0.7
3	0.5	0	0.01	0.5	0.2	0.53	0.02

a) $\varphi_L = 0.8$, $\varphi_R = -0.7$, $\varphi_T = 0.02$

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.5	0	1.75	0.5	0	0	3.5
2	0.5	0	0.1	0.5	0.5	0	0.2
3	0.5	0	0.05	0.5	0.25	0.43	0.1

b) $\varphi_L = 3.5$, $\varphi_R = 0.2$, $\varphi_T = 0.1$

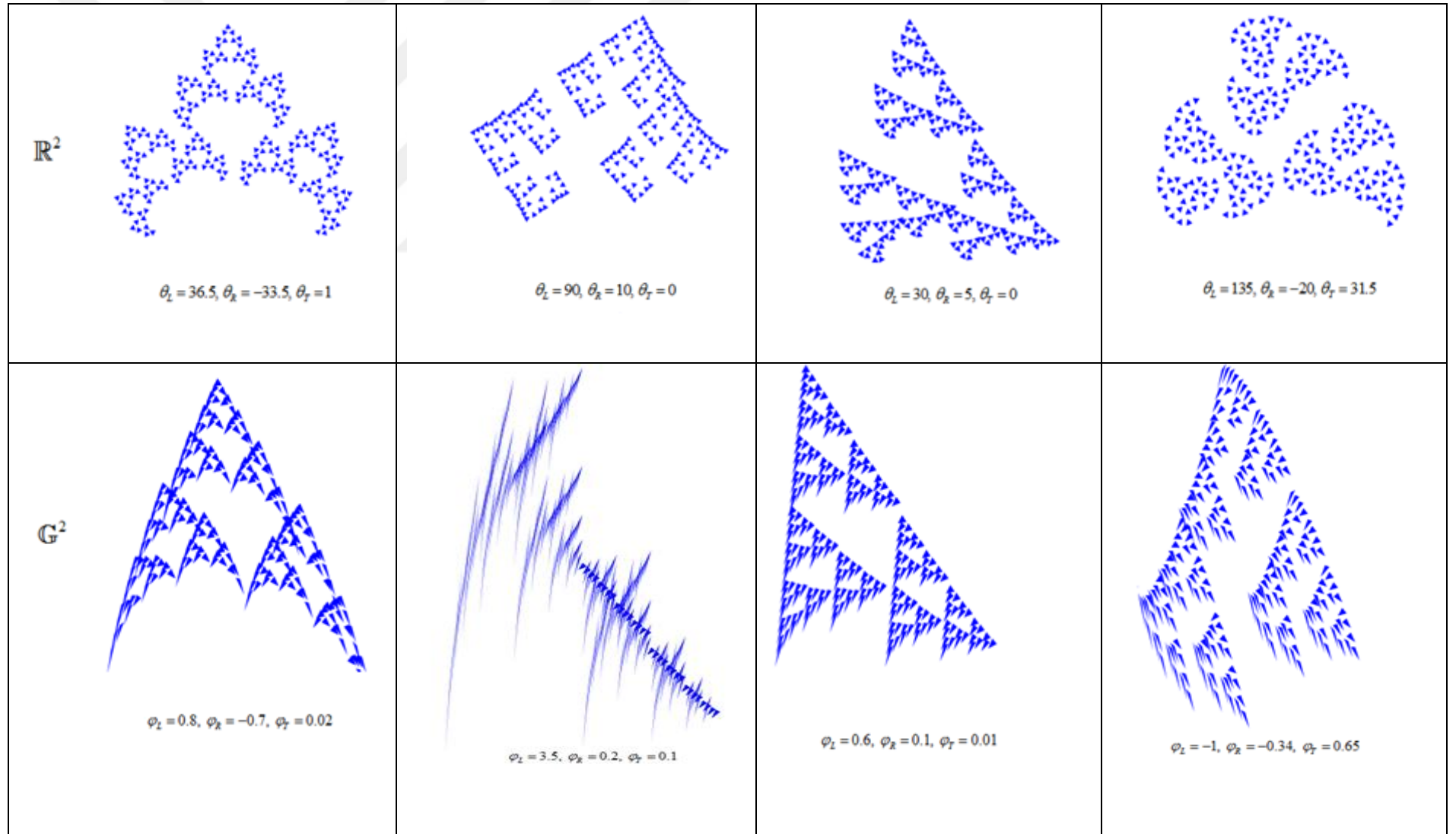
F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.5	0	0.3	0.5	0	0	0.6
2	0.5	0	0.05	0.5	0.4	0	0.1
3	0.5	0	0.005	0.5	0.05	0.53	0.01

c) $\varphi_L = 0.6$, $\varphi_R = 0.1$, $\varphi_T = 0.01$

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.5	0	-0.5	0.5	0	0	-1
2	0.5	0	-0.17	0.5	0.4	0	-0.34
3	0.5	0	0,325	0.5	0.15	0.33	0.65

d) $\varphi_L = -1$, $\varphi_R = -0.34$, $\varphi_T = 0.65$

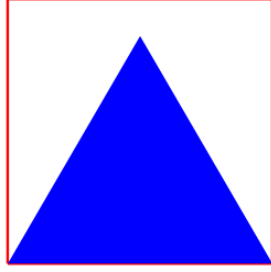
Şekil 4.5'teki Galile fraktalları, Öklid dönme matrisindeki θ açısının Galile dönme matrisindeki karşılığı olan φ açısı cinsinden değeri yaklaşık olarak belirlenerek oluşturulmuştur. Açölçer yardımıyla Öklid ve Galile açılarının birbirleri cinsinden değerleri hesaplanarak karşılaştırmalar yapılmıştır (Kurudirek ve Akça 2015). Bu fraktallar Bölüm 3 şekil 3.5'te verilen Öklid fraktallarının Galile düzlemindeki karşılığıdır. Her iki düzlemde θ ve φ değerleri için oluşturulan fraktalların karşılaştırması şekil 4.6'da yer almaktadır.



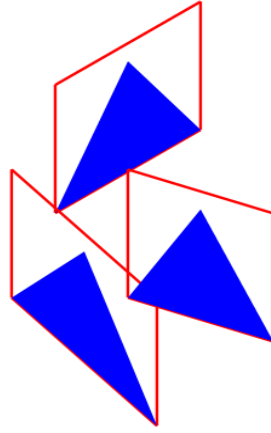
Şekil 4.6 Farklı θ ve φ değerleri için Öklid fraktallarının Galile düzlemindeki karşılıkları

Şekil 4.5'teki $\varphi_L - \varphi_R - \varphi_T$ dönme açılı Sierpinski-tipi fraktalları ile şekil 4.3'teki $\varphi = 0$ Galile Sierpinski üçgeninin kutu sayma boyutu eşittir. Bunun sebebi, Galile düzleminde büzülme, öteleme ve dönme dönüşümlerinin uzunluk, açı ve alan gibi geometrik özellikleri koruyan benzerlik dönüşümleri olmasındandır. Örnek olarak şekil 4.5.d ile verilen fraktalın kutu sayma boyutu aşağıda hesaplanmıştır.

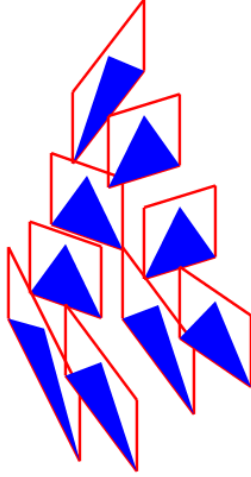




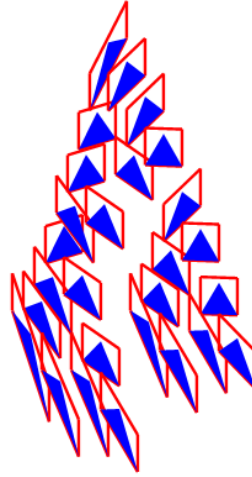
$$M_0 : r_0 = 1, N(r_0) = 1$$



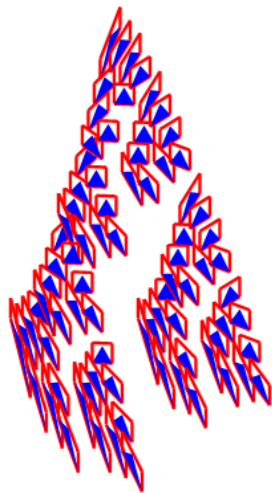
$$M_1 : r_1 = \frac{1}{2}, N(r_1) = 3$$



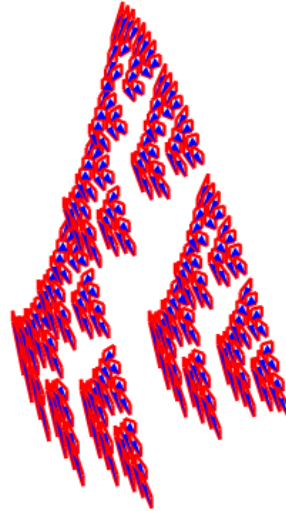
$$M_2 : r_2 = \frac{1}{4}, N(r_2) = 9$$



$$M_3 : r_3 = \frac{1}{8}, N(r_3) = 27$$



$$M_4 : r_4 = \frac{1}{16}, N(r_4) = 81$$



$$M_5 : r_5 = \frac{1}{32}, N(r_5) = 243$$

Şekil 4.7 $\varphi_L = -1$, $\varphi_R = -0.34$, $\varphi_T = 0.65$ fraktalının kutu sayma boyutu

Kutu sayma boyutu hesaplanırken, boyutu hesaplanacak üçgenin en uzun kenar uzunluğu dikkate alınmıştır. d) ile verilen Sierpinski-tipi fraktal için M_0 başlangıç üçgeninin koordinatları $(0,0), (0.5,0.86), (1,0)$ olup, bu eşkenar üçgenin taban uzunluğu 1, yüksekliği 0.86 dır. Bu sebeple en uzun kenar 1 olup her iterasyonda küçülme katsayısı $r = \frac{1}{2}$ olarak alınmıştır. Buradan D kutu sayma boyutu

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

olarak hesaplanır. a), b) ve c) deki fraktalların boyutları da benzer şekilde hesaplanır.

4.2 Galile Sierpinski Karesi

Galile ve Öklid düzlemlerinde öteleme ve büzülme dönüşümleri aynı olduğundan, Galile düzleminde Sierpinski üçgenini oluşturan dönüşümler Öklid düzlemindeki ile aynıdır, dolayısıyla her iki düzlemde de Sierpinski karesi aynı şekle sahiptir. Galile Sierpinski karesi, $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ köşe noktalarına sahip birim kare U_0

olmak üzere, ölçek faktörü $\frac{1}{3}$ ve $\varphi = 0$ olan

$$F_i \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

benzerlik dönüşümlerinin U_0 'a uygulanması ile oluşur. Burada $\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$ matrislerinin

değerleri:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

dir.

$k \in \mathbb{N}$ iterasyon sayısı olmak üzere her iterasyonda kenarı $\frac{1}{3^k}$ uzunluklu 8^k adet

kareden meydana gelen U_k kümeleri oluşmaktadır. $\{U_k\}$ azalan dizisi için,

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$$

olup dizinin limit değeri U_G olmak üzere bu limit *Galile Sierpinski karesi*dir ve

$$U_G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

ile gösterilir (Şekil 4.8). $F = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_8\}$ TFS'i (çizelge 4.4) yardımıyla Galile Sierpinski karesi,

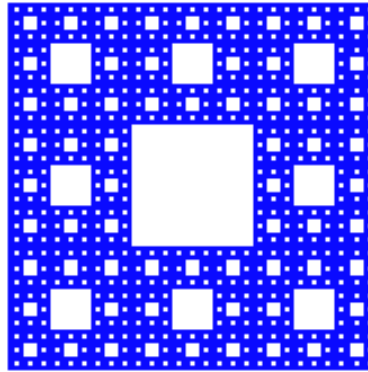
$$U_G = \bigcup_{i=1}^8 F_i(U) = F_1(U) \cup F_2(U) \cup F_3(U) \cup \dots \cup F_8(U)$$

şeklinde ifade edilir.

k . iterasyon sonrasında oluşan U_k ($k \geq 0$) kümelerinin alanı,

$$A_{U_k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \cdot 8^k$$

olmak üzere A_{U_k} azalan dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{U_k} = 0$ olup U_G Galile Sierpinski karesinin alanı 0 dır.



Şekil 4.8 Galile Sierpinski karesi

Çizelge 4.4 Galile Sierpinski karesi TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.33	0	0	0.33	0	0	0
2	0.33	0	0	0.33	0.33	0	0
3	0.33	0	0	0.33	0.66	0	0
4	0.33	0	0	0.33	0.66	0.33	0
5	0.33	0	0	0.33	0.66	0.66	0
6	0.33	0	0	0.33	0.33	0.66	0
7	0.33	0	0	0.33	0	0.66	0
8	0.33	0	0	0.33	0	0.33	0

4.2.1 φ dönme açılı Sierpinski karesi-tipi fraktallar

Bu bölümde $\mathbb{G}^2$ Galile düzleminde $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ için $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisli y -shear ve $\begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisli x -shear dönme hareketlerini içeren dönüşümler ile oluşturulan Galile Sierpinski karesi-tipi fraktallar incelenmiştir. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_8$ değerleri sırasıyla $F_1, F_2, F_3, \dots, F_8$ dönüşümlerine ait Galile açılarını göstermektedir. Galile Sierpinski karesi $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0$ için özel haldir.

Örnek 4.3

$F_i : \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$ ve $1 \leq i \leq 8$ olmak üzere $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ köşe noktalarına sahip U_0 karesine uygulanan $\varphi=1$ için $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisli y -shear hareketini içeren dönüşümler,

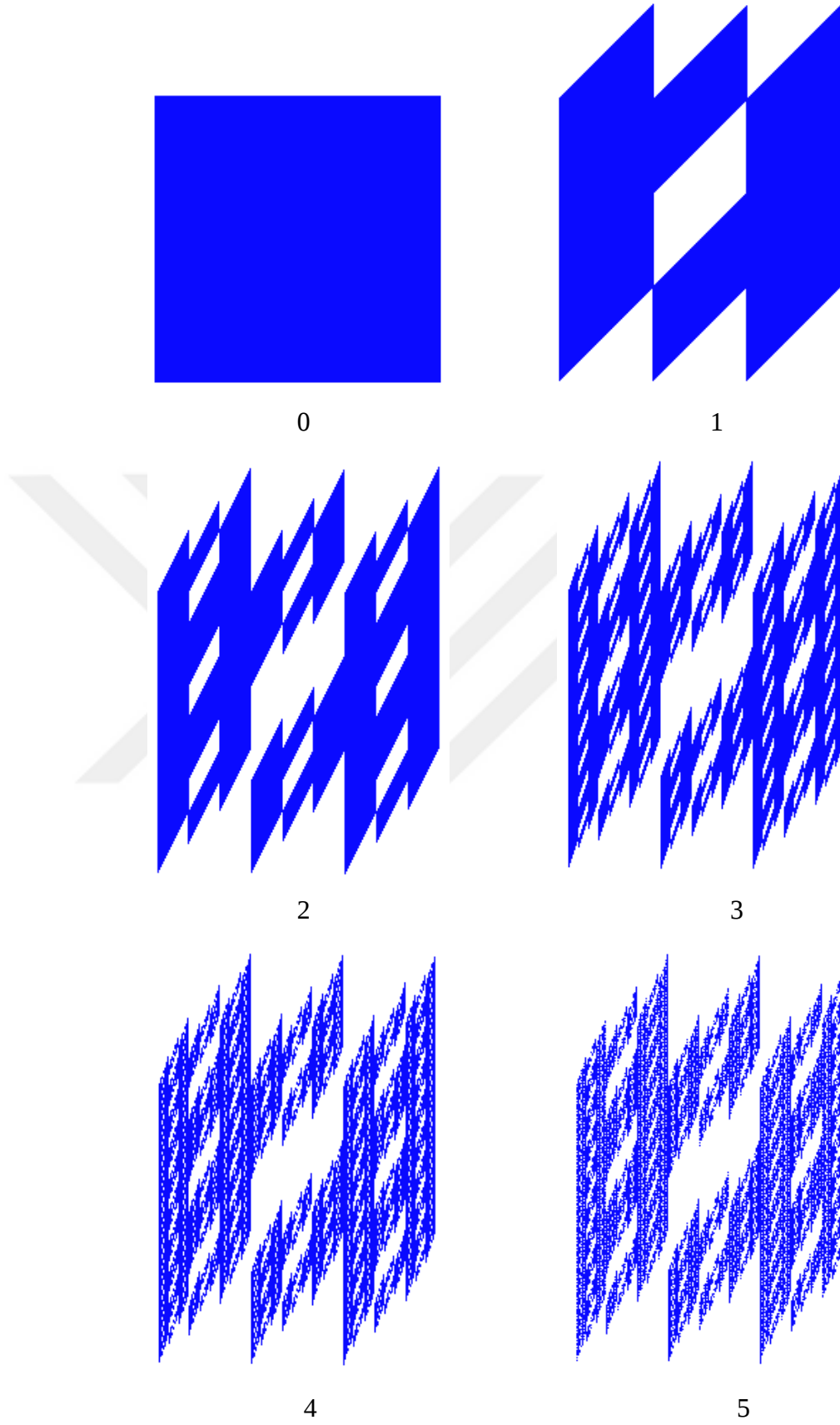
$$F_i \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3,\dots,8$$

olmak üzere $F = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_8\}$ nin TFS tablosu

Çizelge 4.5 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 1$ TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.33	0	0.33	0.33	0	0	1
2	0.33	0	0.33	0.33	0.33	0	1
3	0.33	0	0.33	0.33	0.66	0	1
4	0.33	0	0.33	0.33	0.66	0.33	1
5	0.33	0	0.33	0.33	0.66	0.66	1
6	0.33	0	0.33	0.33	0.33	0.66	1
7	0.33	0	0.33	0.33	0	0.66	1
8	0.33	0	0.33	0.33	0	0.33	1

çizelge 4.5 ile verilmiş olup $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 1$ TFS ile oluşan Galile Sierpinski karesi-tipi fraktalın oluşma adımları şekil 4.9’da gösterilmiştir.



Şekil 4.9 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 1$ için Galile Sierpinski karesi-tipi fraktalın oluşumu

$F = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_8\}$ TFS ile oluşan her bir paralelkenar y eksenini doğrultusunda $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 1$ değeri kadar Galile dönme hareketi (shear hareketi) yapmaktadır.

Örnek 4.4

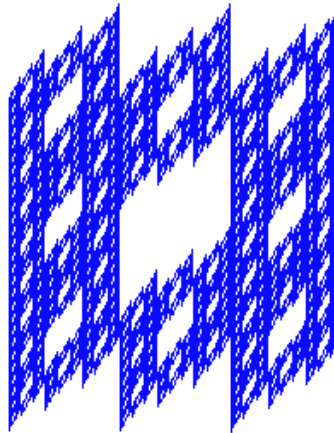
$F_i : \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$ ve $1 \leq i \leq 8$ olmak üzere $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ köşe noktalarına sahip kareye uygulanan;

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisli y -shear hareketini içeren $F_1, F_2, F_3, \dots, F_8$

dönüşümlerinin TFS değeri çizelge 4.6 ve oluşan fraktal şekil 4.10'da verilmiştir.

Çizelge 4.6 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.6$ (y-shear) TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.33	0	0.2	0.33	0	0	0.6
2	0.33	0	0.2	0.33	0.33	0	0.6
3	0.33	0	0.2	0.33	0.66	0	0.6
4	0.33	0	0.2	0.33	0.66	0.33	0.6
5	0.33	0	0.2	0.33	0.66	0.66	0.6
6	0.33	0	0.2	0.33	0.33	0.66	0.6
7	0.33	0	0.2	0.33	0	0.66	0.6
8	0.33	0	0.2	0.33	0	0.33	0.6



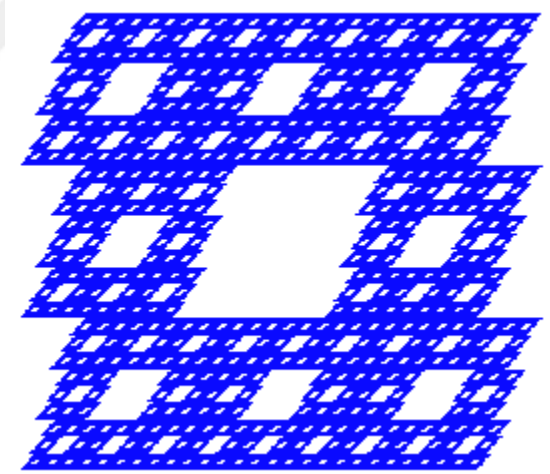
Şekil 4.10 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.6$ (y-shear) fraktal

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dönme matrisli x-shear hareketini içeren $F_1, F_2, F_3, \dots, F_8$

dönüşümlerinin TFS değeri çizelge 4.7 ve oluşan fraktal şekil 4.11’de verilmiştir.

Çizelge 4.7 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.3$ (x-shear) TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.33	0.1	0	0.33	0	0	0.3
2	0.33	0.1	0	0.33	0.33	0	0.3
3	0.33	0.1	0	0.33	0.66	0	0.3
4	0.33	0.1	0	0.33	0.66	0.33	0.3
5	0.33	0.1	0	0.33	0.66	0.66	0.3
6	0.33	0.1	0	0.33	0.33	0.66	0.3
7	0.33	0.1	0	0.33	0	0.66	0.3
8	0.33	0.1	0	0.33	0	0.33	0.3



Şekil 4.11 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.3$ (x-shear) fraktal

Örnek 4.5

$F_i : \mathbb{G}^2 \longrightarrow \mathbb{G}^2$ ve $1 \leq i \leq 8$ olmak üzere $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ köşe noktalarına sahip kareye uygulanan farklı $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_8$ değerleri ile oluşturulan $F_1, F_2, F_3, \dots, F_8$ dönüşümlerine ait TFS tabloları çizelge 4.8 ve fraktallar şekil 4.12’de verilmiştir.

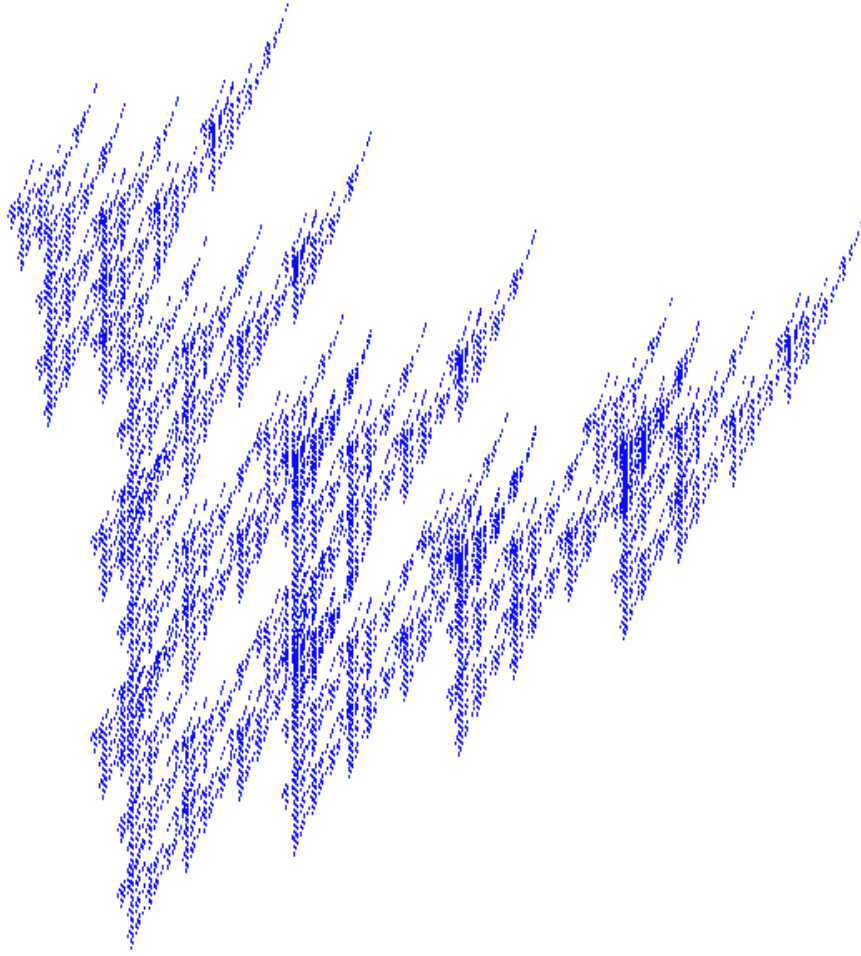
Çizelge 4.8 Farklı φ değerleri için TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.33	0	0.26	0.33	0.5	0.6	0.8
2	0.33	0	0.26	0.33	0.5	1.2	0.8
3	0.33	0	0.26	0.33	0.5	0	0.8
4	0.33	0	0.26	0.33	1	0.3	0.8
5	0.33	0	0.26	0.33	1	0.9	0.8
6	0.33	0	0.26	0.33	1.5	0.6	0.8
7	0.33	0	0.26	0.33	2	0.95	0.8
8	0.33	0	0.26	0.33	0.25	1.6	0.8

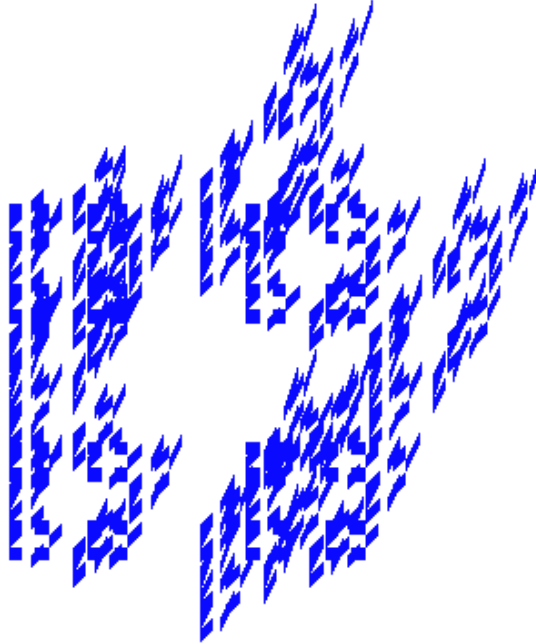
a) $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.8$ (y-shear) TFS

F	a	b	c	d	e	f	φ
1	0.33	0	0.33	0.33	0.53	-0.23	1
2	0.33	0	0.33	0.33	1	0.3	1
3	0.33	0	0.33	0.33	0	0.3	1
4	0.33	0	0.33	0.33	0.53	0.73	1
5	0.33	0	0	0.33	0.66	0	0
6	0.33	0	0	0.33	0.66	0.66	0
7	0.33	0	0	0.33	0	0.66	0
8	0.33	0	0	0.33	0	0	0

b) $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 1$, $\varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7 = \varphi_8 = 0$ (y-shear) TFS



a) $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_8 = 0.8$ (y-shear) fraktal

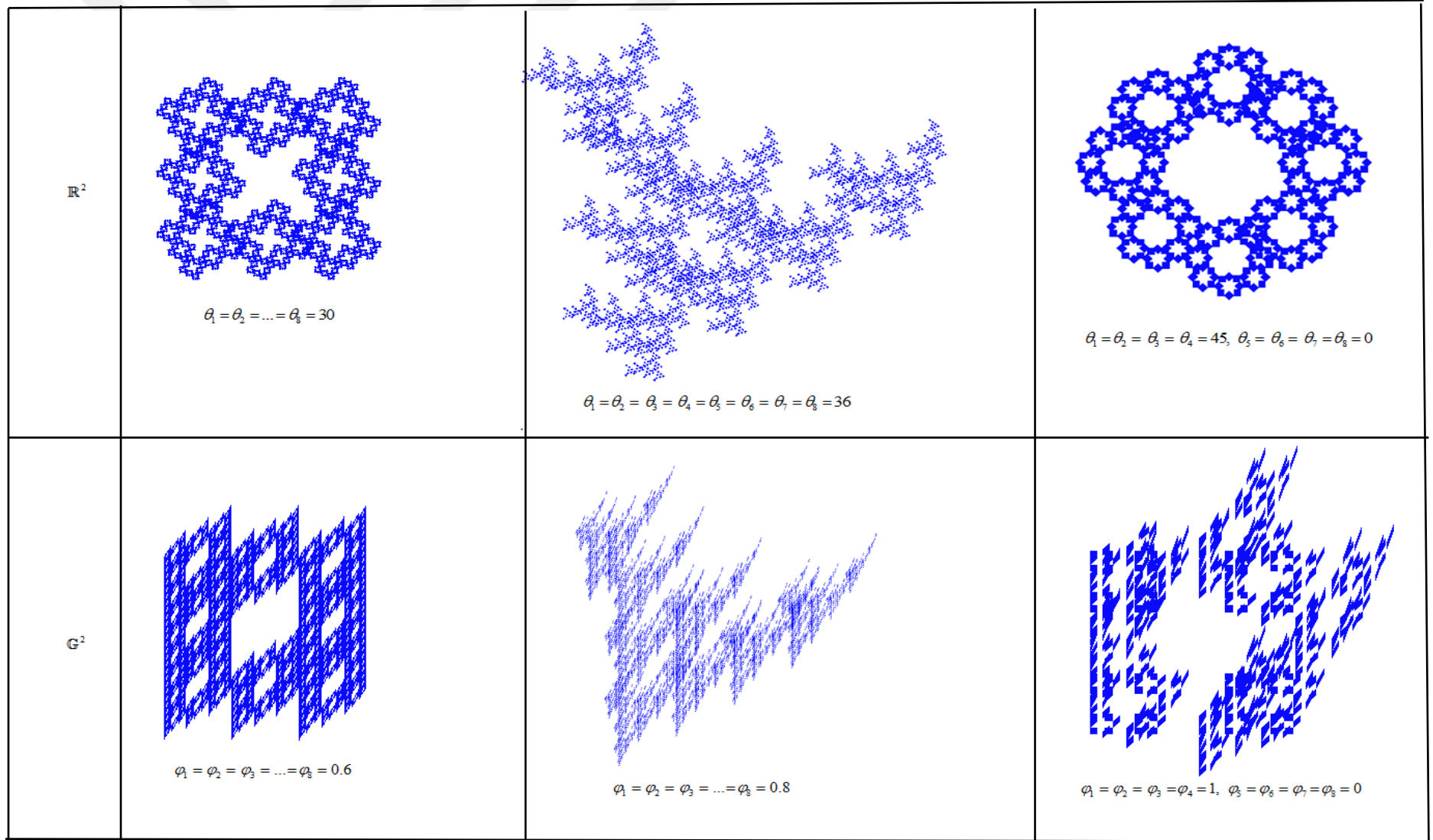


b) $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 1, \varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7 = \varphi_8 = 0$ fraktalı

Şekil 4.12 Farklı $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_8$ değerleri için fraktallar

Şekil 4.12'deki Galile fraktalları, Öklid dönme matrisindeki θ açısının Galile dönme matrisindeki karşılığı olan φ açısı cinsinden değeri yaklaşık olarak belirlenerek oluşturulmuştur. Bu fraktallar şekil 3.11 ile verilen Öklid fraktallarının Galile düzlemindeki karşılığıdır. Her iki düzlemde θ ve φ değerleri için oluşturulan fraktalların karşılaştırması şekil 4.13'te yer almaktadır.





Şekil 4.13 Farklı θ ve φ değerleri için Öklid fraktallarının Galile düzlemindeki karşılıkları

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, metrik kavramı ve dönüşümler üzerine inşa edilen geometrilerin topolojik farklılıklarının rekürsif süreçler sonucunda oluşturacağı fraktal yapılar araştırılmıştır. Öklid düzleminde tanımlı özel bir fraktal olan Sierpinski üçgeni ve karesinin Galile düzlemindeki karşılıkları elde edilmiştir. Fraktallara özgü iki kavram olan kendine benzerlik ve fraktal boyut kavramları, Öklid düzlemindekine benzer şekilde Galile düzleminde tanımlanmıştır. Ayrıca Öklid düzleminde fraktalların oluşturulması sürecinde yer alan dönme dönüşümlerinin Galile düzleminde oluşacak fraktallara etkileri incelenmiştir. Öklid anlamında dönme ile Galile anlamında dönme kavramlarının karşılaştırmalı tanımları ve buradan hareketle Galile düzleminde kutu sayma boyutu ve özellikleri araştırılmıştır. Shear hareketi olarak bilinen dönüşüm Öklid düzleminde kendine benzer yapıyı bozan bir dönüşüm iken Galile metriği ile Galile düzleminde kendine benzer fraktallar oluşturan bir dönüşüm olarak karşımıza çıkmıştır. Öklid ve Galile düzlemlerindeki açıların yaklaşık olarak birbiri cinsinden ifade edilmesiyle, aynı dönüşümün farklı düzlemlerde farklı metrik tanımlamalarıyla farklı görüntüde fraktallar oluşturduğu tespit edilmiştir.

Gelecek çalışmalarda, bu çalışmanın 3-boyutlu uzaya genişletilmesinin karşılaştırmalı olarak verilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca Öklid ve Galile geometrilerine ilaveten, Cayley-Klein geometriler içinde yer alan Minkowski geometrisinde Sierpinski-tipi veya farklı dönüşümlerle oluşturulacak fraktalların elde edilmesi sonraki çalışmaların konusu içinde yer almaktadır.

KAYNAKLAR

- Akar, M., Yüce, S. and Kuruoglu, N. 2003. One-Parameter-Planar Motion in the Galilean Plane, International Electronic Journal of Geometry, Volume 6, no.1, pp. 79-88.
- Barnsley, M.F. and Demko, S. 1985, Iterated function systems and the global construction of fractals, Proc. R. Soc. London, A 399, p. 243-275.
- Barnsley M.F., Devaney R.L., Benoit B.M., Pietgen H.O., Saupe D. and Voss R. F. 1988, The Science of Fractal Images, Springer-Verlag, USA, pp. 1-20.
- Barnsley M.F. 1988. The science of fractal images, Springer-Verlag, New York.
- Barnsley, M.F. 1993. Fractal Everywhere, 2nd ed., Academic Press, San Diego.
- Beardon, A.F. 1991. Iteration of Rational Functions, Springer.
- Bedford T. 1989. The box dimension of self-affine graphs and repellers. Nonlinearity 1 53-71.
- Bedford, T. and Urbanski, M. 1990. The box and Hausdorff dimension of self-affine sets. Ergodic Theory Dynamical Systems 10, 627-644.
- Blanchard, P. 1984. Complex Analytic Dynamics, Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, Preliminary version.
- Brincks, L. 2005. Fractals and Chaos, Master of School, Iowa State University, Thesis.
- Cigirim, Ü. 1980. Öklid, Galile, Minkowski Geometrilere, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Edgar, G.A. 1990. Measure, Topology and Fractal Geometry, Springer-Verlag, Newyork.
- Falconer, K.J. 1985. The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press.
- Falconer, K.J. 1988. The Hausdorff dimension of self-affine fractals, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 103, 339-350.
- Falconer, K.J. 1990. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, University of Bristol, Wiley, Newyork, 288p.
- Falconer, K.J. 2003. Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications, Wiley, 2nd ed.

- Falconer, K.J. and Miao, J. 2007. Dimensions of self-affine fractals and multifractals generated by upper-triangular matrices, *Fractals* 15, 289.
- Gleick, J. 2005. *Kaos*, Tübitak Yayınları, ISBN 975-403-029-4.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Matematik. No. 2, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H. ve Yaz, N. 2006. *Fraktal Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.
- Hausdorff, F. 1918. Dimension und äusseres Mass, *Mathematische Annalen* 79 (1-2): 157–179, doi:10.1007/BF01457179.
- Hutchinson, J.E. 1981. Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* 30, pp. 713–749.
- Keen, L. 1994. *Complex Dynamical Systems*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Julia Sets of Rational Mappings, American Mathematical Society, Providence, RI. ISBN 0-8218-0290-9, Volume 49, pp. 71-89.
- Kurudirek, A. and Akça, H. 2015. On the Concept of Circle and Angle in Galilean Plane, *Işık Üniversitesi, Irak*.
- Lu, N. 1997. *Fractal imaging*, Morgan Kaufmann Publishers.
- Mandelbrot, B.B. 1983. *Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company ISBN 0-7167-1186-9.
- Mandelbrot, B.B. 1984. The Fractal Geometry of Nature", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 91, No. 9, pp. 594-598.
- Mandelbrot, B.B. 1989. *Fractal Geometry: What Is It , and What Does It Do?*, Proceedings of the Royal Society of London, vol. 423, pp. 2-16.
- McMullen, C. 1984. The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets, *Nagoya Math. J.* 96, pp. 1–9.
- Miller, S. 2006. *The Dynamics of Newton's Method on Cubic Polynomials*, The Graduate College of Marshall University, Thesis.
- Peitgen, H.O., Jürgens. H., Saupe, D., Maletsky, E.M., Perciante, T.H. and Yunker, L.E. 1991. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One* (New York: Springer).
- Peitgen, H.O., Jürgens, H. and Saupe, D. 1992. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science* (New York: Springer).

- Peitgen, H. and Saupe, D. 2004. Chaos and Fractals, Springer-Verlag, Newyork.
- Reiter, C.A. 1994. Sierpinski fractals and GCD's Comput. Graph. 18 885–91.
- Rooney, J. 1975. On the Principle of Transference, Proceeding of the IV IFToMM Congress, New castle upon Tyne, UK. 1089-1094.
- Rooney, J. 1978. On the three types of complex number and planar transformations, Cranfield Institute of Technology.
- Taylor, T.D. 2011. Connectivity properties of Sierpinski relatives, Fractals. 19(4), pp. 481–506.
- Tütüncü, E.E. 2009. Galile Uzaylarında Hareketlerin Geometrisi, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ankara.
- Yaglom, I.M. 1979. A simple non-Euclidean geometry and its physical basis: an elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity. New-York: Springer-Verlag.
- Zhou, Z.L. 1997. Hausdorff measure of Sierpinski triangle, Sci. China. Ser. A. 40(10), pp. 1016-1021.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif Aybike BÜYÜKYILMAZ

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 29.09.1983

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Bahçelievler Deneme Lisesi (1999)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı (2000)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Şubat 2006 – Temmuz 2009)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Tapu ve Kadastro Genel Müdürlüğü – Bilgisayar Programcısı (2007)

Orta Anadolu Kalkınma Ajansı – Uzman (2010)

Tapu ve Kadastro Genel Müdürlüğü – Bilgisayar Programcısı (2011-2016)

Orta Anadolu Kalkınma Ajansı – Uzman (2016 - ...)

Yayınlar

Büyükyılmaz, E. A., Yaylı, Y. and Gök, İ. (08.04.2016). A New Construction of the Sierpinski Triangles with Galilean Transformations, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 4(1), 151-163.

Uluslararası Kongre Sunum

Büyükyılmaz, E. A., Yaylı, Y. and Gök, İ. (25.05.2016). Sierpinski-type Fractals In The Galilean Plane, 14. Uluslararası Geometri Sempozyumu – Denizli.