ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MİNİMAL YÜZEYLERİN WEIERSTRASS GÖSTERİMLERİ VE BJÖRLING PROBLEMİ

Seher KAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2021

ÖZET

Doktora Tezi

MİNİMAL YÜZEYLERİN WEİERSTRASS GÖSTERİMLERİ
VE BJÖRLING PROBLEMİ

Seher KAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Eş Danışman: Prof. Dr. Rafael LOPEZ CAMINO

Öklid uzayında her noktasında sıfır ortalama eğriliğe sahip bir yüzey minimal yüzey olarak adlandırılır. Lorentz-Minkowski uzayında aynı özelliğe sahip spacelike yüzeyler ise maksimal yüzeyler olarak bilinir. Bu tez çalışmasının temel amacı Öklid uzayında minimal yüzey üretmek için kullanılan yöntemlerden bazılarını ele almak ve Lorentz-Minkowski uzayında kullanarak maksimal yüzey üretmektir.

Tez şu şekilde düzenlenmiştir. Birinci bölüm, minimal ve maksimal yüzey teorisinin tarihçesine ayrılmıştır. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, minimal ve maksimal yüzeylerin Weierstrass-Enneper gösterimlerinden bahsedilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında Björling formülü verilmiştir. Tezin orijinal kısmını dördüncü bölüm oluşturmaktadır. Bu bölümde Björling formülü kullanılarak yeni maksimal yüzey örnekleri elde edilmiştir. Son bölümde ise yapılan çalışmaların genel bir değerlendirilmesi verilmiş ve tez çalışması tamamlanmıştır.

Mart 2021, 72 sayfa

Anahtar Kelimeler: minimal yüzeyler, maksimal yüzeyler, Lorentz-Minkowski uzayı, Björling problemi, çember, helis.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

WEIERSTRASS REPRESENTATION OF MINIMAL SURFACES AND BJÖRLING PROBLEM

Seher KAYA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Co-supervisor: Prof. Dr. Rafael LOPEZ CAMINO

A surface is called a minimal surface if it has vanishing mean curvature at every point. In Lorentz-Minkowski space, spacelike surfaces having the same properties are known as maximal surfaces. The main goal of this thesis is to consider some of the methods used to construct minimal surfaces in Euclidean space and to construct maximal surfaces using them in Lorentz-Minkowski space.

The thesis has been organized as follows. The first chapter is devoted to the history of minimal and maximal surface theory. In the second chapter, some of the basic definitions and theorems that will be needed for other sections of the thesis are given. In the third chapter, Weierstrass-Enneper representations of minimal and maximal surfaces are mentioned. Also, the Björling formula is given in 3-dimensional Euclidean and Lorentz-Minkowski spaces. The original part of the thesis is the fourth chapter. In this chapter, new examples of maximal surfaces are obtained by using the Björling formula. In the last section, the studies in the previous sections are evaluated and the thesis is completed.

March 2021, 72 pages

Key Words: minimal surfaces, maximal surfaces, Lorentz-Minkowski space, Björling problem, circle, helix.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca beni yönlendiren, destekleyen, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ya, desteklerini her zaman hissettiğim sayın hocalarım Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ye ve Prof. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'e kıymetli zamanını ayırarak çalışmama destek olan tez izleme kurulu üyesi Sayın Prof. Dr. Hurşit ÖNSİPER (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e ve tez savunma jüri üyesi Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a içten teşekkürlerimi sunarım.
Doktora çalışmalarım esnasında bir akademik yıl geçirdiğim İspanya'da beni misafir eden, değerli zamanını ayırarak tez çalışmalarıma temel oluşturan, akademik anlamda desteğini esirgemeyen eş danışmanım Sayın Prof. Dr. Rafael LOPEZ (Universidad de Granada, Departamento de Geometria y Topologia)'e çok teşekkür ederim.

Desteklerini her zaman hissettiğim değerli arkadaşlarıma, hayatım boyunca her anımda yanımda olan, her konuda bana destek veren, emeklerini hiçbir zaman ödeyemeyeceğim canım aileme gönülden teşekkür ederim.

Bu tez "Tübitak 2211-A Yurtiçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Seher KAYA
Ankara, Mart 2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{L}^3$	3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
Δ	Laplace operatörü
H	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğriliği

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Öklid uzayında düzgün bir parametrik yüzeyin her noktasında ortalama eğriliği sıfır ise yüzey, minimal olarak adlandırılır. Minimal yüzeyler, diferensiyel geometride yüzeyler teorisinin önemli bir sınıfıdır. Bu yüzeyler mimarlıkta, sanat ve doğa bilimlerinde yaygın olarak kullanılırlar. Öklid uzayında minimal yüzey çalışmaları 1762 yılında Lagrange tarafından ortaya konulan ”3-boyutlu uzayda verilen bir eğriyi sınır kabul eden yüzeyler içerisinde minimum alana sahip olan yüzey bulunabilir mi?” problemi ile başlamıştır.

Her $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi dönme hareketi altında lokal olarak diferensiyellenebilir bir fonksiyonun grafiği olarak

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = u(x, y)\}$$

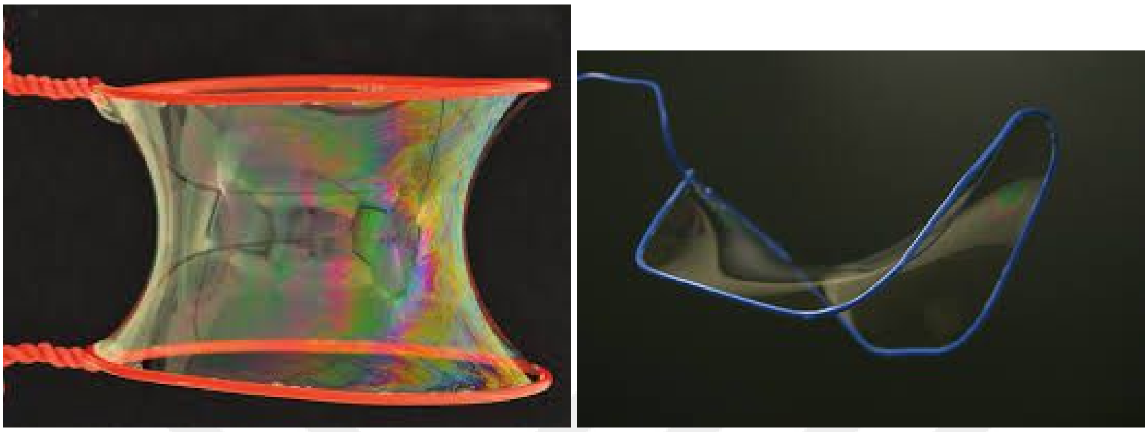
şeklinde yazılabilir. Lagrange yaptığı hesaplamalarla şu sonucu elde etmiştir: Eğer

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

ikinci dereceden quasi-lineer eliptik kısmi diferensiyel denklemi sağlanıyor ise M, minimal bir yüzeydir. Bu kısmi diferensiyel denklem divergens formunda

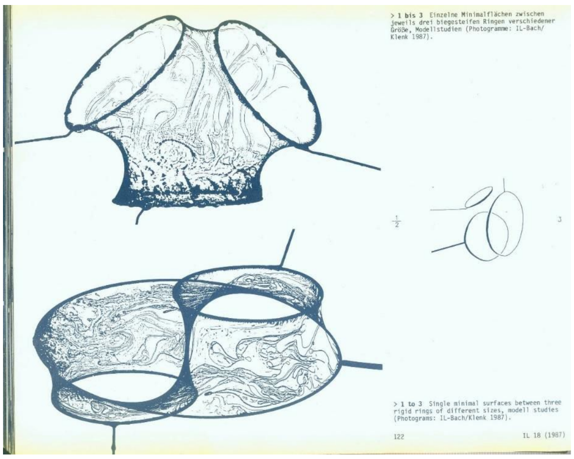
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Bilinen ilk minimal yüzey örnekleri 1741 yılında Euler tarafından bulunan düzlem ile katenoid yüzeyi ve 1776 yılında Meusnier tarafından bulunan helikoid yüzeyidir. Ayrıca Meusnier, Lagrange'ın varyasyon probleminin kritik noktası olarak verdiği minimal yüzey tanımının yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olmasına denk olduğunu göstererek geometrik bir yorum vermiştir. 1830-1890 yılları arasında Enneper, Scherk, Schwarz, Riemann ve Weierstrass gibi ünlü matematikçiler tarafından minimal yüzey teorisinin kompleks analiz alanına uygulanması ile önemli gelişmeler yaşanmıştır. Ayrıca bu yıllarda Plateau, minimal yüzeylerin fiziksel olarak sabun köpükleriyle elde edilebileceğini gözlemlemiştir. Telden yapılmış bir çerçevenin sabunlu suya batırılıp çıkarılmasıyla ince bir film halinde bir sabun zarı elde edilir. Bu zar, sınırı bahsedilen çerçeve olan bir minimal yüzey örneğidir. Bundan dolayı, bir eğri ile sınırlandırılmış minimal yüzey elde etme problemi "Plateau problemi" olarak bilinmektedir.



Şekil 1.1 Sınırları tel çerçeve olan sabun köpüğü ile elde edilmiş iki minimal yüzey örneği

Minimal yüzeyler, Alman mimar Frei Otto'nun ilgisini çekmiş ve ünlü mimarın yaptığı çalışmalarla uygulama alanı bulmuştur. Frei Otto, telden yapılmış çerçeveleri kullanarak sabun köpükleri yardımıyla minimal yüzeyler elde etmiş ve bunlar ünlü mimarın birçok tasarımına ilham kaynağı olmuştur (Güner 2016).



Şekil 1.2 Frei Otto'nun sabun köpükleri ile elde ettiği formlar

1835 yılında Scherk kendi ismi ile anılan yeni bir minimal yüzey örneği elde etmiştir. Bu yüzey, bir öteleme yüzeyidir ve bu tip yüzeyler içerindeki tek minimal yüzey

Şekil 1.3 Frei Otto tarafından tasarlanan Münih Olimpik Parkındaki spor tesislerinin çatısı

örneğidir. Scherk, daha sonra tüm minimal regle yüzeyleri elde etmeye çalışmış ancak bu problem Catalan tarafından 1842 yılında çözülmüştür. Catalan, helikoid yüzeyinin $\mathbb{R}^3$ uzayında tek minimal regle yüzey olduğunu ispatlamıştır. 1914-1950 yılları arasında minimal yüzeyler, kısmi diferensiyel denklemler teorisinde ele alınmış ve Bernstein, Courant, Douglas, Morrey, Mors, Rado, Shiffman gibi matematikçilerin bu teoriye önemli katkıları olmuştur. Douglas, Plateau problemini çözerek 1936 yılında matematiğin nobeli olarak bilinen Fields madalyasını kazanmıştır. 1960 lı yıllardan itibaren Calabi, do Carmo, Chern, Gulliver, Finn, Nitsche, Osserman ve bazı diğer matematikçilerin ölçüm teori, integrallenebilir sistemler, konformal geometri, fonksiyonel analiz gibi birkaç disiplini birlikte kullanması, minimal yüzey teorisine yeni bir bakış açısı kazandırmıştır (Perez 2017). Daha sonra bilgisayarların da kullanımı ile kendi kendini kesmeyen birçok yeni minimal yüzey örneği elde edilmiştir. Bununla birlikte bu yüzeylerin sınıflandırılması gibi yeni problemler ortaya çıkmıştır.

3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında ortalama eğriliği her noktasında sıfır olan spacelike yüzeyler, lokal olarak alan integralinde maksimum olma durumunu ifade ederler. Bu nedenle bu tip yüzeyler maksimal yüzey olarak adlandırılır. Ortalama eğriliği her noktasında sıfır olan timelike yüzeyler ise minimal yüzey olarak bilinir; ancak bu tip yüzeylerin alan cinsinden bir geometrik yorumu verilmemiştir. Dört boyutlu uzayda yapılan çalışmalarda maksimal ya da minimal yüzey yerine sıfır ortalama eğrilikli yüzey isimlendirmesi daha yaygındır.

Literatürde minimal ve maksimal yüzey elde etmek için yapılmış çeşitli çalışmalar mevcuttur. Bunlardan bir tanesi Weierstrass-Enneper gösterimleri, bir diğeri ise Björling problemidir. Modern teori açısından Karl Weierstrass ve Alfred Enneper'in yaptıkları çalışmalar oldukça önemlidir. Bu çalışmalarla Öklid uzayında minimal yüzeyler ile kompleks analiz arasındaki yakın ilişki ortaya konmuş, minimal yüzeylerin analitik (holomorf) fonksiyonlar yardımıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir (Barbosa ve Colares 1986, Osserman 1989, Dierkes vd. 1992). Daha sonra maksimal yüzeyler için de benzer çalışmalar yapılmıştır (Kobayashi 1983, López vd. 2000). Björling problemi ise verilen bir eğriyi üzerinde parametre eğrisi olarak barındıran minimal yüzey elde etme problemidir ve Björling tarafından ortaya konulmuş (Björling 1844), Schwarz tarafından kompleks değişkenler yardımıyla çözülmüştür (Schwarz 1890). Daha sonra bu problem çeşitli uzaylarda ele alınmış, çözümü elde edilmiştir. Örneğin; $\mathbb{L}^3$ uzayında maksimal yüzeyler için (Alias vd. 2003), minimal yüzeyler için (Chaves vd. 2011, Kim vd. 2011), Lie gruplarında ise (Cintra vd. 2016). Son zamanlarda yapılan bir çalışmada ise Björling problemi kullanılarak yeni minimal yüzey örnekleri elde etmek için bir yöntem geliştirilmiştir (López ve Weber 2018). Ayrıca bu problem sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli yüzeylere de genişletilmiştir (Brander ve Dorfmeister 2010).

Bu tez çalışmasının temel amacı, $\mathbb{L}^3$ uzayında yeni maksimal yüzey örnekleri elde etmektir. Burada maksimal yüzeyler için verilen Björling formülü kullanılarak çember ya da helis eğrisini içeren maksimal yüzeyler araştırılmıştır. Bu yüzeylerin parametrik denklemleri açık bir şekilde elde edilmiş, ayrıca Weierstrass-Enneper gösterimleri de verilmiştir. Ayrıca daha önce Kobayashi tarafından verilen maksimal dönel yüzeyler, dördüncü bölümde elde edilen yüzeylerin özel hali olarak karşımıza çıkar. Yapılan hesaplamalar ve çizimler için Mathematica programı kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklid uzayında, Lorentz-Minkowski uzayında ve kompleks fonksiyonlar teorisinde yer alan bazı temel tanım, kavram ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1. M, N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\psi : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere; $p \in M$ için $d\psi_p : T_p(M) \to T_{\psi(p)}(N)$ türev dönüşümü bire-bir ise ψ, bir immersiyon (daldırma) olarak adlandırılır (Do Carmo 1976).

Tanım 2.2. $U \subset \mathbb{R}^2$ basit bağlantılı açık bir küme ve $\psi : U \to \mathbb{R}^3$, $\psi = \psi(u, v)$, C^k $(k \geq 2)$ sınıfından bir immersiyon olsun. ψ dönüşümü, $\mathbb{R}^3$ uzayında parametrik bir yüzey tanımlar. ψ_u ve ψ_v, sırasıyla u ve v değişkenlerine göre kısmi türev olmak üzere; eğer

$$|\psi_u| = |\psi_v| \quad \text{ve} \quad \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0 \tag{2.1}$$

eşitlikleri sağlanıyor ise ψ bir konformal dönüşümdür.

$$\lambda = |\psi_u| = |\psi_v|$$

olmak üzere; U cümlesi üzerine indirgenen metrik

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) \tag{2.2}$$

şeklindedir ve (u, v), ψ dönüşümü ile elde edilen yüzeyin izotermal parametresidir (Barbosa ve Colares 1986).

Teorem 2.1. U basit bağlantılı açık bir cümle ve $\psi : U \to \mathbb{R}^3$, C^k $(k \geq 2)$ sınıfından bir immersiyon olsun. $\widetilde{\psi} = \psi \circ \varphi$ konformal dönüşüm olacak şekilde C^k sınıfından bir diffeomorfizm $\varphi : U \to U$ vardır (Spivak 1979).

M bağlantılı yönlendirilebilir bir yüzey ve $X : M \to \mathbb{R}^3$, C^k sınıfından bir immersiyon olsun. Teorem 2.1 den yüzeyin her noktasının, (u, v) izotermal parametrenin tanımlı olduğu bir komşuluğa sahip olduğu söylenebilir. Bu durumda M üzerine indirgenmiş metrik lokal olarak

$$ds^2 = \lambda^2|dz|^2, \quad z = u + iv \tag{2.3}$$

dir. Bu şekilde bir koordinat değişimi konformal dönüşümdür.

M bir yüzey ve $p \in M$ noktasının iki komşuluğu U ve U' olsun. $\varphi_u : U \to \mathbb{R}^2$, $\varphi'_u : U' \to \mathbb{R}^2$ olmak üzere;

$$\varphi'_u \varphi_u^{-1} : \varphi_u(U \cap U') \to \varphi'_u(U \cap U')$$

holomorf (analitik) ise M yüzeyi bir Riemann yüzeyidir. Bir Riemann yüzeyi üzerinde kompleks (konformal) yapı vardır. Riemann yüzeyinin en basit örnekleri $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin kendisi, her $U \subset \mathbb{C}$ bölgesi (kompleks düzlemin her bağlantılı açık altkümesi), genişletilmiş kompleks düzlem $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (Riemann küresi) dir.

Tanım 2.3. (Riemann yüzeyi) Bir Riemann yüzeyi lokal homeomorfizm ailesi tarafından tanımlanan konformal yapı ile birlikte bağlantılı bir Hausdorff uzaydır (Ahlfors ve Sario 1960).

M yüzeyi izotermal parametrelemelerin bir ailesi ile birlikte bir Riemann yüzeyi olarak adlandırılır ve $z = u + iv$ cinsinden koordinat değişimi holomorftur (Barbosa ve Colares 1986). Bir Riemann yüzeyi üzerinde, lokal olarak

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{2.4}$$

Wirtinger operatörlerini göz önüne alalım. $f : M \to \mathbb{C}$ kompleks değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Cauchy-Riemann denklemleri kullanılarak şu sonuçlar elde edilir:

1. f fonksiyonu holomorftur gerek ve yeter koşul $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ dır.
2. f fonksiyonu anti-holomorftur gerek ve yeter koşul $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ dır.

Tanım 2.4. $M \subset \mathbb{R}^3$ regüler bir yüzey ve yüzeyin birim normal vektör alanı N olsun. $p \in M$, $v_p \in T_pM$ için yüzeyin şekil operatörü $S(v_p) = -D_vN$ dir (Gray vd. 1998).

Tanım 2.5. $M \subset \mathbb{R}^3$ regüler bir yüzey ve S yüzeyin şekil operatörü olsun. $p \in M$ noktasında yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği $K, H : M \to \mathbb{R}$ sırasıyla

$$K(p) = det(S(p)) \quad \text{ve} \quad H = \frac{1}{2} iz(S(p))$$

şeklinde tanımlanır (Gray vd. 1998).

Tanım 2.6. $M = \psi(u,v) \subset \mathbb{R}^3$ regüler parametrik bir yüzey ve yüzeyin birim normal vektör alanı $N = \frac{\psi_u \times \psi_v}{|\psi_u \times \psi_v|}$ olsun.

$$E = \langle \psi_u, \psi_u \rangle \ , \quad F = \langle \psi_u, \psi_v \rangle \ , \quad G = \langle \psi_v, \psi_v \rangle$$

katsayıları yüzeyin

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

birinci temel formunun katsayılarıdır.

$$\begin{aligned} e &= -\langle \psi_u, N_u \rangle = \langle \psi_{uu}, N \rangle \\ f &= -\langle \psi_u, N_v \rangle = \langle \psi_{uv}, N \rangle = \langle \psi_{vu}, N \rangle = -\langle \psi_v, N_u \rangle \\ g &= -\langle \psi_v, N_v \rangle = \langle \psi_{vv}, N \rangle \end{aligned}$$

katsayıları yüzeyin

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

ikinci temel formunun katsayılarıdır (Gray vd. 1998).

Teorem 2.2. $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $M = \psi(u,v)$, parametrik yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{ve} \quad H = \frac{eG - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$$

dir (Gray vd. 1998).

Tanım 2.7. Düzgün bir yüzeyin her noktasında ortalama eğriliği sıfır ise yüzeye minimal yüzey denir (Gray vd. 1998).

Önerme 2.1. Düzgün parametrik bir $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ yüzeyi ve U içinde sınırlı bir $D \subset U$ bölgesi alalım. $\overline{D}$ kümesi, D bölgesi ile ∂D sınırının birleşimi olmak üzere; ψ yüzeyi minimaldir gerek ve yeter şart tüm D bölgeleri ve $\psi(\overline{D})$ görüntüsünün tüm normal varyasyonları için $A'(0) = 0$ dır. (Do Carmo 1976).

Yani bir ψ minimal yüzeyindeki her sınırlı $\psi(\overline{D})$ bölgesi, bu bölgenin her normal varyasyonunun alan fonksiyonunun kritik noktasıdır.

Tanım 2.8. $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayı ve $m = (m_1, m_2, m_3), n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere; Lorentz-Minkowski uzayı $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, üzerinde

$$\langle m, n \rangle = m_1 n_1 + m_2 n_2 - m_3 n_3$$

metriği tanımlı bir metrik uzaydır ve bu metriğe de Lorentz metriği denir (López 2014).

Tanım 2.9. Herhangi bir $m \in \mathbb{L}^3$ vektörü

$$\begin{aligned} \langle m, m \rangle &> 0 \quad \text{veya} \quad m = 0 \quad \text{ise} \quad \text{spacelike} \quad \text{vektör} \\ \langle m, m \rangle &< 0 \quad \text{ise timelike vektör} \\ \langle m, m \rangle &= 0 \quad \text{ise lightlike (null) vektör} \end{aligned}$$

olarak adlandırılır (López 2014).

Tanım 2.10. $m, n \in \mathbb{L}^3$ olsun. $m \times n$ Lorentz vektörel çarpımı, $\forall l \in \mathbb{L}^3$ için $\langle m \times n, l \rangle = \det(m, n, l)$ şeklinde tanımlıdır (López 2014).

$\mathbb{L}^3$ uzayında metrik göz önüne alınırsa $m, n \in \mathbb{L}^3$ için Lorentz vektörel çarpım

$$m \times n = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$$

olup $m \times n = (m_2 n_3 - m_3 n_2, m_3 n_1 - m_1 n_3, m_2 n_1 - m_1 n_2)$ şeklinde verilir.

Tanım 2.11. $\mathbb{L}^3$ uzayında, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{L}^3$ bir eğri olsun. $t \in I$ için $\alpha'(t)$ spacelike, timelike ya da lightlike bir vektör ise α eğrisi t noktasında sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike eğridir denir. $\forall t \in I$ için bu durum geçerli ise α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike bir eğridir (López 2014).

M, basit bağlantılı bir yüzey ve $X : M \to \mathbb{L}^3$ bir immersiyon olsun. Yani $dX_p : T_pM \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü bire-birdir. Pullback metriği göz önüne alınsın.

Tanım 2.12. M bir yüzey olsun. $X : M \to \mathbb{L}^3$ immersiyonu, $\forall P \in M$ için $(T_pM, X^*(\langle , \rangle_p))$ tüm tanjant düzlemlerinin spacelike, timelike ya da lightlike olmasına bağlı olarak sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike immersiyondur (López

2014).

Spacelike ve timelike immersiyonlar dejenere olmayan immersiyonlardır.

Tanım 2.13. $U \subset \mathbb{L}^2$ basit bağlantılı açık bir küme ve $\psi : U \to \mathbb{L}^3$, C^k $(k \geq 2)$ sınıfından spacelike bir immersiyon olsun. ψ dönüşümü $\mathbb{L}^3$ uzayında parametrik bir yüzey tanımlar. Eğer

$$|\psi_u| = |\psi_v| \quad \text{ve} \quad \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0 \tag{2.5}$$

eşitlikleri sağlanıyor ise ψ bir konformal dönüşüm olarak adlandırılır.

$$\lambda = |\psi_u| = |\psi_v|$$

olmak üzere; U cümlesi üzerine indirgenen metrik

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) \tag{2.6}$$

şeklindedir ve (u, v), ψ dönüşümü ile elde edilen yüzeyin izotermal parametresidir.

$\mathbb{L}^3$ uzayında, M yüzeyi üzerine indirgenen metrik pozitif tanımlı Riemann metriği ise $X : M \to \mathbb{L}^3$ immersiyonu bir spacelike yüzeydir. Yani her maksimal immersiyon, lokal olarak bir maksimal yüzey belirtir. Spacelike ya da timelike yüzeyler dejenere olmayan yüzeylerdir. Lorentz-Minkowski uzayında bir yüzey, sahip olduğu birim normal vektör alanı kullanılarak şu şekilde karakterize edilebilir: M bir yüzey ve yüzeyin birim normal vektör alanı N olmak üzere;

$$\langle N, N \rangle = \epsilon = \begin{cases} -1, & M \quad \text{spacelike} \quad \text{yüzey} \\ 1, & M \quad \text{timelike} \quad \text{yüzey} \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.14. M bir yüzey ve $X : M \to \mathbb{L}^3$ dejenere olmayan bir immersiyon olsun. Ortalama eğrilik vektörü

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{2} iz(\sigma)$$

dır. Yüzeyin ortalama eğriliği ise $\overrightarrow{H} = HN$ olduğundan

$$H = \epsilon \langle \overrightarrow{H}, N \rangle$$

dir (López 2014). Burada $\sigma : \chi(M) \times \chi(M) \to (\chi(M))^{\perp}$ ve $\chi(M)$ tanjant vektör alanlarının uzayını ifade eder

Sonuç 2.1. Dejenere olmayan bir yüzeyin Weingarten dönüşümü A olmak üzere; yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \epsilon \det(A) \quad \text{ve} \quad H = \frac{\epsilon}{2} iz(A)$$

dır (López 2014).

Parametrik bir yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri, yüzeyin birinci ve ikinci temel formlarının katsayılarına bağlı olarak elde edilebilirler. $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}^3$, $\psi = \psi(u, v)$, dejenere olmayan X immersiyonunun lokal bir parametrizasyonu olmak üzere; yüzeyin birinci temel formunun katsayıları Öklid uzayında Tanım 2.6 da verildiği gibidir. $N = \frac{\psi_u \times \psi_v}{|\psi_u \times \psi_v|}$ için ikinci temel formun katsayıları yine Öklid uzayına benzer şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \psi_u, N_u \rangle = \langle \psi_{uu}, N \rangle \\
f &= -\langle \psi_u, N_v \rangle = -\langle \psi_v, N_u \rangle = \langle \psi_{uv}, N \rangle \\
g &= -\langle \psi_v, N_v \rangle = \langle \psi_{vv}, N \rangle
\end{aligned}$$

dir ve hesaplamalar yapılırken metrik göz önüne alınmalıdır. Yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri yüzeyin karakterizasyonuna bağlı olarak sırasıyla

$$K = \epsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{ve} \quad H = \epsilon \frac{eG - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$$

şeklindedir (López 2014). Ortalama eğriliği her noktasında sıfır olan spacelike yüzeyler, maksimal yüzey olarak adlandırılırken timelike yüzeyler ise minimal yüzey olarak adlandırılır.

Tanım 2.15. Eğer bir D bölgesinin içinde bulunan her basit kapalı çevre, yalnız D nin noktalarını içeriyorsa bu durumda D bölgesine basit bağlantılı bölge denir (Brown ve Churchill 1984). Örneğin; $D = \{z : |z| = 1\}$ birim diski basit bağlantılı bir bölge iken $D = \{z : 1 < |z| < 2\}$ çok bağlantılı bir bölgedir.

Bir başka ifadeyle, içindeki her kapalı eğri söz konusu kümeden ayrılmadan içinde bulunan bir noktaya sürekli olarak büzülebilen bölgeye basit bağlantılı bölge denir. Örneğin; küre yüzeyi basit bağlantılı bir bölge iken tor yüzeyi değildir.

Tanım 2.16. Kompleks değerli bir f fonksiyonunun bir z_0 noktasında ve bu noktanın bir komşuluğunda bulunan her noktasında türevi mevcut ise f fonksiyonu z_0 noktasında holomorftur ya da analitiktir denir. Açık bir D kümesinin her noktasında türevi mevcut ise f, D de holomorftur (analitiktir) denir (Brown ve Churchill 1984). Örneğin; $f(z) = z^2$ fonksiyonu tüm kompleks düzlemde holomorf bir fonksiyondur.

Bir f fonksiyonu $|z - z_0| < R$ açık dairesinde holomorf olsun. Bu durumda $f^{(n)}(z_0)$ $(n = 1, 2, ...)$ türevleri mevcuttur. Eğer

$$f(z_0) = f^{'}(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{ve} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

ise f fonksiyonu z_0 noktasında m. dereceden sıfıra sahiptir denir. Eğer $m = 1$ ise z_0 noktasına basit sıfır denir (Brown ve Churchill 1984).

Teorem 2.3. Bir f fonksiyonu z_0 noktasında holomorf olsun. f fonksiyonu z_0 noktasında m. dereceden sıfıra sahiptir gerek ve yeter şart $f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)$ olacak biçimde z_0 noktasında holomorf bir g fonksiyonu vardır (Brown ve Churchill 1984).

Tanım 2.17. Bir f fonksiyonu $z = z_0$ noktasında holomorf değil ancak z_0 ın her komşuluğunda en az bir noktada holomorf ise z_0, f fonksiyonunun singüler noktasıdır. Eğer f fonksiyonu, $|z - z_0| < \varepsilon$ delinmiş komşuluğu boyunca holomorf ise z_0 noktasına ayrık singüler nokta denir (Brown ve Churchill 1984).
Örneğin; $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu $z = 0$ dışında holomorf olduğundan f fonksiyonu $z = 0$ noktasında ayrık singülerliğe sahiptir.

Teorem 2.4. z_0 noktası, g fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun. g fonksiyonu m. dereceden kutup noktasına sahiptir gerek ve yeter şart $g(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$ olacak biçimde z_0 noktasında holomorf olan bir $h(z)$ fonksiyonu vardır (Brown ve Churchill 1984).

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \tfrac{b_1}{z-z_0} + \tfrac{b_2}{(z-z_0)^2} + ... + \tfrac{b_m}{(z-z_0)^m}, \quad b_m \neq 0$$

fonksiyonu için z_0, m. dereceden bir kutup noktasıdır. Örneğin;

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}$$

olup $z_0 = 2$ noktası basit kutup noktasıdır.

Tanım 2.18. Kompleks değerli bir g fonksiyonu, kutup noktaları hariç bir D bölgesinde holomorf ise meromorf fonksiyon olarak adlandırılır (Brown ve Churchill 1984).

Örneğin; $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bölgesinde holomorf bir fonksiyon iken $\mathbb{C}$ bölgesinde meromorf bir fonksiyondur.

Tanım 2.19. $t = t(u, v)$ bir $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde iki değişkenli reel değerli bir fonksiyon ve bu fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli olsun. Eğer Ω bölgesinde

$$t_{uu}(u, v) + t_{vv}(u, v) = 0$$

Laplace denklemi sağlanıyorsa t fonksiyonu harmoniktir (Brown ve Churchill 1984).

3. WEIERSTRASS-ENNEPER GÖSTERİMLERİ VE BJÖRLING PROBLEMİ

Karl Weierstrass ve Alfred Enneper, yaptıkları çalışmalarla 3-boyutlu Öklid uzayında minimal yüzeylerin holomorf ve meromorf fonksiyonlar ile ifade edilebileceğini göstermişlerdir ve bu gösterim, minimal yüzeyler için Weierstrass-Enneper gösterimi olarak bilinir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta f holomorf ve g meromorf fonksiyonlarının, fg^2 fonksiyonunun holomorf olması durumunda bir minimal yüzey elde edilmesine olanak sağlamasıdır. Bu bölümde öncelikle 3-boyutlu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında sırasıyla minimal ve maksimal yüzeylerin Weierstrass-Enneper gösterimlerinden bahsedilecektir. Daha sonra Björling problemi hem Öklid uzayında hem de Lorentz-Minkowski uzayında minimal ve maksimal yüzeyler için ifade edilecek ve çözümü verilecektir.
Bundan sonraki kısımlarda M, bir Riemann yüzeyi ve (u, v) yüzeyin izotermal parametrelemesi olarak alınacaktır. Bir Riemann yüzeyi üzerinde konformal yapı olduğundan $X : M \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü bir konformal immersiyon olarak adlandırılır.

3.1 Minimal Yüzeylerin Weierstrass-Enneper Gösterimleri

Bu bölümde öncelikle $\mathbb{R}^3$ uzayında minimal yüzeylerin Weierstrass-Enneper gösterimleri verilecek, daha sonra bilinen bazı klasik minimal yüzey örneklerinin Weierstrass-Enneper gösterimleri elde edilecektir.

Riemann yüzeylerinde diferensiyel geometrinin birçok eşitliğini elde etmek daha kolaydır. Örneğin; $S = \psi(u, v)$ parametrik denkleme sahip bir yüzeyin Laplace-Beltami operatörü, yüzeyin birinci temel formunun katsayıları yardımıyla $W = \sqrt{EG - F^2}$ olmak üzere;

$$\Delta\psi = \frac{1}{W}\left[\left(\frac{E\psi_v - F\psi_u}{W}\right)_v + \left(\frac{G\psi_u - F\psi_v}{W}\right)_u\right]$$

şeklinde verilir (Dierkes vd. 1992). Eğer yüzey izotermal parametrelemeye sahip ise birinci temel formunun katsayıları $E = G = \lambda^2(u, v)$ ve $F = 0$ için, Laplace-Beltami operatörü

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v^2}\right) = \frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tag{3.1}$$

olarak elde edilir. Eşitliğin son kısmında Wirtinger operatörleri göz önüne alınmıştır.

Önerme 3.1.1. 3-boyutlu Öklid uzayında izotermal parametrelemeye sahip bir yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = -\Delta log\lambda \tag{3.2}$$

dır (Barbosa ve Colares 1986).

İspat. (u, v) izotermal parametrelemeye sahip bir yüzeyde, $F = 0$ olduğundan yüzey aynı zamanda ortogonal parametrelemeye sahiptir ve Gauss eğriliği

$$K = -\frac{1}{2W}\left[\left(\frac{G_u}{W}\right)_u + \left(\frac{E_v}{W}\right)_v\right], \quad W = \sqrt{EG}$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\lambda\lambda_u}{\lambda^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\lambda\lambda_v}{\lambda^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}log\lambda + \frac{\partial^2}{\partial v^2}log\lambda\right] \\ &= -\Delta log\lambda \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 3.1.2. $X = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü, konformal bir immersiyon ve $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ vektör değerli fonksiyon olsun. İmmersiyonun ortalama eğriliği H ve Gauss dönüşümü $N : M \to S^2(1)$ olmak üzere;

$$\Delta X = 2HN \tag{3.3}$$

dir (Barbosa ve Colares 1986).

Bu önermeden aşağıdaki sonuç kolayca verilebilir.

Sonuç 3.1.1. $X : M \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü konformal minimal immersiyondur gerek ve yeter şart X harmoniktir.

X immersiyonu yardımıyla bir $\phi = \frac{\partial X}{\partial z}$ fonksiyonu tanımlansın. (3.1) denkleminden

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\lambda^2}{4} \Delta X$$

elde edilir ve aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.2. ϕ holomorf bir fonksiyondur gerek ve yeter şart X harmoniktir.

$X : M \to \mathbb{R}^3$, $X = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ dönüşümü konformal olduğundan $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = \lambda^2$ ve $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ dır. M Riemann yüzeyi üzerinde tanımlı $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{C}^3$

$$\phi_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_m}{\partial u} - i \frac{\partial x_m}{\partial v} \right), \quad 1 \leq m \leq 3$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$\sum_{m=1}^{3} \phi_m^2 = \frac{1}{4} \left[\sum_{m=1}^{3} \left(\frac{\partial x_m}{\partial u} \right)^2 - \sum_{m=1}^{3} \left(\frac{\partial x_m}{\partial v} \right)^2 - 2i \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial x_m}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial v} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \{ |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2i \langle X_u, X_v \rangle \} = 0$$

olduğundan

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \tag{3.4}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \sum_{m=1}^{3} |\phi_m|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{m=1}^{3} \left(\frac{\partial x_m}{\partial u} \right)^2 + \sum_{m=1}^{3} \left(\frac{\partial x_m}{\partial v} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ |X_u|^2 + |X_v|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \end{aligned}$$

dır. Yani

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 > 0 \tag{3.5}$$

dır. M yüzeyi üzerinde lokal olarak ϕ fonksiyonu tanımlanmıştı. $z = x + iy$ ve $w = r + is$, $P \in M$ noktasının komşuluğunda yüzeyin izotermal parametrelemeleri olmak üzere; $w = w(z)$, $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ koordinat değişimi göz önüne alınırsa $\widetilde{\phi} = \frac{\partial X}{\partial w}$ için

$$\phi = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = \widetilde{\phi}\frac{\partial w}{\partial z}$$

elde edilir. Buradan vektör değerli holomorf 1-formlar

$$\psi = \phi dz \quad \text{ve} \quad \widetilde{\psi} = \widetilde{\phi} dw$$

için,

$$\psi = \phi dz = \widetilde{\phi}\frac{\partial w}{\partial z} dz = \widetilde{\phi} dw = \widetilde{\psi}$$

bulunur. Yani ψ formları yüzey üzerinde global olarak tanımlıdır (Barbosa ve Colares 1986). Böylece $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$

$$\psi_m = \phi_m dz, \quad 1 \leq m \leq 3$$

vektör değerli holomorf formlar ile birlikte Sonuç 3.1.1 ve Sonuç 3.1.2 kullanılarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.1.3. $X : M \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü konformal bir immersiyon olsun. M üzerinde $\psi = \phi dz$ vektör değerli holomorf formdur gerek ve yeter şart X bir minimal immersiyondur. Ayrıca z_0 sabit bir nokta olmak üzere,

$$X(z) = Re \int_{z_0}^{z} \psi + X(z_0) \tag{3.6}$$

dır (Barbosa ve Colares 1986).

γ kapalı eğrisi boyunca $Re \int_\gamma \psi = 0$ ise ψ formunun reel periyodu yoktur denir. ψ formunun reel periyodunun olmaması $Re \int_\gamma \psi$ integralinin çevreden bağımsız olduğunu söyler.

Teorem 3.1.1. (Weierstrass-Enneper gösterimi) Bir M Riemann yüzeyi üzerinde ψ_1, ψ_2, ψ_3 holomorf 1-formlar olsun. Eğer

a) $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ (lokal olarak $\psi = \phi dz$ olduğundan $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ dır.)

b) $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 > 0$

c) ψ_m formlarının M de reel periyodu yoktur

koşulları sağlanıyor ise $X = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{R}^3$

$$x_m = Re \int_{z_0}^{z} \psi_m \ , \quad 1 \leq m \leq 3 \tag{3.7}$$

bir konformal minimal immersiyondur.

Teoremde konulan (a) koşulu immersiyonun konformal olması için ve (b) koşulu X dönüşümünün bir immersiyon olması için gereklidir. Yani lokal olarak $|\phi|^2 = \frac{1}{2}|X_u|^2 \neq 0$ olmalıdır. (c) koşulu ise $Re(\int^z \psi)$ ifadesinin yalnızca bitiş noktası z-ye bağlı olduğunu ifade eder. Böylece her bir x_k çevreden bağımsızdır ve iyi tanımlıdır. $\phi = \frac{\partial X}{\partial z}$ holomorf olduğundan X harmoniktir. Dolayısıyla X dönüşümü, bir minimal immersiyondur. M Riemann yüzeyi üzerinde tanımlanan $X : M \to \mathbb{R}^3$ dönüşümüne genelleştirilmiş minimal yüzey ya da global minimal yüzey de denir. Eğer M Riemann yüzeyi, basit bağlantılı bir yüzey ise daha kolay bir durum ortaya çıkar. Örneğin, basit bağlantılı bir bölgede tanımlı holomorf bir fonksiyonun basit kapalı bir γ eğrisi boyunca integrali sıfır olacağından $Re \int_\gamma \phi dz = 0$ dır. Dolayısıyla (c) koşulu her zaman sağlanır. Eğer Ω basit bağlantılı bir bölge ise $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dönüşümüne regüler minimal yüzey denir. Yani genelleştirilmiş (global) minimal yüzey teorisi, regüler minimal yüzeyleri içeren daha geniş bir teoridir.

M Riemann yüzeyi üzerinde $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ denkleminin tüm çözümlerini elde etmek mümkündür.

1. **Durum** : Eğer $\psi_1 = i\psi_2$ ise $\psi_3 = 0$ olur. Dolayısıyla elde edilen minimal yüzey bir düzlem belirtir.

2. **Durum** : $\psi_1 \neq i\psi_2$ olmak üzere; bir holomorf form ve bir meromorf fonksiyon sırasıyla

$$w = \psi_1 - i\psi_2 \quad \text{ve} \quad g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlansın. $\psi_k = \phi_k dz$ olduğundan $w = f dz$ için,

$$f = \phi_1 - i\phi_2 \ \ , \ \ g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$$

yazılabilir. $\phi_3 = fg$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 &= -\phi_3^2 \\ (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) &= -f^2 g^2 \end{aligned}$$

olduğundan $\phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$ bulunur. Böylece holomorf fonksiyonlar

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2} f(1+g^2), \quad \phi_3 = fg \tag{3.9}$$

elde edilir. Dolayısıyla $X = (x_1, x_2, x_3)$ minimal immersiyonu

$$\begin{aligned} x_1 &= Re \int^z \psi_1 = \frac{1}{2} Re \int^z (1-g^2) w \\ x_2 &= Re \int^z \psi_2 = \frac{1}{2} Re \int^z i(1+g^2) w \\ x_3 &= Re \int^z \psi_3 = Re \int^z gw \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu denklemler, $\mathbb{R}^3$ uzayında minimal yüzeylerin Weierstrass-Enneper gösterimleri olarak bilinir ve holomorf fonksiyonlar ile minimal yüzeyler arasındaki yakın ilişkiyi ortaya koyar. (g, w) ikilisi ise minimal yüzeyin Weierstrass verisi olarak adlandırılır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ϕ_1 ve ϕ_2 holomorf fonksiyonlar olduklarından (3.9) denkleminden fg^2 fonksiyonunun da holomorf olması gerektiğidir.

Önerme 3.1.4. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde g meromorf ve f holomorf fonksiyonlar olmak üzere; eğer g fonksiyonu z_0 noktasında m. mertebeden bir kutup noktasına ve f fonksiyonu da aynı z_0 noktasında en az $2m$. mertebeden bir sıfıra sahip ise (3.9) denklemi ile verilen $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{C}^3$ fonksiyonları Ω bölgesinde holomorftur ve (3.4) denklemini sağlarlar. Aksine Ω bölgesinde (3.4) denklemini sağlayan her holomorf fonksiyon (3.9) formunda ifade edilebilir (Osserman 1989).

Uyarı 3.1.1. Eğer g fonksiyonu z_0 noktasında m. mertebeden bir kutup noktasına ve f fonksiyonu da aynı z_0 noktasında tam $2m$. mertebeden bir sıfıra sahip ise formülde verilen integraller iyi tanımlıdır ve reel periyotları yoktur.

Önerme 3.1.5. 3-boyutlu Öklid uzayında, basit bağlantılı her minimal yüzey

$$x_m = Re \int_0^z \phi_m dz + c_k, \quad 1 \leq m \leq 3$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ϕ_m fonksiyonları (3.9) denklemini sağlarlar ve Ω bölgesi birim disk veya kompleks düzlemdir. Minimal yüzeyin regüler olması için gerek ve yeter koşul g fonksiyonu z_0 noktasında m. mertebeden bir kutup noktasına sahip ise, f fonksiyonuda aynı z_0 noktasında tam $2m$. mertebeden bir sıfıra sahip olmasıdır (Osserman 1989).

ϕ holomorf fonksiyonu için

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1+|g|^2)^2|f|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 3.1.2. $X : M \to \mathbb{R}^3$ dönüşümünün bir immersiyon olması için $(1+|g|^2)|f| \neq 0$ dır.

Ayrıca (2.3) ve (3.5) denklemlerinden metrik

$$ds^2 = |f|^2(1+|g|^2)^2|dz|^2 \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir.

Weierstrass gösterimlerinde yer alan $g : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorf fonksiyonunun önemli bir geometrik anlamı vardır. Bunun için $N : M \to S^2(1)$ Gauss dönüşümünü, minimal immersiyonun Weierstrass gösterimleri yardımıyla elde edelim.

$$\phi = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial u} - i\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

olduğundan $Re\phi = \frac{1}{2}X_u$ ve $Im\phi = -\frac{1}{2}X_v$ dir. Buradan

$$X_u \times X_v = 4Im\{(\phi_2\overline{\phi}_3, \phi_3\overline{\phi}_1, \phi_1\overline{\phi}_2)\}$$

elde edilir.

$$\phi_2\overline{\phi}_3 = \frac{i}{2}f(1+g^2)(\overline{g}\overline{f})$$

ve

$$
\begin{aligned}
Im(\phi_2\overline{\phi}_3) &= \frac{1}{2}|f|^2 Re(\overline{g}(1+g^2)\\
&= \frac{1}{4}|f|^2(\overline{g}(1+g^2)+g(1+\overline{g}^2)\\
&= \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)(g+\overline{g})\\
&= \frac{1}{2}Re(g)|f|^2(1+|g|^2)
\end{aligned}
$$

olup benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
Im(\phi_3\overline{\phi}_1) &= \frac{1}{2}Im(g)|f|^2(1+|g|^2)\\
Im(\phi_1\overline{\phi}_2) &= -\frac{1}{4}|f|^2(1-|g|^4)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
X_u \times X_v = |f|^2(1+|g|^2)(2Re(g), 2Im(g), |g|^2-1)
$$

dir.

$$
|X_u \times X_v| = \lambda^2 \quad \text{ve} \quad \lambda^2 = 2|\phi|^2 = (1+|g|^2)^2|f|^2
$$

olduğundan

$$
N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2Re(g)}{1+|g|^2}, \frac{2Im(g)}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2}\right) \tag{3.11}
$$

bulunur.

$\mathbb{C}$ kompleks düzlemini x_1x_2- düzlemi ile eşleyelim. $S^2(1) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$ Riemann küresi, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem ve $T = (0,0,1)$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
\sigma : S^2(1) - \{T\} &\rightarrow \qquad \mathbb{R}^2\\
(x_1,x_2,x_3) &\rightarrow \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)
\end{aligned}
$$

streografik izdüşümden g fonksiyonunun kutup noktası hariç $\sigma o N = (Re(g), Im(g))$ elde edilir. $\sigma(0,0,1) = \infty$ olmak üzere; σ dönüşümünü, $\widetilde{\sigma} : S^2(1) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ olarak genişletirsek

$$
\widetilde{\Pi} o N = g \tag{3.12}
$$

elde edilir. Bu ise g dönüşümünün, X immersiyonunun Gauss dönüşümü ile aynı olduğunu ifade eder.

Önerme 3.1.6. Bir minimal yüzeyin Gauss eğriliği, f holomorf ve g meromorf fonksiyonlar cinsinden

$$K = -\left[\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right]^2 \tag{3.13}$$

dir.

İspat. (3.1), (3.2) denklemleri ve $\lambda^2 = |f|^2(1+|g|^2)^2$ eşitliği kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log(|f|(1+|g|^2)) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log|f| + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log(1+|g|^2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log|f| &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log|f|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log(f(z)\overline{f(z)}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} (log f(z) + log\overline{f(z)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde işlemler yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log(1+|g|^2) = \frac{|g'(z)|^2}{(1+|g(z)|^2)^2}$$

elde edilir. Böylece yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
K &= -\Delta log\lambda = -\Delta log(|f|(1+|g|^2)) \\
&= -\frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log(|f|(1+|g|^2)) \\
&= -\frac{4}{|f|^2(1+|g|^2)^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(log|f| + log(1+|g|^2)) \\
&= -\frac{4}{|f|^2(1+|g|^2)^2}\frac{|g'|^2}{(1+|g|^2)^2} \\
&= -\left[\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right]^2
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Sonuç 3.1.3. Bir minimal yüzeyin Gauss eğriliği pozitif değildir. Eğer yüzey bir düzlem değilse Gauss eğriliğinin sıfırları izole noktalardır (Osserman 1989).

İspat. Bir minimal yüzeyin Gauss eğriliği sadece $g' = 0$ durumunda sıfırdır. g meromorf bir fonksiyon olduğundan g' fonksiyonu da meromorftur. Eğer g' her noktada sıfır ise g sabit olup yüzeyin normal vektör alanı da sabit olur ve bu durumda minimal yüzey bir düzlemdir. g' fonksiyonunun her noktada sıfır olmadığını varsayalım. Kompleks fonksiyonlar teorisinde bilinen 'meromorf bir fonksiyonun sıfırları izole noktalarıdır' teoremi kullanılarak minimal yüzeyin Gauss eğriliğinin sıfırları izole noktaları olduğu elde edilir. ■

Şimdi bazı bilinen minimal yüzey örnekleri, Weierstrass verisi olan (g, w) ile elde edilecektir. Aşağıda verilecek örnekler Barbosa ve Colares (1986)'in kitabından alınmıştır.

Örnek 3.1.1. (Helikoid Yüzeyi) $M = \mathbb{C}$ Riemann yüzeyi üzerinde $g(z) = -ie^z$ ve $w = e^{-z}dz$ alalım. g fonksiyonunun kutup noktası ve w nın sıfırı yoktur. Böylece holomorf formlar

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{2}(1-g^2)w = \cosh(z)dz \\
\psi_2 &= \frac{i}{2}(1+g^2)w = -i\sinh(z)dz \\
\psi_3 &= gw = -idz
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\cosh(z)$ ve $\sinh(z)$ fonksiyonları holomorf fonksiyonlardır ve basit bağlantılı bölge olan $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı olduklarından, her basit kapalı bir γ çevresi üzerinde $\int_\gamma \psi_k = 0$ sağlanır. Yani ψ_k formlarının $\mathbb{C}$ üzerinde periyodu yoktur. Böylece

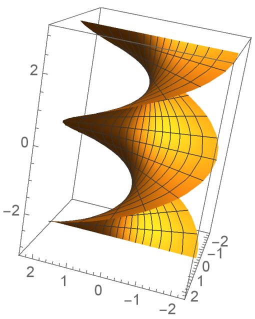
$$\begin{aligned}
x_1 &= Re\int_0^z cosh(z)dz = Re(\sinh(z)) = \cos(v)\sinh(u) \\
x_2 &= Re\int_0^z -i\sinh(z)dz = Re(-i\cosh(z)+i) = \sin(v)\sinh(u) \\
x_3 &= Re\int_0^{z_0} -idz = Re(-iz) = v
\end{aligned}$$

olup minimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = (\cos(v)\sinh(u), \sin(v)\sinh(u), v)$$

bulunur.

Örnek 3.1.2. (Katenoid Yüzeyi) $M = \mathbb{C}$ Riemann yüzeyi üzerinde $g(z) = -e^z$ ve $w = -e^{-z}dz$ için g nin kutup noktası ve w nın sıfırı yoktur. Dolayısıyla holomorf



Şekil 3.1 Helikoid Yüzeyi

formlar

$$\psi_1 = \sinh(z)dz, \quad \psi_2 = -i\cosh(z)dz, \quad \psi_3 = dz$$

elde edilir. $\sinh(z), \cosh(z)$ ve bu fonksiyonların bir sabitle çarpımları da $\mathbb{C}$ de holomorftur. Kompleks düzlem basit bağlantılı bir bölge olduğundan reel periyotları yoktur. Böylece minimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = (\cosh(u)\cos(v) - 1, \cosh(u)\sin(v), u)$$

elde edilir. Katenoid yüzeyini elde etmek için bir başka seçim şu şekilde olabilir: $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Riemann yüzeyi üzerinde $g(z) = z$ ve $w = \frac{dz}{z^2}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)dz \\
\psi_2 &= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z^2} + 1\right)dz \\
\psi_3 &= \frac{1}{z}dz
\end{aligned}$$

holomorf formları elde edilir. $\{z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ çemberini basit kapalı γ eğrisi olarak alalım.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(\frac{1}{z^2} - 1\right)dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} - 1\right) rie^{i\theta} d\theta = 0 \\
\int_\gamma \left(\frac{1}{z^2} + 1\right)dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} + 1\right) rie^{i\theta} d\theta = 0 \\
\int_\gamma \frac{1}{z}dz &= \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i
\end{aligned}$$

olduğundan ψ_1 ve ψ_2 holomorf formlarının periyodu yoktur. ψ_3 formunun ise sadece imajiner periyodu vardır. Dolayısıyla $X : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü, koordinatları

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{u}{2}\left(1+\frac{1}{u^2v^2}\right)+1 \\ x_2 &= -\frac{v}{2}\left(1+\frac{1}{u^2v^2}\right) \\ x_3 &= \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2) \end{aligned}$$

olan bir minimal yüzeydir.

$$\tau = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \quad \gamma = \left(\arctan\frac{v}{u}\right) - \pi$$

kullanılırsa

$$u = e^{\tau}\cos(\gamma), \quad v = e^{\tau}\sin(\gamma)$$

olup

$$X(\gamma,\tau) = (-\cos(\gamma)\cosh(\tau)+1, -\sin(\gamma)\cosh(\tau), \tau)$$

katenoid yüzeyi elde edilir.

Daha basit seçimlerle Enneper yüzeyi elde edilebilir.

Örnek 3.1.3. (Enneper Yüzeyi) $M = \mathbb{C}$ Riemann yüzeyi üzerinde, $g(z) = z$ ve $w = dz$ fonksiyonları ile minimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2\right)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1.4. (Scherk'in Birinci Yüzeyi) M Riemann yüzeyi, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski olsun. $g(z) = z$ ve $w = \frac{4}{1-z^4}dz$ için, g fonksiyonunun kutup noktası ve w nın birim disk üzerinde bir sıfırı yoktur. Dolayısıyla bu veriler Weierstrass verileridir. Yüzeyin holomorf formları

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{2}{1+z^2}dz = \left(\frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i}\right)dz \\ \psi_2 &= \frac{2i}{1-z^2}dz = \left(\frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1}\right)dz \\ \psi_3 &= \frac{4z}{1-z^4}dz = \left(\frac{2z}{z^2+1} - \frac{2z}{z^2-1}\right)dz \end{aligned}$$

dir. Ω birim diski basit bağlantılı bir yüzey olduğundan $\psi_m, 1 \leq m \leq 3$ holomorf formların Ω üzerinde reel periyodu yoktur. $\log z = \log|z| + iarg(z)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
x_1 &= Re\left(i\log\frac{z+i}{z-i}\right) = -arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\\
x_2 &= Re\left(i\log\frac{z+1}{z-1}\right) = -arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\\
x_3 &= Re\left(\log\frac{z^2+1}{z^2-1}\right) = \log|\frac{z^2+1}{z^2-1}|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} &= \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} + i\frac{z+\overline{z}}{|z-i|^2}\\
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} + \frac{\overline{z}-z}{|z-1|^2}
\end{aligned}$$

dir. $|z| < 1$ olduğundan

$$Re\frac{z+i}{z-i} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} \leq 0 \quad , \quad Re\frac{z+1}{z-1} = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} \leq 0$$

dir.

$$\frac{\pi}{2} \leq arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right), arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \leq \frac{3\pi}{2}$$

eşitsizliğinden

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x_1, x_2 \leq -\frac{\pi}{2}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\cos x_1 &= \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2}\frac{|z-i|}{|z+i|} = \frac{|z^2|-1}{|z^2+1|}\\
\cos x_2 &= \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2}\frac{|z-1|}{|z+1|} = \frac{|z^2|-1}{|z^2+1|}
\end{aligned}$$

olup maksimal yüzeyin kapalı denklemi

$$x_3 = \log\left(\frac{\cos x_2}{\cos x_1}\right)$$

olarak bulunur. Burada kapalı denklemi elde edilmiş olan $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ immersiyonu Scherk'in birinci yüzeyinin bir parçasıdır. Tüm yüzeyi elde etmek için (g, w) Weierstrass verileri $M = \mathbb{C} - \{1, -1, i, -i\}$ Riemann yüzeyi üzerinde alınmalıdır. Ancak bu yüzey basit bağlantılı bir yüzey olmadığı için ψ_1 ve ψ_2 holomorf formlarının reel

periyodu olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla bu yüzey x_1- ve x_2- eksenlerinde periyodik olduğundan çift periyodik bir yüzeydir. $\pi : M' \to M$, M yüzeyini tamamen kapsayan bir dönüşümdür. Basit bağlantılı M' üzerinde holomorf formların reel periyodu olmadığından $x'_m : M' \to \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, 3$ iyi tanımlıdır.
Eğer Weierstrass verileri $g(z) = z$ ve $w = i\frac{4}{1-z^4}dz$ seçilirse tek periyodik bir Scherk yüzeyi elde edilir.

Örnek 3.1.5. (Henneberg Yüzeyi) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Riemann yüzeyi üzerinde $g(z) = z$ ve $w = 2\left(1 - \frac{1}{z^4}\right) dz$ Weierstrass verileri yardımıyla yönlendirilemeyen bir minimal yüzey olan Henneberg yüzeyi elde edilir. Bu yüzeyin holomorf formları

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \left(-\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2} + 1 - z^2\right) dz \\
\psi_2 &= i\left(-\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2} + 1 + z^2\right) dz \\
\psi_3 &= 2\left(z - \frac{1}{z^2}\right) dz
\end{aligned}$$

şeklindedir ve M Riemann yüzeyi üzerinde periyotları yoktur. Ancak $\{-1, 1, -i, i\}$ noktalarında $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 = 0$ olduğundan bu noktalar $X : M \to \mathbb{R}^3$ minimal immersiyonunun singüler noktalarıdır.

(3.7) denkleminde yer alan integralin hesaplanması ile elde edilen kompleks ifadenin reel kısmı bir minimal yüzey verdiği gibi imajiner kısmı da bir minimal yüzey verir. Basit bağlantılı bir Ω bölgesinde $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ yüzeyi izotermal parametrelemeye sahip bir minimal yüzey olsun. Yine Ω bölgesinde tanımlı ve

$$X_u = \widetilde{X}_v \quad , \quad X_v = -\widetilde{X}_u$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan $\widetilde{X}(u, v) = (\widetilde{x_1}(u, v), \widetilde{x_2}(u, v), \widetilde{x_3}(u, v))$ yüzeyi, X yüzeyinin eşlenik (adjoint) yüzeyi olarak adlandırılır ve bu yüzeyde izotermal parametrelemeye sahiptir. Ayrıca $\Delta\widetilde{X} = 0$ olduğundan minimal bir yüzeydir. Basit bağlantılı $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ konformal bir dönüşüm ve $\widetilde{X}$ adjoint dönüşüm olmak üzere; $h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^3$

$$h(z) := X(u, v) + i\widetilde{X}(u, v) \quad , \quad z = u + iv$$

bileşenleri

$$\begin{aligned} h_1(z) &= x_1(u,v) + i\widetilde{x_1}(u,v) \\ h_2(z) &= x_2(u,v) + i\widetilde{x_2}(u,v) \\ h_3(z) &= x_3(u,v) + i\widetilde{x_3}(u,v) \end{aligned}$$

olan bir holomorf dönüşümdür ve $\mathbb{C}^3$ de holomorf bir eğri gibi düşünebilir. Kompleks türev $h' = \frac{dh}{dz}$

$$\begin{aligned} h' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial u} - i\frac{\partial h}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{2}(X_u + i\widetilde{X}_u - iX_v + \widetilde{X}_v) \\ &= X_u - iX_v \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\langle h', h' \rangle = |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2i\langle X_u, X_v \rangle$$

bulunur. X dönüşümü konformal olduğundan $\langle h', h' \rangle = 0$ dır ve bu özelliğe sahip olan holomorf eğri izotropik eğri olarak adlandırılır (Dierkes vd. 1992).

Önerme 3.1.7. Basit bağlantılı bir $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü parametrik bir minimal yüzey ise holomorf eğri $h : \Omega \to \mathbb{C}^3$ bir izotropik eğridir. Aksine, $h : \Omega \to \mathbb{C}^3$ bir izotropik eğri ise

$$X(u,v) := Re h(z) \quad ve \quad \widetilde{X}(u,v) := Im h(z)$$

minimal yüzeylerdir (Dierkes vd. 1992).

Önerme 3.1.8. $\Omega \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $z_0 \in \Omega$ olsun. $\phi(z) \in \mathbb{C}^3$ holomorf fonksiyonu

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$X(z) = X_0 + Re\int_{z_0}^{z} \phi(z)dz \quad , \quad z \in \Omega \tag{3.14}$$

bir minimal yüzey tanımlar. Ayrıca $\widetilde{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$\widetilde{X}(z) = \widetilde{X}_0 + Im\int_{z_0}^{z} \phi(z)dz \quad , \quad \widetilde{X}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad z \in \Omega \tag{3.15}$$

X minimal yüzeyinin eşlenik yüzeyidir. ϕ nin sıfırları X minimal yüzeyinin dallanma noktalarıdır. Aksine, eğer $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ bir minimal yüzey ise $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ şartını sağlayan $\phi : \Omega \to \mathbb{C}^3$ holomorf dönüşümü vardır ve $X(w) = X_0 + Re \int_{z_0}^{z} \phi(z)dz$, $z \in \Omega$ dır (Dierkes vd. 1992).

Bu kısımda bir minimal yüzeyin ilişkili (associate) yüzeylerinden bahsedilecektir. $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ izotermal parametrelemeye sahip bir minimal yüzey ve h izotropik bir eğri olsun. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$g(z, \alpha) := e^{-i\alpha} h(z)$$

bir izotropik eğridir ve

$$M(z, \alpha) := Re\{e^{-i\alpha} h(z)\} = X(z) \cos \alpha + \widetilde{X}(z) \sin \alpha \tag{3.16}$$

bir parametreli minimal yüzey ailesi tanımlar. $M(z, \alpha)$ yüzeyleri $X(z)$ minimal yüzeyinin ilişkili minimal yüzeyleri olarak adlandırılır ve

$$M(z, 0) = X(z) \quad , \quad M\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = \widetilde{X}(z)$$

dır. (3.16) denkleminde u ve v değişkenlerine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} M_u &= X_u \cos \alpha - X_v \sin \alpha \\ M_v &= X_v \cos \alpha + X_u \sin \alpha \end{aligned}$$

elde edilir.

$$|M_u|^2 = |M_v|^2 = |X_u|^2 = |X_v|^2, \quad \langle M_u, M_v \rangle = 0$$

eşitliklerinden bu yüzeylerin de izotermal parametrelemeye sahip oldukları söylenebilir. Ayrıca, bu yüzeylerin birinci temel formları aynı olduğundan bir yüzeyin tüm ilişkili yüzeyleri birbirine izometriktir.

Örnek 3.1.6. $z_0, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere;

$$x = a \cosh\left(\frac{z - z_0}{a}\right) \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

zincir eğrisinin $z-$ ekseni etrafında döndürülmesi ile katenoid yüzeyi (zincir yüzeyi) elde edilir. Bu yüzey $a = 1,\ z_0 = 0$ için

$$X(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u), \quad -\infty < u < \infty,\ 0 \leq v < 2\pi$$

şeklinde parametrize edilebilir. $X : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü konformaldir.

$$\begin{aligned}\sinh(u+iv) &= \cos(v)\sinh(u) + i\sin(v)\cosh(u)\\ \cosh(u+iv) &= \cos(v)\cosh(u) + i\sin(v)\sinh(u)\end{aligned}$$

olduğundan $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$, $h(z) = (\cosh(z), -i\sinh(z), z)$ izotropik eğrisi için $X(u,v) = Reh(z)$ dir. Dolayısıyla X minimal yüzeyinin eşlenik yüzeyi

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(u,v) &= Imh(z)\\ &= (\sinh(u)\sin(v), -\sinh(u)\cos(v), v)\end{aligned}$$

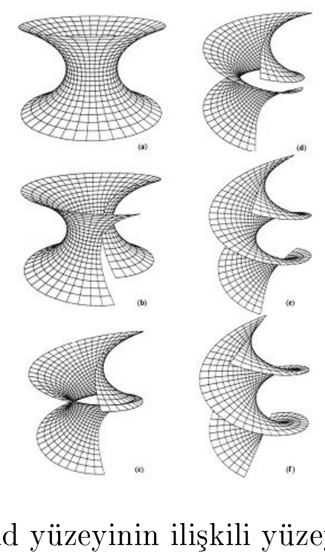
dir ve bu yüzey helikoid yüzeyidir.

$$M(z,\alpha) := Re\{e^{-i\alpha}h(z)\} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ilişkili yüzeylerinin bileşenleri

$$\begin{aligned}m_1(u,v) &= \cosh(u)\cos(v)\cos(\alpha) + \sinh(u)\sin(v)\sin(\alpha)\\ m_2(u,v) &= \cosh(u)\sin(v)\cos(\alpha) - \sinh(u)\cos(v)\sin(\alpha)\\ m_3(u,v) &= u\cos(\alpha) + v\sin(\alpha)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.2 Katenoid yüzeyinin ilişkili yüzeyleri ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$)

3.2 Maksimal Yüzeylerin Weierstrass-Enneper Gösterimleri

Öklid uzayında minimal yüzeyler için elde edilen Weierstrass-Enneper gösterimleri, 3- boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında maksimal yüzeyler için de verilmiştir (Kobayashi 1983, Estudillo ve Romero 1992, Alias vd. 2003). $\mathbb{L}^3$ uzayında her spacelike yüzey yönlendirilebilir olduğundan koordinat değişimleri yönlendirmeyi korur ve herhangi bir parametrelemeye sahip bir spacelike yüzey, izotermal parametre ile tekrar parametrelendirilebilir. M bir Riemann yüzeyi ve $X = X(z), z = u + iv \in \mathbb{C}$ konformal parametre olmak üzere;

$$X = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{L}^3$$

spacelike konformal immersiyonu ele alalım. $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ vektör değerli fonksiyon ve $N : M \to \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}^2 = \{p \in \mathbb{L}^3 : \langle p, p \rangle = -1\}$ Gauss dönüşümü olmak üzere;

$$\Delta X = 2HN$$

dir.

Önerme 3.2.1. $X : M \to \mathbb{L}^3$ dönüşümü konformal maksimal bir immersiyondur gerek ve yeter şart X harmoniktir.

Üzerine indirgenen $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$ metriği ile $X : M \to \mathbb{L}^3$ maksimal immersiyonu lokal olarak bir maksimal yüzey ifade eder ve X immersiyonunun koordinat fonksiyonları Öklid anlamında harmonik fonksiyonlardır. Öklid uzayında olduğu gibi bir $\phi = \frac{\partial X}{\partial z}$ fonksiyonu tanımlayalım. (2.4) ile verilen eşitliklerden

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\lambda^2}{4} \Delta X$$

elde edilir ve buradan şu sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 3.2.1. ϕ holomorf bir fonksiyondur gerek ve yeter şart X harmoniktir.

$X = X(u, v)$ dönüşümünün konformal olduğu göz önüne alınırsa

$$\phi_m = \frac{\partial x_m}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_m}{\partial u} - i \frac{\partial x_m}{\partial v} \right), \quad 1 \leq m \leq 3$$

eşitliği yardımıyla

$$\phi_1^2+\phi_2^2-\phi_3^2=0$$

ve

$$\begin{aligned} |\phi_1|^2+|\phi_2|^2-|\phi_3|^2 &= \frac{1}{4}\left\{|X_u|^2+|X_v|^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Öklid uzayında olduğu gibi $\psi_m=\phi_m dz$, $1\leq m\leq 3$ holomorf 1-formları, M Riemann yüzeyi üzerinde global olarak tanımlıdır ve minimal yüzeylere benzer olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.2.2. $X:M\to\mathbb{L}^3$ spacelike konformal bir immersiyon olsun. ψ holomorf formdur gerek ve yeter şart X bir maksimal immersiyondur. Ayrıca z_0 sabit bir nokta olmak üzere;

$$X(z)=Re\int^z\psi+X(z_0)$$

dır.

Teorem 3.2.1. (Weierstrass-Enneper gösterimleri) Bir M Riemann yüzeyi üzerinde ψ_1,ψ_2,ψ_3 holomorf 1-formlar olsun. Eğer
a) $\psi_1^2+\psi_2^2-\psi_3^2=0$ (lokal olarak $\psi=\phi dz$ olduğundan $\phi_1^2+\phi_2^2-\phi_3^2=0$ dır.)
b) $|\psi_1|^2+|\psi_2|^2-|\psi_3|^2>0$
c) ψ_m formlarının M üzerinde reel periyodu yoktur
şartlarını sağlıyor ise $X=(x_1,x_2,x_3):M\to\mathbb{L}^3$

$$x_m=Re\int^z\psi_m,\quad 1\leq m\leq 3$$

bir konformal maksimal immersiyondur (Alias vd. 2003).

M Riemann yüzeyi, basit bağlantılı bir yüzey olması durumunda, spacelike yüzeyler kompakt olmadıkları için Koebe'nin uniformizasyon teoreminden M yüzeyi konformal olarak kompleks düzlemin açık bir alt cümlesidir. $X:M\to\mathbb{L}^3$ dönüşümünün immersiyon olmadığı ya da indirgenen metriğin dejenere olduğu noktalara dallanma noktaları (branch points) denir. Aslında bu noktalar, M Riemann yüzeyinde $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 = 0$ denklemini sağlayan noktalardır. Dallanma noktası olmayan noktalar yüzeyin regüler noktalarıdır. R, X dönüşümünün dallanma noktalarının bir kümesi olmak üzere; $X : M \setminus R \to \mathbb{L}^3$ dönüşümü bir regüler maksimal yüzey belirtirken $X : M \to \mathbb{L}^3$ dönüşümü ise genelleştirilmiş bir maksimal yüzey belirtir (Estudillo ve Romero 1992). Basit kapalı γ eğrisi için $Re \int_\gamma \psi = 0$ olması integralin γ eğrisinden bağımsız olduğunu gösterir ve bu durumda ψ_k holomorf formlarının reel periyodu yoktur denir. Öklid uzayına benzer olarak $\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 = 0$ denkleminin çözümlerini inceleyelim.

1. Durum : Eğer $\psi_1 = i\psi_2$ ise $\psi_3 = 0$ olup yatay düzlemler elde edilir.

2. Durum : Eğer $\psi_1 \neq i\psi_2$ ise holomorf form $w = \psi_1 - i\psi_2$ ve meromorf fonksiyon $g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2}$ şeklinde tanımlansın. $\psi_k = \phi_k dz$ olduğundan holomorf fonksiyon $f = \phi_1 - i\phi_2$ ve meromorf fonksiyon $g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1+g^2)f \\ \phi_2 &= \frac{i}{2}(1-g^2)f \\ \phi_3 &= gf \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla maksimal immersiyon $w = fdz$ için,

$$\begin{aligned} x_1 &= Re\int^z \psi_1 = \frac{1}{2}Re\int^z (1+g^2)w \\ x_2 &= Re\int^z \psi_2 = \frac{1}{2}Re\int^z i(1-g^2)w \\ x_3 &= Re\int^z \psi_3 = Re\int^z gw \end{aligned}$$

şeklindedir ve (g, w) ikilisi maksimal yüzeyin Weierstrass verisi olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.3. M Riemann yüzeyi üzerinde w holomorf 1-form ve g ($|g| \neq 1$) meromorf fonksiyonu için; g fonksiyonu bir z_0 noktasında m. mertebeden kutup noktasına sahip ve w holomorf formu da aynı z_0 noktasında en azından $2m$. mertebeden bir sıfıra sahip olsun. Eğer

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1+g^2)w \ , \quad \psi_2 = \frac{i}{2}(1-g^2)w \ , \quad \psi_3 = gw$$

holomorf 1-formlarının reel periyodu yok ise $X : M \to \mathbb{L}^3$ dönüşümü

$$x_m = Re \int^z \psi_m \quad , \quad m = 1, 2, 3$$

bir genelleştirilmiş maksimal yüzeydir (Estudillo ve Romero 1992).

Eğer g fonksiyonu bir z_0 noktasında m. mertebeden kutup noktasına sahip ve f holomorf fonksiyonu da aynı z_0 noktasında en azından $2m$. mertebeden bir sıfıra sahip ise ϕ_1, ϕ_2 ve ϕ_3 holomorf fonksiyonlardır. Ancak yüzeyin regüler bir yüzey olması için f fonksiyonunun z_0 noktasında tam $2m$. mertebeden sıfıra sahip olması gerekir. Aksi halde integraller iyi tanımlı değildir ve reel periyot vardır. Öklid uzayına benzer olarak yüzey izotermal parametrelemeye sahip olduğundan metrik $ds^2 = \lambda^2 \mid dz \mid^2$ dir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^2 &= |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 \\ &= \frac{1}{2}|f|^2(1 - |g|^2)^2 \end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak metrik,

$$ds^2 = |f|^2(1 - |g|^2)^2|dz|^2$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla $X : M \to \mathbb{L}^3$ dönüşümünün immersiyon olması için $|f|(1 - |g|^2) \neq 0$ dır. Öklid uzayında yapılan işlemler Lorentz-Minkowski uzayında maksimal yüzeyler için tekrar edilirse, $N : M \to \mathbb{H}^2$ Gauss dönüşümü

$$N = \frac{1}{1 - |g|^2}(2Re(g), 2Im(g), 1 + |g|^2)$$

olur ve

$$K = \left[\frac{2|g'|}{|f|(1 - |g|^2)^2}\right]^2$$

maksimal yüzeyin Gauss eğriliğidir. (Kobayashi 1983).

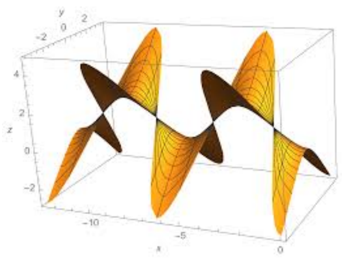
Örnek 3.2.1. (Hiperbolik katenoid) $M = \mathbb{C}$ Riemann yüzeyi üzerinde $g(z) = i\frac{e^z - 1}{e^z + 1}$ ve $w = -i\frac{(e^z+1)^2}{2e^z}dz$ için holomorf formlar

$$\psi_1 = -idz, \quad \psi_2 = \sinh(z)dz, \quad \psi_3 = (-1 + \cosh(z))dz$$

yardımıyla maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = (v, \cos(v)\sinh(u), -1 + \cos(v)\cosh(u))$$

elde edilir.



Şekil 3.3 Hiperbolik katenoid yüzeyi

Öklid uzayında elde edilen minimal yüzeyler ile Lorentz-Minkowski uzayında elde edilen maksimal yüzeyler arasında dualite olarak da bilinen bir bağlantı vardır (Calabi 1970). Yani bir minimal yüzeyden bir maksimal yüzey ve benzer şekilde bir maksimal yüzeyden bir minimal yüzey elde edilebilir. Literatürde bu şekilde elde edilmiş yüzeyler, dual yüzey ya da ikiz yüzey olarak adlandırılmıştır.

Uyarı 3.2.1. **1**. X, $\mathbb{R}^3$ uzayında konformal bir minimal yüzey ve ϕ bu yüzeyin izotropik eğrisi olsun. X yüzeyinin dual yüzeyi $X^\flat$, $\mathbb{L}^3$ uzayında bir maksimal yüzeydir ve izotropik eğrisi $\psi = (-i\phi_1, -i\phi_2, \phi_3)$ olur. Dolayısıyla X yüzeyinin Weierstrass verisi (g, w) ise $X^\flat$ yüzeyinin Weiertrass verisi $(g^\flat, w^\flat) = (ig, -iw)$ dır.
2. X, $\mathbb{L}^3$ uzayında konformal bir maksimal yüzey ve ψ bu yüzeyin izotropik eğrisi olsun. X yüzeyinin dual yüzeyi $X^\sharp$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir minimal yüzeydir ve izotropik eğrisi $\phi = (i\psi_1, i\psi_2, \psi_3)$ olur. Dolayısıyla X yüzeyinin Weierstrass verisi (g, w) ise $X^\sharp$ yüzeyinin Weiertrass verisi $(g^\sharp, w^\sharp) = (-ig, iw)$ dır.

Burada kompleks sayı olan i nin koordinat bileşenlerinde yeri değiştirilerek de benzer sonuçlara ulaşılabilir ve elde edilen yüzeyler birbirlerine denk yüzeylerdir. Öklid uzayında minimal olan tek dönel yüzey katenoid yüzeyidir; ancak Lorentz-Minkowski uzayında dönme eksenine bağlı olarak eliptik, hiperbolik ve parabolik katenoid (birinci tip katenoid, ikinci tip katenoid ve ikinci tip Enneper yüzeyi) olmak üzere; üç tip maksimal dönel yüzey vardır. Minimal ve maksimal yüzeyler arasındaki yukarıda bahsedilen ilişki göz önüne alındığı zaman, Öklid uzayındaki katenoid yüzeyine Lorentz-Minkowski uzayında hangi yüzeyin karşılık geldiği sorusu akla gelebilir. Literatürde bu konuda yapılmış bazı çalışmalar mevcuttur (López vd. 2000, Araujo ve Leite 2009, Lee 2011).

Örnek 3.2.2. $M = \mathbb{C}$ Riemann yüzeyi üzerinde $g(z) = \frac{z}{z-2i}$ ve $w = i\frac{(z-2i)^2}{2}dz$ için holomorf formlar

$$\psi_1 = \frac{iz^2 + 2z - 2i}{2}dz, \quad \psi_2 = (1 + iz)dz, \quad \psi_3 = \left(\frac{iz^2}{2} + z\right)dz$$

yardımıyla maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u^2v + \frac{1}{6}v^3 + v + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \\ u - uv \\ -\frac{1}{2}u^2v + \frac{1}{6}v^3 + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu yüzey parabolik katenoid yüzeyidir ve dual yüzeyinin Weierstrass verisi

$$g^\sharp = -ig = -i\frac{z}{z-2i} \quad , \quad w^\sharp = iw = -\frac{(z-2i)^2}{2}dz$$

ve holomorf formları

$$\phi = \left(\frac{-z^2 + 2iz + 2}{2}dz, (i - z)dz, (\frac{iz^2}{2} + z)dz\right)$$

şeklinde olup dual minimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X^\sharp(u, v) = \left(\frac{6(u - uv) - u^3 + 3uv^2}{6}, \frac{v^2 - u^2 - 2v}{2}, \frac{3(u^2 - v^2 - u^2v) + v^3}{6}\right)$$

elde edilir.

3.3 3-Boyutlu Öklid Uzayında Björling Problemi

İsveçli matematikçi Emanuel Gabriel Björling, minimal yüzey teorisi üzerinde çalışmış ve 1844 yılında kendi ismiyle anılan bir problemi ortaya koymuştur (Björling 1844). Bu problem eğri yardımıyla minimal yüzey üretme problemi olarak bilinir ve şöyle ifade edilir:

Bjorling Problemi : 3-boyutlu Öklid uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ analitik bir eğri ve $V : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, α eğrisi boyunca $\langle V, \alpha' \rangle = 0$ şartını sağlayan birim vektör alanı olmak üzere; $u \in I$ için $\alpha(u) = X(u,0)$ ve $V(u) = N(u,0)$ olacak biçimde normali $N(u,v)$ olan bir $X(u,v)$ parametrik minimal yüzeyi elde edilebilir mi?
Björling problemi Cauchy-Kovalevskaya teoreminin özel bir halidir ve 1890 yılında Schwarz tarafından kompleks değişkenler yardımıyla çözülmüştür. Problemin çözülebilmesi için α eğrisinin ve V vektör alanının reel değişkeni, Taylor serisinde kompleks değişken z ile değiştirileceğinden eğrinin ve vektör alanının analitik olması gerekir. Kompleks Taylor serisi yardımıyla $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde bir analitik (holomorf) kompleks eğri $\alpha(z) : \Omega \to \mathbb{C}^3$ tanımlanabilir. Ω basit bağlantılı bölgesinde $\alpha(t)$ eğrisi ve $V(t)$ vektör alanının holomorf genişlemeleri sırasıyla $\alpha(z)$ ve $V(z)$ dir. α eğrisi, Björling probleminin çözümü ile elde edilen minimal yüzeyin parametre eğrisidir ve V vektör alanı da eğri boyunca yüzeyin birim normal vektör alanını verir.

Teorem 3.3.1. Björling probleminin bir tek çözümü vardır ve

$$X(z) = Re\left(\alpha(z) - i\int_{u_0}^{z} V(w) \times \alpha'(w)\, dw\right), \ u_0 \in I \text{ sabit ve } z = u + iv$$

şeklindedir (Schwarz 1890).

Problemde yer alan (α, V) ikilisi Björling verisi olarak bilinir ve bu veriler yardımıyla Björling probleminin çözümünden elde edilen minimal yüzeye Björling yüzeyi de denir.

Uyarı 3.3.1. Björling probleminin bir tek çözümünün olması şöyle açıklanabilir: Eğer $X : \Omega_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$, $Y : \Omega_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ yüzeyleri aynı eğri ve vektör alanı için verilen Björling probleminin iki ayrı çözümü ise $\Omega_1 \cap \Omega_2$ cümlesi üzerinde $X(u,v) = Y(u,v)$ dir.

Öklid uzayında bir α eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere; $\mathbf{t} = \alpha'/|\alpha'|$, $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ ve $\mathbf{b} = \alpha' \times \alpha''/|\alpha' \times \alpha''|$ şeklindedir. Birim hızlı bir eğrinin ivme vektörü yüzeyin birim normal vektör alanına paralel ise bu eğri yüzey üzerinde geodeziktir.

Eğer α eğrisi birim hızlı bir eğri ise $\mathbf{n} = \alpha''/|\alpha''|$ olduğundan; birim vektör alanı $V = \mathbf{n}$ alınabilir ve Björling probleminin çözümü

$$X(z) = Re\left(\alpha(z) + i\int\limits_{u_0}^{z} \mathbf{b}(w)dw\right) \ , \ u_0 \text{ sabit ve } \ z = u + iv$$

şeklinde verilir. Bu durumda α eğrisi, $X(u,v)$ parametrik yüzeyi üzerinde hem parametre eğrisi hem de geodezik bir eğridir.

Önerme 3.3.1. Bir $X = X(u,v)$ parametrik yüzeyi, α eğrisi ve V vektör alanı ile üretilmiş bir Björling yüzeyi olsun. α eğrisi ve $-V$ vektör alanı ile üretilen Björling yüzeyi

$$\begin{aligned} X^*(u,v) &= Re\left(\alpha(z) + i\int\limits_{u_0}^{z} V(w)\times\alpha'(w)\,dw\right) \\ &= X(u,-v) \end{aligned}$$

şeklindedir (Dierkes vd. 1992, Oprea 2000).

İspat. (α, V) Björling verisi ile üretilen parametrik minimal yüzey $X(u,v)$ olsun. Yüzeyin minimal olma özelliği parametre seçiminden bağımsız olduğundan $X^*(u,v) = X(u,-v)$ yüzeyi de minimaldir ve $N^*(u,v) = -N(u,-v)$ dir. Böylece $X^*(u,v)$ yüzeyi, $(\alpha,-V)$ ile üretilen bir minimal yüzeydir. ■

Önerme 3.3.2. Parametrik bir $X = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ minimal yüzeyi verilsin ve $X(u,0)$, $xy-$ düzleminde bulunan bir eğri olsun. Eğer $X(u,v)$ parametrik yüzeyi, α eğrisi boyunca xy düzlemi ile dik olarak kesişirse

$$x_1(u,-v) = x_1(u,v) \ , \ \ x_2(u,-v) = x_2(u,v) \ , \ \ x_3(u,-v) = -x_3(u,v)$$

sağlanır (Dierkes vd. 1992, Oprea 2000).

İspat. $X(u,0) = \alpha(u)$ eğrisi boyunca minimal yüzeyin birim normal vektör alanı $N(u,0) = V(u)$ olsun. α eğrisi, $xy-$ düzleminde olduğundan $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), 0)$ şeklindedir. $X(u,v)$ yüzeyi $xy-$ düzlemi ile dik kesiştiğinden $V(u) = (v_1(u), v_2(u), 0)$ olup vektörel çarpım

$$V \times \alpha' = (0, 0, v_1\alpha_2' - v_2\alpha_1')$$

elde edilir. Björling probleminin çözümü tek olduğundan minimal yüzeyin birinci bileşeni $x_1 = Re(\alpha_1(z))$ ve ikinci bileşeni $x_2 = Re(\alpha_2(z))$ şeklindedir. α eğrisi ve $-V$ vektör alanı için Önerme 3.3.1 kullanılırsa, vektörel çarpımın sonucunda ilk iki koordinat sıfır olduğundan $x_1(u,-v) = Re(\alpha_1(z))$ ve $x_2(u,-v) = Re(\alpha_2(z))$ sağlanır. Ayrıca $x_3(u,v) = -Re\left(i\int(V\times\alpha')_3(w)dw\right)$ dır. α eğrisi ve $-V$ vektör alanı için

$$x_3(u,-v) = Re\left(i\int(V\times\alpha')_3(w)dw\right) = -x_3(u,v)$$

elde edilir.■

Benzer şekilde aşağıdaki önerme ispatsız verilebilir.

Önerme 3.3.3. $X = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ parametrik denklemi ile verilen bir minimal yüzey olsun. Eğer $X(u,0)$ eğrisinin noktaları $x-$ ekseninde ise

$$x_1(u,-v) = x_1(u,v)\ ,\quad x_2(u,-v) = -x_2(u,v)\ ,\quad x_3(u,-v) = -x_3(u,v)$$

dir.

Bir M yüzeyi üzerinde bir p noktası ve bir l doğrusu verilsin. Eğer $q\in M$ noktası l doğrusuna p noktası ile eşit uzaklıkta ise ve p ile q dan geçen doğru $\mathbb{R}^3$ uzayında l doğrusu ile dik olarak kesişiyorsa q noktası p noktasının l doğrusuna göre simetriğidir. Benzer şekilde yüzey üzerinde bir p noktası ve yüzey ile dik kesişen bir P düzlemi verilsin. Eğer $q\in M$ noktası P düzlemine p noktası ile eşit uzaklıkta ise ve p ile q dan geçen doğru P düzlemi ile dik olarak kesişiyorsa q noktası p noktasının P düzlemine göre simetriğidir. Önerme 3.3.2 ve Önerme 3.3.3 kullanılarak Schwarz yansıma prensipleri elde edilir. Burada bahsedilen minimal yüzeylerin simetri özelliği lokal bir özelliktir.

Teorem 3.3.2. (Schwarz Yansıma Prensipleri)

1. Bir minimal yüzey dik olarak kesiştiği bir düzleme göre simetriktir

2. Bir minimal yüzey içerdiği herhangi bir doğruya göre simetriktir. (Nitsche 1989, Dierkes vd. 1992).

Örnek 3.3.1. (Scherk'in Birinci Yüzeyi)

Scherk yüzeyinin simetri doğruları birinci Shwarz yansıma prensibine uygun bir örnektir. Scherk yüzeyinin kapalı denklemi $z = \log\left(\frac{\cos(y)}{\cos(x)}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$ şeklindedir. $z = 0$ için bu denklemde $\cos(y) = \cos(x)$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $y = \pm x$ dir. Yani Scherk yüzeyinin xy düzlemi ile arakesiti $y = \pm x$ doğrularıdır. Dolayısıyla bu doğrular Scherk yüzeyinin simetri eksenleridir.

Örnek 3.3.2. xz düzleminde bulunan $\alpha(u) = (\beta(u), 0, \gamma(u))$ eğrisini üzerinde geodezik bir eğri olarak bulunduran minimal yüzeyi Björling formülü ile elde edelim. Eğrinin birim normal vektör alanı $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\beta'(u)^2+\gamma'(u)^2}}(-\gamma', 0, \beta')$ olup, $V = \mathbf{n}$ durumunda vektörel çarpım $V(w) \times \alpha'(w) = (0, \sqrt{\beta'^2(w) + \gamma'^2(w)}, 0)$ dır. Böylece Björling probleminin çözümü

$$X(u, v) = (Re\beta(z), Im \int_0^z \sqrt{\beta'(w)^2 + \gamma'(w)^2} dw, Re\gamma(z))$$

şeklindedir. Özel olarak $\alpha = (1 - \cos(u), 0, u - \sin(u))$ sikloid eğrisi alınırsa, minimal yüzeyin parametrik denkleminin birinci ve üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned} x_1 &= Re(1 - \cos(z)) = 1 - \cos(u)\cosh(v) \\ x_3 &= Re(z - \sin(z)) = u - \sin(u)\cosh(v) \end{aligned}$$

elde edilir. $\sin^2(w) + (1 - \cos(w))^2 = 4\sin^2(w/2)$ eşitliğinden

$$\int_0^z \sqrt{\sin^2(w) + (1 - \cos(w))^2} dw = -4\cos(z/2)$$

olup Björling probleminin çözümü ile elde edilen yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u, v) = \left(1 - \cos(u)\cosh(v), 4\sin\frac{u}{2}\sinh\frac{v}{2}, u - \sin(u)\cosh(v)\right)$$

dir. Bu yüzey Catalan yüzeyi olarak bilinir ve sikloid eğrisini hem geodezik hem de $u-$ parametre eğrisi olarak üzerinde bulundurur.

Björling problemi yardımıyla yönlendirilemeyen minimal yüzeylerde elde edilebilir. Örneğin; $y = 0$ düzleminde yer alan $2x^3 = 9z^2$ Neil parabolünden üretilen minimal yüzey Henneberg yüzeyidir. Bu yüzey yönlendirilemeyen (tek taraflı) bir minimal yüzeydir ve Neil parabolünü üzerinde hem parametre eğrisi hem de geodezik eğri olarak bulundurur.

3.4 3- Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayında Björling Problemi

Maksimal yüzeyler yalnızca matematik de değil genel görelilik problemlerinde de yer aldığından fizik için de önemli bir konudur. Maksimal yüzeyler ile Öklid uzayında verilen minimal yüzeyler bazı ortak özelliklere sahiptir. Örneğin, maksimal yüzeyler alan integralinde maksimum alanı ifade ederler. Ayrıca, bu yüzeyler de minimal yüzeylerde olduğu gibi Weierstrass-Enneper gösterimine sahiptir. Ancak minimal ve maksimal yüzeyler arasında farklılıklar da bulunur. Calabi-Bernstein teoremi ile $\mathbb{L}^3$ uzayında tam maksimal yüzeylerin yalnızca spacelike düzlemler olduğu gösterilmiştir. Weierstrass-Enneper gösterimleri genellikle tam minimal yüzeyler için kullanıldığından maksimal yüzeyler için Weierstrass-Enneper gösterimleri minimal yüzeylerde olduğu kadar kullanışlı değildir. Bu nedenle maksimal yüzey üretecek başka bir formül elde etmek önemlidir. Dolayısıyla $\mathbb{L}^3$ uzayında, bu tip yüzeyler için Björling problemi ele alınmıştır. Problem oluşturulurken dikkat edilmesi gereken nokta maksimal yüzey, bir spacelike yüzey olduğundan V birim vektör alanının timelike ve α eğrisinin, spacelike bir eğri olması gerektiğidir. Ayrıca V vektör alanı timelike olduğundan Lorentz metriği de gözönüne alınırsa vektör alanının üçüncü bileşeni mutlaka sıfırdan farklı olmalıdır. Björling problemi maksimal yüzeyler için şu şekilde ifade edilebilir: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{L}^3$ analitik spacelike bir eğri ve $V : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{L}^3$, eğri boyunca $\langle V, \alpha' \rangle = 0$ şartını sağlayan birim timelike vektör alanı olmak üzere; $u \in I$ için α eğrisini üzerinde $u-$ parametre eğrisi olarak barındıran ve V vektör alanı α eğrisi boyunca yüzeyin birim normal vektör alanı olacak biçimde bir $X(u, v)$ maksimal yüzeyi elde edilebilir mi? Problemde bahsedilen α eğrisi ve V vektör alanı analitik olduğundan, analitik devam ilkesine göre $\alpha(z)$ ve $V(z)$ holomorf genişlemeleri vardır ve bu genişlemeler tektir. Basit bağlantılı $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesinde, $\alpha(z)$ ve $V(z)$ sırasıyla $\alpha(t)$ eğrisi ve $V(t)$ vektör alanının holomorf genişlemeleri olmak üzere; Björling probleminin çözümü

$$X(z) = Re\left(\alpha(z) + i\int_{u_0}^{z} V(w) \times \alpha'(w)\, dw\right) \quad u_0 \in I, \quad z = u + iv \tag{3.17}$$

şeklinde verilir. $X(z)$ yüzeyi, α eğrisi ve V vektör alanı ile elde edilen tek maksimal yüzeydir (Alias vd. 2003). Ω basit bağlantılı bölge olduğu için formülde yer alan integral çevreden bağımsızdır. Böylece $X(z)$ iyi tanımlıdır. Öklid uzayında olduğu gibi Björling probleminin çözümü ile elde edilen maksimal yüzeylere Björling yüzeyi de denilebilir. Eğer $X : \Omega_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{L}^3$, $Y : \Omega_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{L}^3$ yüzeyleri aynı eğri ve vektör alanı için verilen Björling probleminin iki ayrı çözümü ise $\Omega_1 \cap \Omega_2$ cümlesi üzerinde $X(u,v) = Y(u,v)$ dir.

$\alpha : I \to \mathbb{L}^3$, birim hızlı spacelike bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için, α'' vektörü timelike ise $\left(\alpha, V = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}\right)$ verisi ile üretilen Björling yüzeyi, α eğrisini geodezik bir eğri olarak üzerinde barındıran tek maksimal yüzeydir.

Sonuç 3.4.1. $X = X(u,v)$ parametrik yüzeyi, α eğrisi ve V vektör alanı ile üretilmiş bir maksimal yüzey olsun. α eğrisi ve $-V$ vektör alanı ile üretilen maksimal yüzey

$$\begin{aligned} X^*(u,v) &= Re\left(\alpha(z) - i\int_{u_0}^{z} V(w) \times \alpha'(w)\, dw\right) \\ &= X(u,-v) \end{aligned}$$

şeklindedir (Alias vd. 2003).

Spacelike bir M yüzeyi üzerinde bir p noktası ve spacelike bir l doğrusu verilsin. Eğer $q \in M$ noktası için $\frac{p+q}{2} \in l$ ise ve p ile q dan geçen doğru l doğrusu ile dik olarak kesişiyorsa q noktası p noktasının l doğrusuna göre simetriğidir denir. Benzer şekilde yüzey üzerinde bir p noktası ve yüzey ile dik kesişen timelike bir P düzlemi verilsin. Eğer $q \in M$ noktası için $\frac{p+q}{2} \in P$ ise ve p ile q dan geçen doğru P düzlemi ile dik olarak kesişiyorsa q noktası p noktasının P düzlemine göre simetriğidir denir. Bu tanımdan yola çıkılarak Öklid uzayında minimal yüzeyler için verilen Schwarz yansıma prensipleri Lorentz uzayında maksimal yüzeyler için de elde edilmiştir.

Teorem 3.4.1. (Schwarz Yansıma Prensipleri)
1. Bir maksimal yüzey üzerinde bulunan her spacelike doğru, yüzeyin simetri eksenidir.
2. Bir maksimal yüzey ile dik olarak kesişen her timelike düzlem, yüzeyin simetri düzlemidir (Alias vd. 2003).

Örnek 3.4.1. xz düzleminde bulunan $\alpha(u) = (\beta(u), 0, \gamma(u))$ spacelike bir eğri ve $\mathbf{n}$ eğrinin birim normal vektör alanı olmak üzere; $V = \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\beta'^2 - \gamma'^2}}(\gamma', 0, \beta')$ birim timelike vektör alanı kullanılarak $V \times \alpha' = (0, \sqrt{\beta'^2 - \gamma'^2}, 0)$ elde edilir. Buradan Björling probleminin çözümünden elde edilen maksimal yüzey

$$X(z) = (Re\beta(z), -Im\int_0^z \sqrt{\beta'(w)^2 - \gamma'(w)^2}dw, Re\gamma(z))$$

şeklindedir. Özel olarak spacelike $\alpha(u) = (u, 0, \cos(u))$ eğrisi alınırsa $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı

$$X(u, v) = (u, -\cos(u)\sinh(v), \cos(u)\cosh(v))$$

hiperbolik katenoid yüzeyi elde edilir. Örnekde görüldüğü üzere α eğrisi, X yüzeyinin $u-$ parametre eğrisidir. Bu yüzey timelike düzlemde bulunan spacelike bir çember eğrisi yardımıyla da elde edilebilir. Burada Björling formülü yardımıyla bulunan hiperbolik katenoid yüzeyi Örnek 3.2.1 de Weiertrass verileri ile elde edilmişti.
Öklid uzayına benzer olarak Henneberg maksimal yüzeyi, $9x^2 = (z+2)^3$ eğrisi yardımıyla elde edilmiştir ve bu eğriyi üzerinde geodezik eğri olarak bulunduran tek maksimal yüzeydir (Alias vd. 2003).

Önerme 3.4.1. $\mathbb{L}^3$ uzayında timelike düzlemde bulunan spacelike bir çemberi üzerinde geodezik eğri olarak bulunduran bir maksimal yüzey hiperbolik katenoid yüzeyine ya da onun bir parçasına denktir (Alias vd. 2003).

$\mathbb{L}^3$ uzayında bir yüzey, eğer bir parametreli dönme hareketi altında invaryant ise ve l ekseni üzerindeki her nokta bu hareket altında sabit ise yüzeye l eksenli dönel yüzey denir.

Teorem 3.4.2. $\mathbb{L}^3$ uzayında her maksimal dönel yüzey aşağıda verilen yüzeylerin birine veya onun bir parçasına denktir

i) spacelike düzlem

ii) birinci tip katenoid yüzeyi

iii) ikinci tip katenoid yüzeyi

iv) ikinci tip Enneper yüzeyi (Kobayashi 1983).

Uyarı 3.4.1. $\mathbb{L}^3$ uzayında birinci tip katenoid yüzeyi timelike eksenli, ikinci tip katenoid yüzeyi spacelike eksenli ve ikinci tip Enneper yüzeyi lightlike eksenli maksimal dönel yüzeylerdir.

$\mathbb{L}^3$ uzayında her spacelike regle yüzey α birim hızlı spacelike bir eğri ve $\mathbf{n}$ eğrinin birim normal vektör alanı olmak üzere; $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}^3$, $X(u,v) = \alpha(u) + v\mathbf{n}(u)$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.4.3. $\mathbb{L}^3$ uzayında her maksimal regle yüzey aşağıda verilen yüzeylerin birine veya onun bir parçasına denktir

i) spacelike düzlem

ii) birinci tip helikoid yüzeyi

iii) ikinci tip helikoid yüzeyi

iv) ikinci tip Enneper yüzeyinin eşlenik yüzeyi (Cayley regle yüzeyi) (Kobayashi 1983).

4. MAKSİMAL YÜZEYLERİN YENİ ÖRNEKLERİ

3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında elde edilen ve (3.17) ile verilen Björling probleminin çözümü maksimal yüzey elde etmek güzel ve kullanışlı bir yöntemdir. Ancak formülde yer alan integrali almak ve bunun sonucunda elde edilen kompleks ifadeyi reel ve imajiner kısımlara ayırmak kolay olmadığı için literatürde bu yöntemle elde edilmiş çok fazla maksimal yüzey örneği yoktur. Bu bölümde (3.17) formülü kullanılarak yeni maksimal yüzey örnekleri elde edilecek ve bu yüzeyler parametrik denklemleri ile verilecektir. Björling problemi ile ilgili genel teori, Björling yüzeyinin eğri boyunca bir şerit olduğunu söyler. Ancak bu tez çalışmasında Björling formülünün çözümleri tüm kompleks düzlem $\mathbb{C}$ üzerine genişletilecektir.

$\mathbb{L}^3$ uzayında α, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısına sahip spacelike bir eğri ve V, α eğrisi boyunca birim timelike vektör alanı olsun. $\langle V, \alpha' \rangle = 0$ şartı sağlandığından V vektör alanı, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak $V = g(t)\mathbf{n}(t) + h(t)\mathbf{b}(t)$ şeklinde yazılabilir. V, birim vektör alanı timelike olduğundan $g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları eğrinin normal ve binormal vektörünün causal karakterine bağlı olarak $g(t), h(t) \in \{\cosh \vartheta(t), \sinh \vartheta(t)\}$ seçilmelidir.

α eğrisi, çember ya da helis eğrisi ve ϑ fonksiyonu lineer alınarak Björling problemi çözülebilir. Burada eğrinin ve ϑ fonksiyonunun seçimi formülde yer alan integralin hesaplanabilmesi için önemlidir. Aslında bu yöntem Öklid uzayında minimal yüzey elde etmek için uygulanmıştır (Meeks ve Weber 2007, Mira 2006). Öklid uzayında eğrinin çember olarak alınması ile elde edilen Björling yüzeyler, *bending helicoids* (Meeks ve Weber 2007) ve eğrinin helis olarak alınmasıyla elde edilen Björling yüzeyler ise Weber tarafından *helicoidal helicoids* olarak adlandırılmışlardır.

Tezin bu bölümünde yeni maksimal yüzey örnekleri elde etmek için Öklid uzayında verilen bending helicoids ve helicoidal helicoids yüzeylerinin Lorentz-Minkowski uzayında karşılıkları araştırılacaktır. Ancak Öklid ve Lorentz-Minkowski uzayları arasında dikkat edilmesi gereken bazı durumlar vardır. Örneğin, $\mathbb{L}^3$ uzayında dönme ekseninin causal karakterine bağlı olarak üç tip spacelike çember eğrisi vardır. Bu çemberlerden timelike ve spacelike eksenli olanlar trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilirken, lightlike eksenli olanlar polinomlarla ifade edilirler.

4.1 Çemberi İçeren Maksimal Yüzey Örnekleri

Spacelike bir çember, sıfırdan farklı sabit eğriliğe sahip düzlemsel bir eğri olarak tanımlanır. Bir başka ifadeyle $\mathbb{L}^3$ uzayında çember, bir noktanın bir parametreli dönme hareketi altında yörüngesidir ve bir nokta ile dönme hareketinin ekseni yardımıyla belirlenir. $\mathbb{L}^3$ uzayında timelike, spacelike ya da lightlike eksene sahip üç farklı spacelike çember eğrisi vardır. Timelike veya spacelike eksenli yay-parametresi ile parametrelendirilmiş spacelike çember bir Frenet eğrisidir ve Frenet elemanları $\mathbf{t} = \alpha'$, $\mathbf{n} = \alpha''/|\alpha''|$ ve $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ şeklinde verilir. Eğer eksen lightlike ise $\alpha''(t)$ bir lightlike vektör olduğundan eğri üzerinde ortonormal Frenet çatısı kurulamaz. Bunun için $\alpha'(t)$ vektörü ve iki tane lightlike vektör yardımıyla bir ortonormal çatı elde edilerek devam edilir.

4.1.1 Timelike eksen

Homoteti altında $L = Sp\{(0,0,1)\}$ timelike eksenli spacelike bir çember eğrisi $t \in \mathbb{R}$ için, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ şeklinde parametrize edilir. Eğrinin normal ve binormal vektörleri sırasıyla

$$\mathbf{n}(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0) \quad \text{ve} \quad \mathbf{b}(t) = (0,0,-1)$$

dir. Eğri boyunca eğrinin teğetine dik olan birim timelike vektör alanı ise

$$V(t) = \sinh(\vartheta(t))\mathbf{n} + \cosh(\vartheta(t))\mathbf{b} \tag{4.1}$$

şeklindedir. $\vartheta(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alarak tüm durumları inceleyelim.

1. **Durum** : Eğer $\vartheta(t) = 0$ ise $V(z) \times \alpha'(z) = (\cos(z), \sin(z), 0)$ dır. Eğrinin son

bileşeni de sıfır olduğundan Björling yüzeyi $z =$ sabit olan yatay düzlemlerdir.

2. Durum : Eğer $\vartheta(t) = b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ ise birim timelike vektör alanı

$$\begin{aligned} V(t) &= \sinh(b)\mathbf{n} + \cosh(b)\mathbf{b} \\ &= (-\sinh(b)\cos(t), -\sinh(b)\sin(t), -\cosh(b)), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dir. α eğrisinin ve V birim vektör alanının holomorf genişlemeleri sırasıyla

$$\alpha(z) = (\cos(z), \sin(z), 0) \quad \text{ve} \quad V(z) = (-\sinh(b)\cos(z), -\sinh(b)\sin(z), -\cosh(b))$$

olduğundan, Lorentz vektörel çarpım

$$V(z) \times \alpha'(z) = (\cosh(b)\cos(z), \cosh(b)\sin(z), \sinh(b))$$

olarak hesaplanır. (3.17) ile verilen Björling formülünde yer alan integral

$$\int_0^z V(w) \times \alpha'(w)dw = (\cosh(b)\sin(z), \cosh(b)(1-\cos(z)), z\sinh(b))$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla Björling yüzeyi

$$X(z) = Re \begin{pmatrix} \cos(z) + i\cosh(b)\sin(z) \\ \sin(z) + i\cosh(b)(1-\cos(z)) \\ iz\sinh(b) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Mathematica programı kullanılarak bu eşitlikte yer alan kompleks ifadelerin reel ve imajiner kısımları hesaplanabilir. Örneğin; $\cos(z)$ fonksiyonu için hesaplama aşağıda verildiği gibidir:

```
Cos[u+Iv]//TrigExpand
Cos[u]Cosh[v]-I Sin[u]Sinh[v].
```

Dolayısıyla maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)(\cosh(v) - \cosh(b)\sinh(v)) \\ \sin(u)(\cosh(v) - \cosh(b)\sinh(v)) \\ -v\sinh(b) \end{pmatrix}$$

elde edilir. $(0,0,1)$ eksenli bir parametreli dönme hareketi

$$G_t = \left\{ \Psi^t(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) & 0 \\ \sin(\tau) & \cos(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde verilir. Buradan $\forall \tau \in \mathbb{R}$ için $\Psi^t(\tau) \cdot X(u,v) = X(u+\tau, v)$ sağlandığı için elde edilen maksimal yüzey bir dönel yüzeydir. Bu yüzey eliptik katenoid veya birinci tip katenoid yüzeyi olarak adlandırılmıştır (Kobayashi 1983).

Şimdi bu maksimal yüzeyin Weierstrass gösterimini elde edelim. (3.17) ifadesinden holomorf 1-formlar

$$\psi(z) = [\alpha'(z) + i(V(z) \times \alpha'(z))]\, dz$$

şeklindedir. Buradan

$$\psi = (-\sin(z) + i\cosh(b)\cos(z), \cos(z) + i\cosh(b)\sin(z), i\sinh(b))$$

olup yüzeyin Weierstrass verisi

$$\begin{aligned} \omega = \psi_1 - i\psi_2 &= (-1+\cosh(b))(\sin(z) + i\cos(z)) \\ &= \frac{1}{2} i e^{-b-iz}(-1+e^b)^2 \\ g(z) = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2} &= \coth(b/2)(\cos(z) + i\sin(z)) \\ &= \coth(b/2)e^{iz}. \end{aligned}$$

dir.

3. **Durum** : $\mathbb{L}^3$ uzayında bending helicoids yüzeyleri $\vartheta(t) = at + b, a \neq 0$ durumunda elde edilirler. Sonuçların daha basit bir şekilde elde edilebilmesi için $b = 0$ alınabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} V(t) &= \sinh(at)\mathbf{n} + \cosh(at)\mathbf{b} \\ &= (-\sinh(at)\cos(t), -\sinh(at)\sin(t), -\cosh(at)), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve holomorf genişlemelerin vektörel çarpımı

$$V \times \alpha' = (\cosh(az)\cos(z), \cosh(az)\sin(z), \sinh(az))$$

olup

$$\int_0^z V(w)\times\alpha'(w)dw = \begin{pmatrix} \frac{\cosh(az)\sin(z)+a\cos(z)\sinh(az)}{1+a^2} \\ \frac{1-\cos(z)\cosh(az)+a\sin(z)\sinh(az)}{1+a^2} \\ \frac{-1+\cosh(az)}{a} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece Björling yüzeyi

$$X(z) = Re\begin{pmatrix} \cos(z)+i\frac{\cosh(az)\sin(z)+a\cos(z)\sinh(az)}{1+a^2} \\ \sin(z)+i\frac{1-\cos(z)\cosh(az)+a\sin(z)\sinh(az)}{1+a^2} \\ i\frac{-1+\cosh(az)}{a} \end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} A(v) &= a\sinh(v)\cos(av)-\cosh(v)\sin(av) \\ B(v) &= \sinh(v)\cos(av)+a\cosh(v)\sin(av) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cosh(v)+\frac{\sin(u)\sinh(au)A(v)-\cos(u)\cosh(au)B(v)}{1+a^2} \\ \sin(u)\cosh(v)-\frac{\cos(u)\sinh(au)A(v)+\sin(u)\cosh(au)B(v)}{1+a^2} \\ -\frac{\sin(av)\sinh(au)}{a} \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

şeklindedir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$E = G = (\cos(av)\cosh(v)-\cosh(au)\sinh(v))^2 \quad F = 0$$

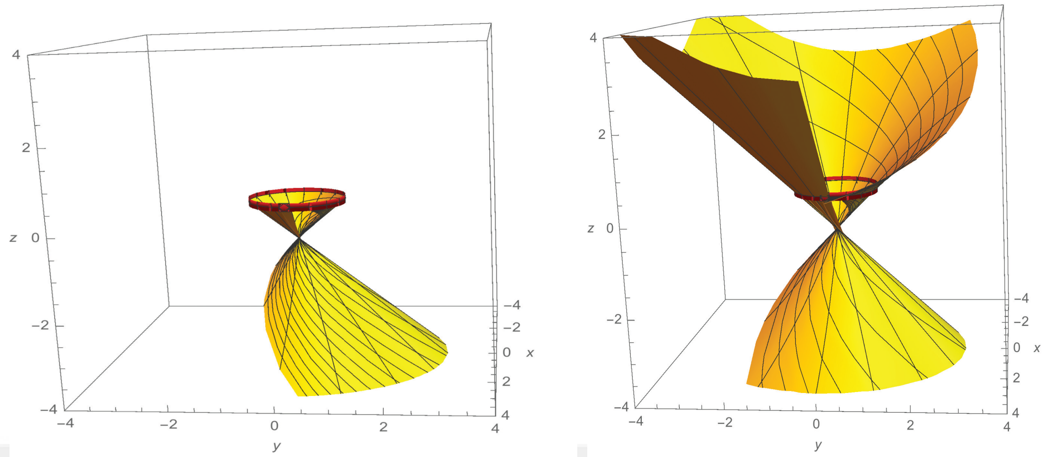
olduğundan elde edilen yüzey izotermal parametrelemeye sahiptir ve

$$X_{uu}+X_{vv}=0$$

eşitliği sağlandığından bir maksimal yüzeydir.

Genel durumda yüzeyin holomorf 1-formları

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (-\sin(z)+i\cos(z)\cosh(az))dz \\ &= \left(\frac{1}{4}i\left(e^{-iz}+e^{iz}\right)\left(e^{-az}+e^{az}\right)+\frac{1}{2}i\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\right)dz \\ \psi_2 &= (\cos(z)+i\sin(z)\cosh(az))dz \\ &= \left(\frac{1}{4}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\left(e^{az}+e^{-az}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-iz}+e^{iz}\right)\right)dz \\ \psi_3 &= i\sinh(az)dz = \frac{1}{2}i(e^{az}-e^{-az})dz \end{aligned}$$



Şekil 4.1 $a = 1$ için timelike eksenli çemberi içeren maksimal yüzey

olup yüzeyin Weierstrass verisi

$$
\begin{aligned}
\omega &= i\frac{\left(e^{az}-1\right)^2}{2e^{(a+i)z}}dz \\
g(z) &= \frac{e^{iz}\left(e^{az}+1\right)}{e^{az}-1}.
\end{aligned}
$$

dir. Holomorf formları üstel fonksiyonlar cinsinden yazmak için Mathematica programından yararlanılabilir. Örneğin;

```
TrigToExp[-Sin[z]+I Cos[z] Cosh[az]]
```

komutu kullanılarak ψ_1 holomorf formunun üstel fonksiyonlar cinsinden ifadesi elde edilir.

Uyarı 4.1.1. **1**. $\mathbb{R}^3$ uzayında bending helicoids yüzeyleri elde edilirken kullanılan $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ çember eğrisi boyunca vektör alanı $V = \cos(\vartheta(t))\mathbf{n}(t) + \sin(\vartheta(t))\mathbf{b}(t)$ şeklinde periyodik bir fonksiyondur; ancak $\mathbb{L}^3$ uzayında α çember eğrisi boyunca vektör alanı periyodik bir fonksiyon olmadığı için α eğrisi yüzey üzerinde uzunluğu 2π den küçük olan bir çember parçasını ifade eder.

2. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\vartheta(t) = \frac{1}{2}t$ durumunda yönlendirilemeyen minimal yüzeyler elde edilmiştir (Mira 2006, Meeks ve Weber 2007). Ancak spacelike yüzeyler her zaman yönlendirilebilir olduklarından $\mathbb{L}^3$ uzayında böyle bir durum söz konusu değildir.

4.1.2 Spacelike eksen

$L = Sp\{(1,0,0)\}$ spacelike eksenli spacelike bir çember homoteti altında $t \in \mathbb{R}$ için, $\alpha(t) = (0, \sinh(t), \cosh(t))$ şeklinde parametrize edilir. Eğrinin normal ve binormal vektörleri

$$\mathbf{n} = (0, \sinh(t), \cosh(t)), \qquad \mathbf{b} = (1,0,0)$$

dır. Böylece birim timelike vektör alanı, $V(t) = \cosh(\vartheta(t))\mathbf{n} + \sinh(\vartheta(t))\mathbf{b}$ şeklindedir. ϑ fonksiyonuna göre durumlar timelike eksende olduğu gibi incelenebilir:

1. Durum : Eğer $\vartheta(t) = b \in \mathbb{R}$ ise $V = (\sinh(b), \cosh(b)\sinh(t), \cosh(b)\cosh(t))$ dir. Eğrinin ve vektör alanının holomorf genişlemelerinin vektörel çarpımı

$$V \times \alpha' = (-\cosh(b), -\sinh(b)\sinh(z), -\sinh(b)\cosh(z))$$

dır ve buradan Björling yüzeyinin denklemi

$$X(z) = Re \begin{pmatrix} -i\cosh(b)z \\ \sinh(z) - i\sinh(b)(\cosh(z) - 1) \\ \cosh(z) - i\sinh(b)\sinh(z) \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} v\cosh(b) \\ \sinh(u)(\sinh(b)\sin(v) + \cos(v)) \\ \cosh(u)(\sinh(b)\sin(v) + \cos(v)) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$G_s = \left\{ \Psi^s(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\tau) & \sinh(\tau) \\ 0 & \sinh(\tau) & \cosh(\tau) \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

ile $(1,0,0)$ spacelike eksenli bir parametreli dönme hareketi ifade edilir ve $\forall \tau \in \mathbb{R}$ için $\Psi^s(\tau) \cdot X(u,v) = X(u+\tau, v)$ sağlandığından $X(u,v)$ bir dönel yüzeydir. Dolayısıyla

elde ettiğimiz yüzey hiperbolik katenoid yüzeyidir. $b = 0$ olması halinde elde edilen yüzey ikinci tip katenoid yüzeyi olarak adlandırılır (Kobayashi 1983).
Yüzeyin holomorf 1-formları

$$\psi(z) = (-i\cosh(b), \cosh(z) - i\sinh(b)\sinh(z), \sinh(z) - i\sinh(b)\cosh(z))$$

olup yüzeyin Weierstrass verisi, üstel fonksiyonlar cinsinden

$$\omega = -\frac{(e^{b+z} + ie^b + ie^z + 1)^2}{4e^{b+z}}dz \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{ie^{b+z} + e^b - e^z - i}{e^{b+z} + ie^b + ie^z + 1}.$$

dir.

Uyarı 4.1.2. $b = 0$ için Weierstrass verisi $w = -i\frac{(e^z+1)^2}{2e^z}dz \quad g = i\frac{e^z-1}{e^z+1}$ elde edilir. Bu veriler yardımıyla hiperbolik katenoid yüzeyi Örnek 3.2.1 de elde edilmiştir.

2. **Durum** : Eğer $\vartheta(t) = at$, $a \neq 0$ ise birim vektör alanı

$$\begin{aligned} V(t) &= \cosh(at)\mathbf{n} + \sinh(at)\mathbf{b} \\ &= (\sinh(at), \cosh(at)\sinh(t), \cosh(at)\cosh(t)), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olup

$$V \times \alpha' = (-\cosh(az), -\sinh(z)\sinh(az), -\cosh(z)\sinh(az))$$

$$\int_0^z V(w) \times \alpha'(w)dw = \begin{pmatrix} \frac{-\sinh(az)}{a} \\ \frac{-a\cosh(az)\sinh(z)+\cosh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \\ \frac{a-a\cosh(az)\cosh(z)+\sinh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu durumda yüzeyin parametrik denklemi $a \neq 1$ ve $a = 1$ için iki farklı şekilde elde edilir. Eğer $a \neq 1$ ise

$$X(z) = Re \begin{pmatrix} -i\frac{\sinh(az)}{a} \\ \sinh(z) + i\frac{-a\cosh(az)\sinh(z)+\cosh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \\ \cosh(z) + i\frac{a-a\cosh(az)\cosh(z)+\sinh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \end{pmatrix}$$

seklindedir. Buradan maksimal yüzeyin denklemi

$$\begin{aligned} A(v) &= \cos(v)\sin(av) + a\sin(v)\cos(av) \\ B(v) &= a\cos(v)\sin(av) - \sin(v)\cos(av) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\cosh(au)\sin(av)}{a} \\ \sinh(u)\cos(v) + \frac{\cosh(u)\cosh(au)A(v)+\sinh(u)\sinh(au)B(v)}{a^2-1} \\ \cosh(u)\cos(v) + \frac{\sinh(u)\cosh(au)A(v)+\cosh(u)\sinh(au)B(v)}{a^2-1} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

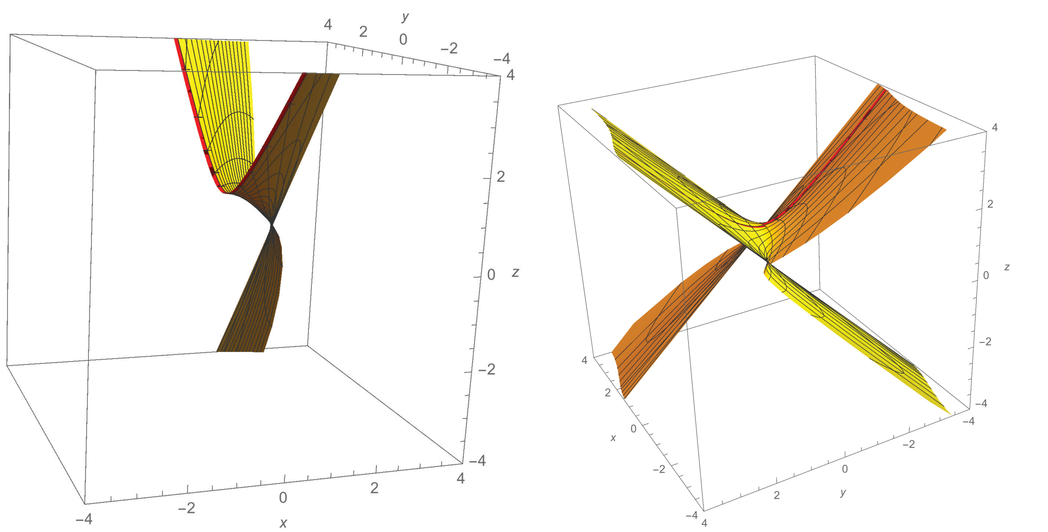
elde edilir. Eğer $a = 1$ ise

$$X(z) = Re \begin{pmatrix} -i\sinh(z) \\ \sinh(z) + i\frac{z-\cosh(z)\sinh(z)}{2} \\ \cosh(z) - i\frac{\sinh^2(z)}{2} \end{pmatrix}$$

olduğundan maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh(u)\sin(v) \\ \sinh(u)\cos(v) + \frac{1}{2}\sin(v)\cos(v)(1+2\sinh^2(u)) - \frac{v}{2} \\ \cosh(u)\cos(v)(1+\sinh(u)\sin(v)) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

elde edilir.



Şekil 4.2 $a = 1$ için spacelike eksenli çemberi içeren maksimal yüzey

Yüzeyin holomorf 1-formları

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -i\cosh(az)dz = -\frac{1}{2}ie^{-az}\left(e^{2az}+1\right)dz \\
\psi_2 &= (\cosh(z) - i\sinh(z)\sinh(az))dz \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right) - \frac{1}{4}i\left(e^{z}-e^{-z}\right)\left(e^{az}-e^{-az}\right)\right)dz \\
\psi_3 &= (\sinh(z) - i\cosh(z)\sinh(az))dz \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right) - \frac{1}{4}i\left(e^{z}+e^{-z}\right)\left(e^{az}-e^{-az}\right)\right)dz
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece yüzeyin Weierstrass verisi

$$\omega = -\frac{\left(e^{(a+1)z}+ie^{az}+ie^{z}+1\right)^2}{4e^{(a+1)z}}dz \quad , \quad g(z) = \frac{ie^{(a+1)z}+e^{az}-e^{z}-i}{e^{(a+1)z}+ie^{az}+ie^{z}+1}$$

olarak hesaplanır. Timelike eksenin aksine spacelike eksende holomorf 1-formlar yalnızca e^z üstel dönüşüm cinsinden yazılabildiği için $e^z \to z$ $(dz \to dz/z)$ değişken değiştirmesi yapılarak holomorf 1-formlar

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -i\frac{z^{2a}+1}{2z^{a+1}}dz \\
\psi_2 &= \frac{-iz^{2a+2}+iz^{2a}+2z^{a+2}+2z^{a}+iz^{2}-i}{4z^{a+2}}dz \\
\psi_3 &= \frac{-iz^{2a+2}-iz^{2a}+2z^{a+2}-2z^{a}+iz^{2}+i}{4z^{a+2}}dz
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir ve yüzeyin Weierstrass verisi

$$\omega = -\frac{\left(z^{a+1}+iz^{a}+iz+1\right)^2}{4z^{a+1}}dz \quad , \qquad g(z) = i\frac{z^{a+1}-iz^{a}+iz-1}{z^{a+1}+iz^{a}+iz+1}$$

dir. w holomorf $1-$ formu, $M = \mathbb{C} - \{0\}$ Riemann yüzeyi üzerinde tanımlıdır. $a = n \in \mathbb{N}$ için ψ_k holomorf formlarının $n \neq 1$ durumunda reel periyodu yoktur. $n = 1$ durumunda ise yalnızca ψ_2 nin reel periyodu vardır.

4.1.3 Lightlike eksen

$L = Sp\{(1,0,1)\}$ lightlike eksene sahip spacelike bir çember homoteti altında, $t \in \mathbb{R}$ için, $\alpha(t) = (-1+t^2/2, t, t^2/2)$ şeklinde parametrize edilir. $\alpha' = (t,1,t)$ ve $\alpha'' = (1,0,1)$ olup bir lightlike vektördür. Dolayısıyla diğer durumlarda olduğu gibi bir Frenet çatısı elde edilemez. Bunun yerine eğrinin normal vektörü $\mathbf{n}(t) = \alpha''(t)/2$ olarak ve binormal vektörü $\mathbf{b}(t)$ ise $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\rangle = -1/2$ olacak şekilde $\alpha'(t)$ vektörüne ortogonal olan birim lightlike vektör olarak tanımlanır (Lopez 2014). Böylece

$$\mathbf{n}(t) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad \mathbf{b}(t) = \left(\frac{t^2-1}{2}, t, \frac{t^2+1}{2}\right) \tag{4.6}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} e_2(t) &= \mathbf{n} - \mathbf{b} = \left(\frac{2-t^2}{2}, -t, -\frac{t^2}{2}\right) \\ e_3(t) &= \mathbf{n} + \mathbf{b} = \left(\frac{t^2}{2}, t, \frac{t^2+2}{2}\right) \end{aligned}$$

vektörleri ile birlikte $\{\alpha'(t), e_2(t), e_3(t)\}$ bir ortonormal bazdır. Böylece birim timelike vektör alanı $V(t) = \sinh(\vartheta(t))e_2 + \cosh(\vartheta(t))e_3$ şeklinde yazılabilir.

1. Durum : Eğer $\vartheta(t) = b \in \mathbb{R}$ ise

$$V = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}(\cosh(b) - \sinh(b) + \sinh(b)) \\ t(\cosh(b) - \sinh(b)) \\ \frac{t^2}{2}(\cosh(b) - \sinh(b)) + \cosh(b) \end{pmatrix}$$

dır ve holomorf genişlemelerin vektörel çarpımı

$$V(z) \times \alpha'(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cosh(b)(z^2-2) - \sinh(b)z^2) \\ (\cosh(b) - \sinh(b))z \\ \frac{1}{2}(\cosh(b)z^2 - \sinh(b)(z^2+2)) \end{pmatrix}$$

olup maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} (\sinh(b) - \cosh(b))(\frac{1}{2}u^2v - \frac{1}{6}v^3) + v\cosh(b) + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} - 1 \\ u + (\sinh(b) - \cosh(b))uv \\ (\sinh(b) - \cosh(b))(\frac{1}{2}u^2v - \frac{1}{6}v^3) + v\sinh(b) + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu yüzeyin dönel bir yüzey olduğunu gösterelim.

$L = \{(1,0,1)\}$ eksenli bir parametreli dönme hareketi

$$G_l = \left\{ \Psi^l(\tau) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau^2}{2} & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ -\tau & 1 & \tau \\ -\frac{\tau^2}{2} & \tau & \frac{\tau^2}{2} + 1 \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak verilir. γ, xz düzleminde bir eğri olmak üzere L eksenli bir dönel yüzey $M(u,s) = \Psi^l(u) \cdot \gamma(s)$ şeklindedir. $\gamma(s) = (s, 0, g(s))$ olarak alınırsa yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olması için $(s - g(s))g'' = (g'^2 - 1)(g' - 1)$ denklemi sağlanmalıdır. Buradan

$$c(s - g(s))^3 + s - g(s) = 2s + d, \quad c > 0, d \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

elde edilir. γ eğrisinde değişken değiştirmesi yapılarak

$$\gamma(s) = (s, 0, g(s)) = (h(v) + v, 0, h(v) - v)$$

olarak alınırsa (4.8) denkleminin çözümünden $h(v) = \lambda v^3 + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ elde edilir. Bu yüzey literatürde ikinci tip Enneper yüzeyi (parabolik katenoid) olarak bilinir (Kobayashi 1983). Eğer

$$\lambda = 8\mu + 4 \quad \text{ve} \quad \mu = -\frac{1}{3}(\cosh(b) - 2\sinh(b))(\sinh(b) + \cosh(b))$$

alınırsa $\gamma(v) = (v + \lambda v^3 + \mu, 0, -v + \lambda v^3 + \mu)$ için $M(u,v) = \Psi^l(u) \cdot \gamma(v)$ dir. $M(u, -\frac{1}{2}) = \alpha(u)$ ve $M(u,v)$ yüzeyinin α eğrisi boyunca birim normal vektör alanı $V(u)$ olur. Björling probleminin çözümü tek olduğundan aslında elde edilen $M(u,v)$ yüzeyi ile $X(u,v)$ yüzeyi aynı yüzeylerdir. Böylece $X(u,v)$ yüzeyinin bir dönel yüzey olduğu ispatlanmış olur.

Yüzeyin holomorf 1-formları $e^{-b} = \cosh(b) - \sinh(b)$ eşitliği kullanılarak

$$\psi(z) = \left(z + \frac{i}{2}(e^{-b}z^2 - 2\cosh(b)), 1 + ie^{-b}z, z + \frac{i}{2}(e^{-b}z^2 - 2\sinh(b)) \right)$$

şeklinde elde edilir ve yüzeyin Weierstrass verisi

$$\omega = -\frac{i(e^b + iz + 1)^2}{2e^b}dz \quad , \quad g(z) = \frac{e^b + iz - 1}{e^b + iz + 1}.$$

dir.

Burada $b = 0$ alınarak parabolik katenoid yüzeyinin Weierstrass verileri daha sade bir şekilde elde edilir. Bu veriler yardımıyla aynı yüzey daha önce Örnek 3.2.2 elde edilmişti.

2. Durum : Eğer $\vartheta(t) = at, a \neq 0$ ise birim timelike vektör alanı

$$V(t) = \sinh(at)e_2(t) + \cosh(at)e_3(t)$$

dir ve vektörel çarpım

$$V \times \alpha' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left((z^2-2)\cosh(az) - z^2\sinh(az)\right) \\ z(\cosh(az)-\sinh(az)) \\ \frac{1}{2}\left(z^2\cosh(az) - (z^2+2)\sinh(az)\right) \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Kompleks integralin hesaplanması ile Björling yüzeyi

$$T(z) = \frac{1}{2a^3}((2+az(2+az))(\sinh(az)-\cosh(az)))$$

olmak üzere;

$$X(z) = Re\begin{pmatrix} -1+\frac{z^2}{2}+iT(z)+2(1-a^2\sinh(az))) \\ z+i\frac{1}{a^2}((1+az)(\sinh(az)-\cosh(az))+1) \\ \frac{z^2}{2}+iT(z)+2(1+a^2-a^2\cosh(az))) \end{pmatrix}$$

dir.

$$\begin{aligned} A(u,v) &= a^2(e^{2au}-u^2+v^2+1)-2au-2 \\ B(u,v) &= a^2(e^{2au}-u^2+v^2-1)-2au-2 \\ C(u,v) &= 2av(au+1) \end{aligned}$$

olmak üzere; maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u^2-v^2-2}{2} + \frac{e^{-au}(A(u,v)\sin(av)+C(u,v)\cos(av))}{2a^3} \\ u + \frac{e^{-au}(av\cos(av)-(au+1)\sin(av))}{a^2} \\ \frac{u^2-v^2}{2} + \frac{e^{-au}(B(u,v)\sin(av)+C(u,v)\cos(av))}{2a^3} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

şeklindedir. Yüzeyin holomorf 1-formlar ise

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \left(z+\frac{1}{2}i((z^2-2)\cosh(az)-z^2\sinh(az))\right)dz \\ \psi_2 &= (1+ize^{-az})dz \\ \psi_3 &= \left(\frac{1}{2}iz^2e^{-az}-i\sinh(az)+z\right)dz \end{aligned}$$

olup Weierstrass verisi

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{2}ie^{-az}(e^{az}+iz+1)^2dz \\ g &= \frac{e^{az}+iz-1}{e^{az}+iz+1} \end{aligned}$$

dir.

Uyarı 4.1.3. Bu bölümde ϑ fonksiyonunun sabit olduğu durumlarda elde edilen tüm maksimal yüzeylerin dönel yüzey olduğu gösterilmiştir. Yani literatürde var olan maksimal dönel yüzeyler (spacelike düzlem, birinci ve ikinci tip katenoid yüzeyleri, ikinci tip Enneper yüzeyi) Björling problemi ve çember eğrisi yardımıyla tekrar elde edilmiştir. ϑ fonksiyonunun sabit olmadığı durumda ise yeni maksimal yüzey örnekleri bulunmuştur.

4.2 Helisi İçeren Maksimal Yüzey Örnekleri

$\mathbb{L}^3$ uzayında helis eğrisi, bir noktanın bir parametreli helikoidal hareket altında yörüngesidir. Bu bölümde spacelike ve timelike eksenli spacelike helis eğrilerini içeren maksimal yüzeyler Björling problemi yardımıyla elde edilecektir.

4.2.1 Timelike eksen

Homoteti altında $L = Sp\{(0,0,1)\}$ eksenli bir spacelike helis eğrisi $0 < \lambda < 1$ olmak üzere; $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), \lambda t)$ şeklinde parametrik denkleme sahiptir. Bu eğrinin normal ve binormal vektörleri $\mu = \sqrt{1-\lambda^2}$ olmak üzere;

$$\mathbf{n} = (-\cos(t), -\sin(t), 0), \qquad \mathbf{b} = \frac{1}{\mu}(\lambda\sin(t), -\lambda\cos(t), -1)$$

dir. Birim timelike vektör alanı ise

$$V(t) = \sinh(\vartheta(t))\mathbf{n} + \cosh(\vartheta(t))\mathbf{b}$$

şeklindedir.

1. Durum : Eğer $\vartheta(t) = b \in \mathbb{R}$ ise holomorf genişlemelerin vektörel çarpımı

$$V \times \alpha' = \begin{pmatrix} -\lambda\sinh(b)\sin(z) + \mu\cos(z)\cosh(b) \\ \lambda\sinh(b)\cos(z) + \mu\sin(z)\cosh(b) \\ \sinh(b) \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır ve integral alınarak

$$\int_0^z V(w) \times \alpha'(w)dw = \begin{pmatrix} -\mu\cosh(b)\sin(z) + \lambda(-1+\cos(z))\sinh(b) \\ (\mu - \mu\cos(z))\cosh(b) + \lambda\sin(z)\sinh(b) \\ z\sinh(b) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cosh(v) + \sinh(v)(-\mu\cosh(b)\cos(u) + \lambda\sinh(b)\sin(u)) \\ \cosh(v)\sin(u) + \sinh(v)(-\mu\cosh(b)\sin(u) - \lambda\sinh(b)\cos(u)) \\ \lambda u - v\sinh(b) \end{pmatrix}$$

dir. $(0,0,1)$ eksenli helikoidal hareket

$$\Phi^t(\tau) : (x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) & 0 \\ \sin(\tau) & \cos(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda\tau \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilir. $\forall \tau \in \mathbb{R}$ için $\Phi^t(\tau) \cdot X(u,v) = X(u+\tau, v)$ olduğundan elde edilmiş olan parametrik maksimal yüzey bir helikoidal yüzeydir.

2. Durum : Eğer $\vartheta(t) = at$, $a \neq 0$ ise $V(t) = \sinh(at)\mathbf{n} + \cosh(at)\mathbf{b}$ eşitliğinden birim timelike vektör alanı

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\mu}\sin(t)\cosh(at) - \cos(t)\sinh(at) \\ -\frac{\lambda}{\mu}\cos(t)\cosh(at) - \sin(t)\sinh(at) \\ -\frac{1}{\mu}\cosh(at) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

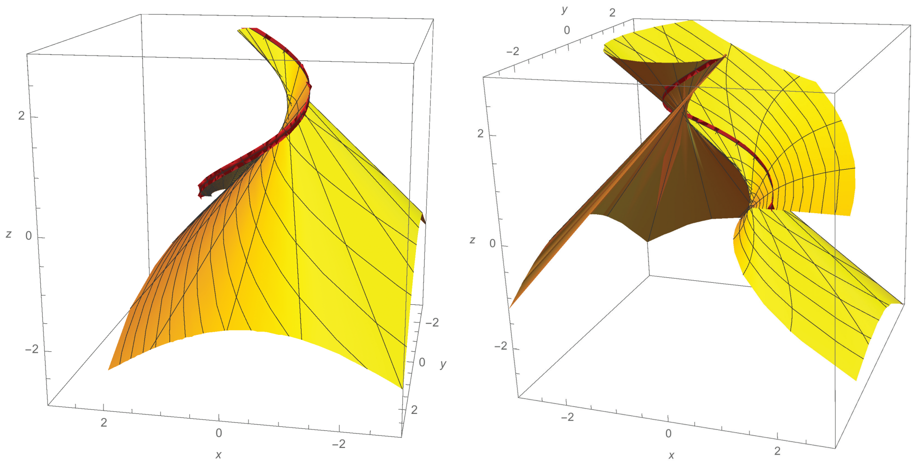
yardımıyla maksimal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} A(v) &= (a\mu + \lambda)\sin(v)\cos(av) - (\mu - a\lambda)\cosh(v)\sin(av) \\ B(v) &= (a\mu + \lambda)\cosh(v)\sin(av) + (\mu - a\lambda)\sinh(v)\cos(av) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cosh(v) + \frac{\sin(u)\sinh(au)A(v) - \cos(u)\cosh(au)B(v)}{a^2+1} \\ \sin(u)\cosh(v) - \frac{\cos(u)\sinh(au)A(v) + \sin(u)\cosh(au)B(v)}{a^2+1} \\ \lambda u - \frac{\sinh(au)\sin(av)}{a} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 4.3 $a = 1$, $\lambda = 3/5$ ve $\mu = 4/5$ için timelike eksenli spacelike helisi içeren maksimal yüzey

Yüzeyin holomorf 1-formları

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (i\mu \cos(z)\cosh(az) - \sin(z)(1 + i\lambda \sinh(az)))\, dz \\
\psi_2 &= (\cos(z)(1 + i\lambda \sinh(az)) + i\mu \sin(z)\cosh(az))\, dz \\
\psi_3 &= (\lambda + i \sinh(az))\, dz
\end{aligned}$$

şeklinde olup yüzeyin Weierstrass verisi

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{2} e^{-(a+i)z} \left((\lambda + i\mu)\, e^{2az} - 2ie^{az} + i\mu - \lambda \right) dz \\
g(z) &= \frac{e^{iz} \left(-2i\lambda e^{az} + e^{2az} - 1\right)}{(\mu - i\lambda)\, e^{2az} - 2e^{az} + \mu + i\lambda}
\end{aligned}$$

dir.

4.2.2 Spacelike eksen

$L = Sp\{(1, 0, 0)\}$ spacelike eksene sahip iki tip spacelike helis eğrisi vardır:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (\lambda t, \cosh(t), \sinh(t)), \quad \lambda > 1, \quad \text{I. Tip} \\
\alpha(t) &= (\lambda t, \sinh(t), \cosh(t)), \quad \lambda > 0, \quad \text{II. Tip.}
\end{aligned}$$

Bu bölümdeki hesaplamalar timelike eksenli duruma benzer şekilde yapılabilir. Belirtilen iki tip helis eğrisi için hesaplamalar yapılarak yüzey örnekleri elde edilebilir.

I. Tip helis eğrisi

I. tip helis eğrisinin normal ve binormal vektörleri $\mu = \sqrt{\lambda^2 - 1}$ olmak üzere;

$$\mathbf{n} = (0, \cosh(t), \sinh(t)) \quad , \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{\mu}(1, \lambda\sinh(t), \lambda\cosh(t))$$

dir. $\mathbf{n}(t)$ spacelike ve $\mathbf{b}(t)$ timelike vektör alanları olduğundan, $V(t)$ birim timelike vektör alanı

$$V(t) = \sinh(\vartheta(t))\mathbf{n} + \cosh(\vartheta(t))\mathbf{b}$$

şeklindedir.

1. Durum : $\vartheta(t) = b \in \mathbb{R}$ için birim timelike vektör alanı

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu}\cosh(b) \\ \sinh(b)\cosh(z) - \frac{\lambda}{\mu}\sinh(z)\cosh(b) \\ \sinh(b)\sinh(z) - \frac{\lambda}{\mu}\cosh(z)\cosh(b) \end{pmatrix}$$

ve

$$V(z) \times \alpha'(z) = \begin{pmatrix} \sinh(b) \\ -\mu\cosh(z)\cosh(b) + \lambda\sinh(b)\sinh(z) \\ -\mu\sinh(z)\cosh(b) + \lambda\sinh(b)\cosh(z) \end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \lambda u - v\sinh(b) \\ \cosh(u)\cos(v) + \sin(v)\left(\mu\cosh(b)\cosh(u) - \lambda\sinh(b)\sinh(u)\right) \\ \sinh(u)\cos(v) + \sin(v)\left(\mu\cosh(b)\sinh(u) - \lambda\sinh(b)\cosh(u)\right) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. $(1,0,0)$ eksenli helikoidal hareket

$$\Phi^t(\tau) : (x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\tau) & \sinh(\tau) \\ 0 & \sinh(\tau) & \cosh(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda\tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilir. $\forall \tau \in \mathbb{R}$ için $\Phi^t(\tau) \cdot X(u,v) = X(u+\tau, v)$ olduğundan elde edilmiş olan yüzey bir helikoidal yüzeydir.

2. Durum : $\vartheta(t) = at$ durumunu ele alalım. Birim timelike vektör alanı

$$V(t) = \sinh(at)\mathbf{n} + \cosh(at)\mathbf{b}$$

olup vektörel çarpım

$$V(z) \times \alpha'(z) = \begin{pmatrix} \sinh(az) \\ -\mu\cosh(z)\cosh(az) + \lambda\sinh(az)\sinh(z) \\ -\mu\sinh(z)\cosh(az) + \lambda\sinh(az)\cosh(z) \end{pmatrix}$$

dır. Buradan

$$\int_0^z V(w) \times \alpha'(w)dw = \begin{pmatrix} \frac{-1+\cosh(az)}{a} \\ \frac{(a\lambda+\mu)\cosh(az)\sinh(z)-(\lambda+a\mu)\cosh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \\ \sinh(z) + i\frac{(a\lambda+\mu)(\cosh(az)\cosh(z)-1)-(\lambda+a\mu)\sinh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla iki durum ortaya çıkar. $a \neq 1$ iken

$$X(z) = Re \begin{pmatrix} \lambda z + i\frac{-1+\cosh(az)}{a} \\ \cosh(z) + i\frac{(a\lambda+\mu)\cosh(az)\sinh(z)-(\lambda+a\mu)\cosh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \\ \sinh(z) + i\frac{(a\lambda+\mu)(\cosh(az)\cosh(z)-1)-(\lambda+a\mu)\sinh(z)\sinh(az)}{a^2-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} A(v) &= (a\mu + \lambda)\cos(v)\sin(av) - (\mu + a\lambda)\sin(v)\cos(av) \\ B(v) &= (a\mu + \lambda)\sin(v)\cos(av) - (\mu + a\lambda)\cos(v)\sin(av) \end{aligned}$$

olmak üzere;

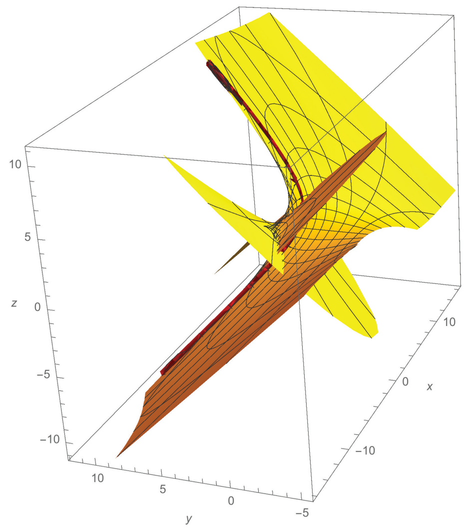
$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \lambda u - \frac{\sinh(au)\sin(av)}{a} \\ \cosh(u)\cos(v) + \frac{\cosh(u)\cosh(au)A(v)+\sinh(u)\sinh(au)B(v)}{a^2-1} \\ \sinh(u)\cos(v) + \frac{\sinh(u)\cosh(au)A(v)+\cosh(u)\sinh(au)B(v)}{a^2-1} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

dir. $a = 1$ durumunda

$$X(z) = Re \begin{pmatrix} \lambda z + i(-1 + \cosh(z)) \\ \cosh(z) + i\frac{-2z(\lambda+\mu)+(\lambda-\mu)\sinh(2z)}{4} \\ \sinh(z) + i\frac{(\lambda-\mu)\sinh^2(z)}{2} \end{pmatrix}$$

ve Björling yüzeyi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \lambda u - \sinh(u)\sin(v) \\ \frac{1}{4}(\mu - \lambda)\cosh(2u)\sin(2v) + \cosh(u)\cos(v) + \frac{(\mu+\lambda)v}{2} \\ \sinh(u)\cos(v)((\mu - \lambda)\cosh(u)\sin(v) + 1) \end{pmatrix} \tag{4.12}$$



Şekil 4.4 $a = 1$, $\lambda = 2$ ve $\mu = \sqrt{3}$ için spacelike eksenli I. tip helisi içeren maksimal yüzey

dir. Holomorf 1-formlar

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (\lambda + i\sinh(az))\,dz \\
\psi_2 &= (\sinh(z) + i(\lambda\sinh(z)\sinh(az) - \mu\cosh(z)\cosh(az)))\,dz \\
\psi_3 &= (\cosh(z) + i(\lambda\cosh(z)\sinh(az) - \mu\sinh(z)\cosh(az)))\,dz
\end{aligned}$$

olur. Burada elde edilen trigonometrik fonksiyonlar üstel dönüşümler cinsinden yazıldıktan sonra $e^z \to z$ $(dz \to dz/z)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{iz^{2a} + 2\lambda z^a - i}{2z^{a+1}}dz \\
\psi_2 &= \frac{i(\lambda-\mu)(z^{2a+2}+1) - i(\lambda+\mu)(z^{2a}+z^2) + 2z^{a+2} - 2z^a}{4z^{a+2}}dz \\
\psi_3 &= \frac{i(\lambda-\mu)(z^{2a+2}-1) + i(\lambda+\mu)(z^{2a}-z^2) + 2z^{a+2} + 2z^a}{4z^{a+2}}dz
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir ve holomorf formlar $\mathbb{C} - \{0\}$ üzerinde tanımlıdır. $a = n \in \mathbb{N}$ olması ve $n \neq 1$ durumunda ψ_k holomorf formlarının periyodu yoktur. Yalnızca $n = 1$ için ψ_2 reel periyoda sahiptir. Yüzeyin Weierstrass verisi

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{(\lambda-\mu)(z^{2n+2}+1) - (\mu+\lambda)\,(z^{2n}+z^2) + 2i(z^{n+1} - z^{n+2} + z^n - z) + 4\lambda z^{n+1}}{4z^{n+2}}dz \\
g &= \frac{-\,(\mu+\lambda)\,(z^{2n}-z^2) + (\mu-\lambda)\,(z^{2n+2}-1) + 2i(z^{n+2}+z^n)}{-i\,(\mu+\lambda)\,(z^{2n}+z^2) - i\,(\mu-\lambda)\,(z^{2n+2}+1) + 4i\lambda z^{n+1} - 2(z^{2n+1} - z^{n+2} + z^n - z)}
\end{aligned}$$

dir.

II. Tip helis eğrisi

II. tip helis eğrisinin normal ve binormal vektörleri, $\mu = \sqrt{\lambda^2+1}$ olmak üzere;

$$\mathbf{n} = (0, \sinh(t), \cosh(t)), \qquad \mathbf{b} = \frac{1}{\mu}(1, -\lambda\cosh(t), -\lambda\sinh(t))$$

dir. Birim timelike vektör alanı $V = \cosh(\vartheta(t))\mathbf{n} + \sinh(\vartheta(t))\mathbf{b}$ dir.

1. Durum : $\vartheta(t) = b \in \mathbb{R}$ için V vektör alanı

$$V(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}\sinh(b) \\ \cosh(b)\sinh(z) - \frac{\lambda}{\mu}\cosh(z)\sinh(b) \\ \cosh(b)\cosh(z) - \frac{\lambda}{\mu}\sinh(z)\sinh(b) \end{pmatrix}$$

ve

$$V(z) \times \alpha'(z) = \begin{pmatrix} -\cosh(b) \\ -\mu\sinh(z)\sinh(b) + \lambda\cosh(b)\cosh(z) \\ -\mu\sinh(b)\cosh(z) + \lambda\cosh(b)\sinh(z) \end{pmatrix}$$

olup maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \lambda u + v\cosh(b) \\ \sinh(u)\cos(v) + \sin(v)\left(\mu\sinh(b)\sinh(u) - \lambda\cosh(b)\cosh(u)\right) \\ \cosh(u)\cos(v) + \sin(v)\left(\mu\sinh(b)\cosh(u) - \lambda\cosh(b)\sinh(u)\right) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. I. tip helis eğrisinde olduğu gibi $(1,0,0)$ eksenli helikoidal hareket altında $\forall\tau \in \mathbb{R}$ için $\Phi^t(\tau) \cdot X(u,v) = X(u+\tau, v)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla elde edilen yüzey bir helikoidal yüzeydir.

2. Durum : $\vartheta(t) = at, a \neq 0$

$$V \times \alpha' = \begin{pmatrix} -\cosh(az) \\ \lambda\cosh(az)\cosh(z) - \mu\sinh(az)\sinh(z) \\ \lambda\cosh(az)\sinh(z) - \mu\sinh(az)\cosh(z) \end{pmatrix}$$

olup integralin alınması ile iki durum ortaya çıkar. $a \neq 1$ durumunda Björling yüzeyi

$$X(z) = Re\begin{pmatrix} \lambda z - i\frac{\sinh(az)}{a} \\ \sinh(z) + i\frac{(a\lambda+\mu)\cosh(z)\sinh(az) - (\lambda+a\mu)\cosh(az)\sinh(z)}{a^2-1} \\ \cosh(z) + i\frac{(a\lambda+\mu)\sinh(z)\sinh(az) - (\lambda+a\mu)(\cosh(z)\cosh(az)-1)}{a^2-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece maksimal yüzeyin parametrik denklemi

$$
\begin{aligned}
A(v) &= (a\mu+\lambda)\cos(v)\sin(av)-(\mu+a\lambda)\sin(v)\cos(av)\\
B(v) &= (a\mu+\lambda)\sin(v)\cos(av)-(\mu+a\lambda)\cos(v)\sin(av)
\end{aligned}
$$

olmak üzere;

$$
X(u,v)=\begin{pmatrix}
\lambda u+\frac{\cosh(au)\sin(av)}{a}\\
\sinh(u)\cos(v)+\frac{\sinh(u)\sinh(au)A(v)+\cosh(u)\cosh(au)B(v)}{a^2-1}\\
\cosh(u)\cos(v)+\frac{\cosh(u)\sinh(au)A(v)+\sinh(u)\cosh(au)B(v)}{a^2-1}
\end{pmatrix} \tag{4.13}
$$

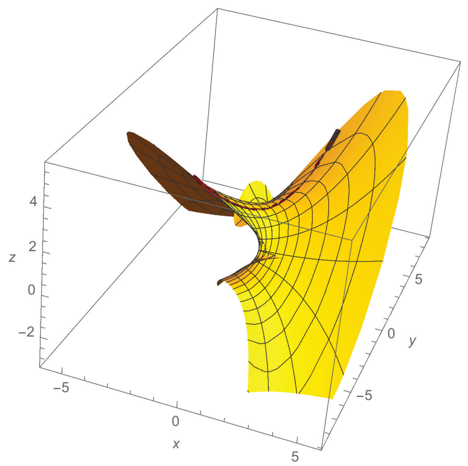
olarak bulunur. Eğer $a=1$ ise

$$
X(z)=Re\begin{pmatrix}
\lambda z-i\sinh(z)\\
\sinh(z)+i\frac{z(\lambda+\mu)+(\lambda-\mu)\cosh(z)\sinh(z)}{2}\\
\cosh(z)+i\frac{(\lambda-\mu)\sinh^2(z)}{2}
\end{pmatrix}
$$

olup yüzeyin parametrik denklemi

$$
X(u,v)=\begin{pmatrix}
\lambda u+\cosh(u)\sin(v)\\
\frac{(\mu-\lambda)\cosh(2u)\sin(2v)}{4}+\sinh(u)\cos(v)-\frac{(\mu+\lambda)v}{2}\\
\cosh(u)\cos(v)((\mu-\lambda)\sinh(u)\sin(v)+1)
\end{pmatrix} \tag{4.14}
$$

şeklindedir. Holomorf 1-formlar



Şekil 4.5 $a=1$, $\lambda=1$ ve $\mu=\sqrt{2}$ için spacelike eksenli II. tip helisi içeren maksimal yüzey

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= (\lambda - i\cosh(az))\,dz \\
\psi_2 &= (\cosh(z) + i(\lambda\cosh(z)\cosh(az) - \mu\sinh(z)\sinh(az)))\,dz \\
\psi_3 &= (\sinh(z) + i(\lambda\sinh(z)\cosh(az) - \mu\cosh(z)\sinh(az)))\,dz
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Holomorf formlar üstel dönüşümler cinsinden

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \left(-\frac{1}{2}ie^{-az} - \frac{1}{2}ie^{az} + \lambda\right) dz \\
\psi_2 &= \left(\frac{i(\lambda-\mu)(e^{2(a+2)z}+1) + i(\lambda+\mu)(e^{2az}+e^{2z}) + 2e^{(a+2)z} + 2e^{az}}{4e^{(a+1)z}}\right) dz \\
\psi_3 &= \left(\frac{i(\lambda-\mu)(e^{2(a+2)z}-1) - i(\lambda+\mu)(e^{2az}-e^{2z}) + 2e^{(a+2)z} - 2e^{az}}{4e^{(a+1)z}}\right) dz
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur ve $e^z \to z$ $(dz \to dz/z)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{-iz^{2a} + 2\lambda z^a - i}{2z^{a+1}} dz \\
\psi_2 &= \frac{i(\lambda-\mu)(z^{2a+2}+1) + i(\lambda+\mu)(z^{2a}+z^2) + 2z^{a+2} + 2z^a}{4z^{a+2}} dz \\
\psi_3 &= \frac{i(\lambda-\mu)(z^{2a+2}-1) - i(\lambda+\mu)(z^{2a}-z^2) + 2z^{a+2} - 2z^a}{4z^{a+2}} dz
\end{aligned}
$$

bulunur. $a = n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ için ψ_k holomorfik formları reel periyoda sahip değildir. $n = 1$ durumunda ise yalnızca ψ_2 reel periyoda sahiptir ve Weierstrass verisi

$$
\omega = \frac{(\lambda-\mu)(z^{2n+2}+1) + (\mu+\lambda)(z^{2n}+z^2) + 4\lambda z^{n+1} - 2i(z^{n+2} + z^{2n+1} + z^n + z)}{4z^{n+2}} dz
$$

$$
g = \frac{i(\mu+\lambda)(z^{2n}-z^2) + i(\mu-\lambda)(z^{2n+2}-1) - 2(z^{n+2}-z^n)}{(\mu-\lambda)(z^{2n+2}+1) - (\mu+\lambda)(z^{2n}+z^2) - 4\lambda z^{n+1} + 2i(z^{n+2}+z^{2n+1}+z^n+z)}
$$

dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kompleks değişkenler yardımıyla çözümü verilen Björling problemi minimal ve maksimal yüzey üretmek için yeni bir yöntem olmuştur. Öklid uzayında bu yöntemle elde edilmiş minimal yüzey örnekleri literatürde mevcuttur ancak aynı durum Lorentz uzayı için geçerli değildir. $\mathbb{R}^3$ uzayında minimal yüzeyler ile $\mathbb{L}^3$ uzayında maksimal yüzeyler benzer özelliklere sahip olmasına rağmen $\mathbb{L}^3$ uzayında vektörler üç farklı causal karaktere sahip olduklarından bu uzayda çalışmak $\mathbb{R}^3$ uzayında çalışmaktan biraz daha zor olabilir.

Bu tez çalışmasında $\mathbb{L}^3$ uzayında maksimal yüzeylere yeni örnekler verilmiştir (López ve Kaya 2017). Çalışma boyunca Björling probleminden yararlanılmış ve yüzeyler parametrik denklemleri ile açık bir şekilde elde edilmiştir. Ayrıca daha önce Kobayashi tarafından verilen maksimal dönel yüzeyler, dördüncü bölümde elde edilen yüzeylerin özel hali olarak bulunmuştur. Björling formülünde yer alan integrali hesaplamak ve bunun sonucunda elde edilen kompleks fonksiyonun reel kısmını bulmak için Mathematica programından yararlanılmıştır. Yine bu program yardımıyla üretilen yüzeylerin ortalama eğriliklerinin sıfıra eşit oldukları kontrol edilmiş, yüzeyler ve yüzeylerin elde edilmesi için kullanılan eğriler çizilmiştir.

$\mathbb{L}^3$ uzayında maksimal yüzey elde etmek için Björling probleminin çözümünde kompleks sayılar kullanılmış, timelike minimal yüzey elde etmek için ise split kompleks sayılar kullanmıştır. Dolayısıyla timelike yüzeylerde var olan metrik de göz önüne alınarak timelike minimal yüzey örnekleri de elde edilebilir. Ancak timelike yüzey üzerinde hem spacelike hem de timelike eğriler olabileceği için timelike minimal yüzeyler çalışılırken daha fazla durumla karşılaşılmaktadır. Eğer yüzey üretmek için alınan başlangıç eğrisi spacelike (ya da timelike) ise spacelike (ya da timelike) Björling problemi olarak adlandırılır ve bu problemin çözümü tektir. Eğer başlangıç eğrisi null bir eğri ise Björling probleminin bir tek çözümü yoktur (Chaves vd. 2011). Bu tez çalışmasında olduğu gibi çember eğrisini içeren timelike minimal yüzeyler içerisinde özel durumlarda timelike eliptik, hiperbolik ve parabolik katenoid yüzeyleri de elde edilir. Ayrıca eğrinin bir helis eğrisi olarak alınıp üretilen yüzeylerden bazılarının timelike minimal helikoidal yüzey olması beklenir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V., Sario, L. 1960. Riemann surfaces. Princeton University Press, 384, Princeton, New Jersey.

Alías, L., Chaves, R.M.B., Mira, P. 2003. Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 134, 289–316.

Araujo, H., Leite, M. L. 2009. How many maximal surfaces do correspond to one minimal surface?. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 146, 165-175.

Barbosa, J. L., Colares, A. G. 1986. Lectures note in mathematics, Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. Springer, Berlin Heidelberg, New York.

Björling, E. G. 1844. In integrationem aequationis derivatarum partialum superfici, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt sngoque contrario. Arch. Math. Phys., 4(1), 290-315.

Brander, D., Dorfmeister, J. F. 2010. The Björling problem for non-minimal constant mean curvature surfaces. Comm. Anal. Geom., 18, 171–194.

Brown, J. W., Churchill, R.V. 1984. Complex variables and applications. McGraw-Hill Book Company, Inc., 468, New York.

Calabi, E. 1970. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. Proc. Sympos. Pure Math., 15, 223-230.

Chaves, R. M. B., Dussan, M. P., Magid, M. 2011. Björling problem for timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space. J. Math. Anal. Appl., 377, 481-494.

Cintra, A. A., Mercuri, F., Onnis, I. I. 2016. The Björling problem for minimal surfaces in a Lorentzian three-dimensional Lie group. Ann. Mat. Pura Appl., 195, 95-110.

Dierkes, U., Hildebrant, S., Küster, A., Wohlrab, O. 1992. Minimal surfaces I. A series of comprehensive studies in mathematics. Springer-Verlag, 507, New York.

Do Carmo, P. M. 1976. Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 503, New Jersey.

Estudillo, F.J.M., Romero, A. 1992. Generalized maximal surfaces in Lorentz-minkowski space $\mathbb{L}^3$. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 111, 515–524.

Gray, A., Abbena, E., Salamon, S. 1998. Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica®. Third edition. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC, 996, Boca Raton, FL.

Güner, Y.R. 2016. Üç yönlü periyodik minimal yüzeyler ile oluşturulan bir tasarım önerisi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilişim Anabilim Dalı, 121, İstanbul.

Kim, Y. W., Koh, S. E., Shin, H., Yang, S. D. 2011. Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae. J. Ko rean Math. Soc., 48(5), 1083-1100.

Kobayashi, O. 1983. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski Space L^3. Tokyo J. Math., 6, 297–309.

Lee, H. 2011. Extensions of the duality between minimal surfaces and maximal surfaces. Geom. Dedicata., 151, 373-386.

López, F. J., López, R., Souam, R. 2000. Maximal Surfaces of riemann type in LorentzMinkowski Space L^3. Michigan Math. J., 47, 469–497.

López, R. 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. Int. Electron. J. Geom., 7, 44–107.

López, R. ve Kaya, S. 2017. New examples of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski Space. Kyushu J. Math., 71(2), 311–327.

López, R. ve Weber, M. 2018. Explicit Björling surfaces with prescribed geometry. Michigan Math. J., 67(3), 561–584

Meeks III, W.H. ve Weber, M. 2007. Bending the helicoid. Math. Ann., 339, 783–798.

Mira, P. 2006. Complete minimal Möbius strips in $\mathbb{R}^n$ and the Björling problem. J. Geom. Phys., 56, 1506–1515.

Nitsche, J. C. C. 1989. Lectures on minimal surfaces. Cambridge university press, 592, New York.

Oprea, J. 2000. The Mathematics of soap films. Explorations with maple, Student Math. Library, 10, Amer. Math. Soc., Providence.

Osserman, R. 1989. A Survey of Minimal Surfaces, Cambridge university press, 207, New York.

Pérez, J. 2017. A new golden age of minimal surfaces. Notices Amer. Math. Soc., 64(4), 347-358.

Schwarz, H. A. 1890. Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Springer-Verlag, 396, Berlin.

Spivak, M. 1979. A comprehensive introduction to differential geometry, vol.4, Berkeley.

Weber, M. Minimal Surfaces. Bloomington's virtual minimal surface museum. Web sitesi: http://www.indiana.edu/ minimal/