

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MARKOV ZİNCİRLERİNDE BOOTSTRAP**

**Serhat DUMAN**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2006**

**Her hakkı saklıdır**

Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT'un danışmanlığında, Serhat DUMAN tarafından hazırlanan bu çalışma 27/02/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Müslim EKNİ

Gazi Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç Dr. İhsan KARABULUT

Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç Dr. Halil AYDOĞDU

Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU**

**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### MARKOV ZİNCİRLERİNDE BOOTSTRAP

Serhat DUMAN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT

Efron (1982), gözlemlerin birbirinden bağımsız aynı dağılımlı olması durumunda, istatistiklerin bilinmeyen örneklem dağılımlarının tahmin edilmesi problemine çözüm yolu olarak, bootstrap metodunu önermiştir. Ancak markov bağımlılığı ile tanımlı markov zincirleri için bootstrap metodunun kullanılabilir olup olmadığı sorusu önemli bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmada Markov bağımlılığı ile tanımlı sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirleri için Basawa *et al.* (1990)'nin bootstrap teknikleri ile ilk uğrama zamanı rasgele değişkeni için Kulperger and Rao (1989)'nun çalışmaları açıklanmaya çalışılmıştır.

**2006, 54 sayfa**

**ANAHTAR KELİMELEER:** Markov zinciri, bootstrap, geçiş matrisi, geçiş olasılıkları, koşullu bootstrap, ilk uğrama zamanı

## ABSTRACT

Master Thesis

## BOOTSTRAPPING MARKOV CHAINS

Serhat DUMAN

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Statistics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. İhsan KARABULUT

Efron (1982) proposed the bootstrap method as a way to solve the problem of estimating unknown sampling distributions of statistics, when the observations are independent and identically distributed. However, for markov chains, which are defined by markov dependence, the question if it is possible to use bootstrap method for markov chains, becomes an important problem, which we are faced with. In this study, for ergodic markov chains, which are defined by markov dependence and has a finite state space, the bootstrap techniques of Basawa *et al.* (1990) and for the hitting time random variables the works of Kulperger and Rao (1989) are tried to explain.

**2006,54 pages**

**KEY WORDS:** Markov chain, bootstrap, transition matrix, transition probabilities, conditional bootstrap, hitting time

## TEŞEKKÜR

Başta bana duyduğu güven ile her zaman destek olan, bilgisini benimle cömertçe paylaşan, her aşamada beni önerileri ile yönlendiren ve böylece bu çalışmanın ortaya çıkmasını sağlayan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT'a (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü), ayrıca tüm İstatistik bölümü hocalarım ve çalışanlarına, her zaman yanımda olan eşim ve aileme, çalışmam boyunca maddi ve manevi emeği geçen herkese teşekkürü borç bilirim.

Serhat DUMAN

Ankara, Şubat 2006

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET.....                                                                            | i   |
| ABSTRACT.....                                                                        | ii  |
| TEŞEKKÜR.....                                                                        | iii |
| SİMGELER DİZİNİ.....                                                                 | vi  |
| SEKİLLER DİZİNİ.....                                                                 | vi  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ.....                                                               | vii |
| 1. GİRİŞ.....                                                                        | 1   |
| 2. KURAMSAL TEMELLER.....                                                            | 3   |
| 2.1 Markov Süreci.....                                                               | 3   |
| 2.2 Geçiş Olasılıkları ve Chapman- Kolmogorov Denklemleri.....                       | 5   |
| 2.3 Durumların Sınıflaması.....                                                      | 9   |
| 2.4 Klasik Bootstrap Yöntemi ve Algoritması.....                                     | 13  |
| 3. MARKOV ZİNCİRLERİNDE BOOTSTRAP YÖNTEMİ.....                                       | 16  |
| 4. UYGULAMA.....                                                                     | 39  |
| 4.1 Markov Zincirinden Adım Sayısı $n$ Olan Bir<br>Gerçekleşmesinin Simülasyonu..... | 39  |
| 4.2 Markov Zincirinde Bootstrap Yöntemine İlişkin Uygulamalar.....                   | 41  |
| 5. SONUÇ.....                                                                        | 52  |
| KAYNAKLAR.....                                                                       | 53  |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                        | 54  |

## SİMGELER DİZİNİ

|                   |                                                                                                  |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $n_i$             | $i$ . adımdan yapılan geçişlerin sayısı                                                          |
| $n_{ij}$          | $i$ . adımdan $j$ . adıma geçişlerin sayısı                                                      |
| $F_n$             | Empirik dağılım fonksiyonu                                                                       |
| $x^*$             | Bootstrap örnekleme                                                                              |
| sup               | Supremum                                                                                         |
| min               | Minimum                                                                                          |
| maks              | Maksimum                                                                                         |
| İMKB              | İstanbul Menkul Kıymetler Borsası                                                                |
| TCMB              | Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası                                                                |
| $P$               | Bir adım geçiş olasılıkları matrisi                                                              |
| $\hat{P}_n$       | Markov zincirinin $n$ birimlik gerçekleşmesine dayalı $P$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi |
| $\hat{Q}_n$       | Bir adım geçiş olasılıkları matrisinin bootstrap tahmini                                         |
| $T$               | $S = \{1, \dots, k\}$ durum uzayı için $k$ . duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeni          |
| $hhhy$            | Hemen hemen her yerde                                                                            |
| $\log$            | Doğal logaritma                                                                                  |
| $L$               | Olabilirlik fonksiyonu                                                                           |
| $\delta_{ij}$     | Kronecker delta                                                                                  |
| $I$               | Gösterge fonksiyonu                                                                              |
| $\xrightarrow{D}$ | Dağılımda yakınsama                                                                              |
| $\xrightarrow{P}$ | Olasılıkta yakınsama                                                                             |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                  |                                                                                                           |    |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.1</b> | Bir indirgenemez markov zincirinin sınıflandırılması.....                                                 | 13 |
| <b>Şekil 4.1</b> | 4.duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımı.....                                    | 43 |
| <b>Şekil 4.2</b> | IMKB 100 verileri kullanıldığında 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımı..... | 45 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                    |                                                                                    |    |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 2.1</b> | Markov süreçlerinin durum uzayına ve parametre uzayına göre sınıflandırılması..... | 4  |
| <b>Çizelge 4.1</b> | Markov zincirinin $n = 10$ adım sayısına sahip bir gerçekleşmesi.....              | 41 |
| <b>Çizelge 4.2</b> | Markov zincirinin $n = 250$ adım sayısına sahip bir gerçekleşmesi.....             | 42 |
| <b>Çizelge 4.3</b> | İMKB 100 endeksinin 2004 yılına ait değerleri.....                                 | 46 |
| <b>Çizelge 4.4</b> | İMKB 100 endeksinin 2004 yılına ait logaritmik getiri değerleri.....               | 48 |
| <b>Çizelge 4.5</b> | İMKB 100 endeksinin 2004 yılı kodlanmış logaritmik getiri değerleri.....           | 50 |

## 1.GİRİŞ

Üzerinde çalışılmakta olan kitlenin parametreleri hakkında bir bilgiye sahip olamadığımız ancak sadece o kitleye ait bir örneklemin gözlemlenebildiği durumlarda simülasyondan farklı olarak bootstrap metodu o kitlenin bilinmeyen parametrelerine ait tahminlerin yapılması, güven aralıklarının oluşturulması, istatistiksel hipotezlerin test edilmesi problemlerinde çözüm yolları sunabilmektedir. Ayrıca Efron'un bootstrap metodu bilinen bir kitleden gözlemlenmiş olan örneklemin birbirinden bağımsız aynı dağılımlı olması koşulu altında analitik olarak elde edilmesi güç olan çeşitli tahmin edicilerin örneklem dağılımlarına yaklaşımda bulunabilmek için kullanışlı bir araç olarak görülmektedir. Ancak bazı rasgele olguların modellenmesinde bağımsızlık varsayımında bulunmak söz konusu olmayabilir. Markov bağımlılığı ile tanımlı markov zincirlerinde görülen böyle bir durum karşısında bootstrap metodunun kullanılabilir olup olmadığı sorusu önemli bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmanın konusu markov zinciri oluşturduğu bilinen rasgele süreçler için bootstrap yönteminin kullanımını incelemektir.

Çalışmanın ikinci bölümü bazı temel bilgiler için ayrılmıştır. Bu bölümde markov süreci geçiş olasılıkları ve Chapman- Kolmogorov denklemi, durumların sınıflaması ile klasik bootstrap yöntemi ve algoritmasına ilişkin bazı temel bilgilere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirlerinde geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin hesaplanması ve asimptotik dağılımı üzerinde durulmuş, sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirinde geçiş matrisinin veya tahmin edicisinin örneklem dağılımının bootstrap tahmini ile ilgili Basawa *et al.* (1990)'nın çalışmalarına yer verilmiştir. Ayrıca geçiş matrisinin bootstrap tahmininin yığın dağılımına yaklaşım hızları ile ilgili Datta and McCormick (1992)'in değerlendirmelerine yer verilmiştir. Daha sonra özel bir uygulama olarak sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirleri için  $k$ .ncı duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımının bootstrap tahmini ile ilgili Kulperger and Rao (1989)'nun çalışmaları konu edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak dört durumlu ve geçiş matrisi bilinen bir ergodik markov zincirinden  $n$  adımlık bir gerçekleşmenin simülasyonunun nasıl yapıldığı konusuna değinilmiş, daha sonra geçiş matrisi bilinen zincirden bir örneklem gözlenerek, geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisini kullanarak bootstrap tahminleri Basawa *et al.* (1990)'nin önerdiği koşullu bootstrap ve standart bootstrap yöntemleri kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca, bu markov zinciri için 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımı standart bootstrap yöntemine göre elde edilmiştir. Daha sonra 2004 yılına ait İMKB 100 endeksi'nin logaritmik getirilerinin kullanılmasıyla  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  durum uzayına sahip ergodik bir markov zinciri olduğu varsayılmış ve bu zincirde 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örnekleme dağılımının bootstrap tahmini yapılarak ulaşılan sonuçlara ilişkin grafiklere yer verilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezin daha anlaşılır olması için gerekli bazı temel bilgiler verilecektir. Bu sebeble markov süreci geçiş olasılıkları ve Chapman-Kolmogorov denklemi markov zincirinde durumların sınıflandırılması ve bootstrap yöntemi ile ilgili bazı temel kavramlar sunulmaktadır.

### 2.1. Markov Süreci

**Tanım 2.1.1**  $\{X_t, t \in T\}$ , aynı olasılık uzayında tanımlı  $X_t$  rasgele değişkenlerinin bir sınıfı olmak üzere bu sınıfa bir stokastik süreç denir. Burada  $T$  kümesi parametre kümesi olarak adlandırılır.  $T$  kümesi sonlu veya sayılabilir ise bu sürece kesikli parametre stokastik süreci, şayet  $T$  kümesi sayılamaz ise bu sürece sürekli parametre stokastik süreci adı verilir.

**Tanım 2.1.2**  $\{X_t : t \in T\}$  bir stokastik süreç olsun.  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  koşulunu sağlayan her  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n = 1, 2, \dots$  için

$$\Pr(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_{n-1}} \leq x_{n-1}) = \Pr(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} \leq x_{n-1})$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\{X_t : t \in T\}$  stokastik sürecine markov süreci adı verilir.

**Tanım 2.1.3**  $\{X_t : t \in T\}$  stokastik sürecinde  $x \in \mathbf{R}$  olmak üzere

$$\Pr(x - h < X_t < x + h) > 0 \quad \forall h > 0$$

eşitsizliğini sağlayan  $t \in T$  bulunabiliyorsa  $x$ 'e bu stokastik sürecin bir durumu adı verilir. Bütün durumların oluşturduğu kümeye bu sürecin durum uzayı adı verilir (Parzen 1962).

Parametre uzayını kesikli ve sürekli olarak ayırabildiğimiz şekilde durum uzayını da kesikli ve sürekli olarak ayırmak mümkündür.  $\{X_t : t \in T\}$  stokastik sürecinin durum uzayı E olsun. E kümesi sonlu veya sayılabilir ise bu sürece kesikli durum süreci şayet E kümesi sayılamaz ise bu sürece sürekli durum süreci adı verilir.

Markov süreçleri durum uzayına ve parametre uzayına göre 4 temel başlık altında sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırma çizelge 2.1’ de gösterilmektedir.

**Çizelge 2.1** Markov süreçlerinin durum uzayına ve parametre uzayına göre sınıflandırılması

|                    |         | DURUM UZAYI                             |                                        |
|--------------------|---------|-----------------------------------------|----------------------------------------|
|                    |         | Kesikli                                 | Sürekli                                |
| PARAMETRE<br>UZAYI | Kesikli | Kesikli Parametrelili<br>Markov Zinciri | Kesikli Parametrelili<br>Markov Süreci |
|                    | Sürekli | Sürekli Parametrelili<br>Markov Zinciri | Sürekli Parametrelili<br>Markov Süreci |

**Tanım 2.1.4**  $\{X_t : t \in T\}$  bir stokastik süreç olsun. E durum uzayı sonlu veya sayılabilir olmak üzere

$$\Pr(X_{t+1} = j \mid X_0, X_1, \dots, X_t) = \Pr(X_{t+1} = j \mid X_t) \quad \forall j \in E \quad t \in T$$

ise  $\{X_t : t \in T\}$  stokastik sürecine markov zinciri adı verilir.

Yukarıdaki tanıma göre bir markov zincirinin  $X_t$  rasgele değişkeni verildiğinde  $X_0, X_1, \dots, X_{t-1}$  rasgele değişkenlerinden koşullu olarak bağımsız olan  $X_{t+1}$  rasgele değişkenlerinin bir dizisi olduğu söylenebilir (Çınlar 1975). Daha açık bir ifade ile markov zinciri, sürecin şimdiki durumu  $X_t$  bilindiğinde bir sonraki durum olan  $X_{t+1}$  sürecin geçmiş durumları olan  $X_0, X_1, \dots, X_{t-1}$  rasgele değişkenlerinden bağımsız olma

özelliği olan rasgele değişkenlere sahip bir stokastik süreçtir. Bu özellik literatürde markov özelliği olarak bilinmektedir (Ross 1996).

## 2.2. Geçiş Olasılıkları ve Chapman-Kolmogorov Denklemi

Kesikli parametre uzayına sahip  $\{X_t : t \in T\}$  markov zincirinin olasılık yasasını tanımlayabilmek için aşağıdaki olasılık fonksiyonlarına ihtiyacımız vardır (Parzen 1962).

**Tanım 2.2.1**  $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$  bir markov zinciri olsun.

$$\pi_j(n) = \Pr(X_n = j) \quad \forall n \geq 0 \text{ ve } \forall j \in E \quad (2.2.1)$$

ile verilen  $\pi_j(n)$  fonksiyonuna  $\{X_t : t \in T\}$  markov zincirinin olasılık fonksiyonu adı verilir.

**Tanım 2.2.2**  $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$  bir markov zinciri olsun.  $\forall m, n \in T$  öyleki  $m, n \geq 0$  ve  $\forall j, k \in E$  için

$$p_{j,k}(m, n) = \Pr(X_n = k \mid X_m = j) \quad (2.2.2)$$

ile verilen  $p_{j,k}(m, n)$  fonksiyonu  $\{X_t : t \in T\}$  markov zincirinin koşullu olasılık fonksiyonu veya geçiş olasılık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Kesikli parametre uzayına sahip  $\{X_t : t \in T\}$  markov zincirinin  $q$  bileşenli ortak olasılık fonksiyonunun (2.2.1) ve (2.2.2)' de tanımlanan fonksiyonlar yardımı ile nasıl belirlenebileceği aşağıda gösterilmektedir.

$\forall q \in \mathbb{N}$  için  $n_1 < n_2 < \dots < n_q$  zamanlar ve  $k_1 k_2 \dots k_q$  durumlar olmak üzere

$$\Pr(X_{n_1} = k_1, X_{n_2} = k_2, \dots, X_{n_q} = k_q)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Pr(X_{n_1} = k_1)}{\Pr(X_{n_1} = k_1)} * \dots * \frac{\Pr(X_{n_1} = k_1, \dots, X_{n_{q-1}} = k_{q-1})}{\Pr(X_{n_1} = k_1, \dots, X_{n_{q-1}} = k_{q-1})} * \Pr(X_{n_1} = k_1, X_{n_2} = k_2, \dots, X_{n_q} = k_q) \\
&= \Pr(X_{n_1} = k_1) * \frac{\Pr(X_{n_1} = k_1, X_{n_2} = k_2)}{\Pr(X_{n_1} = k_1)} * \dots * \frac{\Pr(X_{n_1} = k_1, X_{n_2} = k_2, \dots, X_{n_q} = k_q)}{\Pr(X_{n_1} = k_1, X_{n_2} = k_2, \dots, X_{n_{q-1}} = k_{q-1})} \\
&= \Pr(X_{n_1} = k_1) * \Pr(X_{n_2} = k_2 \mid X_{n_1} = k_1) * \dots * \Pr(X_{n_q} = k_q \mid X_{n_1} = k_1, \dots, X_{n_{q-1}} = k_{q-1}) \\
&= \Pr(X_{n_1} = k_1) * \Pr(X_{n_2} = k_2 \mid X_{n_1} = k_1) * \dots * \Pr(X_{n_q} = k_q \mid X_{n_{q-1}} = k_{q-1}) \\
&= \pi_{k_1}(n_1) * p_{k_1, k_2}(n_1, n_2) * \dots * p_{k_{q-1}, k_q}(n_{q-1}, n_q)
\end{aligned}$$

$q$  bileşenli ortak olasılık fonksiyonunu sürecin markov özelliği kullanılarak (2.2.1) ve (2.2.2)' de tanımlanan fonksiyonlar yardımı ile bulunmuş olur.

**Tanım 2.2.3** Eğer bir  $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$  markov zincirinin geçiş olasılık fonksiyonu  $p_{j,k}(m, n) = \Pr(X_n = k \mid X_m = j)$  sadece  $|n - m|$  farkına bağlı ise bu markov zinciri homojen markov zinciri, zamana göre homojen markov zinciri ya da durağan geçiş olasılıklı markov zinciri denir.

**Tanım 2.2.4**  $\{X_t : t \in T\}$  bir homojen markov zinciri olsun.

$$p_{j,k}(n) = \Pr(X_{n+t} = k \mid X_t = j), \quad t, n \in T$$

fonksiyonuna homojen markov zincirinin  $n$ -adımlı geçiş olasılık fonksiyonu adı verilir.

$\{X_t : t \in T\}$  homojen markov zincirinin  $i$ . durumdan başlayarak  $n$  adım sonra  $j$ . durumda bulunması için  $l$  adım sonra  $k$  gibi bir adımda bulunması ve sonra da  $k$ . durumdan  $j$ . duruma  $n-l$  adımda ulaşmasını gerektirmektedir. Bu bağıntıyı gösteren

denkleme Chapman-Kolmogorov denklemi adı verilmekte olup aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$p_{i,j}(n) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(l) * p_{k,j}(n-l) \quad ; \quad \forall i, j \in E \text{ ve } \forall n, l \text{ öyleki } l > t$$

Chapman-Kolmogorov denkleminin elde edilmesi ise aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{aligned} p_{i,j}(n) &= \Pr(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = \Pr(X_n = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \Pr(X_n = j, X_l = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \frac{\Pr(X_n = j, X_l = k, X_0 = i)}{\Pr(X_0 = i)} \\ &= \sum_{k \in E} \frac{\Pr(X_n = j, X_l = k, X_0 = i)}{\Pr(X_0 = i)} * \frac{\Pr(X_l = k, X_0 = i)}{\Pr(X_l = k, X_0 = i)} \\ &= \sum_{k \in E} \frac{\Pr(X_n = j, X_l = k, X_0 = i)}{\Pr(X_l = k, X_0 = i)} * \frac{\Pr(X_l = k, X_0 = i)}{\Pr(X_0 = i)} \\ &= \sum_{k \in E} \Pr(X_n = j \mid X_l = k, X_0 = i) * \Pr(X_l = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \Pr(X_n = j \mid X_l = k) * \Pr(X_l = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} p_{i,k}(l) * p_{k,j}(n-l) \end{aligned}$$

Markov Zincirini homojen olarak kabul etmek hesaplamalar açısından fayda sağlarken aynı zamanda kuramı genellemekte de bir kayıba yol açmamaktadır (Çınlar 1975). Bu

sebeble aksi belirtilmedikçe tezin bundan sonraki bölümlerinde  $\{X_t : t \in T\}$  stokastik sürecinin homojen markov zinciri olduğu varsayılacaktır. Bilindiği gibi  $\{X_t : t \in T\}$  markov zincirinin homojen olması demek  $p_{j,k}(m,n) = \Pr(X_n = k \mid X_m = j)$  olasılığının sadece  $|n-m|$  farkına bağlı olması anlamına gelmektedir. Bunu başka bir şekilde

$$p_{j,k}(m-n) = p_{j,k}(m,n) = \Pr(X_n = k \mid X_m = j)$$

olarak ifade edebiliriz.

**Tanım 2.2.5**  $i, j \in E$  için tanımlı  $p_{i,j}$  sayıları

$$a- p_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \in E$$

$$b- \sum_j p_{i,j} = 1 \quad \forall i \in E$$

şartlarını sağlıyorsa  $P = (p_{i,j})$  ile verilen  $P$  matrisine  $E$  üzerinde tanımlı bir markov matrisi denir (Çınlar 1975).

$\{X_t : t \in T\}$  durum uzayı  $\{0, 1, \dots\}$  kümesi olan bir homojen markov zinciri ve  $p_{i,j}$  bu zincirin bir adım geçiş olasılıkları olmak üzere bir adım geçiş olasılıkları matris formunda

$$P = (p_{i,j}) = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,k} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ p_{m,0} & p_{m,1} & \cdots & p_{m,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şekilde gösterilebilmektedir.  $P$  matrisi bu markov zincirinin geçiş matrisi olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca  $P$  geçiş matrisinin geçiş olasılıkları

$$a- p_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{0,1,2,\dots\}$$

$$b- \sum_j p_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \{0,1,2,\dots\}$$

şartlarını sağlamaktadır. Böylece bir markov zincirinin geçiş matrisi bir markov matrisi olmaktadır (Çınlar 1975).

### 2.3 Durumların Sınıflandırılması

$\{X_n, n = 0,1\}$  kesikli parametrelili bir markov zinciri olsun. Zincirin herhangi bir durumundan diğer bir duruma geçişin olup olmamasına göre, bu zincirin süreç boyunca nasıl bir gelişim içinde olacağını incelemek için durumların sınıflandırılmasına ihtiyaç duyulur.

**Tanım 2.3.1** Bazı  $N \geq 0$  tamsayısı için  $p_{i,j}(N) > 0$  oluyorsa  $j$ . duruma  $i$ . durumdan ulaşılabilir (accessible) durum adı verilir ve  $i \rightarrow j$  olarak gösterilir.  $j$ . durum  $i$ . durumdan erişilebilir ve  $i$ . durum  $j$ . durumdan erişilebilir ise  $i$ . ve  $j$ . durumlar iletişimli (communicate) durumlar olarak adlandırılır ve  $i \leftrightarrow j$  olarak gösterilir.

$\leftrightarrow$  bağıntısı  $E$  üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı ile her bir  $i$  durumu için bir denklik sınıfı oluşturulur. Denklik bağıntısının özelliklerinden dolayı durumların herhangi iki sınıfı ya aynıdır ya da ayrıktır. Böylece iletişimlilik kavramı durum uzayını bir takım ayrı sınıflara böler. Zincirin tek bir denklik sınıfının olmasına göre aşağıdaki tanımlama yapılabilir.

**Tanım 2.3.2**  $\{X_n, n = 0,1,\dots\}$  markov zincirinin  $E$  durum uzayı bir tek denklik sınıfından oluşuyor, yani  $\forall i, j \in S$  için  $i \leftrightarrow j$  ise markov zinciri, indirgenemez denir.

Bir markov zincirinin zaman içindeki gelişimini incelemek için zincirin durumlarını sayılamaz yada sayılabilir sıklıkta geçişe sahip olmalarına göre sınıflamak mümkündür. Bu nedenle bir durumun meşgul olma zamanı (occupation time) kavramı ortaya çıkmaktadır (Parzen 1962).

**Tanım 2.3.3**  $i$  herhangi bir durum olmak üzere  $n \in N$  için ilk  $n$  adımda zincirin  $i$ . durumda bulunma sayısını,  $N_i(n)$  olarak gösterelim.  $N_i(n)$ ,  $i$ . durumun ilk  $n$  adımdaki meşgul olma zamanı (occupation time) olarak adlandırılır.  $N_i$  ise  $i$ . durumun toplam meşgul olma zamanı, ya da zincirin  $i$  durumunda bulunduğu adımların (zamanların) sayısı olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanımdan

$$N_i(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_i(n)$$

olduğu açıktır.

Markov zincirinin başlangıçta  $i$ . durumda olduğu bilindiğinde  $j$ . duruma kesin olarak geçiş yapmasının olmasının koşullu olasılığı ve  $j$ . duruma sonsuz sıklıkta geçiş yapmasının koşullu olasılığı sırasıyla

$$f_{i,j} = P[N_j(\infty) > 0 | X_0 = i]$$

ve

$$g_{i,j} = P[N_j(\infty) = \infty | X_0 = i]$$

olarak tanımlanır.

Markov zincirlerinin asimptotik davranışlarını incelemek için haberleşen durumları kapalı yada kapalı olmamalarına göre sınıflamak gerekmektedir. Bu nedenle bir durumun tekrarlı yada geçişli durum olduğu kavramı ortaya çıkmaktadır (Parzen 1962).

**Tanım 2.3.4**  $i$ . durumdan başlayan markov zincirinin  $i$  durumuna geri dönme olasılığı 1, yani  $f_{i,i} = 1$  ise  $i$ . durum tekrarlı durum olarak adlandırılır.  $i$ . durumda başlayan zincirin  $i$  durumuna asla geri dönmemesi olasılığı olan  $1 - f_{i,i}$  pozitif, yani  $f_{i,i} < 1$  ise  $i$  durumuna geçişli durum denir (Parzen 1962).

**Tanım 2.3.5**  $\{X_n, n \in N\}$  durum uzayı  $E = \{1, 2, \dots, k\}$  olan bir markov zinciri olmak üzere olmak üzere  $V_k(n)$  zincirin ilk defa  $n$ . adımda  $k$  durumuna girmesi olayı, yani

$$V_k(n) = (X_n = k, X_m \neq k, m = 1, 2, \dots, n-1)$$

olsun. Bu durumda

$$f_{j,k}(n) = P(V_k(n) | X_0 = j)$$

ile tanımlanan  $f_{j,k}(n)$  olasılığına zincir başlangıçta  $j$  durumunda iken  $k$  durumuna ilk defa  $n$ . adımda geçmesi olasılığı denir.

Durum uzayı  $E = \{1, 2, \dots, k\}$  olan indirgenemez bir markov zincirinde verilen  $j$  ve  $k$  durumları için  $\{f_{j,k}(n), n = 1, 2, \dots\}$  olasılıkları bir olasılık dağılımı oluşturur (Parzen 1962).

$$m_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{j,k}(n)$$

diyelim.  $m_{j,k}$ ,  $j$  de başlayan zincirin ilk defa  $k$  durumuna girinceye kadar geçen beklenen (ortalama) zamandır.

**Tanım 2.3.6**  $\{X_n, n \in N\}$  markov zincirinde herhangi bir tekrarlı  $k$  durumu için

$$m_{k,k} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{k,k}(n) < \infty$$

ise  $k$ . duruma etkili tekrarlı durum denir. Eğer yukarıdaki seri ıraksak ise  $k$ . duruma etkisiz tekrarlı durum adı verilmektedir.

**Tanım 2.3.7** İndirgenemez bir markov zincirinin  $k$ . durumunun periyodu

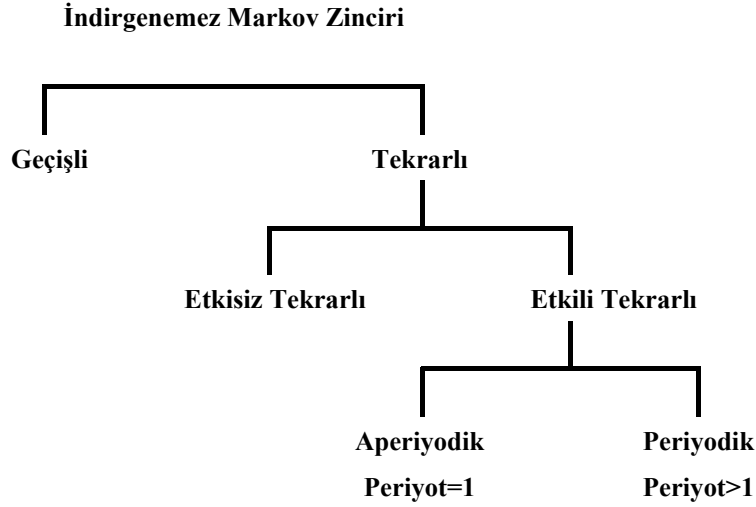
$$d(k) = \text{OBEB} \{n \geq 1 : p_{k,k}(n) > 0\}$$

ile tanımlanan  $d(k)$  sayısına, yani  $p_{k,k}(n) > 0$  şartını sağlayan doğal sayılarının kümesinin ortak bölenlerin en büyüğüne  $k$ . durumun periyodu denir. Eğer bir durumun periyodu 1 ise o durum aperiodyik olarak adlandırılır (Parzen 1962).

Bir indirgenemez markov zincirinin tüm durumları etkili tekrarlı ve aperiodyik ise o zince ergodik markov zinciri denir.

Yukarıda kesikli parametrelili markov zincirinin durumlara göre sınıflandırılması ele alınmıştır. Tanımlamalar çerçevesinde bir indirgenemez markov zincirinin durumlara göre sınıflandırılmasını aşağıdaki tablo yardımı ile özetlemek mümkündür (Parzen 1962).

**Şekil 2.1** Bir indirgenemez markov zincirinin sınıflandırılması (Parzen1962)



## 2.4 Klasik Bootstrap Yöntemi ve Algoritması

Bootstrap tekniği bootstrap örnekleme olarak tanımlanan, eldeki örnekleme yeniden örnekleyerek veya bu örnekleme dayalı bir modeli kullanarak bir tahmin edicinin veya bir test istatistiğinin dağılımını tahmin etmek veya dağılımına yaklaşımda bulunmak için kullanılan bir yöntemdir.  $\hat{F}$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  birbirinden bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin  $\frac{1}{n}$  olasılıkla gözlemlendiği ampirik dağılım fonksiyonu olmak üzere  $\hat{F}$  dağılımından  $n$  birimlik rasgele bir örnekleme  $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$  olarak gösterelim.

$X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$  örnekleme bootstrap örnekleme olarak tanımlanmaktadır.  $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ 'den yapılan gözlem sonucunda elde edilecek gözlemi  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  olarak gösterelim.

Başka bir deyişle, bootstrap örnekleme  $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ 'den gözlenen  $n$  birimlik bir gerçekleşmesi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  değerlerinden yerine koyarak  $n$  birimlik rasgele

örneklem çekilmesi sonucunda oluşmaktadır. Bu sebeble bootstrap örnekleminin gözlem değerleri  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  orjinal gözlemlerinden oluşmakta olup bu gözlemlerin bazıları bootstrap örnekleminde hiç bulunmayabilmekte bazıları bir kere bulunabilmekte bazıları da bir kereden fazla bulunabilmektedir (Efron and Tibshirani 1993).

$n$  birimlik rasgele bir örneklemin gözlem değerleri  $x^*$ , bir bootstrap örneklemini olmak üzere  $\hat{\theta} = s(X)$  istatistiğinin standart sapması  $\sigma$ 'nın tahmini için bootstrap algoritması aşağıdaki şekilde olacaktır.

1.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  örnekleminde yerine koyarak seçilmiş  $n$  birimlik birbirinden bağımsız  $B$  tane,  $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*B}$  olarak adlandırılan, bootstrap örneklemini seçilir.
2.  $\hat{\theta}^*(b) = s(x^{*b})$   $b = 1, 2, \dots, B$  olacak şekilde her bir bootstrap örneklemini için istatistiğin değerleri hesap edilir.
3. Herbir bootstrap örneklemini için bulunan değerlerin standart sapması

$\hat{\theta}(\cdot) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b)$  olmak üzere  $\hat{\theta}$ 'nin tahmini için  $X$  örneklemine dayalı standart sapmasının bootstrap tahmini

$$\hat{\sigma}_B = \left[ \sum_{b=1}^B \frac{(\hat{\theta}(b) - \hat{\theta}(\cdot))^2}{B-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

olarak hesap edilir.

$\hat{\theta} = s(x)$  istatistiğın standart sapmasının bootstrap yöntemine göre tahmini,  $\sigma$  olmak üzere

$$\sigma = \lim_{B \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_B$$

dır (Efron and Tibshirani 1993).

### 3. MARKOV ZİNCİRLERİNDE BOOTSTRAP YÖNTEMİ

Efron (1982), gözlemlerin birbirinden bağımsız aynı dağılımlı olması durumunda, istatistiklerin bilinmeyen örneklem dağılımlarının tahmin edilmesi problemine bir çözüm yolu olarak, bootstrap metodunu önermiştir. Klasik bootstrap yönteminin, birçok istatistiğin örneklem dağılımlarına, rasgele değişkenlerin birbirinden bağımsız aynı dağılımlı olması durumunda, tutarlı yaklaşımlarda bulunduğu görülmüştür. Ancak rasgele değişkenlerin her zaman birbirinden bağımsız olması söz konusu değildir. Böyle bir duruma örnek olarak gözlemlerin m-bağımlı olması gösterilebilir. Klasik bootstrap yönteminin temeli olan birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı yeniden örnekleme, m-bağımlı datanın örneklem ortalamasının dağılımının tahmin edilmesi probleminde, rasgele olgunun bağımlılık yapısını yansıtmadığı, Liu and Singh (1988) tarafından gösterilmiştir. Klasik bootstrap yöntemi kullanılarak elde edilen bootstrap tahminlerinin tutarsız olduğu görülmüştür. Bu sorunun aşılmasına yönelik Liu and Singh (1988), Shi and Shao (1988) makalelerinde hareketli bloklarla bootstrap adı verilen yeniden örnekleme yöntemini kullanmışlardır.

Benzer olarak markov bağımlılığının görüldüğü markov zincirlerinde geçiş olasılıklarının tahmin edilmesi ve ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımının tahmin edilmesi problemlerine çeşitli bootstrap yöntemleri önerilmiştir. Sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirleri için, Basawa *et al.* (1990) makalelerinde geçiş olasılıklarının tahmini problemi için koşullu bootstrap adını verdikleri metodu kullanarak geçiş sayılarının bilinmesi koşulu altında elde edilen geçiş olasılıklarının bootstrap tahminleri ile tutarlı yaklaşımlarda bulunduklarını göstermişlerdir. Ayrıca klasik bootstrap yönteminin kullanılmasıyla tutarlı yaklaşımlar elde edilebileceğini göstermişlerdir. Kulperger and Rao (1989) makalelerinde sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirlerinde ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örnekleme dağılımının bootstrap tahminini yaparak, tahminin asimptotik olarak geçerli olduğunu göstermişlerdir. Datta and McCormick (1990) makalelerinde Basawa *et al.* (1990)'nin önerdiği koşullu bootstrap yönteminin yaklaşım hızları üzerinde durarak olası en iyi yaklaşım hızının  $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$  olduğunu göstermişlerdir.

Ayrıca makalelerinde birbirinden bağımsız aynı dağılımlı örneklemeyle dayalı yeni bir bootstrap metodu önererek, standartlaştırılmış  $\hat{p}_{ij}$  geçiş olasılıklarını kullanılması ve  $p_{ij}$  geçiş olasılıklarının irrasyonel olması koşulu altında  $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$  yaklaşım hızını elde etmişlerdir.

Sayılabılır durum uzayına sahip markov zincirleri için Athreya and Fuh (1989) makalelerinde üç farklı bootstrap metodu önermişlerdir. Önerdikleri yöntemleri kullanarak tahmin edicilerin asimptotik olarak tutarlı olduklarını göstermişlerdir.

Tezin bu bölümünde, sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirlerinde geçiş matrisinin klasik bootstrap yöntemi ve koşullu bootstrap yöntemi kullanılarak tahmin edilmesi konusunda Basawa *et al.* (1990)'nin çalışmalarına değinilecektir. Ayrıca aynı markov zincirleri için ilk uğrama zamanı rasgele değişkenleri ile ilgili Kulperger and Rao (1989)'nun çalışmalarından bahsedilecektir.

$\{X_n; n \geq 0\}$  stokastik süreci durum uzayı  $S = \{1, 2, \dots, k\}, k \geq 2$  ve geçiş matrisi  $P = (p_{ij})$  olan bir ergodik markov zinciri olsun. Sürecin  $n$  zamanına kadar gözlemlenmesi sonucundaki gerçekleşmesini  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  olarak gösterelim.  $n+1$  uzunluğundaki bu gözleme dayalı olabilirlik fonksiyonu,  $L$ , aşağıdaki gibi olacaktır.

$$L = \Pr(X_0 = x_0) \cdot \Pr(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \dots \Pr(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$$

$\{X_n; n \geq 0\}$  stokastik süreci durum uzayı  $S = \{1, 2, \dots, k\}, k \geq 2$  olan bir ergodik markov zinciri seçilmesinin sebebi  $\pi_j > 0, \sum_{j=1}^k \pi_j = 1$   $\pi_j = \sum_{i=1}^k \pi_i p_{ij}$  ve  $\forall i \in S \quad n \rightarrow \infty$  için  $p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j$  olmak üzere  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$  değişimsiz olasılık ölçüsünün varolmasından kaynaklanmaktadır (Fuh 1993).

**Teorem 3.1**  $\forall i$  için  $\pi_i$  markov zincirinin ilk durum olasılıkları olmak üzere

$$\frac{n_i}{n} \rightarrow \pi_i \quad \text{hhhy} \quad n \rightarrow \infty$$

olacaktır (Athreya and Fuh 1992).

Ayrıca teorem 3.1'den dolayı  $\pi$ 'nin tahmin edicisi  $\pi_i$ 'nin tutarlı bir tahmin edici olduğu görülmektedir.

$x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  örnekleminde i. adımdan j. adıma tek adımda geçişleri  $i \rightarrow j$  olarak ve bu adımların sayısını  $n_{ij}$  ile gösterirsek olabilirlik fonksiyonunu

$$\begin{aligned} L &= \Pr(X_0 = x_0) \cdot [\Pr(X_t = 1 | X_{t-1} = 1)]^{n_{11}} \cdot [\Pr(X_t = 2 | X_{t-1} = 1)]^{n_{12}} \dots [\Pr(X_t = k | X_{t-1} = 1)]^{n_{1k}} \\ &\quad [\Pr(X_t = 1 | X_{t-1} = 2)]^{n_{21}} \cdot [\Pr(X_t = 2 | X_{t-1} = 2)]^{n_{22}} \dots [\Pr(X_t = k | X_{t-1} = 2)]^{n_{2k}} \\ &\quad \dots \\ &\quad [\Pr(X_t = 1 | X_{t-1} = k)]^{n_{k1}} \cdot [\Pr(X_t = 2 | X_{t-1} = k)]^{n_{k2}} \dots [\Pr(X_t = k | X_{t-1} = k)]^{n_{kk}} \\ &= \Pr(X_0 = x_0) \cdot \prod_{i,j} [\Pr(X_t = j | X_{t-1} = i)]^{n_{ij}} \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Faktörizasyon teoreminden dolayı sayısı  $k^2$  tane olan  $n_{ij}$ 'lerin oluşturduğu küme, geçiş matrisi  $P = (p_{ij})$  için yeterli istatistik olmaktadır.

$\sum_{j=1}^k \Pr(X_t = j | X_{t-1} = i) = 1, i, j \in S$  olması halinde yani i. durumdan diğer durumlara tek adımda mutlaka bir geçiş olması halinde  $P = (p_{ij})$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi  $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})$ , i. adıma geçişlerin sayısı  $n_i = \sum_j n_{ij}$  olmak üzere

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \quad (3.1)$$

olacaktır (Basawa and Rao 1980).  $p_{ij}$  geçiş olasılıklarının en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunurken

$$\begin{aligned} \log(L) &= \log(\Pr(X_0 = x_0)) + n_{ij} \log\left(\prod_{i,j}^k [\Pr(X_t = j | X_{t-1} = i)]\right) \\ &= \log(\Pr(X_0 = x_0)) + \sum_{i,j} n_{ij} \log(\Pr(X_t = j | X_{t-1} = i)) \end{aligned}$$

ifadesinin  $p_{ij}$  geçiş olasılıklarına göre maksimizasyonu yapılmaktadır. Bu optimizasyon sırasında  $\log(\Pr(X_0 = x_0))$  'nin ilk durum olasılığının logaritması  $p_{ij}$  geçiş olasılıkları hakkında bilgi verici olmadığı varsayılmakta olup büyük  $n$  değerleri için bu katsayının etkisi gözardı edilebilmektedir (Basawa and Rao 1980).

$\hat{p}_{ij}$ ; geçiş olasılıklarının en çok olabilirlik tahmin edicisinin asimptotik dağılımı incelendiğinde  $\phi = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1k}, p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2k}, \dots, p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kk})$   $k^2 \times 1$  boyutunda parametre vektörü,  $\hat{\phi} = (\hat{p}_{11}, \hat{p}_{12}, \dots, \hat{p}_{1k}, \hat{p}_{21}, \hat{p}_{22}, \dots, \hat{p}_{2k}, \dots, \hat{p}_{k1}, \hat{p}_{k2}, \dots, \hat{p}_{kk})$   $k^2 \times 1$  boyutunda tahmin vektörü,  $\Sigma$  'nın elemanları  $\delta_{ij}$  Kronecker delta olmak üzere

$$\sigma_{ij, i^* j^*} = \frac{1}{\pi_i} \left( \delta_{ii^*} \left( \delta_{jj^*} p_{ij} - p_{ij} p_{i^* j^*} \right) \right) \text{ için,}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{D} N_{k^2}(0, \Sigma)$$

olacaktır (Basawa and Rao 1980).

Sabit bir  $i$  değeri için  $(n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ik})$  vektörü olasılıkları  $(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik})$  ve indeksi  $n_i = n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ik}$  olan multinomial dağılımlı bir vektör olarak davranmaktadır. Geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin tutarlılığı ve yukarıda ifade edilen asimptotik normal dağılma özelliği bulunurken multinomial dağılımlı olma özelliğinden yararlanılmaktadır (Basawa and Rao 1980).

Geçiş matrisi  $P$  olan  $\{X_n; n \geq 0\}$  sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirinin gözlenmesi sonucunda elde edilen gerçekleşmesi  $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  ve geçiş matrisi  $P$ 'nin bu gerçekleşmeye dayalı en çok olabilirlik tahmin edicisi  $\hat{P}_n \equiv P(n, x)$  olsun. Tahmini yapılmak istenen bir parametre  $G$  ve bu parametrenin  $x$  gözlemine dayalı tahmin edicisi  $\hat{G}_n$  olsun.  $R(x, G) = (\hat{G}_n - G)$  'nin örneklem dağılımının bootstrap yöntemine göre yaklaşımı aşağıdaki gibi olmaktadır.

(1)  $\hat{P}_n$  geçiş matrisine dayalı  $n$  adımlı bir markov zinciri gerçekleşmesi Bootstrap örneklemini olarak adlandırılır  $x^* = \{x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*\}$  olmak üzere bu bootstrap örneklemini tahmin edici  $\hat{G}_n$  'da  $x$  yerine koyarak elde edeceğimiz değeri  $G_n^* \equiv G(n, x^*)$  olarak ifade edelim.

(2)  $R(x, G) = (\hat{G}_n - G)$  'nin örneklem dağılımına  $R(x^*, G_n^*) = (G_n^* - \hat{G}_n)$  'nin  $x$  verildiğindeki koşullu dağılımı ile Monte Carlo yöntemi yardımıyla yaklaşımda bulunabilir (Fuh 1993).

Burada önemli olan nokta adım (1)'de  $x^*$  olarak adlandırılan bootstrap örnekleminin elde edilmesidir. Basawa *et al.* (1990) makalelerinde, sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirinde tek adım geçiş olasılıklarının tahmin edilmesi problemine çözüm yolu olarak klasik bootstrap ve koşullu bootstrap yöntemlerini önermektedir. Klasik bootstrap yönteminde bootstrap örnekleminin elde edilmesi gözlenen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  değerlerinin  $\frac{1}{n}$  olasılıkla gözlemlendiği ampirik dağılım fonksiyonu

$\hat{F}$  dağılımından yerine koyma usulüne göre  $n$  birimlik rasgele bir örneklem seçilmesiyle oluşturulmaktadır. Modelin ve modelden gözlenen sürecin  $n$  birimlik gerçekleşmesinin markov bağımlı olmasından dolayı bu bağımlılığı yansıtacak bir bootstrap örnekleme içinse aşağıda örnekleme yöntemi anlatılmaya çalışılan koşullu bootstrap yöntemini önermektedirler.

Zincirin  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  gerçekleşmesine dayalı geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmini  $\hat{P}_n = (\hat{p}_{ij})$  (3.1)'de tanımlanan fonksiyon yardımıyla hesaplanabilir. Öyleyse zincirin  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  gerçekleşmesi temel alınarak ve  $n_i$ 'lerin bilinmesi koşulu altında  $t \geq 1$  ve  $1 \leq i, j \leq k$  için olasılık fonksiyonları

$$\Pr(U = i) = \hat{p}_i \text{ ve } \Pr(W_{i,t} = j | x) = \hat{p}_{ij}$$

olan birbirinden bağımsız  $U$  ve  $W_{it}$  rasgele değişkenlerini tanımlayabiliriz. Bu rasgele değişkenleri kullanarak  $\tilde{X}_n$  olarak adlandıracağımız bir zinciri

$$\tilde{X}_0 = U, \tilde{X}_1 = W_{\tilde{X}_0,1}, \dots, \tilde{X}_t = W_{\tilde{X}_{t-1},m} \quad t > 2$$

olacak şekilde tanımlayabiliriz. Yukarıdaki ifade de  $m$  değeri  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{t-1}$  rasgele değişkenleri içerisinde  $\tilde{X}_j = \tilde{X}_{t-1}$ 'lerin sayısını göstermektedir. Örneğin  $S = \{1, 2, 3\}$  durum uzayına sahip bir markov zincirinin yeniden örnekleme olan  $\tilde{X}$  zincirinin aşağıdaki gibi olduğunu farzederek

$$1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3$$

bu yeniden örnekleme

$$\tilde{X}_0 = 1 = U, \tilde{X}_1 = 2 = W_{1,1}, \tilde{X}_2 = 2 = W_{2,1}, \tilde{X}_3 = 3 = W_{2,2}, \tilde{X}_4 = 2 = W_{3,1}, \tilde{X}_5 = 1 = W_{2,3},$$

$$\tilde{X}_6 = 3 = W_{1,2}, \tilde{X}_7 = 1 = W_{3,2}, \tilde{X}_8 = 2 = W_{1,3}, \tilde{X}_9 = 3 = W_{2,4}$$

olarak göstermek mümkün olacaktır. Görüleceği üzere burada  $m = 4$  değeri  $\tilde{X}_j = 2$  değerinin bu zincirdeki gerçekleşme sayılarını göstermektedir.

$X_0$  rasgele değişkenine ilk durumda bulunma olasılığı tanımlandığı zaman

$$(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \stackrel{D}{=} (X_0, X_1, \dots, X_n)$$

olacaktır (Basawa *et al.* 1990). Bu sebeple  $I$  fonksiyonu gösterge fonksiyon olmak üzere

$$n_{ij} = \sum_{t=1}^D I(\tilde{X}_t = i) I(\tilde{X}_{t+1} = j) \quad (3.2)$$

$$= (W_{i,1}, W_{i,2}, \dots, W_{i,\tilde{n}_i}) \text{ 'lerin içinde } W_{i,t} = j \text{ şartını sağlayan } W_{i,t} \text{ 'lerin sayısı}$$

öyleki  $\tilde{n}_i$  sayısı

$$\tilde{n}_i = \sum_{t=1}^n I(\tilde{X}_t = i)$$

olarak gösterilebilir. Yani  $\tilde{X}$  örneklemindeki  $i$ .nci durumdan geçişlerin sayısı olacaktır. O zaman (3.2) ifadesini

$$n_{ij} = \sum_{t=1}^D I(W_{i,t} = j)$$

ve

$$n_i^D = \tilde{n}_i$$

olarak yazmak mümkün olmaktadır (Basawa *et al.* 1990).

Markov zincirinin gözlemlenmesi sonucunda oluşan  $n$  adımlık gerçekleşme  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  bilindiğınmesi koşulu altında birbirinden bağımsız olan  $W_{im}^*$  rasgele değişkenlerini

$$\Pr(W_{im}^* = j | X_0, X_1, \dots, X_n) = \hat{p}_{ij}$$

olarak tanımlayabiliriz. Daha sonra  $i$ .nci adımdan  $j$ .nci adıma geçişlerin sayısını

$$n_{ij}^* = \sum_{t=1}^{n_i} I(W_{it}^* = j)$$

olarak tanımlayabiliriz.

$$n_{ij}^* | X_0, X_1, \dots, X_n \sim \text{binom}(n_i, \hat{p}_{ij}) \quad \text{ve} \quad i \neq j \quad \text{için} \quad (n_{i1}^*, n_{i2}^*, \dots, n_{ik}^*) \quad \text{ile} \quad (n_{j1}^*, n_{j2}^*, \dots, n_{jk}^*)$$

koşullu olarak bağımsız olacaktır. Ayrıca  $\forall i \in S$  için

$$(n_{i1}^*, n_{i2}^*, \dots, n_{ik}^*) \sim \text{multinomial}(n_i, \hat{p}_{i1}, \hat{p}_{i2}, \dots, \hat{p}_{ik})$$

olacaktır (Basawa *et al.* 1990).

Böylelikle  $\text{multinomial}(n_i, \hat{p}_{i1}, \hat{p}_{i2}, \dots, \hat{p}_{ik})$  dağılımından birbirinden bağımsız  $n_1$  adet  $W_1^*, \dots, W_{n_1}^*$  rasgele değişkenleri  $\text{multinomial}(n_2, p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2k})$  dağılımından birbirinden bağımsız  $n_2$  adet  $W_{n_1+1}^*, \dots, W_{n_1+n_2}^*$  rasgele değişkenleri...  $\text{multinomial}(n_k, p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kk})$  dağılımından birbirinden bağımsız  $n_k$  adet  $W_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}^*, \dots, W_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+n_k}^*$  rasgele değişkenleri üretilecektir.

Sonuç olarak markov bağımlılığı yapısına uygun olan toplam  $n-1$  adet

$$W_1^*, \dots, W_{n_1}^*, W_{n_1+1}^*, \dots, W_{n_1+n_2}^*, \dots, W_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}^*, \dots, W_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+n_k}^*$$

rasgele değişkenleri üretilecektir. Elde edilen bu rasgele değişkenler kullanılarak geçiş matrisinin bootstrap tahmini ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$\forall i, j \in S$  için

$$n_{ij}^* = \sum_{t=1}^{n_i} I(W_{it}^* = j)$$

fonksiyonu yardımıyla  $i$ . adımdan  $j$ . adıma geçişlerin sayısı bulunabilir.

$$p_{ij}^* = \frac{n_{ij}^*}{n_i} \quad 1 \leq i, j \leq k$$

tahmin edicisi ile geçiş matrisinin bootstrap tahmini hesaplanabilmektedir.

Basawa *et al.* (1990) makalelerinde multinomial dağılımın normal dağılıma yakınsadığı gerçeğini kullanarak

$$\sqrt{n}(\hat{p}_{ij}^* - \hat{p}_{ij}), 1 \leq i, j \leq k$$

dağılımı ile

$$\sqrt{n}(\hat{p}_{ij} - p_{ij}), 1 \leq i, j \leq k$$

dağılımına yaklaşımda bulunabileceğini göstermiştir.

Datta and McCormick (1992) yukarıda Basawa *et al.* (1990)'nin bootstrap yöntemi olarak anlatılan metod ile yapılan yaklaşımın yakınsama hızları konusunda aşağıdaki sonuca ulaşmışlardır.

**Teorem 3.2**  $0 < p_{ij} < 1$  olmak üzere

$$(i) \quad \sup_x \left| \Pr \left( \sqrt{n_i} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) \leq x \right) - \Pr^* \left( \sqrt{n_i} (\hat{p}_{ij}^* - \hat{p}_{ij}) \leq x \right) \right| = O \left( \sqrt{\frac{\log n}{n}} \right)$$

$$(ii) \quad \sup_x \left| \Pr \left( \frac{n_i}{\sqrt{n}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) \leq x \right) - \Pr^* \left( \frac{n_i}{\sqrt{n}} (\hat{p}_{ij}^* - \hat{p}_{ij}) \leq x \right) \right| = O \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{n}} \right)$$

$$(iii) \quad \sup_x \left| \Pr \left( \frac{n_i}{\sqrt{n}} \frac{(\hat{p}_{ij} - p_{ij})}{\sqrt{\pi_i p_{ij} (1 - p_{ij})}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) \leq x \right) - \Pr^* \left( \frac{n_i}{\sqrt{n}} \frac{(\hat{p}_{ij}^* - \hat{p}_{ij})}{\sqrt{\hat{\pi}_i \hat{p}_{ij} (1 - \hat{p}_{ij})}} \leq x \right) \right|$$

$$= O \left( \sqrt{\frac{1}{n}} \right)$$

olacaktır (Datta and McCormick 1992).

Görüldüğü üzere ergodik markov zincirinin geçiş matrisinin tahmini probleminde koşullu bootstrap metodu kullanılabilmektedir. Ayrıca Basawa *et al.* (1990) makalelerinde markov bağımlılığı durumunda klasik bootstrap metodunun kullanılmasıyla ne gibi sonuçlar elde edileceğini tartışmışlardır. Koşullu bootstrap metodundan farklı olarak standart bootstrap yönteminde tahminler gerçek parametreler olarak kabul edilip  $n_{ij}^*$  değerleri tahmin edilmiş modelden üretilmektedir. Yani başka bir ifadeyle koşullu bootstrap metodundaki  $n_i$  değerleri yerlerine standart bootstrap metodunda

$$n_i^* = \sum_j n_{ij}^*$$

değerleri kullanılmaktadır (Basawa *et al.* 1990).

Aşağıda standart bootstrap metodu ele alınmaktadır.

$$n_{ij} = \sum_{t=1}^n I(X_t = i)I(X_{t+1} = j) \text{ ve } n_i = \sum_{t=1}^n I(X_t = i) \text{ olmak üzere tahmin edilen geçiş}$$

matrisinin indirgenebilir olmasının önüne geçebilmek için bu değerler yerine

$$\tilde{n}_{ij} = n_{ij} + \frac{1}{n} \text{ ve } \tilde{n}_i = n_i + 1$$

kullanılarak ve  $\tilde{p}_{ij}$  rasgele değişkenini

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{\tilde{n}_{ij}}{\tilde{n}_i}$$

olarak tanımlayalım. Böylece geçiş olasılıkları  $\tilde{p}_{ij}$  olan  $\tilde{P}$  geçiş matrisi tahmin edicisinin hem indirgenemez hem de ergodik olacaktır (Basawa *et al.* 1990).

Olasılık fonksiyonları

$$\Pr(U = i) = \tilde{p}_i \text{ ve } \Pr(W_{i,t} = j | x) = \tilde{p}_{ij}$$

olan  $U$  ve  $W_{it}$  birbirinden bağımsız rasgele değişkenleri tanımlayabiliriz. Bu rasgele değişkenleri kullanarak  $X^*$  olarak adlandıracağımız bir zinciri koşullu bootstrap metodundaki sürece benzer olarak

$$X_0^* = U, X_1^* = W_{X_1^*,1}, \dots, X_t^* = W_{X_{t-1}^*,m} \quad t > 2$$

olacak şekilde tanımlayabiliriz. Bundan sonra

$$n_{ij}^* = \sum_{t=1}^n I(X_t^* = i)I(X_{t+1}^* = j) \quad \text{ve} \quad n_i^* = \sum_{t=1}^n I(X_t^* = i) \quad \text{olmak üzere geçiş olasılıklarının}$$

bootstrap tahmini

$$p_{ij}^* = \frac{n_{ij}^*}{n_i^*}$$

olacaktır.

**Teorem 3.3**  $\xi_{ij} = \sqrt{n_i}(\hat{p}_{ij} - p_{ij})$  ve  $\xi_{ij}^* = \sqrt{n_i^*}(p_{ij}^* - \tilde{p}_{ij})$  olmak üzere

$$\xi = (\xi_{11}, \dots, \xi_{21}, \dots, \xi_{kk}) \xrightarrow{D} N_{k^2}(0, \Sigma)$$

ve

$$\xi^* = (\xi_{11}^*, \dots, \xi_{21}^*, \dots, \xi_{kk}^*) \xrightarrow{D} N_{k^2}(0, \Sigma)$$

dır ve  $\delta_{ij}$  Kronecker delta olmak üzere  $\Sigma$  'nın elemanları  $\sigma_{ij, i^* j^*} = \left( \delta_{ii^*} \left( \delta_{jj^*} p_{ij} - p_{ij} p_{i^* j^*} \right) \right)$  olacaktır (Basawa *et al.* 1990).

Görüldüğü üzere ergodic markov zincirinin geçiş matrisinin tahmini probleminde standart bootstrap metodunun kullanılması durumunda elde edilecek tahmin edicinin kullanılmasıyla aynı asimptotik dağılıma yakınsadığı görülmektedir.

İlk uğrama zamanı rasgele değişkeninin dağılımının tahmini probleminde ise bootstrap yönteminin nasıl sonuçlar vereceği aşağıda tartışılmaktadır.

Geçiş matrisi  $P$  ve ilk durumu  $X_0 = 1$  olan bir markov zinciri için  $k$ .ncı duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeni  $T$  olarak adlandıralım.

$$T = \inf \{n \geq 0 | X_n = k\}$$

olarak ifade edilebilir. Eğer yukarıdaki şartı sağlayan bir  $n$  tamsayı değeri bulunamıyorsa  $T = \infty$  olarak tanımlayabiliriz.

$k$ .ncı duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeni olarak ifade tanımladığımız  $T$ 'nin dağılımını ise

$$\Pr(t; P) = \Pr(T \leq t | X_0 = 1, P) \quad t \in \{1, 2, \dots\}$$

olarak ifade edebiliriz.

Geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisi olan  $\hat{P}_n = (\hat{p}_{ij})$  matrisinin değişimsiz (invariant) olması nedeniyle,  $k$ .ncı duruma ilk uğrama zamanının dağılımı  $\Pr(t; P)$ 'yi tahmin etmek için kullanabiliriz. Bu noktada  $\Pr(t; \hat{P}_n)$  ile yapılan tahminin ne kadar iyi bir tahmin olacağı sorusu akla gelecektir. Bu sorunun cevabını bulabilmek için

$$\sqrt{n} \left( \Pr(t; \hat{P}_n) - \Pr(t; P) \right), t \geq 1 \quad (3.3)$$

ifadesinin nasıl dağıldığına bakmamız gerekmektedir. (3.3) nolu ifadede yer alan dağılımın elde edilmesi  $P$  geçiş matrisinin bilinmesi durumunda Monte Carlo metodu kullanılarak mümkün olabilmektedir (Kulperger and Rao 1989).

Eğer  $P$  geçiş matrisi bilinmiyorsa (3.3)'ün nasıl dağıldığını bulabilmek için geçiş matrisi  $\hat{P}_n$  olan bir markov zincirinden gözlemlenen örneklemde seçilen bir alt örneklemin geçiş matrisini  $\hat{Q}_n$  olarak adlandıralım ve  $Q = \hat{P}_n$  geçiş matrisini kullanarak elde edeceğimiz

$$G_n(t; Q) = \sqrt{n} \left( \Pr(t; \hat{Q}_n) - \Pr(t; Q) \right) \quad (3.4)$$

dağılımı ile yaklaşımda bulunulabilir (Kulperger and Rao 1989). (3.4) nolu ifadede yer alan dağılımın elde edilmesi  $Q = \hat{P}_n$  geçiş matrisinin bilinmesinden dolayı Monte Carlo metodu kullanılarak mümkün olabilmektedir.

İşte bu noktada (3.3)'de ifade edilen dağılıma (3.4)'de ifade edilen dağılım yardımıyla nasıl yaklaşımda bulunacağı sorusunun cevabı bootstrap yöntemi olarak verilecektir. Tezin bundan sonraki bölümünde bootstrap yöntemi kullanılarak yaklaşımın nasıl yapılacağı hususuna değinilecektir.

$A = (a_{ij})$  bir kare matris olmak üzere;  $\| \cdot \|$  normunu

$$\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}| \quad (3.5)$$

olarak tanımlayalım.  $S = \{1, 2, \dots, k\}, k \geq 2$  durum uzayına ve  $P$  geçiş matrisine sahip markov zinciri için

$$\|P\| = k$$

olacağı açıktır. Amacımız (3.5) nolu ifadede tanımı verilen norm tarafından oluşturulan topolojide (3.4) nolu dağılımın uygun süreklilik özelliklerine sahip olduğunu göstermek olacaktır. Ancak sözkonusu dağılımın bu topolojide sahip olduğu süreklilik özelliklerini doğrudan olarak incelemek yerine markov zincirinin geçiş matrisinde bir değişiklik yaparak elde edeceğimiz yeni geçiş matrisi yardımıyla süreklilik özellikleri incelenecektir

$A = A(P)$  matrisi  $P$  geçiş matrisinin son satırı olan  $k$ .nıncı satırını  $(0, \dots, 0, 1)$  olarak değiştirdiğimizde elde edeceğimiz geçiş matrisinin gösterimi olsun.  $A(P)$  geçiş matrisine sahip bir markov zincirinde  $k$ .nıncı durum soğurucu durum ve diğer durumlar  $\{1, 2, \dots, k-1\}$  ise geçişli durumlar olacaktır.

$x_0 = 1$  verildiğinde  $k \neq 1$  için  $k$ .nıncı duruma ilk uğrama zamanının dağılımı gözlemlendiğinde  $\Pr(T \leq t | X_0 = 1, P) = (A^t(P))_{1,k}$  olacağından  $\hat{A}_n = A(\hat{P}_n)$  olmak üzere

$$D_n(t; P) = \sqrt{n}(\hat{A}_n^t - A^t) \quad (3.6)$$

matris değerli stokastik sürecin süreklilik özelliklerini incelemek (3.4) nolu ifadedeki dağılımın süreklilik özellikleri konusunda fikir verecektir.

Başka bir deyişle  $A^t, t \geq 1$  matris dizisinin  $A$ 'da sürekli olduğu gösterilerek  $\Pr(T \leq t | X_0 = 1, P), t \geq 1$  dağılımının  $P$ 'de sürekli olduğu gösterilecektir (Kulperger and Rao 1989).

(3.3) ve (3.4)'de ifade edilen dağılımların asimptotik olarak yakın olduklarını göstermek için Kulperger and Rao (1989) aşağıdaki teoremleri elde etmişlerdir.

**Teorem 3.4**  $\hat{A}_n = A(\hat{P}_n)$  olmak üzere  $\forall t = 1, 2, \dots$  için varyans kovaryans matrisi  $Z_p^t$   $P$ 'nin bir fonksiyonu olmak üzere;

$$\sqrt{n}(\hat{A}_n^t - A^t) \xrightarrow{D} N_{k^2}(0, Z_p^t)$$

olacaktır.

**Teorem 3.5**  $\tilde{A}_n = A(\hat{Q}_n)$  olmak üzere  $\forall t = 1, 2, \dots$  için varyans kovaryans matrisi  $Z_p^t$  teorem 3.4'de ifade edilen matris olmak üzere; zincirin hemen hemen tüm gözlemleri için

$$\sqrt{n}(\tilde{A}_n^t - \hat{A}_n^t) \xrightarrow{D} N_{k^2}(0, Z_p^t)$$

olacaktır.

Teorem 3.4 ve Teorem 3.5'den anlaşılacağı üzere (3.3)'de ifade edilen örneklemin dağılımına (3.4)'de ifade edilen örneklemin yardımıyla yaklaşımda bulunabileceği görülmektedir. Böylelikle  $k$ .ncı duruma ilk uğrama zamanının dağılımının tahmin edicisinin dağılımına yaklaşımda bulunma probleminde bootstrap yönteminin kullanılabileceği görülmektedir. Bootstrap yönteminin  $k$ .ncı duruma ilk uğrama zamanının dağılımının tahmini probleminde kullanılabilir olmasının detayları aşağıda verilmektedir.

$A = (a_{ij})$  matrisi  $S = \{1, 2, \dots, k\}, k \geq 2$  uzayında tanımlı bir stokastik matris  $k$ .ıncı durum  $S$  durum uzayının tek soğurucu durumu  $J = \{1, 2, \dots, k-1\}$   $\gamma = (0, \dots, 0, 1)$  ve  $B$  satırları  $\gamma$  olan bir matris olmak üzere  $A$  stokastik matrisi tekil durağan dağılıma sahip ve  $A_n = (a_{i,j}^n) \rightarrow B$  olacaktır (Parzen 1962).

**Lemma 3.1**  $c = \min(a_{i,k} : i \in J) > 0$  ve  $d = \max(a_{i,j} : i, j \in J) < 1$  olmak üzere  $A_n = (a_{i,j}^n) \rightarrow B$  olacaktır. Ayrıca

$$(i) \ a_{i,j}^{(n)} \leq (1-c)^n d, j \in J$$

$$(ii) \ 1 - a_{i,k}^{(n)} \leq (1-c)^n (k-1)d$$

olacaktır (Kulperger and Rao 1989).

**İspat.**

(i)  $j \in J = \{1, 2, \dots, k-1\}$  için  $M_j(n) = \max(a_{i,j}^{(n)} : i \in J)$  ve  $i_0 \in J$  olmak üzere  $M_j(n+1) = a_{i_0,j}^{(n+1)}$  olsun.  $k$ . durum  $S = \{1, 2, \dots, k\}$  durum uzayının tek soğurucu durumu olduğundan  $a_{k,j}^{(n)} = 0$  olacaktır. Böylelikle

$$M_j(n+1) = a_{i_0,j}^{(n+1)} = \sum_{l \in J} a_{i_0,l} a_{l,j}^{(n)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_j(n) \sum_{l \in J} a_{i_0,l} && (J = \{1, 2, \dots, k-1\}) \\
&= M_j(n)(1-c) && (c = \min(a_{i,k} : i \in J))
\end{aligned}$$

dir.

$$M_j(n+1) \leq M_j(n)(1-c)$$

olduğundan

$$a_{i,j}^{(n)} \leq M_j(n-1)(1-c) \leq M_j(n-2)(1-c)^2 \leq \dots \leq M_j(0)(1-c)^n = d(1-c)^n$$

dir.

$$(ii) \quad \sum_{j \in S} a_{i,j}^{(n)} = 1 \Rightarrow \sum_{j \in J} a_{i,j}^{(n)} + a_{i,k}^{(n)} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{j \in J} a_{i,j}^{(n)} = 1 - a_{i,k}^{(n)} \leq (k-1)(1-c)^n d$$

dir.

**Lemma 3.2**  $A$  ve  $B$ 'nin  $k \times k$  boyutlu matrisler olduğu farzedilsin.  $t \geq 1$  için

$$A^t - B^t = \sum_{q=0}^{t-1} A^{t-1-q} (A-B) B^q$$

dır (Kulperger and Rao 1989).

**İspat.** Lemmayı ispatlamak için tümevarım yöntemini kullanabiliriz. Bu sebeble ilk olarak  $t=1$  için bu eşitliğin doğru olduğu gösterilecek daha sonra  $t=k-1$  için eşitliğin doğru olduğu farzedilip  $t=k$  için doğruluğu gösterilecektir.

$t = 1$  olduğu durumda

$$\sum_{q=0}^{t-1} A^{t-1-q} (A-B) B^q = \sum_{q=0}^0 A^{1-1-q} (A-B) B^q = A^0 (A-B) B^0 = A-B$$

olacaktır.  $t = 1$  için eşitliğin doğruluğu gösterilmiştir.

$t = k-1$  için

$$A^{k-1} - B^{k-1} = \sum_{q=0}^{k-2} A^{k-2-q} (A-B) B^q$$

olduğu varsayılın.

$t = k$  olsun.

$$\sum_{q=0}^{t-1} A^{t-1-q} (A-B) B^q = \sum_{q=0}^{k-1} A^{k-1-q} (A-B) B^q$$

$$= \sum_{q=0}^{k-2} A^{k-1-q} (A-B) B^q + A^{k-1-(k-1)} (A-B) B^{k-1}$$

$$= A(A^{k-1} - B^{k-1}) + (A-B) B^{k-1} \quad (\text{varsayımdan dolayı})$$

$$= A^k - AB^{k-1} + AB^{k-1} - B^k$$

$$= A^k - B^k$$

olacaktır.

$M_1 : k \times k$  boyutlu  $k$ . satırı  $(0, \dots, 0, 1)$  olan stokastik matrislerin kümesi,

$$M_2 : k \times k \text{ boyutlu } j \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ için } V_{k,j} = 0 \text{ ve } i \neq k \text{ için } \sum_{j=1}^k V_{i,j} = 1$$

koşullarını sağlayan  $V$  stokastik matrislerin kümesi ve

$M_\infty : \|A\|_\infty = \sup_{t \geq 1} \|A_t\|$  normunun tanımlanabildiği  $k \times k$  boyutlu stokastik matrislerin oluşturduğu  $\{A_1, A_2, \dots\}$  dizilerinin kümesi olarak tanımlansın.

**Lemma 3.3**  $H : \text{Tanım kümesi } M_1 \times M_2 \text{ ve değer kümesi } M_\infty \text{ olan}$

$$H(A, V) = H(t, A, V : t \geq 1) \text{ öyleki } H(t, A, V : t \geq 1) = \sum_{q=0}^{t-1} A^{t-1-q} V A^q$$

olmak üzere

1.  $\|H(t, A_1, V) - H(t, A_2, V)\| \leq K_1 \|V\| \|A_1 - A_2\|$  öyleki  $K_1 = K_1(A)$  ve  $A_2$   $A_1$ 'in açık komşuluğundadır.
2.  $\|H(t, A, V_1) - H(t, A, V_2)\| \leq K_2 \|V_1 - V_2\|$  öyleki  $K_2$   $A$ 'ya bağlı sonlu bir sabit olacaktır.

Lemma 3.3 'den dolayı  $H$  fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur (Kulperger and Rao 1989).

Yukarıda tanımladığımız  $H$  fonksiyonu yardımıyla ve  $t \geq 1$  için

$$E(t, A, V, B) = \sum_{q=0}^{t-1} A^{t-1-q} V (B^q - A^q)$$

olmak üzere (3.4) nolu ifadedeki  $D_n(t, P)$  fonksiyonunu

$$D_n(t, P) = H(t, \hat{A}_n, \sqrt{n}(\hat{A}_n - A)) + E(t, \hat{A}_n, \sqrt{n}(\hat{A}_n - A))$$

olarak ifade edebiliriz. Ayrıca  $i, j \in J = \{1, 2, \dots, k-1\}$  için  $Q$  geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin yer aldığı  $\sqrt{n}(\hat{q}_{i,j} - q_{i,j})$  örnekleminin dağılımı,  $1 \leq i, j \leq k$  için ortak dağılımı  $N_{k^2}(0, \Sigma)$  olan  $Z_{i,j}$  rasgele değişkenlerine yakınsadığından dolayı ve  $V_{i,j}(Q) = Z_{i,j}(Q), i, j \in J$  ve  $V_{k,j} = 0, j \in S = \{1, 2, \dots, k\}$  için  $V = V(Q) = (V_{i,j}(Q))$  olmak üzere

$$H(t, A(P), V(Q)) = \sum_{q=0}^{t-1} A^{t-1-q} V A^q, t \geq 1$$

ifadesinin dağılımı  $V$ 'nin dağılımından dolayı  $P$  ve  $Q$  geçiş matrislerine bağlı bir süreç olacaktır (Kulperger and Rao 1989).

#### Lemma 3.4

(i) Bazı  $K_1 = K_1(A)$  sabitleri için

$$\left\| H(t, \hat{A}_n, \sqrt{n}(\hat{A}_n - A)) - H(t, A, \sqrt{n}(\hat{A}_n - A)) \right\| \leq K_1 \left\| \sqrt{n}(\hat{A}_n - A) \right\| \left\| \hat{A}_n - A \right\|$$

dır. Burada  $\hat{A}_n$   $A$ 'nın  $\sqrt{n}$  tutarlı tahmin edicisi olduğu için sınır  $t$ 'de düzgün olarak  $O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  olur.

(ii)  $Q$ 'de düzgün olacak şekilde

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| H(t, A(P), V(Q)) \right\|^p = 0$$

öyleki bazı sabit  $\delta > 0$  için  $c(A(Q)) > \delta > 0$  dır.

(iii)  $Q$ 'de düzgün olacak şekilde

$$\sup_{t \rightarrow \infty} E(t, A(P), V(Q), A(Q)) \xrightarrow{P} 0$$

dır (Kulperger and Rao 1989).

**İspat.**

(i) Lemma 3.1.1.(i)'de verilen eşitsizlikten değerler yerine konulduğunda yukarıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

(ii)  $B = (b_{i,j})$  öyleki  $j \neq k$  için  $b_{i,j} = 0$  ve  $b_{i,k} = 1$  olsun. Lemma 3.1.1.'den dolayı bazı  $K$  sabitleri için

$$\|A^t - B\| \leq K(1 - c(A))^t$$

dır.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \sum_{j \in S} p_{i,j} = 1$$

olduğundan  $VB = 0$  ve  $BV = 0$  olacaktır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \|H(t, A(P), V(Q))\| &\leq \sum_{q=0}^{t-1} \|A^{t-1-q} - B\| \|V\| \|A^q - B\| \\ &\leq K^2 \|V\| t (1 - c(A))^t \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \|E(t, A_0, V, A)\| \leq \sum_{q=0}^{t-1} \|V\| \|A^q - A_0^q\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|V\| \sum_{q=0}^{t-1} \left\{ \|A^q - B\| + \|A_0^q - B\| \right\} \\
&\leq \|V\| K^2 \sum_{q=0}^{t-1} (1 - c(A_0))^{t-1} \\
&\quad + \|V\| K^2 \sum_{q=0}^{t-1} (1 - c(A_0))^{t-1-q} (1 - c(A))^q \\
&\leq \|V\| K^2 (1 - c(A_0))^{t-1} + K^2 \|V\| \sum_{q=0}^{\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor} (1 - c(A_0))^{t-1-q} \\
&\quad + \|V\| K^2 \sum_{q=\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor}^{t-1} (1 - c(A))^q \\
&\leq K_1 \|V\| \left\{ t(1 - c(A_0))^{t-1} + (1 - c(A_0))^{\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor-1} + (1 - c(A))^{\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor-1} \right\}
\end{aligned}$$

dır. Büyük  $t$  değerleri için yukarıda bulunan üst sınır  $t$ 'de göre düzgün olarak küçük olacaktır.  $t = 0, 1, \dots, t_0$  ve  $t_0$  sabiti için ise  $A$  ve  $A_0$  yakın olmak üzere üst sınır küçük olacaktır. Böylelikle (iii) 'de belirtilen yakınsama elde edilmektedir.

**Teorem 3.6**  $E \left( L \left( H \left( A(\hat{Q}_n) \right), \sqrt{n} \left( A(\hat{Q}_n) - A(Q_n) \right); P \right) \right)$  sürekli olduğu küme ve  $\delta_n \rightarrow 0$  şartını sağlayan pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|Q-P\| \leq \delta_n} \left| L \left( H \left( A(\hat{Q}_n) \right), \sqrt{n} \left( A(\hat{Q}_n) - A(Q_n) \right); Q \right) (E) \right.$$

$$\left. - L \left( H \left( A(\hat{P}_n) \right), \sqrt{n} \left( A(\hat{P}_n) - A(P) \right); P \right) (E) \right| = 0$$

dır (Kulperger and Rao 1989).

**İspat.** Lemma 3.2 ve lemma 3.3 ve (3.2.)’deki denklemden dolayı

$$\begin{aligned}
& H\left(t, A(\hat{Q}_n), \sqrt{n}\left(A(\hat{Q}_n) - A(Q_n)\right)\right) \\
&= H\left(t, A(P), \sqrt{n}\left(A(\hat{Q}_n) - A(Q)\right)\right) \\
&+ O_p\left(\left\|A(\hat{Q}_n) - A(Q_n)\right\|\right) + O\left(\left\|A(Q) - A(P)\right\|\right)
\end{aligned}$$

öyleki P’ye yakın komşuluğundaki Q için düzgün olarak  $O_p(.) \rightarrow 0$  olacaktır. Ayrıca P’nin yakın komşuluğundaki Q için düzgün olarak

$$\sqrt{n}\left(A(\hat{Q}_n) - A(Q_n)\right) \xrightarrow{D} Z(Q)$$

olduğundan ve  $\delta_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\|Q - P\| \leq \delta_n$  şartını sağlayan t’lerin sonlu sınıfları için

$$H\left(t, A(P), \sqrt{n}\left(A(\hat{Q}_n) - A(Q_n)\right)\right) \rightarrow H\left(t, A(P), Z(P)\right)$$

dır.

#### 4. UYGULAMA

Çalışmanın bu bölümünde ilk olarak geçiş matrisi bilinen bir markov zincirinden  $n$  adımlık bir gerçekleşmenin simülasyonunun nasıl yapıldığı hususu bir örnekle açıklanmaya çalışılmış, daha sonra geçiş matrisi bilinen bir markov zinciri tanımlanmış ve bu markov zincirinden örneklem çapı 250 olan bir gözlem alınarak bu gözleme dayalı geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisi hesaplanarak elde edilen en çok olabilirlik tahmin edicisi yardımıyla Basawa *et al.* (1990)'nin önerdiği koşullu bootstrap tekniği ile klasik bootstrap tekniği kullanılarak markov zincirin geçiş matrisinin bootstrap tahminleri yapılmıştır. Bundan sonra, 500 adet simülasyon yapılarak tanımladığımız markov zinciri için 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımı klasik bootstrap yöntemine göre elde edilmiştir. Elde edilen dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 4.1' de verilmiştir

Ayrıca 2004 yılına ait İMKB 100 endeksi'nin logaritmik getirileri hesap edilerek elde edilen getiriler kullanılarak  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  durum uzayına sahip bir markov zinciri olduğu farzedilmiş ve bu zincirde 4.üncü duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımının bootstrap tahmini yapılarak ulaşılan sonuçlara ilişkin grafiklere yer verilmiştir.

##### 4.1. Markov Zincirinden Adım Sayısı $n$ Olan Bir Gerçekleşmesinin Simülasyonu

$\{X_n; n \geq 0\}$  stokastik sürecini  $S = \{1, 2, 3\}$  durum uzayına sahip ve geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.40 & 0.35 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.10 & 0.30 & 0.60 \end{bmatrix}$$

olan bir markov zinciri olduğunu kabul edelim.

$P$  geçiş matrisine sahip bir markov zinciri için  $n=10$  adımlık bir gerçekleşmesinin simülasyonunun nasıl yapılacağı aşağıda açıklanmaktadır. İlk olarak, Düzgün  $(0,1)$  dağılımından gözlenmek istenen adım sayısı kadar rasgele sayılar üretilir. Her adım için

üretilen rasgele sayılar ve bu sayılara karşılık gelecek olan durumlar Çizelge 4.1’de gösterilmektedir.  $P$  geçiş matrisine sahip bir markov zincirinin simülasyonunda kullanılacak fonksiyonları,  $Y_1, Y_2, Y_3$  olarak adlandırılalım,

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq p_{11} \\ 2 & , p_{11} < x \leq p_{11} + p_{12} \\ 3 & , p_{11} + p_{12} < x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 0.25 \\ 2 & , 0.25 < x \leq 0.65 \\ 3 & , 0.65 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$Y_2 = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq p_{21} \\ 2 & , p_{21} < x \leq p_{21} + p_{22} \\ 3 & , p_{21} + p_{22} < x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 0.30 \\ 2 & , 0.30 < x \leq 0.80 \\ 3 & , 0.80 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$Y_3 = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq p_{31} \\ 2 & , p_{31} < x \leq p_{31} + p_{32} \\ 3 & , p_{31} + p_{32} < x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 0.10 \\ 2 & , 0.10 < x \leq 0.65 \\ 3 & , 0.40 < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde olacaktır.

İlk adımın  $X_0 = 1$  olduğunu farzedildiği için zincirin gerçekleşmesinin 1. adımında hangi durumda bulunacağı sorusuna  $Y_1$  fonksiyonu cevap verecektir. 1. adım için üretilen rasgele sayı  $x_1 = 0.47$  olduğundan,  $Y_1$  fonksiyonunda yerine konulduğu takdirde 1. adımda 2. durumda olunacağı görülecektir. Benzer şekilde zincirin gerçekleşmesinin 2. adımında hangi durumda bulunacağı sorusuna bu kez  $Y_2$  fonksiyonu cevap verecektir. 2. adım için üretilen rasgele sayı  $x_1 = 0.72$  olduğundan,  $Y_2$  fonksiyonunda yerine konulduğu takdirde 2. adımda 2. durumda olunacağı

görülecektir. Bu şekilde arzu edilen adım sayısı kadar P geçiş matrisine sahip markov zincirinden bir gerçekleşme elde edilebilir.

**Çizelge 4.1** Markov zincirinden  $n = 10$  adım sayısına sahip bir gerçekleşmesi

| ADIM | ÜRETİLEN RASGELE SAYILAR | GÖZLENEN MARKOV ZİNCİRİ | KULLANILACAK FONKSİYON |
|------|--------------------------|-------------------------|------------------------|
| 1    | 0.47                     | 2                       | $Y_1$                  |
| 2    | 0.72                     | 2                       | $Y_2$                  |
| 3    | 0.25                     | 1                       | $Y_2$                  |
| 4    | 0.91                     | 3                       | $Y_1$                  |
| 5    | 0.50                     | 3                       | $Y_3$                  |
| 6    | 0.88                     | 3                       | $Y_3$                  |
| 7    | 0.07                     | 1                       | $Y_3$                  |
| 8    | 0.91                     | 3                       | $Y_1$                  |
| 9    | 0.62                     | 3                       | $Y_3$                  |
| 10   | 0.64                     | 3                       | $Y_3$                  |

Ayrıca, Çizelge 4.1’de her adım için kullanılacak fonksiyon ve  $n = 10$  adımlık bir simülasyon yapılarak elde edilen markov zincirinin bir gerçekleşmesi verilmiştir.

#### 4.2. Markov Zincirinde Bootstrap Yöntemine İlişkin Uygulamalar

$\{X_n; n \geq 0\}$  stokastik sürecini  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  durum uzayına sahip ve geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

olan bir markov zinciri olduğunu kabul edelim. Bu markov zincirinden  $X_0 = 1$  olduğu farz edilerek yapılan simülasyon sonucunda  $n = 250$  adım sayısına sahip bir örnekleme aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

**Çizelge 4.2** Markov zincirinin  $n = 250$  adım sayısına sahip bir gerçekleşmesi

---

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 |   |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 4 | 3 | 3 | 4 | 3 | 1 | 4 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 4 |   |   |   |   |   |   |

---

Yukarıda elde edilen veri setine ait  $P$  geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisi,  $\hat{P}_n$ ,

$$\hat{P}_n = \begin{bmatrix} 0.1163 & 0.3488 & 0.3023 & 0.2326 \\ 0.2576 & 0.1970 & 0.4091 & 0.1364 \\ 0.1739 & 0.3043 & 0.3152 & 0.2065 \\ 0.0851 & 0.2128 & 0.5106 & 0.1915 \end{bmatrix}$$

olacaktır.

Yukarıdaki veri setine Basawa *et al.* (1990)'nin önerdiği koşullu bootstrap tekniği uygulandığında elde edilen geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin bootstrap tahmini  $\hat{Q}_n$  ise

$$\hat{Q}_n = \begin{bmatrix} 0.1404 & 0.3509 & 0.3333 & 0.1754 \\ 0.2564 & 0.2051 & 0.3846 & 0.1538 \\ 0.2208 & 0.2857 & 0.2857 & 0.2078 \\ 0.0811 & 0.2162 & 0.5135 & 0.1892 \end{bmatrix}$$

olacaktır.

Klasik bootstrap tekniği uygulandığında elde edilen geçiş matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin bootstrap tahmini  $\hat{Q}_n$  ise

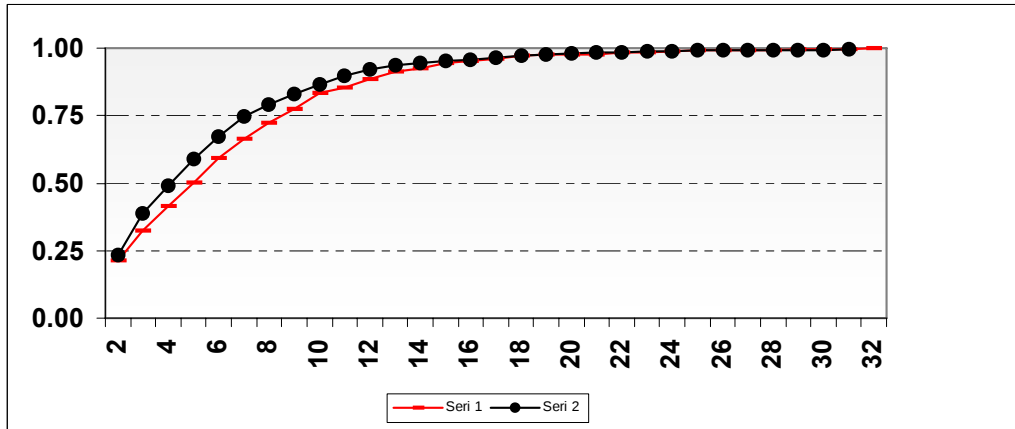
$$\hat{Q}_n = \begin{bmatrix} 0.1220 & 0.3171 & 0.3171 & 0.2439 \\ 0.2113 & 0.2394 & 0.4225 & 0.1268 \\ 0.1720 & 0.3226 & 0.3118 & 0.1935 \\ 0.0930 & 0.2558 & 0.4884 & 0.1628 \end{bmatrix}$$

olacaktır.

$S = \{1, 2, 3, 4\}$  olduğundan 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeni olarak tanımladığımız  $T$  rasgele değişkeninin dağılımı

$$\Pr(t; P) = \Pr(T \leq t | X_0 = 1, P) \quad t \in \{1, 2, \dots\}$$

fonksiyonunun tahmini probleminde klasik bootstrap metodu uygulandığı takdirde elde edilecek dağılım fonksiyonunun  $\hat{P}_n$  ve  $\hat{Q}_n$  geçiş matrislerine göre grafikleri sırasıyla seri 2 ve seri 1 olmak üzere Şekil 4.1'deki gibi olacaktır.



**Şekil 4.1** 4.duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımı

Çizelge 4.3'de verilen İMKB 100 endeksinin 2004 yılına ait verileri kullanılarak Çizelge 4.4'de verilen logaritmik getiriler hesap edilmiştir. Tüm veriler TCMB'den alınmıştır. Elde edilen getiriler kullanılarak  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  durum uzayına sahip bir markov zinciri, logaritmik getiri  $< -\%2$  ise 1.durum,  $-\%2 \leq \text{logaritmik getiri} < \%0$  ise

2. durum,  $0\% \leq \text{logaritmik getiri} < 2\%$  ise 3.durum,  $\text{logaritmik getiri} > 2\%$  ise 4.durumda olduğu varsayılarak tanımlanmıştır.

Hisse senetlerinin markov sürecine uygunluğu hisse senedi piyasasında etkin pazar kuramının zayıf şekli geçerli ise söz konusudur. Bu durumda yani hisse senedi piyasası zayıf formda ise geçmiş zaman aralıklarında fiyat hareketleri belirli bir olasılıkla mevcut andaki fiyatlara; mevcut andaki fiyatlar ise gelecek periyotlardaki fiyatlara yansiyacaktır. Hisse senedi piyasasındaki rekeabet hisse senedi fiyatlarının markov sürecine uyduğunu doğrulamaktadır (Alpan vd 2001).

İMKB 100 endeksinin 2004 yılı logaritmik getiri değerleri kullanılarak elde edilen durumlar çizelge 4.5’de verilmiştir. 2004 yılına ait İMKB 100 endeksi verileri kullanılarak tanımlanan markov zincirinin geçiş matrisi

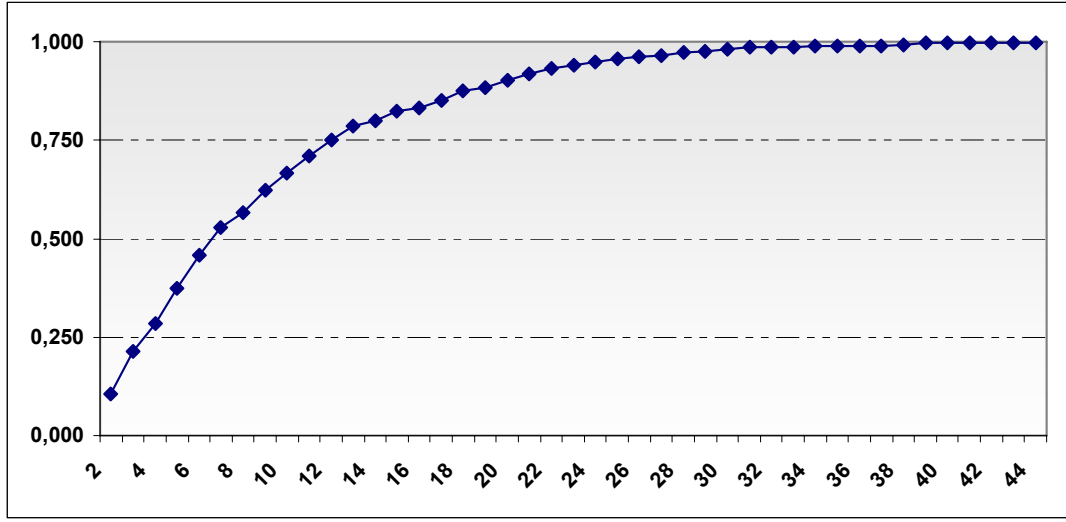
$$Q = \begin{bmatrix} 0.1034 & 0.3793 & 0.3793 & 0.1379 \\ 0.1000 & 0.3125 & 0.4750 & 0.1125 \\ 0.1171 & 0.3153 & 0.4505 & 0.1171 \\ 0.1333 & 0.3000 & 0.4000 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

olarak hesap edilmiştir.

İMKB 100 endeksinin değerlerinden oluşturulan markov zincirinde 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeni olan  $T$  rasgele değişkeninin dağılımı

$$\Pr(t; P) = \Pr(T \leq t | X_0 = 1, P) \quad t \in \{1, 2, \dots\}$$

fonksiyonunun tahmini probleminde klasik bootstrap metodu uygulandığı takdirde elde edilecek dağılım fonksiyonun grafiği Şekil 4.2’deki gibi olacaktır.



**Şekil 4.2** IMKB 100 verileri kullanıldığında 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımı

**Çizelge 4.3 İMKB 100 endeksinin 2004 yılına ait değerleri**

| SIRA NO | TARİH      | İMKB Bil.Endk. | SIRA NO | TARİH      | İMKB Bil.Endk. | SIRA NO | TARİH      | İMKB Bil.Endk. |
|---------|------------|----------------|---------|------------|----------------|---------|------------|----------------|
| 1       | 02.01.2004 | 19148          | 43      | 08.03.2004 | 19495          | 85      | 06.05.2004 | 17624          |
| 2       | 05.01.2004 | 19697          | 44      | 09.03.2004 | 19488          | 86      | 07.05.2004 | 17002          |
| 3       | 06.01.2004 | 19014          | 45      | 10.03.2004 | 19799          | 87      | 10.05.2004 | 16808          |
| 4       | 07.01.2004 | 19383          | 46      | 11.03.2004 | 19381          | 88      | 11.05.2004 | 17103          |
| 5       | 08.01.2004 | 19405          | 47      | 12.03.2004 | 19364          | 89      | 12.05.2004 | 17145          |
| 6       | 09.01.2004 | 19926          | 48      | 15.03.2004 | 19527          | 90      | 13.05.2004 | 16646          |
| 7       | 12.01.2004 | 19559          | 49      | 16.03.2004 | 19322          | 91      | 14.05.2004 | 16531          |
| 8       | 13.01.2004 | 19460          | 50      | 17.03.2004 | 19295          | 92      | 17.05.2004 | 15922          |
| 9       | 14.01.2004 | 18819          | 51      | 18.03.2004 | 19611          | 93      | 18.05.2004 | 16124          |
| 10      | 15.01.2004 | 18952          | 52      | 19.03.2004 | 20024          | 94      | 19.05.2004 | 16334          |
| 11      | 16.01.2004 | 18301          | 53      | 22.03.2004 | 20167          | 95      | 20.05.2004 | 16334          |
| 12      | 19.01.2004 | 17789          | 54      | 23.03.2004 | 20186          | 96      | 21.05.2004 | 16629          |
| 13      | 20.01.2004 | 18833          | 55      | 24.03.2004 | 20348          | 97      | 24.05.2004 | 17167          |
| 14      | 21.01.2004 | 18900          | 56      | 25.03.2004 | 20473          | 98      | 25.05.2004 | 16791          |
| 15      | 22.01.2004 | 18518          | 57      | 26.03.2004 | 20836          | 99      | 26.05.2004 | 17235          |
| 16      | 26.01.2004 | 18357          | 58      | 29.03.2004 | 20887          | 100     | 27.05.2004 | 17164          |
| 17      | 27.01.2004 | 17900          | 59      | 30.03.2004 | 20031          | 101     | 28.05.2004 | 17328          |
| 18      | 28.01.2004 | 17902          | 60      | 31.03.2004 | 20191          | 102     | 31.05.2004 | 17081          |
| 19      | 29.01.2004 | 17282          | 61      | 01.04.2004 | 20322          | 103     | 01.06.2004 | 16767          |
| 20      | 30.01.2004 | 17259          | 62      | 02.04.2004 | 20485          | 104     | 03.06.2004 | 17044          |
| 21      | 05.02.2004 | 17034          | 63      | 05.04.2004 | 20331          | 105     | 04.06.2004 | 17708          |
| 22      | 06.02.2004 | 16966          | 64      | 06.04.2004 | 20273          | 106     | 07.06.2004 | 18020          |
| 23      | 09.02.2004 | 17641          | 65      | 07.04.2004 | 20040          | 107     | 08.06.2004 | 17604          |
| 24      | 10.02.2004 | 17419          | 66      | 08.04.2004 | 19420          | 108     | 09.06.2004 | 17616          |
| 25      | 11.02.2004 | 18000          | 67      | 09.04.2004 | 19505          | 109     | 10.06.2004 | 17786          |
| 26      | 12.02.2004 | 18886          | 68      | 12.04.2004 | 19260          | 110     | 11.06.2004 | 17664          |
| 27      | 13.02.2004 | 19000          | 69      | 13.04.2004 | 19104          | 111     | 14.06.2004 | 17080          |
| 28      | 16.02.2004 | 19324          | 70      | 14.04.2004 | 18678          | 112     | 15.06.2004 | 17230          |
| 29      | 17.02.2004 | 19010          | 71      | 15.04.2004 | 18688          | 113     | 16.06.2004 | 17099          |
| 30      | 18.02.2004 | 19479          | 72      | 16.04.2004 | 19269          | 114     | 17.06.2004 | 16901          |
| 31      | 19.02.2004 | 18606          | 73      | 19.04.2004 | 19936          | 115     | 18.06.2004 | 16964          |
| 32      | 20.02.2004 | 18604          | 74      | 20.04.2004 | 19528          | 116     | 21.06.2004 | 16785          |
| 33      | 23.02.2004 | 18284          | 75      | 21.04.2004 | 19270          | 117     | 22.06.2004 | 16753          |
| 34      | 24.02.2004 | 18498          | 76      | 22.04.2004 | 19432          | 118     | 23.06.2004 | 16820          |
| 35      | 25.02.2004 | 18707          | 77      | 26.04.2004 | 18586          | 119     | 24.06.2004 | 16889          |
| 36      | 26.02.2004 | 18772          | 78      | 27.04.2004 | 18217          | 120     | 25.06.2004 | 17355          |
| 37      | 27.02.2004 | 18889          | 79      | 28.04.2004 | 18230          | 121     | 28.06.2004 | 17710          |
| 38      | 01.03.2004 | 18786          | 80      | 29.04.2004 | 17738          | 122     | 29.06.2004 | 17736          |
| 39      | 02.03.2004 | 19357          | 81      | 30.04.2004 | 18023          | 123     | 30.06.2004 | 17968          |
| 40      | 03.03.2004 | 19172          | 82      | 03.05.2004 | 17678          | 124     | 01.07.2004 | 18290          |
| 41      | 04.03.2004 | 19015          | 83      | 04.05.2004 | 18245          | 125     | 02.07.2004 | 18416          |
| 42      | 05.03.2004 | 19166          | 84      | 05.05.2004 | 18272          | 126     | 05.07.2004 | 18555          |

**Çizelge 4.3 İMKB 100 endeksinin 2004 yılına ait değerleri (devam)**

| SIRA NO | TARİH      | İMKB Bil.Endk. | SIRA NO | TARİH      | İMKB Bil.Endk | SIRA NO | TARİH      | İMKB Bil.Endk |
|---------|------------|----------------|---------|------------|---------------|---------|------------|---------------|
| 127     | 06.07.2004 | 18238          | 169     | 03.09.2004 | 20775         | 211     | 03.11.2004 | 23438         |
| 128     | 07.07.2004 | 18297          | 170     | 06.09.2004 | 20852         | 212     | 04.11.2004 | 23006         |
| 129     | 08.07.2004 | 18077          | 171     | 07.09.2004 | 21119         | 213     | 05.11.2004 | 23216         |
| 130     | 09.07.2004 | 18327          | 172     | 08.09.2004 | 21468         | 214     | 08.11.2004 | 22616         |
| 131     | 12.07.2004 | 18368          | 173     | 09.09.2004 | 21398         | 215     | 09.11.2004 | 22544         |
| 132     | 13.07.2004 | 18493          | 174     | 10.09.2004 | 21004         | 216     | 10.11.2004 | 22618         |
| 133     | 14.07.2004 | 18635          | 175     | 13.09.2004 | 21060         | 217     | 11.11.2004 | 22169         |
| 134     | 15.07.2004 | 18966          | 176     | 14.09.2004 | 21705         | 218     | 12.11.2004 | 22105         |
| 135     | 16.07.2004 | 19157          | 177     | 15.09.2004 | 21616         | 219     | 17.11.2004 | 22566         |
| 136     | 19.07.2004 | 18945          | 178     | 16.09.2004 | 21705         | 220     | 18.11.2004 | 23133         |
| 137     | 20.07.2004 | 18881          | 179     | 17.09.2004 | 20833         | 221     | 19.11.2004 | 23177         |
| 138     | 21.07.2004 | 18780          | 180     | 20.09.2004 | 20373         | 222     | 22.11.2004 | 22931         |
| 139     | 22.07.2004 | 18629          | 181     | 21.09.2004 | 21193         | 223     | 23.11.2004 | 23472         |
| 140     | 23.07.2004 | 18904          | 182     | 22.09.2004 | 21491         | 224     | 24.11.2004 | 23516         |
| 141     | 26.07.2004 | 18645          | 183     | 23.09.2004 | 22277         | 225     | 25.11.2004 | 23464         |
| 142     | 27.07.2004 | 18775          | 184     | 24.09.2004 | 22307         | 226     | 26.11.2004 | 23293         |
| 143     | 28.07.2004 | 19019          | 185     | 27.09.2004 | 22083         | 227     | 29.11.2004 | 22799         |
| 144     | 29.07.2004 | 19111          | 186     | 28.09.2004 | 22294         | 228     | 30.11.2004 | 22486         |
| 145     | 30.07.2004 | 19381          | 187     | 29.09.2004 | 22220         | 229     | 01.12.2004 | 22561         |
| 146     | 02.08.2004 | 19698          | 188     | 30.09.2004 | 21954         | 230     | 02.12.2004 | 23150         |
| 147     | 03.08.2004 | 19427          | 189     | 01.10.2004 | 21723         | 231     | 03.12.2004 | 23008         |
| 148     | 04.08.2004 | 19049          | 190     | 04.10.2004 | 21988         | 232     | 06.12.2004 | 23050         |
| 149     | 05.08.2004 | 19344          | 191     | 05.10.2004 | 21613         | 233     | 07.12.2004 | 23076         |
| 150     | 06.08.2004 | 19188          | 192     | 06.10.2004 | 22287         | 234     | 08.12.2004 | 22625         |
| 151     | 09.08.2004 | 19248          | 193     | 07.10.2004 | 22432         | 235     | 09.12.2004 | 22680         |
| 152     | 10.08.2004 | 19393          | 194     | 08.10.2004 | 22951         | 236     | 10.12.2004 | 22944         |
| 153     | 11.08.2004 | 18909          | 195     | 11.10.2004 | 22787         | 237     | 13.12.2004 | 23635         |
| 154     | 12.08.2004 | 18775          | 196     | 12.10.2004 | 22290         | 238     | 14.12.2004 | 23418         |
| 155     | 13.08.2004 | 18826          | 197     | 13.10.2004 | 22630         | 239     | 15.12.2004 | 23290         |
| 156     | 16.08.2004 | 18832          | 198     | 14.10.2004 | 22319         | 240     | 16.12.2004 | 23935         |
| 157     | 17.08.2004 | 19460          | 199     | 15.10.2004 | 22477         | 241     | 17.12.2004 | 24361         |
| 158     | 18.08.2004 | 19268          | 200     | 18.10.2004 | 22334         | 242     | 20.12.2004 | 24341         |
| 159     | 19.08.2004 | 19188          | 201     | 19.10.2004 | 22551         | 243     | 21.12.2004 | 24045         |
| 160     | 20.08.2004 | 19286          | 202     | 20.10.2004 | 22221         | 244     | 22.12.2004 | 24525         |
| 161     | 23.08.2004 | 19364          | 203     | 21.10.2004 | 22202         | 245     | 23.12.2004 | 24431         |
| 162     | 24.08.2004 | 19664          | 204     | 22.10.2004 | 22244         | 246     | 24.12.2004 | 24538         |
| 163     | 25.08.2004 | 19558          | 205     | 25.10.2004 | 21908         | 247     | 27.12.2004 | 24591         |
| 164     | 26.08.2004 | 19572          | 206     | 26.10.2004 | 22143         | 248     | 28.12.2004 | 24936         |
| 165     | 27.08.2004 | 19855          | 207     | 27.10.2004 | 22566         | 249     | 29.12.2004 | 24972         |
| 166     | 31.08.2004 | 20218          | 208     | 28.10.2004 | 22890         |         |            |               |
| 167     | 01.09.2004 | 20512          | 209     | 01.11.2004 | 22858         |         |            |               |
| 168     | 02.09.2004 | 20526          | 210     | 02.11.2004 | 23216         |         |            |               |

**Çizelge 4.4 İMKB 100 endeksinin 2004 yılına ait logaritmik getiri değerleri**

| SIRA NO | TARİH      | LOG GETİRİ | SIRA NO | TARİH      | LOG GETİRİ | SIRA NO | TARİH      | LOG GETİRİ |
|---------|------------|------------|---------|------------|------------|---------|------------|------------|
| 1       | 02.01.2004 | 2.77%      | 43      | 08.03.2004 | 1.71%      | 85      | 06.05.2004 | -3.61%     |
| 2       | 05.01.2004 | 2.83%      | 44      | 09.03.2004 | -0.04%     | 86      | 07.05.2004 | -3.59%     |
| 3       | 06.01.2004 | -3.53%     | 45      | 10.03.2004 | 1.58%      | 87      | 10.05.2004 | -1.15%     |
| 4       | 07.01.2004 | 1.92%      | 46      | 11.03.2004 | -2.13%     | 88      | 11.05.2004 | 1.74%      |
| 5       | 08.01.2004 | 0.11%      | 47      | 12.03.2004 | -0.09%     | 89      | 12.05.2004 | 0.25%      |
| 6       | 09.01.2004 | 2.65%      | 48      | 15.03.2004 | 0.83%      | 90      | 13.05.2004 | -2.95%     |
| 7       | 12.01.2004 | -1.86%     | 49      | 16.03.2004 | -1.06%     | 91      | 14.05.2004 | -0.69%     |
| 8       | 13.01.2004 | -0.51%     | 50      | 17.03.2004 | -0.14%     | 92      | 17.05.2004 | -3.75%     |
| 9       | 14.01.2004 | -3.35%     | 51      | 18.03.2004 | 1.63%      | 93      | 18.05.2004 | 1.26%      |
| 10      | 15.01.2004 | 0.71%      | 52      | 19.03.2004 | 2.08%      | 94      | 19.05.2004 | 1.29%      |
| 11      | 16.01.2004 | -3.50%     | 53      | 22.03.2004 | 0.71%      | 95      | 20.05.2004 | 0.00%      |
| 12      | 19.01.2004 | -2.84%     | 54      | 23.03.2004 | 0.09%      | 96      | 21.05.2004 | 1.79%      |
| 13      | 20.01.2004 | 5.70%      | 55      | 24.03.2004 | 0.80%      | 97      | 24.05.2004 | 3.19%      |
| 14      | 21.01.2004 | 0.36%      | 56      | 25.03.2004 | 0.61%      | 98      | 25.05.2004 | -2.22%     |
| 15      | 22.01.2004 | -2.04%     | 57      | 26.03.2004 | 1.76%      | 99      | 26.05.2004 | 2.61%      |
| 16      | 26.01.2004 | -0.88%     | 58      | 29.03.2004 | 0.24%      | 100     | 27.05.2004 | -0.42%     |
| 17      | 27.01.2004 | -2.52%     | 59      | 30.03.2004 | -4.19%     | 101     | 28.05.2004 | 0.95%      |
| 18      | 28.01.2004 | 0.01%      | 60      | 31.03.2004 | 0.80%      | 102     | 31.05.2004 | -1.43%     |
| 19      | 29.01.2004 | -3.52%     | 61      | 01.04.2004 | 0.65%      | 103     | 01.06.2004 | -1.86%     |
| 20      | 30.01.2004 | -0.13%     | 62      | 02.04.2004 | 0.80%      | 104     | 03.06.2004 | 1.64%      |
| 21      | 05.02.2004 | -1.32%     | 63      | 05.04.2004 | -0.76%     | 105     | 04.06.2004 | 3.82%      |
| 22      | 06.02.2004 | -0.40%     | 64      | 06.04.2004 | -0.29%     | 106     | 07.06.2004 | 1.75%      |
| 23      | 09.02.2004 | 3.90%      | 65      | 07.04.2004 | -1.16%     | 107     | 08.06.2004 | -2.34%     |
| 24      | 10.02.2004 | -1.27%     | 66      | 08.04.2004 | -3.14%     | 108     | 09.06.2004 | 0.07%      |
| 25      | 11.02.2004 | 3.29%      | 67      | 09.04.2004 | 0.44%      | 109     | 10.06.2004 | 0.97%      |
| 26      | 12.02.2004 | 4.80%      | 68      | 12.04.2004 | -1.27%     | 110     | 11.06.2004 | -0.69%     |
| 27      | 13.02.2004 | 0.60%      | 69      | 13.04.2004 | -0.81%     | 111     | 14.06.2004 | -3.37%     |
| 28      | 16.02.2004 | 1.69%      | 70      | 14.04.2004 | -2.26%     | 112     | 15.06.2004 | 0.88%      |
| 29      | 17.02.2004 | -1.64%     | 71      | 15.04.2004 | 0.05%      | 113     | 16.06.2004 | -0.77%     |
| 30      | 18.02.2004 | 2.43%      | 72      | 16.04.2004 | 3.07%      | 114     | 17.06.2004 | -1.16%     |
| 31      | 19.02.2004 | -4.58%     | 73      | 19.04.2004 | 3.40%      | 115     | 18.06.2004 | 0.37%      |
| 32      | 20.02.2004 | -0.01%     | 74      | 20.04.2004 | -2.07%     | 116     | 21.06.2004 | -1.06%     |
| 33      | 23.02.2004 | -1.73%     | 75      | 21.04.2004 | -1.33%     | 117     | 22.06.2004 | -0.19%     |
| 34      | 24.02.2004 | 1.16%      | 76      | 22.04.2004 | 0.83%      | 118     | 23.06.2004 | 0.40%      |
| 35      | 25.02.2004 | 1.13%      | 77      | 26.04.2004 | -4.45%     | 119     | 24.06.2004 | 0.41%      |
| 36      | 26.02.2004 | 0.34%      | 78      | 27.04.2004 | -2.01%     | 120     | 25.06.2004 | 2.73%      |
| 37      | 27.02.2004 | 0.62%      | 79      | 28.04.2004 | 0.07%      | 121     | 28.06.2004 | 2.03%      |
| 38      | 01.03.2004 | -0.55%     | 80      | 29.04.2004 | -2.74%     | 122     | 29.06.2004 | 0.14%      |
| 39      | 02.03.2004 | 2.99%      | 81      | 30.04.2004 | 1.59%      | 123     | 30.06.2004 | 1.30%      |
| 40      | 03.03.2004 | -0.96%     | 82      | 03.05.2004 | -1.93%     | 124     | 01.07.2004 | 1.78%      |
| 41      | 04.03.2004 | -0.82%     | 83      | 04.05.2004 | 3.15%      | 125     | 02.07.2004 | 0.69%      |
| 42      | 05.03.2004 | 0.79%      | 84      | 05.05.2004 | 0.15%      | 126     | 05.07.2004 | 0.75%      |

**Çizelge 4.4 İMKB 100 endeksinin 2004 yılına ait logaritmik getiri değerleri (devam)**

| SIRA NO | TARİH      | LOG GETİRİ | SIRA NO | TARİH      | LOG GETİRİ | SIRA NO | TARİH      | LOG GETİRİ |
|---------|------------|------------|---------|------------|------------|---------|------------|------------|
| 127     | 06.07.2004 | -1.72%     | 169     | 03.09.2004 | 1.21%      | 211     | 03.11.2004 | 0.95%      |
| 128     | 07.07.2004 | 0.32%      | 170     | 06.09.2004 | 0.37%      | 212     | 04.11.2004 | -1.86%     |
| 129     | 08.07.2004 | -1.21%     | 171     | 07.09.2004 | 1.28%      | 213     | 05.11.2004 | 0.90%      |
| 130     | 09.07.2004 | 1.37%      | 172     | 08.09.2004 | 1.64%      | 214     | 08.11.2004 | -2.62%     |
| 131     | 12.07.2004 | 0.23%      | 173     | 09.09.2004 | -0.33%     | 215     | 09.11.2004 | -0.32%     |
| 132     | 13.07.2004 | 0.68%      | 174     | 10.09.2004 | -1.86%     | 216     | 10.11.2004 | 0.33%      |
| 133     | 14.07.2004 | 0.77%      | 175     | 13.09.2004 | 0.27%      | 217     | 11.11.2004 | -2.01%     |
| 134     | 15.07.2004 | 1.76%      | 176     | 14.09.2004 | 3.02%      | 218     | 12.11.2004 | -0.29%     |
| 135     | 16.07.2004 | 1.00%      | 177     | 15.09.2004 | -0.41%     | 219     | 17.11.2004 | 2.07%      |
| 136     | 19.07.2004 | -1.11%     | 178     | 16.09.2004 | 0.41%      | 220     | 18.11.2004 | 2.48%      |
| 137     | 20.07.2004 | -0.34%     | 179     | 17.09.2004 | -4.10%     | 221     | 19.11.2004 | 0.19%      |
| 138     | 21.07.2004 | -0.54%     | 180     | 20.09.2004 | -2.23%     | 222     | 22.11.2004 | -1.06%     |
| 139     | 22.07.2004 | -0.81%     | 181     | 21.09.2004 | 3.94%      | 223     | 23.11.2004 | 2.33%      |
| 140     | 23.07.2004 | 1.47%      | 182     | 22.09.2004 | 1.40%      | 224     | 24.11.2004 | 0.19%      |
| 141     | 26.07.2004 | -1.38%     | 183     | 23.09.2004 | 3.59%      | 225     | 25.11.2004 | -0.22%     |
| 142     | 27.07.2004 | 0.69%      | 184     | 24.09.2004 | 0.14%      | 226     | 26.11.2004 | -0.73%     |
| 143     | 28.07.2004 | 1.29%      | 185     | 27.09.2004 | -1.01%     | 227     | 29.11.2004 | -2.14%     |
| 144     | 29.07.2004 | 0.49%      | 186     | 28.09.2004 | 0.95%      | 228     | 30.11.2004 | -1.38%     |
| 145     | 30.07.2004 | 1.40%      | 187     | 29.09.2004 | -0.33%     | 229     | 01.12.2004 | 0.33%      |
| 146     | 02.08.2004 | 1.62%      | 188     | 30.09.2004 | -1.21%     | 230     | 02.12.2004 | 2.58%      |
| 147     | 03.08.2004 | -1.38%     | 189     | 01.10.2004 | -1.06%     | 231     | 03.12.2004 | -0.62%     |
| 148     | 04.08.2004 | -1.97%     | 190     | 04.10.2004 | 1.21%      | 232     | 06.12.2004 | 0.18%      |
| 149     | 05.08.2004 | 1.54%      | 191     | 05.10.2004 | -1.72%     | 233     | 07.12.2004 | 0.11%      |
| 150     | 06.08.2004 | -0.81%     | 192     | 06.10.2004 | 3.07%      | 234     | 08.12.2004 | -1.97%     |
| 151     | 09.08.2004 | 0.32%      | 193     | 07.10.2004 | 0.65%      | 235     | 09.12.2004 | 0.24%      |
| 152     | 10.08.2004 | 0.75%      | 194     | 08.10.2004 | 2.29%      | 236     | 10.12.2004 | 1.16%      |
| 153     | 11.08.2004 | -2.53%     | 195     | 11.10.2004 | -0.72%     | 237     | 13.12.2004 | 2.97%      |
| 154     | 12.08.2004 | -0.71%     | 196     | 12.10.2004 | -2.21%     | 238     | 14.12.2004 | -0.92%     |
| 155     | 13.08.2004 | 0.27%      | 197     | 13.10.2004 | 1.51%      | 239     | 15.12.2004 | -0.55%     |
| 156     | 16.08.2004 | 0.03%      | 198     | 14.10.2004 | -1.38%     | 240     | 16.12.2004 | 2.73%      |
| 157     | 17.08.2004 | 3.28%      | 199     | 15.10.2004 | 0.71%      | 241     | 17.12.2004 | 1.76%      |
| 158     | 18.08.2004 | -0.99%     | 200     | 18.10.2004 | -0.64%     | 242     | 20.12.2004 | -0.08%     |
| 159     | 19.08.2004 | -0.42%     | 201     | 19.10.2004 | 0.97%      | 243     | 21.12.2004 | -1.23%     |
| 160     | 20.08.2004 | 0.51%      | 202     | 20.10.2004 | -1.47%     | 244     | 22.12.2004 | 1.98%      |
| 161     | 23.08.2004 | 0.40%      | 203     | 21.10.2004 | -0.09%     | 245     | 23.12.2004 | -0.39%     |
| 162     | 24.08.2004 | 1.54%      | 204     | 22.10.2004 | 0.19%      | 246     | 24.12.2004 | 0.44%      |
| 163     | 25.08.2004 | -0.54%     | 205     | 25.10.2004 | -1.52%     | 247     | 27.12.2004 | 0.22%      |
| 164     | 26.08.2004 | 0.07%      | 206     | 26.10.2004 | 1.07%      | 248     | 28.12.2004 | 1.39%      |
| 165     | 27.08.2004 | 1.44%      | 207     | 27.10.2004 | 1.89%      | 249     | 29.12.2004 | 0.14%      |
| 166     | 31.08.2004 | 1.81%      | 208     | 28.10.2004 | 1.43%      |         |            |            |
| 167     | 01.09.2004 | 1.44%      | 209     | 01.11.2004 | -0.14%     |         |            |            |
| 168     | 02.09.2004 | 0.07%      | 210     | 02.11.2004 | 1.55%      |         |            |            |

**Çizelge 4.5 İMKB 100 endeksinin 2004 yılı kodlanmış logaritmik getiri değerleri**

| SIRA NO | TARİH      | DURUM | SIRA NO | TARİH      | DURUM | SIRA NO | TARİH      | DURUM |
|---------|------------|-------|---------|------------|-------|---------|------------|-------|
| 1       | 02.01.2004 | 4     | 43      | 08.03.2004 | 3     | 85      | 06.05.2004 | 1     |
| 2       | 05.01.2004 | 4     | 44      | 09.03.2004 | 2     | 86      | 07.05.2004 | 1     |
| 3       | 06.01.2004 | 1     | 45      | 10.03.2004 | 3     | 87      | 10.05.2004 | 2     |
| 4       | 07.01.2004 | 3     | 46      | 11.03.2004 | 1     | 88      | 11.05.2004 | 3     |
| 5       | 08.01.2004 | 3     | 47      | 12.03.2004 | 2     | 89      | 12.05.2004 | 3     |
| 6       | 09.01.2004 | 4     | 48      | 15.03.2004 | 3     | 90      | 13.05.2004 | 1     |
| 7       | 12.01.2004 | 2     | 49      | 16.03.2004 | 2     | 91      | 14.05.2004 | 2     |
| 8       | 13.01.2004 | 2     | 50      | 17.03.2004 | 2     | 92      | 17.05.2004 | 1     |
| 9       | 14.01.2004 | 1     | 51      | 18.03.2004 | 3     | 93      | 18.05.2004 | 3     |
| 10      | 15.01.2004 | 3     | 52      | 19.03.2004 | 4     | 94      | 19.05.2004 | 3     |
| 11      | 16.01.2004 | 1     | 53      | 22.03.2004 | 3     | 95      | 20.05.2004 | 2     |
| 12      | 19.01.2004 | 1     | 54      | 23.03.2004 | 3     | 96      | 21.05.2004 | 3     |
| 13      | 20.01.2004 | 4     | 55      | 24.03.2004 | 3     | 97      | 24.05.2004 | 4     |
| 14      | 21.01.2004 | 3     | 56      | 25.03.2004 | 3     | 98      | 25.05.2004 | 1     |
| 15      | 22.01.2004 | 1     | 57      | 26.03.2004 | 3     | 99      | 26.05.2004 | 4     |
| 16      | 26.01.2004 | 2     | 58      | 29.03.2004 | 3     | 100     | 27.05.2004 | 2     |
| 17      | 27.01.2004 | 1     | 59      | 30.03.2004 | 1     | 101     | 28.05.2004 | 3     |
| 18      | 28.01.2004 | 3     | 60      | 31.03.2004 | 3     | 102     | 31.05.2004 | 2     |
| 19      | 29.01.2004 | 1     | 61      | 01.04.2004 | 3     | 103     | 01.06.2004 | 2     |
| 20      | 30.01.2004 | 2     | 62      | 02.04.2004 | 3     | 104     | 03.06.2004 | 3     |
| 21      | 05.02.2004 | 2     | 63      | 05.04.2004 | 2     | 105     | 04.06.2004 | 4     |
| 22      | 06.02.2004 | 2     | 64      | 06.04.2004 | 2     | 106     | 07.06.2004 | 3     |
| 23      | 09.02.2004 | 4     | 65      | 07.04.2004 | 2     | 107     | 08.06.2004 | 1     |
| 24      | 10.02.2004 | 2     | 66      | 08.04.2004 | 1     | 108     | 09.06.2004 | 3     |
| 25      | 11.02.2004 | 4     | 67      | 09.04.2004 | 3     | 109     | 10.06.2004 | 3     |
| 26      | 12.02.2004 | 4     | 68      | 12.04.2004 | 2     | 110     | 11.06.2004 | 2     |
| 27      | 13.02.2004 | 3     | 69      | 13.04.2004 | 2     | 111     | 14.06.2004 | 1     |
| 28      | 16.02.2004 | 3     | 70      | 14.04.2004 | 1     | 112     | 15.06.2004 | 3     |
| 29      | 17.02.2004 | 2     | 71      | 15.04.2004 | 3     | 113     | 16.06.2004 | 2     |
| 30      | 18.02.2004 | 4     | 72      | 16.04.2004 | 4     | 114     | 17.06.2004 | 2     |
| 31      | 19.02.2004 | 1     | 73      | 19.04.2004 | 4     | 115     | 18.06.2004 | 3     |
| 32      | 20.02.2004 | 2     | 74      | 20.04.2004 | 1     | 116     | 21.06.2004 | 2     |
| 33      | 23.02.2004 | 2     | 75      | 21.04.2004 | 2     | 117     | 22.06.2004 | 2     |
| 34      | 24.02.2004 | 3     | 76      | 22.04.2004 | 3     | 118     | 23.06.2004 | 3     |
| 35      | 25.02.2004 | 3     | 77      | 26.04.2004 | 1     | 119     | 24.06.2004 | 3     |
| 36      | 26.02.2004 | 3     | 78      | 27.04.2004 | 1     | 120     | 25.06.2004 | 4     |
| 37      | 27.02.2004 | 3     | 79      | 28.04.2004 | 3     | 121     | 28.06.2004 | 4     |
| 38      | 01.03.2004 | 2     | 80      | 29.04.2004 | 1     | 122     | 29.06.2004 | 3     |
| 39      | 02.03.2004 | 4     | 81      | 30.04.2004 | 3     | 123     | 30.06.2004 | 3     |
| 40      | 03.03.2004 | 2     | 82      | 03.05.2004 | 2     | 124     | 01.07.2004 | 3     |
| 41      | 04.03.2004 | 2     | 83      | 04.05.2004 | 4     | 125     | 02.07.2004 | 3     |
| 42      | 05.03.2004 | 3     | 84      | 05.05.2004 | 3     | 126     | 05.07.2004 | 3     |

**Çizelge 4.5** İMKB 100 endeksinin 2004 yılı kodlanmış logaritmik getiri değerleri (devam)

| SIRA NO | TARİH      | DURUM | SIRA NO | TARİH      | DURUM | SIRA NO | TARİH      | DURUM |
|---------|------------|-------|---------|------------|-------|---------|------------|-------|
| 127     | 06.07.2004 | 2     | 169     | 03.09.2004 | 3     | 211     | 03.11.2004 | 3     |
| 128     | 07.07.2004 | 3     | 170     | 06.09.2004 | 3     | 212     | 04.11.2004 | 2     |
| 129     | 08.07.2004 | 2     | 171     | 07.09.2004 | 3     | 213     | 05.11.2004 | 3     |
| 130     | 09.07.2004 | 3     | 172     | 08.09.2004 | 3     | 214     | 08.11.2004 | 1     |
| 131     | 12.07.2004 | 3     | 173     | 09.09.2004 | 2     | 215     | 09.11.2004 | 2     |
| 132     | 13.07.2004 | 3     | 174     | 10.09.2004 | 2     | 216     | 10.11.2004 | 3     |
| 133     | 14.07.2004 | 3     | 175     | 13.09.2004 | 3     | 217     | 11.11.2004 | 1     |
| 134     | 15.07.2004 | 3     | 176     | 14.09.2004 | 4     | 218     | 12.11.2004 | 2     |
| 135     | 16.07.2004 | 3     | 177     | 15.09.2004 | 2     | 219     | 17.11.2004 | 4     |
| 136     | 19.07.2004 | 2     | 178     | 16.09.2004 | 3     | 220     | 18.11.2004 | 4     |
| 137     | 20.07.2004 | 2     | 179     | 17.09.2004 | 1     | 221     | 19.11.2004 | 3     |
| 138     | 21.07.2004 | 2     | 180     | 20.09.2004 | 1     | 222     | 22.11.2004 | 2     |
| 139     | 22.07.2004 | 2     | 181     | 21.09.2004 | 4     | 223     | 23.11.2004 | 4     |
| 140     | 23.07.2004 | 3     | 182     | 22.09.2004 | 3     | 224     | 24.11.2004 | 3     |
| 141     | 26.07.2004 | 2     | 183     | 23.09.2004 | 4     | 225     | 25.11.2004 | 2     |
| 142     | 27.07.2004 | 3     | 184     | 24.09.2004 | 3     | 226     | 26.11.2004 | 2     |
| 143     | 28.07.2004 | 3     | 185     | 27.09.2004 | 2     | 227     | 29.11.2004 | 1     |
| 144     | 29.07.2004 | 3     | 186     | 28.09.2004 | 3     | 228     | 30.11.2004 | 2     |
| 145     | 30.07.2004 | 3     | 187     | 29.09.2004 | 2     | 229     | 01.12.2004 | 3     |
| 146     | 02.08.2004 | 3     | 188     | 30.09.2004 | 2     | 230     | 02.12.2004 | 4     |
| 147     | 03.08.2004 | 2     | 189     | 01.10.2004 | 2     | 231     | 03.12.2004 | 2     |
| 148     | 04.08.2004 | 2     | 190     | 04.10.2004 | 3     | 232     | 06.12.2004 | 3     |
| 149     | 05.08.2004 | 3     | 191     | 05.10.2004 | 2     | 233     | 07.12.2004 | 3     |
| 150     | 06.08.2004 | 2     | 192     | 06.10.2004 | 4     | 234     | 08.12.2004 | 2     |
| 151     | 09.08.2004 | 3     | 193     | 07.10.2004 | 3     | 235     | 09.12.2004 | 3     |
| 152     | 10.08.2004 | 3     | 194     | 08.10.2004 | 4     | 236     | 10.12.2004 | 3     |
| 153     | 11.08.2004 | 1     | 195     | 11.10.2004 | 2     | 237     | 13.12.2004 | 4     |
| 154     | 12.08.2004 | 2     | 196     | 12.10.2004 | 1     | 238     | 14.12.2004 | 2     |
| 155     | 13.08.2004 | 3     | 197     | 13.10.2004 | 3     | 239     | 15.12.2004 | 2     |
| 156     | 16.08.2004 | 3     | 198     | 14.10.2004 | 2     | 240     | 16.12.2004 | 4     |
| 157     | 17.08.2004 | 4     | 199     | 15.10.2004 | 3     | 241     | 17.12.2004 | 3     |
| 158     | 18.08.2004 | 2     | 200     | 18.10.2004 | 2     | 242     | 20.12.2004 | 2     |
| 159     | 19.08.2004 | 2     | 201     | 19.10.2004 | 3     | 243     | 21.12.2004 | 2     |
| 160     | 20.08.2004 | 3     | 202     | 20.10.2004 | 2     | 244     | 22.12.2004 | 3     |
| 161     | 23.08.2004 | 3     | 203     | 21.10.2004 | 2     | 245     | 23.12.2004 | 2     |
| 162     | 24.08.2004 | 3     | 204     | 22.10.2004 | 3     | 246     | 24.12.2004 | 3     |
| 163     | 25.08.2004 | 2     | 205     | 25.10.2004 | 2     | 247     | 27.12.2004 | 3     |
| 164     | 26.08.2004 | 3     | 206     | 26.10.2004 | 3     | 248     | 28.12.2004 | 3     |
| 165     | 27.08.2004 | 3     | 207     | 27.10.2004 | 3     | 249     | 29.12.2004 | 3     |
| 166     | 31.08.2004 | 3     | 208     | 28.10.2004 | 3     |         |            |       |
| 167     | 01.09.2004 | 3     | 209     | 01.11.2004 | 2     |         |            |       |
| 168     | 02.09.2004 | 3     | 210     | 02.11.2004 | 3     |         |            |       |

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, rasgele olgunun markov bağımlı olması durumunda bootstrap metodunun geçerliliğinin araştırılması için, önce bazı temel kavramlar irdelenmiş ve markov süreci, geçiş olasılıkları, durumların sınıflandırılması ile klasik bootstrap yöntemi konularına değinilmiştir. Daha sonra sonlu durum uzayına sahip markov zincirlerinde geçiş olasılıklarının tahmin edilmesi için Basawa *et al.* (1990)'nin önerdiği koşullu bootstrap yöntemi ve bu yöntem kullanılarak elde edilen tahmin edicinin asimptotik olarak geçerli olduğu konularına değinilmiştir. Ayrıca, standart bootstrap yöntemi kullanılarak geçiş olasılıklarının tahmin edilmesi probleminde ve ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örneklem dağılımının tahmin edilmesi probleminde Basawa *et al.* (1990) ile Kulperger and Rao (1989)' nun çalışmaları ele alınmıştır. Sonlu durum uzayına sahip ergodik markov zincirinde geçiş olasılıklarının en çok olabilirlik tahmini ve standart bootstrap metodu ile koşullu bootstrap metodu kullanılarak tahminleri örneklendirilmiştir.  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  durum uzayına sahip ergodik markov zinciri için 4. duruma ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örnekleme dağılımı ile bootstrap tahmini grafik üzerinde değerlendirilmiş ve iki dağılımın birbirine yakın oldukları örneklendirilmiştir. Son olarak 2004 yılına ait IMKB 100 endeksi verisi kullanılarak logaritmik getirilerin bir ergodik markov zinciri olduğu kabul edilerek standart bootstrap metodu kullanılarak ilk uğrama zamanı rasgele değişkeninin örnekleme dağılımı elde edilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Alpan, F., Tevfik, G. ve Tevfik T. A. 2001. Excel ile Finans. Literatür Yayınları  
İstanbul.
- Athreya, K.B. and Fuh, C. D. 1992. Bootstrapping Markov Chains. Exploring the  
Limits of Bootstrap John Wiley & Sons Inc. 49-64 New York.
- Basawa, V. I., Green T. A., McCormick W. P. and Taylor R. L. 1990. Asimptotic  
Bootstrap Validity for Finite Markov Chains. Commun. Statist.- Theory Meth.  
19(4);1493-1510.
- Basawa, V. I. and Prakasa-Rao, B. L. S. 1980. Statistical Inference for Stochastic  
Processes. Academic Press London.
- Çınlar, E. 1975. Introduction to Stochastic Processes. Prentice-Hall Inc. New  
Jersey
- Datta, S. and McCormick, W.P. 1992. Bootstrap for a Finite State Markov Chain  
Based on i.i.d. Resampling. Exploring the Limits of Bootstrap John Wiley &  
Sons Inc. 77-97 New York.
- Efron, B. 1982. The Jackknife the Bootstrap and Other Resampling Plans. The Society  
for Industrial and Applied Mathematics England
- Efron, B. and Tibshirani, R. J. 1993. An Introduction to the Bootstrap. Chapman&Hall  
USA
- Fuh, C. D. 1993. Statistical Inquiry for Markov Chains by Bootstrap Method. Academia  
Sinica 3; 53-66.
- Kulperger, R. J. and Prakasa-Rao, B. L. S. 1989. Bootstrapping a finite state Markov  
chain. Sankhya: The Indian Journal of Statistics 51; 178-191.
- Lepage, R. and Billard L. 1992. Exploring the Limits of Bootstrap. John Wiley & Sons  
Inc. 426 New York.
- Liu, R.Y. and Singh, K. 1988. Moving Blocks Jackknife and Bootstrap Capture Weak  
Dependence. Exploring the Limits of Bootstrap John Wiley & Sons Inc. 225-248  
New York.
- Shi, X. and Shao, J. 1988. Resampling Estimation When Observations are m-  
Dependent. Commun. Statist.- Theory Meth. 17(11);3923-3934.
- Parzen, E. 1962. Stochastic Processes. Holden-Day San Francisco.
- Ross, M.S. 1996. Stochastic Processes. John Wiley & Sons Inc. New York.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Serhat DUMAN

Doğum Yeri : Samsun

Doğum Tarihi : 23.08.1977

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim Durumu

Lise : Bahçelievler Deneme Lisesi 1992-1994

Lisans : Ortadoğu Teknik Üniveristesi Matematik Bölümü 1994-2000

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik

Anabilim Dalı 2001-2006

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

T. Vakıflar Bankası T.A.O. Banka Risk Komitesi Başkanlığı Uzman Yrd. 2003-2005

T. Vakıflar Bankası T.A.O. Teftiş Kurulu Başkanlığı Müfettiş Yrd. 2005-