

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN SİNİR AĞLARININ KARARLILIK
ANALİZİ

Ayşen KÜTAHYALIOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ BASAMAKTAN SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ

Ayşen KÜTAHYALIOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde yapay sinir ağlarının tarihçesi ile ilgili genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümde yapay sinir ağlarının biyolojik sinir ağları ile olan ilişkisi, yapay sinir ağı türleri ve yapay sinir ağları hakkında matematiksel açıdan yapılan incelemeler ifade edilmiştir. Ayrıca kesirli basamaktan türev ve integral kavramları açıklayıp kesirli basamaktan türev içeren yapay sinir ağı modelleri ile ilgili yapılan araştırmalardan bahsedilmiştir. Tezin üçüncü bölümü uyumlu kesirli türevli yapay sinir ağı modellerine ayrılmıştır. Bu bağlamda ilk olarak uyumlu kesirli türevin özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Hopfield türünde bir yapay sinir ağının denge noktasının varlığı, tekliği ve üstel kararlılığı ispatlanmıştır. Benzer sonuçlar BAM-tipi tekrarlayan sinir ağı modeli için de elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar sayısal örnekler ile desteklenmiştir. Dördüncü bölümde ilk olarak Caputo-Hadamard kesirli türev operatörünün özellikleri irdelenmiştir. Devamında Caputo-Hadamard kesirli türev içeren Hopfield türünde bir yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlık-tekliği ve Mittag-Leffler kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar için de sayısal örnekler göz önüne alınıp sonuçlar grafiklerle desteklenmiştir. Tezin son bölümünde elde edilen sonuçların literatüre yaptığı katkı açıklanarak bu tezde kullanılan yöntemler ile gelecekte yapılabilecek çalışmalar ifade edilmiştir.

Eylül 2023, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kararlılık, Lyapunov fonksiyonu, üstel kararlılık, Mittag-Leffler kararlılık, yapay sinir ağı, kesirli basamaktan türev operatörü, kesirli basamaktan integral operatörü, kesirli basamaktan diferensiyel denklem.

ABSTRACT

Ph.D Thesis

STABILITY ANALYSIS OF FRACTIONAL ORDER NEURAL NETWORKS

Ayşen KÜTAHYALIOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ

The thesis consists of five chapters. The first chapter provides general information about the history of artificial neural networks. In the second chapter the relationship between artificial neural networks and biological neural networks, various types of artificial neural networks, and mathematical examinations of artificial neural networks have been discussed. Furthermore, it explains the concepts of fractional derivative and integral and discusses researches carried out artificial neural network models involving fractional derivatives. The third chapter focuses on neural network models with conformable fractional derivative. In this context, the properties of conformable fractional derivative is examined. Then, the existence, uniqueness, and the exponential stability of the equilibrium point of a Hopfield-type artificial neural network are proven. Similar results are obtained for the BAM-type recurrent neural network model. Moreover, the results of these studies are supported by numerical examples. In the fourth chapter, the properties of the Caputo-Hadamard fractional derivative operator are examined. Subsequently, sufficient conditions for the existence-uniqueness and Mittag-Leffler stability of the equilibrium point of Hopfield-type artificial neural network model involving the Caputo-Hadamard fractional derivative are obtained. Numerical examples are taken into consideration and the results of this section are supported by the graphs. In the final chapter of the thesis, contribution of the obtained results to the literature is explained, and possible future research using the methods employed in this thesis is discussed.

September 2023, 70 pages

Key Words: Stability, Lyapunov function, exponential stability, Mittag-Leffler stability, artificial neural network, fractional order derivative operator, fractional order integral operator, fractional order differential equation.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli fikirleri ile beni yönlendiren, benden yardımlarını ve önerilerini eksik etmeyen saygıdeğer danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ (Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi)'a tez çalışmalarımındaki katkıları için tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Marat AKHMET (ODTÜ, Fen Fakültesi)'e, Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na ayrıca Doç. Dr. Elif DEMİRCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca desteğini esirgemeyen ve bana her zaman moral kaynağı olan merhum annem Semra KÜTAHYALIOĞLU'na ve canım kızım Ada TAŞKIRAN'a sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez TÜBİTAK (Proje No: 122F329) tarafından kısmi olarak desteklenmiştir. Bu desteği için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ayşen KÜTAHYALIOĞLU
Ankara, Eylül 2023

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Yapay Sinir Ağları	4
2.2 Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler	15
2.2.1 Riemann-Liouville İntegral ve Türevi, Caputo Kesirli Türevi .	15
2.2.2 Kesirli Basamaktan Yapay Sinir Ağları	18
3. UYUMLU KESİRLİ TÜREV İÇEREN YAPAY SİNİR AĞLAR- ININ KARARLILIĞI	20
3.1 Uyumlu Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri	20
3.2 Uyumlu Kesirli Türev İçeren Hopfield Sinir Ağlarının Üstel Kararlılığı	29
3.3 Uyumlu Kesirli Türev İçeren Tekrarlayan Sinir Ağlarının Üstel Kararlılığı	35
4. CAPUTO-HADAMARD KESİRLİ TÜREVİ İÇEREN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIĞI	48
4.1 Hadamard Kesirli İntegral ve Türev Operatörleri	48
4.2 Caputo-Hadamard Kesirli Türevi	50
4.3 Caputo-Hadamard Kesirli Türev İçeren Hopfield Sinir Ağlarının Mittag-Leffler Kararlılığı	55
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	63
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ	70

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\beta(x, y)$	Beta fonksiyonu
$E_{\alpha}(z)$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_{RL}I_{t_0}^{\alpha}$	α . basamaktan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_{RL}D_{t_0}^{\alpha}$	α . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}_CD_{t_0}^{\alpha}$	α . basamaktan Caputo kesirli türev operatörü
$T_{\alpha}^{t_0}$	α . basamaktan uyumlu kesirli türev operatörü
$I_{\alpha}^{t_0}$	α . basamaktan uyumlu kesirli integral operatörü
${}_HI_{t_0}^{\alpha}$	α . basamaktan Hadamard kesirli integral operatörü
${}_HD_{t_0}^{\alpha}$	α . basamaktan Hadamard kesirli türev operatörü
${}_CHD_{t_0}^{\alpha}$	α . basamaktan Caputo-Hadamard kesirli türev operatörü
$[\alpha]$	α sayısından küçük veya eşit en büyük tam sayı
$\lceil \alpha \rceil$	α sayısından büyük veya eşit en küçük tam sayı
$\text{Re}(z)$	z kompleks sayısının reel kısmı
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$AC[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı mutlak sürekli fonksiyonların uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Biyolojik sinir ağı	5
Şekil 2.2	Bir yapay sinir hücresi	6
Şekil 2.3	Yapay sinir ağı	6
Şekil 2.4	Doğrusal fonksiyon	8
Şekil 2.5	Adım fonksiyonu	8
Şekil 2.6	İşaret fonksiyonu	8
Şekil 2.7	Sigmoid fonksiyon	9
Şekil 2.8	Hiperbolik tanjant fonksiyonu	9
Şekil 3.1	(3.12) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	34
Şekil 3.2	(3.12) sisteminin $\alpha = 0.1$ için faz düzlemi	35
Şekil 3.3	(3.13) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	36
Şekil 3.4	(3.13) sisteminin $x_3(t)$ durum değişkeninin grafiği	36
Şekil 3.5	(3.30) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	45
Şekil 3.6	(3.30) sisteminin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	45
Şekil 3.7	(3.30) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	46
Şekil 3.8	(3.30) sisteminin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	46
Şekil 3.9	(3.31) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	47
Şekil 3.10	(3.31) sisteminin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	47
Şekil 4.1	(4.16) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	61
Şekil 4.2	(4.17) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri . .	62

1. GİRİŞ

Sinir sistemi, bir canlının sürekli olarak iç ve dış ortamlardan duyu organlarıyla bilgi alarak, bu bilgileri çoğu zaman geçmişteki deneyimleriyle karşılaştırıp değerlendiren ve anlık olarak tepki organlarını harekete geçiren karmaşık bir sistemdir. Bu karmaşık sisteme örnek olarak, insan sinir sisteminin yaklaşık $(1,3) \times 10^{10}$ nörondan oluştuğu ve bunların yaklaşık 1×10^{10} tanesinin beyinde yer aldığı verilebilir. İnsan beynindeki nöronlardan bazıları herhangi bir zamanda ateşlenir ve bu ateşlemeden kaynaklanan güç kaybının 10 watt mertebesinde olduğu tahmin edilmektedir. Beyindeki aktivitenin izlenmesi, uyurken bile saniyede 5×10^7 sinir uyarısının beyin ve vücudun diğer bölümleri arasında gidip geldiğini göstermiştir. Uyanıkken bu oran önemli ölçüde artmaktadır (Fisher 1987). Bu karmaşık yapıyı tam olarak açıklamak için bilgisayarın insan beyninin çalışma şeklini taklit etmesi için geliştirilmiş bir modellemeye ihtiyaç vardır. Bu matematiksel modellemelere yapay sinir ağları denir. Yapay sinir ağları, insan beyninin sinir hücrelerinin çalışma prensibine benzer bir şekilde işlem yapar ve insan beyni tarafından algılanabilen bilgiyi işleme kabiliyetine sahiptir. Yapay sinir ağları, çok sayıda bağımsız işlemci biriminden (nöronlar) ve bu birimler arasındaki bağlantılardan oluşur. Bu birimler, girdi verilerini işleyerek bir sonraki katmana aktarırlar. Bu işlemler, ağırlıklar ve eşik değerleri kullanılarak gerçekleştirilir. Bu teknoloji, büyük veri kümelerini analiz etmek ve tahmin yapmak için kullanılabildiği gibi günümüzde örüntü tanıma, tahmin etme, resim sınıflandırma, finansal tahmin ve veri sıkıştırma gibi bir çok problemin çözümleri için de geçerli sonuçlar vermektedir. Yapay sinir ağları diferensiyel denklemler kullanılarak modellenmesi ile matematik literatüründe yer almıştır. Yapay sinir ağları, kullanım alanlarına, verilerin karmaşıklığına ve boyutuna göre çeşitli modeller ve algoritmalarla yapılandırılabilirler.

Yapay sinir ağları ile ilgili çalışmalar McCulloch ve Pitts'in 1943 yılında sinir hücrelerinin matematiksel modellemesi için bir yapay sinir ağı tasarlaması ile başlamıştır (McCulloch ve Pitts 1943). Bu tasarlanan model, basit bir sinir hücresinin aritmetik

ya da mantıksal bir fonksiyon ile gösterildiği yalnızca iki durumu olan "ateşleme" ve "ateşleme yok" durumlarını kullanır. Daha sonra, bu model, John Von Neumann ve Norbert Wiener tarafından geliştirilmiştir. 1950'lerde, yapay sinir ağlarının kurucusu olarak bilinen Frank Rosenblatt, ilk yapay sinir ağını geliştirmiştir. Bu sinir ağı, iki katmanlı bir ağ olup görüntü tanıma gibi problemleri çözmek için kullanılmıştır (Rosenblatt 1961). 1960 ve 1970'li yıllarda sinyal işleme, örüntü tanıma ve biyolojik modelleme başlıkları altında çok sayıda sinir ağı araştırması devam etmiştir. Bu yıllarda Amari, Fukushima, Grossberg, Klopff ve Gose isimli bilim adamları sinir ağı alanını sağlam bir temele sokan ve alanında rönesansına giden yolu hazırlayan insanlardır (Haykin 1999). 1980'lerde, dünya çapında üne sahip bir fizikçi olan John Hopfield tarafından yazılan iki makale sonrasında yeniden canlanan yapay sinir ağı araştırmaları, daha derin ve karmaşık yapıların geliştirilmesine yol açmıştır (Hopfield 1982, Hopfield 1984). Bu gelişmelerin bir sonucu olarak, dünyanın dört bir yanındaki yüzlerce yüksek nitelikli bilim insanı, matematikçi ve teknoloji uzmanı yapay sinir ağları üzerine çalışmaya başlamıştır (Yadav vd. 2015, Akhmet ve Fen 2016).

Son yıllarda, kesirli diferansiyel denklemler mühendislik ve diğer bilim alanlarında giderek popüler hale gelmiştir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, klasik diferansiyel denklemlere kıyasla birçok fiziksel olgunun daha doğru bir tanımını sağlayabilecekleri için uygulamalı matematikte önemli bir çalışma alanı olarak ortaya çıkmıştır. Kesirli diferansiyel denklemler ve yapay sinir ağlarının birleşimi, bazı uygulamalarda tam sayı basamaktan yapay sinir ağlarına kıyasla daha iyi performans göstermektedir. Kesirli mertebeden yapay sinir ağları çalışmalarında çoğunlukla sistemin denge noktasının varlığı, tekliği ve bu denge noktasının kararlılığı incelenmektedir.

Bu tezin amacı, yapay sinir ağları ve kesirli basamaktan diferansiyel denklemlerin kombinasyonu olan kesirli türev içeren yapay sinir ağlarının denge noktasının varlığı, tekliği bu denge noktasının kararlılığını araştırmaktır. Araştırmamız aracılığıyla, kesirli türev içeren yapay sinir ağı modellerinin asimptotik davranışlarının anlaşıl-

ması ve çeşitli gerçek dünya uygulamalarında performanslarını ve uygulanabilirliklerini artırmaya yardımcı olabilecek bakış açılarının geliştirilmesi hedeflenmektedir. Bu tezin ikinci bölümünde yapay sinir ağları ayrıntılı olarak tanıtılmıştır ve kesirli basamaktan türev ve integral operatörlerinin temel özellikleri ifade edilmiştir. Üçüncü bölüm uyumlu türev içeren yapay sinir ağı modellerine ayrılmıştır. Üçüncü bölümde ilk olarak uyumlu türev operatörünün özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Hopfield tipi ve BAM tipi yapay sinir ağlarının denge noktalarının varlık ve tekliği ispatlanmış, denge noktasının üstel kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise Caputo-Hadamard kesirli türevini içeren Hopfield tipi model göz önüne alınmıştır. Caputo-Hadamard kesirli türev operatörünün özellikleri verildikten sonra ele alınan yapay sinir ağı sisteminin denge noktasının varlık-tekliği ispatlanmış ve Mittag-Leffler kararlılığı irdelenmiştir. Tezin son bölümünde elde edilen sonuçlar özetlenerek incelenebilecek problemler tartışılmıştır.

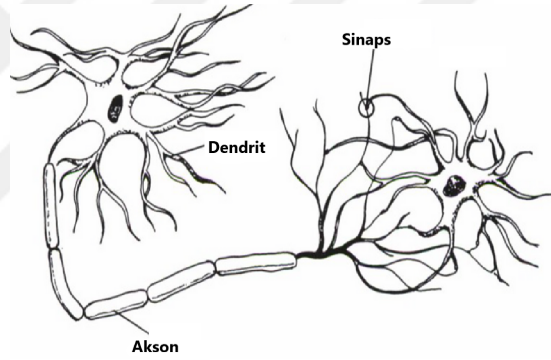
2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılması için kullanılacak temel tanım ve teoremler, yapay sinir ağları ile ilgili bilgiler verilecektir. Yapay sinir ağlarının differensiyel denklemleri, kesirli basamaktan türev ve integraller tanıtılacak ve literatürde mevcut olan sonuçlardan bahsedilecektir.

2.1 Yapay Sinir Ağları

Yapay sinir ağlarının çalışma prensibi, biyolojik sinir ağlarının çalışma prensibine benzer olduğundan öncelikle biyolojik sinir ağlarını inceleyelim. Biyolojik sinir hücrelerinde, sinir hücreleri sinir sisteminin temel sinyal birimleri olup soma adı verilen bir hücre gövdesi ve bu gövdeden çıkan kısa ve uzun uzantılardan oluşur. Akson, sinir hücrelerinin en uzun kısmıdır ve birçok sinir hücresi, akson yüzeyi Schwann hücreleri ve onun salgısı olan miyelin kılıf ile sarılıdır. Dendritler, hücre gövdesinden çıkan nöronlardan uyarıları alıp sinir gövdesine ileten sinir hücresinin kısa olan uzantılarıdır. Sinir hücrelerinin uyarılarının iletim yönü, dendrit kısmından akson ucuna doğrudur. Hücre gövdesi nöronun en kalın kısmı olup sitoplazmanın çoğu ve çekirdek burada bulunur, hücrenin yönetimini ve beslenmesini sağlar. Somada üretilen sinyaller, hücre gövdesi üzerindeki akson veya dendritlerle diğer nöronlara iletilir. Dendritlerle getirilen işaretler hücrede birleştirilip bir çıkış darbesi üretilip üretilmeyeceğine karar verilir. Eğer bir çıkış darbesi üretilecekse üretilen çıkış darbesi aksona taşınarak diğer nöronlarla olan bağlantılara iletilir. Beyindeki her kortekste her sinir hücresinin bir karşılığı vardır ve hücrenin çıkışı ona bağlı bütün hücrelere iletilir. Fakat korteks, ilgili işin yapılabilmesi için sinir hücrelerinden hangisi harekete geçirilecekse sadece ona komut gönderir. Sinir hücreleri arasındaki bağlantılar hücre gövdesinde veya dendritlerdeki geçişlerde olur. Sinapslarda düzeltilen işaretleri taşıyan aksonlar, diğer nöronlara ileten dendritlerle iç içe geçmiş sinir hücreleri birleşerek sinir ağını oluştururlar. Eşik birimi çıkışları toplayan ve sadece girişin toplamı iç eşik değerini aştığında bir çıkış üreten işlem elemanıdır. Bir eşik birimi, sinir hücresi sinapslarındaki işareti alır ve hepsini toplar. Oluşan toplam

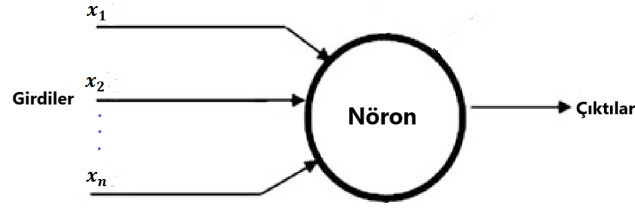
değer eşikteki değeri geçecek kadar güçlü ise diğer nöronlara iletilmek üzere dendritleri uyaran akson boyunca bir işaret gönderilir. Nöronlar arasında kesişen dendritlerden gelen sinapslardaki tüm işaretler somada toplanır ve toplanan işaret nöronun kendi iç eşik değeri ile karşılaştırılarak eşik değerini aşarsa aksona işaret yayar. Akson boyunca gönderilen sinyal, başka bir nörona veya hedef dokuya iletilebilir. Sinir hücrelerinin temel işlevi, beyin ve sinir sistemi aracılığıyla iletişim kurmak ve vücuttaki işlevleri düzenlemektir. Bu iletişim ağının temelinde, sinir hücrelerinin birbirleriyle iletişim kurarak bilgi aktarması yatar. Bu nedenle, bir sinir hücresinin diğer nöronlara veya hedef dokulara gönderdiği sinyal, beyindeki bilgi işleme ve vücuttaki işlevlerin düzenlenmesinde önemli bir rol oynar. Şekil 2.1’de temel bir biyolojik sinir ağı gösterilmiştir (Fausett 1993).



Şekil 2.1 Biyolojik sinir ağı

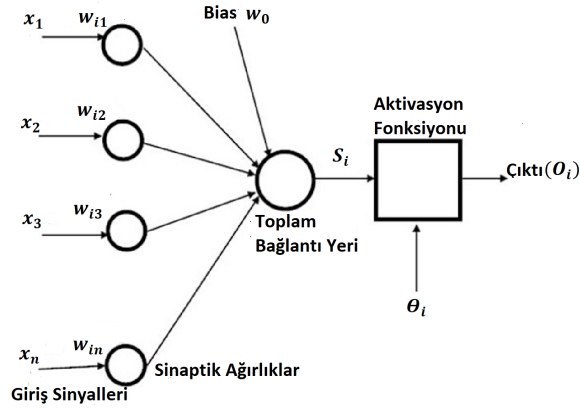
Yapay sinir ağı, bir bilgi işleme yapısıdır. Yapay sinir ağlarının temel bileşeni biyolojik bir sinir hücresinin işlevselliği üzerine kurulu olan yapay hücredir. Yapay sinir hücreleri bir araya gelerek yapay sinir ağını oluşturmaktadır. Hücreler arasında anlık tek ya da çift yönlü sinyal iletim yoluna sahip bağlantılar vardır, bu bağlantılar üzerinden bir veya daha fazla girdi alınır ve sadece bir çıktı üretilir. Şekil 2.2 bir yapay sinir hücresini temsil etmektedir (Yadav vd. 2015).

Biyolojik sinir ağında olduğu gibi yapay sinir ağında da dışarıdan ya da diğer sinir hücrelerinden alınan sinyaller, ağırlıklar ya da birleştirme fonksiyonu (sinaps) aracılığıyla hücreye bağlanır. Ağırlıklar, hücreye gelen bilginin hücre zarındaki etki-



Şekil 2.2 Bir yapay sinir hücresi

sini göstermekte olup sıfırdan farklı gerçek sayı ya da değişken olabilirler. Bu nedenle ağırlığın sıfır olması ağırlığın hücreye hiçbir etkisinin olmadığını gösterir. Girdilerden gelen bilgi, ağırlıklarla çarpılarak birleştirme fonksiyonuna iletilir. Bu ağırlıklar birleştirme fonksiyonundaki işlemde geçerek net girdi (sinyal) hesaplanır. Burada net girdiye hiçbir işlem yapılmadan doğrudan aktivasyon fonksiyonuna iletilir. Bundan sonra net girdi aktivasyon fonksiyonundan (çekirdek) geçerek net çıktı (akson) hesaplanır. Bulunan net çıktıların değerlerine göre bu işlem devam eder. Şekil 2.3'te bir yapay sinir hücresinin çalışma prensibinin bir sinir ağındaki çalışma prensibine ait ayrıntılı hesaplama aşamalarını gösterilmektedir (Yadav vd. 2015).



Şekil 2.3 Yapay sinir ağı

Şimdi bu bilgilere dayanarak yapay sinir ağlarının matematiksel hesaplamaları ile ilgili bilgiler verilecektir. Yapay sinir ağının birleştirme fonksiyonunda x_i sinir ağındaki girdiler ve w_i her girdiye ait ağırlıklar olmak üzere genellikle net girdi hücreye gelen her girdi kendi ağırlığı ile çarpılıp toplanarak hesaplanmaktadır. Yani, bir

hücrenin net girdisi genellikle

$$net = w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + \dots + w_{ij}x_j + w_0$$

ifadesi yardımı ile hesaplanır, burada w_0 bias değeridir. Net girdinin hesaplandığı diğer fonksiyonlar aşağıda belirtilmiştir:

$$net = \prod_{j=1}^n w_{ij}x_j$$

$$net = \max_{1 \leq j \leq n} (w_{ij}x_j)$$

$$net = \sum_{j=1}^n sgn(w_{ij}x_j)$$

Eşik fonksiyonu olarak da adlandırılan aktivasyon fonksiyonu bir sinir hücresine gelen net girdiyi hesaplayarak hücrenin bu girdiye karşılık üreteceği çıktıyı belirler. Yapay sinir ağlarının kararlılığını etkileyen en önemli etkenlerden biri aktivasyon fonksiyonudur. Yapay sinir ağlarında kullanılan bazı aktivasyon fonksiyonları lineer fonksiyon, sigmoid fonksiyon, hiperbolik tanjant fonksiyonu, adım fonksiyonu ve işaret fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar Şekil 2.4, Şekil 2.5, Şekil 2.6, Şekil 2.7 ve Şekil 2.8’de görülebilir.

(i) Lineer problemleri çözmek için lineer aktivasyon fonksiyonu

$$f(net) = a.net$$

seçilebilir.

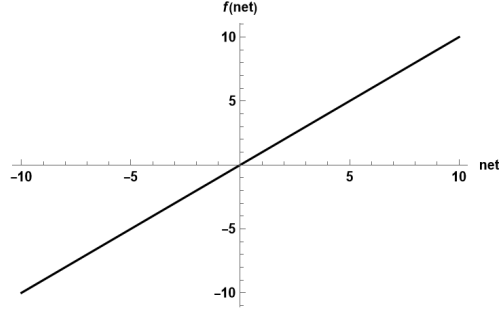
(ii) Net girdinin eşik değerin altında olmasına göre aktivasyon fonksiyonu

$$f(net) = \begin{cases} 1, & \text{net} > \text{eşik değeri ise} \\ 0, & \text{net} \leq \text{eşik değeri ise} \end{cases}$$

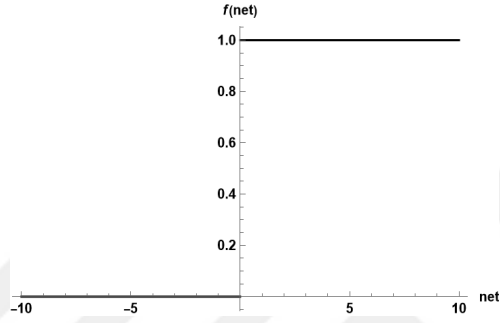
adım fonksiyonu olarak alınabilir.

(iii) Net girdinin eşik değerin altında, eşit veya üstünde olması durumunda yani işaretine bağlı sınırlandırıldığında aktivasyon fonksiyonu

$$f(net) = \begin{cases} 1, & \text{net} > \text{eşik değeri ise} \\ 0, & \text{net} = \text{eşik değeri ise} \\ -1, & \text{net} < \text{eşik değeri ise} \end{cases}$$

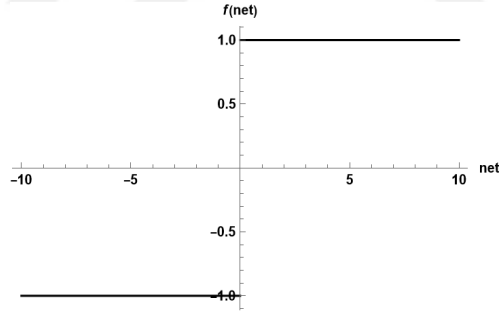


Şekil 2.4 Doğrusal fonksiyon



Şekil 2.5 Adım fonksiyonu

işaret fonksiyonu olarak alınabilir.



Şekil 2.6 İşaret fonksiyonu

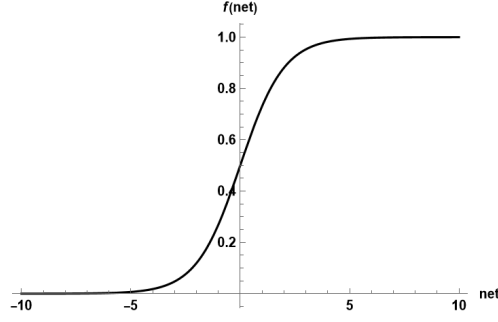
(iv) Lineer olmayan sürekli ve türevlenebilir sigmoid fonksiyonu

$$f(net) = \frac{1}{1 + e^{-net}}$$

aktivasyon fonksiyonu olarak seçilebilir.

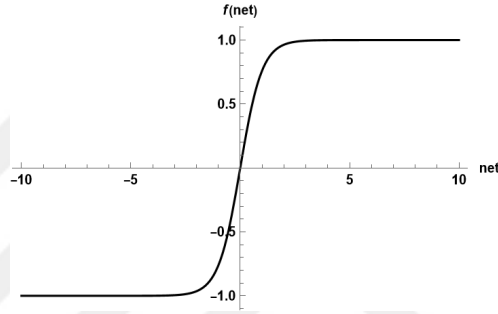
(v) Hiperbolik tanjant aktivasyon fonksiyonu, sigmoid fonksiyonuna benzer yapıda olup çıkış değerleri ise -1 ile $+1$ aralığındadır. Bu fonksiyon,

$$f(net) = \frac{e^{net} - e^{-net}}{e^{net} + e^{-net}}$$



Şekil 2.7 Sigmoid fonksiyon

şeklindedir.



Şekil 2.8 Hiperbolik tanjant fonksiyonu

Aktivasyon fonksiyonunda hesaplanan değer hücrenin çıktı değeridir. Bu çıktı yapay sinir ağının çıktısı olarak kullanılabileceği gibi ağın içerisinde tekrar kullanılabilir. Bu çıktılar $[-1, 1]$ aralığında olabileceği gibi, $[0, 1]$ ya da $[-1, 0]$ aralığında da olabilir. Bu tezde kullanılan yapay sinir ağı modellerindeki aktivasyon fonksiyonları Lipschitz koşulunu sağlayan aktivasyon fonksiyonlarıdır. Bu tip aktivasyon fonksiyonları Lipschitz aktivasyon fonksiyonları olarak adlandırılır ve türevi negatif olabilen fonksiyonlardır. Verilen bu temel bilgilerle yapay sinir ağının matematiksel olarak modellenmesi aşağıda verilecektir.

N_i sinir hücresi için n girdilerinin kümesi $S = \{x_j | j = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. Her bir girdi, bir N_i sinir hücresinin çekirdeğine ulaşmadan önce geldikleri bağlantıların ağırlıkları, w_{ij} ile çarpılır. Bu ağırlıkların değerleri pozitif, negatif veya sıfır olabilir. w_0 bias sabitini, θ_i eşik değerini, $f(u)$ aktivasyon fonksiyonunu gösterebilir. Sinir

hücresinin ateşlenme koşulu

$$w_0 + \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j \geq \theta_i$$

eşitsizliği ile verilir (Yadav vd. 2015). Bu durumda i . sinir hücresinin giriş sinyali

$$S_i = w_0 + \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j$$

ve çıkış sinyali

$$O_i = f(S_i - \theta_i)$$

ile verilir.

Yapay sinir ağları, verilerin karmaşıklığına ve boyutuna göre farklı modeller ve algoritmalarla yapılandırılabilir, bu ağlar belirli bir amaca hizmet edecek şekilde özelleştirilebilir. Yapay sinir ağları genel olarak bağlantı şekillerine göre ileri beslemeli ve geri beslemeli (ya da tekrarlayan) olmak üzere iki kategoriye ayrılır. İleri beslemeli ağlar giriş verilerinin sadece ileriye doğru hareket ettiği, yani geriye doğru bir dönüş olmadığı ağlardır. Bu ağlar, genellikle sınıflandırma veya regresyon gibi sürekli bir çıktı gerektiren görevler için kullanılır. Tekrarlayan sinir ağları ise geri besleme döngüleri ile tasarlanmıştır, yani çıktıları bir sonraki adımda yeniden kullanılır. Bu tür ağlar, özellikle zamana bağlı verilerle çalışan uygulamalarda kullanılır. Tekrarlayan ağlara örnek olarak Hopfield yapay sinir ağı, Cohen Grossberg yapay sinir ağı ve çift yönlü tekrarlayan yapay sinir ağları verilebilir.

Hopfield tarafından 1982 yılında önerilen ve kendi adıyla anılan Hopfield sinir ağı ilk basit tekrarlayan sinir ağıdır. Hopfield yapay sinir ağı, matematiksel programlama ve optimizasyon problemlerinin çözümü için kullanışlı bir ağ türüdür. Ancak, ağın kapasitesi sınırlıdır ve büyük ölçekli veriler için uygun değildir. Hopfield ağı, bir girdi verildiğinde, girdiyi hafızasında saklar ve daha sonra girdinin benzer bir sürümünü hatırlamak için kullanır. Hopfield ağı, öğrenme ve hatırlama için çift yönlü işlev gösterir. İlk olarak, öğrenme aşamasında, ağa bir dizi öğrenme örneği sunulur. Bu örnekler ağ tarafından belleğe alınır ve ağ, bir dizi öğrenme örneğine benzer girdileri hatırlayabilir hale gelir. İkinci olarak, hatırlama aşamasında, ağa bir girdi sunulur ve

ağ, benzer bir örneği hafızasından hatırlayarak girdinin tamamlanmasına yardımcı olur. Hopfield ağı, hatırlama işlemi sırasında asenkron olarak da çalışabilir, yani her nöronun işlemesi ayrı ayrı gerçekleşebilir.

Hopfield sinir ağının bağlantısında, i . nöronundan j . nörona giden ağırlık j . nöronundan i . nörona giden ağırlığa eşittir. Hopfield sinir ağının ayrık Hopfield ağı ve sürekli Hopfield ağı olarak incelemeleri mevcuttur. n sistemin içerdiği nöron sayısını, x_i , i . nöronun durum değişkenini, a_i ($a_i > 0$) ağdan bağlantısı kesildiğinde i . nöronun potansiyelinin dinlenme durumuna sıfırlanma oranını, b_{ij} nöronların bağlantı katsayılarını, f_j aktivasyon fonksiyonunu, I_i sabitleri dışarıdan girişleri göstermek üzere genel olarak Hopfield yapay sinir ağı

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sistemi ile ifade edilmiştir. Forti vd. 1994 yılında yaptıkları çalışmada Hopfield sinir ağında bağlantı matrisini negatif yarı definit simetrik matris olarak denge noktasının tekliği ve mutlak kararlılığı için koşullar elde etmişlerdir (Forti vd. 1994). Hopfield sinir ağı modelinin kararlılık incelemelerinde aktivasyon fonksiyonları genellikle sürekli türevlenebilir, monoton artan ve sınırlı seçilmektedir (Fang ve Kincaid 1996, Chen 2001). Gopalsamy 2004 yılında yaptığı çalışmada impuls içeren bir yapay sinir ağı modelinin denge noktasının kararlılığını incelemiştir. Bu çalışmada aktivasyon fonksiyonu için sınırlılık, monotonluk ve differensiyellenebilme kabulleri yapılmadan kararlılık için yeter koşul elde edilmiştir (Gopalsamy 2004). Akhmet ve Karacaören, 2014 yılında Hopfield yapay sinir ağı modelini genelleştirilmiş tipte parçalı sabit argüman ekleyerek geliştirmişlerdir. Bu denklemin çözümlerinin varlığı ve tekliği için yeter koşulları, bu sinir ağının denge noktasının üstel kararlılığını Lyapunov fonksiyonu yardımıyla araştırmışlardır (Akhmet ve Karacaören 2014). Devamında yaptıkları çalışmada parçalı sabit argümanlı ve sabit gecikmeli bir Hopfield sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı için yeter koşulları elde etmenin yanı sıra üstel kararlılığı için Lyapunov fonksiyonu ve matrislerde eşitsizlik metodunu kullanmışlardır (Akhmet ve Karacaören 2018).

Cohen-Grossberg ağı, yapay sinir ağı alanında önemli bir yere sahip olan geri beslemeli yapay sinir ağıdır. Stephen Grossberg ve Arturo Rosenblueth Cohen tarafından 1983 yılında insanlar veya hayvanların gerçek zamanlı olarak nasıl öğrendiklerine ve uyarıldıklarına dair psikolojik özellikler temel alınarak oluşturulmuş olan diferensiyel denklemlerden oluşan lineer olmayan bir denklem sistemidir (Yadav vd. 2015). Cohen-Grossberg ağı, sinir ağındaki nöronların birbirleriyle bağlantılı olduğu ve nöronların çıkışlarına bağlı olan geri besleme döngüleri içeren bir ağıdır. Bu geri besleme döngüleri sayesinde ağ, zaman içinde dinamik davranışlar sergileyebilir. Ağın ağırlık matrisleri, sinir ağındaki nöronlar arasındaki bağlantıların güçlerini belirtir ve bu güçler, ağın davranışını belirler. Bu ağlar, bir girdi verildiğinde, ağdaki nöronların etkileşimleri yoluyla bir çıktı üretirler. Bu çıktı, daha sonra bir karar verme sürecinde kullanılabilir. Cohen-Grossberg ağı, sinir ağındaki nöronların özellikle insan beynindeki nöronlar gibi davrandığı kabul edilen birçok özelliği içerir. Bu nedenle, bu ağlar insan beyninin işlevlerini daha iyi anlamak ve sinir ağı teknolojilerinin gelecekteki gelişimine katkıda bulunmak için kullanılmıştır.

Cohen-Grossberg sinir ağı'nın klasik diferensiyel denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$x'_i(t) = a_i(x_i(t)) \left[-b_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Genel olarak Hopfield yapay sinir ağı, Cohen-Grossberg yapay sinir ağı modelinin özel durumudur. Cohen-Grossberg ağının kararlılığına ilişkin bazı araştırmalar mevcuttur. Bu araştırmalarda, Lyapunov fonksiyonları ve Lyapunov teoremi kullanılarak ağın kararlılığı gösterilebilmiştir (Wang ve Zou 2002, Truccoloi vd. 2003).

Hopfield ve Cohen-Grossberg yapay sinir ağları arasındaki farklılıkları genel olarak inceleyecek olursak Hopfield ağı, özellikle bellek ve en kısa yol gibi uygulamalarda kullanılmak üzere tasarlanmış olup eş zamanlı olmayan dinamikler gösterir ve bir adım sonrasındaki çıktı, önceki adımdaki çıktıya dayalı olarak hesaplanır. Hopfield yapay sinir ağı, bir girdi verildiğinde, girdinin benzerliğine dayalı olarak bir bellek çıktısı üretir. Cohen-Grossberg ağı, bir girdi verildiğinde, girdinin niteliğine bağlı olarak bir çıktı üretir. Öte yandan, Cohen-Grossberg ağı, karar verme süreçlerini

simüle etmek için tasarlanmış olup eş zamanlı dinamikler gösterir ve bu ağı tüm nöronları aynı anda hesaplamalar yaparak çıktıları üretir. Hopfield ağı, özellikle simetrik ağırlık matrisleri kullanılarak tasarlanırken, Cohen-Grossberg ağı genellikle asimetrik ağırlık matrisleri kullanılarak tasarlanır. Sonuç olarak, Hopfield ağı ve Cohen-Grossberg ağı arasındaki farklar, tasarım amaçları, dinamik davranışları, ağırlık matrisleri ve çıktılarına dayalıdır.

Kosko tarafından önerilen ve literatürde BAM tipi yapay sinir ağı olarak da bilinen çift yönlü tekrarlayan sinir ağları, diğer sinir ağı türlerinden birkaç açıdan farklılık gösteren bir veya daha fazla geri besleme döngüsü içeren yapay sinir ağı modelleridir (Kosko 1987, Kosko 1988). Bu sinir ağı modeli, x ve y gibi iki katmandan oluşur. Bu yüzden, bu sinir ağı modeli ayrı girişleri veya çıkışlarına atanan verilerin bağlantılarını hatırlama yeteneğine sahip olup, eksik veya bozulmuş girdi verileri için bile doğru bağlantıları geri çağırma yeteneğine sahiptir. Çift yönlü tekrarlayan sinir ağlarının öğrenme ve tahmin performansı yüksektir ve gerektiğinde büyük miktarda bellek alanı tahsis ederler. Geri besleme döngüleri, ağı önceki çıktılarına veya durumlarına dayalı olarak ağırlık güncellemeleri yapılmasını sağlar ve giriş verilerinin yanı sıra önceki zaman adımlarından gelen çıkışları da içeren geri beslemeli döngülere sahiptir. Tekrarlayan sinir ağlarının bu özelliği özellikle zaman serileri, dil modellemesi ve doğal dil işleme gibi zamansal bağımlılık içeren problemlerde başarılı sonuçlar vermiştir. Örneğin, doğal dil işlemede, tekrarlayan sinir ağları, kelime dizileri ve cümlelerin anlamlarını analiz edebilir ve doğal dil çeviri gibi görevlerde kullanılabilirler. Ayrıca, görüntü işleme alanında, video analizi, nesne tanıma ve takibi gibi görevlerde kullanılabilirler.

Klasik bir çift yönlü tekrarlayan sinir ağının diferensiyel denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} x'_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(y_j(t)) + I_i, i = 1, 2, \dots, n \\ y'_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij} g_j(x_j(t)) + J_i, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

burada; n sistemin içerdiği nöron sayısını, x_i ve y_i i . nöronun durum değişkenlerini,

a_i ve c_i ($a_i, c_i > 0$) ağdan bağlantısı kesildiğinde i . nöronun potansiyelinin dinlenme durumuna sıfırlanma oranını, b_{ij} ve d_{ij} nöronların bağlantı katsayılarını, f_j ve g_j aktivasyon fonksiyonlarını, I_i ve J_i sabitleri dışarıdan girişleri göstermektedir. Bu denklem, tekrarlayan sinir ağının girdi ve iç durumunu kullanarak sonraki iç durumunu belirlemesine izin verir ve aynı zamanda ağın dinamik bir sistem olarak tanımlanmasına da olanak tanır.

Hopfield ya da Cohen-Grossberg yapay sinir ağlarına benzer olarak BAM tipi yapay sinir ağı incelemelerinde de matematiksel olarak en önemli hedef denge noktasının varlık-tekliği ile kararlılığının yeter koşullar ile desteklenmesidir. (Mohamad 2001, Liao ve Wong 2003, Mohamad ve Gopalsamy. 2003, Cao vd. 2005, Song ve Cao 2007, Park vd. 2009). Arik 2005 yılında yaptığı çalışmada BAM tipi yapay sinir ağları için denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimptotik kararlılığı için yeter koşul elde etmiştir. Bu sonuçlar, sinir sisteminin ağ parametreleri üzerinde gecikme parametresinden bağımsız olarak tüm sürekli monoton olmayan aktivasyon fonksiyonlarına uygulamıştır (Arik 2005). Lio ve Wang 2008 yılında yaptıkları çalışmada Lyapunov fonksiyonel yöntemi, M-matris, Young eşitsizlik tekniklerini uygulayarak, gecikmeli otonom olmayan hibrit BAM sinir ağları için üstel kararlılığı ve periyodik çözümlerin varlığını analiz etmişlerdir. Yine bu çalışmada aktivasyon fonksiyonlarının sınırlılığı, monotonluğu veya türevlenebilirliği düşünülmeden sabit zaman aralıklarında global üstel kararlılığı ve periyodik çözümlerin varlığı için yeter koşullar elde etmişlerdir (Lio ve Wang 2008). Jiang ve Cao 2009 yılında yaptığı çalışmada gecikmeli BAM tipi yapay sinir ağını araştırmıştır. Bu çalışmada Young eşitsizlik tekniğini uygulayarak denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimptotik kararlılığı için yeter koşul elde etmişlerdir (Jiang ve Cao 2008). Chiu 2017 yılında Banach sabit nokta teoremini kullanarak parçalı sürekli ve gecikmeli yapay sinir ağının periyodik çözümünün varlığı ve bu çözümün üstel kararlılığı için bazı yeter koşullar oluşturmuştur (Chiu 2017). Akhmet vd. 2018 yılında genelleştirilmiş tipte parçalı sabit argümana bağlı olan tekrarlayan sinir ağı modellerini incelemişlerdir. Denklemin denge çözümlerinin varlık ve teklik koşullarını, sınırlı çözümlerin ve periyodik çözümlerin üstel kararlılığı üzerine çalışmışlardır (Akhmet vd. 2018). Chiu 2021 yılında

ise yine Banach sabit nokta teoremini kullanarak çift yönlü tekrarlayan sinir ağı modelinin denge noktasının üstel kararlılığı üzerine çalışmıştır. Gronwall tipi integral eşitsizliği kullanarak bu denge noktasının denge durumunun varlığı, tekliği ve üstel kararlılığını garanti etmek için yeter kriter elde etmiştir (Chiu 2021).

2.2 Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler

Tam sayı basamaktan olmayan türev ve integralleri ele alan kesirli analiz kavramı ilk kez L'Hospital ve Leibnitz arasındaki mektuplaşma ile ortaya çıkmıştır. Kesirli analizin temel taşı kesirli türev ve kesirli integral operatörleridir. Kesirli analiz aynı zamanda kesirli Laplace dönüşümü, kesirli Fourier dönüşümü, kesirli fark denklemleri ve kesirli diferensiyel denklemleri içerir. Bu nedenle, kesirli analizin, birçok alanda kullanımı artmıştır. Bu konu ile ilgili ilk çalışma 1823 yılında Niels Henrik Abel tarafından yapılmıştır. Abel karşısına çıkan bir integral denklemin çözümünde kesirli basamaktan türevleri uygulamıştır. Abel'in bu çözümü, Liouville'nin dikkatini çekmiş ve Liouville tarafından kesirli basamaktan türev için bir tanım verilmesini sağlamıştır. Liouville'nin tanımını birçok matematikçi zaman zaman yeniden ele alarak yeni kesirli türev ve integral tanımları elde etmişlerdir (Oldham ve Spanier 1974, Ross 1975). Diferensiyel denklemler ve denklem sistemleri kesirli basamaktan türev ile ele alınmıştır (Miller ve Ross 1993, Samko vd. 1993, Podlubny 1999). Kesirli basamaktan türev içeren denklem sistemlerinin kararlılık incelemelerinde de Lyapunov fonksiyonu kullanılmıştır (Zhang vd. 2011). Kesirli analizde en çok kullanılan Riemann-Liouville kesirli integral, Riemann-Liouville kesirli türev ve Caputo kesirli türev tanımları bu bölümde verilecektir.

2.2.1 Riemann-Liouville İntegral ve Türevi, Caputo Kesirli Türevi

Bu kesimde Riemann-Liouville ve Caputo türevinin tanımları ifade edilecektir (Kilbas vd. 2006, Diethelm 2010). Kesirli analizin temelini oluşturan Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1 $[u_0, u_1]$, $(-\infty < u_0 < u_1 < \infty)$ reel ekseninde sonlu bir aralık olsun.

$\text{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere

$$u > u_0 \text{ için } \left({}_{RL}I_{u_0^+}^\alpha f \right) (u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_0}^u \frac{f(s)}{(u-s)^{1-\alpha}} ds \quad (2.1)$$

ve

$$u < u_1 \text{ için } \left({}_{RL}I_{u_1^-}^\alpha f \right) (u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^{u_1} \frac{f(s)}{(s-u)^{1-\alpha}} ds \quad (2.2)$$

ile tanımlı ${}_{RL}I_{u_0^+}^\alpha$ ve ${}_{RL}I_{u_1^-}^\alpha$ operatörlerine sırasıyla α . basamaktan sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri denir, burada $\Gamma(\cdot)$, $\text{Re}(w) > 0$ olmak üzere $w \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-t} t^{w-1} dt$$

şeklinde tanımlı Gamma fonksiyonudur.

$\alpha = n \in \mathbb{N}$ olması durumunda (2.1) ve (2.2) eşitliklerinin n . basamaktan çok katlı integral ifadeleri sırasıyla $u > u_0$ için

$$\begin{aligned} \left({}_{RL}I_{u_0^+}^n f \right) (u) &= \int_{u_0}^u ds_1 \int_{u_0}^{s_1} ds_2 \dots \int_{u_0}^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{u_0}^u (u-s)^{n-1} f(s) ds \end{aligned}$$

ve $u < u_1$ için

$$\begin{aligned} \left({}_{RL}I_{u_1^-}^\alpha f \right) (u) &= \int_u^{u_1} ds_1 \int_{s_1}^{u_1} ds_2 \dots \int_{s_{n-1}}^{u_1} f(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_u^{u_1} (s-u)^{n-1} f(s) ds \end{aligned}$$

dir. Riemann-Liouville integrali yardımıyla Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Tanım 2.2 $[u_0, u_1]$, $(-\infty < u_0 < u_1 < \infty)$ reel ekseninde sonlu bir aralık olsun.

$\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ ve $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ olmak üzere, $u > u_0$ için

$$\begin{aligned} \left({}_{RL}D_{u_0^+}^\alpha f \right)(u) &= \left(\frac{d}{du} \right)^n I_{u_0^+}^{n-\alpha} (f(u)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{du} \right)^n \int_{u_0}^u \frac{f(s)}{(u-s)^{\alpha-n+1}} ds \end{aligned}$$

ve $u < u_1$ için

$$\begin{aligned} \left({}_{RL}D_{u_1^-}^\alpha f \right)(u) &= \left(-\frac{d}{du} \right)^n I_{u_1^-}^{n-\alpha} (f(u)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{du} \right)^n \int_u^{u_1} \frac{f(s)}{(s-u)^{\alpha-n+1}} ds \end{aligned}$$

ile tanımlı ${}_{RL}D_{u_0^+}^\alpha$ ve ${}_{RL}D_{u_1^-}^\alpha$ operatörlerine sırasıyla α . basamaktan sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli türevleri denir. Ayrıca $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha < 1$ ise, bu durumda Riemann-Liouville türevi $u > u_0$ için

$$\left({}_{RL}D_{u_0^+}^\alpha f \right)(u) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{du} \int_{u_0}^u \frac{f(s)}{(u-s)^\alpha} ds$$

ve $u < u_1$ için

$$\left({}_{RL}D_{u_1^-}^\alpha f \right)(u) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{du} \int_u^{u_1} \frac{f(s)}{(s-u)^\alpha} ds$$

integrallerine indirgenir.

Uyarı 2.1 Özel olarak $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise

$$\begin{aligned} \left({}_{RL}D_{u_0^+}^\alpha f \right)(u) &= f^{(n)}(u) \\ \left({}_{RL}D_{u_1^-}^\alpha f \right)(u) &= (-1)^n f^{(n)}(u) \end{aligned}$$

ve

$$\left({}_{RL}D_{u_0^+}^0 f \right)(u) = \left({}_{RL}D_{u_1^-}^0 f \right)(u) = f(u)$$

olur.

Uyarı 2.2 $u_0 < u < u_1$, $c \in \mathbb{R}$ ve $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ olmak üzere

$${}_{RL}D_{u_0^+}^\alpha(1) = \frac{(u - u_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

dir. Sabit fonksiyonun türevinin sıfır olmaması uygulamalarda Riemann-Liouville türevinin kullanımını zayıflatmaktadır. Bu durumdan yola çıkılarak sabit fonksiyonun türevinin sıfır olduğu Caputo kesirli türevi tanımlanmıştır.

Tanım 2.3 $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ olmak üzere $u > u_0$ için

$$\left({}_CD_{u_0^+}^\alpha f\right)(u) = \left({}_{RL}D_{u_0^+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u_0)}{k!} (x - u_0)^k \right] \right)(u)$$

ve $u < u_1$ için

$$\left({}_CD_{u_1^-}^\alpha f\right)(u) = \left({}_{RL}D_{u_1^-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u_1)}{k!} (u_1 - x)^k \right] \right)(u)$$

ile tanımlı ${}_CD_{u_0^+}^\alpha$ ve ${}_CD_{u_1^-}^\alpha$ operatörlerine sırasıyla α . basamaktan sol taraflı ve sağ taraflı Caputo kesirli türevleri denir.

Özel olarak, $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ ise $u > u_0$ için

$$\left({}_CD_{u_0^+}^\alpha f\right)(u) = \left({}_{RL}D_{u_0^+}^\alpha [f(x) - f(u_0)]\right)(u)$$

ve $u < u_1$ için

$$\left({}_CD_{u_1^-}^\alpha f\right)(u) = \left({}_{RL}D_{u_1^-}^\alpha [f(x) - f(u_1)]\right)(u)$$

dir.

Uyarı 2.3 Özel olarak $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise

$$\left({}_CD_{u_0^+}^\alpha f\right)(u) = f^{(n)}(u)$$

$$\left({}_CD_{u_1^-}^\alpha f\right)(u) = (-1)^n f^{(n)}(u)$$

ve

$$\left({}_CD_{u_0^+}^0 f\right)(u) = \left({}_CD_{u_1^-}^0 f\right)(u) = f(u)$$

olur.

2.2.2 Kesirli Basamaktan Yapay Sinir Ağları

Yapay sinir ağlarının dinamik davranışının incelenmesi, literatürde birçok makalede araştırılmıştır. Kesirli mertebeden türevlerle modellenen sinir ağları karmaşık sistemleri modelleyebilen yapay sinir ağı türüdür. Birçok araştırmacı, kesirli türevli yapay sinir ağlarını sinyal işlemesi yönünden incelemiş ve tam sayı basamaktan türevli yapay sinir ağlarına kıyasla daha esnek ve daha avantajlı bulmuşlardır. Bu tip yapay sinir ağları finans ve ekonomi gibi uygulamalarda, elektrik devreleri, kimyasal reaksiyonlar ve biyolojik sistemler gibi birçok fiziksel sistemde çok daha kullanışlıdır. Lundstrom vd. 2008 yılında yaptıkları çalışmada kesirli diferensiyelin, hesaplamalarda verimli bilgi işlemeye katkı sağlayacağını gözlemlemişlerdir (Lundstrom vd. 2008). 2009 yılında ise Boroomand ve Menhaj tarafından kesirli basamaktan Hopfield sinir ağı modeli sunulmuştur (Boroomand ve Menhaj 2009). Devamında Chen vd. kesirli basamaktan gecikme argümanlı bir yapay sinir ağını incelemişler ve çözümün düzgün kararlılığı için yeter koşullar elde etmişlerdir (Chen vd. 2013). Son yıllarda kesirli basamaktan yapay sinir ağlarının denge noktasının varlık-teklik incelemeleri ile kararlılık analizinin yapılması pek çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Caputo kesirli türevini içeren temel bir sinir ağı modeli 2014 yılında ele alınarak çözümün varlık-tekliği ve düzgün kararlılığı ispatlanmıştır (Song ve Cao 2014). 2014 yılında yapılan bir diğer çalışmada Caputo kesirli türevli gecikmeli bir model ele alınmış, bu modelin sonlu zamanda kararlılığı incelenmiştir (Alofi vd. 2014). Ke ve Miao gecikmeli Cohen-Grossberg sinir ağı için sonlu zamanda kararlılık incelemesi yapmışlardır. İncelemelerinde Bellman-Gronwall eşitsizliğini, ortalama değer teoremini ve daralma dönüşümünü kullanmışlardır (Ke ve Miao 2015). Hopfield kesirli sinir ağı modelinin Mittag-Leffler kararlılığı da Zhang vd. tarafından ele alınmıştır (Zhang vd. 2015). Literatürde BAM tipi çift yönlü tekrarlayan kesirli basamaktan yapay sinir ağı modellerinin kararlılık analizlerinin yapıldığı çalışmalar da mevcuttur (Yang vd. 2014, Cao ve Bai 2014, Cao ve Bai 2015). Ancak bu çalışmaların ilki düzgün kararlılık ile ilgili sonuçları içerirken diğer iki çalışmada sonlu zamanda kararlılık incelenmiştir.

3. UYUMLU KESİRLİ TÜREV İÇEREN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIĞI

Tam sayı basamaktan klasik türevin bir genelleştirilmesi olan uyumlu kesirli türev tanımı 2014 yılında Khalil vd. tarafından verilmiştir (Khalil vd. 2014). Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri tam sayı basamaktan türevin sahip olduğu çarpımın türevi, zincir kuralı gibi bazı özellikleri sağlamamaktadır. Bu durum Riemann-Liouville ve Caputo türevlerinin uygulamalarda kullanılmasını zorlaştırmaktadır. Ancak uyumlu türev klasik tam sayı basamaktan türevin sağladığı pek çok özelliği sağlamaktadır (Abdeljawad 2015). Tam sayı basamaktan türevle olan bu benzerliğinden dolayı uyumlu türev pek çok fiziksel ve geometrik problemi modellemede kullanılmıştır (Avcı vd. 2015, Zhou vd. 2018, Zhang vd. 2019). Uyumlu türevin fiziksel ve geometrik anlamı da son yıllarda incelenmiştir (Zhao ve Luo 2017, Khalil vd. 2019). Souahi vd. 2017 yılında uyumlu türev içeren lineer olmayan bir sistemin kararlılığını incelemişlerdir (Souahi vd. 2017). 2021 yılında ise uyumlu türev içeren gecikmeli bir sistemin Ulam kararlılığı araştırılmıştır (Wang vd. 2021). Uyumlu türevli Hopfield tipi yapay sinir ağlarının üstel kararlılığı ise son yıllarda incelenmeye başlanmıştır (Huyen vd. 2022).

Bu bölümde ilk olarak uyumlu kesirli türev operatörünün tanımı ve temel özellikleri verilecektir. Daha sonra uyumlu kesirli türev ile tanımlanan yapay sinir ağı modellerinin denge noktasının varlığı, tekliği ve üstel kararlılığı ispatlanacaktır.

3.1 Uyumlu Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri

Bu kesimde Khalil vd. tarafından verilen ve Abdeljawad tarafından geliştirilen uyumlu kesirli türev ve özellikleri incelenecektir (Khalil vd. 2014, Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1 $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $u > 0$ için

$$(T_{\alpha}g)(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlı T_α operatörüne g fonksiyonunun α . basamaktan uyumlu kesirli türevi denir. $u_0 > 0$ olmak üzere g fonksiyonu $(0, u_0)$ aralığında α -türevlenebilir ve $\lim_{u \rightarrow 0^+} g^{(\alpha)}(u)$ mevcutsa

$$(T_\alpha g)(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (T_\alpha g)(u)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Belirtelim ki g fonksiyonunun α . basamaktan uyumlu türevi mevcutsa g fonksiyonu α -türevlenebilirdir denir.

Teorem 3.1 $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $u_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ için türevlenebilir ise g fonksiyonu u_0 noktasında süreklidir.

İspat. $g(u)$ fonksiyonu $u = u_0$ noktasında türevlenebilir olduğundan

$$(T_\alpha g)(u_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u_0 + \varepsilon u_0^{1-\alpha}) - g(u_0)}{\varepsilon}$$

mevcuttur. Burada $u = u_0 + \varepsilon u_0^{1-\alpha}$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$\begin{aligned} (T_\alpha g)(u_0) &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{(u - u_0) u_0^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} u_0^{1-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h(u) = \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} u_0^{1-\alpha}$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonunun $u = u_0$ noktasında limiti vardır ve bu limit $(T_\alpha g)(u_0)$ dir. Yukarıdaki eşitlikten $u \neq u_0$ için

$$g(u) = g(u_0) + h(u)(u - u_0) u_0^{\alpha-1}$$

yazılabildiğinden

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow u_0} g(u) &= \lim_{u \rightarrow u_0} (g(u_0) + h(u)(u - u_0) u_0^{\alpha-1}) \\ &= g(u_0) + 0(u_0^{\alpha-1}) h(u_0) \\ &= g(u_0) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla g fonksiyonu $u = u_0$ noktasında süreklidir. ■

Uyumlu kesirli türev tanımı klasik türev gibi lineerlik şartını, çarpım ve bölüm kurallarını sağlar. Aşağıdaki teoremden bu özellikler gösterilmiştir.

Teorem 3.2 (Khalil vd. 2014) Keyfi bir $\alpha \in (0, 1]$ için g ve h fonksiyonlarının herhangi bir $u > 0$ noktasında α -diferensiyellenebilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) Her $c, d \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha (cg + dh) = cT_\alpha (g) + dT_\alpha (h)$ dir.
- (ii) Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha (u^p) = pu^{p-\alpha}$ dır.
- (iii) Her $g(u) = \lambda$ sabit fonksiyonu için $T_\alpha (\lambda) = 0$ dır.
- (iv) $T_\alpha (gh) = gT_\alpha (h) + hT_\alpha (g)$ sağlanır.
- (v) Her $h(u) \neq 0$ fonksiyonu için $T_\alpha \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{hT_\alpha (g) - gT_\alpha (h)}{h^2}$ sağlanır.
- (vi) Eğer g fonksiyonu diferensiyellenebilir ise $(T_\alpha g)(u) = u^{1-\alpha} \frac{dg(u)}{du}$ olur.

İspat. (i) Her $c, d \in \mathbb{R}$ ve $u > 0$ için

$$\begin{aligned}
 (T_\alpha (cg + dh))(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(cg + dh)(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - (cg + dh)(u)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{c(g(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u))}{\varepsilon} + \frac{d(h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - h(u))}{\varepsilon} \right] \\
 &= c(T_\alpha g)(u) + d(T_\alpha h)(u)
 \end{aligned}$$

dir.

(ii) Her $p \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
 T_\alpha (u^p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(u + \varepsilon u^{1-\alpha})^p - u^p}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\binom{p}{0}u^p + \binom{p}{1}u^{p-1}\varepsilon u^{1-\alpha} + \dots + \binom{p}{p}(\varepsilon u^{1-\alpha})^p - u^p}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon (pu^{p-1}u^{1-\alpha} + \dots + \varepsilon^{p-1}u^{(1-\alpha)p})}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (pu^{p-1}u^{1-\alpha} + \dots + \varepsilon^{p-1}u^{(1-\alpha)p}) \\
 &= pu^{p-\alpha}
 \end{aligned}$$

dir.

(iii) $g(u) = \lambda$ sabit fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned} T_\alpha(g(u)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda}{\varepsilon} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir.

(iv) g ve h fonksiyonlarının çarpımının türevi

$$\begin{aligned} (T_\alpha(gh))(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon u^{1-\alpha})h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u)h(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon u^{1-\alpha})h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u)h(u + \varepsilon u^{1-\alpha})}{\varepsilon} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u)h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u)h(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u)}{\varepsilon} h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - h(u)}{\varepsilon} g(u) \\ &= (T_\alpha g)(u) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) + g(u) (T_\alpha h)(u) \end{aligned}$$

dir. h sürekli bir fonksiyon olduğundan $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) = h(u)$ olur ve

$$T_\alpha(gh) = gT_\alpha(h) + hT_\alpha(g)$$

elde edilir. Bölümün türev kuralı da benzer şekilde ispatlanır.

(vi)

$$(T_\alpha g)(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon u^{1-\alpha}) - g(u)}{\varepsilon}$$

limitinde $\varepsilon = ht^{\alpha-1}$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$\begin{aligned} (T_\alpha g)(u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u + h) - g(u)}{ht^{\alpha-1}} \\ &= u^{1-\alpha} \frac{dg(u)}{du} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Belli başlı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıdaki gibidir:

1. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(e^{cw}) = cw^{1-\alpha}e^{cw}$
2. $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\sin dw) = dw^{1-\alpha} \cos dw$

3. $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha (\cos dw) = -dw^{1-\alpha} \sin dw$

4. $T_\alpha \left(\frac{1}{\alpha} w^\alpha \right) = 1$

Tanım 3.1 $\alpha \in (n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ aralığına da genişletilmiştir.

Tanım 3.2 (Khalil vd. 2014) $\alpha \in (n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ ve g fonksiyonu n . basamaktan diferensiyellenebilir olmak üzere $u > 0$ için

$$(T_\alpha g)(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(u + \varepsilon u^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - g^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(u)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlı T_α operatörüne α . basamaktan uyumlu kesirli türev operatörü denir.

Uyarı 3.1 Tanım 3.2’de $\alpha \in (n, n+1]$, g fonksiyonu u noktasında $(n+1)$. basamaktan diferensiyellenebilir olmak üzere, $u > 0$ için

$$(T_\alpha g)(u) = u^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} g^{(\lceil \alpha \rceil)}(u)$$

eşitliği sağlanır.

Uyumlu türevle yapılan işlemlerde kesirli integral operatörü Khalil tarafından aşağıdaki şekilde önerilmiştir.

Tanım 3.3 (Khalil vd. 2014) $0 < \alpha \leq 1$, $u_0 \geq 0$ ve $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(I_\alpha^{u_0} g)(u) = \int_{u_0}^u (x - u_0)^{\alpha-1} g(x) dx,$$

genelleştirilmiş integrale g fonksiyonunun α -kesirli integrali denir.

Abdeljawad 2015 yılında uyumlu kesirli türev ve integral tanımlarını geliştirerek kesirsel Gronwall eşitsizliğini, uyumlu kesirli türevler için zincir kuralını, kısmi integrasyon formüllerini, kesirsel kuvvet seri açılımını ve Laplace dönüşümünün özelliklerini ispatlamıştır.

Tanım 3.4 (Abdeljawad 2015) $g : [u_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $u > u_0$ için

$$(T_\alpha^{u_0} g)(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon(u - u_0)^{1-\alpha}) - g(u)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlı $T_\alpha^{u_0}$ operatörüne g fonksiyonunun α . basamaktan uyumlu kesirli türevi denir. $u_0 < u < u_1$ olmak üzere $(T_\alpha^{u_0} g)(u)$ mevcutsa

$$(T_\alpha^{u_0} g)(u_0) = \lim_{u \rightarrow u_0^+} T_\alpha^{u_0}(g(u))$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $(T_\alpha^0 g)(u) = (T_\alpha g)(u)$ biçiminde tanımlanmıştır.

Uyarı 3.2 Teorem 3.2’de ifade edilen (vi) özelliğinde $g : [u_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, $u > u_0$ için

$$(T_\alpha^{u_0} g)(u) = (u - u_0)^{1-\alpha} \frac{dg(u)}{du}$$

biçiminde tanımlıdır.

Uyarı 3.3 (Souahi vd. 2017) $g : [u_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in (n, n+1]$ ve $(T_\alpha^{u_0} g(u))$, (u_0, ∞) aralığında mevcut olmak üzere $u > u_0$ için $T_\alpha^{u_0}(g^2(u))$, (u_0, ∞) aralığında mevcuttur öyle ki

$$(T_\alpha^{u_0} g^2)(u) = 2g(u) (T_\alpha^{u_0} g)(u)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} (T_\alpha^{u_0} g^2)(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g^2(u + \varepsilon(u - u_0)^{1-\alpha}) - g^2(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(u + \varepsilon(u - u_0)^{1-\alpha}) - g(u)}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (g(u + \varepsilon(u - u_0)^{1-\alpha}) + g(u)) \\ &= 2g(u) (T_\alpha^{u_0} g)(u). \end{aligned}$$

$\alpha \in (0, 1]$ olduğunda Teorem 3.2’de ifade edilen (iv) özelliği ile de bu sonuç görülebilir.

■

Teorem 3.3 $g : [u_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyon olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ sağlansın. Bu durumda tüm $u > u_0$ değerleri için

$$(T_\alpha^{u_0} (I_\alpha^{u_0} g)) (u) = g (u)$$

sağlanır.

İspat. g fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan $(I_\alpha^{u_0} g (u))$ türevlenebilirdir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} (T_\alpha^{u_0} (I_\alpha^{u_0} g)) (u) &= (u - u_0)^{1-\alpha} \frac{d}{du} I_\alpha^{u_0} (g (u)) \\ &= (u - u_0)^{1-\alpha} \frac{d}{du} ((I_1^{u_0} u^{\alpha-1} g) (u)) \\ &= (u - u_0)^{1-\alpha} \frac{d}{du} \left(\int_{u_0}^u (x - u_0)^{\alpha-1} g (x) dx \right) \\ &= (u - u_0)^{1-\alpha} \left(\frac{g (u)}{(u - u_0)^{1-\alpha}} \right) \\ &= g (u) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4 $g : (u_0, u_1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu α -diferensiyellenebilir olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ sağlansın. Bu durumda her $u > u_0$ değerleri için

$$(I_\alpha^{u_0} (T_\alpha^{u_0} g)) (u) = g (u) - g (u_0)$$

sağlanır.

İspat. g fonksiyonu α diferensiyellenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} (I_\alpha^{u_0} (T_\alpha^{u_0} g)) (u) &= \int_{u_0}^u (x - u_0)^{\alpha-1} T_\alpha^{u_0} (g (x)) dx \\ &= \int_{u_0}^u (x - u_0)^{\alpha-1} (x - u_0)^{1-\alpha} g' (x) dx \\ &= g (u) - g (u_0) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Uyarı 3.4 (u_0, u_1) aralığında g fonksiyonu α -diferensiyellenebilen bir fonksiyonun uyumlu kesirli türevi pozitifse (negatifse) g fonksiyonunun grafiği aynı aralıkta artandır (azalandır).

Teorem 3.5 (Abdeljawad 2015) $g, h : (u_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları α -diferensiyellenebilir olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ sağlansın. Bu durumda $f(u) = g(h(u))$ fonksiyonu α -diferensiyellenebilir ve her $u \neq u_0$ ve $h(u) \neq 0$ için

$$(T_\alpha^{u_0} f)(u) = (T_\alpha^{u_0} g)(h(u)) (T_\alpha^{u_0} h)(u) h^{\alpha-1}(u)$$

ve $u = u_0$ için

$$(T_\alpha^{u_0} f)(u_0) = \lim_{u \rightarrow u_0^+} (T_\alpha^{u_0} g)(h(u)) (T_\alpha^{u_0} h)(u) h^{\alpha-1}(u)$$

dir.

İspat. Tanım 3.4'de $t = u + \varepsilon(u - u_0)^{1-\alpha}$ değişken değiştirmesi yapıp h fonksiyonunun sürekli olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (T_\alpha^{u_0} f)(u) &= \lim_{t \rightarrow u} \frac{g(h(t)) - g(h(u))}{t - u} (u - u_0)^{1-\alpha} \\ &= \lim_{t \rightarrow u} \frac{g(h(t)) - g(h(u))}{h(t) - h(u)} \lim_{t \rightarrow u} \frac{h(t) - h(u)}{t - u} (u - u_0)^{1-\alpha} \\ &= \lim_{g(t) \rightarrow g(u)} \frac{g(h(t)) - g(h(u))}{h(t) - h(u)} h^{1-\alpha}(u) T_\alpha^{u_0}(h(u)) h^{\alpha-1}(u) \\ &= (T_\alpha^{u_0} g)(h(u)) (T_\alpha^{u_0} h)(u) h^{\alpha-1}(u) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örnek 3.1 $\alpha \in (0, 1)$ ve λ bir sabit olmak üzere $u > u_0$ için

$$\mathbf{E}_\alpha(\lambda, u - u_0) = \exp\left(\lambda \frac{(u - u_0)^\alpha}{\alpha}\right) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlı olan kesirli üstel fonksiyonun uyumlu türevini hesaplayalım.

$f(u) = \exp u$ ve $g(u) = \lambda \frac{(u - u_0)^\alpha}{\alpha}$ olmak üzere Teorem 3.5, üstel fonksiyonun uyumlu türevi ve Teorem 3.2'nin (ii) özelliği ve kullanılarak

$$\begin{aligned} (T_\alpha^{u_0}(fog))(u) &= (T_\alpha^{u_0}f)(g(u))(T_\alpha^{u_0}g)(u)g^{\alpha-1}(u) \\ &= g^{1-\alpha}(u)\exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)(T_\alpha^{u_0}g)(u)g^{\alpha-1}(u) \\ &= \exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)T_\alpha^{u_0}\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right) \\ &= \lambda\exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$T_\alpha^{u_0}(\mathbf{E}_\alpha(\lambda, u - u_0)) = \lambda\exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)$$

elde edilir.

Lemma 3.1 (Souahi vd. 2017) $g : [u_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu α -türevlenebilir bir fonksiyon, $\alpha \in (0, 1)$ ve λ pozitif bir sabit olmak üzere. $u > u_0$ için

$$(T_\alpha^{u_0}g)(u) \leq -\lambda g(u) \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$g(u) \leq \mathbf{E}_\alpha(-\lambda, u - u_0)g(u_0)$$

olup, burada $\mathbf{E}_\alpha(\lambda, u - u_0) = \exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)$ kesirli üstel fonksiyonudur.

İspat. Kabul edelim ki $h(u) = \exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)g(u)$ olsun. Teorem 3.2 (iv) özelliği ve kesirli üstel fonksiyonun uyumlu türevi göz önüne alındığında $h(u)$ fonksiyonunun $u > u_0$ için uyumlu türevi

$$(T_\alpha^{u_0}h)(u) = \lambda\exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)g(u) + \exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)(T_\alpha^{u_0}g)(u)$$

bulunur. (3.2) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} (T_\alpha^{u_0}h)(u) &\leq \lambda\exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)g(u) - \lambda\exp\left(\lambda\frac{(u-u_0)^\alpha}{\alpha}\right)g(u) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $(T_\alpha^{u_0}h)(u) \leq 0$ olduğundan $h(u)$ fonksiyonu artmayan fonksiyondur. Yani $u > u_0$ için

$$h(u) \leq h(u_0)$$

dir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\exp\left(\lambda \frac{(u - u_0)^\alpha}{\alpha}\right) g(u) \leq g(u_0)$$

olup

$$\begin{aligned} g(u) &\leq \exp\left(-\lambda \frac{(u - u_0)^\alpha}{\alpha}\right) g(u_0) \\ &= \mathbf{E}_\alpha(-\lambda, u - u_0) g(u_0) \end{aligned}$$

istenilen elde edilir. ■

3.2 Uyumlu Kesirli Türev İçeren Hopfield Sinir Ağlarının Üstel Kararlılığı

Bu kesimde uyumlu kesirli türev kullanılarak oluşturulan Hopfield sinir ağı modelinin denge noktasının varlık ve tekliği için yeter koşullar elde edilmiştir. Ayrıca uygun bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak denge noktasının kesirli üstel kararlılığı ispatlanmıştır. Yapılan bu çalışmalar Mathematica yazılımı kullanılarak nümerik olarak elde edilen sonuçlar ile desteklenmiştir.

Uyumlu kesirli türev içeren Hopfield sinir ağı modeli aşağıdaki sistemle ifade edilir:

$$(T_\alpha x_i)(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

burada $(T_\alpha x_i)(\cdot)$, $x_i : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α -basamaktan uyumlu kesirli türevi ($0 < \alpha < 1$), n sistemin içerdiği nöron sayısını, x_i , i . nöronun durum değişkenini, a_i ($a_i > 0$) ağdan bağlantı kesildiğinde i . nöronun potansiyelinin dinlenme durumuna sıfırlanma oranını, b_{ij} nöronların bağlantı katsayısını, f_j aktivasyon

fonksiyonunu, I_i sabiti dışarıdan girişleri göstermektedir, (3.3) sisteminin denge noktası sabit bir $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$ vektörüdür. Bu x^* vektörü $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$a_i x_i^* = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j^*) + I_i \quad (3.5)$$

ya da

$$x_i^* = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j^*) + I_i \right) \quad (3.6)$$

eşitliklerini sağlar. Bu kesimde (3.3) sisteminin f_j aktivasyon fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

(H1) $j = 1, 2, \dots, n$ için f_j fonksiyonları Lipschitz sürekli olsun. Yani L_j pozitif sabit olmak üzere,

$$|f_j(u_j) - f_j(v_j)| \leq L_j |u_j - v_j|, \text{ her } u_j, v_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n,$$

sağlansın.

İlk olarak teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan denge noktasının üstel kararlılığı tanımı ifade edelim.

Tanım 3.5

$$\|x(t) - x^*\| \leq K \mathbf{E}_\alpha(-\lambda, t - t_0) \|x_0 - x^*\|, \quad t \geq t_0,$$

olacak şekilde pozitif λ ve K sabitleri mevcutsa (3.3) sisteminin x^* denge noktası kesirli üstel kararlıdır denir, burada $\mathbf{E}_\alpha$ (3.1) ile tanımlanan kesirli üstel fonksiyondur.

Aşağıdaki teoremden uyumlu türevli Hopfield yapay sinir ağı sisteminin denge noktasının varlığı ve tekliği için yeter koşullar elde edilmiştir.

Teorem 3.6 (H1) hipotezine ek olarak aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$a_i > L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Bu durumda (3.3) sisteminin x^* denge noktası mevcut ve tektir.

İspat. Kabul edelim ki $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i x_i^* = u_i$ olsun. (3.5)'den aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$u_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j \left(\frac{u_j}{a_j} \right) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $N(u) = (N_1(u), N_2(u), \dots, N_n(u))^T$ dönüşümünü

$$N_i(u) = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j \left(\frac{u_j}{a_j} \right) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

şeklinde tanımlayalım, burada $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ dir. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ olmak üzere $\|\cdot\|_1$ normu kullanılarak N dönüşümünün bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. $u, v \in \mathbb{R}^n$ için (H1) hipotezi kullanıldığında

$$\begin{aligned} \|Nu - Nv\|_1 &= \sum_{i=1}^n |N_i(u) - N_i(v)| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} \left(f_j \left(\frac{u_j}{a_j} \right) - f_j \left(\frac{v_j}{a_j} \right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \left| \frac{u_j - v_j}{a_j} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{|b_{ji}| L_i}{a_i} |u_i - v_i| \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.7) koşulundan $\sum_{j=1}^n \frac{|b_{ji}| L_i}{a_i} < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğu açıktır.

$$A = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{L_i}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right\}$$

tanımlayalım. (3.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|Nu - Nv\|_1 &\leq A \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| \\ &= A \|u - v\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir. $A < 1$ olduğundan $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ daralma dönüşümüdür ve N dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Bu yüzden (3.3) sisteminin denge noktası tektir. ■

Teorem 3.7 Teorem 3.6'nın hipotezlerine ek olarak aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$a_i > \sum_{j=1}^n L_j |b_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Bu durumda (3.3) sisteminin x^* denge noktası kesirli üstel kararlıdır.

İspat. Teorem 3.6'nın hipotezleri altında, (3.3) sisteminin $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ denge noktası mevcut ve tektir. (3.3) sisteminde $y(t) = x(t) - x^*$ değişken değiştirmesi yapıldığında aşağıdaki sistem elde edilir.

$$(T_\alpha y_i)(t) = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(y_j(t)), i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.10)$$

burada $g_j(y_j(t)) = f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)$ olup $j = 1, 2, \dots, n$ için $g_j(0) = 0$ ve g_j fonksiyonu Lipschitz koşulunu aynı Lipschitz sabiti L_j ile sağlar. (3.3) sisteminin x^* denge noktasının üstel kararlılığını göstermek için (3.10) sisteminin sıfır çözümünün üstel kararlılığını göstereceğiz.

$$V(t) = V(t, y(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2(t)$$

Lyapunov fonksiyonunu göz önüne alalım. V fonksiyonunun (3.10) sisteminin çözümleri boyunca kesirli uyumlu türevi alındığında

$$\begin{aligned} (T_\alpha V)(t) &= \sum_{i=1}^n y_i(t) (T_\alpha y_i)(t) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \left(-a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(y_j(t)) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} y_i(t) g_j(y_j(t)) \right| \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $j = 1, 2, \dots, n$ için g_j fonksiyonu Lipschitz koşulunu L_j sabiti ile

sağladığından

$$\begin{aligned}
(T_\alpha V)(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |y_i(t)| L_j |y_j(t)| \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j (y_i^2(t) + y_j^2(t)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(-a_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|b_{ij}| L_j + |b_{ji}| L_i) \right) y_i^2(t) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$B = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|b_{ij}| L_j + |b_{ji}| L_i) \right\}$$

olsun. (3.7) ve (3.9) koşullarından $B > 0$ dir. Bundan dolayı (3.11) tekrar yazıldığında

$$(T_\alpha V)(t) \leq -2BV(t)$$

elde edilir. Lemma 3.1 göz önüne alındığında

$$V(t) \leq E_\alpha(-2B, t - t_0) V(t_0)$$

bulunur. O halde

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2(t) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_\alpha(-2B, t - t_0) y_i^2(t_0)$$

ve

$$\|y(t)\|_2 \leq \mathbf{E}_\alpha(-B, t - t_0) \|y(t_0)\|_2$$

dir. Bu bize (3.10) sisteminin sıfır çözümünün kesirli üstel kararlı olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıda Teorem 3.6 ve Teorem 3.7'dan elde edilen koşullar düşünülerek yazılmış örnekler verilmiştir. Bu örneklerin sonuçları grafiklerle desteklenmiştir.

Örnek 3.2 Aşağıdaki Hopfield tipi yapay sinir ağı modelini ele alalım.

$$\begin{cases} (T_\alpha x_1)(t) = -0.2x_1(t) - 0.06f(x_1(t)) + 0.01f(x_2(t)) + 0.04 \\ (T_\alpha x_2)(t) = -0.3x_2(t) - 0.03f(x_1(t)) - 0.02f(x_2(t)) + 0.01 \end{cases} \quad (3.12)$$

Burada aktivasyon fonksiyonu $f(u) = 0.25(|u+1| - |u-1|)$ olup bu fonksiyon Lipschitz şartını $L_1 = L_2 = 0.5$ olarak sağlamaktadır. (3.12) sisteminin katsayıları $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.3$, $b_{11} = -0.06$, $b_{12} = 0.01$, $b_{21} = -0.03$, $b_{22} = -0.02$, $I_1 = 0.04$ ve $I_2 = 0.01$ dir. (3.12) sisteminin denge noktası

$$\begin{cases} -0.2x_1^* - 0.06f(x_1^*) + 0.01f(x_2^*) + 0.04 = 0 \\ -0.3x_2^* - 0.03f(x_1^*) - 0.02f(x_2^*) + 0.01 = 0 \end{cases}$$

cebirsal sistemi çözülerek elde edilir. Burada denge noktası $(0.174431, 0.0238179)$ bulunur. (3.12) sisteminin katsayıları Teorem 3.6 ve Teorem 3.7'in hipotezlerini sağlar. Gerçekten,

$$i = 1 \text{ için } a_1 = 0.2 > L_1 \sum_{j=1}^2 |b_{j1}| = 0.045$$

$$i = 2 \text{ için } a_2 = 0.3 > L_2 \sum_{j=1}^2 |b_{j2}| = 0.015$$

olup (3.7) koşulu sağlanır. Benzer olarak

$$i = 1 \text{ için } a_1 = 0.2 > \sum_{j=1}^2 L_j |b_{1j}| = 0.035$$

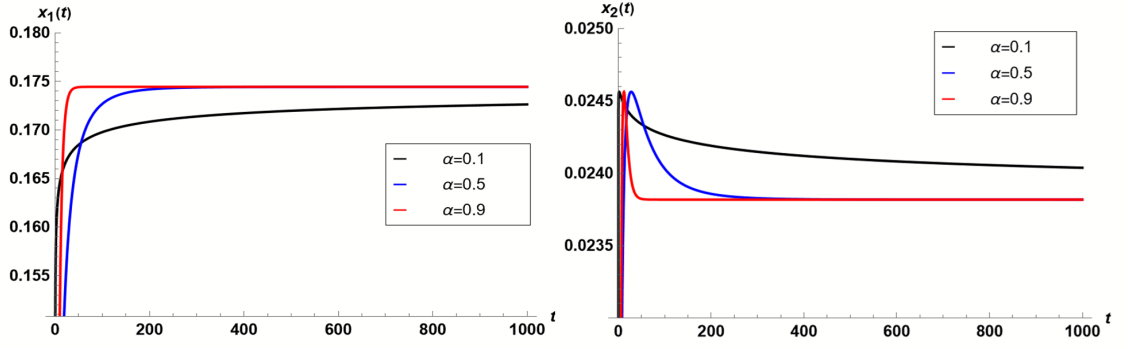
$$i = 2 \text{ için } a_2 = 0.3 > \sum_{j=1}^2 L_j |b_{2j}| = 0.025$$

olup (3.9) koşulu da sağlanır. O halde (3.12) sisteminin denge noktası tek olup kesirli üstel kararlıdır. (3.12) sisteminin $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ çözüm vektörünün $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri Mathematica programı ile çizdirilmiştir (Şekil 3.1). Bu grafiklerde de $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için sistemin denge noktasının üstel kararlılığı görülmektedir. Ayrıca $\alpha = 0.1$ değeri için sistemin faz grafiği görülmektedir (Şekil 3.2).

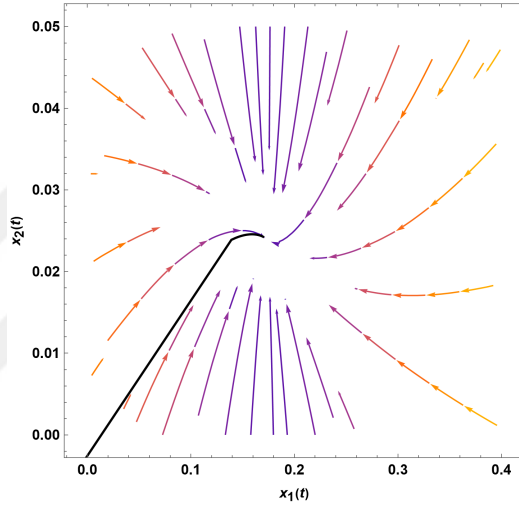
Örnek 3.3 Aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$\begin{cases} (T_\alpha x_1)(t) = -0.3x_1(t) + 0.02f(x_1(t)) - 0.01f(x_2(t)) + 0.03f(x_3(t)) + 0.04 \\ (T_\alpha x_2)(t) = -0.2x_2(t) - 0.01f(x_1(t)) + 0.03f(x_2(t)) - 0.01f(x_3(t)) + 0.01 \\ (T_\alpha x_3)(t) = -0.4x_3(t) - 0.03f(x_1(t)) - 0.01f(x_2(t)) + 0.02f(x_3(t)) + 0.03 \end{cases} \quad (3.13)$$

Burada aktivasyon fonksiyonu $f(u) = \frac{1}{u^2 + 1}$ olup bu fonksiyon Lipschitz şartını $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ olarak sağlamaktadır. (3.13) sisteminin katsayıları $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.4$, $b_{11} = 0.02$, $b_{12} = -0.01$, $b_{13} = 0.03$, $b_{21} = -0.01$, $b_{22} = 0.03$,



Şekil 3.1 (3.12) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri



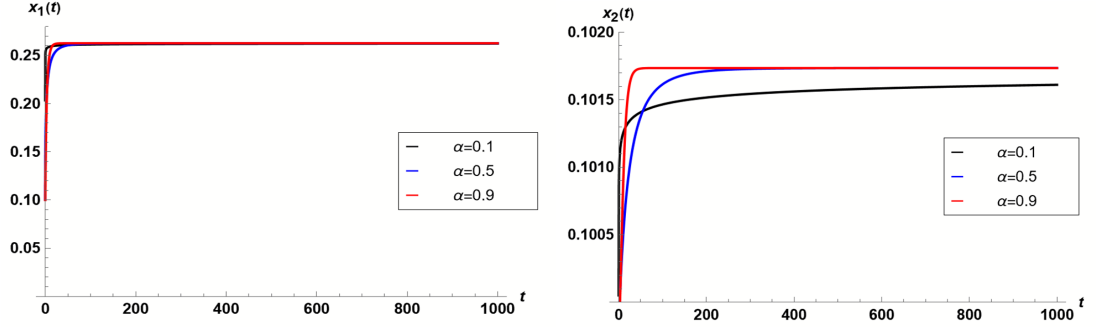
Şekil 3.2 (3.12) sisteminin $\alpha = 0.1$ için faz düzlemi

$b_{23} = -0.01$, $b_{31} = -0.03$, $b_{32} = -0.01$, $b_{33} = 0.02$, $I_1 = 0.04$, $I_2 = 0.01$ ve $I_3 = 0.03$ dir. (3.13) sisteminin denge noktası

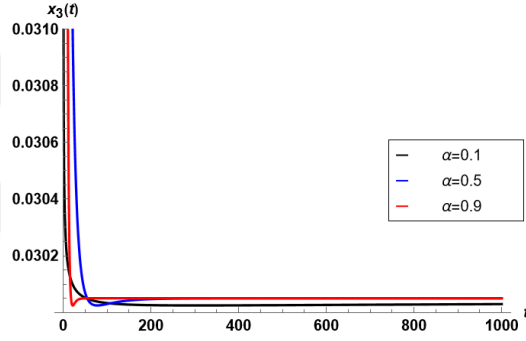
$$\begin{cases} -0.3x_1^* + 0.02f(x_1^*) - 0.01f(x_2^*) + 0.03f(x_3^*) + 0.04 = 0 \\ -0.2x_2^* - 0.01f(x_1^*) + 0.03f(x_2^*) - 0.01f(x_3^*) + 0.01 = 0 \\ -0.4x_3^* - 0.03f(x_1^*) - 0.01f(x_2^*) + 0.02f(x_3^*) + 0.03 = 0 \end{cases}$$

cebirsel sistemi çözülerek $(0.262617, 0.101734, 0.0300498)$ bulunur. (3.13) sisteminin katsayıları Teorem 3.6 ve Teorem 3.7'in hipotezlerini sağlar. O halde (3.13) sisteminin denge noktası tek olup kesirli üstel kararlıdır. (3.13) sisteminin $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ çözüm vektörünün $x_1(t)$, $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri Mathematica programı ile çizdirilmiştir (Şekil 3.3 ve Şekil 3.4). Bu grafiklerde de $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için sistemin denge noktasının

üstel kararlılığı görülmektedir.



Şekil 3.3 (3.13) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri



Şekil 3.4 (3.13) sisteminin $x_3(t)$ durum değişkeninin grafiği

3.3 Uyumlu Kesirli Türev İçeren Tekrarlayan Sinir Ağlarının Üstel Kararlılığı

Literatürde kesirli basamaktan BAM tipi yapay sinir ağlarının incelendiği çalışma sayısı oldukça azdır. Yang vd. kesirli basamaktan BAM tipi sinir ağı modelinin düzgün kararlılığı için yeter sonuçlar elde etmişlerdir (Yang vd. 2014). Cao ve Bai 2014 yılında yaptıkları çalışmada kesirli basamaktan BAM tipi sinir ağı modelinin sonlu zamanda kararlılığını incelemişlerdir (Cao ve Bai). Aynı araştırmacılar 2015 yılında yaptıkları çalışmada yine kesirli basamaktan BAM tipi sinir ağı modelini ele alıp denge noktasının düzgün kararlılığı için yeter sonuçlar elde etmişlerdir (Cao ve Bai 2015). Ancak her iki çalışmada da kararlılık analizi $[0, T]$ sonlu ara-

lığında yapılmıştır.

Bu kesimde uyumlu kesirli türev kullanılarak oluşturulan tekrarlayan çift yönlü yapay sinir ağı modelinde Banach daralma prensibi kullanılarak denge noktasının varlık ve tekliği için yeter koşullar elde edilmiş ve denge noktasının üstel kararlılığı gösterilmiştir.

Uyumlu türev içeren çift yönlü tekrarlayan sinir ağı modeli aşağıdaki sistemle ifade edilir:

$$\begin{cases} (T_\alpha x_i)(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(y_j(t)) + I_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ (T_\alpha y_i)(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij} g_j(x_j(t)) + J_i, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.15)$$

Burada; T_α , α . basamaktan uyumlu kesirli türevi ($0 < \alpha < 1$), n sistemin içerdiği nöron sayısını, x_i ve y_i i . nöronun durum değişkenlerini, a_i ve c_i ($a_i, c_i > 0$) ağdan bağlantı kesildiğinde i . nöronun potansiyelinin dinlenme durumuna sıfırlanma oranını, b_{ij} ve d_{ij} nöronların bağlantı katsayılarını, f_j ve g_j aktivasyon fonksiyonlarını, I_i ve J_i sabitleri dışarıdan girişleri göstermektedir.

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)^T$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_i^* = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(y_j^*) + I_i \right) \\ y_i^* = \frac{1}{c_i} \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} g_j(x_j^*) + J_i \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

cebirsel sistemini sağlayan $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ vektörü (3.14) sisteminin denge noktasıdır. İncelemelerimizde f_j ve g_j , $j = 1, 2, \dots, n$, aktivasyon fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sağladığı kabul edilecektir. Yani,

(H2) L_j ve M_j pozitif sabitler olmak üzere, $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ ve $j = 1, \dots, n$ için

$$|f_j(w_1) - f_j(w_2)| \leq L_j |w_1 - w_2|$$

$$|g_j(w_1) - g_j(w_2)| \leq M_j |w_1 - w_2|$$

sağlansın.

Tanım 3.6 ρ ve $K > 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| \leq K E_\alpha(-\rho, t - t_0) \|(x_0, y_0) - (x^*, y^*)\|, \quad t \geq t_0.$$

Bu durumda (3.14) sisteminin (x^*, y^*) denge noktası kesirli üstel kararlıdır denir, burada E_α fonksiyonu (3.1) ile tanımlanan kesirli üstel fonksiyondur.

Aşağıdaki teoremden $u_i \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)^{1/2}$ normu kullanılarak (3.14) sisteminin denge noktasının varlık ve tekliğini garanti eden koşullar ifade edilmektedir.

Teorem 3.8 (H2) hipotezine ek olarak aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın.

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{M_i}{a_i} d_{ji}\right)^2\right)^{1/2} < 1 \quad (3.17)$$

ve

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{L_i}{c_i} b_{ji}\right)^2\right)^{1/2} < 1. \quad (3.18)$$

Bu durumda (3.14) sisteminin (x^*, y^*) denge noktası mevcut ve tektir.

İspat. (3.14) sisteminde $a_i x_i^* = u_i$ ve $c_i y_i^* = v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, değişken değiştirmesi yapalım. Bu durumda (3.16) cebirsel sistemi

$$\begin{cases} u_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j \left(\frac{v_j}{c_j}\right) + I_i, \\ v_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} g_j \left(\frac{u_j}{a_j}\right) + J_i \end{cases} \quad (3.19)$$

sistemine indirgenir.

$$N_i(\theta) = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j \left(\frac{v_j}{c_j}\right) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.20)$$

$$P_i(\theta) = \sum_{j=1}^n d_{ij} g_j \left(\frac{u_j}{a_j}\right) + J_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.21)$$

olsun. $R: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $R(\theta) = (N(\theta), P(\theta))^T$, $N(\theta) = (N_1(\theta), N_2(\theta), \dots, N_n(\theta))^T$, $P(\theta) = (P_1(\theta), P_2(\theta), \dots, P_n(\theta))^T$ olmak üzere R dönüşümünün $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\theta_1 = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)})$ ve $\theta_2 = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots, v_n^{(2)})$ için (3.20) – (3.21) ve (H2) hipotezi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \|R(\theta_1) - R(\theta_2)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n [(N_i(\theta_1) - N_i(\theta_2))^2 + (P_i(\theta_1) - P_i(\theta_2))^2] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left| \sum_{j=1}^n b_{ij} \left(f_j \left(\frac{v_j^{(1)}}{c_j} \right) - f_j \left(\frac{v_j^{(2)}}{c_j} \right) \right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \sum_{j=1}^n d_{ij} \left(g_j \left(\frac{u_j^{(1)}}{a_j} \right) - g_j \left(\frac{u_j^{(2)}}{a_j} \right) \right) \right|^2 \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Lipschitz koşulu ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|R(\theta_1) - R(\theta_2)\|_2^2 &\leq \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \left| \frac{v_j^{(1)} - v_j^{(2)}}{c_j} \right| \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j=1}^n |d_{ij}| M_j \left| \frac{u_j^{(1)} - u_j^{(2)}}{a_j} \right| \right)^2 \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{|b_{ij}| L_j}{c_j} \right)^2 \sum_{j=1}^n |v_j^{(1)} - v_j^{(2)}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left(\frac{|d_{ij}| M_j}{a_j} \right)^2 \sum_{j=1}^n |u_j^{(1)} - u_j^{(2)}|^2 \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{|b_{ji}| L_i}{c_i} \right)^2 \sum_{j=1}^n |v_j^{(1)} - v_j^{(2)}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left(\frac{|d_{ji}| M_i}{a_i} \right)^2 \sum_{j=1}^n |u_j^{(1)} - u_j^{(2)}|^2 \right] \quad (3.22) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$C = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{L_i}{c_i} b_{ji} \right)^2, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{M_i}{a_i} d_{ji} \right)^2 \right\}$$

tanımlayalım. O halde (3.22)'den

$$\|R(\theta_1) - R(\theta_2)\|_2^2 \leq C \sum_{j=1}^n \left[|v_j^{(1)} - v_j^{(2)}|^2 + |u_j^{(1)} - u_j^{(2)}|^2 \right]$$

veya

$$\|R(\theta_1) - R(\theta_2)\|_2 \leq \sqrt{C} \|\theta_1 - \theta_2\|_2$$

elde edilir. (3.17) – (3.18) koşullarından $\sqrt{C} < 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ bir daralma dönüşümüdür ve bir tek $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$ sabit noktaya sahiptir.

■

Aşağıdaki teoremden l_1 normu kullanılarak (3.14) sisteminin denge noktasının varlığı ve tekliğini garanti eden daha zayıf koşullar ifade edilmektedir.

Teorem 3.9 ($H2$) hipotezine ek olarak aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın.

$$a_i > M_i \sum_{j=1}^n |d_{ji}|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

ve

$$c_i > L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.24)$$

Bu durumda (3.14) sisteminin $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ denge noktası mevcut ve tektir.

İspat. Teorem 3.8'nin ispatına benzer olarak $a_i x_i^* = u_i$ ve $c_i y_i^* = v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, değişken değiştirmesi yapılarak (3.19) cebirsel sistemi elde edilir. $N_i(\theta)$ ve $P_i(\theta)$ sırasıyla (3.20) ve (3.21) ile tanımlı olmak üzere $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $R(\theta) = (N(\theta), P(\theta))^T$ dönüşümünü ele alalım. Her $\theta_1 = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)})$ ve $\theta_2 = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots, v_n^{(2)})$ için

$$\begin{aligned} \|R(\theta_1) - R(\theta_2)\|_1 &= \sum_{i=1}^n [|N_i(\theta_1) - N_i(\theta_2)| + |P_i(\theta_1) - P_i(\theta_2)|] \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} \left(f_j \left(\frac{v_j^{(1)}}{c_j} \right) - f_j \left(\frac{v_j^{(2)}}{c_j} \right) \right) \right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n d_{ij} \left(g_j \left(\frac{u_j^{(1)}}{a_j} \right) - g_j \left(\frac{u_j^{(2)}}{a_j} \right) \right) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. (H2) hipotezi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\|R(\theta_1) - R(\theta_2)\|_1 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[|b_{ij}| L_j \left| \frac{v_j^{(1)} - v_j^{(2)}}{c_j} \right| \right. \\
&\quad \left. + |d_{ij}| M_j \left| \frac{u_j^{(1)} - u_j^{(2)}}{a_j} \right| \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{|b_{ji}| L_i}{c_i} \left| v_i^{(1)} - v_i^{(2)} \right| \right. \\
&\quad \left. + \frac{|d_{ji}| M_i}{a_i} \left| u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \right| \right) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.23) – (3.24) koşullarından

$$\sum_{j=1}^n \frac{|d_{ji}| M_i}{a_i} < 1 \text{ ve } \sum_{j=1}^n \frac{|b_{ji}| L_i}{c_i} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olduğu açıktır.

$$D = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{L_i}{c_i} \sum_{j=1}^n |b_{ji}|, \frac{M_i}{a_i} \sum_{j=1}^n |d_{ji}| \right\}$$

olsun. (3.25)'den

$$\begin{aligned}
\|R(\theta_1) - R(\theta_2)\|_1 &\leq D \sum_{i=1}^n \left(\left| v_i^{(1)} - v_i^{(2)} \right| + \left| u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \right| \right) \\
&= D \|\theta_1 - \theta_2\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir. $D < 1$ olduğundan $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ bir daralma dönüşümüdür. Buradan $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümünün $R(\theta) = \theta$ olacak şekilde bir tek sabit noktası vardır. Dolayısıyla (3.14) sisteminin bir tek $(x_i^*, y_i^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ denge noktası vardır. ■

Aşağıdaki teoremden (3.14) sisteminin denge noktasının üstel kararlılığı gösterilecektir.

Teorem 3.10 (H2) hipotezine ek olarak aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın.

$$a_i > \max \left\{ \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j, M_i \sum_{j=1}^n |d_{ji}| \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.26}$$

ve

$$c_i > \max \left\{ L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|, \sum_{j=1}^n |d_{ij}| M_j \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.27}$$

Bu durumda (3.14) sisteminin (x^*, y^*) denge noktası kesirli üstel kararlıdır.

İspat. Açık olarak görülmektedir ki (3.26) ve (3.27) koşulları sağlandığında Teorem 3.9'un (3.23) ve (3.24) hipotezleri de sağlanır. Dolayısıyla (3.14) sisteminin $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ denge noktası mevcut ve tektir. (3.14) sisteminde $z_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ ve $w_i(t) = y_i(t) - y_i^*$ değişken değiştirmeleri yapıldığında aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{cases} (T_\alpha z_i)(t) = -a_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j(w_j(t)), & i = 1, 2, \dots, n, \\ (T_\alpha w_i)(t) = -c_i w_i(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij} G_j(z_j(t)), & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.28)$$

Burada $F_j(w_j(t)) = f_j(w_j(t) + y_j^*) - f_j(y_j^*)$ ve $G_j(z_j(t)) = g_j(z_j(t) + x_j^*) - g_j(x_j^*)$ olup $j = 1, 2, \dots, n$ için $F_j(0) = 0$, $G_j(0) = 0$ ve F_j , G_j fonksiyonları Lipschitz koşulunu sırasıyla aynı L_j , M_j sabitleri ile sağlar. (3.14) sisteminin (x^*, y^*) denge noktasının kesirli üstel kararlılığını göstermek için (3.28) sisteminin sıfır çözümünün kesirli üstel kararlılığını göstereceğiz.

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i^2(t) + w_i^2(t))$$

Lyapunov fonksiyonunu göz önüne alalım. V fonksiyonunun (3.28) sisteminin çözümleri boyunca kesirli uyumlu türevleri alındığında

$$\begin{aligned} (T_\alpha V)(t) &= \sum_{i=1}^n (z_i(t) (T_\alpha z_i)(t) + w_i(t) (T_\alpha w_i)(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[z_i(t) \left(-a_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j(w_j(t)) \right) \right. \\ &\quad \left. + w_i(t) \left(-c_i w_i(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij} G_j(z_j(t)) \right) \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n (-a_i z_i^2(t) - c_i w_i^2(t) \\ &\quad + \left| z_i(t) \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j(w_j(t)) + w_i(t) \sum_{j=1}^n d_{ij} G_j(z_j(t)) \right|) \end{aligned}$$

elde edilir. $j = 1, 2, \dots, n$, için F_j ve G_j fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sırasıyla

L_j ve M_j sabitleri ile sağladığı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
(T_\alpha V)(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i z_i^2(t) - c_i w_i^2(t) \right. \\
&\quad \left. + |z_i(t)| \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |w_j(t)| + |w_i(t)| \sum_{j=1}^n |d_{ij}| M_j |z_j(t)| \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i z_i^2(t) - c_i w_i^2(t) \right. \\
&\quad \left. + L_i |w_i(t)| \sum_{j=1}^n |b_{ji}| |z_j(t)| + M_i |z_i(t)| \sum_{j=1}^n |d_{ji}| |w_j(t)| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Cauchy- Schwartz eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{aligned}
(T_\alpha V)(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i z_i^2(t) - c_i w_i^2(t) + \sum_{j=1}^n \frac{L_i |b_{ji}|}{2} (|z_j(t)|^2 + |w_i(t)|^2) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \frac{M_i |d_{ji}|}{2} (|z_i(t)|^2 + |w_j(t)|^2) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i z_i^2(t) - c_i w_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_i |b_{ji}| |z_j(t)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_i |b_{ji}| |w_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_i |d_{ji}| |z_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_i |d_{ji}| |w_j(t)|^2 \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
(T_\alpha V)(t) &\leq - \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j - \frac{M_i}{2} \sum_{j=1}^n |d_{ji}| \right) |z_i(t)|^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(c_i - \frac{L_i}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |d_{ij}| M_j \right) |w_i(t)|^2 \\
&\leq - \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j - \frac{M_i}{2} \sum_{j=1}^n |d_{ji}| \right), \right. \\
&\quad \left. \left(c_i - \frac{L_i}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |d_{ij}| M_j \right) \right\} \sum_{i=1}^n (|z_i(t)|^2 + |w_i(t)|^2)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur.

$$F = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_j |b_{ij}| - \frac{M_i}{2} \sum_{j=1}^n |d_{ji}| \right), \left(c_i - \frac{L_i}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j |d_{ij}| \right) \right\}$$

olsun. (3.26) ve (3.27) koşullarından $F > 0$ olup (3.29) eşitsizliği

$$(T_\alpha V)(t) \leq -2FV(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada Lemma 3.1 uygulandığında

$$V(t) \leq \mathbf{E}_\alpha(-2F, t - t_0) V(t_0)$$

ya da

$$\|(z(t), w(t))\|_2 \leq \mathbf{E}_\alpha(-F, t - t_0) \|(z(t_0), w(t_0))\|_2$$

bulunur. Bu da bize (3.28) sisteminin sıfır çözümünün kesirli üstel kararlı olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıda Teorem 3.9 ve Teorem 3.10'dan elde edilen koşullar düşünülerek yazılmış örnekler verilmiştir. Bu örneklerin sonuçları grafiklerle desteklenmiştir.

Örnek 3.4 Aşağıdaki tekrarlayan yapay sinir ağı modelini ele alalım.

$$\begin{cases} (T_\alpha x_1)(t) = -0.8x_1(t) - 0.06f(y_1(t)) + 0.05f(y_2(t)) + 0.004 \\ (T_\alpha x_2)(t) = -0.8x_2(t) - 0.03f(y_1(t)) + 0.06f(y_2(t)) + 0.001 \\ (T_\alpha y_1)(t) = -0.6y_1(t) - 0.03f(x_1(t)) + 0.03f(x_2(t)) + 0.001 \\ (T_\alpha y_2)(t) = -0.6y_2(t) - 0.02f(x_1(t)) + 0.04f(x_2(t)) + 0.002 \end{cases} \quad (3.30)$$

Burada aktivasyon fonksiyonu $f(u) = 0.5(|u + 1| - |u - 1|)$ olup bu fonksiyon Lipschitz şartını $L_1 = L_2 = M_1 = M_2 = 1$ olarak sağlamaktadır. (3.30) sisteminin katsayıları $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.8$, $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.6$, $b_{11} = -0.06$, $b_{12} = 0.05$, $b_{21} = -0.03$, $b_{22} = 0.06$, $d_{11} = -0.03$, $d_{12} = 0.03$, $d_{21} = -0.02$, $d_{22} = 0.04$, $I_1 = 0.004$, $I_2 = 0.001$, $J_1 = 0.001$ ve $J_2 = 0.002$ dir. (3.30) sisteminin denge noktası

$$\begin{cases} -0.8x_1^* - 0.06f(y_1^*) + 0.05f(y_2^*) + 0.004 = 0 \\ -0.8x_2^* - 0.03f(y_1^*) + 0.06f(y_2^*) + 0.001 = 0 \\ -0.6y_1^* - 0.03f(x_1^*) + 0.03f(x_2^*) + 0.001 = 0 \\ -0.6y_2^* - 0.02f(x_1^*) + 0.04f(x_2^*) + 0.002 = 0 \end{cases}$$

cebirsal sistemi çözülerek elde edilir. Burada denge noktası $(0.00509242, 0.00143881, 0.00148399, 0.00325951)$ bulunur. (3.30) sisteminin katsayıları Teorem 3.10'un dolayısıyla Teorem 3.9'un hipotezlerini sağlar. Gerçekten,

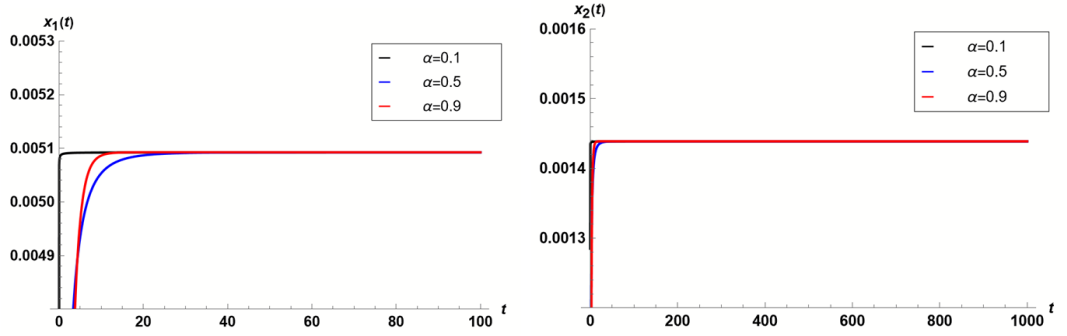
$$i = 1 \text{ için } a_1 = 0.8 > \max \left\{ \sum_{j=1}^2 |b_{1j}| L_j, M_1 \sum_{j=1}^2 |d_{j1}| \right\} = 0.11$$

$$i = 2 \text{ için } a_2 = 0.8 > \max \left\{ \sum_{j=1}^2 |b_{2j}| L_j, M_2 \sum_{j=1}^2 |d_{j2}| \right\} = 0.09$$

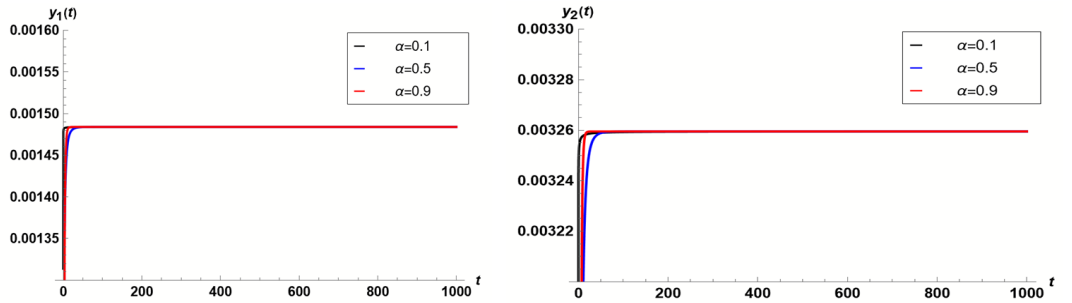
$$i = 1 \text{ için } c_1 = 0.6 > \max \left\{ L_1 \sum_{j=1}^2 |b_{j1}|, \sum_{j=1}^2 |d_{1j}| M_j \right\} = 0.09$$

$$i = 2 \text{ için } c_2 = 0.6 > \max \left\{ L_2 \sum_{j=1}^2 |b_{j2}|, \sum_{j=1}^2 |d_{2j}| M_j \right\} = 0.11$$

olup (3.26) ve (3.27) koşulları sağlanır. O halde (3.30) sisteminin denge noktası tek olup kesirli üstel karardır. (3.30) sisteminin $(x(t), y(t))^T = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))^T$ çözüm vektörünün $x_1(t), x_2(t), y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri Mathematica programı ile çizdirilmiştir (Şekil 3.5 ve Şekil 3.6). Bu grafiklerde de $\alpha = 0.1, \alpha = 0.5, \alpha = 0.9$ değerleri için sistemin denge noktasının üstel kararlılığı görülmektedir.



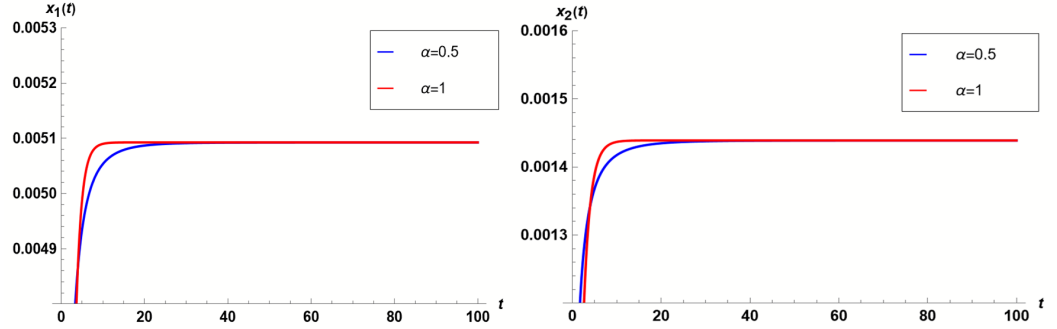
Şekil 3.5 (3.30) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri



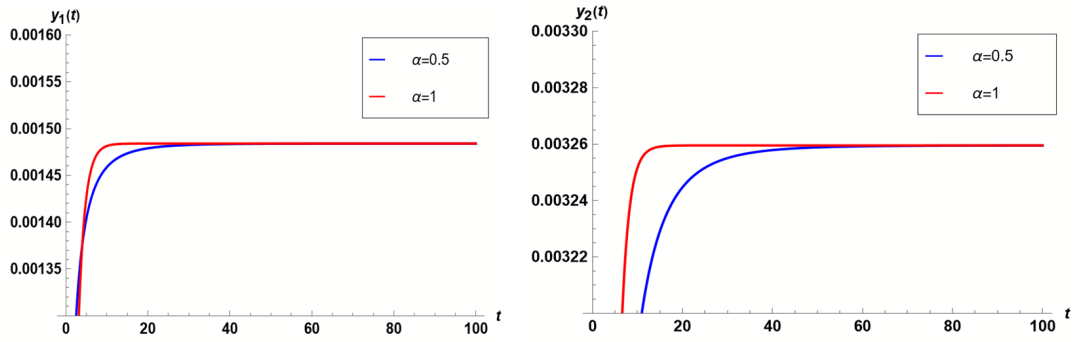
Şekil 3.6 (3.30) sisteminin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri

(3.30) sisteminin denge noktasının $(x(t), y(t))^T = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))^T$ çözüm

vektörünün $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenleri $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 1$ değerleri için üstel kararlılığı görülmektedir (Şekil 3.7 ve Şekil 3.8).



Şekil 3.7 (3.30) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri



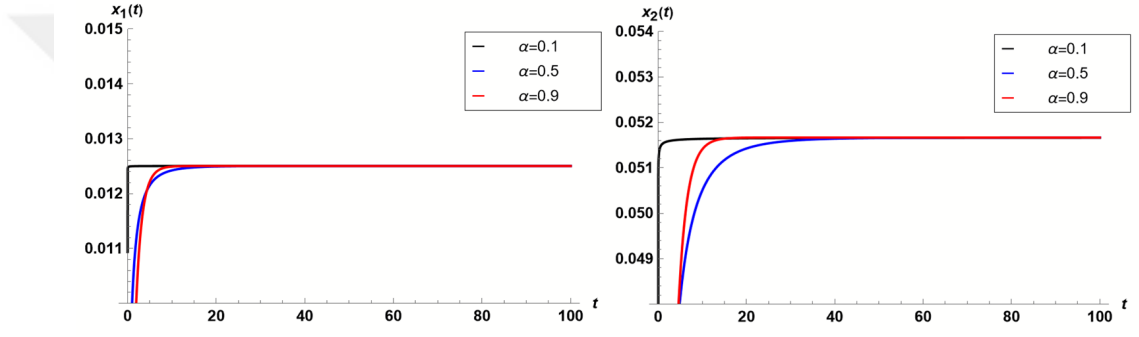
Şekil 3.8 (3.30) sisteminin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri

Örnek 3.5 Aşağıdaki tekrarlayan yapay sinir ağı modelini ele alalım.

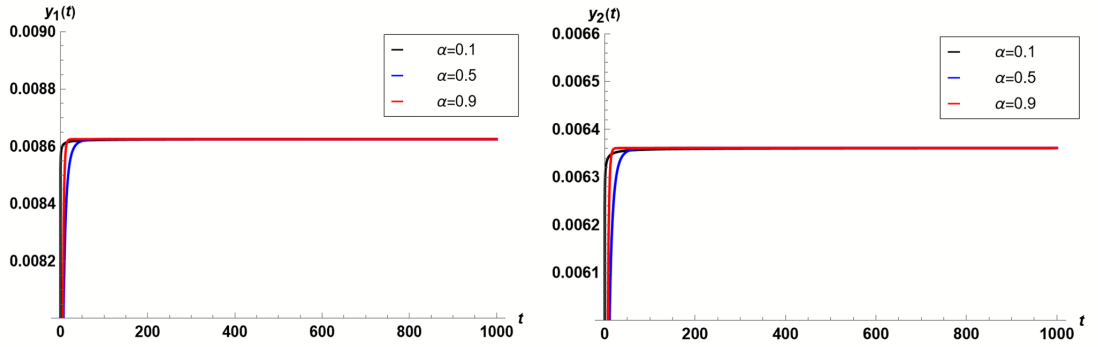
$$\begin{cases} (T_\alpha x_1)(t) = -0.8x_1(t) - 0.06f(y_1(t)) + 0.05f(y_2(t)) + 0.02 \\ (T_\alpha x_2)(t) = -0.6x_2(t) - 0.03f(y_1(t)) + 0.06f(y_2(t)) + 0.001 \\ (T_\alpha y_1)(t) = -0.6y_1(t) - 0.03g(x_1(t)) + 0.03g(x_2(t)) + 0.004 \\ (T_\alpha y_2)(t) = -0.6y_2(t) - 0.02g(x_1(t)) + 0.04g(x_2(t)) + 0.002 \end{cases} \quad (3.31)$$

Burada aktivasyon fonksiyonları $f(u) = \frac{1}{u^2 + 1}$ ve $g(u) = 0.5(|u + 1| - |u - 1|)$ olup bu fonksiyonlar Lipschitz şartını $L_1 = L_2 = M_1 = M_2 = 1$ olarak sağlamaktadır. (3.31) sisteminin katsayıları $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.6$, $b_{11} = -0.06$, $b_{12} = 0.05$, $b_{21} = -0.03$, $b_{22} = 0.06$, $d_{11} = -0.03$, $d_{12} = 0.03$,

$d_{21} = -0.02$, $d_{22} = 0.04$, $I_1 = 0.02$, $I_2 = 0.001$, $J_1 = 0.004$ ve $J_2 = 0.002$ dir. (3.31) sisteminin denge noktası $(0.012503, 0.0516663, 0.00862483, 0.00636099)$ olarak bulunur. (3.31) sisteminin katsayıları Teorem 3.10'un dolayısıyla Teorem 3.9'un hipotezlerini sağlar. O halde (3.31) sisteminin denge noktası tek olup kesirli üstel kararlıdır. (3.31) sisteminin $(x(t), y(t))^T = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))^T$ çözüm vektörünün $x_1(t), x_2(t), y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri Mathematica programı ile çizdirilmiştir (Şekil 3.9 ve Şekil 3.10). Bu grafiklerde de $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerleri için sistemin denge noktasının üstel kararlılığı görülmektedir.



Şekil 3.9 (3.31) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri



Şekil 3.10 (3.31) sisteminin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri

4. CAPUTO-HADAMARD KESİRLİ TÜREVİ İÇEREN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIĞI

4.1 Hadamard Kesirli İntegral ve Türev Operatörleri

Bilindiği gibi literatürde pek çok kesirli integral tanımı mevcuttur. Çekirdeğinde logaritmik fonksiyonun keyfi kuvvetini içeren Hadamard integrali 1892 yılında Hadamard tarafından önerilmiştir (Hadamard 1892). Hadamard integralinin sınırlılık ve yarıgrup özelliği ile Hadamard kesirli integrallerin türevle bağlantısı son yıllarda yapılan çalışmalarda irdelenmiştir (Kilbas 2001, Butzer vd. 2002, Ma ve Li 2017). Hadamard kesirli türev içeren diferensiyel denklemler ve eşitsizliklerin kapsamlı bir incelenmesi Ahmad vd. tarafından yazılmış olan kitapta mevcuttur (Ahmad vd. 2017). Literatürde lineer olmayan Hadamard türevli diferensiyel denklemlerin kararlılık analizinin yapıldığı çalışmalar mevcuttur (Özaydın ve Karakoç 2019, Wang vd. 2019, Dai ve Ma 2022). Hadamard türev içeren gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini garanti eden koşullar da 2020 yılında elde edilmiştir (Mahmudov ve Al-Khateeb 2020).

Bu bölümde, Hadamard kesirli türev ve integralleri ile özellikle Caputo-Hadamard kesirli türevi üzerinde durulacaktır. Ayrıca, Caputo-Hadamard kesirli türevi ile modellenmiş Hopfield yapay sinir ağınnın denge noktasının varlığı, tekliği ve denge noktasının Mittag-Leffler kararlılığı ile ilgili teoremler ispatlanacaktır. Aşağıda Hadamard kesirli türevinin tanımı verilmiştir.

Tanım 4.1 (Kilbas vd. 2006) $0 < t_0 < t$ ve $\text{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere

$$({}_H I_{t_0}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlı ${}_H I_{t_0}^\alpha$ operatörüne α . basamaktan Hadamard kesirli integral operatörü denir, burada $\log(\cdot) = \log_e(\cdot)$ dir.

δ türevi $\delta = t \frac{d}{dt}$ ve $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ olmak üzere f fonksiyonunun Hadamard kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.2 (Kilbas vd. 2006) $0 < t_0 < t$ ve $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere

$$({}_H D_{t_0}^\alpha f)(t) = \delta^n ({}_H I_{t_0}^{n-\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlı ${}_H D_{t_0}^\alpha$ operatörüne α . basamaktan Hadamard kesirli türev operatörü denir. Ayrıca $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha < 1$ ise, bu durumda Hadamard kesirli türevi $t > t_0$ için

$$({}_H D_{t_0}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt}\right) \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f(s) \frac{ds}{s}$$

integraline indirgenir.

$\alpha = m \in \mathbb{N}$ ise bu durumda

$$({}_H D_{t_0}^\alpha f)(t) = (\delta^m f)(t)$$

dir. Ayrıca $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ için

$${}_H D_{t_0}^\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{t}{t_0}\right)^{-\alpha}$$

olduğu Tanım 4.2'den görülebilir. Gerçekten $f(t) = 1$ olmak üzere (4.2) tanımından

$${}_H D_{t_0}^\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt}\right) \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} \frac{ds}{s}$$

olup $u = \log \frac{t}{s}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} {}_H D_{t_0}^\alpha(1) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt}\right) \int_1^{\log \frac{t}{t_0}} u^{-\alpha} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt}\right) \left(\frac{1}{1-\alpha} \left(\log \frac{t}{t_0}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{t}{t_0}\right)^{-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Hadamard kesirli türevi sabit fonksiyonun türevinin sıfır olması özelliğini sağlamaz. Bu yüzden son yıllarda Hadamard türevinin uygulamalarda daha elverişli olan Caputo türünden bir genelleştirilmesi önerilmiştir (Jarad vd. 2012, Gambo vd 2014).

4.2 Caputo-Hadamard Kesirli Türevi

Bu kesimde Caputo-Hadamard kesirli türev operatörü tanıtılarak bazı temel özellikleri ifade edilecektir.

Tanım 4.3 (Jarad vd. 2012) $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ ve $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ olmak üzere

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha f)(t) = \left({}_H D_{t_0}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(t_0)}{k!} \left(\log \frac{x}{t_0} \right)^k \right] \right) (t)$$

şeklinde tanımlı ${}_{CH}D_{t_0}^\alpha$ operatörüne α . basamaktan Caputo-Hadamard kesirli türev operatörü denir.

Özel olarak $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ ise

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha f)(t) = ({}_H D_{t_0}^\alpha [f(x) - f(t_0)])(t)$$

dir.

$\text{Re}(\alpha) \geq 0$, $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ ve $AC[t_0, t_1]$, $[t_0, t_1]$ üzerinde tanımlı mutlak sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere $AC_\delta^n[t_0, t_1]$ uzayı

$$AC_\delta^n[t_0, t_1] = \left\{ g : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} : \delta^{n-1}[g(t)] \in AC[t_0, t_1], \delta = t \frac{d}{dt} \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Jarad vd. Caputo-Hadamard türevinin aşağıdaki gösterimini elde etmişlerdir.

Teorem 4.1 (Jarad vd. 2012) $\text{Re}(\alpha) \geq 0$, $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ ve $f(t) \in AC_\delta^n[t_0, t_1]$ olmak üzere $t > t_0$ için

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \delta^n f(s) \frac{ds}{s} = ({}_H I_{t_0}^{n-\alpha} (\delta^n f))(t) \quad (4.3)$$

eşitliği sağlanır.

$\alpha = m \in \mathbb{N}$ ise bu durumda

$$\left({}_{CH}D_{t_0^+}^m f\right)(t) = (\delta^m f)(t)$$

dir. Ayrıca

$$\left({}_{CH}D_{t_0^+}^0 f\right)(t) = f(t)$$

dir.

Uyarı 4.1 $\alpha \in (0, 1)$ için Caputo-Hadamard türevi

$$\left({}_{CH}D_{t_0}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f'(s) ds \quad (4.4)$$

şeklindedir.

Uyarı 4.2 Sabit fonksiyonun Caputo-Hadamard kesirli türevi sıfırdır. Gerçekten c gerçel sayı ve $f(t) = c$ olmak üzere (4.4) tanımından

$$\left({}_{CH}D_{t_0}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f'(s) ds$$

integralinde $f'(s) = 0$ olduğundan

$${}_{CH}D_{t_0}^\alpha(c) = 0$$

elde edilir.

Caputo-Hadamard kesirli türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği Banach sabit nokta teoremi yardımıyla gösterilmiştir (Adjabi vd. 2016). Ayrıca Banach sabit nokta teoremi, Leray-Schauder ve Krasnoselski sabit nokta teoremleri kullanılarak nötral tipten diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık-tekliği

için yeter koşullar elde edilmiştir (Ahmad ve Ntouyas 2017). 2019 yılında ise Caputo-Hadamard kesirli diferensiyel denklemler için karşılaştırma teoremleri ifade edilmiş ve çözümlerin parametreye sürekli bağıllığı incelenmiştir (Ma 2019).

Lemma 4.1 (Ma 2019) $f(t) \in AC[t_0, t_1]$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$({}_H I_{t_0}^\alpha ({}_C D_{t_0}^\alpha f))(t) = f(t) - f(t_0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (4.1) Hadamard kesirli integral ve (4.4) Caputo-Hadamard kesirli türev tanımından

$$({}_H I_{t_0}^\alpha ({}_C D_{t_0}^\alpha f))(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\int_{t_0}^s \left(\log \frac{s}{v} \right)^{-\alpha} f'(v) dv \right) \frac{ds}{s}$$

yazılır. Bu eşitlikte integral sırası değiştirilirse

$$({}_H I_{t_0}^\alpha ({}_C D_{t_0}^\alpha f))(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t f'(v) \left(\int_v^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{v} \right)^{-\alpha} \frac{ds}{s} \right) dv$$

elde edilir. İçerideki integralin hesabı için $u = \frac{\log s - \log v}{\log t - \log v}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} ({}_H I_{t_0}^\alpha ({}_C D_{t_0}^\alpha f))(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t f'(v) \left(\int_0^1 \left(\log \frac{t}{v} \right)^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\log \frac{t}{v} \right)^{-\alpha} \left(\log \frac{t}{v} \right) du \right) dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t f'(v) \left(\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha} du \right) dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t f'(v) \beta(1-\alpha, \alpha) dv \end{aligned}$$

elde edilir. Burada β fonksiyonunun $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} ({}_H I_{t_0}^\alpha ({}_C D_{t_0}^\alpha f))(t) &= \int_{t_0}^t f'(v) dv \\ &= f(t) - f(t_0) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Aşağıdaki özellik Dai ve Ma tarafından 2022 yılında ispatlanmıştır ve Caputo-Hadamard türevi içeren sistemlerin kararlılık özelliklerinin incelenmesinde önemli bir yere sahiptir.

Lemma 4.2 (Dai ve Ma 2022) $x(t) \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$ ve $m \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $t > t_0$ için

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x^{2m})(t) \leq 2x^m(t) ({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x^m)(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$y(t) = \Gamma(1 - \alpha) \left(({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x^{2m})(t) - 2x^m(t) ({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x^m)(t) \right)$$

olsun. (4.4) Caputo-Hadamard kesirli türev tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} y(t) &= 2m\Gamma(1 - \alpha) \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} x^{2m-1}(s) \left(\frac{dx(s)}{ds} \right) ds \right) \\ &\quad - 2m\Gamma(1 - \alpha) \left(x^m(t) \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} x^{m-1}(s) \left(\frac{dx(s)}{ds} \right) ds \right) \\ &= 2m \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} [x^{2m-1}(s) - x^m(t) x^{m-1}(s)] \left(\frac{dx(s)}{ds} \right) ds \\ &= \int_{t_0}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} \frac{d}{ds} [x^m(s) - x^m(t)]^2 ds \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu integrali hesaplamak için $u = \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha}$ ve

$dv = \frac{d}{ds} [x^m(s) - x^m(t)]^2 ds$ olmak üzere kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} [x^m(s) - x^m(t)]^2 \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \alpha \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha-1} [x^m(s) - x^m(t)]^2 \frac{ds}{s} \\ &= \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} [x^m(s) - x^m(t)]^2 \Big|_{s=t} - \left(\log \frac{t}{t_0} \right)^{-\alpha} [x^m(t_0) - x^m(t)]^2 \\ &\quad - \int_{t_0}^t \alpha \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha-1} [x^m(s) - x^m(t)]^2 \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki limit hesaplandığında

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t} \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} [x^m(s) - x^m(t)]^2 &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{[x^m(s) - x^m(t)]^2}{\left(\log \frac{t}{s} \right)^\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$y(t) = - \left(\log \frac{t}{t_0} \right)^{-\alpha} [x^m(t_0) - x^m(t)]^2 - \int_{t_0}^t \alpha \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha-1} [x^m(s) - x^m(t)]^2 \frac{ds}{s} \leq 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x^{2m})(t) - 2x^m(t) ({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x^m)(t) \leq 0$$

olup istenilen elde edilir. ■

Sonuç 4.1 Lemma 4.2’de $m = 1$ alınır

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x^2)(t) \leq 2x(t) ({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x)(t)$$

elde edilir. Bu sonuç aynı zamanda (He vd. 2022, He ve Zhou 2022) makalelerinde de yer almaktadır.

Tam fonksiyon olan Mittag-Leffler fonksiyonu kesirli basamaktan diferensiyel denklemler teoresinde önemli bir yere sahiptir (Podlubny 1999, Kilbas vd. 2006).

Tanım 4.4 (Podlubny 1999) $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlı olan $E_\alpha(z)$ fonksiyonuna Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

Aşağıdaki Lemma Lyapunov yöntemi ile kararlılık incelemelerinde önemli bir araç niteliğindedir (Dai ve Ma 2022, He ve Zhou 2022).

Lemma 4.3 $A > 0$ bir sabit, $V(t)$ $[t_0, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha V)(t) \leq -AV(t)$$

sağlansın. Bu durumda

$$V(t) \leq E_\alpha \left(-A \left(\log \frac{t}{t_0} \right)^\alpha \right) V(t_0)$$

olup, burada E_α , (4.5) ile tanımlı Mittag-Leffler fonksiyonudur.

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x)(t) = f(t, x) \quad (4.6)$$

sistemini $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım, burada $0 < \alpha < 1$ dir.

Tanım 4.5 (Li vd. 2009) (Mittag-Leffler Kararlılık) $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $m(0) = 0$, $c > 0$ ve $m(x) \geq 0$ olmak üzere

$$\|x(t)\| \leq \left\{ m(x_0) E_\alpha \left(-\lambda \left(\log \frac{t}{t_0} \right)^\alpha \right) \right\}^c$$

eşitsizliği sağlanırsa (4.6) sisteminin sıfır çözümüne Mittag-Leffler kararlıdır denir, burada $m(x)$ fonksiyonu lokal Lipschitz koşulunu sağlar.

4.3 Caputo-Hadamard Kesirli Türev İçeren Hopfield Sinir Ağlarının Mittag-Leffler Kararlılığı

Bu kesimde Caputo-Hadamard kesirli türevli Hopfield türündeki bir yapay sinir ağı modeli incelenmektedir. İlk olarak sistemin denge noktasının varlık ve tekliği ispatlanmıştır. Varlık ve teklik ispatındaki temel araç daralma dönüşüm prensibidir. Daha sonra Caputo-Hadamard türevinin önceki kesimde verilen özellikleri yardımı ile uygun bir Lyapunov fonksiyonu ele alınmış ve denge noktasının Mittag-Leffler kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir. Caputo-Hadamard kesirli türev içeren Hopfield yapay sinir ağı türündeki aşağıdaki sistemi göz önüne alalım.

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha x_i)(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (4.8)$$

(4.7) sisteminin denge noktası

$$a_i x_i^* = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j^*) + I_i \quad (4.9)$$

ya da

$$x_i^* = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j^*) + I_i \right) \quad (4.10)$$

eşitliklerini sağlayan bir $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$ sabit vektörüdür.

Bu kesim boyunca f_j aktivasyon fonksiyonlarının Lipschitz sürekli olduğu kabul edilecektir. Yani,

(H3) $|f_j(u_j) - f_j(v_j)| \leq L_j |u_j - v_j|$, her $u_j, v_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$, sağlanacak şekilde pozitif L_j sabiti mevcuttur.

Aşağıdaki teoremden (4.7) sisteminin denge noktasının varlığı ve tekliği için yeter koşullar elde edilmiştir.

Teorem 4.2 (H3) hipotezine ek olarak kabul edelim ki

$$a_i > \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

sağlansın. Bu durumda (4.7) sisteminin x^* denge noktası mevcut ve tektir.

İspat. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ olmak üzere $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$B(x) = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$ dönüşümünü

$$B_i(x) = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j) + I_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

şeklinde tanımlayalım. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ normu kullanılarak B dönüşümünün $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$B_i(x) - B_i(y) = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n b_{ij} (f_j(x_j) - f_j(y_j))$$

olup her iki yanının mutlak değeri alındığında

$$|B_i(x) - B_i(y)| \leq \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |f_j(x_j) - f_j(y_j)|$$

elde edilir. (H3) koşulu sağladığından

$$|B_i(x) - B_i(y)| \leq \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |x_j - y_j|$$

dir. Son eşitsizliğin her iki tarafının maximumu alındığında

$$\max_{1 \leq i \leq n} |B_i(x) - B_i(y)| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |x_j - y_j| \right\}$$

ya da

$$\begin{aligned} \|Bx - By\|_{\infty} &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |x_j - y_j| \right\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right\} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right\} \|x - y\|_{\infty} \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.11) koşulundan $\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right\} < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, olduğu açıktır.

$$A_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right\}$$

olsun. (4.12) den

$$\|Bx - By\|_{\infty} \leq A_1 \|x - y\|_{\infty}$$

elde edilir. $A_1 < 1$ olduğundan $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ daralma dönüşümüdür ve B dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Bu yüzden (4.7) sisteminin bir tek sabit noktası vardır ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.3 Teorem 4.2 'nin hipotezlerine ek olarak aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$a_i > L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.13)$$

Bu durumda (4.7) sisteminin $x^* \in \mathbb{R}^n$ denge noktası Mittag-Leffler kararlıdır.

İspat. Teorem 4.2 'nin hipotezleri altında (4.7) denklem sisteminin denge noktası mevcut ve tektir. (4.7) sisteminde $y_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ değişken değiştirmesi yapıldığında aşağıdaki sistem elde edilir.

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha y_i)(t) = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j(y_j(t)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.14)$$

Burada aktivasyon fonksiyonu $F_j(y_j(t)) = f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)$ dir. $j = 1, 2, \dots, n$ için $F_j(0) = 0$ ve F_j fonksiyonu Lipschitz koşulunu aynı L_j sabiti ile sağladığı kolaylıkla görülmektedir. (4.7) sisteminin x^* denge noktasının Mittag-Leffler kararlılığını göstermek için (4.14) sisteminin sıfır çözümünün Mittag-Leffler kararlılığını göstereceğiz.

$$V(t) = V(t, y(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} y_i^2(t)$$

Lyapunov fonksiyonunu ele alalım. V fonksiyonunun (4.14) sisteminin çözümleri boyunca Caputo-Hadamard türevi alındığında

$$\begin{aligned} ({}_{CH}D_{t_0}^\alpha V)(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} ({}_{CH}D_{t_0}^\alpha y_i^2)(t) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} 2y_i(t) ({}_{CH}D_{t_0}^\alpha y_i)(t) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \left(-a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j(y_j(t)) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \left| y_i(t) \sum_{j=1}^n b_{ij} F_j(y_j(t)) \right| \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Lipschitz koşulu ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
({}_{CH}D_{t_0}^\alpha V)(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + |y_i(t)| \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |y_j(t)| \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \frac{|y_i(t)|^2 + |y_j(t)|^2}{2} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |y_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| L_i |y_j(t)|^2 \right) \\
&\leq -\sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|b_{ij}| L_j + |b_{ji}| L_i) \right) y_i^2(t) \\
&\leq -\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|b_{ij}| L_j + |b_{ji}| L_i) \right\} \sum_{i=1}^n y_i^2(t) \quad (4.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$A_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|b_{ij}| L_j + |b_{ji}| L_i) \right\}$$

olsun. (4.11) ve (4.13) koşullarından $A_2 > 0$ dir. O halde (4.15) den

$$({}_{CH}D_{t_0}^\alpha V)(t) \leq -2A_2 V(t)$$

elde edilir. Lemma 4.3 uygulandığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$V(t) \leq E_\alpha \left(-2A_2 \left(\log \frac{t}{t_0} \right)^\alpha \right) V(t_0)$$

Buradan

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} y_i^2(t) \leq E_\alpha \left(-2A_2 \left(\log \frac{t}{t_0} \right)^\alpha \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} y_i^2(t_0)$$

ya da

$$\|y(t)\|_2 \leq \left[E_\alpha \left(-2A_2 \left(\log \frac{t}{t_0} \right)^\alpha \right) \right]^{1/2} \|y(t_0)\|_2$$

bulunur. Bu bize (4.14) sisteminin sıfır çözümünün Mittag-Leffler kararlı olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki örnekte Caputo-Hadamard kesirli türevli bir Hopfield yapay sinir ağı ele alınmış ve bu kesimde elde edilen sonuçlar kullanılarak denge noktasının tek ve Mittag-Leffler kararlı olduğu gösterilmiştir.

Örnek 4.1 Aşağıdaki Hopfield tipi yapay sinir ağı modelini ele alalım.

$$\begin{cases} ({}_CH D_{t_0}^\alpha x_1)(t) = -0.3x_1(t) - 0.04f(x_1(t)) + 0.02f(x_2(t)) + 0.04 \\ ({}_CH D_{t_0}^\alpha x_2)(t) = -0.4x_2(t) - 0.02f(x_1(t)) - 0.03f(x_2(t)) + 0.01 \end{cases} \quad (4.16)$$

Burada aktivasyon fonksiyonu $f(u) = 0.5(|u+1| - |u-1|)$ olup bu fonksiyon Lipschitz şartını $L_1 = L_2 = 1$ olarak sağlamaktadır. (4.16) sisteminin katsayıları $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.4$, $b_{11} = -0.04$, $b_{12} = 0.02$, $b_{21} = -0.02$, $b_{22} = -0.03$, $I_1 = 0.04$ ve $I_2 = 0.01$ dir. (4.16) sisteminin denge noktası

$$\begin{cases} -0.3x_1^* - 0.04f(x_1^*) + 0.02f(x_2^*) + 0.04 = 0 \\ -0.4x_2^* - 0.02f(x_1^*) - 0.03f(x_2^*) + 0.01 = 0 \end{cases}$$

cebirsel sistemi çözülerek $(0.11869, 0.0177353)$ olarak bulunur. (4.16) sisteminin katsayıları Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'in hipotezlerini sağlar. Gerçekten,

$$i = 1 \text{ için } a_1 = 0.3 > \sum_{j=1}^2 L_j |b_{1j}| = 0.06$$

$$i = 2 \text{ için } a_2 = 0.4 > \sum_{j=1}^2 L_j |b_{2j}| = 0.05$$

olup (4.11) koşulu sağlanır. Benzer olarak

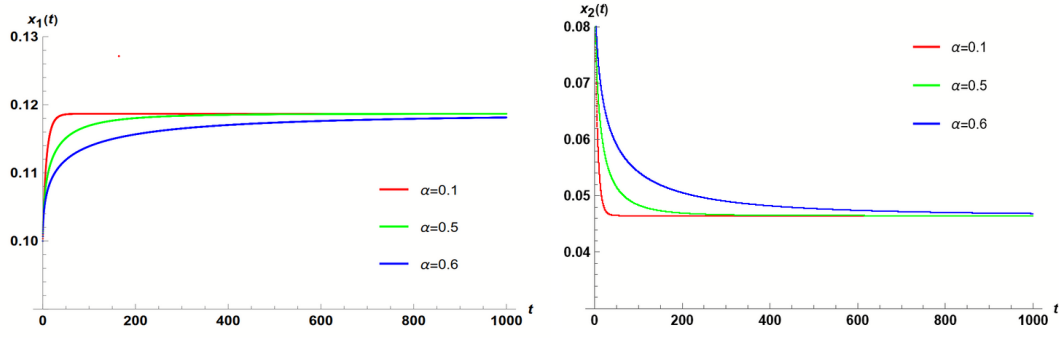
$$i = 1 \text{ için } a_1 = 0.3 > \sum_{j=1}^2 |b_{j1}| = 0.06$$

$$i = 2 \text{ için } a_2 = 0.4 > \sum_{j=1}^2 |b_{j2}| = 0.05$$

olup (4.13) koşulu da sağlanır. O halde (4.16) sisteminin denge noktası tek olup Mittag-Leffler kararlıdır. (4.16) sisteminin $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ çözüm vektörünün $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında Adams-Bashford-Moulton yaklaşımı kullanılarak elde edilen Caputo-Hadamard türevlerini içeren sistemin sayısal çözümleri $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.6$ değişen değerleri için Mathematica programı ile çizdirilmiştir (Diethelm vd. 2002). Bu grafiklerde de (4.16) sisteminin denge noktasının üstel kararlılığı görülmektedir.

Örnek 4.2 Aşağıdaki Hopfield tipi yapay sinir ağı modelini ele alalım.

$$\begin{cases} ({}_CH D_{t_0}^\alpha x_1)(t) = -0.4x_1(t) - 0.02f(x_1(t)) - 0.01f(x_2(t)) + 0.06 \\ ({}_CH D_{t_0}^\alpha x_2)(t) = -0.6x_2(t) - 0.06f(x_1(t)) - 0.04f(x_2(t)) + 0.08 \end{cases} \quad (4.17)$$



Şekil 4.1 (4.16) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri

Burada aktivasyon fonksiyonu $f(u) = \frac{e^u}{1 + e^u}$ olup bu fonksiyon Lipschitz şartını $L_1 = L_2 = 1$ olarak sağlamaktadır. (4.17) sisteminin katsayıları $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.6$, $b_{11} = -0.02$, $b_{12} = 0.01$, $b_{21} = -0.06$, $b_{22} = -0.04$, $I_1 = 0.06$ ve $I_2 = 0.08$ dir. (4.17) sisteminin denge noktası

$$\begin{cases} -0.4x_1^* - 0.02f(x_1^*) - 0.01f(x_2^*) + 0.06 = 0 \\ -0.6x_2^* - 0.06f(x_1^*) - 0.04f(x_2^*) + 0.08 = 0 \end{cases}$$

cebirsel sistemi çözülerek (0.110826, 0.046458) olarak bulunur. (4.17) sisteminin katsayıları Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'in hipotezlerini sağlar. Gerçekten,

$$i = 1 \text{ için } a_1 = 0.4 > \sum_{j=1}^2 L_j |b_{1j}| = 0.03$$

$$i = 2 \text{ için } a_2 = 0.6 > \sum_{j=1}^2 L_j |b_{2j}| = 0.1$$

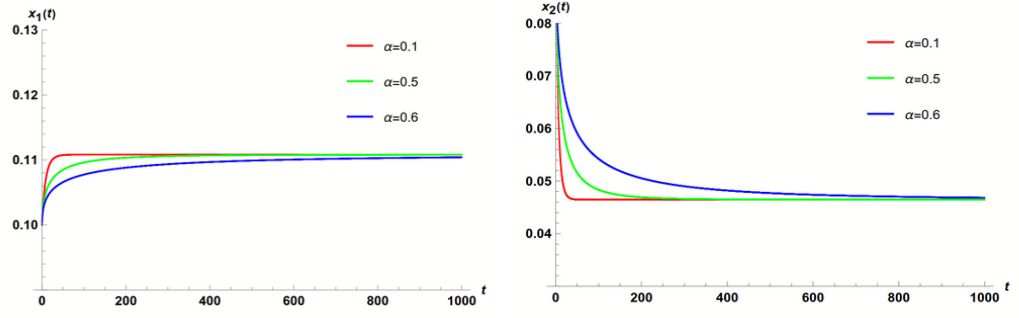
olup (4.11) koşulu sağlanır. Benzer olarak

$$i = 1 \text{ için } a_1 = 0.4 > \sum_{j=1}^2 |b_{j1}| = 0.08$$

$$i = 2 \text{ için } a_2 = 0.6 > \sum_{j=1}^2 |b_{j2}| = 0.05$$

olup (4.13) koşulu da sağlanır. O halde (4.17) sisteminin denge noktası tek olup Mittag-Leffler kararlıdır. (4.17) sisteminin $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ çözüm vektörünün $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında Adams-Bashford-Moulton yaklaşımı kullanılarak elde edilen Caputo-Hadamard türevlerini içeren sistemin sayısal çözümleri $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.6$ değişen değerleri için Mathematica programı ile çizdirilmiştir (Diethelm vd. 2002). Bu grafiklerde de (4.17) sis-

teminin denge noktasının üstel kararlılığı görülmektedir.



Şekil 4.2 (4.17) sisteminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerinin grafikleri

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Gerçek hayat problemlerini açıklayabilmenin ve çözebilmenin yöntemlerinden biri problemi matematiksel olarak modelleyip incelemektir. Yapay sinir ağları da insan beynindeki sinir hücrelerinin çalışma prensibine benzer olarak kurulmuş matematiksel modellerdir. Yapay sinir ağlarının temel bileşeni biyolojik bir sinir hücresinin işlevselliği üzerine kurulu olan bir yapay hücredir. Yapay sinir ağına bir bilgi işleme yapısı gözü ile bakılabilir. Bir yapay sinir ağında hücreler arasındaki bağlantılar üzerinden girdiler alınıp çıktı üretilir. Literatürde yer alan en temel Hopfield yapay sinir ağının matematiksel modeli

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dir. Bu tezde ilk olarak Hopfield yapay sinir ağı modeli tam sayı basamaktan türev yerine uyumlu kesirli türev ile ele alınıp denge noktasının varlık-tekliği ve kesirli üstel kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir. Daha sonra BAM türünde tekrarlayan yapay sinir ağı modeli için benzer sonuçlar elde edilmiştir. Tezde yer alan üçüncü çalışmamız Caputo-Hadamard kesirli türevini içeren Hopfield yapay sinir ağlarını kapsamaktadır. Bu çalışmada da ilk olarak denge noktasının varlık ve tekliği için katsayıların sağlaması gereken yeter koşullar elde edilmiştir. Devamında ele alınan sistemin Mittag-Leffler kararlılığı araştırılmıştır.

Her üç çalışmada da yapılan kararlılık incelemeleri Lyapunov kararlılık teorisine dayanmaktadır. Ayrıca her bir kesimde sayısal örnekler ele alınıp α nın farklı değerleri için nümerik simülasyonlar yapılarak denge noktasının kararlılığı grafikler üzerinde de görülmüştür.

Bu çalışmada yapılan analizler uygun aktivasyon fonksiyonları seçimi ve bağlantı katsayıları üzerindeki uygun kısıtlar ile kesirli basamaktan yapay sinir ağı modellerinin kararlılığının garanti edilebileceğini göstermiştir. Ayrıca bu tez çalışmasında uygulanan yöntemlerin farklı türden yapay sinir ağı modellerine uygulanabileceği ve kararlılık ile ilgili sonuçların elde edilebileceği öngörülmektedir.

- Abdeljawad, T. 2015. *On conformable fractional calculus*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 279 57-66. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016>.
- Adjabi, Y., Jarad, F., Baleanu, D. and Abdeljawad, T. 2016. *On Cauchy problems with Caputo Hadamard fractional derivatives*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 21(4), 661–681.
- Ahmad, B. Alsaedi, A. Ntouyas, S.K. Tariboon, J. 2017. *Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions an Inequalities*. Springer International Publishing.
- Ahmad, B. and Ntouyas, S.K. 2017. *Existence and uniqueness of solutions for Caputo–Hadamard sequential fractional order neutral functional differential equations*. Electronic Journal of Differential Equations, 36, 1–11.
- Akhmet, M.U. and Karacaören, M. 2014. *Stability of Hopfield neural networks with delay and piecewise constant argument*. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, 3(1), 1-6. doi: 10.5890/DNC2014.01.001.
- Akhmet, M.U. and Fen, M.O. 2016. *Replication of Chaos in Neural Networks, Economics and Physics. Nonlinear Physical Science*. Springer, Higher Education Press.
- Akhmet, M.U. and Karacaören, M. 2018. *Hopfield neural network with multi-compartmental activation*. Neural Computing and Applications, 29, 815-822. doi:10.1007/s00521-016-2597-9.
- Akhmet, M., Arugaslan Çiğin, D., Cengiz, N. 2018. *Exponential stability of periodic solutions of reccurent neural networks with functional dependence on piecewise constant, argument*. Turkish Journal of Mathematics, 42, 272-292. doi: 10.3906/mat-1606-138.
- Alofi, A., Cao, J., Elaiw, A., Al-Mazrooei, A. 2014. *Delay-dependent stability criterion of Caputo fractional neural networks with distributed delay*. Discrete Dyn. Nat. Soc., 1-6. doi: 10.1155/2014/529358.
- Arik, S., 2005. *Global asymptotic stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with time delay*. IEEE Trans Neural Netw., May 16(3), 580-586. doi:10.1109/tnn.2005.844910.
- Avci, D., Iskender Eroglu, B.B., Özdemir, N. 2015. *Conformable fractional wave-like equation on a radial symmetric plate*. Theory and Applications of Non-integer Order Systems Lecture Notes in Electrical Engineering, 407, 137-146. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-45474-0>.
- Boroomand, A., Menhaj, M. 2009. *Fractional-order Hopfield neural networks*, in: *Advances in Neuro-Information Processing*. Springer, 883-890, Berlin Heidelberg.

- Butzer, P.L., Kilbas, A. A. Trujillo, J. J. 2002 *Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property*. J. Math. Anal. Appl., 269, 387–400.
- Cao, J., Chen, A., Huang, X. 2005. *Almost periodic attractor of delayed neural networks with variable coefficients*. Physics Letters, 340, 104-120. doi:10.1016/j.physleta.2005.04.021
- Cao, Y., Bai, C. 2014. *Finite-time stability of fractional-order BAM neural networks with distributed delay*, Abstract and Applied Analysis (2014), 1-8. <https://doi.org/10.1155/2014/634803>.
- Cao, Y., Bai, C. 2015 *Existence and stability analysis of fractional order BAM neural networks with a time delay*. Applied Mathematics 6, 2057-2068 doi:10.4236/am.2015.612181.
- Chen, T. 2001. *Stability of asymmetric Hopfield networks*. IEEE Transactions on Neural Networks. doi:10.1109/72.896806.
- Chen, L., Chai, Y., Wu, R., Ma, T., Zhai, H. 2013. *Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay*. Neurocomputing, 1-5. doi: 10.1016/j.neucom.2012.11.034. <http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.612181>.
- Chiu, K.S. 2017. *Exponential stability and periodic solutions of impulsive neural network models with piecewise constant argument*. Acta Appl. Math., 151, 199-226. <https://doi.org/10.1007/s10440-017-0108-3>.
- Chiu, K.S. 2021. *Global exponential stability of bidirectional associative memory neural networks model with piecewise alternately advanced and retarded argument*. Computational and Applied Mathematics, 40 (263), 31 pages. <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01660-x>.
- Dai, C., Ma, W. 2022. *Lyapunov direct method for nonlinear Hadamard-type fractional order systems*. Fractal Fract., 6 (405), 1-23. doi: 10.3390/fractal-fract6080405.
- Diethelm, K., Ford, N.J. and Freed, A. D. 2002. *A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations*. Nonlinear Dynamics 29, 322. <https://doi.org/10.1023/A:1016592219341>
- Diethelm, K. 2010. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Fang, Y., Kincaid, T. G. 1996. *Stability Analysis of Dynamical Neural Networks*. IEEE Transactions on Neural Networks, 7(4), 996–1006. <https://doi.org/10.1109/72.508941>
- Fausett, V. L. 1993. *Fundamentals of Neural Networks*. Prentice Hall, 469.

- Fisher, A.D. 1987 *On Applying Associative Networks: An Approach for Representation and Goal-directed Learning*. Proceedings of the IEEE First Annual International Conference on Neural Networks, San Diego, June 21-24.
- Forti, M., Manetti, S., Marini, M., 1994. *Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks*. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 41(7), 491–494.
- Gambo, Y. Y., Jarad, F., Baleanu, D., Abdeljawad, T. 2014. *On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives*. Adv. Differ. Equ., 1-12. doi:10.1186/1687-1847-2014-10.
- Gopalsamy, K. 2004. *Stability of artificial neural networks with impulses*. Applied Mathematics and Computation, 1-31. doi: 10.1016/S0096-3003(03)00750-1.
- Hadamard, J. 1892. *Essai sur l'étude des fonctions donnees par leur developpement de Taylor*. J. Mat. Pure Appl. Ser., 8, 101–186.
- Haykin, S. 1999. *Neural Networks a Comprehensive Foundation*. Prentice Hall International. Inc., 897, Canada.
- He, B.B., Zhou, H.C., Kou, C.H. 2022. *Stability analysis of Hadamard and Caputo-Hadamard fractional nonlinear systems without and with delay*. Fractional Calculus and Applied Analysis, 25, 2420–2445. <https://doi.org/10.1007/s13540-022-00106-3>.
- He, B.B., Zhou, H.C. 2022. *Caputo-Hadamard fractional Halanay inequality*. Applied Mathematics Letters 125 (2022), 107723, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107723>.
- Hopfield, J.J. 1982. *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*. Proc. NatL Acad. Sci., 79, 2554-2558. <https://doi.org/10.1073/pnas.79.8.2554>.
- Hopfield, J.J. 1984. *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*. Proc. Natl. Acad. Sci., 81, 3088-3092. <https://doi.org/10.1073/pnas.81.10.3088>.
- Huyen, N.T.T., Sau, N.H., Thuan, M.V. 2022. *LMI conditions for fractional exponential stability and passivity analysis of uncertain Hopfield conformable fractional-order neural networks*. Neural Processing Letters, 54, 1333-1350. <https://doi.org/10.1007/s11063-021-10683-8>
- Jarad, F., Abdeljawad, T., Baleanu, D. 2012. *Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives*. Adv. Differ. Equ., 1(142), 1-8. doi.org/10.1186/1687-1847-2012-142.
- Jiang, H. and Cao, J. 2008. *BAM-type Cohen-Grossberg neural networks with time delays*. Mathematical and Computer Modelling, 47, 92–103. doi:10.1016/j.mcm.2007.02.020.

- Ke, Y., Miao, C. 2015. *Stability analysis of fractional-order Cohen-Grossberg neural networks with time delay*. Int. J. Comput. Math., 92(6), 1102-1113. <https://doi.org/10.1080/00207160.2014.935734>.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. *A new definition of fractional derivative*. J. Comput. Appl. Math., 264, 65-70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>.
- Khalil, R., AL Horani, M., Abu Hammad, M. 2019. *Geometric meaning of conformable derivative via fractional cords*. J. Math. Computer Sci., 19, 241-245. <http://dx.doi.org/10.22436/jmcs.019.04.03>.
- Kilbas, A. A. 2001. *Hadamard-type fractional calculus*. Journal of the Korean Mathematical Society, 38, 1191–1204.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam.
- Kosko, B. 1987. *Adaptive bidirectional associative memories*. Applied Optics, 26(23), 4947-4960. <https://doi.org/10.1364/AO.26.004947>
- Kosko, B. 1988. *Bidirectional associative memories*. IEEE Transactions on Systems, Man, & Cybernetics, 18(1), 49–60. <https://doi.org/10.1109/21.87054>
- Li, Y., Chen, Y. Q. and Podlubny, I. 2009. *Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems*. Automatica. Elsevier Ltd, 45(8), 1965–1969. doi: 10.1016/j.automatica.2009.04.003.
- Liao, X., Wong, K. 2003. *Global exponential stability of hybrid bidirectional associative memory neural networks with discrete delays*. Phys. Rev. E 67 042901.
- Lio, Y., Wang, J. 2008. *An analysis on the global exponential stability and the existence of periodic solutions for non-autonomous hybrid BAM neural networks with distributed delays and impulses*. Computers and Mathematics with Applications, 56, 2256–2267, doi:10.1016/j.camwa.2008.03.048.
- Lundstrom, B. N., Higgs, M. H., Spain, W. J., & Fairhall, A. L. 2008. *Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons*. Nature Neuroscience, 11(11), 1335-1342. <https://doi.org/10.1038/nn.2212>
- Ma, L. 2019. *Comparison theorems for Caputo-Hadamard fractional differential equations*. Fractals, 27. doi.org/10.1142/S0218348X19500361.
- Ma, L. and Li, C. P. 2017. *On Hadamard fractional calculus*. Fractals 25(3), 1–16. <https://doi.org/10.1142/S0218348X17500335>.
- Mahmudov, N., Al-Khateeb, A. 2020. *Existence and stability results on Hadamard type fractional time-delay semilinear differential equations*. Mathematics, 8(8), 1242. <https://doi.org/10.3390/math8081242>.

- McCulloch, W.S., Pitts, W. 1943. *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. Bull. Math. Biophysics, 5, 115-133.
- Miller, K. S., Ross, B. 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, New York.
- Mohamad, S. 2001. *Global exponential stability in continuous-time and discrete-time delayed bidirectional neural networks*. Physica D, 1-19. doi: 10.1016/S0167-2789(01)00344-X.
- Mohamad, S., Gopalsamy, K. 2003. *Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays*. Applied Mathematics and Computation 135, 17-38.
- Oldham, K.B. and Spanier, J. 1974. *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New York, London .
- Özaydın, A. B., Karakoç, F. 2019. *Global attractivity for nonlinear differential equations with Hadamard fractional derivative*. Journal of Fractional Calculus and Applications, 10(1), 2019, 6-54 ISSN:2090-5858.
- Park, J.H., Lee, S.M., Kwon, O.W. 2009. *On exponential stability of bidirectional associative memory neural networks with time-varying delays*. Chaos, Solitons & Fractals, <https://doi:10.1016/j.chaos.2007.05.003>.
- Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*. United States: Academic Press 340 p.
- Rosenblatt, F. 1961. *Principles of Neurodynamics*. Spartan Books, Washington.
- Ross, B. 1975. *Fractional Calculus and Its Applications*. Springer, Berlin Heidelberg, 138. Lecture Notes in Computer Science, 3496 (2005) Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/11427391-26>.
- Samko, S. G., Kilbas, A.A., Marichev, O. I. 1993. *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.
- Song, Q., Cao, J. 2007. *Exponential stability for impulsive BAM neural networks with time-varying delays and reaction-diffusion terms*. Advances in Difference Equations, 2007, DOI 10.1088/0951-7715/19/7/008.
- Song, Q., Cao, J. 2014. *Dynamics in fractional-order neural networks*. Neurocomputing 142, 494-498. <http://dx.doi.org/10.1016/j.neucom.2014.03.047>.
- Souahi, A., Makhoulf, A.B., Hammami, M.A. 2017. *Stability analysis of conformable fractional-order nonlinear systems*. Indagationes Math., 28, 1265-1274. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2017.09.009>.

- Truccoloi, A. W., Rangarajan, G., Chen, Y. and Ding, M., 2003. *Analyzing stability of equilibrium points in neural networks: a general approach*. Neural Networks, 16, 1453-1460. [https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(03\)00136-9](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(03)00136-9).
- Wang, L., Zou, X. 2002. *Exponential stability of Cohen–Grossberg neural networks*. Neural Networks, 15, 1-8. doi: 10.1016/S0893-6080(02)00025-4.
- Wang, G.T., Pei, K., Chen, Y.Q. 2019. *Stability analysis of nonlinear Hadamard fractional differential system*. J. Franklin. Inst., 356, 1-8. doi.org/10.1016/j.jfranklin.2018.12.033.
- Wang, S., Jiang, W., Sheng, J., Li, R. 2021. *Ulam’s type stabilities for conformable fractional differential equations with delay*. Math. Methods Appl. Sci., 44 (18), 14328-14340. <https://doi.org/10.1002/mma.7699>.
- Yadav, N., Yadav, A. and Kumar, M. 2015. *An Introduction to Neural Network for Differential Equations*. Springer, 114, Poland.
- Yang, X., Song, Q., Liu, L., Zhao, Z. 2014. *Uniform stability analysis of fractional-order BAM neural networks with delays in the leakage terms*. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, 2014, 1-16. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/261930>.
- Zhang, F., Li, C. and Chen, Y. 2011. *Asimptotical stability of nonlinear fractional differantial system with Caputo Derivative*. International Journal of Differential Equations, 2011, 1-12 . doi: 10.1155/2011/635165.
- Zhang, S., Yu, Y., Wang, H. 2015. *Mittag-Leffler stability of fractional-order Hopfield neural networks*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 16, 104-121. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2014.10.001>.
- Zhang, S., Li, S., Hu L. 2019. *The existence and uniqueness result of solutions to initial value problems of nonlinear diffusion equations involving with the conformable variable derivative*. RACSAM 113, 1601-1623. <https://doi.org/10.1007/s13398-018-0572-2>.
- Zhao, D., Luo, M. 2017. *General conformable fractional derivative and its physical interpretation*. Calcolo, 54, 903-917. DOI 10.1007/s10092-017-0213-8.
- Zhou, H.W., Yang, S., Zhang, S.Q. 2018. *Conformable derivative approach to anomalous diffusion*. Physica A, 491, 1001-1013. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.09.101>.