ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZGİSEL FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

İrem EROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SEZGİSEL FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

İrem EROĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal GÜNER

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, önce sezgisel fuzzy komşuluklar ve Q-komşuluklar ailesi incelenmiştir. Daha sonra, sezgisel fuzzy topolojik uzaylarda süreklilik, bağlantılılık gibi kavramlar verilerek, bazı özellikleri araştırılmıştır.

Son bölümde, sezgisel fuzzy süzgeçler tanımlanarak bu süzgeçler ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Ocak 2013, 67 sayfa

Anahtar Kelimeler : Sezgisel fuzzy komşuluk, $Q-$komşuluklar ailesi, sezgisel fuzzy topolojik uzay, bağlantılılık, sezgisel fuzzy süzgeç.

ABSTRACT

Master Thesis

ON INTUITIONISTIC FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

İrem EROĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal GÜNER

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts have been recalled.

In the third chapter, intuitionistic fuzzy neighborhood and $Q-$neighborhood families are searched. Then, giving some concepts like as continuity, connectedness in intuitionistic fuzzy topological spaces, some properties have been studied.

In the final chapter, defining intuitioinistic fuzzy filters, some charecterizations are recalled.

January 2013, 67 pages

Key Words: Intuitionistic fuzzy neighborhood, $Q-$neighborhood families, intuitionistic fuzzy topological space, connectedness, intuitionistic fuzzy filter.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren, araştırmalarımın her aşamasında engin bilgilerini benden hiçbir zaman esirgemeyen ve matematiksel düşünme yeteneğimi geliştirmeme yardımcı olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erdal GÜNER' e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) çalışmalarım süresince fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme en içten duygularımla teşekkür ederim.

İrem EROĞLU
Ankara, Ocak 2013.

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
TEŞEKKÜR ..... **iii**
SİMGELER DİZİNİ ..... **iv**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **2**
2.1 Sezgisel Fuzzy Kümeler **2**
2.2 Sezgisel Fuzzy Noktalar **6**
3. SEZGİSEL FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE **12**
3.1 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzay **12**
3.2 Sezgisel Fuzzy Komşuluklar ve $Q-$komşuluklar Ailesi **17**
3.3 Sezgisel Fuzzy Süreklilik, Açık ve Kapalı Dönüşümler **19**
3.4 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzayların Alt Uzayları **24**
3.5 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzaylarda Süreklilik Çeşitleri **30**
3.6 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzaylarda Bağlantılılık **40**
4. SEZGİSEL FUZZY AĞLAR VE SÜZGEÇLER ÜZERİNE **50**
4.1 Sezgisel Fuzzy Ağlar ve Süzgeçler **50**
4.2 Sezgisel Fuzzy Kapalı Süzgeçler **54**
4.3 Sezgisel Fuzzy Süzgeçler Üzerine Bazı Sonuçlar **59**
KAYNAKLAR **65**
ÖZGEÇMİŞ **67**

SİMGELER DİZİNİ

μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
γ_A	A kümesinin üye olmama fonksiyonu
$\vee$	maksimum
$\wedge$	minimum
$des(A)$	A kümesinin desteği
çek(A)	A kümesinin çekirdeği
$c(\alpha, \beta)$	Sezgisel Fuzzy Nokta
$c(\beta)$	Kaybolan Sezgisel Fuzzy Nokta
AqB	A ile B çakışır
A°	A kümesinin içi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\mathcal{N}$	N-komşuluklar ailesi
$\mathcal{U}$	$Q-$komşuluklar ailesi
$\mathcal{F}$	Süzgeç
$\mathcal{B}$	Süzgeç Tabanı
$(s_d)_{d\in D}$	Sezgisel fuzzy ağ

1. GİRİŞ

Fuzzy kümeler Zadeh (1965) tarafından tanımlanmıştır. Fuzzy kümelerin bir genellemesi olan sezgisel fuzzy küme kavramı ise Atanassov (1983) tarafından oluşturulmuştur. Atanassov fuzzy kümelerdeki üyelik fonksiyonuna üye olmama fonksiyonunu da ekleyerek sezgisel fuzzy kümeleri oluşturmuştur.

Sezgisel fuzzy kümelere bu ismin verilmesi, sezgisel mantıkla benzer özelliklere sahip olduğundan Atanassov' un danışman hocası olan George Gargov tarafından önerilmiştir. Sezgisel fuzzy kümeler tıpta, mühendislikte ve matematiğin birçok dalında uygulama alanı bulmuştur.

Sezgisel fuzzy topolojik uzaylar Çoker (1997) tarafından tanımlanmıştır. Klasik topolojideki bir çok özellik sezgisel fuzzy topolojik uzaylarda da gerçeklenmiştir. Çoker 1996 yılında sezgisel fuzzy kümelerin bir genellemesi olan sezgisel küme ve sezgisel topolojik uzay kavramlarını yapmıştır. Turanlı ve Çoker (2000) sezgisel fuzzy topolojik uzaylarda bazı bağlantılılık çeşitlerini incelemiş ve çeşitli sonuçlar elde etmiştirler.

Klasik topolojide süzgeç kavramının izleri 1914 yılında Root un makalesinde görülmüş olup, süzgeç tanımı ilk olarak 1937 yılında Cartan tarafından yapılmıştır. Bourbaki ve Tukey tarafından süzgeçler ve ağlar arasında çeşitli ilişkiler elde edilmiştir. 1961 yılında Kowalsky süzgeçler üzerine çalışmalar yapmıştır. Fuzzy süzgeç kavramı ise ilk olarak Lowen tarafından yapılmıştır. Fuzzy süzgeçler ile ilgili bir çok sonuç De Prada ve Saralegui tarafından elde edilmiştir. Sezgisel fuzzy süzgeçler ise ilk olarak Lupianez (2006) tarafından oluşturulmuştur. Sezgisel fuzzy topolojik uzayın kapalılarından oluşan ve süzgeç olma şartlarını sağlayan aileye sezgisel fuzzy kapalı süzgeç denilmiş ve bu tanım ilk olarak Pankajam (2009) tarafından yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sezgisel fuzzy kümelerin ve sezgisel fuzzy noktaların tanımları verilerek, temel özellikleri incelenecektir.

2.1 Sezgisel Fuzzy Kümeler

Tanım 2.1.1 $X \neq 0_{\sim}$ olsun. $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle : x \in X\}$ şeklindeki kümeye **sezgisel fuzzy küme** denir. $\mu_A : X \to I$ ve $\gamma_A : X \to I$ fonksiyonları sırası ile **üye olma derecesini** ve **üye olmama derecesini** göstermektedir (Atanassov 1986). Burada,

$$\forall x \in X \text{ için } 0 \leq \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$$

dir.

Not 2.1.1 $X \neq 0_{\sim}$ olsun. X kümesi üzerindeki her $A \subseteq X$ fuzzy kümesi,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde sezgisel fuzzy küme olarak ifade edilebilir.

Not 2.1.2 $X \neq 0_{\sim}$ olsun. $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle\colon x \in X\}$ ve $B = \{\langle x, \mu_B(x), \gamma_B(x)\rangle\colon x \in X\}$ sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda,

(a) $A \subseteq B \iff \forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $\gamma_A(x) \geq \gamma_B(x)$

(b) $A = B \iff A \subseteq B$ *ve* $B \subseteq A$

(c) $A^c = \{\langle x, \gamma_A(x), \mu_A(x)\rangle : x \in X\}$

(d) $A \cap B = \{\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \gamma_A(x) \vee \gamma_B(x)\rangle : x \in X\}$

(f) $[\ \ ]A = \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle : x \in X\}$

(e) $A \cup B = \{\langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \gamma_A(x) \wedge \gamma_B(x)\rangle : x \in X\}$

(g) $\langle\ \ \rangle A = \{\langle x, 1 - \gamma_A(x), \gamma_A(x)\rangle : x \in X\}$

dır.

Tanım 2.1.2 $X \neq 0_\sim$ olsun. $\{A_i : i \in I\}$ ailesi sezgisel fuzzy kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda, sezgisel fuzzy kümelerin kesişimi ve birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır:

a) $\cap A_i = \{\langle x, \wedge\mu_{A_i}(x), \vee\gamma_{A_i}(x)\rangle : x \in X\}$

b) $\cup A_i = \{\langle x, \vee\mu_{A_i}(x), \wedge\gamma_{A_i}(x)\rangle : x \in X\}$.

Tanım 2.1.3 $0_\sim = \{\langle x, 0, 1\rangle : x \in X\}$ ve $1_\sim = \{\langle x, 1, 0\rangle : x \in X\}$ dir.

Sonuç 2.1.1 $X \neq 0_\sim$ ve A, B, C kümeleri X de sezgisel fuzzy kümeler olsun. Aşağıdaki özellikler gerçeklenir:

a) $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D \Longrightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$ ve $A \cap C \subseteq B \cap D$

b) $A \subseteq B$ ve $A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$

c) $A \subseteq C$ ve $B \subseteq C \Longrightarrow A \cup B \subseteq C$

d) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

e) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

f) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

g) $A \subseteq B \Longrightarrow B^c \subseteq C^c$

h) $(A^c)^c = A$

i) $1^c_\sim = 0_\sim$ ve $0^c_\sim = 1_\sim$

Tanım 2.1.4 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesinin **desteği**, A nın üye ve üye olmama derecesini sıfırdan büyük yapan noktaların kümesidir. Yani,

$$des(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0, \gamma_A(x) \geq 0\}$$

dır.

Örnek 2.1.1 $X = \{a, b, c, d\}$ ve $A = \{(a, 0.3, 0.4), (b, 0.4, 0), (c, 0.5, 0), (d, 0, 0.2)\}$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin.

$$des(A) = \{a, b, c\}.$$

dır.

Tanım 2.1.5 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. A nın **çekirdeği**, A nın üye olma derecesini 1 ve üye olmama derecesini sıfır yapan noktaların kümesidir. Yani,

$$\text{çek}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1,\ \gamma_A(x) = 0\}\ .$$

dır.

Örnek 2.1.2 $X = \{a, b, c, d\}$ ve $A = \{(a, 0.2, 0.6), (b, 1, 0), (c, 0, 1), (d, 0.5, 0.5)\}$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin.

$$\text{çek(A)} = \{b\}$$

dir.

Tanım 2.1.6 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. A nın $\alpha-$**kesimi** αA ile gösterilir ve

$$\alpha A = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha, \gamma_A(x) \geq 0, \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1\}$$

şeklinde tanımlı kümedir.

Tanım 2.1.7 $X \neq 0_\sim$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olsun. $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. $\pi_A(x) = 1 - \gamma_A(x) - \mu_A(x)$ olmak üzere

$$D_\alpha(A) = \{\langle x, \mu_A(x) + \alpha\pi_A(x), \gamma_A(x) + (1 - \alpha)\pi_A(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklinde tanımlı D_α operatörüne, **sezgisel fuzzy kümeden fuzzy küme elde etme operatörü** denir (Atanassov 1986).

Tanım 2.1.8 $X \neq 0_\sim$ ve $Y \neq 0_\sim$ olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu için sezgisel fuzzy kümelerin **ters görüntü** ve **görüntü kümesi** aşağıdaki gibi tanımlanır:

a) $B = \{\langle y, \mu_B(y), \gamma_B(y)\rangle : y \in Y\}$ kümesi Y de sezgisel fuzzy küme olsun. $f^{-1}(B)$, X de sezgisel fuzzy kümedir.

$$f^{-1}(B) = \{\langle x, f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\gamma_B)(x)\rangle : x \in X\}$$

şeklindedir.

b) $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle : x \in X\}$ kümesi X de sezgisel fuzzy küme olsun. $f(A)$, Y de sezgisel fuzzy kümedir.

$$f(A) = \{\langle y, f(\mu_A)(y), 1 - f(1 - \gamma_A)(y)\rangle : y \in Y\}$$

şekindedir. Burada, $f(\mu_A)(y)$ ve $1-f(1-\gamma_A)(y)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(\mu_A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

$$(1 - f(1 - \gamma_A))(y) = \begin{cases} \inf_{x \in f^{-1}(y)} \gamma_A(x), & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 1, & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

Sonuç 2.1.2 $X \neq 0_\sim$ ve $Y \neq 0_\sim$ olsun. A, A_i $(i \in J)$ kümeleri X de sezgisel fuzzy kümeler, B *ve* B_j $(j \in K)$ kümeleri Y de sezgisel fuzzy kümeler olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda,

a) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

b) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

c) $A \subseteq f^{-1}f(A)$ dir. f birebir bir fonksiyon ise $A = f^{-1}f(A)$

d) $ff^{-1}(B) \subseteq B$ dir. f örten bir fonksiyon ise $ff^{-1}(B) = B$

e) $f^{-1}(\cup B_j) = \cup f^{-1}(B_j)$

f) $f^{-1}(\cap B_j) = \cap f^{-1}(B_j)$

g) $f(\cup A_i) = \cup f(A_i)$

h) $f(\cap A_i) \subseteq \cap f(A_i)$ dir. f birebir bir fonksiyon ise $f(\cap A_i) = \cap f(A_i)$

ı) $f^{-1}(1_\sim) = 1_\sim$ ve $f^{-1}(0_\sim) = 0_\sim$

i) f örten bir fonksiyon ise $f(1_\sim) = 1_\sim$

j) f örten bir fonksiyon ise $f(A)^c \subseteq f(A^c)$

k) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

dır.

2.2 Sezgisel Fuzzy Noktalar

Tanım 2.2.1 $X \neq 0_\sim$ ve c, X de sabit bir eleman olsun. $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,1)$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere,

$$c(\alpha, \beta) = \langle x, c_\alpha, 1 - c_{1-\beta} \rangle$$

şeklinde tanımlı kümeye **sezgisel fuzzy nokta** denir (Çoker ve Demirci 1995).
α, $c(\alpha, \beta)$ nın üyelik derecesini ve β, $c(\alpha, \beta)$ nın üye olmama derecesini gösterir. $c \in X$ noktasına da $c(\alpha, \beta)$ nın desteği denir.

Tanım 2.2.2 $X \neq 0_\sim$ ve c, X de sabit bir eleman olsun. $\beta \in [0,1)$ olmak üzere,

$$c(\beta) = \langle x, 0, 1 - c_{1-\beta} \rangle$$

şeklinde tanımlı kümeye **kaybolan sezgisel fuzzy nokta** denir.

Tanım 2.2.3 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A = \langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. $c(\alpha, \beta) \subseteq X$ sezgisel fuzzy noktası için

$$c_\alpha \leq \mu_A \; ve \; 1 - c_{1-\beta} \geq \gamma_A$$

oluyorsa $c(\alpha, \beta)$ **sezgisel fuzzy noktası** A **tarafından içerilir** denir.
$c(\beta)$, X de kaybolan sezgisel fuzzy nokta olmak üzere,

$$\mu_A(c) = 0 \; ve \; 1 - c_{1-\beta} \geq \gamma_A$$

oluyorsa $c(\beta)$ **kaybolan sezgisel fuzzy noktası** A **tarafından içerilir** denir.

Tanım 2.2.4 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A = \langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin.

$c(\alpha, \beta)$ sezgisel fuzzy noktası için,

$$c_\alpha < \mu_A \; ve \; 1 - c_{1-\beta} > \gamma_A$$

oluyorsa $c(\alpha, \beta)$ **sezgisel fuzzy noktası** A **tarafından düzgünce içerilir** denir. $c(\beta)$, X de kaybolan sezgisel fuzzy nokta olmak üzere,

$$\mu_A(c) = 0 \; ve \; 1 - c_{1-\beta} > \gamma_A$$

oluyorsa $c(\beta)$ **kaybolan sezgisel fuzzy noktası** A **tarafından düzgünce içerilir** denir.

Tanım 2.2.5 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A = \langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. $c(\alpha, \beta)$ sezgisel fuzzy noktası için

$$\alpha > \gamma_A(c) \; veya \; \beta < \mu_A(c)$$

oluyorsa $c(\alpha, \beta)$ **ile** A **çakışıyordur** denir ve $c(\alpha, \beta) q A$ ile gösterilir. Eğer,

$$\alpha \leq \gamma_A(c) \text{ ve } \beta \geq \mu_A(c)$$

oluyorsa $c(\alpha, \beta)$ **ile** A **çakışmıyordur** veya **ayrıktır** denir.

Tanım 2.2.6 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A = \langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle$ ve $B = \langle x, \mu_B, \gamma_B \rangle$ sezgisel fuzzy kümeleri verilsin.

$$\exists \; x \in X \text{ için } \mu_A(x) > \gamma_B(x) \; veya \; \gamma_A(x) < \mu_B(x)$$

oluyorsa A ile B **çakışıyordur** denir ve AqB ile gösterilir.

Örnek 2.2.1 $X = \{d, e, f\}$ olsun. $A = \langle x, (\frac{d}{0.4}, \frac{e}{0.3}, \frac{f}{0.6}), (\frac{d}{0.6}, \frac{e}{0.4}, \frac{f}{0.3}) \rangle$ sezgisel fuzzy

kümesi verilsin. $c = e$ noktası için

$$e(0.5, 0.2)qA,\ e(0.5, 0.4)qA,\ e(0.1, 0.2)qA$$

dır. Fakat, $e(0.1, 0.4)$ ile A çakışmıyordur.

Tanım 2.2.7 $X \neq 0_\sim$ olsun. A ve B sezgisel fuzzy kümeleri verilsin.

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \gamma_B(x) \ ve \ \gamma_A(x) \geq \mu_B(x)$$

oluyorsa, A ile B **ayrıktır** denir.

Sonuç 2.2.1 $X \neq 0_\sim$ ve $Y \neq 0_\sim$ olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin.
a) $c(\alpha, \beta)$, X de sezgisel fuzzy nokta olsun. $c(\alpha, \beta)$ nın, f altındaki görüntüsü

$$f(c(\alpha, \beta)) = \langle y, f(c)_\alpha, 1 - f(c)_{1-\beta} \rangle$$

şeklinde sezgisel fuzzy noktadır.
b) $c(\beta)$, X de kaybolan sezgisel fuzzy nokta olsun. $c(\beta)$ nın, f altındaki görüntüsü

$$f(c(\beta)) = \langle y, 0, 1 - f(c)_{1-\beta} \rangle$$

şeklinde bir sezgisel fuzzy noktadır.

Teorem 2.2.1 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle : x \in X\}$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin.

$$c(\alpha, \beta) \in A \Longleftrightarrow c_\alpha \in \mu_A \ ve \ c_{1-\beta} \in 1 - \gamma_A$$

İspat: $c(\alpha, \beta) \in A$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \alpha \quad &\leq \quad \mu_A(c) \ ve \ \beta \geq \gamma_A(c) \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \leq \mu_A(c) \ ve \ 1 - \beta \leq 1 - \gamma_A(c) \\ &\Longleftrightarrow \quad c_\alpha \in \mu_A \ ve \ c_{1-\beta} \in 1 - \gamma_A \end{aligned}$$

Teorem 2.2.2 $X \neq 0_\sim$ olsun. $A = \langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle$ ve $B = \langle x, \mu_B, \gamma_B \rangle$ sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda,

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall c(\alpha, \beta) \in A \text{ için } c(\alpha, \beta) \in B$$

dır.

İspat: $A \subseteq B$ ve $c(\alpha, \beta) \in A$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \; ve \; \beta \geq \gamma_A(x) \geq \gamma_B(x)$$

dir. Buradan, $c(\alpha, \beta) \in B$ elde edilir.

Karşıt olarak,

$$\begin{aligned}
\forall c(\alpha, \beta) \quad &\in \quad A \text{ için } c(\alpha, \beta) \in B \; olsun. \\
c(\alpha, \beta) \quad &\in \quad A \Longrightarrow \alpha \leq \mu_A(c) \text{ ve } \beta \geq \gamma_A(c) \text{ dir.} \\
\alpha \quad &= \quad \mu_A(c) \text{ ve } \beta = \gamma_A(c) \text{ alınırsa} \\
&\Longrightarrow \quad \alpha = \mu_A(c) \leq \mu_B(c) \text{ ve } \beta = \gamma_A(c) \geq \gamma_B(c) \\
&\Longrightarrow \quad \langle c, \mu_A(c), \gamma_A(c) \rangle \subseteq \langle c, \mu_B(c), \gamma_B(c) \rangle \\
&\Longrightarrow \quad A \subseteq B
\end{aligned}$$

dır.

Önerme 2.2.1 $X \neq 0_\sim$ ve $\{A_i : i \in J\}$ ailesi sezgisel fuzzy kümelerin bir ailesi olsun.

a) J sonlu indis kümesi olmak üzere,
$c(\alpha, \beta) \in \underset{i \in J}{\cap} A_i \Leftrightarrow \forall i \in J$ için $c(\alpha, \beta) \in A_i$
b) $\forall i \in J$ için $c(\beta) \in A_i \Rightarrow c(\beta) \in \underset{i \in J}{\cap} A_i$
c) $\exists \; i \in J$ için $c(\alpha, \beta) \in A_i \Rightarrow c(\alpha, \beta) \in \underset{i \in J}{\cup} A_i$
d) $\exists \; i \in J$ için $c(\beta) \in A_i \Rightarrow c(\beta) \in \underset{i \in J}{\cup} A_i$

dır.

Not 2.2.1 $c(\alpha,\beta) \in \underset{i\in J}{\cup} A_i$ iken $\exists\ i \in J$ için $c(\alpha,\beta) \in A_i$ ifadesi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.2.2 $X = \{a, b\}$ olsun.

$$A_1 = \{\langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5})\rangle\} \text{ ve } A_2 = \{\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.3})\rangle\}$$

sezgisel fuzzy kümeleri için

$$A_1 \cup A_2 = \{\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.3})\rangle\}$$

dir.
$c = a(0.35, 0.45)$ noktası için $c \in A_1 \cup A_2$ dir. Fakat $c \notin \mathrm{A}_1$ ve $c \notin \mathrm{A}_2$ dir.

Önerme 2.2.2 $X \neq 0_\sim$ ve $\{A_i : i \in J\}$ ailesi sezgisel fuzzy kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda,
a) $c(\alpha,\beta)q \underset{i\in J}{\cup} A_i \Leftrightarrow \exists i \in J$ var $c(\alpha,\beta)qA_i$
b) $c(\alpha,\beta)q \underset{i\in J}{\cap} A_i \Leftrightarrow \forall i \in J$ için $c(\alpha,\beta)qA_i$
dır.

Teorem 2.2.3 $X \neq 0_\sim$ ve $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle : x \in X\}$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. A kümesi sezgisel fuzzy noktaların birleşimi şeklinde yazılabilir. Yani,

$$A = \cup\{c_{(\alpha,\beta)} \mid c_{(\alpha,\beta)} \in A\}$$

dır (Lee 2000).

İspat :

$$\begin{aligned} c(\alpha,\beta) &= \langle x, c_\alpha(x), 1-c_{1-\beta}(x)\rangle \\ &= \cup\{c_{(\alpha,\beta)} \mid c(\alpha,\beta)\in A\} \\ &= \{\langle x, \vee\{c_\alpha : c_\alpha \in \mu_A\}, \wedge\{1-c_{1-\beta} : c_{1-\beta}\in 1-\gamma_A\}\rangle : x\in X\}. \end{aligned}$$

Buradan,

$$\vee\{c_\alpha \mid c_\alpha \in \mu_A\} = \mu_A ve \vee \{c_{1-\beta} : c_{1-\beta}\in 1-\gamma_A\} = 1-\gamma_A$$

dır.Çünkü,

$$\gamma_A = 1-\vee\{c_{1-\beta} : c_{1-\beta}\in 1-\gamma_A\} = \wedge\{1-c_{1-\beta} : c_{1-\beta}\in 1-\gamma_A\}$$

dır. Sonuç olarak, $\cup\{c_{(\alpha,\beta)} \mid c_{(\alpha,\beta)}\in A\} = A$ dır.

3. SEZGİSEL FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

Bu bölümde, sezgisel fuzzy topolojik uzay tanımlanarak, bu uzaylarda süreklilik çeşitleri ve bağlantılılık gibi kavramlar incelenecektir.

3.1 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzay

Tanım 3.1.1 $X \neq 0_\sim$ ve X deki sezgisel fuzzy kümelerin bir τ ailesi verilsin.
τ_1) $0_\sim, 1_\sim \in \tau$
τ_2) $\forall G_1, G_2 \in \tau$ için $G_1 \cap G_2 \in \tau$
τ_3) $\{G_i : i \in J\} \subseteq \tau$ için $\cup G_i \in \tau$
ise τ ya, **sezgisel fuzzy topoloji** denir. (X, τ) ikilisine ise sezgisel fuzzy topolojik uzay denir. τ nun elemanlarına **sezgisel fuzzy açık küme** denir. Sezgisel fuzzy açık kümelerin tümleyenine de **sezgisel fuzzy kapalı küme** denir (Çoker 1997).

Örnek 3.1.1 $\tau_0 = \{0, 1\} \cup \{v_i : i \in I\}$ olmak üzere, (X, τ_0) fuzzy topolojik uzayı verilsin. τ_0 dan yararlanarak,

$$\tau^1 = \{0_\sim, 1_\sim\} \cup \{\langle x, v_i, 0\rangle : i \in J\} \text{ ve } \tau^2 = \{0_\sim, 1_\sim\} \cup \{\langle x, 0, 1 - v_i\rangle : i \in J\}$$

sezgisel fuzzy topolojileri elde edilir.

Önerme 3.1.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin.

$$\tau_{0,1} = \{[\ \ ]G : G \in \tau\} \text{ ve } \tau_{0,2} = \{\langle\ \ \rangle G : G \in \tau\}$$

aileleri de sezgisel fuzzy topolojidir (Çoker 1997).

Sonuç 3.1.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin.
a) $\tau_1 = \{\mu_G : G \in \tau\}$ ailesi fuzzy topolojik uzaydır.
b) $\tau_2^* = \{\gamma_G : G \in \tau\}$ kümesi, $\tau_2 = \{1 - \gamma_G : G \in \tau\}$ fuzzy topolojik uzayındaki kapalılar ailesidir.

Tanım 3.1.2 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı ve $A=\langle x,\mu_A,\gamma_A\rangle$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. A kümesinin **fuzzy içi** ve **fuzzy kapanışı**,

$$A^\circ=\cup\{G:G\in\tau\ ve\ G\subseteq A\}\text{ ve }\bar{A}=\cap\{K:K^c\in\tau\ ve\ A\subseteq K\}$$

şeklinde tanımlanan kümelerdir.

Tanım 3.1.3 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin.
a) X deki sezgisel fuzzy açıkların bir ailesi $\{\langle x,\mu_{G_i},\gamma_{G_i}\rangle : i\in J\}$ olmak üzere $\cup\{\langle x,\mu_{G_i},\gamma_{G_i}\rangle : i\in J\}=1_\sim$ ise, bu açıkların ailesine X in **fuzzy açık örtüsü** denir.
b) $\{\langle x,\mu_{K_i},\gamma_{K_i}\rangle : i\in J\}$ ailesi X deki sezgisel fuzzy kapalılar ailesi olsun. Bu aile **sonlu arakesit özelliğini sağlar** $\Leftrightarrow$ Bu ailenin boştan farklı her alt ailesi boştan farklı sonlu kesişime sahiptir.

Tanım 3.1.4 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. X in her fuzzy açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahip ise, bu uzaya sezgisel **fuzzy kompakt uzay** denir.

Önerme 3.1.2 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı kompakttır $\Leftrightarrow$ $(X,\tau_{0,1})$ uzayı kompakttır.

İspat: (X,τ) sezgisel fuzzy kompakt uzay olsun. $\{[\quad]G_j : j\in J\}$ ailesi $(X,\tau_{0,1})$ uzayında X in açık örtüsü olsun.

$$\begin{aligned}
\cup[\ ]G_j &= 1_\sim \Rightarrow \cup\{\langle x,\mu_{G_j},1-\mu_{G_j}\rangle : j\in J\}=1_\sim\\
&\Rightarrow \{\langle x,\vee\mu_{G_j},\wedge 1-\mu_{G_j}\rangle : j\in J\}=1_\sim\\
&\Rightarrow \vee\mu_{G_j}=1 \text{ ve } \wedge 1-\mu_{G_j}=0 \text{ dır.}\\
\gamma_{G_j} &\leq 1-\mu_{G_j} \text{ özelliği kullanılarak,}\\
\wedge\gamma_{G_j} &\leq 1-\vee\mu_{G_j}
\end{aligned}$$

dır. Buradan, $\wedge\gamma_{G_j}=0$ elde edilir.

(X,τ) kompakt olduğundan, $\exists\ G_1, G_2, ..., G_n \ni \cup_{i=1}^{n} G_i = 1_\sim$ dir. Buradan,

$$\vee_{i=1}^{n} \mu_{G_i} = 1 \text{ ve } \wedge_{i=1}^{n} 1 - \mu_{G_i} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, $(X,\tau_{0,1})$ kompakt bir uzaydır.

Karşıt olarak, $(X,\tau_{0,1})$ kompakt olsun. (X,τ) uzayında $\{G_j : j \in K\}$ ailesi, X in bir açık örtüsü olsun.

$$\cup G_j = 1_\sim \Rightarrow \ \vee\, \mu_{G_j} = 1 \text{ ve } \wedge\, 1 - \mu_{G_j} = 0 \text{ dır.}$$

$(X,\tau_{0,1})$ kompakt olduğundan $\exists\ G_1, G_2, ..., G_n \ni \cup_{i=1}^{i=n} [\ \ ] G_i = 1_\sim$ dir.

$$\begin{aligned}
\vee_{i=1}^{i=n} \mu_{G_i} &= 1 \text{ ve } \wedge_{i=1}^{i=n} 1 - \mu_{G_i} = 0 \text{ dır.} \\
\mu_{G_i} &\leq 1 - \gamma_{G_i} \text{ olduğundan, } 1 = \vee_{i=1}^{i=n} \mu_{G_i} \leq 1 - \wedge_{i=1}^{i=n} \gamma_{G_i} \text{ dır.} \\
&\Rightarrow \wedge_{i=1}^{i=n} \gamma_{G_i} = 0 \\
&\Rightarrow \cup_{i=1}^{i=n} G_i = 1_\sim
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, (X,τ) fuzzy kompakttır.

Sonuç 3.1.2 $(X,\tau_{0,2})$ uzayı sezgisel fuzzy kompakt uzaydır.

Önerme 3.1.3 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve A, X de sezgisel fuzzy küme olsun. Bu durumda,
a) $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$
b) $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$
dır.

İspat:
a)$A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle : x \in X\}$ olsun. $\{\langle x, \mu_{G_i}(x), \gamma_{G_i}(x)\rangle : i \in J\}$ ailesi, A nın

kapsadığı açıklar ailesi olmak üzere,

$$A^\circ = \{\langle x, \vee\mu_{G_i}(x), \wedge\gamma_{G_i}(x)\rangle : i \in J\}$$

dir.

$$(A^\circ)^c = \{\langle x, \wedge\gamma_{G_i}(x), \vee\mu_{G_i}(x)\rangle : i \in J\}$$

ailesi A^c yi kapsayan kapalılar ailesi olup,

$$\overline{(A^c)} = \langle x, \wedge\gamma_{G_i}(x), \vee\mu_{G_i}(x)\rangle$$

dir.

Önerme 3.1.4 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olsun. A ve B, X de sezgisel fuzzy küme olsun. Bu durumda:

a) $A^\circ \subseteq A$, $A \subseteq \overline{A}$

b) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

c) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

d) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ ve $\overline{(\overline{A})} = (\overline{A})$

e) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

f) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

g) $1^\circ_\sim = 1_\sim$ ve $\overline{0}_\sim = 0_\sim$

dır.

Önerme 3.1.5 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle : x \in X\}$, X de sezgisel fuzzy küme olsun. Bu durumda,

a) $A^\circ \subseteq \langle x, (\mu_A)^\circ_{\tau_1}, \overline{(\gamma_A)}_{\tau_2}\rangle \subseteq A$

b) $A \subseteq \langle x, \overline{(\mu_A)}_{\tau_1}, (\gamma_A)^\circ_{\tau_2}\rangle \subseteq \overline{A}$

dır.

İspat:

a) A nın kapsadığı açıkların ailesi, $\{\langle x, \mu_{G_i}(x), \gamma_{G_i}(x)\rangle : i \in J\}$ olsun. Bu durumda,

$$A^\circ = \{\langle x, \vee\mu_{G_i}(x), \wedge\gamma_{G_i}(x)\rangle : i \in J\}$$

dır. $\forall i \in J$ için $\mu_{G_i} \leq \mu_A$ ve $\forall i \in J$ için $\mu_{G_i} \in \tau_1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \vee\{\mu_{G_i} : i \in J\} \leq (\mu_A)^\circ_{\tau_1} \text{ ve } \overline{(\gamma_A)}_{\tau_2} \leq \wedge\{\gamma_{G_i}(x) : i \in J\} \\ &\Rightarrow \quad A^\circ \subseteq \langle x, (\mu_A)^\circ_{\tau_1}, \overline{(\gamma_A)}_{\tau_2}\rangle \subseteq A \end{aligned}$$

b) Benzer şekilde gösterilebilir.

3.2 Sezgisel Fuzzy Komşuluklar ve $Q-$Komşuluklar Ailesi

Tanım 3.2.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. $x_{(\alpha,\beta)}$, X de sezgisel fuzzy nokta olsun.

$$\exists B \subseteq X \text{ sezgisel fuzzy açık kümesi var ve } x_{(\alpha,\beta)} \in B \subseteq A$$

ise, $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi $x_{(\alpha,\beta)}$ nın **sezgisel fuzzy komşuluğudur**, denir. $x_{(\alpha,\beta)}$ sezgisel fuzzy noktasının $N-$komşuluklarının ailesi, $\mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ ile gösterilir (Gürçay ve Çoker 1997).

Önerme 3.2.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı ve $x_{(\alpha,\beta)}$, X de sezgisel fuzzy nokta olsun. $\mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ komşuluklar ailesi aşağıdaki özellikleri sağlar:
$N_1 : N \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ ise $x_{(\alpha,\beta)} \in N$
$N_2 : N \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ ve $N \subseteq M$ ise $M \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$
$N_3 : N_1, N_2 \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ ise $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$
$N_4 : N \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ için $M \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ var $\ni M \subseteq N$ ve $\forall\ y(\lambda,\eta) \in M$ için $N \in \mathcal{N}(y(\lambda,\eta))$
dır (Gürçay ve Çoker 1997).

Teorem 3.2.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Sezgisel fuzzy kümenin açık olması için gerek ve yeter şart içindeki her noktanın komşuluğu olmasıdır.

İspat: $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy açık kümesi verilsin. $x_{(\alpha,\beta)} \in A$ olsun. $x_{(\alpha,\beta)} \in A \subseteq A$ olduğundan A, $x_{(\alpha,\beta)}$ nın sezgisel fuzzy komşuluğudur.
Karşıt olarak, $x_{(\alpha,\beta)} \in A$ ve A, sezgisel fuzzy komşuluk olsun. Bu durumda,

$$\exists B_{x_{(\alpha,\beta)}} \in \tau \ \ni x_{(\alpha,\beta)} \in B_{x_{(\alpha,\beta)}} \subseteq A$$

$$A = \cup\{x_{(\alpha,\beta)} : x_{(\alpha,\beta)} \in A\} \subseteq \cup\{B_{x_{(\alpha,\beta)}} : x_{(\alpha,\beta)} \in A\} \subseteq A$$

$$A = \cup\{B_{x_{(\alpha,\beta)}} : x_{(\alpha,\beta)} \in A\}$$

dir. Dolayısıyla A, sezgisel fuzzy açık kümedir.

Tanım 3.2.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $x_{(\alpha,\beta)}$, X de sezgisel fuzzy nokta olsun.

$$\exists A \subseteq X \text{ sezgisel fuzzy açık kümesi var } \ni x_{(\alpha,\beta)} q A \text{ ve } A \subseteq N$$

ise, N ye $x_{(\alpha,\beta)}$ nın Q-**komşuluğu** denir (Lupianez 2005).

Teorem 3.2.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. $x_{(\alpha,\beta)}$, X de sezgisel fuzzy nokta ve $\mathcal{U}_Q(x)$, $x_{(\alpha,\beta)}$ nın tüm Q-komşuluklarının ailesi olsun. Bu durumda,
$\mathbf{Q}_1 : \forall\ U \in \mathcal{U}_Q(x)$ için xqU
$\mathbf{Q}_2 : U_1, U_2 \in \mathcal{U}_Q(x)$ için $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_Q(x)$
$\mathbf{Q}_3 : U \in \mathcal{U}_Q(x)$ ve $U \subseteq M$ ise $M \in \mathcal{U}_Q(x)$
$\mathbf{Q}_4 : \forall\ U \in \mathcal{U}_Q(x)$ için $\exists\ M \in \mathcal{U}_Q(x) \ni M \subseteq U$ ve yqM için $U \in \mathcal{U}_Q(y)$
dir (Lupianez 2005).

İspat:
$\mathbf{Q}_1 : U \in \mathcal{U}_Q(x) \Rightarrow \exists G \in \tau \ni xqG$ ve $G \subseteq U \Rightarrow xqU$ elde edilir.
$\mathbf{Q}_2 : U_1, U_2 \in \mathcal{U}_Q(x)$ olsun.

$$\begin{aligned} U_1 &\in \mathcal{U}_Q(x) \Rightarrow A_1 \in \tau \text{ var } \ni xqA_1 \text{ ve } A_1 \subseteq U_1 \\ U_2 &\in \mathcal{U}_Q(x) \Rightarrow A_2 \in \tau \text{ var } \ni xqA_2 \text{ ve } A_2 \subseteq U_2 \\ &\Rightarrow xq(A_1 \cap A_2) \text{ ve } A_1 \cap A_2 \subseteq U_1 \cap U_2 \\ &\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_Q(x) \end{aligned}$$

elde edilir.
$\mathbf{Q}_3 : U \in \mathcal{U}_Q(x)$ ve $U \subseteq M$ olsun. $\exists\ A \in \tau \ni xqA$ ve $A \subseteq U \subseteq M$ dir. Böylece, $M \in \mathcal{U}_Q(x)$ elde edilir.
$\mathbf{Q}_4 : U \in \mathcal{U}_Q(x)$ olsun. $\exists\ A \in \tau \ni xqA$ ve $A \subseteq U$ dur. A ile çakışan her y sezgisel fuzzy noktası için $A \in \mathcal{U}_Q(y)$ *ve* $U \in \mathcal{U}_Q(y)$ dir.

Önerme 3.2.2 $X \neq 0_\sim$ olsun. $\tau = \{U \subseteq X : pqU$ olan, $\forall\ p$ sezgisel fuzzy noktası

için $U \in \mathcal{U}_Q(p)$ } ailesi sezgisel fuzzy topolojidir.

İspat:

$\boldsymbol{\tau}_1$) $0_\sim, 1_\sim \in \tau$

$\boldsymbol{\tau}_2$) $U_1, U_2 \in \tau$ ve $pq(U_1 \cap U_2)$ olsun. $pq(\ U_1 \cap U_2)$ ve $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_Q(p)$ olduğundan, $U_1 \cap U_2 \in \tau$ elde edilir.

$\boldsymbol{\tau}_3$) $\{U_j\}_{j\in J} \in \tau$ ve $pq \underset{j\in J}{\cup} U_j$ olsun. $p = c(\alpha, \beta)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} pq \underset{j\in J}{\cup} U_j &\Rightarrow \alpha > \underset{j\in J}{\wedge}\gamma_{U_j}(c) \text{ veya } \beta < \underset{j\in J}{\vee}\mu_{U_j}(c) \\ &\Rightarrow \exists\ j_0 \in J \text{ için } \alpha > \gamma_{U_{j_0}}(c) \text{ veya } \beta < \mu_{U_{j_0}}(c) \text{ dir.} \\ &\Rightarrow U_{j_0} \subseteq \underset{j\in J}{\cup} U_j \\ &\Rightarrow \underset{j\in J}{\cup} U_j \in \mathcal{U}_Q(p). \end{aligned}$$

3.3 Sezgisel Fuzzy Süreklilik, Açık ve Kapalı Dönüşümler

Tanım 3.3.1 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olmak üzere,

$$\forall\ V \in \mathcal{U}(f(x_{(\alpha,\beta)})) \text{ için } \exists\ U \in \mathcal{U}(x_{(\alpha,\beta)}) \text{ var } \ni\ f(U) \subseteq V$$

ise, f fonksiyonu $x_{(\alpha,\beta)}$ sezgisel fuzzy noktasında **süreklidir** denir (Gürçay ve Çoker 1997).

Önerme 3.3.1 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları verilsin.

$$f \text{ süreklidir} \Leftrightarrow \forall G \in \Phi \text{ için } f^{-1}(G) \in \tau$$

dır (Çoker 1997).

Önerme 3.3.2 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları verilsin.
$f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu sezgisel fuzzy süreklidir$\Leftrightarrow$ Φ deki her sezgisel fuzzy kapalı kümenin ters görüntüsü X de sezgisel fuzzy kapalı kümedir.

İspat: $\Rightarrow$) $K = \langle y, \mu_K(y), \gamma_K(y)\rangle$, (Y, Φ) uzayında sezgisel fuzzy kapalı küme olsun.

$$K^c = \langle y, \gamma_K(y), \mu_K(y)\rangle$$

(Y, Φ) de sezgisel fuzzy açık kümedir. f sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} f^{-1}(K^c) &= \langle x, f^{-1}(\gamma_K(y)), f^{-1}(\mu_K(y)\rangle \in \tau \\ f^{-1}(K^c) &= (f^{-1}(K))^c = [\langle x, f^{-1}(\mu_K)(x), f^{-1}(\gamma_K)(x)\rangle]^c \in \tau \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, $f^{-1}(K)$ kümesi (X, τ) da kapalıdır.
$\Leftarrow$) $G = \langle y, \mu_G(y), \gamma_G(y)\rangle \in \Phi$ olsun. O halde $G^c = \langle y, \gamma_G(y), \mu_G(y)\rangle$, (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayında kapalıdır. Bu durumda, $f^{-1}(G^c) = (\langle x, f^{-1}(\mu_G(x)), f^{-1}(\gamma_G(x))\rangle)^c$ kümesi (X, τ) da sezgisel fuzzy kapalı kümedir. Buradan, $f^{-1}(G) \in \tau$ elde edilir. Sonuç olarak, f sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 3.3.1 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:
1. f sürekli fonksiyondur
2. $\forall A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
3. $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$
4. $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ$
(Lee 2000).

İspat:
1) $\Rightarrow$ **2**) f sürekli fonksiyon olsun. $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. $\overline{f(A)}$, (Y, Φ) de sezgisel fuzzy kapalı küme olduğundan $f^{-1}(\overline{f(A)})$, (X, τ) da sezgisel fuzzy kapalı kümedir. O halde,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(f(A))} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)}) \\ &\Rightarrow \quad f(\overline{A}) \subseteq (\overline{f(A)}) \end{aligned}$$

dır.

2) $\Rightarrow$ **3**) $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(B)$, X de sezgisel fuzzy kümedir.
2). den, $f(\overline{f^{-1}(B))} \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$ dir. Buradan, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ elde edilir.
3)$\Rightarrow$ **4**) $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $B^c \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümedir. O halde 3) den,

$$\begin{aligned} \overline{f^{-1}(B^c)} &\subseteq f^{-1}(\overline{B^c}) \\ &\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)^c} \subseteq f^{-1}(\overline{B^c}) \\ &\Rightarrow (f^{-1}(B)^\circ)^c \subseteq f^{-1}(B^\circ)^c \\ &\Rightarrow f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ \end{aligned}$$

elde edilir.
4)$\Rightarrow$ **1**) $\forall\, G \in \Phi$ için 4) den $f^{-1}(G^\circ) \subseteq f^{-1}(G)^\circ$ dir. $G \in \Phi$ olduğundan $G^\circ = G$ dir. O halde $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(G)^\circ$ dir. $f^{-1}(G)^\circ \subseteq f^{-1}(G)$ her zaman doğru olduğundan $f^{-1}(G) = f^{-1}(G)^\circ$ dir. Bu durumda $f^{-1}(G) \in \tau$ ve f fuzzy sürekli fonksiyondur.

Not 3.3.1 $\forall A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi için $f(A)^\circ \subseteq f(A^\circ)$ şartı sağlanmayabilir.

Örnek 3.3.1 $X = \{x, y\}$ ve $A, B \subseteq X$, sezgisel fuzzy kümeleri verilsin.

$A(x) = (0.3, 0.4)$ $A(y) = (0.3, 0.4)$ ve $B(x) = (0.3, 0.4), B(y) = (0, 1)$ olarak tanımlansın. $\tau_1 = \{0_\sim, 1_\sim, A\}$, $\tau_1 = \{0_\sim, 1_\sim, B\}$ ve $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ fonksiyonu $f(x) = x$ ve $f(y) = x$ için

$$f^{-1}(0_\sim) = 0_\sim,\ f^{-1}(1_\sim) = 1_\sim,\ f^{-1}(B) = A$$

olduğundan, f sürekli fonksiyondur. $f(B)^\circ = B^\circ = B$ ve $f(B^\circ) = f(0_\sim) = 0_\sim$ dir. Fakat, $f(B)^\circ \subsetneq f(B^\circ)$ dir.

Teorem 3.3.2 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ birebir, örten fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:
1) $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ$

2) $\forall A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi için $f(A)^\circ \subseteq f(A^\circ)$.

İspat:

1) $\Rightarrow$ **2)** $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi için $f(A)$, Y de sezgisel fuzzy kümedir. $f^{-1}(f(A)^\circ) \subseteq f^{-1}(f(A))^\circ = A^\circ$ ve buradan $f(A)^\circ \subseteq f(A^\circ)$ dır.

2) $\Rightarrow$ **1)** $B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(B)$, X de sezgisel fuzzy kümedir. O halde 2) den $f(f^{-1}(B))^\circ \subseteq f(f^{-1}(B)^\circ)$ ve $B^\circ \subseteq f(f^{-1}(B)^\circ)$ dir. f altında her iki tarafında ters görüntüsü alınırsa, $f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ$ elde edilir.

Teorem 3.3.3 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1) f açık fonksiyondur

2) $\forall A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi için $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$

3) $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(B)^\circ \subseteq f^{-1}(B^\circ)$.

İspat:

1) $\Rightarrow$ **2)** f açık dönüşüm olsun. $f(A^\circ) = f(A^\circ)^\circ \subseteq f(A)^\circ$ dir.

2) $\Rightarrow$ **3)** $B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(B)$ kümesi X de sezgisel fuzzy kümedir. Buradan,

$$f((f^{-1}(B)^\circ) \subseteq f(f^{-1}(B))^\circ \subseteq B^\circ \text{ ve } f^{-1}(B)^\circ \subseteq f^{-1}(B^\circ)$$

elde edilir.

3) $\Rightarrow$ **1)** $\forall G \in \tau$ için 3) den, $f^{-1}(G)^\circ \subseteq f^{-1}(G^\circ)$ dir.

$$\begin{aligned} G^\circ &\subseteq f^{-1}f(G))^\circ \subseteq f^{-1}(f(G)^\circ) \\ &\Rightarrow G \subseteq f^{-1}(f(G)^\circ) \\ &\Rightarrow f(G) \subseteq f(G)^\circ \end{aligned}$$

elde edilir. $f(G)^\circ \subseteq f(G)$ ifadesi her zaman doğru olduğundan $f(G) = f(G)^\circ$ dir. O halde $f(G) \in \Phi$ dir. f açık fonksiyondur.

Teorem 3.3.4 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\Phi)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1) f kapalı fonksiyondur

2) $\forall A\subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi için $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$.

İspat:

1) $\Rightarrow$ **2)** f kapalı dönüşüm olsun. Bu durumda $f(\overline{A})$ kapalıdır. $f(A)\subseteq\overline{f(\overline{A})}=f(\overline{A})\Rightarrow\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$ elde edilir.

2) $\Rightarrow$ **1)** $A\subseteq X$ sezgisel fuzzy kapalı kümesi verilsin. $\overline{f(A)}=f(A)$ olduğunu göstereceğiz. 2). den $\overline{f(A)}\subseteq f(A)$ dır. Her zaman $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$ sağlanır. Dolayısıyla, $\overline{f(A)}=f(A)$ elde edilir. O halde f kapalı fonksiyondur.

Not 3.3.2 $\forall B\subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(\overline{B})\subseteq\overline{f^{-1}(B)}$ şartı sağlanmayabilir.

Örnek 3.3.2 $X=\{x,y\}$ ve A,B,C kümeleri,

$$\begin{aligned}A(x) &= (0.3,0.4), A(y)=(0.3,0.4)\\ B(x) &= (0.3,0.4), B(y)=(0,1)\\ C(x) &= (1,0), C(y)=(0,1)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan sezgisel fuzzy kümeler olsun. $\tau_1=\{0_\sim,1_\sim,A^c\}$ ve $\tau_2=\{0_\sim,1_\sim,B^c,C^c\}$ sezgisel fuzzy topolojik uzayları verilsin. $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ $f(x)=x$, $f(y)=x$ sabit fonksiyonu için,

$$f(0_\sim)=0_\sim,\ f(1_\sim)=C,\ f(A)=B$$

olduğundan, f kapalı fonksiyondur. $f^{-1}(\overline{A})=f^{-1}(1_\sim)=1_\sim$ ve $\overline{f^{-1}(A)}=\overline{A}=A$ dır. Fakat, $f^{-1}(\overline{A})\subsetneq\overline{f^{-1}(A)}$ dır.

Teorem 3.3.5 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f:(X,\tau)\to$

(Y, Φ) birebir ve örten fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:
1) $\forall A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi için $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$
2) $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy kümesi için $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$
dir.

Teorem 3.3.6 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu $x_{(\alpha,\beta)}$ sezgisel fuzzy noktasında süreklidir $\Leftrightarrow \forall\ M \in \mathcal{N}(f(x_{(\alpha,\beta)})$ için $\exists\ N \in \mathcal{N}(x_{(\alpha,\beta)})$ var $\ni f(N) \subseteq M$ dir (Gürçay ve Çoker 1997).

İspat: $M \in \mathcal{N}(f(x_{(\alpha,\beta)})$ olsun. Bu durumda,

$\Rightarrow \quad \exists\ G \in \Phi$ var $f(x_{(\alpha,\beta)}) \in G \subseteq M$

$\Rightarrow \quad x_{(\alpha,\beta)} \in f^{-1}(f(x_{(\alpha,\beta)})) \subseteq f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(M)$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(G) = H$ denilirse; $x_{(\alpha,\beta)} \in H \subseteq f^{-1}(M)$ ve $f(H) \subseteq M$ elde edilir.

Karşıt olarak, $B \in \Phi$ sezgisel fuzzy açık kümesi verilsin. $x_{(\alpha,\beta)} \in f^{-1}(B)$ için $f(x_{(\alpha,\beta)}) \in B$ ve B açık olduğundan B, $f(x_{(\alpha,\beta)})$ nın bir komşuluğudur. Hipotezden, $x_{(\alpha,\beta)}$ nın bir A komşuluğu için $f(A) \subseteq B$ dir. A, $x_{(\alpha,\beta)}$ nın komşuluğu olduğundan $\exists\ C \in \tau \ni x_{(\alpha,\beta)} \in C \subseteq A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B)$ dir. Buradan $f^{-1}(B)$, $x_{(\alpha,\beta)}$ nın komşuluğudur. Böylece $f^{-1}(B)$ sezgisel fuzzy açık kümedir. O halde f süreklidir.

3.4 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzayların Alt Uzayları

Tanım 3.4.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. $\tau_A = \{A \cap T : T \in \tau\}$ ailesine τ tarafından A ya indirgenen fuzzy $A-$topoloji denir. τ_A nın elemanlarına $A-$**açık kümeler** denir (Gürçay 1996).

Örnek 3.4.1 X deki $\tau = \{c_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in I, \alpha + \beta \leq 1\}$ topolojisine göre $A =$

$\langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle \subseteq X$ kümesi üzerine indirgenen sezgisel fuzzy topoloji,

$$\tau_A = \{\langle x, \min(\mu_A(x), \alpha), \max(\gamma_A(x), \beta)\rangle : \alpha, \beta \in I, \alpha + \beta \leq 1\}$$

dir.

X kümesi üzerinde Chang tarafından tanımlanan $\tau_1 = \{\mu_G : G \in \tau\}$ ve $\tau_2 = \{1 - \gamma_G : G \in \tau\}$ fuzzy topolojik uzayları üzerine indirgenen μ_A ve $1 - \gamma_A$ topolojileri

$$\begin{aligned} \tau_{1,\mu_A} &= \{\mu_G \wedge \mu_A : G \in \tau\} \\ \tau_{2,1-\gamma_A} &= \{(1 - \gamma_A) \wedge (1 - \gamma_G) : G \in \tau\} = \{1 - (\gamma_A \vee \gamma_G) : G \in \tau\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 3.4.2 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle\} \\ G_2 &= \{\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.3})\rangle\} \\ G_3 &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.3})\rangle\} \\ G_4 &= \{\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle\} \end{aligned}$$

kümeleri verilsin. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2, G_3, G_4\}$ ailesi sezgisel fuzzy topolojidir.

$$A = \{\langle x, (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.7}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.1})\rangle\}$$

kümesine indirgenen topoloji ise,

$$\begin{aligned} \tau_A = \{&0_\sim, A, \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle, \\ &\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.3})\rangle, \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.4}), \\ &(\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.3})\rangle, \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle\} \end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.4.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı ve K sezgisel fuzzy kümesi verilsin. Eğer $K = A$ veya $A - K \in \tau_A$ ise K ya sezgisel **fuzzy A-kapalı küme** denir. $A-$kapalı kümeler $\tau_A^{\mathcal{K}}$ ile gösterilmektedir (Gürçay 1996).

Önerme 3.4.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. $\tau_A^{\mathcal{K}}$ ailesi
$k_1)$ $0_\sim, A \in \tau_A^{\mathcal{K}}$
$k_2)$ $K_1, K_2 \in \tau_A^{\mathcal{K}}$ ise $K_1 \cap K_2 \in \tau_A^{\mathcal{K}}$ dır.
$k_3)$ $\{K_i : i \in J\} \subseteq \tau_A^{\mathcal{K}}$ ise $\cap K_i \in \tau_A^{\mathcal{K}}$
şartlarını sağlar (Gürçay 1996).
$\tau_1 = \{\mu_G : G \in \tau\}$ ve $\tau_2 = \{1 - \gamma_G : G \in \tau\}$ fuzzy topolojileri göz önüne alınırsa μ_A-kapalı ve $(1 - \gamma_A)-$kapalı kümeler sırasıyla,

$$\begin{aligned} \tau^*_{1,\mu_A} &= \{\mu_A - \mu_A \wedge \mu_G : G \in \tau\} \text{ ve} \\ \tau^*_{2,1-\gamma_A} &= \{(1-\gamma_A) - ((1-\gamma_A) \wedge (1-\gamma_G)) : G \in \tau\} = \{(\gamma_A \vee \gamma_G) - \gamma_A : G \in \tau\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 3.4.3 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. A sezgisel fuzzy kümesine indirgenen sezgisel fuzzy topoloji τ_A olmak üzere;
a) $(\ )^\circ_A : \mathcal{A}_A \to \mathcal{A}_A$, $H \in \mathcal{A}_A$ için fuzzy A**-iç operatörü** $H^\circ_A = \cup\{D \in \tau_A : D \subseteq H\}$
b) $(\ )^-_A : \mathcal{A}_A \to \mathcal{A}_A$, $H \in \mathcal{A}_A$ için fuzzy A**-kapanış operatörü** $\overline{H}_A = \cap\{K \in \tau_A^{\mathcal{K}} : H \subseteq K\}$
şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{A}_A = \{C \in P(X) : C \subseteq A\}$ dır.

Önerme 3.4.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \in P(X)$ olsun.
$\forall$ H, H_1, $H_2 \in \mathcal{A}_A$ için,
1) $H^\circ_A \subseteq H$
2) $H \subseteq H^-_A$
3) $H_1 \subseteq H_2$ ise $(H_1)^\circ_A \subseteq (H_2)^\circ_A$

4) $H_1 \subseteq H_2$ ise $(H_1)^-_A \subseteq (H_2)^-_A$

5) $((H)^\circ_A)^\circ_A = H^\circ_A$

6) $(H^-_A)^-_A = H^-_A$ dır.

7) $(H_1 \cap H_2)^\circ_A = (H_1)^\circ_A \cap (H_2)^\circ_A$

8) $(H_1 \cup H_2)^-_A = (H_1)^-_A \cup (H_2)^-_A$

9) $(0_\sim)^\circ_A = 0_\sim$

10) $(0_\sim)^-_A = 0_\sim$

11) $(A)^\circ_A = A$

12) $(A)^-_A = A$

13) H fuzzy A-açıktır$\Leftrightarrow (H)^\circ_A = H$

14) H fuzzy A-kapalıdır$\Leftrightarrow (H)^-_A = H$

dır.

Örnek 3.4.3 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı ve A=$\langle x, (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.7}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.1})\rangle$ kümesi ve örnek 3.4.2 deki topoloji verilsin.
$H = \langle x, (\frac{a}{0.45}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.3}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.3})\rangle \in \mathcal{A}_A$ kümesi için,

$$(H)^\circ_A = \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.3})\rangle$$

dır. $L = \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.15}, \frac{c}{0.3}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.3})\rangle \in \mathcal{A}_A$ kümesi için,

$$(H)^-_A = \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.3})\rangle$$

dır.

Tanım 3.4.4 (X, τ), (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu ve $A \in P(X)$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin.

$$\forall C \in \Phi_{f(A)} \text{ için } f^{-1}(C) \cap A \in \tau_A$$

ise, f fonksiyonu **fuzzy** $A-$**süreklidir** denir.

Önerme 3.4.3 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. f fuzzy sürekli ise, f fuzzy $A-$süreklidir.

İspat: $D \in \Phi_{f(A)}$ olsun. Bu durumda $D = f(A) \cap H$ olacak şekilde $H \in \Phi$ vardır. Böylece,

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(f(A) \cap H) = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(H)$$

dir.

$$f^{-1}(D) \cap A = A \cap f^{-1}(H) \in \tau_A$$

dir. O halde f fuzzy $A-$süreklidir.

Not 3.4.1 Yukarıdaki önermenin karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 3.4.4 $X = [0,1]$ ve $Y = [0,1]$ de tanımlı sezgisel fuzzy topolojiler sırası ile,

$$\begin{aligned} \tau &= \{0_\sim, 1_\sim, c_{\alpha,\beta} : 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\} \text{ ve} \\ \Phi &= \{0_\sim, 1_\sim, c_{0.7,0.2}, c_{\alpha,\beta} : 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

olsun. $f : X \to Y$, $f(x) = x$ fonksiyonu verilsin. $A = c_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ için, f fuzzy $A-$süreklidir. Fakat, f sürekli değildir. Çünkü, $f^{-1}(c_{0.7,0.2}) = c_{0.7,0.2} \notin \tau$ dir.

Lemma 3.4.1 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\{A_i : i \in J\}$, X in fuzzy açık örtüsü olsun. Bu durumda f fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow \forall i \in J$ için f fuzzy A_i-süreklidir.

İspat: $\Leftarrow$): $\forall i \in J$ için f fonksiyonu fuzzy A_i-sürekli ve $\{A_i : i \in J\}$, X in fuzzy açık örtüsü olsun. Bu durumda,

$$D \in \Phi \text{ ve } \forall i \in J \text{ için } D \cap f(A_i) \in \Phi_{f(A_i)}$$

dir.

$$A_i \cap f^{-1}(D) = A_i \cap f^{-1}(D) \cap f^{-1}(f(A_i)) = A \cap f^{-1}(D \cap f(A_i)) \in \tau_{A_i}$$

dir. Dolayısıyla $A_i \cap f^{-1}(D) = A_i \cap G_i$ olacak şekilde $\exists\ G_i \in \tau$ vardır. Böylece,

$$f^{-1}(D) = 1_\sim \cap f^{-1}(D) = (\cup A_i) \cap f^{-1}(D) = \cup(A_i \cap f^{-1}(D)) = \cup(A_i \cap G_i) \in \tau$$

dur.

Önerme 3.4.4 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları ve $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu verilsin. A, X de sezgisel fuzzy küme olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:
1) f fuzzy $A-$süreklidir
2) $\forall C \in \mathcal{A}_{f(A)}$ için $f^{-1}(C^\circ_{f(A)}) \cap A \subseteq (f^{-1}(C) \cap A)^\circ_A$
dir.

İspat:
1)⇒2) $C \in \mathcal{A}_{f(A)}$ olsun. $C^\circ_{f(A)} \in \Phi_{f(A)}$ ve f fonksiyonu fuzzy $A-$sürekli olduğundan, $f^{-1}(C^\circ_{f(A)}) \cap A \in \tau_A$ dır. Dolayısıyla, $f^{-1}(C^\circ_{f(A)}) \cap A \subseteq f^{-1}(C) \cap A$ ve $f^{-1}(C^\circ_{f(A)}) \cap A \subseteq (f^{-1}(C) \cap A)^\circ_A$ elde edilir.
2)⇒1) $C \in \Phi_{f(A)}$ olsun. Bu durumda,

$$C^\circ_{f(A)} = C \Rightarrow f^{-1}(C) \cap A \subseteq (f^{-1}(C) \cap A)^\circ_A \Rightarrow (f^{-1}(C) \cap A)^\circ_A = f^{-1}(C) \cap A$$

dir. Buradan $f^{-1}(C) \cap A \in \tau_A$ olduğundan, f fuzzy $A-$süreklidir.

3.5 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzaylarda Süreklilik Çeşitleri

Tanım 3.5.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\exists\ B \in \tau \ni B \subseteq A \subseteq \overline{B}$ ise A ya **sezgisel fuzzy yarı açık küme**, $\exists\ B^c \in \tau \ni B^\circ \subseteq A \subseteq B$ ise A ya **sezgisel fuzzy yarı kapalı küme** denir (Gürçay ve Çoker 1997).

Teorem 3.5.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) A sezgisel fuzzy yarı açık kümedir

b) A^c sezgisel fuzzy yarı kapalı kümedir

c) $(\overline{A^c})^\circ \subseteq A^c$

d) $A \subseteq \overline{(A^\circ)}$

dır.

İspat:

a)⇒b) A sezgisel fuzzy yarı açık küme olsun. Bu durumda, $\exists\ B \in \tau \ni B \subseteq A \subseteq \overline{B}$ dır. $B \subseteq A \Rightarrow A^c \subseteq B^c\ ve\ (\overline{B})^c \subseteq A^c$ dır. $B^c = C$ denilirse, $(C)^\circ \subseteq A^c \subseteq C$ yazılabilir. O halde A, sezgisel fuzzy yarı kapalı kümedir.

b)⇒c) A^c sezgisel fuzzy yarı kapalı bir küme olsun. $B^c \in \tau \ni (B)^\circ \subseteq A^c \subseteq B \Rightarrow \overline{(B)^\circ} \subseteq \overline{(A^c)} \subseteq \overline{B} = B \Rightarrow (\overline{A^c})^\circ \subseteq B^\circ \subseteq A^c$ elde edilir.

c)⇒d) $(\overline{A^c})^\circ \subseteq A^c$ olsun. $A \subseteq ((\overline{A^c})^\circ)^c = \overline{((\overline{A^c})^c)} = \overline{(A^\circ)}$ bulunur.

d)⇒a) $A \subseteq \overline{(A^\circ)}$ olsun. $A^\circ = B$ denilirse, $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{(A^\circ)} \Rightarrow B \subseteq A \subseteq \overline{B}$ elde edilir.

Teorem 3.5.2 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Bu durumda,

a) Sezgisel fuzzy yarı kapalı kümelerin herhangi kesişimi sezgisel fuzzy yarı kapalı kümedir.

b) Sezgisel fuzzy yarı açıkların herhangi birleşimi sezgisel fuzzy yarı açık kümedir.

İspat:

a) $\{A_j\}_{j\in J}$ sezgisel fuzzy yarı kapalılar ailesi olsun. $\forall\ j \in J$ için A_j sezgisel fuzzy

yarı kapalı küme olduğundan $\exists\ B_i^c \in \tau \ni \exists\ i \in I$ için $B_i^\circ \subseteq A_j \subseteq B_i$ dir. Bu durumda,

$$(\underset{i\in I}{\cap} B_i)^\circ \subseteq \underset{i\in I}{\cap}(B_i)^\circ \subseteq \underset{j\in J}{\cap} A_i \subseteq \underset{i\in I}{\cap} B_i$$

dır. Dolayısıyla $\underset{j\in J}{\cap} A_j$, sezgisel fuzzy yarı kapalı kümedir.

b) $\{A_j\}_{j\in J}$ sezgisel fuzzy yarı açıklar ailesi olsun. Bu durumda, $\{B_i\}_{i\in I} \in \tau \ni \exists$ $i \in I$ için $B_i \subseteq A_j \subseteq \overline{(B_i)}$ dir.

$$\underset{i\in I}{\cup} B_i \subseteq \underset{j\in J}{\cup} A_j \subseteq \underset{i\in I}{\cup}\overline{(B_i)} \subseteq \overline{(\underset{i\in I}{\cup} B_i)}$$

dır. O halde $\underset{j\in J}{\cup} A_j$ sezgisel fuzzy yarı açık kümedir.

Örnek 3.5.1 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle\} \\
G_2 &= \{\langle x, (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5})\rangle\} \\
G_3 &= \{\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4})\rangle\} \\
G_4 &= \{\langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle\}
\end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2\}$ ailesi X de sezgisel fuzzy topolojidir. $G_1 \subseteq G_3 \subseteq \overline{(G_1)} = G_2^c$ ve $G_1 = (G_2^c)^\circ \subseteq G_4 \subseteq G_2^c$ olduğundan, G_3 sezgisel fuzzy yarı açık ve G_4 sezgisel fuzzy yarı kapalıdır.

Not 3.5.1 Sezgisel fuzzy açık kümenin kapanışı, sezgisel fuzzy yarı açıktır. Sezgisel fuzzy kapalı kümenin içi ise sezgisel fuzzy yarı kapalıdır.

Tanım 3.5.2 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

a) $(\overline{A})^\circ = A$ ise A ya **sezgisel fuzzy regüler açık**,

b) $\overline{(A^\circ)} = A$ ise A ya **sezgisel fuzzy regüler kapalı**

denir (Gürçay ve Çoker 1997).

Teorem 3.5.3 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda, A sezgisel fuzzy regüler açıktır $\Leftrightarrow$ A^c sezgisel fuzzy regüler kapalıdır.

İspat:

$\Rightarrow$) A, sezgisel fuzzy regüler açık küme olsun. Bu durumda, $(\overline{A})^\circ = A$ dır. Buradan, $((\overline{A})^\circ)^c = A^c$ ve $\overline{(\overline{(A)^c})} = A^c$ elde edilir. $(\overline{(A^c)^\circ}) = A^c$ dir. Dolayısıyla, A^c sezgisel fuzzy regüler kapalıdır.

$\Leftarrow$) Benzer şekilde gösterilebilir.

Not 3.5.2 İki sezgisel fuzzy regüler açık kümenin birleşimi sezgisel fuzzy regüler açık olmayabilir.

Örnek 3.5.2 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G &= \langle x, (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.0}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{1.0}, \frac{b}{1.0}, \frac{c}{0.0})\rangle \text{ ve} \\ H &= \langle x, (\frac{a}{1.0}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.0}), (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{1.0})\rangle \end{aligned}$$

kümeleri X de tanımlı iki sezgisel fuzzy küme olsun. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G, H, G \cup H\}$ ailesi, X de sezgisel fuzzy topolojidir. G ve H sezgisel fuzzy regüler açık olduğu halde $G \cup H$ sezgisel fuzzy regüler açık değildir. Çünkü,

$$G \cup H = \langle x, (\frac{a}{1.0}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.0})\rangle$$

olmak üzere, $(\overline{G \cup H})^\circ = 1_\sim \neq G \cup H$ dır.

Teorem 3.5.4 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Bu durumda,

a) İki sezgisel fuzzy regüler kapalı kümenin birleşimi sezgisel fuzzy regüler kapalıdır.

b) İki sezgisel fuzzy regüler açık kümenin kesişimi sezgisel fuzzy regüler açıktır.

İspat:

a) A ve B, X de tanımlı sezgisel fuzzy regüler kapalı kümeler olsun.

$A \subseteq A \cup B$ olduğundan $(A)^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ dir. Buradan,

$$\overline{(A)^\circ} \subseteq \overline{(A \cup B)^\circ} \Rightarrow A \subseteq \overline{(A \cup B)^\circ}$$

elde edilir. Benzer şekilde $B \subseteq \overline{(A \cup B)^\circ}$ yazılabilir ve $A \cup B \subseteq \overline{(A \cup B)^\circ}$ elde edilir. Her regüler kapalı küme, fuzzy kapalı küme olduğundan A ve B, fuzzy kapalı kümedir. Dolayısıyla, $A \cup B$ de kapalıdır.

Diğer taraftan$(A \cup B)^\circ \subseteq A \cup B$ dir. Buradan,

$$\overline{(A \cup B)^\circ} \subseteq \overline{(A \cup B)} = A \cup B$$

elde edilir. $A \cup B \subseteq \overline{(A \cup B)^\circ}$ ve $\overline{(A \cup B)^\circ} \subseteq A \cup B$ olduğundan, $\overline{(A \cup B)^\circ} = A \cup B$ dir. Sonuç olarak $A \cup B$ sezgisel fuzzy regüler kapalıdır.

b) G_1 ve G_2, X de tanımlı sezgisel fuzzy regüler açık iki küme olsun. Bu durumda,

$$(\overline{G_1})^\circ \subseteq \overline{(G_1)} \subseteq G_1 \text{ ve } (\overline{(G_2)})^\circ \subseteq \overline{(G_2)} \subseteq G_2$$

dir.

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &\subseteq G_1 \Rightarrow \overline{(G_1 \cap G_2)} \subseteq \overline{(G_1)} \\ &\Rightarrow \overline{((G_1 \cap G_2))}^\circ \subseteq (\overline{(G_1)})^\circ \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, $(\overline{(G_1 \cap G_2)})^\circ \subseteq (\overline{(G_2)})^\circ$ elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} (\overline{(G_1 \cap G_2)})^\circ &\subseteq (\overline{(G_1)})^\circ \cap (\overline{(G_2)})^\circ \\ &\subseteq G_1 \cap G_2 \end{aligned}$$

$G_1 \cap G_2 \subseteq \overline{G_1 \cap G_2}$ ve $(G_1 \cap G_2)^\circ \subseteq (\overline{(G_1 \cap G_2)})^\circ$ elde edilir. G_1 ve G_2 fuzzy açık kümeler olduğundan, $(G_1 \cap G_2)^\circ = G_1 \cap G_2$ ve $(G_1 \cap G_2)^\circ = G_1 \cap G_2 \subseteq (\overline{(G_1 \cap G_2)})^\circ$ dir.

Sonuç olarak, $(\overline{(G_1 \cap G_2)})^\circ = G_1 \cap G_2$ elde edilir. O halde, $G_1 \cap G_2$ sezgisel fuzzy regüler açıktır.

Teorem 3.5.5 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durumda,
a) Sezgisel fuzzy kapalı kümenin içi sezgisel fuzzy regüler açıktır.
b) Sezgisel fuzzy açık kümenin kapanışı sezgisel fuzzy regüler kapalıdır.

İspat:
a) $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kapalı küme olsun. $(A)^\circ = B$ denilirse,
$(A)^\circ \subseteq A \Rightarrow \overline{(A)^\circ} \subseteq \overline{(A)} = A \Rightarrow (\overline{(A)^\circ})^\circ \subseteq (A)^\circ = B$ dir. Buradan, $B = (A)^\circ \subseteq \overline{(A)^\circ} \Rightarrow (B)^\circ \subseteq \overline{((A)^\circ)}^\circ \Rightarrow B \subseteq (\overline{(A)^\circ})^\circ$. Böylece, $(\overline{B})^\circ = B$ elde edilir. O halde B, sezgisel fuzzy regüler açıktır.
b) $B \subseteq X$ sezgisel fuzzy açık küme olsun. $\overline{(B)} = A$ denilirse,

$$(A)^\circ \subseteq A \Rightarrow \overline{(A)^\circ} \subseteq \overline{(A)} = A$$

dır. $B \subseteq \overline{B} = A$ olduğundan, $B \subseteq (A)^\circ$ ve $\overline{(B)} \subseteq \overline{(A)^\circ}$ yazılabilir. Buradan $A \subseteq \overline{(A)^\circ}$ ve $\overline{(A)^\circ} = A$ elde edilir. O halde $\overline{B}$, sezgisel fuzzy regüler kapalıdır.

Tanım 3.5.3 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq (\overline{(A)^\circ})^\circ$ ise A ya $\alpha-$**açık küme** ve $A \subseteq (\overline{(A)})^\circ$ ise A ya **pre-açık küme** denir.
$\alpha-$açık kümenin tümleyenine $\alpha-$**kapalı küme** ve pre-açık kümenin tümleyenine **pre-kapalı küme** denir.
Not 3.5.3 Her sezgisel fuzzy açık (kapalı) küme, sezgisel fuzzy $\alpha-$açık (kapalı) kümedir. Bu ifadenin karşıtı genelde doğru değildir.

Örnek 3.5.3 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4}) \rangle \\ G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.35}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}) \rangle \\ G_3 &= \langle x, (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4}) \rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2\}$, X de sezgisel fuzzy topolojidir. $(G_3)^\circ = G_1 \Rightarrow \overline{(G_1)} = 1_\sim \Rightarrow (\overline{(G_1)})^\circ = 1_\sim \Rightarrow G_3 \subseteq 1_\sim$ olduğundan G_3 sezgisel fuzzy $\alpha-$açıktır. Fakat, G_3 sezgisel fuzzy açık değildir.

Önerme 3.5.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Bu uzaydaki her $\alpha-$açık küme, sezgisel fuzzy yarı açıktır.

İspat A $\alpha-$açık olsun. Bu durumda $A \subseteq (\overline{(A)^\circ})^\circ$ dır. $(A)^\circ = B$ denilirse, $(A)^\circ \subseteq A \subseteq (\overline{(A)^\circ})^\circ \subseteq \overline{(A)^\circ} \Rightarrow B \subseteq A \subseteq \overline{(B)}$ dır. Dolayısıyla A sezgisel fuzzy yarı açıktır.

Önerme 3.5.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Bu uzaydaki her $\alpha-$açık, küme pre-açık kümedir.

İspat A $\alpha-$açık küme olsun. Bu durumda $A \subseteq (\overline{(A)^\circ})^\circ \Rightarrow A \subseteq (\overline{(A)})^\circ$ dır. Dolayısıyla, A pre açık kümedir.

Not 3.5.4 Bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 3.5.4 $X = \{\text{a,b,c}\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.1}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.35}, \frac{c}{0.4})\rangle \\ G_2 &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.4})\rangle \\ G_3 &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4})\rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2\}$, sezgisel fuzzy topolojidir.
$\overline{(G_3)} = 1_\sim \Rightarrow (1_\sim)^\circ = 1_\sim \Rightarrow G_3 \subseteq 1_\sim$ olduğundan, G_3 pre-açık kümedir. Fakat, $(G_3)^\circ = G_1 \Rightarrow \overline{(G_3)^\circ} = \overline{(G_1)} = G_1$ $G_3 \subsetneq G_1$ olduğundan G_3, $\alpha-$açık küme değildir.

Tanım 3.5.4 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq \overline{(\overline{(A)})^\circ}$ ise A ya $\beta-$**açık küme** denir. $\beta-$açık kümenin tümleyenine $\beta-$**kapalı küme** denir.

Her sezgisel fuzzy pre-açık küme $\beta-$açıktır.

Tanım 3.5.5 (X,τ), (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. $\forall B\in\Phi$ için $f^{-1}(B)$ sezgisel fuzzy yarı açık küme ise f ye **yarı sürekli fonksiyon** denir.

Örnek 3.5.5 $X=\{a,b,c\}$ ve $Y=\{1,2,3\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
G_1 &= \langle x,(\frac{a}{0.4},\frac{b}{0.4},\frac{c}{0.5}),(\frac{a}{0.4},\frac{b}{0.4},\frac{c}{0.4})\rangle\\
G_2 &= \langle x,(\frac{a}{0.2},\frac{b}{0.3},\frac{c}{0.4}),(\frac{a}{0.5},\frac{b}{0.5},\frac{c}{0.5})\rangle\\
U_1 &= \langle y,(\frac{1}{0.5},\frac{2}{0.4},\frac{3}{0.5}),(\frac{1}{0.4},\frac{2}{0.4},\frac{3}{0.3})\rangle\\
U_2 &= \langle y,(\frac{1}{0.4},\frac{2}{0.2},\frac{3}{0.4}),(\frac{1}{0.5},\frac{2}{0.4},\frac{3}{0.5})\rangle
\end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau=\{0_\sim,1_\sim,G_1,G_2\}$, $\Phi=\{0_\sim,1_\sim,U_1,U_2\}$ sezgisel fuzzy topolojiler olamk üzere $f:X\to Y$ fonksiyonu $f(a)=2,f(b)=3,f(c)=1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, f sezgisel fuzzy yarı süreklidir. Fakat, f sürekli değildir.

Tanım 3.5.6 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları ve $f:(X,\tau)\to(Y,\Phi)$ fonksiyonu verilsin. $\forall A\in\Phi$ sezgisel fuzzy regüler açık kümesi için $f^{-1}(A)\in\tau$ oluyorsa f fonksiyonuna **hemen hemen fuzzy sürekli fonksiyon** denir.

Teorem 3.5.6 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları ve $f:(X,\tau)\to(Y,\Phi)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) f, fuzzy hemen hemen sürekli fonksiyondur

b) $\forall B\subseteq Y$ fuzzy regüler kapalı küme için $f^{-1}(B)$ sezgisel fuzzy kapalı kümedir

c) $\forall B\subseteq Y$ sezgisel fuzzy açık kümesi için $f^{-1}(B)\subseteq(f^{-1}((\overline{(B)}))^\circ)^\circ$

d) $\forall B\subseteq Y$ sezgisel fuzzy kapalı kümesi için $\overline{(f^{-1}(\overline{((B)^\circ)}))}\subseteq f^{-1}(B)$

dir (Gürçay ve Çoker 1997).

Not 3.5.5 Fuzzy sürekli fonksiyon, fuzzy hemen hemen süreklidir. Karşıtı, her zaman doğru değildir.

Örnek 3.5.6 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.1}), (\frac{a}{0.1}, \frac{b}{0.25}, \frac{c}{0.0})\rangle \\ G_2 &= \langle x, (\frac{a}{0.1}, \frac{b}{0.25}, \frac{c}{0.0}), (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.1})\rangle \\ G_3 &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.1}), (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.25}, \frac{c}{0.0})\rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau_1 = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2, G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2\}$, $\tau_2 = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2, G_3, G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2\}$ sezgisel fuzzy topolojiler olmak üzere $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ fonksiyonu $f(x) = x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (\overline{(G_1)})^\circ &= G_1,\ (\overline{(G_2)})^\circ = G_2,\ (\overline{(G_1 \cup G_2)})^\circ = G_1 \cup G_2, \\ (\overline{(G_1 \cap G_2)})^\circ &= G_1 \cap G_2 \text{ ve } (\overline{(G_3)})^\circ = 1_\sim \end{aligned}$$

dir. Buradan, f fonksiyonu fuzzy hemen hemen sürekli fonksiyondur. Fakat, f fuzzy sürekli değildir.

Tanım 3.5.7 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları ve $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu verilsin. $\forall B \subseteq Y$ sezgisel fuzzy açık kümesi için, $f^{-1}(B) \subseteq (f^{-1}(\overline{(B)}))^\circ$ ise f fonksiyonuna fuzzy **zayıf sürekli fonksiyon** denir.

Not 3.5.6 Fuzzy sürekli fonksiyon fuzzy zayıf sürekli fonksiyondur. Karşıtı, her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 3.5.7 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4}) \rangle \\ G_2 &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4}) \rangle \\ U_1 &= \langle y, (\frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.5}), (\frac{1}{0.4}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.3}) \rangle \\ U_2 &= \langle y, (\frac{1}{0.4}, \frac{2}{0.2}, \frac{3}{0.4}), (\frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.5}) \rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2\}$ ve $\Phi = \{0_\sim, 1_\sim, U_1, U_2\}$ sezgisel fuzzy topolojiler olmak üzere $f : X \to Y$ fonkiyonu $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f^{-1}(U_1) \subseteq (f^{-1}(\overline{(U_1)}))^\circ = 1_\sim$ ve $f^{-1}(U_2) \subseteq (f^{-1}(\overline{(U_2)}))^\circ = G_1$ olduğundan, f fuzzy zayıf sürekli fonksiyondur. Fakat, f fuzzy sürekli fonksiyon değildir.

Tanım 3.5.8 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları ve $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu verilsin. $\forall\ B \in \Phi$ için $f^{-1}(B)$, sezgisel fuzzy $\alpha-$açık küme ise f ye, $\alpha-$**sürekli fonksiyon** denir.

Not 3.5.7 Fuzzy sürekli bir fonksiyon her zaman $\alpha-$süreklidir. Karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 3.5.8 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4}) \rangle \\ G_2 &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.35}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}) \rangle \\ U_1 &= \langle y, (\frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.6}, \frac{3}{0.5}), (\frac{1}{0.4}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.3}) \rangle \\ U_2 &= \langle y, (\frac{1}{0.4}, \frac{2}{0.5}, \frac{3}{0.4}), (\frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.5}) \rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2\}$, $\Phi = \{0_\sim, 1_\sim, U_1, U_2\}$ sezgisel fuzzy topolojiler olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$f^{-1}(U_1) = \langle x, (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4})\rangle$$

ve

$$f^{-1}(U_2) = \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5})\rangle$$

dir. Buradan $f^{-1}(U_1) \subseteq (\overline{((f^{-1}(U_1))^\circ)}^\circ = 1_\sim$ ve $f^{-1}(U_2) \subseteq (\overline{((f^{-1}(U_2))^\circ)}^\circ = 1_\sim$ dir. Dolayısıyla, f fuzzy $\alpha-$süreklidir. Fakat, $f^{-1}(U_1) \notin \tau$ olduğundan f, fuzzy sürekli değildir.

Tanım 3.5.9 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları ve $f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fonksiyonu verilsin. $\forall B \in \Phi$ için $f^{-1}(B)$ sezgisel fuzzy pre-açık küme ise f ye **pre-sürekli fonksiyon** denir.

Not 3.5.8 $\alpha-$sürekli bir fonksiyon her zaman pre-süreklidir. Fakat, pre-sürekli fonksiyon, $\alpha-$sürekli olmayabilir.

Örnek 3.5.9 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5})\\
G_2 &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5})\rangle\\
U_1 &= \langle y, (\frac{1}{0.1}, \frac{2}{0.2}, \frac{3}{0.2}), (\frac{1}{0.7}, \frac{2}{0.6}, \frac{3}{0.6})\rangle\\
U_2 &= \langle y, (\frac{1}{0.2}, \frac{2}{0.2}, \frac{3}{0.2}), (\frac{1}{0.6}, \frac{2}{0.5}, \frac{3}{0.5})\rangle
\end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2\}$, $\Phi = \{0_\sim, 1_\sim, U_1, U_2\}$ sezgisel fuzzy topolojiler olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu $f(a) = 3, f(b) = 1, f(c) = 2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U_1) &= \langle x, (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.1}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.7}, \frac{c}{0.6})\rangle\\
f^{-1}(U_2) &= \langle x, (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.25}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.5})\rangle
\end{aligned}$$

dir. Buradan $f^{-1}(U_1) \subseteq (\overline{f^{-1}(U_1)})^\circ = G_2$, $f^{-1}(U_2) \subseteq (\overline{(f^{-1}(U_2)})^\circ = G_2$ dir. Dolayısıyla f fuzzy pre-süreklidir. Fakat $\alpha-$sürekli değildir. Çünkü, $(f^{-1}(U_1))^\circ = 0_\sim$ dır.

Tanım 3.5.10 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzayları ve $f : (X,\tau) \to (Y,\Phi)$ fonksiyonu verilsin. $\forall B \in \Phi$ için $f^{-1}(B)$ sezgisel fuzzy β-açık küme ise f ye **β-sürekli fonksiyon** denir.

Not 3.5.9 Yarı sürekli her fonksiyon β-süreklidir. Karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 3.5.10 $X = \{a,b,c\}$, $Y = \{1,2,3\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.1}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.25}, \frac{c}{0.4})\rangle \\ G_2 &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.4})\rangle \\ U_1 &= \langle y, (\frac{1}{0.4}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.3}), (\frac{1}{0.4}, \frac{2}{0.5}, \frac{3}{0.4})\rangle \\ U_2 &= \langle y, (\frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.5}, \frac{3}{0.4}), (\frac{1}{0.3}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.3})\rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, G_1, G_2\}$, $\Phi = \{0_\sim, 1_\sim, U_1, U_2\}$ sezgisel fuzzy topolojiler olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu $f(a) = 3, f(b) = 1, f(c) = 2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1) &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5})\rangle \\ f^{-1}(U_2) &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.4})\rangle \end{aligned}$$

dir. Buradan $f^{-1}(U_1) \subseteq \overline{((\overline{f^{-1}(U_1)})^\circ)} = 1_\sim$ ve $f^{-1}(U_2) \subseteq \overline{(((\overline{f^{-1}(U_2)}))^\circ} = 1_\sim$ dir. Dolayısıyla f, β-süreklidir. Fakat, f yarı sürekli değildir.

3.6 Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzaylarda Bağlantılılık

Tanım 3.6.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. $A \neq 0_\sim$ ve $A \neq 1_\sim$

olacak şekilde $\exists\ A \subseteq X$ regüler açık kümesi var ise X e **süper bağlantısız uzay** denir. X süper bağlantısız uzay değilse, **süper bağlantılı uzaydır** denir (Turanlı ve Çoker 2000).

Örnek 3.6.1 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.3})\rangle \\ B &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.3})\rangle \\ C &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, A, B, C\}$, X de bir sezgisel fuzzy topolojidir. $(\overline{A})^\circ = 1_\sim$, $(\overline{B})^\circ = 1_\sim$, $(\overline{C})^\circ = 1_\sim$ olduğundan A, B, C kümeleri regüler açık değildir. O halde X, süper bağlantılı bir uzaydır.

Önerme 3.6.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1) X fuzzy süper bağlantılıdır

2) $A \neq 0_\sim$ olan her fuzzy açık küme için $\overline{A}$=$1_\sim$ dir

3) $A \neq 1_\sim$ olan her fuzzy kapalı küme için A°=$0_\sim$ dır

4) $A \neq 0_\sim \neq B$ ve $A \subseteq B^c$ olacak şekilde A ve B fuzzy açıkları yoktur

5) $A \neq 0_\sim \neq B$, $B = (\overline{A})^c$ ve $A = (B^\circ)^c$ olacak şekilde A ve B fuzzy açıkları yoktur

6) $A \neq 1_\sim \neq B$, $B = (A^\circ)^c$ $A = (\overline{B})^c$ olacak şekilde A ve B fuzzy kapalıları yoktur.

İspat:

1)⇒2) X, fuzzy süper bağlantılı bir uzay ve $A \neq 0_\sim$, $\overline{A} \neq 1_\sim$ olacak şekilde bir A sezgisel fuzzy açık kümesi olsun. $B = (\overline{A})^\circ$ kümesi sezgisel fuzzy düzgün regüler açık kümedir. Bu ise X in fuzzy süper bağlantılı olması ile çelişir. O halde $A \neq 0_\sim$ olan her fuzzy açık küme için $\overline{A}$=$1_\sim$ dir.

2)⇒3) $A \neq 1_\sim$ ve A sezgisel fuzzy kapalı küme olsun. $B = A^c$ alalım. Bu durumda B sezgisel fuzzy açık kümedir ve $B \neq 0_\sim$ dir. **2)** den dolayı, $\overline{B} = 1_\sim$ dir. Buradan $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c = 1_\sim$ elde edilir. O halde $A^\circ = 0_\sim$ dır.

3)⇒4) A ve B, X de sezgisel fuzzy açık iki küme, $A \neq 0_\sim \neq B$ ve $A \subseteq B^c$ olsun. B^c sezgisel fuzzy kapalı küme ve $B \neq 0_\sim$ olduğu için, $B^c \neq 1_\sim$ dir. Hipotezden, $(B^c)^\circ = 0_\sim$ ve $A = A^\circ \subseteq (B^c)^\circ = 0_\sim$ dır. Buradan $A = 0_\sim$ elde edilir. Bu ise $A \neq 0_\sim$ olması ile çelişir. O halde $A \neq 0_\sim \neq B$ ve $A \subseteq B^c$ olacak şekilde A ve B açıkları yoktur.

4)⇒1) $0_\sim \neq A \neq 1_\sim$ ve A, X de sezgisel fuzzy regüler açık küme olsun. $B = (\overline{A})^c$ alalım. Bu durumda $B \neq 0_\sim$ dır. Çünkü $B = 0_\sim$ olsaydı; $(\overline{A})^c = 0_\sim \Rightarrow (\overline{A}) = 1_\sim \Rightarrow (\overline{A})^\circ = 1_\sim = A$ olurdu. Bu ise $A \neq 1_\sim$ olmasıyla çelişir. O halde $B \neq 0_\sim$ ve $A \subseteq (\overline{A}) = B^c$ dir. Bu ise **4)** ile çelişir. O halde X, fuzzy süper bağlantılıdır.

1)⇒5) X fuzzy süper bağlantılı olsun. $A \neq 0_\sim \neq B$ ve $B = (\overline{A})^c$, $A = (\overline{B})^c$ olacak şekilde A ve B açıkları olsun.

$$(\overline{A})^\circ = (B^c)^\circ = (\overline{B})^c = A$$

dır. $1_\sim \neq A \neq 0_\sim$, ve $(\overline{A})^\circ = A$ olduğundan A sezgisel fuzzy regüler açıktır. Bu ise X in fuzzy süper bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde $A \neq 0_\sim \neq B$ ve $B = (\overline{A})^c$, $A = (\overline{B})^c$ olacak şekilde A ve B açıkları yoktur.

5)⇒1) $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy açık küme ve $1_\sim \neq A \neq 0_\sim$, $A = (\overline{A})^\circ$ olsun. $B = (\overline{A})^c$ denilirse, $B \neq 0_\sim$ve B, fuzzy açıktır. Buradan,

$$(\overline{B})^c = (\overline{(\overline{A})^c})^c = (\overline{A})^\circ = A$$

bulunur. Bu ise **5)** deki ifade ile çelişir. O halde, X fuzzy süper bağlantılıdır.

5)⇒6) A ve B sezgisel fuzzy kapalı iki küme ve $A \neq 1_\sim \neq B$ olsun. Kabul edelim ki $B = (A^\circ)^c$, $A = (B^\circ)^c$ olsun. $A^c = C$ ve $B^c = D$ denilirse, C, D açık ve $C \neq 0_\sim \neq D$ dir. Buradan, $(\overline{C})^c = (\overline{A^c})^c = ((A^\circ)^c)^c = A^\circ = B^c = D$ elde edilir. Benzer şekilde, $(\overline{D})^c = C$ dir. Bu ise **5)** deki ifade ile çelişir. O halde $A \neq 1_\sim \neq B$ olan A ve B sezgisel fuzzy kapalı kümeleri yoktur.

6)⇒5) A ve B açık iki küme, $A \neq 0_\sim \neq B$, $B = (\overline{A})^c$ ve $A = (\overline{B})^c$ olsun. $A^c = C$ ve $B^c = D$ kümeleri için

$$(C^\circ)^c = ((A^c)^\circ)^c = \overline{A} = B^c = D. (D^\circ)^c = ((B^c)^\circ)^c = \overline{B} = A^c = C$$

dir. Bu ise **6)** daki ifade ile çelişir. O halde $A \neq 0_\sim \neq B$, $B = (\overline{A})^c$ ve $A = (\overline{B})^c$ olacak şekilde A ve B açık kümeleri yoktur.

Tanım 3.6.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı ve $N \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. M ve W sezgisel fuzzy açık kümeler olmak üzere,
$C_1 : N \subseteq M \cup W$, $M \cap W \subseteq N^c$, $N \cap M \neq 0_\sim$ ve $N \cap W \neq 0_\sim$ ise N sezgisel fuzzy kümesine C_1**-bağlantısız küme**
$C_2 : N \subseteq M \cup W$, $N \cap W \cap M = 0_\sim$, $N \cap M \neq 0_\sim$, $N \cap W \neq 0_\sim$ ise N sezgisel fuzzy kümesine C_2**-bağlantısız küme**
$C_3 : N \subseteq M \cup W$, $M \cap W \subseteq N^c$, $M \not\subseteq N^c$, $W \not\subseteq N^c$ ise N sezgisel fuzzy kümesine C_3**-bağlantısız küme**
$C_4 : N \subseteq M \cup W$, $N \cap W \cap M = 0_\sim$, $M \not\subseteq N^c$, $W \not\subseteq N^c$ ise N sezgisel fuzzy kümesine C_4**-bağlantısız küme**
denir. N, C_i-bağlantısız değil ise C_i-**bağlantılıdır** denir.

Örnek 3.6.2 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle \\ E &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.3})\rangle \\ F &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.3})\rangle \\ G &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.4})\rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, D, E, F\}$ ailesi X de bir sezgisel fuzzy topolojidir.

$$N = \langle x, (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.3})\rangle$$

sezgisel fuzzy kümesi için $N \subseteq M \cup W, M \cap W \subseteq N^c$ olacak şekilde M ve W sezgisel fuzzy açık kümeleri yoktur. Dolayısıyla N, C_1-bağlantılıdır.

$$N_2 = \langle x, (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.4})\rangle$$

sezgisel fuzzy kümesi ise C_1-bağlantısızdır. Çünkü $N_2 \subseteq D \cup E$, $D \cap E \subseteq N_2^c$, $N_2 \cap D \neq 0_\sim, N_2 \cap E \neq 0_\sim$ dir.

Tanım3.6.3 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay, A ve B, X de iki sezgisel fuzzy küme olsun. $\overline{A} \subseteq B^c$ ve $\overline{B} \subseteq A^c$ ise A ve B kümelerine **zayıf ayrılmış fuzzy kümeler** denir. Eğer $\overline{A} \cap B = 0_\sim$ ve $A \cap \overline{B} = 0_\sim$ ise A ve B kümelerine $q-$**ayrılmış fuzzy kümeler** denir.

Tanım 3.6.4 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Eğer $A \cup B = 1_\sim$ ve $A \neq 0_\sim \neq B$ olan A ve B fuzzy zayıf ayrılmış kümeleri var ise (X, τ) ya C_S-**bağlantısız uzay** denir. X, C_S-bağlantısız değil ise C_S-**bağlantılıdır** denir.

Tanım 3.6.5 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Eğer, $A \cup B = 1_\sim$ ve $A \neq 0_\sim \neq B$ olan A ve B $q-$ayrılmış sezgisel fuzzy kümeleri var ise (X, τ) ya C_M-**bağlantısız uzay** denir. X, C_M-bağlantısız değil ise C_M-**bağlantılıdır** denir.

Önerme 3.6.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı C_S-bağlantılıdır$\Leftrightarrow$ C_M-bağlantılıdır.

İspat:
$\Rightarrow$) (X, τ), C_S-bağlantılı uzay olsun. Kabul edelim ki (X, τ), C_M-bağlantısız olsun. Bu durumda,

$$A \neq 0_\sim \neq B,\ A \cup B = 1_\sim, \overline{A} \cap B = 0_\sim \text{ ve } A \cap \overline{B} = 0_\sim$$

olan A ve B sezgisel fuzzy kümeleri vardır. Buradan $\overline{A} \subseteq B^c$ ve $\overline{B} \subseteq A^c$ elde edilir. Bu ise (X, τ) uzayının C_S-bağlantılı olması ile çelişir. O halde (X, τ), C_M-bağlantılıdır.
$\Leftarrow$) (X, τ), C_M-bağlantılı olsun. Kabul edelim ki (X, τ), C_S-bağlantısız olsun. Bu durumda,

$$A \neq 0_\sim \neq B,\ A \cup B = 1_\sim, \overline{A} \subseteq B^c \text{ ve } \overline{B} \subseteq A^c$$

olan A ve B sezgisel fuzzy kümeleri vardır. $A \cup B = 1_\sim$ olduğundan, $\overline{A} \cap B = 0_\sim$ ve $A \cap \overline{B} = 0_\sim$ elde edilir. Bu ise (X, τ) uzayının C_M-bağlantılı olması ile çelişir. O halde (X, τ), C_S-bağlantılıdır.

Tanım 3.6.6 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Eğer, $\exists\ A \subseteq X \ni 1_\sim \neq A \neq 0_\sim$ ve A hem açık hem de kapalı ise (X, τ) ya C_5-**bağlantısızdır** denir. X, C_5-bağlantısız değil ise, C_5**-bağlantılıdır** denir.

Tanım 3.6.7 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. $\exists\ A,\ B \in \tau \ni A \neq 0_\sim$, $B \neq 0_\sim$, $A \cup B = 1_\sim$ ve $A \cap B = 0_\sim$ ise (X, τ) ya **fuzzy bağlantısız uzay** denir. X, fuzzy bağlantısız değil ise, **fuzzy bağlantılıdır** denir.

Önerme 3.6.3 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı C_5-bağlantılı ise fuzzy bağlantılıdır.

İspat:
$\Rightarrow$) Kabul edelim ki, X fuzzy bağlantılı olmasın. Bu durumda $A \neq 0_\sim$, $B \neq 0_\sim$, $A \cup B = 1_\sim$ ve $A \cap B = 0_\sim$ olan A ve B açıkları vardır. Buradan,

$$C = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \text{ ve } D = \{x \in X : \mu_A(x) = 0\}$$

kümeleri için,

$$x \in C \Rightarrow \mu_A(x) > 0 \Rightarrow \mu_B(x) = 0$$

dir. Böylece,

$$\mu_A(x) = 1_\sim \Rightarrow \gamma_A(x) = 0_\sim \Rightarrow \gamma_B(x) = 1_\sim$$

dir. Dolayısıyla,

$$x \in D \Rightarrow \mu_B(x) = 1_\sim \Rightarrow \mu_B(x) = \gamma_A(x)$$

dır. Benzer şekilde, $\gamma_A(x) = \mu_B(x)$ dır. Bu durumda $B = A^c$ dir. Buradan A, hem açık hem de kapalıdır. Bu ise (X, τ) nun C_5-bağlantılı olması ile çelişir. O halde (X, τ) fuzzy bağlantılıdır.

Önerme 3.6.4 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\Phi)$ fuzzy sürekli ve örten fonksiyonu verilsin. X fuzzy bağlantılı ise Y de fuzzy bağlantılıdır.

İspat:
$\Rightarrow$) X fuzzy bağlantılı uzay fakat Y fuzzy bağlantılı uzay olmasın. Bu durumda,

$$C\neq 0_\sim, D\neq 0_\sim, C\cup D=1_\sim \text{ ve } C\cap D=0_\sim$$

olacak şekilde C ve D açıkları vardır. $A=f^{-1}(C)$ ve $B=f^{-1}(D)$ denilirse, A ve B, X de fuzzy açık kümelerdir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} C\cup D &= 1_\sim \Rightarrow f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(1_\sim)=1_\sim \Rightarrow A\cup B=1_\sim \text{ dir.}\\ C\cap D &= 0_\sim \Rightarrow f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)=0_\sim \Rightarrow A\cap B=0_\sim \end{aligned}$$

dir. Bu ise X in fuzzy bağlantılı olması ile çelişir. O halde Y fuzzy bağlantılıdır.

Önerme 3.6.5 (X,τ) fuzzy bağlantısız bir uzay ise $(X,\tau_{0.1})$ ve $(X,\tau_{0.2})$ uzayları da fuzzy bağlantısızdır.

İspat: (X,τ) fuzzy bağlantısız olsun. Bu durumda $A\neq 0_\sim$, $B\neq 0_\sim$, $A\cup B=1_\sim$ ve $A\cap B=0_\sim$ olacak şekilde A ve B fuzzy açıkları vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 1_\sim &= [\ ]1_\sim=[\ ](A\cup B)=[\ ]A\cup[\ ]B\\ 0_\sim &= [\ ]0_\sim=[\ ](A\cap B)=[\ ]A\cap[\ ]B \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $(X,\tau_{0.1})$, fuzzy bağlantısızdır.
Benzer şekilde, $(X,\tau_{0.2})$ uzayının da fuzzy bağlantısız olduğu gösterilebilir.

Önerme 3.6.6 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı C_5-bağlantılıdır$\Leftrightarrow$ $A=B^c$ olacak şekilde A ve B açıkları yoktur.

İspat:

$\Rightarrow$) (X,τ), C_5-bağlantılı olsun. Kabul edelim ki, $A = B^c$ olacak şekilde A ve B açıkları olsun. Bu ise (X,τ) nun C_5-bağlantılı olması ile çelişir. O halde $A = B^c$ olacak şekilde A ve B açıkları yoktur.

$\Leftarrow$) $A = B^c$ olacak şekilde A ve B açıkları olmasın. Kabul edelim ki, (X,τ) C_5-bağlantısız olsun. Bu durumda hem açık hemde kapalı olan $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi vardır. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde (X,τ), C_5-bağlantılıdır.

Önerme 3.6.7 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı C_5-bağlantılıdır$\Leftrightarrow$ $B = A^c$, $B = (\overline{A})^c$, $A = (\overline{B})^c$ olacak şekilde boştan farklı A ve B sezgisel fuzzy kümeleri yoktur.

İspat:

$\Rightarrow$) (X,τ), C_5-bağlantılı olsun. $B = A^c$, $B = (\overline{A})^c$, $A = (\overline{B})^c$ olacak şekilde boştan farklı A ve B sezgisel fuzzy kümeleri olsun. A ve B hem açık hem de kapalıdır. Bu ise (X,τ) nun C_5-bağlantılı olması ile çelişir. Bu durumda $B = A^c$, $B = (\overline{A})^c$ ve $A = (\overline{B})^c$ olacak şekilde boştan farklı A, B sezgisel fuzzy kümeleri yoktur.

$\Leftarrow$) Kabul edelim ki X, C_5-bağlantılı olmasın. Bu durumda $A \subseteq X$ hem açık hem de kapalı olan sezgisel fuzzy kümesi vardır. $B = A^c$ alınırsa, $B = (\overline{A})^c$ ve $A = (\overline{B})^c$ elde edilir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde (X,τ), C_5-bağlantılıdır.

Tanım 3.6.8 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. Eğer, $A \neq 0_\sim \neq B \ni \mu_A + \mu_B \leq 1$ ve $\gamma_A + \gamma_B \geq 1$ olacak şekilde A ve B sezgisel fuzzy kapalı kümeleri bulunamıyorsa (X,τ) ya **fuzzy kuvvetli bağlantılı uzaydır** denir.

Örnek 3.6.3 $X = \{a, b\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.4}), (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.5})\rangle \\ B &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.1}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.3})\rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. Bu durumda $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, A, B, A \cup B, A \cap B\}$ sezgisel

fuzzy topoloji olup, (X, τ) fuzzy kuvvetli bağlantılıdır.

Önerme 3.6.8 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı fuzzy kuvvetli bağlantılıdır$\Leftrightarrow$ $A \neq 1_\sim \neq B$, $\mu_A + \mu_B \geq 1$ ve $\gamma_A + \gamma_B \leq 1$ olacak şekilde A ve B sezgisel fuzzy açık kümeleri yoktur.

İspat:
$\Rightarrow$) A ve B sezgisel fuzzy açık ve $A \neq 1_\sim \neq B$, $\mu_A + \mu_B \geq 1$ ve $\gamma_A + \gamma_B \leq 1$ olsun.

$$C = A^c, D = B^c$$

denilirse, C ve D sezgisel fuzzy kapalı kümeleri elde edilir. Buradan,

$$C \neq 0_\sim \neq D,\ \mu_C + \mu_D = \gamma_A + \gamma_B \leq 1 \text{ ve } \gamma_C + \gamma_D = \mu_A + \mu_B \geq 1$$

dir. Bu ise X in fuzzy kuvvetli bağlantılı olması ile çelişir. O halde $A \neq 1_\sim \neq B$, $\mu_A + \mu_B \geq 1$ ve $\gamma_A + \gamma_B \leq 1$ olacak şekilde A ve B sezgisel fuzzy açık kümeler yoktur.
$\Leftarrow$) X fuzzy kuvvetli bağlantılı olmasın. Bu durumda $\forall$ C, D fuzzy kapalısı için $\mu_C + \mu_D \leq 1$ ve $\gamma_C + \gamma_D \geq 1$ dir.
$C^c = A$ ve $D^c = B$ denilirse,

$$\mu_A + \mu_B = \gamma_C + \gamma_D \geq 1 \text{ ve } \gamma_A + \gamma_B \leq 1$$

elde edilir. O halde X fuzzy kuvvetli bağlantılıdır.

Önerme 3.6.9 (X, τ) ve (Y, Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olmak üzere
$f : (X, \tau) \to (Y, \Phi)$ fuzzy sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda X kuvvetli bağlantılı ise Y de kuvvetli bağlantılıdır.

İspat:
$\Rightarrow$) Kabul edelim ki Y, kuvvetli bağlantılı olmasın. Bu durumda $C \neq 0_\sim \neq D$,

$\mu_C + \mu_D \leq 1$ ve $\gamma_C + \gamma_D \geq 1$ olan C ve D kapalıları vardır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(C)$ ve $f^{-1}(D)$ de, kapalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned} \mu_{f^{-1}(C)} + \mu_{f^{-1}(D)} &= f^{-1}(\mu_C) + f^{-1}(\mu_D) = \mu_C \circ f + \mu_D \circ f \leq 1 \text{ ve} \\ \gamma_{f^{-1}(C)} + \gamma_{f^{-1}(D)} &= f^{-1}(\gamma_C) + f^{-1}(\gamma_D) = \gamma_C \circ f + \gamma_D \circ f \geq 1 \end{aligned}$$

dir. Bu ise X in kuvvetli bağlantılı olması ile çelişir. O halde Y kuvvetli bağlantılıdır.

Örnek 3.6.4 $X = \{a, b\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.7}) \rangle \\ B &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.2}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}) \rangle \\ C &= \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.2}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.7}) \rangle \\ D &= \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}), (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.2}) \rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, A, B, C, D\}$ ailesi X de sezgisel fuzzy topoloji olup, (X, τ) fuzzy kuvvetli bağlantılıdır.

Örnek 3.6.5 $X = \{a, b\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.6}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.3}) \rangle \\ B &= \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}), (\frac{a}{0.2}, \frac{b}{0.4}) \rangle \end{aligned}$$

sezgisel fuzzy kümeleri verilsin. $\tau = \{0_\sim, 1_\sim, A, B, A \cup B, A \cap B\}$ ailesi X de sezgisel fuzzy topolojidir. Fakat, (X, τ) fuzzy kuvvetli bağlantılı değildir.

4. SEZGİSEL FUZZY SÜZGEÇLER ÜZERİNE

Bu bölümde, sezgisel fuzzy ağ ve süzgeç kavramları tanımlanarak, bazı özellikleri ele alınacaktır.

4.1 Sezgisel Fuzzy Ağlar ve Süzgeçler

Tanım 4.1.1 $X \neq 0_{\sim}$ ve $\mathcal{P}$ sezgisel fuzzy ve kaybolan sezgisel fuzzy noktaların kümesi olsun. $\mathcal{D}$ yönlenmiş bir küme olmak üzere

$$s : \mathcal{D} \to \mathcal{P},\ s_d = s(d)_{d \in D}$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna, **sezgisel fuzzy ağ** denir (Lupianez 2006).

Tanım 4.1.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve s, X *de* sezgisel fuzzy ağ olsun.

$$\forall N \in N(p) \text{ için } d_0 \in D \ \ni\ \forall d \geq d_0 \text{ için } s_d \in N$$

ise s **sezgisel fuzzy ağı,** p **sezgisel veya kaybolan sezgisel fuzzy noktasına yakınsar** denir.

Önerme 4.1.1 (X, τ) ve (Y, Φ), sezgisel fuzzy topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve p sezgisel veya kaybolan sezgisel fuzzy nokta olsun. Bu durumda f, p noktasında süreklidir $\Longleftrightarrow$ X de p noktasına yakınsayan her s sezgisel fuzzy ağı için $f \circ s$ de $f(p)$ noktasına yakınsar.

İspat:
$\Rightarrow$) f, p noktasında sürekli olsun. Bu durumda,

$$\forall M \in N(f(p)) \text{ için } N \in N(p) \text{ var } \ni f(N) \subseteq M$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} s_d &\rightarrow p \Rightarrow \exists d_0 \in D \ni \forall d \geq d_0 \text{ için } s_d \in N \\ &\Rightarrow f(s_d) \in f(N) \Rightarrow f(s_d) \in M \Rightarrow f \circ s \rightarrow f(p) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$) X de p noktasına yakınsayan her s ağı için $f \circ s$ *de*, $f(p)$ noktasına yakınsasın. $(\mathcal{N}(p), \subseteq)$ yönlenmiş bir küme olmak üzere, $D = \{(q, N) : q$ sezgisel veya kaybolan sezgisel fuzzy nokta , $q \in N$ ve $N \in N(p)\}$ kümesi de yönlenmiş bir kümedir. Bu durumda,

$$s : D \rightarrow P, (q, N) \rightarrow s(q, N) = q$$

şeklinde tanımlanan s dönüşümü, X de tanımlı sezgisel fuzzy ağ olup, p noktasına yakınsar. Hipotezden dolayı $f \circ s$ *de*, $f(p)$ noktasına yakınsar. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \forall M \quad &\in \quad N(f(p)) \text{ içn } (q_0, N_0) \in D \ \ni \forall (q, N) \geq (q_0, N_0) \text{ için } (f \circ s)(q, N) = f(q) \in M \\ &\Rightarrow \ \forall q \in N_0 \text{ için } f(q) \in M \text{ dir.} \\ &\Rightarrow \ f(N_0) \subseteq M \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, f fonksiyonu p noktasında süreklidir.

Tanım 4.1.3 $X \neq 0_\sim$ ve $\mathcal{F}$, X deki boştan farklı sezgisel fuzzy kümelerin bir ailesi olsun. Eğer,

$\mathcal{F}_1$) $0_\sim \notin \mathcal{F}$

$\mathcal{F}_2$) $\forall\ F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ için $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}_3$) $\forall\ F \in \mathcal{F}$ için $F \subseteq F'$ ise $F' \in \mathcal{F}$

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ye, X de **sezgisel fuzzy süzgeç** denir.

Sonuç 4.1.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $c(\alpha, \beta)$, X de bir sezgisel fuzzy nokta olsun. $c(\alpha, \beta)$ nın, tüm $N-$komşuluklarının ailesi olan $\mathcal{N}(c(\alpha, \beta))$ sezgisel fuzzy süzgeçtir.

Tanım 4.1.4 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy süzgeç olsun. $\mathcal{N}(p) \subseteq \mathcal{F}$ ise F **süzgeci,** p **noktasına yakınsar** denir.

Tanım 4.1.5 $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy süzgeç olsun. $\beta \subseteq \mathcal{F}$ ailesi verilsin. Eğer,

$$\forall\ A \epsilon \mathcal{F} \text{ için } \exists\ B \in \beta\ \ni\ B \subseteq A$$

ise β **ya, sezgisel fuzzy süzgeç tabanı** denir.

Teorem 4.1.1 $X \neq 0_\sim$ ve β, X de tanımlı bir sezgisel fuzzy süzgecin tabanı olsun. Bu durumda,
1) $0_\sim \notin \beta$
2) $\forall\ B_1, B_2 \in \beta$ için $\exists\ B_3 \in \beta \ni B_3 \subseteq\ B_1 \cap B_2$
dir.

Sonuç 4.1.2 $X \neq 0_\sim$ ve $Y \neq 0_\sim$ olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ ailesi Y de sezgisel fuzzy süzgeç tabanıdır.

İspat:
1) $0_\sim \notin \mathcal{F}$ olduğundan, $0_\sim \notin f(\mathcal{F})$ dir.
2) $\forall\ f(F_1)\ , f(F_2) \in f(\mathcal{F})$ olsun. Bu durumda,

$$f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) \text{ ve } F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

dir. Dolayısıyla $f(\mathcal{F})$, Y de sezgisel fuzzy süzgeç tabanıdır.

Sonuç 4.1.3 $X \neq 0_\sim$ ve $Y \neq 0_\sim$ olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy süzgeç olmak üzere;

$$f(\mathcal{F}) = \{G \subseteq Y : f(F) \subseteq G, F \in \mathcal{F}\}$$

kümesi Y de, sezgisel fuzzy süzgeçtir.

Önerme 4.1.2 (X,τ) ve (Y,Φ) sezgisel fuzzy topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \to Y$ fonksiyonu ve p sezgisel fuzzy noktası verilsin. f, p noktasında süreklidir$\Longleftrightarrow \forall$ $\mathcal{F} \subseteq X$ sezgisel fuzzy süzgeci için $\mathcal{F} \to p$ iken $f(\mathcal{F}) \to f(p)$ dir.

İspat:
$\Rightarrow$) f, p noktasında sürekli olsun. Bu durumda $\mathcal{N}(p) \subseteq \mathcal{F}$ dir. Ayrıca, $\forall\ M \in \mathcal{N}(f(p))$ için $N \in \mathcal{N}(p) \ni f(N) \subseteq M$ dir. Dolayısıyla $M \in f(\mathcal{F})$ elde edilir. O halde $f(F) \to f(p)$ dir.
$\Leftarrow$) $\mathcal{N}(p)$ komşuluk ailesi, X de sezgisel fuzzy süzgeçtir. $\mathcal{N}(p) \to p$ olsun. Hipotezden, $f(\mathcal{N}(p)) \to f(p)$ dır. Bu durumda,

$$\forall M \in \mathcal{N}(f(p)) \text{ için } N \in N(P)\ \ni f(N) \subseteq M$$

dir. Dolayısıyla f, p noktasında süreklidir.

Tanım 4.1.6 $X \neq 0_\sim$ ve $s = (s_d)_{d\in D}$, X de sezgisel fuzzy ağ olsun.

$$\mathcal{F}_s = \{F \subseteq X : \exists\ d_0 \in D \ni \forall\ d \geq d_0 \text{ için } s_d \in F\}$$

ailesine, s **ağının ürettiği sezgisel fuzzy süzgeç** denir.

Tanım 4.1.7 $X \neq 0_\sim$ ve P, X deki sezgisel ve kaybolan sezgisel fuzzy noktaların kümesi olsun. $\mathcal{F}$, X de bir sezgisel fuzzy süzgeç olmak üzere

$$D_{\mathcal{F}} = \{(p,F) :\ p \in P,\ p \in F \text{ ve } F \in \mathcal{F}\}$$

ailesi, $(p,F) \leq (p',F') \Leftrightarrow F' \subseteq F$, bağıntısı ile yönlenmiş bir kümedir.

$$s_{\mathcal{F}} : D_{\mathcal{F}} \to P,\ s_{\mathcal{F}}(p,F) = p$$

şeklinde tanımlı ağ bir sezgisel fuzzy ağdır. Bu ağa, $\mathcal{F}$ **süzgecinin ürettiği sezgisel fuzzy ağ** denir.

Teorem 4.1.2 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve p, X de bir sezgisel fuzzy nokta olmak üzere,

1) $\mathcal{F} \subseteq X$ sezgisel fuzzy süzgeci için, $\mathcal{F} \to p \Leftrightarrow s_{\mathcal{F}} \to p$

2) X deki bir s sezgisel fuzzy ağı için, $s \to p \Leftrightarrow \mathcal{F}_s \to p$.

İspat:

1) $\Rightarrow$) $\mathcal{F} \to p$ olsun. Bu durumda $\forall U \in N(p)$ için $U \in \mathcal{F}$ dir.

$$\begin{aligned} \forall\, q &\in P \text{ için } q \in U \text{ ise } (q,U) \in D_{\mathcal{F}} \\ (q',F) &\in D_{\mathcal{F}} \text{ ve } (q',F) \geq (q,U) \Rightarrow q' \in \mathcal{F} \text{ ve } \mathcal{F} \subseteq U \\ s(q',F) &= q' \in U \end{aligned}$$

dır. O halde $s_{\mathcal{F}} \to p$ dır.

$\Leftarrow$) $s_{\mathcal{F}} \to p$ olsun. Bu durumda,

$$\forall U \in N(p)\ \exists\ (q_0,F_0) \in D_{\mathcal{F}}\ \ni (q,F) \geq (q_0,F_o) \text{ için } s_F(q,F) = q \in U$$

dur. Buradan $F_0 \subseteq U$ elde edilir.O halde $U \in \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F} \to p$ dir.

2)

$$\begin{aligned} s &\to p \Leftrightarrow \forall\ N \in \mathcal{N}(p)\ \exists\ d_0 \in D \ni \forall\ d \geq d_0 \text{ için } s_d \in N \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N}(p) \text{ için } N \in \mathcal{F}_s \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}_s \to p \end{aligned}$$

4.2 Sezgisel Fuzzy Kapalı Süzgeçler

Tanım 4.2.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve τ^c bu uzayın kapalılar ailesi olsun. $\mathcal{F} \subseteq \tau^c$ ailesi

$\mathcal{F}_1$) $\mathcal{F} \neq 0_\sim$ ve $0_\sim \notin \mathcal{F}$

$\mathcal{F}_2$) $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ için $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}_3$) $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$ ve $B \in \tau^c$ ise $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ **ye, sezgisel fuzzy kapalı süzgeç** veya τ^c-**süzgeç** denir (Pankajam 2009).

Tanım 4.2.2 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $\mathcal{G} \subseteq \tau^c$ olsun. $\mathcal{G}$ sonlu arakesit özelliğini sağlasın. $\mathcal{G}$ nin elemanlarının sonlu arakesitlerinden oluşan aileyi taban kabul eden bir tek τ^c-süzgeç vardır. Bu süzgece, $\mathcal{G}$ **tarafından üretilen** τ^c-**süzgeç** denir.

Teorem 4.2.1 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{F}$, X de tanımlı bir τ^c-süzgeç ve $A \in \tau^c$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:
1) $\mathcal{F} \cup \{A\}$ bir τ^c-süzgeç tarafından kapsanır
2) $\forall B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \neq 0_\sim$.

İspat:
1)⇒2) $\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{G}$ olacak şekilde, $\mathcal{G}$ kapalı süzgeci verilsin. $\forall B \in \mathcal{F}$ için $B \in \mathcal{G}$ ve $A \in \mathcal{G}$ dir. $\mathcal{G}$, τ^c-süzgeç olduğundan $B \cap A \neq 0_\sim$ dir.
2)⇒1) $\forall B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \neq 0_\sim$ olsun. Bu durumda $\mathcal{F} \cup \{A\}$ ailesi sonlu arakesit özelliğini sağlar. O halde $\mathcal{F} \cup \{A\}$, bir τ^c-süzgeç tarafından kapsanır.

Tanım 4.2.3 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, X de tanımlı bir τ^c-süzgeç olsun. $\mathcal{F}$, X de tanımlı τ^c-süzgeçler arasında kapsama bağıntısına göre maksimal eleman ise $\mathcal{F}$ ye, τ^c-**ultra süzgeç** denir.

Teorem 4.2.2 Her τ^c-süzgeç, bir τ^c-ultra süzgeç tarafından kapsanır (Pankajam 2009)

Teorem 4.2.3 (X,τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, X de tanımlı bir τ^c-süzgeç olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:
1) $\mathcal{F}$, τ^c-ultra süzgeçtir
2) $\exists\ A \in \tau^c \ni \forall B \in \mathcal{F}$ için $B \cap A \neq 0_\sim$ ise $A \in \mathcal{F}$ dir
3) $A \in \tau^c$ ve $A \notin \mathcal{F}$ ise $\exists\ B \in \mathcal{F} \ni$ des$(B) \subseteq X-$des(A).

İspat:

1)⇒2) $\mathcal{F}$ τ^c-ultra süzgeç olsun. $A \in \tau^c$ ve $\forall B \in \mathcal{F}$ için $B \cap A \neq 0_\sim$ olsun. $\mathcal{F} \cup \{A\}$ sonlu arakesit özelliğini sağlar. Bu durumda $\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{G}$ olacak şekilde bir $\mathcal{G}$, τ^c-süzgeci vardır. Bu ise $\mathcal{F}$ nin τ^c-ultra süzgeç olması ile çelişir. O halde $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ dir. $A \in \mathcal{G}$ olduğundan $A \in \mathcal{F}$ elde edilir.

2)⇒3) $A \in \tau^c$ ve $A \notin \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $\exists\ B \in \mathcal{F} \ni B \cap A = 0_\sim$ dir. O halde $B \subseteq A^c$ dir.

$$\forall\ x \in \text{des}(B) \text{ için } \mu_B(x) > 0$$

$B \cap A = 0_\sim$ olduğundan $\mu_A(x) = 0$ dır. Bu durumda $x \notin \text{des}(A)$ dır. Buradan, $x \in X-\text{des}(A)$ dir. Böylece $\text{des}(B) \subseteq X-\text{des}(A)$ elde edilir.

3)⇒1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ve $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ olsun. Bu durumda $\exists\ A \in \mathcal{G} \ni A \notin \mathcal{F}$ dir. **3)** den dolayı, $\exists\ B \in \mathcal{F} \ni \text{des}(B) \subseteq X-\text{des}(A)$ dır.

$$\begin{aligned}
\text{Herhangi bir } x &\in X \text{ için } \mu_B(x) = 0 \text{ veya } \mu_B(x) > 0 \\
\mu_B(x) &= 0 \Rightarrow \mu_{A\cap B}(x) = 0 \\
\mu_B(x) &> 0 \Rightarrow x \in des(B) \Rightarrow x \in X - des(A) \\
&\Rightarrow x \notin des(A) \\
&\Rightarrow \mu_A(x) = 0 \Rightarrow \mu_{A\cap B}(x) = 0
\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak $B \cap A = 0_\sim$ elde edilir. Fakat $A, B \in \mathcal{G}$ iken $B \cap A = 0_\sim$ değildir. Bu durumda $\mathcal{F}$, τ^c-ultra süzgeçtir.

Teorem 4.2.4 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$, X de tanımlı iki ayrık sezgisel fuzzy τ^c-ultra süzgeç olsun. Bu durumda,

$$(\underset{A_1\in\mathcal{U}_1}{\cap} des(A_1)) \cap (\underset{A_2\in\mathcal{U}_2}{\cap} des(A_2)) = 0_\sim$$

dir.

İspat: $x \in (\underset{A_1 \in \mathcal{U}_1}{\cap} \text{des}(A_1)) \cap (\underset{A_2 \in \mathcal{U}_2}{\cap} \text{des}(A_2))$ olsun. Bu durumda,

$$x \in \underset{A_1 \in \mathcal{U}_1}{\cap} des(A_1) \text{ ve } x \in \underset{A_2 \in \mathcal{U}_2}{\cap} des(A_2)$$

dır. Buradan $\forall A_1 \in \mathcal{U}_1$ ve $\forall A_2 \in \mathcal{U}_2$ için $\mu_{A_1}(x) \neq 0$ ve $\mu_{A_2}(x) \neq 0$ dır. O halde $A_1 \cap A_2 \neq 0_\sim$ dir.

$$\begin{aligned} \forall A_2 \quad &\in \quad \mathcal{U}_2 \text{ için } A_1 \cap A_2 \neq 0_\sim \Rightarrow A_2 \in \mathcal{U}_1 \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \forall A_1 \quad &\in \quad \mathcal{U}_1 \text{ için } A_1 \cap A_2 \neq 0_\sim \Rightarrow A_1 \in \mathcal{U}_2 \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ elde edilir. Bu ise $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ nin ayrık olmasıyla çelişir. O halde,

$$\forall\, x \in X \text{ için } x \notin (\underset{A_1 \in \mathcal{U}_1}{\cap} des(A_1)) \cap (\underset{A_2 \in \mathcal{U}_2}{\cap} des(A_2))$$

dir. Dolayısıyla $(\underset{A_1 \in \mathcal{U}_1}{\cap} des(A_1)) \cap (\underset{A_2 \in \mathcal{U}_2}{\cap} des(A_2)) = 0_\sim$ dır.

Tanım 4.2.4 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, τ^c-süzgeç olsun.

$$A \cup B \in \mathcal{F} \text{ iken } A \in \mathcal{F} \text{ veya } B \in \mathcal{F}$$

ise $\mathcal{F}$ ye **sezgisel fuzzy asal kapalı süzgeç** denir.

Teorem 4.2.5 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzayı verilsin. X deki her sezgisel fuzzy τ^c-ultra süzgeç, sezgisel fuzzy τ^c-asal süzgeçtir.

İspat: $\mathcal{U}$, τ^c-ultra süzgeç olmak üzere $A, B \in \tau^c$ ve $A \cup B \in \mathcal{U}$ olsun. Kabul edelim

ki, $A \notin \mathcal{U}$ ve $B \notin \mathcal{U}$ olsun.

$$\begin{aligned} A \quad &\notin \quad \mathcal{U} \Rightarrow \exists\ A^* \in \mathcal{U} \text{ var} \ni des(A^*) \subseteq X - des(A) \text{ ve} \\ B \quad &\notin \quad \mathcal{U} \Rightarrow B^* \in \mathcal{U} \text{ var} \ni des(B^*) \subseteq X - des(B) \\ &\Rightarrow \quad des(B^*) \cap des(B) = 0_\sim \end{aligned}$$

dır. $A \cup B, A^*, B^* \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$ bir süzgeç olduğundan $(A \cup B) \cap A^* \cap B^* \in \mathcal{U}$ dur.

$$des[(A \cup B) \cap A^* \cap B^*] = des((A \cup B)) \cap desA^* \cap desB^* = 0_\sim$$

ve buradan

$$(A \cup B) \cap A^* \cap B^* = 0_\sim$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde $A \in \mathcal{U}$ veya $B \in \mathcal{U}$ dur. Dolayısıyla $\mathcal{U}$, sezgisel fuzzy τ^c-asal süzgeçtir.

Teorem 4.2.6 $\mathcal{F}$, τ^c-süzgeç ve $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ yi içeren tüm sezgisel fuzzy τ^c-asal süzgeçlerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{F} = \underset{\mathcal{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{F})}{\cap} \mathcal{G}$ dir.

Teorem 4.2.7 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:
1) (X, τ) sezgisel fuzzy kompakt topolojik uzaydır
2) Her $\mathcal{F}$ sezgisel fuzzy τ^c-süzgeç için $\underset{A \in \mathcal{F}}{\cap} A \neq 0_\sim$
3) Her sezgisel fuzzy τ^c- asal süzgeç $\mathcal{F}$ için $\underset{A \in \mathcal{F}}{\cap} A \neq 0_\sim$
4) Her ultra τ^c-süzgeç $\mathcal{U}$ için $\underset{A \in \mathcal{U}}{\cap} A \neq 0_\sim$
dır (Pankajam ve Pushpalta 2011).

İspat:
1)⇒2) (X, τ) sezgisel fuzzy kompakt topolojik uzay olsun. Kabul edelim ki

$$\underset{A \in \mathcal{F}}{\cap} A = 0_\sim$$

olsun. Bu durumda, $\underset{A \in \mathcal{F}}{\cup} A^c = 1_\sim$ dir.

$A^c \in \tau$ ve (X, τ) sezgisel fuzzy kompakt topolojik uzay olduğundan

$$\{A_1^c, A_2^c, ..., A_n^c\} \in \tau \text{ ve } A_1^c \cup A_2^c \cup ... \cup A_n^c = 1_\sim$$

dır. O halde $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = 0_\sim$dır. Bu ise $\mathcal{F}$, nin süzgeç olması ile çelişir. Bu durumda $\underset{A\in\mathcal{F}}{\cap} A \neq 0_\sim$ dir.

2)⇒3) Açıktır.

3)⇒4) Her ultra süzgeç asal süzgeçtir. Dolayısıyla her ultra τ^c-süzgeç $\mathcal{U}$ için $\underset{A\in\mathcal{U}}{\cap} A \neq 0_\sim$ dır.

4)⇒1) Her ultra τ^c-süzgeç $\mathcal{U}$ için $\underset{A\in\mathcal{U}}{\cap} A \neq 0_\sim$ ve $\mathcal{K}$, X de sonlu arakesit özelliğini sağlayan sezgisel fuzzy kapalı kümelerin bir ailesi olsun.

$$\forall B \in \mathcal{K} \text{ için } \mathcal{G}_B = \{A \in \tau^c : B \subseteq A\}$$

ailesini tanımlayalım. Bu durumda $B \in \mathcal{G}_B$ dir. Şimdi $\mathcal{G} = \underset{B\in\mathcal{K}}{\cup} \mathcal{G}_B$ olsun.

$\mathcal{K}$ sonlu arakesit özelliğini sağladığından $\mathcal{G}$ de sağlar. Bu durumda $\mathcal{G}$ yi kapsayan sezgisel fuzzy kapalı ultra süzgeç vardır. Bu süzgeç $\mathcal{U}$ olsun.

$$B \in \mathcal{K} \Rightarrow B \in \mathcal{G}_B \Rightarrow \mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$$

dur. Buradan,

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \underset{A\in\mathcal{U}}{\cap} A \subseteq \underset{A\in\mathcal{G}}{\cap} A \subseteq \underset{A\in\mathcal{K}}{\cap} A$$

elde edilir. **4)** den, $\underset{A\in\mathcal{U}}{\cap} A \neq 0_\sim$ olduğundan, $\underset{A\in\mathcal{K}}{\cap} A \neq 0_\sim$ dir. Dolayısıyla, (X, τ) kompakttır.

4.3 Sezgisel Fuzzy Süzgeçler Üzerine Bazı Sonuçlar

Bu kısımda, sezgisel fuzzy süzgeçlerde $Q-$yakınsama tanımlanarak, bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Tanım 4.3.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olsun. $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy

süzgeç ve $p \in X$ sezgisel fuzzy noktası verilsin.

$$\forall\ U \in \mathcal{U}_Q(p) \text{ için } U \in \mathcal{F}$$

oluyorsa $\mathcal{F}$ **süzgeci** p **noktasına** $Q-$**yakınsar** denir ve $\mathcal{F} \overset{Q}{\to} p$ ile gösterilir.

Önerme 4.3.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve bir $p \in X$ sezgisel fuzzy noktası verilsin. Bu durumda,
a) $\mathcal{U}_Q(p) \overset{Q}{\to} p$
b) $\mathcal{F}_p = \{F \subseteq X : pqF\}$ ailesi bir sezgisel fuzzy süzgeç ve $\mathcal{F}_p \overset{Q}{\to} p$
dir.

İspat:
a) Açıktır.
b)
$\mathcal{F}_1)$ $F \in \mathcal{F}_p$ olsun. pqF olduğundan $F \neq 0_\sim$ dır. $0_\sim \notin \mathcal{F}_p$ dir.
$\mathcal{F}_2)$ $F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}_p$ olsun. pqF_1 ve pqF_2 dir. O halde $pq(F_1 \cap F_2)$ ve $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_p$ dir.
$\mathcal{F}_3)$ $F \in \mathcal{F}_p$ ve $F \subseteq G$ olacak şekilde bir G, sezgisel fuzzy kümesi verilsin. pqF ve $F \subseteq G$ olduğundan, pqG dir. Buradan $G \in \mathcal{F}_p$ elde edilir. $\mathcal{F}_p$ bir sezgisel fuzzy süzgeç ve $\mathcal{F}_p \overset{Q}{\to} p$ dir.

Tanım 4.3.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy süzgeç olsun. $p \in X$ sezgisel fuzzy noktası verilsin.

$$\forall N \in \mathcal{N}(p) \text{ ve } \forall F \in \mathcal{F} \text{ için } N \cap F \neq 0_\sim$$

oluyorsa p **ye** F **nin,** $N-$**kapanış noktası** denir.

Önerme 4.3.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy süzgeç ve $p \in X$ sezgisel fuzzy noktası verilsin. $\mathcal{F} \overset{N}{\to} p \Rightarrow p$, $\mathcal{F}$ nin $N-$kapanış noktasıdır.

İspat: $\mathcal{F} \overset{N}{\to} p$ olsun. Bu durumda, $\forall\ N \in \mathcal{N}(p)$ için $N \in \mathcal{F}$ dir. $\mathcal{F}$ süzgeç olduğundan,

$$\forall\ F \in \mathcal{F} \text{ için } F \cap N \neq 0_{\sim}$$

dır. O halde p, $\mathcal{F}$ nin $N-$kapanış noktasıdır.

Teorem 4.3.1 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy süzgeç ve $p \in X$ sezgisel fuzzy noktası verilsin. Bu durumda p, $\mathcal{F}$ nin $N-$kapanış noktası ise $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ ve $\mathcal{F}^* \to p$ olacak şekilde X de bir $\mathcal{F}^*$ sezgisel fuzzy süzgeci vardır.

İspat:
$\Rightarrow$) p, $\mathcal{F}$ nin $N-$kapanış noktası olsun. Buna göre,

$$\forall N \in \mathcal{N}(p) \text{ ve } \forall F \in \mathcal{F} \text{ için } F \cap N \neq 0_{\sim}$$

dır. Bu durumda $\mathcal{F} \cup \mathcal{N}$ ailesi, X de bir $\mathcal{F}^*$ sezgisel fuzzy süzgeci için alt taban oluşturur. Dolayısıyla $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ ve $\mathcal{F}^* \to p$ dir.

$\Leftarrow$) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ ve $\mathcal{F}^* \to p$ olacak şekilde X de bir $\mathcal{F}^*$ sezgisel fuzzy süzgeci olsun. O halde,

$$\forall F \in \mathcal{F} \text{ için } F \in \mathcal{F}^* \text{ ve } \forall N \in \mathcal{N}(p) \text{ için } N \in \mathcal{F}^*$$

dir. Buradan $F \cap N \neq 0_{\sim}$ ve p, $\mathcal{F}$ nin $N-$kapanış noktasıdır.

Teorem 4.3.2 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay ve $A \subseteq X$ sezgisel fuzzy kümesi verilsin. Bu durumda, A sezgisel fuzzy açık kümedir $\Leftrightarrow$ A , A ile çakışan her sezgisel fuzzy noktaya yakınsayan sezgisel fuzzy süzgecin elemanıdır.

İspat:
$\Rightarrow$)A sezgisel fuzzy açık küme ve $\mathcal{F}$, X de bir sezgisel fuzzy süzgeç olsun.

$$\forall\ p \in X \text{ sezgisel fuzzy noktası } \ni pqA \text{ ve } A \in \mathcal{N}_Q(p)$$

dir. Buradan $A \in \mathcal{F}$ elde edilir.
$\Leftarrow$) $\mathcal{F} = \mathcal{N}_Q(p)$ alınırsa, $\forall\ p \in X$ sezgisel fuzzy noktası için pqA ve $A \in \mathcal{N}_Q(p)$ dir. Bu durumda A, sezgisel fuzzy açık kümedir.

Tanım 4.3.3 (X, τ) sezgisel fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{F}$, X de sezgisel fuzzy süzgeç ve $p \in X$ sezgisel fuzzy noktası verilsin.

$$\forall N \in \mathcal{N}_Q(p) \text{ ve } \forall F \in \mathcal{F} \text{ için } NqF$$

oluyorsa p **noktası** F **nin** $Q-$**kapanış noktasıdır** denir.

Tanım 4.3.4 $(X_1, \mathcal{F}_1)$ ve $(X_2, \mathcal{F}_2)$ sezgisel fuzzy süzgeç uzaylar ve $X = X_1 \times X_2$ olsun. $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ **sezgisel fuzzy çarpım** süzgeci,

$$\mathcal{B} = \{F \times G : F \in \mathcal{F}_1, G \in \mathcal{F}_2\}$$

ailesinin taban olduğu sezgisel fuzzy süzgeçtir.

Önerme 4.3.3 $(X_1 \times X_2, \tau)$, (X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) sezgisel fuzzy topolojik uzaylarının çarpım uzayı olsun. $(X_1, \mathcal{F}_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2)$ sezgisel fuzzy süzgeç uzayları ve $p_1 \in X_1$, $p_2 \in X_2$ sezgisel fuzzy noktaları verilsin. Bu durumda,

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{Q} p_1 \text{ ve } \mathcal{F}_2 \xrightarrow{Q} p_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \xrightarrow{Q} (p_1, p_2)$$

dir.

İspat:$\Rightarrow$)

$$N \in \mathcal{U}_Q((p_1, p_2)) \Rightarrow \exists\ N_1 \in \mathcal{U}_Q(p_1) \text{ ve } \exists\ N_2 \in \mathcal{U}_Q(p_2)\ \ni\ N_1 \times N_2 \subseteq N$$

dir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 \overset{Q}{\to} p_1 &\Rightarrow \forall N_1 \in \mathcal{U}_Q(p_1) \text{ için } N_1 \in \mathcal{F}_1 \\
\mathcal{F}_2 \overset{Q}{\to} p_2 &\Rightarrow \forall N_2 \in \mathcal{U}_Q(p_2) \text{ için } N_2 \in \mathcal{F}_2 \\
&\Rightarrow N_1 \times N_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \\
&\Rightarrow \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \overset{Q}{\to} (p_1, p_2)
\end{aligned}$$

dır.

$\Leftarrow$) $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \overset{Q}{\to} (p_1, p_2)$ olsun. Bu durumda p_1, p_2 izdüşüm fonksiyonları sürekli olduğundan, $\mathcal{F}_1 \overset{Q}{\to} p_1$ ve $\mathcal{F}_2 \overset{Q}{\to} p_2$ dir.

Önerme 4.3.4 $(X_1 \times X_2, \tau)$ sezgisel fuzzy çarpım uzayı olmak üzere $(X_1, \mathcal{F}_1)$, $(X_2, \mathcal{F}_2)$ sezgisel fuzzy süzgeç uzaylar ve $p_1 \in X_1$, $p_2 \in X_2$ iki sezgisel fuzzy nokta olsun. p_1 noktası $\mathcal{F}_1$ in, $Q-$kapanış noktası ve p_2 noktası $\mathcal{F}_2$ nin, $Q-$kapanış noktası ise $p = (p_1, p_2)$, $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ nin $Q-$kapanış noktasıdır.

İspat: $G \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ olsun. Bu durumda,

$$\exists\ F_1 \in \mathcal{F}_1 \ ve\ \exists\ F_2 \in \mathcal{F}_2\ \ni F_1 \times F_2 \subseteq G$$

dir. Şimdi $N \in \mathcal{U}_Q(p)$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\exists\ N_1 \ &\in \ \mathcal{U}_Q(p_1) \text{ ve } N_2 \in \mathcal{U}_Q(p_2)\ \ni N_1 \times N_2 \subseteq N \\
&\Rightarrow N_1 q F_1 \text{ ve } N_2 q F_2 \\
&\Rightarrow (N_1 \times N_2) q (F_1 \times F_2) \\
&\Rightarrow (N_1 \times N_2) q G
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $p = (p_1, p_2)$, $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ nin, $Q-$kapanış noktasıdır.

Önerme 4.3.5 $(X, \mathcal{F})$ ve $(Y, \mathcal{G})$ sezgisel fuzzy süzgeç uzayları ve $f_1, f_2{:}(X, \mathcal{F}) \to$

$(Y, \mathcal{G})$ süzgeç sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda,

$$(f_1, f_2) : (X, \mathcal{F}) \to (Y \times Y, \mathcal{G} \times \mathcal{G})(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

şeklinde tanımlı (f_1, f_2) fonksiyonu da sezgisel fuzzy süzgeç sürekli fonksiyondur.

İspat: $A \times B \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ olsun.

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)^{-1}(A \times B)(x) &= (A \times B)(f_1(x), f_2(x)) \\
&= \langle (f_1(x), f_2(x)), \mu_A(f_1(x)) \wedge \mu_B(f_2(x)), \gamma_A(f_1(x)) \vee \gamma_B(f_2(x)) \rangle \\
&= (f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B))(x) \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

olduğundan (f_1, f_2) fonksiyonu, sezgisel fuzzy süzgeç sürekli fonksiyondur.

KAYNAKLAR

Atanassov, K. T. 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, Vol.20; p.p. 87-96.

Atanassov, K. T. 1989. More on intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 33; p.p. 37-45.

Bayhan, S. and Çoker, D. 2000. On Seperation Axioms in Intuitionistic Topological Spaces. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 27; p.p. 621-630.

Chang, C. L. 1968. Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 24; p.p. 182-190.

Çoker, D. and Demirci, M. 1995. On Intuitionistic Fuzzy Points. Notes On Intu itionistic Fuzzy Sets, Vol. 1; p.p. 79-84.

Çoker, D. 1996. An introduction to fuzzy subspaces in intuitionistic fuzzy topolog ical spaces. The journal of fuzzy mathematics, Vol. 4; p.p. 749-764.

Çoker, D. 1997. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. Fuzzy sets and systems, Vol. 88; p.p. 81-89.

Çoker, D. and Turanlı, N. 2000. Fuzzy connectedness in intuitionistic fuzzy topolog ical spaces. Fuzzy sets and systems, Vol. 116; p.p. 369-375.

Gürçay, H. and Çoker, D. 1997. On fuzzy continuity in intuitionistic fuzzy topolog ical spaces. Journal of fuzzy mathematics, Vol. 5; p.p. 365-378.

Hanafy, I. M. Completely continuous functions in intuitionistic fuzzy topological spaces. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 53; p.p. 793-803

Pankajam, N. and Pushpalta, A. 2011. A new approach to intuitionistic compact ness. Acta Universitatis Apulensis, Vol. 25; p.p. 221-227

Pankajam, N. 2009. τ^c Prefilters in intuitionistic fuzzy sets. Applied Mathematical Sciences, Vol. 3; p.p. 2107-2112.

Lee, S. J. and Lee, E. P. 2000. The category of intuitionistic fuzzy topological spaces. Bulletin of the Korean Mathematical Society, Vol. 37; p.p. 63-76.

Lowen, R. 1976. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. Journal of Math ematical Analysis and Applications, Vol. 24; p.p. 182-190

Lupianez, F. G. 2006. Nets and filters in intuitionistic fuzzy topological spaces. Information Sciences, Vol. 176; p.p. 2396-2404.

Lupianez, F. G. 2005. Quasi-Coincidence for intuitionistic fuzzy points. Internat. J. Math. and Math. Sc, Vol. 10; p.p. 1539-1542

Nouh, A. A. 2005. On the convergence theory in fuzzy topological spaces and its applications. Czechoslavak Mathematical Journal, Vol. 55; p.p. 295-316

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İrem Eroğlu
Doğum Yeri : Ordu
Doğum Tarihi : 19.02.1988
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ordu Fen Lisesi(2002-2005)
Lisans : Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2005-2009)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik AnabilimDalı (Şubat 2011 – Ocak 2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

TOBB ETÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2009-2010)