

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

α -SERİ SÜREÇLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Mahmut KARA

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11.03.2014

Mahmut KARA

ÖZET

Doktora Tezi

α -SERİ SÜREÇLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Mahmut KARA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halil AYDOĞDU

Stokastik modellemede sık kullanılan α -seri süreçlerde parametre tahmin problemi ile karşılaşmaktadır. Bir α -seri süreçte ilk olayın gerçekleşme zamanının dağılım fonksiyonu F ile gösterilsin. Bu çalışmada F 'nin bilinmemesi durumunda α -seri sürecin α parametresi ve F dağılımının ortalama ve varyansı için lineer regresyon yöntemi kullanılarak bazı parametrik olmayan tahmin ediciler verilir. Bu parametreler için F sırasıyla Weibull, gama ve lognormal dağılım fonksiyonu iken en çok olabilirlik ve uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi ile parametrik tahmin ediciler elde edilir. Bu tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik normallik özellikleri incelenir. Ayrıca tahmin edicilerin işlevlikleri bir simülasyon çalışması ile değerlendirilir.

Mart 2014, 129 sayfa

Anahtar Kelimeler: α -seri süreç, lineer regresyon yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi, tutarlılık, asimptotik normallik.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

PARAMETER ESTIMATION IN α - SERIES PROCESSES

Mahmut KARA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof Dr. Halil AYDOĞDU

α - series processes are commonly used in stochastic modelling and the parameter estimation problem is encountered in these processes. Let F denote the distribution function of the first occurrence time in an α -series process. In this study, when F is unknown , some nonparametric estimators for the α parameter of α -series process and the mean and variance of F are given by the linear regression method. When the distribution function F is Weibull, gama and lognormal respectively, parametric estimators are obtained with maximum likelihood and modified maximum likelihood methods for these parameters. The consistency and asymptotic normality properties are investigated. Furthermore, the performance of these estimators is evaluated by a simulation study.

March 2014, 129 pages

Key Words : α - series process, linear regression method, maximum likelihood method, modified maximum likelihood method, consistency, asymptotic normality.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora öğrenimim süresince önerileri ile beni yönlendiren, çalışmalarım süresince karşılaştığım problemlerin çözümünde zaman ayırarak fikirlerini, görüşlerini paylaşan, her zaman ilgi ve alakasını gördüğüm danışmam hocam Sayın Doç. Dr. Halil AYDOĞDU'ya (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü) teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması süresince yapılan tez izleme toplantılarına katılan, fikirleri ve önerileri ile tez çalışmamın olgunlaşmasına katkıda bulunan iyi niyetli ve yapıcı yaklaşımları ile destek olan Sayın Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU 'na (Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümü) ve Sayın Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü) çok teşekkür ederim.

İstatistik bilimini bana sevdiren ve öğrenmemde büyük katkıları olan Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü'ndeki hocalarıma teşekkür ederim. Çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mahmut KARA

Ankara, Mart 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1 Rasgele Değişkenlerin Dizilerinde Yakınsama.....	4
2.2 Asimptotik Normallik.....	9
2.3 Delta Yöntemi.....	10
2.4 Merkezi Limit Teoremleri.....	11
2.4.1 Lindeberg-Levy teoremi.....	11
2.4.2 Liapunov teoremi.....	11
2.4.3 Lindeberg Feller teoremi.....	13
2.5 Newton-Raphson Yöntemi.....	15
2.6 Uyarlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	17
3. SAYMA SÜREÇLERİ.....	20
3.1 Sayma Süreci.....	20
3.2 Poisson Süreci.....	21
3.3 Homojen Olmayan Poisson Süreci.....	21
3.3.1 Homojen olmayan Poisson sürecinde olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı.....	22
3.3.2 Weibull ve Cox-Lewis modelleri.....	25
3.3.3 Şiddet fonksiyonunun parametrik tahmini.....	26
3.4 Yenileme Süreci.....	30
3.5 Geometrik Süreç.....	30
3.5.1 Geometrik süreçte olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı.....	30
3.6 α -Seri Süreç.....	31

3.6.1 α -seri süreçte olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı.....	31
4. SAYMA SÜRECİNDEN GELEN VERİ KÜMESİNİN α -SERİ SÜRECE UYGUNLUĞUNUN İNCELENMESİ.....	33
4.1 Trend Analizi.....	33
4.2 Sayma Sürecinden Gelen Veri Kümesinin Bir α -Seri Sürece Uygun Olup Olmadığının Belirlenmesine Yönelik Test.....	37
5. BİR α -SERİ SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK OLMAYAN TAHMİNİ.....	39
5.1 α, μ ve σ^2 Parametrelerinin Tahmini.....	39
5.2 Bazı Tahmin Edicilerin İstatistiksel Özellikleri.....	43
5.3 Yenileme Sürecinin α -Seri Süreçten Ayırt Edilmesine Yönelik Bir Test.....	48
6. BİR α - SERİ SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK TAHMİNİ.....	50
6.1 Üstel Dağılım.....	50
6.1.1 En çok olabilirlik yöntemi.....	50
6.1.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	52
6.1.3 $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\theta}$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları	55
6.2 Gama Dağılımı.....	57
6.2.1 En çok olabilirlik yöntemi.....	57
6.2.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	59
6.2.3 $\hat{\alpha}, \hat{\theta}$ ve $\hat{\beta}$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları.....	62
6.3 Lognormal Dağılım.....	66
6.3.1 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$ ve $\hat{\tau}^2$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları.....	68
6.4 Weibull Dağılım.....	72
6.4.1 En çok olabilirlik yöntemi.....	72
6.4.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	73
6.4.3 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$ ve $\hat{\eta}$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları.....	77
7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	82
8. UYGULAMA.....	108
8.1 2 Nolu Uçağın Havalandırma Sistem Verisi.....	110
8.2 7 Nolu Uçağın Havalandırma Sistem Verisi.....	113

8.3 Sistem Yazılım Verisi.....	115
8.4 Bilgisayar Verisi.....	117
8.5 Denizaltı Verisi.....	120
9. SONUÇ.....	123
KAYNAKLAR.....	125
ÖZGEÇMİŞ.....	128

SİMGELER DİZİNİ

$N(t)$	(0, t] zaman aralığındaki yenilemelerin sayısı
S_n	n. yenilemenin gerçekleşme zamanı
$\Gamma(.)$	Gama fonksiyonu
$\psi(.)$	Digama fonksiyonu
$\psi'(.)$	Trigama fonksiyonu
γ	Euler sabiti
$\sim$	Asimptotik denk

Kısaltmalar

BBAD	Bir birinden bağımsız ve aynı dağılımlı.
MSE	Hata kareler ortalaması
MRE	En büyük görelî hata
NHPP	Homojen olmayan Poisson süreci
HPP	Homojen Poisson süreci
RP	Yenileme Süreci
WM	Weibull modeli
CLM	Cox-Lewis modeli
LSE	En küçük kareler
NP	Parametrik olmayan
ML	En çok olabilirlik
MML	Uyarlanmış en çok olabilirlik
AN	Asimptotik normal
GP	Geometrik süreç

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 Model seçimi.....	34
Şekil 7.1 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	95
Şekil 7.2 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	96
Şekil 7.3 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	97
Şekil 7.4 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	98
Şekil 7.5 Çizelge 7.5 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	99
Şekil 7.6 Çizelge 7.6 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	100
Şekil 7.7 Çizelge 7.7 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	101
Şekil 7.8 Çizelge 7.8 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	102
Şekil 7.9 Çizelge 7.9 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	103
Şekil 7.10 Çizelge 7.10 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	104
Şekil 7.11 Çizelge 7.11 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	105
Şekil 7.12 Çizelge 7.12 deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE grafikleri.....	106

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 7.1 Lognormal dağılım ($\alpha = -0.5, \delta = 0, \tau = 0.5$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	83
Çizelge 7.2 Lognormal dağılım ($\alpha = 0.5, \delta = 0.4, \tau = 0.4$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	84
Çizelge 7.3 Lognormal dağılım ($\alpha = 0.8, \delta = 0.7, \tau = 0.3$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	85
Çizelge 7.4 Lognormal dağılım ($\alpha = 1.5, \delta = 1, \tau = 0.2$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	86
Çizelge 7.5 Weibull dağılım ($\alpha = -0.5, \theta = 1.5, \beta = 1$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	87
Çizelge 7.6 Weibull dağılım ($\alpha = 0.5, \theta = 2, \beta = 1$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	88
Çizelge 7.7 Weibull dağılım ($\alpha = 0.8, \theta = 1.2, \beta = 0.5$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	89
Çizelge 7.8 Weibull dağılım ($\alpha = 1.5, \theta = 3, \beta = 1$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	90
Çizelge 7.9 Gama dağılım ($\alpha = -0.5, \theta = 1.5, \beta = 1$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	91
Çizelge 7.10 Gama dağılım ($\alpha = 0.5, \theta = 2, \beta = 1$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	92
Çizelge 7.11 Gama dağılım ($\alpha = 0.8, \theta = 3, \beta = 0.5$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	93
Çizelge 7.12 Gama dağılım ($\alpha = 1.5, \theta = 4, \beta = 0.5$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin yan ve MSE'leri.....	94

1. GİRİŞ

Zamanın bir fonksiyonu olarak gerçekleşen olayların sayısını sayan bir sürece sayma süreci denilmektedir. Bir sayma sürecinden gelen veri kümesi bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyor ise model olarak bir yenileme süreci (RP) kullanılabilir. Fakat sayma sürecinin olaylar arası geçen zaman süreleri monoton eğilimde ise model olarak yenileme süreci kullanılmaz. Uygulamada ortaya çıkan birçok bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenilirlik teorisindeki başka analizlerde sayma sürecinden gelen veri kümesi monoton eğilimli rasgele değişkenlerden oluşur. Bu tür durumlarda model olarak stokastik monoton bir sayma süreci düşünülmelidir. Braun vd. (2005) geometrik ve homojen olmayan Poisson sürecine alternatif olacak şekilde α -seri süreç olarak adlandırılan bir stokastik monoton süreç tanımlamıştır.

$\{n^\alpha X_n, n=1,2,\dots\}$ bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısı varsa $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ dizisi üzerine kurulu sayma sürecine α -seri süreç denir. Bu süreç $\alpha < 0$ için stokastik olarak artan iken $\alpha > 0$ için stokastik azalandır. $\alpha = 0$ için α -seri süreç bir yenileme sürecine dönüşür. Braun vd. (2008) α -seri süreç ile geometrik sürecin arasındaki farklılıkları ortaya koymuş ve bazı önemli teorik sonuçlar vermiştir. α -seri süreç sayma süreçleri ile ilgili uygulamalarda olaylar arası geçen zaman sürelerinin monoton eğilimde olması durumunda homojen olmayan Poisson süreci (NHPP) ve geometrik sürece (GP) alternatif olarak kullanılmaktadır. Bir α -seri süreçte ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman süresi olan X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F ile gösterilsin. F 'nin şekilsel olarak bilinmesi ya da bilinmemesi durumunda sürecin α parametresinin, F 'nin ortalamasının ve varyansının nasıl tahmin edileceği önemli bir problemdir.

Aydoğdu vd. (2010), ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olan X_1 rasgele değişkeninin Weibull dağılım olması durumunda sürecin üç önemli parametresi α, μ ve σ^2 'nin uyarlanmış en çok olabilirlik (MML) yöntemiyle tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Bu tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik normallik gibi istatistiksel

özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca $\alpha = 0$ hipotezini test etmek için test istatistiği önermişlerdir. Pratikte Weibull dağılımı kadar sık kullanılan gama ve lognormal dağılımları için α -seri süreçlerinde parametrik sonuç çıkarımına ilişkin literatürde bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmada bu iki dağılım için sürecin α, μ ve σ^2 parametrelerinin en çok olabilirlik (ML) yöntemiyle tahmin edicileri elde edilmiş ve bu tahmin edicilerin asimptotik normallik ve tutarlılık gibi bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir. X_1 'in dağılım fonksiyonu F 'nin bilinmemesi durumunda bu parametrelerin en küçük kareler (LSE) yöntemine dayalı olarak bazı parametrik olmayan (NP) tahmin edicileri verilmiş ve bu tahmin edicilerden bazılarının tutarlılık ve asimptotik normallik özellikleri elde edilmiştir. α 'nın parametrik olmayan tahmin edicisine bağlı olarak bir α -seri sürecini yenileme sürecinden ayırt edilmesi için bir test istatistiği geliştirilmiştir. Bu çalışma aşağıdaki biçimde düzenlenmiştir.

İkinci bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Klasik, Lindeberg-Feller ve Liapunov merkezi limit teoremleri hatırlatılarak, asimptotik normallik üzerinde durulmuştur. Daha sonra çalışmada ele alınan olasılık dağılımları ile ilgili parametrelerin ML tahmin edicilerinin sayısal olarak hesaplanmasında kullanacağımız Newton-Raphson yöntemi verilmiştir. Son olarak bazı dağılımlar ile ilgili parametrelerin kapalı formda tahmin edicilerini elde etmek için kullanacağımız MML yönteminden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak sayma süreci tanıtılmış ve ardından homojen Poisson, homojen olmayan Poisson, yenileme, geometrik ve α -seri süreç gibi bazı özel sayma süreçleri verilmiştir. Ayrıca Cox-Lewis ve Weibull süreçleri detaylı olarak incelenmiş olup bu süreçlere ait parametrelerin ML tahmin edicileri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde bir sayma sürecinden gelen veri kümesinde bir trendin varlığının anlamlılık testine ilişkin bilinen bazı test istatistikleri verilmiştir. Trendin varlığı durumunda bu veri kümesinin α -seri sürece uygun olup olmadığına yönelik bir test geliştirilmiştir.

Beşinci bölümde α -seri sürece göre ilk olayın gerçekleşme zamanı olan X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F 'nin bilinmediği kabul edilerek, sürecin üç önemli parametresi olan α, μ ve σ^2 'nin LSE yöntemine dayalı olarak parametrik olmayan tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen bazı tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik normallik gibi bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca α - seri sürecin yenileme sürecinden ayırt edilmesine yönelik bir test istatistiği verilmiştir.

Altıncı bölümde α -seri sürece göre ilk olayın gerçekleşme zamanı olan X_1 rasgele değişkeninin dağılımının üstel, lognormal, gama ve Weibull olması durumunda sürecin üç önemli parametresi olan α, μ ve σ^2 'nin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir.

Yedinci bölümde α -seri sürecin üç önemli parametresi olan α, μ ve σ^2 için önerilen $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_{MML}, \hat{\mu}_i, (i=1,2,...,6), \hat{\mu}_{ML}, \hat{\mu}_{MML}$ ve $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$ tahmin edicilerinin performansları bir simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Tahmin edicilerin performansları yan ve hata kareler ortalaması (MSE) ölçütlerine göre değerlendirilmiştir. ML ve MML tahmin edicilerinin NP tahmin edicilerinden daha etkin olduğu görülmüştür.

Sekizinci bölümde beş ayrı gerçek veri kümesi göz önüne alınmıştır. Her bir veri kümesinde trendin olup olmadığı belirlenmiş ve her birisi için seçilen bir ilk gerçekleşiş zaman dağılımı ile α -seri sürecine uyumlu bir model olduğu gösterilmiştir. Ayrıca her bir modelde bilinmeyen α, μ ve σ^2 parametrelerinin parametrik ve parametrik olmayan tahmin edicileri ile tahmin değerleri hesaplatılmış ve her bir modelde kestirimlere yönelik olarak hata kareler ortalaması (MSE^*) ölçütüne göre en uygun parametre tahmin değerleri seçilmiştir. Ayrıca hem MSE^* hem de kestirimler için en büyük görelî hata (MRE) ölçütlerine göre geometrik, Cox-Lewis, Weibull ve yenileme süreç modelleri ile α -seri süreç modeli karşılaştırılmıştır. Üzerinde çalışılan veri kümelerine α -seri süreç modeli ile Weibull modelinin daha uyumlu olduğu görülmüştür.

.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan yakınsama türleri, özellikleri ve aralarındaki ilişkiler verilir. Merkezi limit teoremleri hatırlatılarak, asimptotik normallik üzerinde durulur. Daha sonra çalışmada ele alınan olasılık dağılımları ile ilgili parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin sayısal olarak hesaplanmasında kullanacağımız Newton-Raphson yöntemi verilir. Son olarak bazı dağılımlar ile ilgili parametrelerin kapalı formda tahmin edicilerini elde etmek için uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi hatırlatılır.

2.1 Rasgele Değişkenlerin Dizilerinde Yakınsama

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı, $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ ve $X_n : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}, n=1,2,\dots$ birer rasgele değişken olmak üzere ;

$$(i) \quad P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

oluyorsa, (X_n) dizisine hemen hemen her yerde X rasgele değişkenine yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{hhhy} X$ biçiminde gösterilir.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

oluyorsa, X_n dizisine olasılıkta X rasgele değişkenine yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{P} X$ biçiminde gösterilir.

(iii) X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F ve $n=1,2,\dots$ için X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F_n olmak üzere, F 'nin sürekli olduğu x noktalarında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

oluyorsa (X_n) dizisine dağılımda X rasgele değişkenine yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{d} X$ biçiminde gösterilir. Not edelim ki dağılımda yakınsamada X rasgele değişkeni X_n rasgele değişkenleri ile aynı olasılık uzayında tanımlı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki teoremler bu yakınsama türleri arasındaki ilişkiler ifade edilir.

Teorem 2.1.1 (Lehmann 1999)

$$(i) \quad X_n \xrightarrow{hhhy} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X ,$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X ,$$

(iii) c bir sabit olmak üzere $P(X = c) = 1$ iken (ii)'nin tersi doğrudur, yani

$$X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c .$$

Şimdi dağılımda yakınsama ile ilgili uygulamalarda oldukça sık kullanılan Slutsky teoremi olarak bilinen teoremi verelim.

Teorem 2.1.2 (Arnold 1990)

b bir sabit olmak üzere $X_n \xrightarrow{d} X$ ve $Y_n \xrightarrow{p} b$ olsun. Bu durumda

$$(i) \quad X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + b ,$$

$$(ii) \quad X_n Y_n \xrightarrow{d} bX ,$$

$$(iii) \quad X_n / Y_n \xrightarrow{d} X / b \quad (b \neq 0) .$$

Teorem 2.1.1'deki (ii)'nin tersi genelde doğru değildir. Fakat, c bir sabit ve $(a_n) \rightarrow \infty$ 'a ıraksayan pozitif reel terimli bir dizi olmak üzere yukarıda verilen Slutsky teoreminden

$$a_n (X_n - c) \xrightarrow{d} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c$$

olduğu açıktır.

(a_n) ve (b_n) gibi iki reel terimli dizi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ oluyorsa, bu durum $a_n = o(b_n)$

biçiminde gösterilir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ise $a_n \sim b_n$ yazılır ve bu iki dizinin asimptotik

olarak denk olduğu söylenir. Her n için $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < M$ olacak şekilde $M \in \mathfrak{R}^+$ varsa, bu

durum $a_n = O(b_n)$ biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1 6. Bölümde kullanılacak olan $\sum_{i=1}^n \ln i$ ve $\sum_{i=1}^n \ln^2 i$ kısmi toplamlarının

sırasıyla $n(\ln n - 1)$ ve $2n + n \ln^2 n - 2n \ln n$ ifadelerine asimptotik olarak denk olduğunu

gösterelim. Sürekli bir f fonksiyonu için $\int_a^b f(x)dx$ integrali mevcut olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.1)$$

olduğu bilinmektedir. $\int_0^1 \ln x dx = -1$ olduğunun göz önüne alınmasıyla (2.1) 'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(i/n) = -1$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{i=1}^n \ln i \sim n(\ln n - 1) \quad (2.2)$$

dır. $\int_0^1 \ln^2 x dx = 2$ olduğundan (2.1) ifadesinden

$$\sum_{i=1}^n \ln^2 i \sim 2n + n \ln^2 n - 2n \ln n \quad (2.3)$$

elde edilir.

(X_n) rasgele değişkenlerin bir dizisi ve (F_n) karşılık gelen dağılım fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için bir $x_\varepsilon > 0$ değeri ve n_ε sayısı var, öyleki $n > n_\varepsilon$ olduğunda $F_n(x_\varepsilon) - F_n(-x_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ oluyorsa (X_n) dizisine olasılıkta sınırlı denir ve $X_n = O_p(1)$ biçiminde gösterilir. (X_n) ve (Y_n) rasgele değişkenlerin iki dizisi olmak üzere $X_n = O_p(Y_n)$ gösterimi $X_n/Y_n = O_p(1)$ ile tanımlıdır (Öztürk vd. 2006).

(X_n) ve (Y_n) rasgele değişkenlerin iki dizisi olmak üzere $X_n = o_p(Y_n)$ gösterimi $X_n/Y_n \xrightarrow{p} 0$ olması demektir. Eğer $X_n = o_p(Y_n)$ ise $X_n = O_p(Y_n)$ dır.

o_p aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a sabit bir sayı, (a_n) reel terimli bir sayı dizisi ve (Z_n) sıfırdan farklı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere $X_n = o_p(Y_n)$ iken

(i) $aX_n = o_p(Y_n)$

(ii) $a_n X_n = o_p(a_n Y_n)$ ve $Z_n X_n = o_p(Z_n Y_n)$

dır. Yukarıdaki sonuçlar O_p için de geçerlidir (Lehmann 1999).

Dağılımda yakınsama ile ilgili sık kullanılan faydalı bir sonuç aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 2.1.3 (Lehmann 1999) (X_n) rasgele değişkenler dizisi dağılımda yakınsak ise aynı zamanda olasılıkta sınırlıdır, yani

$$X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow X_n = O_p(1)$$

dır.

Olasılıkta sınırlı bir (X_n) rasgele değişkenlerinin dizisi ile ilgili bir sonuç aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 2.1.4 (Lehmann 1999)

$$X_n = O_p(1) \text{ ve } Y_n \xrightarrow{p} 0 \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{p} 0$$

dır.

Tanım 2.1 X ve Y birer rasgele değişken olmak üzere her z reel sayısı için $P(X > z) \geq P(Y > z)$ eşitliği sağlanıyorsa X stokastik olarak Y den büyüktür denir ve $X \geq_{st} Y$ biçiminde gösterilir. Ayrıca $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ dizisi her $n=1, 2, \dots$ için $X_n \leq_{st} (\geq_{st}) X_{n+1}$ oluyorsa (X_n) dizisine stokastik artan (azalan) dizi denir.

Aşağıda verilen Teorem ve Sonuç 6. Bölümde Weibull dağılım durumunda α -seri süreçle ilgili parametrelerin MML tahmin edicilerinin asimptotik özelliklerinin ortaya çıkarılmasında kullanılacaktır.

Teorem 2. 1. 5 (Hoeffding 1953, Vaughan ve Tikunov 2000)

Z aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonu ile standart uç değer dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun.

$$f(z) = e^{z-e^z}, \quad -\infty < z < \infty.$$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ bu dağılımından n birimlik bir örneklem ve $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(n)}$ ler bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri olmak üzere

$$E(g(Z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(E(Z_{(i)}))$$

dır, burada $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ Borel ölçülebilir bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.5 in kullanılmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2. 1 $t_{(i)} = E(Z_{(i)}), i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$E(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{(i)} = -\gamma, \quad E(e^Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{t_{(i)}} = 1, \quad E(Ze^Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{(i)} e^{t_{(i)}} = 1 - \gamma \quad \text{ve}$$

$$E(Z^2 e^Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{(i)}^2 e^{t_{(i)}} = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 - 2\gamma \quad \text{dır, burada } \gamma \text{ Euler sabitidir, yani}$$

$$\gamma \approx 0.57722.$$

Teorem 2. 1. 6 (DasGupta 2008)

(X_n) rasgele değişkenlerin bir dizisi, $E(X_n) = \mu_n$ ve (c_n) reel terimli monoton olarak sonsuza ıraksayan herhangi bir dizi olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{c_n^2} < \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_i)}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{hhhy} 0$$

dır.

Teorem 2. 1. 7 (Roy ve Seidmann 2002)

(x_n) reel terimli herhangi bir dizi olsun. $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ve $y_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$ olmak üzere

(x_n) sonlu bir limite sahip değilse $1/y_n$ ve $\bar{x}_n^2 / y_n$ n sonsuza giderken sıfıra yakınsar.

Teorem 2.1.7 ‘nin kullanılmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2. 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2} = 0 \quad (2.4)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n!)^2}{\sum_{i=1}^n (\ln(n!/i^n))^2} = 0. \quad (2.5)$$

İspat: $x_n = -\ln n$, $n = 1, 2, \dots$ diyelim. Böylece $\bar{x}_n = -\ln n! / n$ ve

$y_n = \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2$ olur. Teorem 2.1.7 ‘nin kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

Lemma 2. 1 (Lehmann 1999)

$$\sum_{i=1}^n i^{-\alpha} \sim \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \ln n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

2.2 Asimptotik Normallik

(X_n) rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere,

$$\frac{X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

olacak şekilde reel sayıların (a_n) ve yeterince büyük bütün n ler için pozitif reel sayıların (b_n) dizileri varsa X_n dizisine a_n ortalaması ve b_n^2 varyansı ile asimptotik normal denir ve

$$X_n \sim AN(a_n, b_n^2)$$

biçiminde gösterilir (Serfling 1980). Burada a_n sayısı X_n 'in beklenen değeri ve b_n^2 sayısı da X_n 'in varyansı olmayabilir. Bu sebepten dolayı a_n değerine asimptotik ortalama ve b_n^2 değerine asimptotik varyans denir.

2.3 Delta Yöntemi

Asimptotik dağılımı bilinen bir rasgele değişken dizisinin bazı dönüşümlerinin asimptotik dağılımının bulunmasında Taylor açılımına dayalı olarak oluşturulan yöntemle delta yöntemi denilmektedir.

Bir $b > 0$ için $n^b(X_n - a) \xrightarrow{d} X$ olsun. $g(x)$ $x = a$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ve $g'(a) \neq 0$ olmak üzere

$$n^b(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{d} g'(a)X$$

dir (Arnold 1990). Ayrıca iki boyutlu rasgele değişken dizilerinde asimptotik normalliğe ilişkin olarak delta yöntemi aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.1.8 (Lehmann 1999)

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} X_n - a \\ Y_n - b \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

olsun. f ve g , (a, b) noktasının komşuluğunda ilk iki mertebeden kısmi türevlere sahip

iki değişkenli herhangi iki fonksiyon olmak üzere $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ şartı altında

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} f(X_n, Y_n) - f(a, b) \\ g(X_n, Y_n) - g(a, b) \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma' = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{bmatrix} \right)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_{22}, \\ \psi_{12} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} \sigma_{11} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \sigma_{12} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \sigma_{22}, \\ \psi_{22} &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \sigma_{22}\end{aligned}$$

dır.

2.4 Merkezi Limit Teoremleri

Literatürde birçok merkezi limit teoremi vardır. Bu teoremlerde, belli şartları sağlayan bir (X_n) dizisindeki rasgele değişkenlerin kısmi toplamlar dizisinin bir ifadesinin limit dağılımının standart normal olduğu ifade edilir.

2.4.1 Lindeberg- Levy teoremi

Klasik merkezi limit teoremi olarak bilinen bu teoremde (X_n) , bağımsız ve ikinci momenti mevcut ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \text{ dır.}$$

2.4.2 Liapunov teoremi

(X_n) bağımsız, 0 ortalamalı, σ^2 varyanslı ve $E|X_i^3| < \infty$ olan aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = o\left(\sum_{i=1}^n d_{ni}^2\right)$$

oluyorsa

$$\frac{\sum_{i=1}^n d_{ni} X_i}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

dir (Lehmann 1999).

Bu teoremin bir uygulaması olarak Y_i 'ler birbirinden bağımsız μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $T_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)Y_i$ ile verilen T_n rasgele değişkeninin asimptotik dağılımını bulmaya çalışalım.

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere, $E(Z_i) = 0$ ve $Var(Z_i) = 1$ olduğu açıktır.

$$d_{ni} = \frac{i-1}{n(n-1)}$$

diyelim

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{(i-1)^2}{(n(n-1))^2} = \frac{1}{n^2}$$

ve

$$\sum_{i=1}^n d_{ni}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2(n-1)^2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^2(n-1)^2} = \frac{2n-1}{6n(n-1)}$$

olduğundan

$$\frac{\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2}{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2} = \frac{6(n-1)}{n(2n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

yani

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = o\left(\sum_{i=1}^n d_{ni}^2\right)$$

dir. Böylece Liapunov teoreminden

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)}{n(n-1)} Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2(n-1)^2}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

$Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğunun göz önüne alınmasıyla,

$$\frac{\sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n(n-1)} Y_i - \frac{\mu}{2} \right)}{\sigma \sqrt{\frac{2n-1}{6(n-1)}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

olur. Ayrıca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{6(n-1)} = \frac{1}{3}$$

olduğundan, Slutsky teoreminden

$$\sqrt{n} \left(T_n - \frac{\mu}{2} \right) \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{\sigma^2}{3} \right)$$

elde edilir. Böylece $T_n \sim AN \left(\frac{\mu}{2}, \frac{\sigma^2}{3n} \right)$. Buna ilaveten, Teorem 2.1.3'den

$$\sqrt{n} \left(T_n - \frac{\mu}{2} \right) = O_p(1) \text{ olup}$$

$$T_n = \frac{\mu}{2} + O_p(n^{-1/2})$$

yazılabilir.

2.4.3 Lindeberg- Feller teoremi

$X_1, X_2, \dots$ ler bağımsız rasgele değişkenler ve $\mu_k = E(X_k), \sigma_k^2 = \text{Var}(X_k) < \infty$ olsun.

$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n E \left[(X_k - \mu_k)^2 I_{[|X_k - \mu_k|/B_n > \varepsilon]} \right] \\ &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ise

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{B_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

dir (Lehmann 1999). Burada $F_k, X_k - \mu_k$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur.

Bu teoremin bir uygulaması olarak Y_i ler birbirinden bağımsız μ ortalamalı ve σ^2

varyanslı aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n 6(n-2i+1)Y_i}{\sqrt{n(n-1)(n+1)}}$ ile

verilen rasgele değişkenin asimptotik dağılımını bulmaya çalışalım.

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere, $E(Z_i) = 0$ ve $Var(Z_i) = 1$ olduğu açıktır.

$$B_{ni} = 6(n-2i+1)Z_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

diyelim. Burada B_{ni} ler birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler ve

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^n Var(B_{ni}) = 36 \sum_{i=1}^n (n-2i+1)^2 = 12(n-1)n(n+1)$$

olarak elde edilir. B_{ni} 'nin dağılım fonksiyonu G_{ni} ve Z_i lerin dağılım fonksiyonu G olmak üzere

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|u| \geq \varepsilon B_n} u^2 dG_{ni}(u) \\ &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{6|(n-2i+1)w| \geq \varepsilon B_n} 36(n-2i+1)^2 w^2 dG(w) \\ &\leq \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{6|(n-1)w| \geq \varepsilon B_n} 36(n-1)^2 w^2 dG(w) \\ &= \frac{36n(n-1)^2}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|w| \geq \varepsilon B_n / (6(n-1))} w^2 dG(w) \\ &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

olduğundan Lindeberg -Feller teoreminden,

$$\frac{\sum_{i=1}^n 6(n-2i+1)Z_i}{\sqrt{12(n-1)n(n+1)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dir. $Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$ değerinin yukarıda kullanılmasıyla,

$$\frac{\sum_{i=1}^n 6(n-2i+1)Y_i}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}} \xrightarrow{d} N(0, 12\sigma^2)$$

olarak elde edilir.

2.5 Newton-Raphson Yöntemi

$L(\theta_1, \dots, \theta_r)$ bir olabilirlik fonksiyonu olsun.

$\frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$ denklem sistemini göz önüne alalım. Analitik çözümü

olmayan bu tür denklemleri çözmek için literatürde birçok yöntem bulunmakla beraber bunlardan en çok kullanılanı Newton-Raphson yöntemidir. Bu yöntem aşağıdaki gibi tarif edilir.

$i = 1, 2, \dots, r$ için θ_i^0 θ_i parametresinin gerçek değeri,

$$U_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ve

$$V(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1 \partial \theta_r} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_2 \partial \theta_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r^2} \end{bmatrix}_{r \times r}$$

olsun.

$$U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \begin{bmatrix} U_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \end{bmatrix} \quad \text{diyelim. } i=1,2,\dots,r \text{ için } \theta_i^*, \theta_i \text{ ile } \theta_i^0 \text{ arasında}$$

olmak üzere $U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ 'nın $(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0)$ etrafında Taylor serisine açılması ile denklem sistemi

$$U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = U(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0) + V(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0) \begin{bmatrix} \theta_1^* - \theta_1^0 \\ \theta_2^* - \theta_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^* - \theta_r^0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

biçiminde yazılabilir (Gertsbakh 1989). (2.6)'da $\theta_i = \hat{\theta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) alınsın, burada $\hat{\theta}_i, \theta_i$ 'nin ML tahmin edicisidir. Bu durumda $U(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) = 0$ olup (2.6)'dan

$$\begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^0 \\ \theta_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^0 \end{bmatrix} - V^{-1}(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0) U(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0)$$

bulunur. Yukarıdaki ifade yardımıyla $i=1,2,\dots,r$ için $\theta_i^{(1)}, \hat{\theta}_i$ 'nin başlangıç değeri olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(m+1)} \\ \theta_2^{(m+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(m)} \\ \theta_2^{(m)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^{(m)} \end{bmatrix} - V^{-1}(\theta_1^{(m)}, \theta_2^{(m)}, \dots, \theta_r^{(m)}) U(\theta_1^{(m)}, \theta_2^{(m)}, \dots, \theta_r^{(m)}), \quad m=1,2,\dots$$

iterasyon işlemini göz önüne alınır. $i = 1, 2, \dots, r$ için $\theta_i^{(m)}, \theta_i^{(m+1)}$ sayısına yeterince yakınsa iterasyon durdurulur. $m \rightarrow \infty$ iken $i = 1, 2, \dots, r$ için $\theta_i^{(m)} \rightarrow \hat{\theta}_i, i = 1, 2, \dots, r$ dir.

2.6 Uyarlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi

Olabilirlik denklemleri kullanılarak bilinmeyen parametreler için kapalı formda tahmin ediciler çoğunlukla elde edilememektedir. Böyle durumlarda, yukarıda tarif edilen Newton-Raphson gibi iteratif yöntemler kullanılarak bilinmeyen parametrelerin tahminleri bulunabilmektedir. Ancak iteratif yöntemler kullanıldığında,

- i) Yakınsayamama,
- ii) Birden fazla çözüme sahip olma,
- iii) Yanlış değere yakınsama

gibi problemler ortaya çıkabilmektedir (Barnett 1966). Puthenpura ve Sinha (1986), veri kümesinde aykırı değer varsa, iteratif yöntemlerin köke yakınsamadığını göstermiştir. Bu tür problemlerin üstesinden gelmek için, Tiku (1967, 1968) tarafından önerilen MML yöntemi kullanılabilir. Bu yöntemle tahmin ediciler analitik olarak elde edilmekte olup asimptotik olarak ML tahmin edicilerinin özelliklerine sahiptir.

MML yöntemi aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- i) En çok olabilirlik denklemleri sıra istatistikleri cinsinden yazılır.
- ii) Olabilirlik denklemlerinde, ML tahmin edicilerinin açık olarak bulunamamasına sebep olan ifadeler Taylor serisinin ilk iki terimi yardımıyla doğrusal fonksiyonlara yaklaştırılır.
- iii) Elde edilen doğrusal ifadeler olabilirlik denklemlerinde yerine yazılarak denklem sistemi çözülür.

Elde edilen tahmin edicilere MML tahmin edicileri denir.

MML yönteminin nasıl çalıştığının açıklanması amacıyla konum-ölçek parametrelili olasılık yoğunluk fonksiyonları ailesine uygulanması aşağıda verilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ler $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $\mu \in \mathfrak{R}$, $\sigma > 0$ olasılık yoğunluk fonksiyonlu

dağılımından n birimlik bir örneklem olsun. $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ olmak üzere μ ve σ

parametreleri için olabilirlik denklemleri bir g fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n g(z_i) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n z_i g(z_i) = 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

biçiminde yazılabilir. Genelde $g(z_i)$ fonksiyonunun yapısından dolayı μ ve σ parametrelerinin ML tahmin edicileri analitik olarak elde edilemez. Fakat MML yöntemi kullanılarak, bu parametrelerin tahmin edicilerini analitik olarak elde etmek mümkündür. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ ler birbirinden bağımsız ve aynı f dağılımına sahip rasgele değişkenlerdir. Bu rasgele değişkenler küçükten büyüğe doğru sırlandığında

$Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma}$ olur. Burada z_i 'lerin gözlemlerden sıralanarak elde edilmesinde μ ve

σ parametrelerinin etkisi yoktur. Bu durumda (2.7) de verilen olabilirlik denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n g(z_{(i)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n z_{(i)} g(z_{(i)}) = 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. μ ve σ parametrelerinin tahmin edicilerinin analitik olarak elde edilememesine sebep olan $g(z_{(i)})$ ifadesi Taylor açılımı yardımıyla

$t_{(i)} = E(Z_{(i)})$ etrafında ilk iki terime göre aşağıdaki gibi açılır.

$$\begin{aligned}g(z_{(i)}) &\cong g(t_{(i)}) + (z_{(i)} - t_{(i)}) \left\{ \frac{d}{dz} g(z) \right\}_{z=t_{(i)}} \\ &= \alpha_i + \beta_i z_{(i)}, \quad 1 \leq i \leq n\end{aligned}\tag{2.9}$$

burada $\beta_i = \left\{ \frac{d}{dz} g(z) \right\}_{z=t_{(i)}}$ ve $\alpha_i = g(t_{(i)}) - \beta_i t_{(i)}$.

(2.8)'de verilen L olabilirlik fonksiyonlarında g yerine g 'nin Taylor açılımı yardımıyla (2.9)'daki gibi elde edilen yaklaşık değerinin yazılmasıyla elde edilen fonksiyonu L^* ile gösterelim. Bu durumda

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i z_{(i)}) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n z_{(i)} (\alpha_i + \beta_i z_{(i)}) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden

$$\hat{\mu} = K + D\hat{\sigma} \text{ ve } \hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4nC}}{2n}$$

MML tahmin edicileri elde edilir. Burada,

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i x_{(i)}}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad D = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{m}, \quad B = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_{(i)} - K) \text{ ve } C = \sum_{i=1}^n \beta_i (x_{(i)} - K)^2.$$

Eğer f olasılık yoğunluk fonksiyonu simetrik ise $t_{(i)} = -t_{(n-i+1)}$ dir. Buna bağlı olarak

$$\alpha_i = -\alpha_{n-i+1} \text{ ve } \beta_i = \beta_{n-i+1}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ olur. } D = \sum_{i=1}^n \alpha_i / m \text{ olduğunun gözönüne}$$

alınmasıyla yukarıdaki ifadelerden D 'nin 0 olduğu açıktır. Sonuç olarak ele alınan

dağılım simetrikse $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{(i)} / m$ tahmin edicisi sıra istatistiklerinin lineer bir

fonksiyonu olarak karşımıza çıkmaktadır ve σ parametresinden bağımsızdır.

3. SAYMA SÜREÇLERİ

Bu bölümde ilk olarak sayma süreci tanıtılır ve ardından homojen Poisson, homojen olmayan Poisson, Weibull, Cox-Lewis, yenileme , geometrik ve α –seri gibi bazı özel sayma süreçleri verilir.

3.1 Sayma Süreci

Tanım 3.1.1 $N(t), (0 \leq t]$ aralığında gerçekleşen belli bir türden olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci $T = [0, \infty)$ ve $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ile sürekli parametre ve kesikli durum uzaylı bir süreçtir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $N(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

ii) $N(t)$ tamsayı değerli bir rasgele değişkendir.

iii) Eğer $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$ dir.

iv) $s < t$ için $N(t) - N(s)$ $(s, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu süreçte X_1 rasgele değişkeni ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olmak üzere $n = 2, 3, \dots$ için X_n rasgele değişkeni $(n-1)$. olay gerçekleştikten sonra n . olay gerçekleşinceye kadar geçen zamanı gösterebilir. $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisine $\{N(t), t \geq 0\}$ sürecinin varışlar arası zamanlar dizisi adı verilir. Bu dizi sayma sürecini tek olarak belirler. $S_0 = 0$ ve $S_n = X_1 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$ yazalım. S_n n . olayın gerçekleşme zamanını gösterir.

Her sabit $t \geq 0$ için

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $(N(t) \geq n)$ olayı $(S_n \leq t)$ olayına denk olduğundan,

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$$

olur.

3.2 Poisson Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun.

i) $N(0) = 0$

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı

iii) t uzunluklu bir aralıkta gerçekleşen olayların sayısının dağılımı λt ortalamalı Poisson, yani $P(N(t+s) - N(s) = k) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$

özelliklerini sağlayan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine λ oranlı bir Poisson süreci denir.

iii) özelliğinden dolayı bir Poisson süreci aynı zamanda durağan artışıdır.

Bu sürece göre olaylar arası geçen zaman süreleri bağımsız ve aynı $1/\lambda$ beklenen değeri ile üstel dağılımlıdır.

3.3 Homojen Olmayan Poisson Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. $t \geq 0$ için $\lambda(t)$, t 'nin bir fonksiyonu olmak üzere

i) $N(0) = 0$

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı

iii) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

iv) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$

ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci denir.

Teorem 3.3.1 $\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson

süreci olsun. $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ olmak üzere

$$N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(m(t+s) - m(s)) \text{ dır ;}$$

yani

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = e^{-[m(t+s) - m(s)]} [m(t+s) - m(s)]^k / k!, \quad k = 0, 1, \dots$$

dır.

3.3.1 Homojen olmayan Poisson sürecinde olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci, $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen süreleri ve S_n n . olayın gerçekleşme zamanını göstermek üzere

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-m(t)}, \quad t \geq 0$$

olduğundan

$$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-m(t)}, \quad t \geq 0$$

ve

$$f_{X_1}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)}, \quad t > 0$$

olur. X_1 rasgele değişkeni üzerinden yapılan koşullandırma ile

$$P(X_2 > t) = \int_0^\infty P(X_2 > t \mid X_1 = s) \lambda(s) e^{-m(s)} ds$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} P(X_2 > t \mid X_1 = s) &= P(N(t+s) - N(s) = 0 \mid X_1 = s) \\ &= P(N(t+s) - N(s) = 0) \\ &= e^{-[m(t+s) - m(s)]}. \end{aligned}$$

Böylece

$$P(X_2 > t) = \int_0^\infty \lambda(s) e^{-m(t+s)} ds, \quad t \geq 0$$

olduğundan

$$F_{X_2}(t) = 1 - \int_0^\infty \lambda(s) e^{-m(t+s)} ds, \quad t \geq 0$$

ve

$$f_{X_2}(t) = \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) e^{-m(t+s)} ds, \quad t \geq 0$$

bulunur. Genelde, $n = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} > t \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= e^{-\int_0^t \lambda(x_1 + \dots + x_n + s) ds} \\
&= e^{-\int_{x_1 + \dots + x_n}^{x_1 + \dots + x_n + t} \lambda(u) du} \\
&= e^{-[m(t + x_1 + \dots + x_n) - m(x_1 + \dots + x_n)]}, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi herhangi bir $n \in \{1, 2, \dots\}$ için genel halde X_n rasgele değişkeninin dağılımını bulalım.

$$P(X_n > t \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = e^{-[m(x_1 + \dots + x_{n-1} + t) - m(x_1 + \dots + x_{n-1})]}, \quad t \geq 0$$

olduğundan

$$P(X_n > t \mid S_1 = s_1, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) = e^{-[m(t + s_{n-1}) - m(s_{n-1})]}, \quad t \geq 0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
P(X_n > t \mid S_1 = s_1, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) &= P(X_n > t \mid S_{n-1} = s_{n-1}) \\
&= e^{-[m(t + s_{n-1}) - m(s_{n-1})]}, \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

olacaktır. $n = 2, 3, \dots$ için

$$P(X_n > t) = \int_0^\infty P(X_n > t \mid S_{n-1} = s) f_{S_{n-1}}(s) ds \tag{3.2}$$

yazılabilir. (3.1) ifadesinden $P(X_n > t \mid S_{n-1} = s)$ koşullu dağılımın analitik ifadesini biliyoruz. Bundan faydalanarak S_{n-1} rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulalım.

$N(t) = n - 1$ ve $(t, t + h]$ aralığında bir olay $\Rightarrow t < S_n \leq t + h$

olacağından

$$P(t < S_n \leq t + h) \geq P(N(t) = n - 1, (t, t + h] \text{ aralığında bir olay})$$

dır. Ayrıca h çok küçük iken

$$t < S_n \leq t + h \Rightarrow N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında bir olay}$$

olacağından

$$P(t < S_n \leq t + h) \leq P(N(t) = n - 1, (t, t + h] \text{ aralığında bir olay}) + o(h)$$

olur. Bu durumda

$$P(t < S_n \leq t + h) = P(N(t) = n - 1, (t, t + h] \text{ aralığında bir olay}) + o(h)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-m(t)}(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}(\lambda(t)h + o(h)) + o(h) \\
&= \lambda(t) \frac{e^{-m(t)}(m(t))^{n-1}}{(n-1)!} h + o(h)
\end{aligned}$$

olduğundan S_n 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{e^{-m(t)}(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0$$

olacaktır. Bu ifadenin (3.2) ifadesinde göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}
P(X_n > t) &= \int_0^\infty e^{-[m(t+s)-m(s)]} \lambda(s) \frac{e^{-m(s)}(m(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds \\
&= \int_0^\infty \lambda(s) \frac{e^{-m(t+s)}(m(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F_{X_n}(t) = 1 - \int_0^\infty \lambda(s) \frac{e^{-m(t+s)}(m(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds, \quad t > 0$$

ve

$$f_{X_n}(t) = \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) \frac{e^{-m(t+s)}(m(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds, \quad t > 0$$

olur. X_n nin olasılık yoğunluk fonksiyonu incelendiğinde $\lambda(t)$ sabit olmadıkça $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenlerinin aynı dağılımlı olmayacağı kolaylıkla görülür. Böylece homojen olmayan bir Poisson sürecinin ardışık olaylar arası geçen zaman süreleri şiddet fonksiyonu sabit olmadıkça ne bağımsız ne de aynı dağılımlıdır.

Bu kısımda son olarak (3.1) de verilen dağılımdan faydalanılarak $S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanları verildiğinde S_{n+1} varış zamanının koşullu dağılımını bulalım.

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} > t \mid S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) &= P(S_{n+1} - S_n > t - s_n \mid S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) \\
&= P(X_{n+1} > t - s_n \mid S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) \\
&= P(X_{n+1} > t - s_n \mid S_n = s_n) \\
&= e^{-[m(t) - m(s_n)]}, \quad t > s_n
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$f_{S_{n+1}}(t \mid s_1, \dots, s_n) = f_{S_{n+1}}(t \mid s_n) = \lambda(t) e^{-[m(t) - m(s_n)]}, \quad t > s_n. \tag{3.4}$$

olur.

3.3.2 Weibull ve Cox-Lewis modelleri

Homojen olmayan bir Poisson süreci ile ilgili uygulamalarda bazen sürecin $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonunun bir parametrik biçimi, yani bazı bilinmeyen parametrelere bağlı analitik ifadesi bilinmektedir. Özellikle $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ veri kümesindeki ardışık olaylar arası geçen zaman sürelerini ifade eden X_i ler monoton ise

$$\lambda_1(t) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 t}, t \geq 0; \alpha_0, \alpha_1 \in \mathfrak{R} \quad (3.5)$$

ve

$$\lambda_2(t) = \theta_0 \theta_1 t^{\theta_1 - 1} t > 0; \theta_0, \theta_1 > 0 \quad (3.6)$$

şiddet fonksiyonları ile verilen homojen olmayan Poisson süreçleri uygulamada çok sık kullanılır.

(3.5) de verilen şiddet fonksiyonlu homojen olmayan bir Poisson sürecine Cox-Lewis modeli (CLM) denilirken, (3.6) da verilen şiddet fonksiyonlu homojen olmayan bir Poisson sürecine Weibull süreci modeli (WM) adı verilir. Bu sürecin Weibull modeli adını almasının sebebi bu sürece göre ilk olayın gerçekleşme zamanının Weibull dağılımlı olmasıdır. Fakat şunu da belirtelim ki daha sonraki ardışık olaylar arası geçen zaman süreleri Weibull dağılımlı değildir.

Açık olarak Cox-Lewis modeli $\alpha_1 > 0$ iken ardışık olaylar arası geçen zaman sürelerinin azalan olduğu duruma uygulanabilirken, $\alpha_1 < 0$ olması durumunda ise ardışık olaylar arası geçen zaman sürelerinin artan olduğu durum için kullanabiliriz. Eğer $\alpha_1 = 0$ ise Cox-Lewis modeli homojen bir Poisson süreci modeline dönüşür. Benzer açıklamalar Weibull süreci için de yapılabilir: Weibull süreci modeli $\theta_1 > 1$ ise azalan olaylar arası geçen zaman sürelerinin olduğu duruma uygulanabilirken, $0 < \theta_1 < 1$ olduğunda artan olaylar arası geçen zaman sürelerine sahip veri kümesinin modellenmesi için uygundur. $\theta_1 = 1$ ise Weibull süreci homojen bir Poisson süreci olur.

3.3.3 Şiddet fonksiyonun parametrik tahmini

Parametrik biçimi bilinen $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu $\{N(t), t \geq 0\}$ homojen olmayan bir Poisson sürecini göz önüne alalım. Böylelikle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ sonlu r tane bilinmeyen parametre ve g, t ve θ_i lere göre analitik ifadesi bilinen bir fonksiyon olmak üzere $\lambda(t) = g(t, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ yazılabilir. Bu homojen olmayan Poisson süreci belirlenmiş bir $(0, t_0]$ zaman aralığında gözlemlensin. Gözlenen veri kümesine dayalı olarak $\theta_i, i = 1, 2, \dots, r$ parametrelerinin $\hat{\theta}_i, i = 1, 2, \dots, r$ tahmin edicilerinin elde edilmesiyle her sabit $t \geq 0$ için $\lambda(t)$ 'nin doğal bir parametrik tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}(t) = g(t, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) \quad (3.7)$$

olur. Her $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $\hat{\theta}_i$ tahmin edicisi θ_i için tutarlı ve g fonksiyonu $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerine göre sürekli ise $\hat{\lambda}(t)$ tahmin edicisinin $\lambda(t)$ için tutarlı olduğu gösterilebilir.

$\lambda(t)$ 'nin analitik ifadesindeki bilinmeyen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametreleri için en çok olabilirlik yöntemi ile belli regülerlik şartları altında tutarlı tahmin ediciler elde edildiğini biliyoruz. Şimdi bu parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin genelde nasıl elde edileceği problemini ele alalım. t_0 önceden belirlenmiş bir sabit olmak üzere homojen olmayan bir Poisson sürecini gözlemlediğimiz $(0, t_0]$ zaman aralığında gerçekleşen olay sayısı n olsun. Bu şekilde gözlenecek olan veriye bağlı olarak $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir. Bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zaman sürelerinin $X_1, X_2, \dots, X_n$ ve $n = 1, 2, \dots$ için n . olayın gerçekleşme zamanının $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ile gösterildiğini hatırlayalım. $s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n < t_0$ olmak üzere

$X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} > t_0 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \Leftrightarrow S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_n = s_n, S_{n+1} > t_0$ olduğu açıktır. (3.3) ve (3.4) ifadelerinden sırasıyla

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} > t_0 \mid S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) &= P(S_{n+1} > t_0 \mid S_n = s_n) \\
&= e^{-\int_{s_n}^{t_0} \lambda(u) du}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_{S_{n+1} \mid S_1, \dots, S_n}(s_{n+1} \mid s_1, \dots, s_n) &= f_{S_{n+1} \mid S_n}(s_{n+1} \mid s_n) \\
&= \lambda(s_{n+1}) e^{-\int_{s_n}^{s_{n+1}} \lambda(u) du}
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$f_{s_1, \dots, s_{n+1}}(s_1, \dots, s_{n+1}) = f_{s_1}(s_1) f_{s_2 \mid s_1}(s_2 \mid s_1) f_{s_3 \mid s_1, s_2}(s_3 \mid s_1, s_2) \dots f_{s_{n+1} \mid s_1, s_2, \dots, s_n}(s_{n+1} \mid s_1, s_2, \dots, s_n)$$

olduğu göz önüne alınarak (3.8) ifadesinin kullanılmasıyla olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) &= f_{s_1}(s_1) f_{s_2 \mid s_1}(s_2 \mid s_1) \dots f_{s_n \mid s_{n-1}}(s_n \mid s_{n-1}) P(s_{n+1} > t_0 \mid S_n = s_n) \\
&= \lambda(s_1) e^{-\int_0^{s_1} \lambda(u) du} \lambda(s_2) e^{-\int_{s_1}^{s_2} \lambda(u) du} \dots \lambda(s_n) e^{-\int_{s_{n-1}}^{s_n} \lambda(u) du} e^{-\int_{s_n}^{t_0} \lambda(u) du} \\
&= \lambda(s_1) \lambda(s_2) \dots \lambda(s_n) e^{-\int_0^{t_0} \lambda(u) du}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak bulunur. Eğer süreç belirlenmiş $(0, t_0]$ zaman aralığı yerine n olay gerçekleşinceye kadar gözlenirse $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ olabilirlik fonksiyonu (3.9) ifadesinde t_0 yerine s_n alınarak

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \lambda(s_1) \lambda(s_2) \dots \lambda(s_n) e^{-\int_0^{s_n} \lambda(u) du} \tag{3.10}$$

ile verilir.

$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$, (3.10) ifadesinde verilen olabilirlik fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{\partial L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ya da denk olarak

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

denklem sisteminin çözülmesiyle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrelerinin sırasıyla $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ en çok olabilirlik tahmin değerlerine ulaşılmış olur.

Şimdi sırasıyla (3.5) ve (3.6) ifadelerindeki şiddet fonksiyonlarıyla verilen Cox-Lewis ve Weibull süreci modellerindeki bilinmeyen parametrelerinin en çok olabilirlik

tahminlerini ve bu tahminlere bağılı olarak her sabit $t \geq 0$ için $\lambda(t)$ nin parametrik tahminlerini elde edelim.

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 t}$ şiddet fonksiyonu ile bir Cox-Lewis süreci olsun. Olabilirlik fonksiyonunun (3.10)'da verilen ifadesinden bu süreç için $L(\alpha_0, \alpha_1)$ olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha_0, \alpha_1) = e^{n\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^n s_i - \frac{e^{\alpha_0}}{\alpha_1} (e^{\alpha_1 s_n} - 1)}$$

ve

$$\ln L(\alpha_0, \alpha_1) = n\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^n s_i - \frac{e^{\alpha_0}}{\alpha_1} (e^{\alpha_1 s_n} - 1)$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak α_0 ve α_1 değerlerinin hesaplanması için α_0 ve α_1 ' e göre kısmi türevler alınarak

$$\frac{\ln L(\alpha_0, \alpha_1)}{\partial \alpha_0} = n - \frac{e^{\alpha_0}}{\alpha_1} (e^{\alpha_1 s_n} - 1) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\ln L(\alpha_0, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^n s_i - \frac{e^{\alpha_0}}{\alpha_1^2} (\alpha_1 s_n e^{\alpha_1 s_n} - e^{\alpha_1 s_n} + 1) = 0 \quad (3.12)$$

denklemleri elde edilir. (3.11) denkleminde

$$\alpha_0 = \ln \left(\frac{n\alpha_1 e^{\alpha_1}}{e^{\alpha_1 s_n} - 1} \right) \quad (3.13)$$

olur. Bu ifadenin (3.12) de yerine konulmasıyla

$$\sum_{i=1}^n s_i - \frac{n}{\alpha_1} - \frac{ns_n}{1 - e^{-\alpha_1 s_n}} = 0 \quad (3.14)$$

α_1 ' e göre lineer olmayan denklem elde edilir. Bu denklemin 2. bölümde verilen Newton-Raphson yöntemiyle çözdürülmesiyle $\hat{\alpha}_1$ ML tahmin değeri hesaplanır. $\hat{\alpha}_1$ 'nın (3.13) da yerine konulmasıyla

$$\hat{\alpha}_0 = \ln \left(\frac{n\hat{\alpha}_1 e^{\hat{\alpha}_1}}{e^{\hat{\alpha}_1 s_n} - 1} \right) \quad (3.15)$$

ile α_0 'ın ML tahmin değeri elde edilir. Böylece Cox-Lewis modelinin şiddet fonksiyonunun bir parametrik tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}_1(t) = \frac{n\hat{\alpha}_1 e^{\hat{\alpha}_1 t}}{e^{\hat{\alpha}_1 s_n} - 1}, \quad t \geq 0$$

olur.

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda_2(t) = \theta_0 \theta_1 t^{\theta_1 - 1}$ şiddet fonksiyonlu bir Weibull süreci olduğunda bu sürecin $L(\theta_0, \theta_1)$ olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta_0, \theta_1) = (\theta_0 \theta_1)^n \prod_{i=1}^n s_i^{\theta_1 - 1} e^{-\theta_0 s_n^{\theta_1}}$$

ve

$$\ln L(\theta_0, \theta_1) = n \ln \theta_0 + n \ln \theta_1 + (\theta_1 - 1) \sum_{i=1}^n \ln s_i - \theta_0 s_n^{\theta_1}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak θ_0 ve θ_1 değerlerinin hesaplanması için θ_0 ve θ_1 'e göre kısmi türevler alınarak

$$\frac{\ln L(\theta_0, \theta_1)}{\partial \theta_0} = \frac{n}{\theta_0} - s_n^{\theta_1} = 0$$

$$\frac{\ln L(\theta_0, \theta_1)}{\partial \theta_1} = \frac{n}{\theta_1} + \sum_{i=1}^n \ln s_i - \theta_0 s_n^{\theta_1} \ln s_n = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerin çözümünden θ_0 ve θ_1 'in ML tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\theta}_0 = \frac{n}{s_n^{\hat{\theta}_1}} \quad (3.16)$$

ve

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(s_n / s_i)} \quad (3.17)$$

biçiminde bulunur. Böylece Weibull modelinin şiddet fonksiyonunun bir parametrik tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}_2(t) = \frac{n\hat{\theta}_1 t^{\hat{\theta}_1 - 1}}{s_n^{\hat{\theta}_1}}, \quad t \geq 0$$

olur.

3.4 Yenileme Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinde olaylar (yenilemeler) arası geçen zaman süreleri birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenler ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine bir yenileme süreci denir.

3.5 Geometrik Süreç

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ negatif değerler almayan rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun. $\{a^{n-1}X_n, n=1,2,\dots\}$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olacak şekilde bir $a > 0$ sayısı var ise $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ dizisinin oluşturduğu $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine a oranlı bir geometrik süreç denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecinde olaylar arası geçen zaman süreleri olan $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri $a < 1$ için stokastik olarak artan, yani $X_n \uparrow st$ iken $a > 1$ için stokastik olarak azalan, yani $X_n \downarrow st$ dir. Oran parametresi $a = 1$ olan bir $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecinin bir yenileme süreci olduğu açıktır.

3.5.1 Geometrik süreçte olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı

$\{N(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç olsun. Bu sürecin tanımından bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen süreler olan $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri bağımsızdır. Fakat aynı dağılımlı değildirler. Yalnızca $a = 1$ durumunda bu rasgele değişkenler aynı dağılımlıdır ve bu geometrik süreç bir yenileme süreci olur.

$$Y_n = a^{n-1}X_n, n=1,2,\dots$$

diyelim. $Y_1, Y_2, \dots$ lar bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenlerdir. $n=1,2,\dots$ için X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu F_n ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= P(X_n \leq x) \\
&= P(a^{-n+1}Y_n \leq x) \\
&= P(Y_n \leq xa^{n-1}) \\
&= F(a^{n-1}x)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca X_1 rasgele değişkeninin ortalaması ve varyansı sırasıyla μ ve σ^2 olmak üzere

$$E(X_n) = a^{-n+1}\mu$$

ve

$$\text{Var}(X_n) = a^{-2n+2}\sigma^2$$

olur.

3.6 α -Seri Süreç

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ negatif değerler almayan rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun. $\{a^n X_n, n=1,2,\dots\}$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı var ise $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ dizisinin oluşturduğu $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine bir α –seri süreç denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ α -seri sürecinde olaylar arası geçen zaman süreleri olan $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri $\alpha < 0$ için stokastik olarak artan, yani $X_n \uparrow st$ iken $\alpha > 0$ için stokastik olarak azalan, yani $X_n \downarrow st$ dir. α parametresi $\alpha = 0$ olan bir $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecinin bir yenileme süreci olduğu açıktır.

3.6.1 α -seri süreçte olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir α –seri süreç olsun. Bu sürecin tanımından bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zaman süreleri olan $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri bağımsızdır. Fakat aynı dağılımlı değildirler. Yalnızca $\alpha = 0$ durumunda bu rasgele değişkenler aynı dağılımlıdır ve bu α –seri süreç bir yenileme süreci olur.

$$Y_n = n^\alpha X_n, n = 1, 2, \dots$$

diyelim. $Y_1, Y_2, \dots$ lar bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenlerdir. $n = 1, 2, \dots$ için X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu F_n ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(n^{-\alpha} Y_n \leq x) \\ &= P(Y_n \leq x n^\alpha) \\ &= F(n^\alpha x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca X_1 rasgele değişkeninin ortalaması ve varyansı sırasıyla μ ve σ^2 olmak üzere

$$E(X_n) = n^{-\alpha} \mu \quad (3.18)$$

ve

$$\text{Var}(X_n) = n^{-2\alpha} \sigma^2 \quad (3.19)$$

olur. Böylece α, μ ve σ^2 α -seri süreçle ilgili üç önemli parametredir. Bu parametreler X_n 'nin dağılım fonksiyonunu, beklenen değerini ve varyansını tam olarak belirler.

4. SAYMA SÜRECİNDEN GELEN VERİ KÜMESİNİN α -SERİ SÜRECE UYGUNLUĞUNUN İNCELENMESİ

Bu bölümde bir sayma sürecinden gelen veri kümesinde bir trendin olup olmadığına ilişkin bilinen bazı test istatistikleri verilir. Trendin varlığı durumunda bu veri kümesinin bir α -seri sürece uygun olup olmadığının belirlenmesine yönelik bir test geliştirilir.

4.1 Trend Analizi

Bir sayma sürecinden gelen veri kümesi bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyor ise model olarak bir yenileme süreci kullanılabilir. Fakat sayma sürecinden gelen olaylar arası geçen zamanlar monoton olarak büyüme ya da küçülme eğilimde ise model olarak yenileme süreci kullanılamaz. Uygulamada ortaya çıkan bir çok bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenilirlik teorisindeki başka analizlerde sayma sürecinden gelen veri kümesi monoton eğilimli rasgele değişkenlerden oluşur. Bu durum sayma sürecinden gelen veri kümesi içerisinde trend olduğunu ve bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanların dağılımının aynı olmadığını ifade eder. Bu tür durumlarda model olarak homojen olmayan bir Poisson süreci, doğrudan stokastik monoton bir sayma süreci olan geometrik süreç ya da α -seri süreci düşünülmelidir.

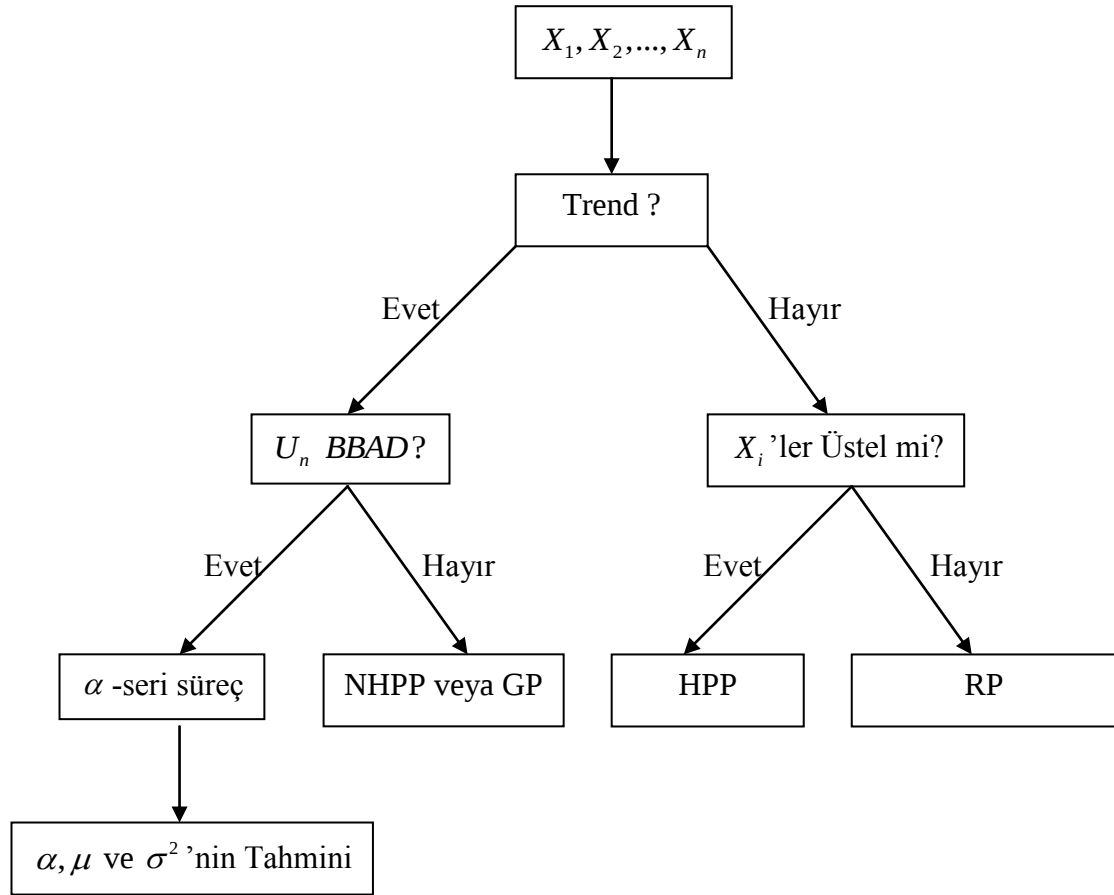
Stokastik olarak modelleme yaparken ilk olarak sayma sürecinden gelen veri kümesinin trende sahip olup olmadığı araştırılır. Trendin varlığı durumunda bu trend karşımıza çoğunlukla monoton olarak çıkmaktadır. Monoton bir trend aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.1.1 $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olmak üzere $X_1, X_2, \dots, X_n$ ler bu sayma sürecine göre gerçekleşen ilk n olay için olaylar arası geçen süreleri gösterebilir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olmak üzere $i, j \in (1, 2, \dots, n)$ ve $j > i$ için

$$P(X_i > x) \geq (\leq) P(X_j > x), \forall x > 0,$$

yani $X_i \geq_{st} (\leq_{st}) X_j$ olması sayma sürecinden gelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ veri kümesinin monoton bir trende sahip olduğunu ifade eder.

Bir sayma sürecinden gelen $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ veri kümesi için uygun modelin seçimine ilişkin olarak izlenecek adımlar aşağıdaki şekil 4.1’de verilmiştir.



Şekil 4.1 Model seçimi

Literatürde trend analizi yapmak için bir çok yöntem bulunmakla beraber bunlardan en çok kullanılanlar Laplace, Lewis-Robinson, Anderson-Darling ve Mann testleridir.

(1) Laplace Testi

Laplace testinde hipotezler aşağıdaki gibi kurulur.

H_0 : HPP modeli uygundur

H_1 : Monoton trend vardır.

n . varış zamanı $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ olmak üzere H_0 hipotezi altında, ilk $n-1$ varış zamanları olan $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ rasgele değişkenlerine $(0, S_n]$ aralığından alınmış düzgün dağılıma sahip $n-1$ tane rasgele değişkenin sıra istatistikleri olarak bakılabilir. Bu durumda merkezi limit teoreminden,

$$U = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_i}{n-1} - \frac{S_n}{2}}{S_n \sqrt{\frac{1}{12(n-1)}}}$$

rasgele değişkeni büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher ve Feingold 1984). Ayrıca %5 anlamlılık düzeyinde $n \geq 4$ yeterlidir (Bates 1955).

(2) Mann Testi

Mann testinde hipotezler aşağıdaki gibi kurulur.

H_0 : RP modeline uygundur

H_1 : Monoton trend vardır.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sayma sürecinden gelen bir veri kümesi olsun.

$$V_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n I(X_i < X_j)$$

olmak üzere H_0 hipotezi altında, $E(V_n) = \frac{n(n-1)}{4}$ ve $Var(V_n) = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{72}$ dir. Bu durumda süreklilik düzeltmesiyle birlikte merkezi limit teoreminden

$$M = \frac{V_n + 0.5 - E(V_n)}{\sqrt{Var(V_n)}}$$

rasgele değişkeni yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher ve Feingold 1984). Bu yaklaşım $n \geq 10$ için kullanılır.

(3) Lewis-Robinson Testi

Lewis-Robinson testinde hipotezler aşağıdaki gibi kurulur.

H_0 : RP modeline uygundur

H_1 : Monoton trend vardır.

Bu test istatistiği Laplace test istatistiğinin değişim katsayısının tahmin edicisine bölünmesiyle elde edilir. Bu durumda

$$LR = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_i - \frac{(n-1)S_n}{2}}{\sqrt{\frac{n^2}{12} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

rasgele değişkeni büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher ve Feingold 1984).

(4) Anderson-Darling Testi

Anderson-Darling testinde hipotezler aşağıdaki gibi kurulur.

H_0 : RP modeline uygundur

H_1 : Monoton olmayan trend vardır.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sayma sürecinden gelen bir veri kümesi olsun.

$S^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ olmak üzere test istatistiği

$$GAD = \frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sum_{i=1}^n \left[q_i^2 \ln\left(\frac{i}{i-1}\right) + (q_i + r_i)^2 \ln\left(\frac{n-i+1}{n-i}\right) - \frac{r_i^2}{n} \right]$$

ile verilir (Kvaloy ve Lindqvist 2003). Burada $q_i = \frac{S_i - iX_i}{S_n}$ ve $r_i = \frac{nX_i}{S_n} - 1$.

GAD test istatistiğinin değeri $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyi için $GAD > 2.492$ ise H_0 hipotezi red edilir.

Pekalp (2013) tarafından hazırlanan “ Sayma Süreçlerine İlişkin Trend Testleri ve Karşılaştırılmaları” adlı yüksek lisans tezinde trend testleri detaylı olarak incelenmiş olup yukarıda verilen test istatistiklerinin ön plana çıktığı belirtilmiştir. Yapılan simülasyon çalışmaları ile bu testlerden Laplace testinin tercih edilebileceği not edilmiştir. Bundan dolayı bu çalışmada trend analizi için Laplace testi kullanılacaktır.

4.2 Veri Kümesinin α -Seri Sürecine Uygunluğu İçin Bir Test

Sayma sürecinden gelen veri kümesinin bir trende sahip olduğu belirlendikten sonra bu veri kümesinin α -seri sürece uygun olup olmadığı aşağıdaki teoremden önemli bir sonuçtan faydalanılarak tespit edilebilir.

Teorem 4.2.1 $\{N(t), t \geq 0\}$ bir α -seri süreç olsun. $X_1, X_2, \dots$ ler bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen süreler olmak üzere

$$U_n = X_{2n-1} / X_{4n-2}, \quad n=1, 2, \dots$$

ile verilen U_n 'ler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir.

İspat: $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri bağımsız olduğundan $U_1, U_2, \dots$ rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğu açıktır ve

$$f_{X_n}(x) = n^\alpha f(xn^\alpha) \quad \text{ve} \quad F_{X_n}(x) = F(n^\alpha x), \quad x \in \mathfrak{R}$$

olduğunu biliyoruz.

X_{4n-2} rasgele değişkeni üzerinden yapılan koşullandırma ile

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= P(U_n \leq u) \\ &= \int_0^\infty P\left(\frac{X_{2n-1}}{X_{4n-2}} \leq u \mid X_{4n-2} = x\right) f_{X_{4n-2}}(x) dx \\ &= \int_0^\infty P(X_{2n-1} \leq ux) f_{X_{4n-2}}(x) dx \\ &= \int_0^\infty F_{X_{2n-1}}(ux) f_{X_{4n-2}}(x) dx \\ &= \int_0^\infty F((2n-1)^\alpha ux) (4n-2)^\alpha f((4n-2)^\alpha x) dx \end{aligned}$$

olur. $t = (4n-2)^\alpha x$ değişken değiştirmesinin yapılmasıyla

$$F_{U_n}(u) = \int_0^\infty F(2^{-\alpha} ut) f(t) dt, \quad n=1, 2, \dots$$

bulunur. U_n 'in dağılım fonksiyonu n 'den bağımsız olduğundan U_n 'ler aynı dağılımlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Bir sayma sürecinden gelen $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ veri kümesinin α -seri süreç ile uygunluk gösterip göstermediğini belirlemek için Teorem 4.2.1'den

$$U_k = \frac{X_{2k-1}}{X_{4k-2}}, \quad k=1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

rasgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olup olmadığının incelenmesi gerekir. Bunun için literatürde birçok parametrik olmayan yöntem bulunmakla beraber bunlardan en çok kullanılanları Dönüm Noktaları ve Fark İşaret testleridir.

Bir sayma sürecinden gelen $\{W_k, k=1, 2, \dots, m\}$ veri kümesinin bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerden olup olmadığının belirlenmesi için hipotezler

$$H_0 : W_k \text{ ler bağımsız ve aynı dağılımlıdır}$$

$$H_1 : W_k \text{ ler bağımsız ve aynı dağılımlı değildir}$$

şeklinde kurulur.

(1) Dönüm Noktaları Testi

$$T_w = \sum_{k=2}^{m-1} I((W_k - W_{k-1})(W_{k+1} - W_k) < 0) \text{ olmak üzere test istatistiği}$$

$$T_w^* = \frac{T_w - \frac{2(m-2)}{3}}{\sqrt{\frac{16m-29}{90}}}$$

ile verilir. H_0 hipotezi altında T_w^* istatistiği büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher ve Feingold 1984).

(2) Fark İşaret Testi

$$D_w = \sum_{k=2}^m I(W_k > W_{k-1}) \text{ olmak üzere test istatistiği}$$

$$D_w^* = \frac{D_w - \frac{m-1}{2}}{\sqrt{\frac{m+1}{12}}}$$

ile verilir. H_0 hipotezi altında D_w^* istatistiği büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher ve Feingold 1984).

5. BİR α -SERİ SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK OLMAYAN TAHMİNİ

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir α -seri süreç olsun. Bu bölümde bu sürece göre ilk olayın gerçekleşme zamanı olan μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F 'nin bilinmediği kabul edilerek, sürecin üç önemli parametresi olan α, μ ve σ^2 'nin LSE yöntemine dayalı olarak parametrik olmayan tahmini üzerinde durulur. α, μ ve σ^2 için elde edilen bazı tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik normallik özellikleri incelenir.

5.1 α, μ ve σ^2 Parametrelerinin Tahmini

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, F dağılım fonksiyonu bilinmeyen $\{N(t), t \geq 0\}$ α -seri süreçten gelen n birimlik bir veri kümesi olsun. Burada X_i ' ler ardışık olaylar arası geçen zamanları ifade eder.

$$Y_i = i^\alpha X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

yazalım. Bu durumda

$$\ln Y_i = \alpha \ln i + \ln X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

olur. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ler birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı olduğundan

$$\ln Y_i = \beta + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\beta = E(\ln Y_i)$ ve e_i ' ler 0 ortalamalı ve $\sigma_e^2 = \text{Var}(\ln Y_i)$ varyanslı bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir. (5.3)'den

$$\ln X_i = \beta - \alpha \ln i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

basit lineer regresyon denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden α, β ve σ_e^2 'nin LSE tahminleri sırasıyla

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln i \sum_{i=1}^n \ln X_i - n \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln i}{n \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2}, \quad (5.5)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln i \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln i - \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 \sum_{i=1}^n \ln X_i}{\left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n (\ln i)^2}, \quad (5.6)$$

ve

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i\right)^2\right) - \hat{\alpha}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2\right)}{n-2} \quad (5.7)$$

olarak bulunur.

(5.1) ve (5.3)'ün kullanılmasıyla

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_1) = \text{Var}(Y_i) = e^{2\beta} \text{Var}(e^{e_i})$$

olur. Taylor seri yaklaşımı ile $e^{e_i} \approx 1 + e_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\approx e^{2\beta} \text{Var}(e_i) \\ &= e^{2\beta} \sigma_e^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda β ve σ_e^2 parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicilerine bağlı olarak

$$\hat{\sigma}_1^2 = e^{2\hat{\beta}} \hat{\sigma}_e^2 \quad (5.8)$$

ile tanımlanan $\hat{\sigma}_1^2$, F dağılımının σ^2 varyansı için bir tahmin edici olarak önerilebilir.

Ayrıca, $Y_i = i^\alpha X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğunun göz önüne alınmasıyla $i = 1, 2, \dots, n$ için Y_i nin bir kestiricisi $\hat{\alpha}$ tahmin edicisine dayalı olarak $\hat{Y}_i = i^{\hat{\alpha}} X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ biçiminde oluşturulabilir. Bu durumda σ^2 için ikinci bir tahmin edici

$$\hat{\sigma}_2^2 = \left[\sum_{i=1}^n (i^{\hat{\alpha}} X_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (i^{\hat{\alpha}} X_i)\right)^2}{n} \right] / (n-1) \quad (5.9)$$

olarak tanımlanabilir.

Şimdi F dağılımının ortalaması μ için bazı parametrik olmayan tahmin edicilerin elde edilmesi üzerinde duralım. $E(Y_i) = \mu$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğundan

$$Y_i = \mu + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yazılabilir. Burada $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ler birbirinden bağımsız 0 ortalamalı ve σ^2 varyanslı rasgele değişkenlerdir.

$$\varepsilon'_i = \frac{\varepsilon_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

denilirse

$$Y_i = \mu(1 + \varepsilon'_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

olur. Burada $E(\varepsilon'_i) = 0$ ve $V(\varepsilon'_i) = \sigma^2 / \mu^2, i = 1, 2, \dots, n$ dir.

Ayrıca

$$\ln Y_i = \ln \mu + \ln(1 + \varepsilon'_i)$$

olup her iki tarafın beklenen değeri alınır

$$\beta = \ln \mu + E(\ln(1 + \varepsilon'_i)) \quad (5.11)$$

olur. Taylor seri yaklaşımı ile $\ln(1 + \varepsilon'_i) \approx \varepsilon'_i - \varepsilon'^2_i / 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \beta &\approx \ln \mu - \text{Var}(\varepsilon'_i) / 2 \\ &= \ln \mu - \sigma^2 / 2\mu^2 \end{aligned}$$

bulunur. Daha önce verilen β ve σ^2 parametrelerinin tahminlerinin yukarıda kullanılmasıyla

$$2\mu^2 \ln \mu - 2\hat{\beta}\mu^2 - \hat{\sigma}^2_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.12)$$

olarak elde edilen μ 'ye göre lineer olmayan denklemin çözülmesiyle μ için $\hat{\sigma}^2_1$ ve $\hat{\sigma}^2_2$ tahminlerine göre sırasıyla $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ ile gösterilen iki tahmin edici elde edilebilir. Bu denklemin analitik bir çözümü yoktur. Bu sebepten $i = 1, 2$ için $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ tahminleri yaklaşık olarak hesaplanabilir.

$\ln Y_i$ için (5.3) de verilen

$$\ln Y_i = \beta + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ifadesini göz önüne alalım, burada $e_1, e_2, \dots, e_n$ ler bağımsız, 0 ortalamalı ve σ_e^2 varyanslı aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir.

$$Y_i = e^\beta e^{e_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olup, Taylor serisi yaklaşımı ile $e^{e_i} \approx 1 + e_i + e^2_i / 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu &= e^\beta E(e^{e_i}) \\
&\approx e^\beta E(1 + e_i + e_i^2 / 2) \\
&= e^\beta (1 + \text{Var}(e_i) / 2) \\
&= e^\beta (1 + \sigma_e^2 / 2)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda yukarıdaki ifadede β ve σ_e^2 'nin sırasıyla (5.6) ve (5.7)'de verilen $\hat{\beta}$ ve $\hat{\sigma}_e^2$ tahmin edicilerinin kullanılmasıyla

$$\hat{\mu}_3 = e^{\hat{\beta}} (1 + \hat{\sigma}_e^2 / 2) \quad (5.13)$$

ile μ için üçüncü bir tahmin edici elde edilir.

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{i=1}^n E(X_i) \\
&= \mu \sum_{i=1}^n i^{-\alpha}
\end{aligned}$$

dir. Böylece S_n , $\mu \sum_{k=1}^n i^{-\alpha}$ için yansız bir tahmin edicidir. Bu durumda α yerine (5.5)'de verilen α 'nın en küçük kareler tahmin edicisi olan $\hat{\alpha}$ 'nın alınmasıyla μ için

$$\hat{\mu}_4 = \frac{S_n}{\sum_{i=1}^n i^{-\hat{\alpha}}} \quad (5.14)$$

ile dördüncü bir tahmin edici tanımlanır.

$$Y_i = i^\alpha X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olduğundan

$$\hat{Y}_i = i^{\hat{\alpha}} X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olup μ için beşinci bir tahmin edici

$$\hat{\mu}_5 = \frac{\sum_{i=1}^n i^{\hat{\alpha}} X_i}{n} \quad (5.15)$$

ile verilir.

$X_i = \frac{Y_i}{i^\alpha}$ ve $E(X_i) = \mu i^{-\alpha}$ olduğundan α 'nın bilindiği kabul edildiğinde

$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu i^{-\alpha})^2$ kareler toplamının μ 'ye göre minimize edilmesiyle

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n i^{-\alpha} X_i}{\sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}}, \quad (5.16)$$

elde edilir. (5.16)'da α yerine (5.5)'de verilen en küçük kareler tahmin edicisinin alınmasıyla μ için diğer bir tahmin edici aşağıdaki gibi verilir.

$$\hat{\mu}_6 = \frac{\sum_{i=1}^n i^{-\hat{\alpha}} X_i}{\sum_{i=1}^n i^{-2\hat{\alpha}}}. \quad (5.17)$$

5.2 Bazı Tahmin Edicilerin İstatistiksel Özellikleri

Bu kısımda α, μ ve σ^2 parametrelerinin bazı tahmin edicilerinin tutarlılık ve asimptotik normallik gibi istatistiksel özellikleri incelenecektir.

Teorem 5.2.1 $E\left|(\ln Y_i)\right|^3 < \infty$ ise, $\hat{\alpha}$ tahmin edicisi, α ortalamalı ve σ_e^2/a_n varyanslı asimptotik normal dağılıma sahiptir, yani

$$\frac{\sqrt{a_n}(\hat{\alpha} - \alpha)}{\sigma_e} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1) \quad (5.18)$$

dir (Aydoğdu ve Kara 2012). Burada $a_n = \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2$.

İspat: $\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right] = 0$ ve $\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right] \ln i = -n a_n$ olduğundan, $\hat{\alpha}$ 'nın

(5.5)'de verilen en küçük kareler tahmin edicisinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} - \alpha &= \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right] \ln X_i - \alpha \\
&= \frac{1}{na_n} \left(\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right] \ln X_i + \alpha \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right] \ln i \right) \\
&= \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right] \ln Y_i \\
&= \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right] (\ln Y_i - \beta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$d_{ni} = \sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \text{ diyelim.}$$

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = \max_{i=1,2,\dots,n} (\ln(n!/i^n))^2 = (\ln(n!))^2$$

olur. Sonuç 2.2 deki 2.5 ifadesinden

$$\frac{\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2}{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2} = \frac{(\ln n!)^2}{\sum_{i=1}^n (\ln(n!/i^n))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

yani,

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = o\left(\sum_{i=1}^n d_{ni}^2\right)$$

dır. Böylece (2.4.2) 'de verilen Liapunov teoreminden

$$\frac{na_n(\hat{\alpha} - \alpha)}{\sigma_e \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right)^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$

elde edilir. Ayrıca $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \ln j - n \ln i \right)^2 = n^2 a_n$ olduğunun göz önüne alınmasıyla,

$$\frac{\sqrt{a_n}(\hat{\alpha} - \alpha)}{\sigma_e} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

α 'nın bilinmesi durumunda (5.9) , (5.14) , (5.15) ve (5.17) de verilen $\hat{\sigma}_2^2$, $\hat{\mu}_4$, $\hat{\mu}_5$ ve $\hat{\mu}_6$ tahmin edicilerinin yeni biçimleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{\sigma}_3^2 = \left[\sum_{i=1}^n (i^\alpha X_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n (i^\alpha X_i))^2}{n} \right] / (n-1)$$

$$\hat{\mu}_7 = \frac{S_n}{\sum_{i=1}^n i^{-\alpha}}$$

$$\hat{\mu}_8 = \frac{\sum_{i=1}^n i^{-\alpha} X_i}{n}.$$

ve

$$\hat{\mu}_9 = \frac{\sum_{i=1}^n i^{-\alpha} X_i}{\sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}}.$$

$\hat{\mu}_7, \hat{\mu}_8, \hat{\mu}_9$ ve $\hat{\sigma}_3^2$ tahmin edicilerinin tutarlılık ve asimptotik normallik özellikleri aşağıda verilen teoremlerle ifade edilir.

Teorem 5.2.2 (i) $\alpha \leq 1$ ise $\hat{\mu}_7$, μ için güçlü tutarlı bir tahmin edicidir, yani

$$\hat{\mu}_7 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{hhhy} \mu.$$

(ii) $\alpha \leq 1/2$ ve $E|Y_i^3| < \infty$ ise $\hat{\mu}_7$, μ ortalamalı ve σ^2 / b_n varyanslı asimptotik normal dağılıma sahiptir, yani

$$\frac{\sqrt{b_n}(\hat{\mu}_7 - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$

dir (Aydoğdu ve Kara 2012). Burada $b_n = \left(\sum_{i=1}^n i^{-\alpha} \right)^2 / \sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}$.

İspat (i) (3.18)'den $E(X_i) = \mu_i = i^{-\alpha} \mu$ olduğundan,

$$\hat{\mu}_7 - \mu = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sum_{i=1}^n i^{-\alpha}} \quad (5.19)$$

yazılabilir. $c_n = \sum_{i=1}^n i^{-\alpha}$ olsun, $\alpha \leq 1$ için (c_n) dizisinin monoton artan olarak sonsuza ıraksadığı açıktır. (3.19)'dan $Var(X_i) = i^{-2\alpha} \sigma^2$ olduğu bilinmektedir. Bunun kullanılmasıyla,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{Var(X_i)}{c_i^2} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(i^{-2\alpha} / \left(\sum_{j=1}^i j^{-\alpha} \right)^2 \right)$$

olur. Lemma 2.1 'den $\sum_{i=1}^{\infty} \left(i^{-2\alpha} / \left(\sum_{j=1}^i j^{-\alpha} \right)^2 \right)$ serisinin $\alpha \leq 1$ için yakınsak olduğu

kolayca görülür. Böylece Teorem 2.1.6 'nın kullanılmasıyla,

$$\hat{\mu}_7 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{hhhy} \mu$$

bulunur.

(ii) (5.1) ve (5.19) 'in kullanılmasıyla

$$\hat{\mu}_7 - \mu = \sum_{i=1}^n d_{ni} (Y_i - \mu)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $d_{ni} = i^{-\alpha} / \sum_{j=1}^n j^{-\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = \begin{cases} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n j^{-\alpha} \right)^2}, & \alpha \geq 0 \\ \frac{n^{-2\alpha}}{\left(\sum_{j=1}^n j^{-\alpha} \right)^2}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

ve

$$\frac{\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2}{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}}, & \alpha \geq 0 \\ \frac{n^{-2\alpha}}{\sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

olur. Lemma 2.1 'in kullanılmasıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2}{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}}, & 0 \leq \alpha \leq 1/2 \\ \frac{n^{-2\alpha}}{\sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}}, & \alpha < 0 \end{cases} = 0$$

yani, $\alpha \leq 1/2$ için

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = o\left(\sum_{i=1}^n d_{ni}^2\right)$$

dır. Böylece (2.4.2)'de verilen Liapunov teoreminden

$$\frac{(\hat{\mu}_7 - \mu)}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1).$$

$b_n = 1/\sum_{i=1}^n d_{ni}^2$ olduğunun göz önüne alınmasıyla ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.3 $E(Y^2) < \infty$ ise, $\hat{\mu}_8$, μ ortalamalı ve σ^2/n varyanslı asimptotik normal dağılıma sahiptir, yani

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_8 - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$

dir.

Teorem 5.2.4 (i) $\alpha \leq 1/2$ ise, $\hat{\mu}_9$, μ için güçlü tutarlı bir tahmin edicidir, yani

$$\hat{\mu}_9 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{hhhy} \mu.$$

(ii) $\alpha \leq 1/4$ ve $E|Y_i^3| < \infty$ ise, $\hat{\mu}_9$, μ ortalamalı ve σ^2/c_n varyanslı asimptotik normal dağılıma sahiptir, yani

$$\frac{\sqrt{c_n}(\hat{\mu}_9 - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$

dir (Aydoğdu ve Kara 2012). Burada $c_n = \left(\sum_{i=1}^n i^{-2\alpha}\right)^2 / \sum_{i=1}^n i^{-4\alpha}$.

İspat: Teorem 5.2.2 ‘nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.2.5 $E(Y^4) < \infty$ ise, $\hat{\sigma}_3^2$, σ^2 ortalamalı ve $(\mu_4 - \sigma^4)/n$ varyanslı asimptotik normal dağılıma sahiptir, yani

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\sigma}_3^2 - \sigma^2)}{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0,1)$$

dir. Burada $\mu_4 = E((Y - \mu)^4)$.

5.3 Yenileme Sürecinin α -Seri Süreçten Ayırt Edilmesine Yönelik Bir Test

Bir α -seri sürecin yenileme süreci olması demek α parametresinin 0 olması demektir. Bize verilen bir α -seri sürecin yenileme süreci olup olmadığını anlamak için aşağıda verilen hipotezin test edilmesi gerekir.

$$H_0 : \alpha = 0$$

$$H_1 : \alpha \neq 0$$

(5.18)’de verilen limit ifadesinin göz önüne alınmasıyla test istatistiği olarak

$$R = \frac{\sqrt{a_n} \hat{\alpha}}{\hat{\sigma}_e}$$

ile tanımlanan R istatistiği önerilebilir, burada $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln i \sum_{i=1}^n \ln X_i - n \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln i}{n \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2}$,

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i\right)^2\right) - \hat{\alpha}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2\right)}{n-2}}$$

$$\text{ve } a_n = \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2.$$

H_0 hipotezi altında R test istatistiği Teorem 5.2.1 ile büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir. Bu test istatistiği ile H_0 hipotezi red edilmezse, yani

$\alpha = 0$ ise α -seri süreci bir yenileme sürecidir ve böylece μ ve σ^2 için parametrik olmayan düzgün minimum varyanslı yansız tahmin ediciler sırasıyla

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

dır. Ayrıca $\hat{\mu} \sim AN(\mu, \sigma^2/n)$ ve $\hat{\sigma}^2 \sim AN(\sigma^2, (\mu_4 - \sigma^4)/n)$.

6. BİR α -SERİ SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK TAHMİNİ

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir α -seri süreç olsun. Bu süreçte ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olan X_1 rasgele değişkeninin F dağılım fonksiyonu şekilsel olarak bilinirken bazı parametrelerin bilinmediği durumu göz önüne alalım. Bu durumda sürecin α parametresinin ve F dağılımının bilinmeyen parametrelerinin süreçten gelen bir veri kümesi yardımıyla parametrik olarak tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu bölümde üstel, gama, lognormal ve Weibull dağılımı için sürecin α parametresinin ve F dağılımının bilinmeyen parametrelerinin ML ve MML tahmin yöntemleriyle tahmin edicileri elde edilir ve bazı istatistiksel özellikleri incelenir.

6.1 Üstel Dağılım

$\{N(t), t \geq 0\}$, F dağılım fonksiyonu θ parametrelili üstel olan bir α -seri süreç olsun. Bu kısımda $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bu süreçten gelen bir veri kümesi olmak üzere bu veriye dayalı olarak α ve θ parametrelerinin ML tahmin edicilerinin elde edilmesi üzerinde durulur. Bu tahmin ediciler analitik olarak bulunamadığından α ve θ nın MML yöntemi kullanılarak tahmin edicileri analitik olarak bulunur.

6.1.1 En çok olabilirlik yöntemi

Bir α -seri süreçten gelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ gözlemlerini göz önüne alalım. X_1 rasgele değişkeninin dağılımı θ parametrelili üstel olsun. Bu durumda X_1 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x > 0; \theta > 0$ dır. Burada $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler. X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_i(x) = (i^\alpha / \theta) e^{-i^\alpha x / \theta}$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir. Bu durumda $L(\alpha, \theta)$ olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^n i\right)^\alpha}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{\theta}}$$

olarak bulunur.

$$\ln L(\alpha, \theta) = \alpha \sum_{i=1}^n \ln i - n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{\theta}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak α ve θ değerlerinin hesaplanması için α ve θ 'ya göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \alpha} = \theta \sum_{i=1}^n \ln i - \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \ln i = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i - n\theta = 0 \quad (6.2)$$

denklemlerine ulaşılır. (6.2) denkleminde

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{n} \quad (6.3)$$

olur. Bu ifadenin (6.1)'de yerine konulmasıyla α 'ya göre

$$\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right) = 0 \quad (6.4)$$

lineer olmayan denklem elde edilir. Burada,

$$U(\alpha) = \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)$$

ve

$$V(\alpha) = \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \ln i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)$$

olmak üzere, bu durumda Newton-Raphson yönteminde $\alpha(1)$ başlangıç değeri ile,

$$\begin{aligned}\alpha(m+1) &= \alpha(m) - \frac{U(\alpha(m))}{V(\alpha(m))} \\ &= \alpha(m) - \frac{\sum_{i=1}^n i^{\alpha(m)} x_i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)}{\sum_{i=1}^n i^{\alpha(m)} x_i \ln i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)}, \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (6.5)$$

iterasyon işlemine ulaşılır. $\alpha(m+1), \alpha(m)$ sayısına yeterince yakınsa iterasyon durdurularak α 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri olan $\hat{\alpha} = \alpha(m+1)$ olarak bulunmuş olur. α 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri olan $\hat{\alpha}$ 'nın (6.3)'de yerine konulmasıyla,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n i^{\hat{\alpha}} x_i}{n} \quad (6.6)$$

elde edilir. Ayrıca θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisine bağlı olarak

$$\hat{\mu} = \hat{\theta} \quad (6.7)$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\theta}^2 \quad (6.8)$$

sırasıyla F dağılımının ortalama ve varyansının en çok olabilirlik tahmin edicisi olur.

6.1.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

(6.4)'de verilen lineer olmayan denklemden sürecin α parametresinin analitik olarak elde edilemeyeceği bir önceki kısımdan bilinmektedir. MML yöntemi bu tür durumlarda kullanılan bir yöntemdir. MML tahmin yöntemi kullanılarak tahmin ediciler analitik olarak elde edilebilecektir.

(5.1)'de verilen $Y_i = i^\alpha X_i$ ifadesinde her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln Y_i = \alpha \ln i + \ln X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.9)$$

elde edilir. $\ln Y_i$ 'ler aşağıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ile birbirinden bağımsız ve aynı uç değer dağılımlıdır.

$$f(w) = \exp(w - \delta - \exp(w - \delta)), \quad w \in R, \delta \in R, \quad (6.10)$$

burada $\delta = \ln \theta$ dır ve θ üstel dağılımın ölçek parametresidir.

İlk olarak uç değeri dağılımının bilinmeyen parametreleri tahmin edilip daha sonra aşağıdaki dönüşüm kullanılarak üstel dağılımın parametresi tahmin edilecektir.

$$\theta = \exp(\delta) \quad (6.11)$$

(6.9) ve (6.10) kullanılarak $\ln X_i$ 'ler için olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \delta) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i + \alpha \ln i - \delta - \sum_{i=1}^n \exp(\ln x_i + \alpha \ln i - \delta) \right) \quad (6.12)$$

olur.

$$\ln L(\alpha, \delta) = \sum_{i=1}^n \ln x_i + \alpha \ln i - \delta - \sum_{i=1}^n \exp(\ln x_i + \alpha \ln i - \delta) \quad (6.13)$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak α ve δ değerlerinin hesaplanması için α ve δ 'ya göre kısmi türevler alınarak

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \ln i - \sum_{i=1}^n \exp(\ln x_i + \alpha \ln i - \delta) \ln i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \exp(\ln x_i + \alpha \ln i - \delta) - n = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerde $c_i = \ln i$ ve $z_i = \ln x_i + \alpha \ln i - \delta$ yazalım.

Böylece,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n c_i - \sum_{i=1}^n \exp(z_i) c_i = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \exp(z_i) - n = 0 \quad (6.15)$$

olur. Bu denklemler kullanılarak bilinmeyen parametrelerin kapalı formda tahminlerini elde etmek mümkün değildir. Bu yüzden ikinci bölümde bahsedilen ve sıra istatistiklerine dayanan MML yöntemi kullanılacaktır. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ ler birbirinden bağımsız ve standart uç değeri dağılımıyla aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir. Bu rasgele değişkenler küçükten büyüğe doğru sırlandığında $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için i . sırada bulunan rasgele değişken $Z_{(i)}$ ile temsil edilsin. $Z_i = \ln X_i + \alpha c_i - \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$ ifadesi göz önüne alındığında $\ln x_{[i]}$ ve $c_{[i]}$ değerleri sıralanmış $z_{(i)}$ değerine karşılık gelen gözlem çifti olmak üzere $z_{(i)} = \ln x_{[i]} + \alpha c_{[i]} - \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$ olur. Burada not edelim ki z_i 'lerin gözlemlerden sıralanarak elde edilmesinde α ve δ parametrelerinin etkisi

yoktur. Çünkü z_i 'nin ifadesinde α ve δ i 'den bağımsız, yani i 'ye göre sabittir. Bu durumda (6.14) ve (6.15)'de verilen olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ln L(\alpha; \delta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n c_{[i]} - \sum_{i=1}^n \exp(z_{(i)}) c_{[i]} = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha; \delta)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \exp(z_{(i)}) - n = 0 \quad (6.17)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. ML tahmin edicilerinin açık olarak çözülememesine sebep olan $\exp(z_{(i)})$ ifadesi Taylor açılımı yardımıyla $t_{(i)} = E(Z_{(i)})$ etrafında ilk iki terime göre açılır. Bu durumda

$$e^{z_{(i)}} \cong e^{t_{(i)}} + (z_{(i)} - t_{(i)}) \left\{ \frac{d}{dz} e^z \right\}_{z=t_{(i)}} \quad (6.18)$$

olmak üzere,

$$e^{z_{(i)}} \cong a_i + b_i z_{(i)} \quad (6.19)$$

olarak elde edilir. Burada $b_i = e^{t_{(i)}}$ ve $a_i = e^{t_{(i)}}(1 - t_{(i)})$ dir. Standart uç değer dağılımı için $t_{(i)}$ lerin gerçek değerleri

$$t_{(i)} = -0.57722 - (n+1-i) \left(\frac{n}{n+1-i} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^j \frac{\ln(n+j+1-i)}{n+j+1-i}. \quad (6.20)$$

ve $n \geq 10$ için yaklaşık değerleri

$$t_{(i)} \cong F^{-1}(i/n+1) = \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right), \quad 1 \leq i \leq n$$

ile verilir (Tiku ve Akkaya 2004). Burada F standart uç değer dağılım fonksiyonudur. (6.19) 'daki ifadenin olabilirlik denklemlerinde yerine yazılmasıyla,

$$\frac{\partial \ln L^*(\alpha, \delta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n c_{[i]} - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i z_{(i)}) c_{[i]} = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \ln L^*(\alpha, \delta)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n a_i + b_i z_{(i)} - n = 0 \quad (6.22)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden

$$\tilde{\alpha} = D - E \text{ ve } \tilde{\delta} = \ln \bar{x}_{[.]} + \tilde{\alpha} \bar{c}_{[.]} + \frac{\Delta}{m} \quad (6.23)$$

MML tahmin edicileri elde edilir. Burada,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - a_i)(c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})}{\sum_{i=1}^n b_i (c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})^2}, E = \frac{\sum_{i=1}^n b_i (\ln x_{[i]} - \ln \bar{x}_{[.]})(c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})}{\sum_{i=1}^n b_i (c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})^2}, \ln \bar{x}_{[.]} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \ln x_{[i]}}{m},$$

$$\bar{c}_{[.]} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i c_{[i]}}{m}, \Delta = \sum_{i=1}^n (a_i - 1) \text{ ve } m = \sum_{i=1}^n b_i \text{ dir. } \delta = \ln \theta \text{ dönüşümü kullanılarak } \theta \text{ 'nın}$$

MML tahmin edicisi

$$\tilde{\theta} = \exp(\tilde{\delta}) \quad (6.24)$$

olur. θ 'nın MML tahmin edicisine bağlı olarak F dağılımının ortalama ve varyansının MML tahmin edicileri sırasıyla

$$\tilde{\mu} = \tilde{\theta} \quad (6.25)$$

ve

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\theta}^2 \quad (6.26)$$

dır.

6.1.3 $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\theta}$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları

Kısım 6.1.1'den $\ln L(\alpha, \theta) = \alpha \sum_{i=1}^n \ln i - n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha X_i}{\theta}$ olduğunu biliyoruz. Bu

fonksiyonun α ve θ parametrelerine göre 2. mertebeden kısmi türevlerinin alınmasıyla

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \alpha^2} = - \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha X_i \ln^2 i}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^n i^\alpha X_i}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \alpha \partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha X_i \ln i}{\theta^2}$$

bulunur. Bu durumda

$$E \left(- \frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \alpha^2} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n E(i^\alpha X_i) \ln^2 i}{\theta} = \sum_{i=1}^n \ln^2 i$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \theta^2}\right) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2 \sum_{i=1}^n E(i^\alpha X_i)}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2}$$

ve

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta)}{\partial \alpha \partial \theta}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^n E(i^\alpha X_i) \ln i}{\theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n \ln i}{\theta}$$

olur. Böylece $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\theta}$ ML tahmin edicileri için Fisher bilgi matrisi

$$I(\alpha, \theta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln^2 i & -\sum_{i=1}^n \ln i / \theta \\ -\sum_{i=1}^n \ln i / \theta & n / \theta^2 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. V kovaryans matrisi I matrisinin tersini göstermek üzere

$$V = I^{-1}(\alpha, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{n}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} & \frac{\theta \sum_{i=1}^n \ln i}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} \\ \frac{\theta \sum_{i=1}^n \ln i}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} & \frac{\theta^2 \sum_{i=1}^n \ln^2 i}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} \end{bmatrix}$$

ve sonuçta

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \sim AN\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}, V\right)$$

bulunur. Ayrıca buradan tahmin edicilerin marjinal asimptotik dağılımlarının

$$\hat{\alpha} \sim AN\left(\alpha, \frac{n}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2}\right) \text{ ve } \hat{\theta} \sim AN\left(\theta, \frac{\theta^2 \sum_{i=1}^n \ln^2 i}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2}\right)$$

olduğu açıktır.

6.2 Gama Dağılımı

$\{N(t), t \geq 0\}$, F dağılım fonksiyonu θ şekil ve β ölçek parametrelili gama olan bir α - seri süreç olsun. Bu kısımda $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bu süreçten gelen bir veri kümesi olmak üzere bu veriye dayalı olarak α, θ ve β parametrelerinin ML tahmin edicilerinin elde edilmesi üzerinde durulur. Bu tahmin ediciler analitik olarak bulunamadığından α, θ ve β 'nın MML yöntemi kullanılarak tahmin edicileri analitik olarak elde edilir.

6.2.1 En çok olabilirlik yöntemi

Bir α -seri süreçten gelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ gözlemlerini göz önüne alalım. X_1 rasgele değişkeninin dağılımı θ ve β parametrelili gama olsun. Bu durumda X_1 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\beta^\theta} x^{\theta-1} e^{-x/\beta}$, $x > 0; \theta > 0, \beta > 0$ dir. Burada

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler.

$X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_i(x) = i^\alpha f(i^\alpha x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir. Bu durumda $L(\alpha, \theta, \beta)$ olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(\alpha, \theta, \beta) &= \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\ &= \frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta-1} \left(\prod_{i=1}^n i \right)^{\alpha\theta} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{\beta}}}{\Gamma^n(\theta) \beta^{n\theta}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\ln L(\alpha, \theta, \beta) = (\theta-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + \alpha\theta \sum_{i=1}^n \ln i - n \ln \Gamma(\theta) - n\theta \ln \beta - \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{\beta}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak α, θ ve β değerlerinin hesaplanması için α, θ ve β 'ya göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha} = \theta \beta \sum_{i=1}^n \ln i - \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \ln i = 0 \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \ln x_i + \alpha \sum_{i=1}^n \ln i - n\psi(\theta) - n \ln \beta = 0 \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i - n\theta\beta = 0 \quad (6.29)$$

denklemleri elde edilir, 6.28’de yer alan $\psi(\theta) = \frac{d \ln \Gamma(\theta)}{d\theta}$ dir. (6.29) denkleminde

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{n\theta} \quad (6.30)$$

olur. Bu ifadenin (6.27) ve (6.28)’de yerine konulmasıyla α ve θ ’ya göre

$$\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right) = 0 \quad (6.31)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n \ln i}{n} - \ln \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{n} + \ln \theta - \psi(\theta) = 0 \quad (6.32)$$

lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. α ’nın ML tahminine (6.31) lineer olmayan denkleminde Newton-Raphson yöntemi uygulanarak aşağıdaki gibi ulaşılabilir.

$$U(\alpha) = \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)$$

ve

$$V(\alpha) = \sum_{i=1}^n i^\alpha x_i \ln i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)$$

olmak üzere Newton Raphson yönteminde $\alpha(1)$ başlangıç değeri ile

$$\begin{aligned} \alpha(m+1) &= \alpha(m) - \frac{U(\alpha(m))}{V(\alpha(m))} \\ &= \alpha(m) - \frac{\sum_{i=1}^n i^{\alpha(m)} x_i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)}{\sum_{i=1}^n i^{\alpha(m)} x_i \ln i \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right)}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.33)$$

iterasyon işlemine ulaşılır. $\alpha(m+1)$, $\alpha(m)$ değerine yeterince yakınsa iterasyon durdurularak α ’nın ML tahmin değeri $\hat{\alpha} = \alpha(m+1)$ olarak bulunmuş olur. (6.32) ile θ için benzer işlemler yapılarak θ ’nın ML tahmini bulunur:

$$U(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} + \hat{\alpha} \frac{\sum_{i=1}^n \ln i}{n} - \ln \frac{\sum_{i=1}^n i^{\alpha} x_i}{n} + \ln \theta - \psi(\theta)$$

ve

$$V(\theta) = \frac{1}{\theta} - \psi'(\theta)$$

olmak üzere Newton Rapson yönteminden $\theta(1)$ başlangıç değeri ile,

$$\begin{aligned} \theta(m+1) &= \theta(m) - \frac{U(\theta(m))}{V(\theta(m))} \\ &= \theta(m) - \frac{\frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} + \hat{\alpha} \frac{\sum_{i=1}^n \ln i}{n} - \ln \frac{\sum_{i=1}^n i^{\alpha} x_i}{n} + \ln \theta(m) - \psi(\theta(m))}{\frac{1}{\theta(m)} - \psi'(\theta(m))}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.34)$$

iterasyon işlemine ulaşılır. $\theta(m+1)$, $\theta(m)$ değerine yeterince yakınsa iterasyon durdurularak θ 'nın ML tahmin değeri $\hat{\theta} = \theta(m+1)$ olarak bulunmuş olur. α ve θ 'nın ML tahminleri olan $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\theta}$ 'nın (6.30) 'da yerine konulmasıyla,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i^{\hat{\alpha}} x_i}{n \hat{\theta}} \quad (6.35)$$

ile β 'nin ML tahmin değeri $\hat{\beta}$ elde edilir. Ayrıca, θ ve β parametrelerinin ML tahmin değerlerine bağlı olarak F dağılımının μ ortalaması ve σ^2 varyansının ML tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha} \hat{\beta} \quad (6.36)$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\alpha} \hat{\beta}^2 \quad (6.37)$$

olarak bulunur.

6.2.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

(6.31)'de verilen α 'ya göre lineer olmayan $\sum_{i=1}^n i^{\alpha} x_i (\frac{\ln n!}{n} - \ln i) = 0$ denklemini tekrar göz önüne alalım. Bu denklem

$$\sum_{i=1}^n \exp(\alpha \ln i + \ln x_i) \left(\frac{\ln n!}{n} - \ln i \right) = 0 \quad (6.38)$$

biçiminde yazılabilir. (6.38)'de verilen denklemde $c_i = \ln i$, $c = \frac{\ln n!}{n}$ ve

$z_i = \alpha \ln i + \ln x_i$ alalım. Böylece, (6.38)

$$\sum_{i=1}^n \exp(z_i) (c - c_i) = 0 \quad (6.39)$$

olur. Bu denklemdeki $\exp(z_i)$ ifadesinden dolayı α parametresinin ML tahmin edicisinin analitik olarak elde edilemediği bilinmektedir. Bu sebepten α parametresinin tahmini için MML yöntemi kullanılacaktır. (6.39)'da verilen denklem

$$\sum_{i=1}^n \exp(z_{(i)}) (c - c_{[i]}) = 0 \quad (6.40)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\ln x_{[i]}$ ve $c_{[i]}$ değerleri sıralanmış $z_{(i)}$ değerine karşılık gelen gözlem çifti olmak üzere $z_{(i)} = \ln x_{[i]} + \alpha c_{[i]}, i = 1, 2, \dots, n$ dır. $e^{z_{(i)}}$ ifadesinin $t_{(i)} = E(Z_{(i)})$ etrafında ilk iki terime göre Taylor serisine açılmasıyla $e^{z_{(i)}} \cong a_i + b_i z_{(i)}$ olur, burada $b_i = \exp(t_{(i)})$, $a_i = \exp(t_{(i)})(1 - t_{(i)})$ dir. F , θ şekil ve β ölçek parametrelili gama dağılım fonksiyonu olmak üzere Z_i 'nin dağılımı F dağılımına karşılık gelen rasgele değişkenin logaritmasının dağılımı olduğunun göz önüne alınmasıyla $n \geq 10$ için $t_{(i)}$ 'nin yaklaşık olarak

$$t_{(i)} \cong \ln F^{-1}(i/(n+1)), 1 \leq i \leq n$$

ifadesinden elde edilebileceği kolaylıkla görülür. $e^{z_{(i)}} \cong a_i + b_i z_{(i)}$ ifadesinin (6.40)'da yerine konulmasıyla

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i z_{(i)}) (c - c_{[i]}) = 0 \quad (6.41)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü ile α 'nın MML tahmin edicisi

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (c - c_{[i]}) (a_i + b_i \ln x_{[i]})}{\sum_{i=1}^n b_i c_{[i]} (c_{[i]} - c)} \quad (6.42)$$

biçiminde bulunur.

Şimdi, θ 'nın MML tahmin edicisini bulalım. Bunun için (6.32)'de verilen denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ln \theta - \psi(\theta) - \ln(\bar{y}/\tilde{y}) = 0. \quad (6.43)$$

Burada $\tilde{\alpha}$, α 'nın (6.42)'de verilen MML tahmin edicisi olmak üzere $\bar{y} = \sum_{i=1}^n i^{\tilde{\alpha}} x_i / n$

kestirilen y_i 'lerin ortalaması ve $\tilde{y} = \left(\prod_{i=1}^n i^{\tilde{\alpha}} x_i \right)^{1/n}$ kestirilen y_i 'lerin geometrik ortalamasıdır. (6.43) denkleminde görüldüğü gibi θ , $\bar{y}/\tilde{y}$ 'nin bir fonksiyonu olup bu denklemden θ analitik olarak elde edilemez. Newton- Rapshon gibi herhangi bir iteratif yöntem kullanılarak θ 'nın ML tahmini sayısal olarak hesaplanabilir. Ayrıca literatürde bu denklemden θ 'nın çözümü için Greenwood ve Durand (1960) tarafından verilen $\alpha = 0$ durumunda geçerli olan bir yaklaşık ifadenin $\alpha \neq 0$ durumuna uyarlanmasıyla θ için MML tahmin edicisi

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} \frac{0.5000876 + 0.1648852 M - 0.0544274 M^2}{M}, & 0 < M \leq 0.5772 \\ \frac{8.898919 + 9.059950 M + 0.9775373 M^2}{M(17.79728 + 11.968477 M + M^2)}, & 0.5772 < M \leq 17 \\ \frac{1}{M}, & M > 17 \end{cases} \quad (6.44)$$

biçiminde verilir, burada $M = \ln(\bar{y}/\tilde{y})$ dır. α ve θ 'nın MML tahminleri olan $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\theta}$ 'nin (6.30) 'da yerine konulmasıyla,

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i^{\tilde{\alpha}} x_i}{n\tilde{\theta}} \quad (6.45)$$

ile β 'nin MML tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ elde edilir. Ayrıca, θ ve β parametrelerinin MML tahmin değerlerine bağlı olarak, dağılımın ortalaması μ ve varyansı σ^2 'nin MML tahmin edicileri sırasıyla

$$\tilde{\mu} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta} \quad (6.46)$$

ve

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^2 \quad (6.47)$$

olur.

6.2.3 $\hat{\alpha}, \hat{\theta}$ ve $\hat{\beta}$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları

Kısım 6.2.1'den $\ln L(\alpha, \theta, \beta) = (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + \alpha \theta \sum_{i=1}^n \ln i - n \ln \Gamma(\theta) - n \theta \ln \beta - \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha x_i}{\beta}$

olduğunu biliyoruz. Bu fonksiyonun α, θ ve β parametrelerine göre 2. mertebeden kısmi türevlerinin alınmasıyla

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha^2} = - \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha X_i \ln^2 i}{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \theta^2} = -n \psi'(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \beta^2} = \frac{n\theta}{\beta^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^n i^\alpha X_i}{\beta^3}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha \partial \theta} = \sum_{i=1}^n \ln i$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i^\alpha X_i \ln i}{\beta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \theta \partial \beta} = - \frac{n}{\beta}$$

bulunur. Bu durumda

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 i E(i^\alpha X_i)}{\beta} = \theta \sum_{i=1}^n \ln^2 i$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \theta^2}\right) = n \psi'(\theta)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \beta^2}\right) = \frac{2 \sum_{i=1}^n E(i^\alpha X_i)}{\beta^3} - \frac{n\theta}{\beta^2} = \frac{n\theta}{\beta^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha \partial \theta}\right) = - \sum_{i=1}^n \ln i$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^n \ln i E(i^\alpha X_i)}{\beta^2} = -\frac{\theta \sum_{i=1}^n \ln i}{\beta}$$

ve

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \theta \partial \beta}\right) = \frac{n}{\beta}$$

olur. Böylece $\hat{\alpha}$, $\hat{\theta}$ ve $\hat{\beta}$ ML tahmin edicileri için Fisher bilgi matrisi

$$I(\alpha, \theta, \beta) = \begin{bmatrix} \theta \sum_{i=1}^n \ln^2 i & -\sum_{i=1}^n \ln i & -\frac{\theta \sum_{i=1}^n \ln i}{\beta} \\ -\sum_{i=1}^n \ln i & n\psi'(\theta) & \frac{n}{\beta} \\ -\frac{\theta \sum_{i=1}^n \ln i}{\beta} & \frac{n}{\beta} & \frac{n\theta}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. V kovaryans matrisi I matrisinin tersini göstermek üzere

$$V = \begin{bmatrix} \frac{n}{\theta \left(n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 \right)} & 0 & \frac{\beta \sum_{i=1}^n \ln i}{\theta \left(n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 \right)} \\ 0 & \frac{\theta}{n(\theta\psi'(\theta)-1)} & -\frac{\beta}{n(\theta\psi'(\theta)-1)} \\ \frac{\beta \sum_{i=1}^n \ln i}{\theta \left(n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 \right)} & -\frac{\beta}{n(\theta\psi'(\theta)-1)} & \frac{\beta^2}{n\theta} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 i}{\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2} + \frac{1}{\theta\psi'(\theta)-1} \right) \end{bmatrix}$$

ve sonuçta

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \\ \beta \end{pmatrix}, V \right) \quad (6.48)$$

bulunur. Ayrıca buradan tahmin edicilerin marjinal asimptotik dağılımlarının

$$\hat{\alpha} \sim AN \left(\alpha, \frac{n}{\theta \left(n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 \right)} \right), \hat{\theta} \sim AN \left(\theta, \frac{\theta}{n(\theta \psi'(\theta) - 1)} \right)$$

ve

$$\hat{\beta} \sim AN \left(\beta, \frac{\beta^2}{n\theta} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 i}{\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2} + \frac{1}{\theta \psi'(\theta) - 1} \right) \right)$$

olduğu açıktır.

F dağılımının μ ortalaması ve σ^2 varyansının ML tahmin edicileri olan $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}^2$ istatistiklerinin ortak asimptotik dağılımı aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 6. 2. 1

$u_n = \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 / \left(\sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 \right)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 u_n / n & 2\sigma^2 \beta u_n / n \\ 2\sigma^2 \beta u_n / n & \frac{\sigma^2 \beta^2}{n} \left(4u_n + \frac{1}{\theta \psi'(\theta) - 1} \right) \end{bmatrix} \right)$$

dır.

İspat: (6.48) ifadesinden

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \theta \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

olduğu açıktır, burada

$$\sigma_{11} = \frac{\theta}{n(\theta\psi'(\theta)-1)},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\beta}{n(\theta\psi'(\theta)-1)},$$

$$\sigma_{22} = \frac{\beta^2}{n\theta} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 i}{\left(\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 \right)} + \frac{1}{\theta\psi'(\theta)-1} \right).$$

Teorem 2.1.8' de $x = \theta, y = \beta, f(\theta, \beta) = \theta\beta$ ve $g(\theta, \beta) = \theta\beta^2$ alınsın

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \beta} = 2\theta\beta^2$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \theta} = \theta\beta^2$$

olup $\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \beta} \neq \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \theta}$ bulunur. Bu durumda

$$\psi_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \beta} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)^2 \sigma_{22} = \frac{\sigma^2 u_n}{n}$$

$$\psi_{12} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} \sigma_{11} + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \sigma_{12} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \beta} \sigma_{22} = \frac{2\sigma^2 \beta u_n}{n}$$

$$\psi_{22} = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \beta} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \right)^2 \sigma_{22} = \frac{\sigma^2 \beta^2}{n} \left(4u_n + \frac{1}{\theta\psi'(\theta)-1} \right)$$

olduğunun göz önüne alınmasıyla Teorem 2.1.8'den ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak

$$\hat{\mu} \sim AN \left(\mu, \frac{\sigma^2 u_n}{n} \right)$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 \sim AN\left(\sigma^2, \frac{\sigma^2 \beta^2}{n} \left(4u_n + \frac{1}{\theta \psi'(\theta) - 1}\right)\right)$$

dır.

$$(2.2) \text{ ve } (2.3) \text{ ifadelerinden } \sum_{i=1}^n \ln i \sim n(\ln n - 1) \text{ ve } \sum_{i=1}^n \ln^2 i \sim 2n + n \ln^2 n - 2n \ln n$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadelerin kullanılmasıyla

$$u_n \sim 1 + (\ln(n/e))^2 \quad (6.49)$$

olur. Bu durumda ML tahmin edicilerinin asimptotik varyanslarında bulunan u_n yerine asimptotik dengi olan $u_n \sim 1 + (\ln(n/e))^2$ yazılabilir.

Şimdi $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}^2$ ML tahmin edicilerinin sırasıyla μ ve σ^2 parametreleri için tutarlı olduğunu gösterelim. Bunun için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. (6.49)

'da verilen ifadenin kullanılmasıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \frac{1 + \ln^2(n/e)}{n} = 0 \quad (6.50)$$

olduğu açıktır. Böylece $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}^2$ ML tahmin edicileri tutarlıdır.

6.3 Lognormal Dağılım

Bir α – seri süreçten gelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ gözlemlerini gözönüne alalım. X_1 rasgele değişkeninin dağılımı δ ve τ parametrelili lognormal olsun. Bu durumda X_1 'in olasılık

yoğunluk fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau x}} e^{-\frac{(\ln x - \delta)^2}{2\tau^2}}$, $x > 0; \delta \in \Re, \tau > 0$ dir. Burada

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler.

$X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_i(x) = i^\alpha f(i^\alpha x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir. Bu durumda $L(a, \delta, \tau)$ olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\alpha, \delta, \tau^2) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \left[(2\pi)^{n/2} \tau^n \prod_{i=1}^n x_i \right]^{-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (\ln(i^\alpha x_i) - \delta)^2}{2\tau^2}}$$

olarak bulunur.

$$\ln L(\alpha, \delta, \tau^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \tau - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n (\ln i^\alpha x_i - \delta)^2}{2\tau^2}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak α , δ ve τ değerlerinin hesaplanması için α , δ ve τ 'ya göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \tau^2)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \ln i^\alpha x_i (\ln i - n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln i) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \tau^2)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n (\ln i^\alpha x_i - \delta) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \tau^2)}{\partial \tau^2} = \sum_{i=1}^n (\ln i^\alpha x_i - \delta)^2 - n\tau^2 = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerin çözümünden,

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln i \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln i}{n \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2} \quad (6.51)$$

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln i \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln i - \sum_{i=1}^n (\ln i)^2 \sum_{i=1}^n \ln x_i}{\left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n (\ln i)^2} \quad (6.52)$$

ve

$$\hat{\tau}^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2 \right) - \hat{\alpha}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\ln i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2 \right)}{n} \quad (6.53)$$

elde edilir. Ayrıca, $\hat{\delta}$ ve $\hat{\tau}^2$ ML tahmin edicilerine bağlı olarak F dağılımının ortalaması μ ve varyansı σ^2 'nin ML tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\mu} = e^{\hat{\delta} + \hat{\tau}^2/2} \quad (6.54)$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}^2 (e^{\hat{\tau}^2} - 1) \quad (6.55)$$

olur.

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ve $\hat{\sigma}_e^2$ 'nin sırasıyla (5.5), (5.6) ve (5.7)'de verilen LSE tahmin edicileri ile lognormal dağılım durumunda sürecin α parametresi ve lognormal dağılımın δ ve τ^2 parametrelerinin ML tahmin edicileri arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 6.3.1

i) $\hat{\alpha}_{ML} = \hat{\alpha}$

ii) $\hat{\delta} = \hat{\beta}$

iii) $\hat{\tau}^2 = \frac{(n-2)\hat{\sigma}_e^2}{n}$.

6.3.1 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$ ve $\hat{\tau}^2$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları

Kısım 6.3'den $\ln L(\alpha, \delta, \tau^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \tau - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n (\ln i^\alpha x_i - \delta)^2}{2\tau^2}$ olduğunu

biliyoruz. Bu fonksiyonun α, δ ve τ^2 parametrelerine göre 2. mertebeden kısmi türevlerinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \alpha^2} &= -\frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 i}{\tau^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \delta^2} &= -\frac{n}{\tau^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial (\tau^2)^2} &= \frac{n}{2\tau^4} - \frac{\sum_{i=1}^n (\ln i^\alpha X_i - \delta)^2}{\tau^6} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \alpha \partial \delta} &= \frac{\sum_{i=1}^n \ln i}{\tau^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \alpha \partial \tau^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln i^\alpha X_i - \delta) \ln i}{\tau^4}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \delta \partial \tau^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n (\ln i^\alpha X_i - \delta)}{\tau^4}$$

bulunur. Bu durumda

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 i}{\tau^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \delta^2}\right) = \frac{n}{\tau^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial (\tau^2)^2}\right) = \frac{n}{2\tau^4}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \alpha \partial \delta}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^n \ln i}{\tau^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \alpha \partial \tau^2}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^n \ln i E(i^\alpha X_i - \delta)}{\tau^4} = 0$$

ve

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \tau)}{\partial \delta \partial \tau^2}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^n E(i^\alpha X_i - \delta)}{\tau^4} = 0$$

olur. Böylece $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}$ ve $\hat{\tau}^2$ ML tahmin edicileri için Fisher bilgi matrisi

$$I(\alpha, \delta, \tau^2) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln^2 i / \tau^2 & -\sum_{i=1}^n \ln i / \tau^2 & 0 \\ -\sum_{i=1}^n \ln i / \tau^2 & n / \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & n / 2\tau^4 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. V kovaryans matrisi I matrisinin tersini göstermek üzere

$$V = \begin{bmatrix} \frac{n\tau^2}{n\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} & \frac{\tau^2 \sum_{i=1}^n \ln i}{n\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} & 0 \\ \frac{\tau^2 \sum_{i=1}^n \ln i}{n\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} & \frac{\tau^2 \sum_{i=1}^n \ln^2 i}{n\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tau^4}{n} \end{bmatrix}$$

ve sonuçta

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\delta} \\ \hat{\tau}^2 \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \\ \tau^2 \end{pmatrix}, V \right) \quad (6.56)$$

bulunur. Ayrıca buradan tahmin edicilerin marjinal asimptotik dağılımlarının

$$\hat{\alpha} \sim AN \left(\alpha, \frac{n\tau^2}{n\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} \right), \hat{\delta} \sim AN \left(\delta, \frac{\tau^2 \sum_{i=1}^n \ln^2 i}{n\sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i\right)^2} \right)$$

ve

$$\hat{\tau}^2 \sim AN \left(\tau^2, \frac{2\tau^4}{n} \right)$$

olduğu açıktır.

Şimdi (6.56)'da verilen sonucu kullanarak, $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahmin edicilerinin ortak asimptotik dağılımını ifade eden aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 6. 3. 2

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\mu^2 \tau^2 (u_n + \tau^2 / 2)}{n} & \frac{\mu \tau^2 (2\sigma^2 u_n + \tau^2 (2\sigma^2 + \mu^2))}{n} \\ \frac{\mu \tau^2 (2\sigma^2 u_n + \tau^2 (2\sigma^2 + \mu^2))}{n} & \frac{4u_n \sigma^4 \tau^2 + 2\tau^4 (2\sigma^2 + \mu^2)^2}{n} \end{bmatrix} \right)$$

dır.

İspat (6.56) ifadesinden

$$\begin{pmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\tau}^2 \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \delta \\ \tau^2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

olduğu açıktır, burada

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\tau^2 \sum_{i=1}^n \ln^2 i}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 i - \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right)^2}, \\ \sigma_{12} &= 0, \\ \sigma_{22} &= \frac{2\tau^4}{n}. \end{aligned}$$

Teorem 2.1.8 ‘de $x = \delta, y = \tau^2, f(\delta, \tau^2) = e^{\delta + \tau^2/2}$ ve $g(\delta, \tau^2) = e^{2\delta + \tau^2} (e^{\tau^2} - 1)$ alınsın.

$$\frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \tau^2} = e^{3\delta + \frac{3\tau^2}{2}} (e^{\tau^2} - 1) + e^{3\delta + \frac{5\tau^2}{2}}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial \tau^2} \frac{\partial g}{\partial \delta} = e^{3\delta + \frac{3\tau^2}{2}} (e^{\tau^2} - 1)$$

olup $\frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \tau^2} \neq \frac{\partial f}{\partial \tau^2} \frac{\partial g}{\partial \delta}$ bulunur. Bu durumda

$$\psi_{11} = \left(\frac{\partial f}{\partial \delta} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial f}{\partial \tau^2} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial f}{\partial \tau^2} \right)^2 \sigma_{22} = \frac{\mu^2 \tau^2 (u_n + \tau^2 / 2)}{n}$$

$$\psi_{12} = \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \delta} \sigma_{11} + \left(\frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \tau^2} + \frac{\partial f}{\partial \tau^2} \frac{\partial g}{\partial \delta} \right) \sigma_{12} + \frac{\partial f}{\partial \tau^2} \frac{\partial g}{\partial \tau^2} \sigma_{22} = \frac{\mu \tau^2 (2\sigma^2 u_n + \tau^2 (2\sigma^2 + \mu^2))}{n}$$

$$\psi_{22} = \left(\frac{\partial g}{\partial \delta} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial g}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \tau^2} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial g}{\partial \tau^2} \right)^2 \sigma_{22} = \frac{4u_n \sigma^4 \tau^2 + 2\tau^4 (2\sigma^2 + \mu^2)^2}{n}$$

olduğunun göz önüne alınmasıyla Teorem 2.1.8' den ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak

$$\hat{\mu} \sim AN\left(\mu, \frac{\mu^2 \tau^2 (u_n + \tau^2 / 2)}{n}\right)$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 \sim AN\left(\sigma^2, \frac{4\sigma^4 \tau^2 u_n + 2\tau^4 (\mu^2 + 2\sigma^2)^2}{n}\right)$$

dir. Ayrıca (6.50) ifadesinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0$ olduğundan $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}^2$ ML tahmin edicilerinin tutarlı olduğu açıktır.

6.4 Weibull Dağılımı

$\{N(t), t \geq 0\}$, F dağılım fonksiyonu θ şekil ve β ölçek parametrelili Weibull olan bir α -seri süreç olsun. Bu kısımda $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bu süreçten gelen bir veri kümesi olmak üzere bu veriye dayalı olarak α, θ ve β parametrelerinin ML tahmin edicilerinin elde edilmesi üzerinde durulur. Bu tahmin ediciler analitik olarak bulunamadığından α, θ ve β 'nın MML yöntemi kullanılarak tahmin edicileri analitik olarak elde edilir.

6.4.1 En çok olabilirlik yöntemi

Bir α -seri süreçten gelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ gözlemlerini gözönüne alalım. X_1 rasgele değişkeninin dağılımı θ şekil ve β ölçek parametrelili Weibull olsun. Bu durumda X_1 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = \frac{\theta}{\beta^\theta} x^{\theta-1} e^{-(x/\beta)^\theta}$, $x > 0; \theta > 0, \beta > 0$ dir. Burada $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler.

$X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_i(x) = i^\alpha f(i^\alpha x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir. Bu durumda $L(\alpha, \theta, \beta)$ olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\alpha, \theta, \beta) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \frac{\theta^n}{\beta^{n\theta}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta-1} \left(\prod_{i=1}^n i \right)^{\alpha\theta} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (i^\alpha x_i)^\theta}{\beta^\theta}}$$

olarak bulunur.

$$\ln L(\alpha, \theta, \beta) = (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + \alpha \theta \sum_{i=1}^n \ln i + n \ln \theta - n\theta \ln \beta - \frac{\sum_{i=1}^n (i^\alpha x_i)^\theta}{\beta^\theta}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak α , θ ve β değerlerinin hesaplanması için α , θ ve β 'ya göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \alpha} = \beta^\theta \sum_{i=1}^n \ln i - \sum_{i=1}^n (i^\alpha x_i)^\theta \ln i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \ln x_i + \alpha \sum_{i=1}^n \ln i + \frac{n}{\theta} - n \ln \beta - \frac{\theta}{\beta^{\theta-1}} \sum_{i=1}^n (i^\alpha x_i)^{\theta-1} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n (i^\alpha x_i)^\theta - n\beta^\theta = 0$$

lineer olmayan denklem sistemine ulaşılır. Bu denklemlerin çözümü bize ML tahmin edicilerini verir. Ancak denklemler incelendiğinde tahmin edicilerin analitik olarak elde edilmeyeceği açıktır. Ayrıca bu denklem sisteminden α, θ ve β parametrelerinin Newton-Raphson gibi herhangi bir iteratif yöntemle yaklaşık çözümü oldukça zor olup çözüme yakınsama problemi ile karşılaşılmaktadır. Bundan dolayı bu problemin üstesinden gelebilmek için MML yöntemi ile parametrelerin tahminleri elde edilmeye çalışılacaktır.

6.4.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

Yukarıda bahsedilen zorlukların üstesinden gelebilmek için (5.1)'de verilen $Y_i = i^\alpha X_i$ ifadesinin her iki tarafının logaritmasının alınmasıyla

$$\ln Y_i = \alpha \ln i + \ln X_i, i = 1, 2, \dots, n$$

elde edilir. Burada $\ln Y_i$ 'ler aşağıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ile birbirinden bağımsız ve aynı uç değer dağılımlıdır.

$$f(w) = \frac{1}{\eta} \exp\left(\frac{w-\delta}{\eta}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{w-\delta}{\eta}\right)\right), \quad w \in R, \delta \in R, \eta > 0. \quad (6.57)$$

Burada $\delta = \ln \beta$ ve $\eta = 1/\theta$ sırasıyla uç değer dağılımının konum ve ölçek parametresidir.

İlk olarak uç değer dağılımının bilinmeyen parametreleri tahmin edilip daha sonra aşağıdaki dönüşümler kullanılarak Weibull dağılımının parametreleri tahmin edilecektir.

$$\theta = 1/\eta \text{ ve } \beta = \exp(\delta). \quad (6.58)$$

(6.9) ve (6.57) kullanılarak, $\ln X_i$ 'ler için olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \delta, \eta) = \frac{1}{\eta^n} \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln X_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}\right)\right) \quad (6.59)$$

olur.

$$\ln L(\alpha, \delta, \eta) = -n \ln \eta + \sum_{i=1}^n \frac{\ln X_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta} - \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln X_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}\right) \quad (6.60)$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak α , δ ve η değerlerinin hesaplanması için α , δ ve η 'ye göre kısmi türevler alınarak

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \ln i - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln x_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}\right) \ln i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta} = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln x_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}\right) - \frac{n}{\eta} = 0$$

ve

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln x_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}\right) \frac{\ln x_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta} - \frac{n}{\eta} = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerde $c_i = \ln i$ ve $z_i = \frac{\ln x_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}$ yazalım.

Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n c_i - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp(z_i) c_i = 0 \\
\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp(z_i) - \frac{n}{\eta} = 0 \\
\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp(z_i) z_i - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n z_i - \frac{n}{\eta} = 0
\end{aligned} \tag{6.61}$$

olur. Bu denklemler kullanılarak bilinmeyen parametrelerin kapalı formda tahminlerini elde etmek mümkün değildir. Bu yüzden ikinci bölümde bahsedilen ve sıra istatistiklerine dayanan MML yöntemi kullanılacaktır. (6.61)'de verilen olabilirlik denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n c_{[i]} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp(z_{(i)}) c_{[i]} = 0 \\
\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp(z_{(i)}) - \frac{n}{\eta} = 0 \\
\frac{\partial \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \exp(z_{(i)}) z_{(i)} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n z_{(i)} - \frac{n}{\eta} = 0
\end{aligned} \tag{6.62}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $\ln x_{[i]}$ ve $c_{[i]}$ değerleri sıralanmış $z_{(i)}$ değerine karşılık gelen gözlem çifti olmak üzere $z_{(i)} = \frac{\ln x_{[i]} + \alpha c_{[i]} - \delta}{\eta}$ dır. ML tahmin edicilerinin analitik olarak elde edilememesine sebep olan $\exp(z_{(i)})$ ifadesi Taylor açılımı yardımıyla $t_{(i)} = E(Z_{(i)})$ etrafında ilk iki terime göre açılır. Bu durumda

$$\exp(z_{(i)}) \cong a_i + b_i z_{(i)}$$

olur. Burada $b_i = \exp(t_{(i)})$ ve $a_i = \exp(t_{(i)})(1 - t_{(i)})$ dir. Standart uç değer dağılımı için $t_{(i)}$ 'lerin gerçek değerleri

$$t_{(i)} = -0.57722 - (n+1-i) \left(\frac{n}{n+1-i} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^j \frac{\ln(n+j+1-i)}{n+j+1-i}$$

ve $n \geq 10$ için yaklaşık değerleri

$$t_{(i)} \cong F^{-1}(i/n+1) = \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right), 1 \leq i \leq n$$

ile verilir (Tiku ve Akkaya 2004). Burada F standart uç değer dağılım fonksiyonudur. $\exp(z_{(i)}) \cong a_i + b_i z_{(i)}$ ifadesinin (6.62) 'de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n c_{[i]} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i z_{(i)}) c_{[i]} = 0 \\ \frac{\partial \ln L^*(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n a_i + b_i z_{(i)} - \frac{n}{\eta} = 0 \\ \frac{\partial \ln L^*(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i z_{(i)}) z_{(i)} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n z_{(i)} - \frac{n}{\eta} = 0\end{aligned}\quad (6.63)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden

$$\tilde{\alpha} = \hat{\eta} D - E, \quad \tilde{\delta} = \ln \bar{x}_{[.]} + \tilde{\alpha} \bar{c}_{[.]} + \frac{\Delta}{m} \hat{\eta} \quad \text{ve} \quad \hat{\eta} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4nC}}{2\sqrt{n(n-2)}} \quad (6.64)$$

MML tahmin edicileri elde edilir (Aydoğdu vd. 2010). Burada

$$\begin{aligned}D &= \frac{\sum_{i=1}^n (1 - a_i)(c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})}{\sum_{i=1}^n b_i (c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})^2}, \quad E = \frac{\sum_{i=1}^n b_i (\ln x_{[i]} - \ln \bar{x}_{[.]})(c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})}{\sum_{i=1}^n b_i (c_{[i]} - \bar{c}_{[.]})^2}, \quad \ln \bar{x}_{[.]} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \ln x_{[i]}}{m}, \\ \bar{c}_{[.]} &= \frac{\sum_{i=1}^n b_i c_{[i]}}{m}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n (a_i - 1), \quad m = \sum_{i=1}^n b_i, \quad B = \sum_{i=1}^n (a_i - 1) \left[(\ln x_{[i]} - \ln \bar{x}_{[.]}) - E(c_{[i]} - \bar{c}_{[.]}) \right] \\ \text{ve } C &= \sum_{i=1}^n b_i \left[(\ln x_{[i]} - \ln \bar{x}_{[.]}) - E(c_{[i]} - \bar{c}_{[.]}) \right]^2 \text{ dir. (6.58) deki dönüşümler kullanılarak } F\end{aligned}$$

dağılımının ortalama ve varyansının MML tahmin edicileri sırasıyla

$$\tilde{\mu} = \Gamma(1 + \hat{\eta}) \exp(\hat{\delta}) \quad (6.65)$$

ve

$$\tilde{\sigma}^2 = \left[\Gamma(1 + 2\hat{\eta}) - \Gamma^2(1 + \hat{\eta}) \right] \exp(2\hat{\delta}) \quad (6.66)$$

dır.

6.4.3 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$ ve $\hat{\eta}$ ML tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları

$$(6.60)'dan \ln L(\alpha, \delta, \eta) = -n \ln \eta + \sum_{i=1}^n \frac{\ln X_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta} - \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln X_i + \alpha \ln i - \delta}{\eta}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu fonksiyonun α, δ ve η parametrelerine göre 2. mertebeden kısmi türevlerin alınmasıyla

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i) c_i^2}{\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha \partial \delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i) c_i}{\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha \partial \eta} = -\frac{\sum_{i=1}^n c_i}{\eta^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i) c_i}{\eta^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i) z_i c_i}{\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i)}{\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta \partial \eta} = -\frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i)}{\eta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i) z_i}{\eta^2} + \frac{n}{\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \eta^2} = -\frac{2 \sum_{i=1}^n \exp(z_i) z_i}{\eta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \exp(z_i) z_i^2}{\eta^2} + \frac{2 \sum_{i=1}^n z_i}{\eta^2} + \frac{n}{\eta^2}$$

bulunur. Bu durumda Teorem 2.1.5 ve Sonuç 2.1 'in kullanılmasıyla beklenen değerler

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{\eta^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha \partial \delta}\right) = -\frac{\sum_{i=1}^n c_i}{\eta^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \alpha \partial \eta}\right) = -\frac{(1-\gamma) \sum_{i=1}^n c_i}{\eta^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta^2}\right) = \frac{n}{\eta^2}$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \delta \partial \eta}\right) = \frac{n(1-\gamma)}{\eta^2}$$

ve

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L(\alpha, \delta, \eta)}{\partial \eta^2}\right) = \frac{n(\pi^2/6 + (1-\gamma)^2)}{\eta^2}$$

olur. Böylece $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$ ve $\hat{\eta}$ ML tahmin edicileri için Fisher bilgi matrisi

$$I(\alpha, \delta, \eta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n c_i^2 / \eta^2 & -\sum_{i=1}^n c_i / \eta^2 & -(1-\gamma) \sum_{i=1}^n c_i / \eta^2 \\ -\sum_{i=1}^n c_i / \eta^2 & n / \eta^2 & n(1-\gamma) / \eta^2 \\ -(1-\gamma) \sum_{i=1}^n c_i / \eta^2 & n(1-\gamma) / \eta^2 & n(\pi^2/6 + (1-\gamma)^2) / \eta^2 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. V kovaryans matrisi I matrisinin tersini göstermek üzere

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\eta^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2 / n} & \frac{\eta^2 \sum_{i=1}^n c_i}{n \sum_{i=1}^n c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2} & 0 \\ \frac{\eta^2 \sum_{i=1}^n c_i}{n \sum_{i=1}^n c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2} & \frac{\eta^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{n \sum_{i=1}^n c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2} + \frac{6\eta^2(1-\gamma)^2}{n\pi^2} & -\frac{6\eta^2(1-\gamma)}{n\pi^2} \\ 0 & -\frac{6\eta^2(1-\gamma)}{n\pi^2} & \frac{6\eta^2}{n\pi^2} \end{bmatrix}$$

ve sonuçta

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\delta} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \\ \eta \end{pmatrix}, V \right) \quad (6.67)$$

bulunur. Ayrıca buradan tahmin edicilerin marjinal asimptotik dağılımlarının

$$\hat{\alpha} \sim AN \left(\alpha, \frac{\eta^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^2 / n} \right),$$

$$\hat{\delta} \sim AN \left(\delta, \frac{\eta^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{n \sum_{i=1}^n c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^2} + \frac{6\eta^2(1-\gamma)^2}{n\pi^2} \right)$$

ve

$$\hat{\eta} \sim AN \left(\eta, \frac{6\eta^2}{n\pi^2} \right)$$

olduğu açıktır.

Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak Weibull dağılımının θ ve β parametrelerinin ve bu dağılımın μ ortalaması ve σ^2 varyansının ML tahmin edicilerinin ortak asimptotik dağılımları aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 6. 4. 1

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \theta \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 6\theta^2/n\pi^2 & 6\beta(1-\gamma)/n\pi^2 \\ 6\beta(1-\gamma)/n\pi^2 & \beta^2(u_n + 6(1-\gamma)/\pi^2)/n\theta^2 \end{bmatrix} \right) \quad (6.68)$$

ve

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (6.69)$$

dır. Burada

$$\phi_{11} = \frac{\mu^2}{n\theta^2} \left(u_n + \frac{6 \left[\Gamma^2(1+\frac{1}{\theta})(1-\gamma)^2 - 2\Gamma(1+\frac{1}{\theta})\Psi(1+\frac{1}{\theta})(1-\gamma) + \Psi^2(1+\frac{1}{\theta}) \right]}{\pi^2 \Gamma^2(1+\frac{1}{\theta})} \right)$$

$$\phi_{12} = \frac{2\mu\sigma^2}{n\theta^2} \left(u_n + \frac{6 \left[\Psi(1+\frac{1}{\theta}) - \Gamma(1+\frac{1}{\theta})(1-\gamma) \right] \left[\Psi(1+\frac{2}{\theta}) - \Psi(1+\frac{1}{\theta})\Gamma(1+\frac{1}{\theta}) - (1-\gamma) \left(\Gamma(1+\frac{2}{\theta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\theta}) \right) \right]}{\pi^2 \left(\Gamma(1+\frac{1}{\theta})\Gamma(1+\frac{2}{\theta}) - \Gamma^3(1+\frac{1}{\theta}) \right)} \right)$$

$$\phi_{22} = \frac{4\sigma^4}{n\theta^2} \left(u_n + \frac{6(1-\gamma)^2 \left[\left(\Gamma(1+\frac{2}{\theta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\theta}) \right)^2 \right] + 6 \left[\Psi(1+\frac{2}{\theta}) - \Psi(1+\frac{1}{\theta})\Gamma(1+\frac{1}{\theta}) \right] \left[\Psi(1+\frac{2}{\theta}) - \Psi(1+\frac{1}{\theta})\Gamma(1+\frac{1}{\theta}) - (1-\gamma) \left(\Gamma(1+\frac{2}{\theta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\theta}) \right) \right]}{\pi^2 \left(\Gamma(1+\frac{2}{\theta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\theta}) \right)^2} \right)$$

$$\Psi(x) = \frac{d\Gamma(x)}{dx} \text{ ve } \gamma \approx 0.57722 \text{ dır.}$$

İspat (6.67) ifadesinden

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \eta \\ \delta \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

olduğu açıktır, burada

$$\sigma_{11} = \frac{6\eta^2}{n\pi^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{6\eta^2(1-\gamma)}{n\pi^2},$$

$$\sigma_{22} = \frac{\eta^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{n \sum_{i=1}^n c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^2} + \frac{6\eta^2(1-\gamma)^2}{n\pi^2}$$

dır. (6.58)'den $\theta = 1/\eta$ ve $\beta = e^\delta$ olduğunu biliyoruz. Teorem 2.1.8'de

$x = \eta, y = \delta, f(\eta, \delta) = 1/\eta$ ve $g(\eta, \delta) = e^\delta$ alınsın.

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \delta} = -\frac{e^\delta}{\eta^2}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0$$

olup $\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \delta} \neq \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \eta}$ bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \delta} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial f}{\partial \delta} \right)^2 \sigma_{22} = \frac{6\theta^2}{n\pi^2} \\ \psi_{12} &= \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \eta} \sigma_{11} + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \delta} + \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \sigma_{12} + \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial g}{\partial \delta} \sigma_{22} = \frac{6\beta(1-\gamma)}{n\pi^2} \\ \psi_{22} &= \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)^2 \sigma_{11} + 2 \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \delta} \sigma_{12} + \left(\frac{\partial g}{\partial \delta} \right)^2 \sigma_{22} = \frac{\beta^2}{n\theta^2} \left(u_n + \frac{6(1-\gamma)}{\pi^2} \right)\end{aligned}$$

olduğunun göz önüne alınmasıyla Teorem 2.1.8'den (6.68) ifadesi elde edilir. Şimdi (6.69) ifadesini elde edelim. $\mu = \Gamma(1 + \frac{1}{\theta})\beta$ ve $\sigma^2 = \left[\Gamma(1 + \frac{2}{\theta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\theta}) \right] \beta^2$ olduğunu ve (6.68) asimptotik ifadesini gözönüne alalım. Teorem 2.1.8'de $x = \theta, y = \beta, f(\theta, \beta) = \Gamma(1 + \frac{1}{\theta})\beta$ ve $g(\theta, \beta) = \left[\Gamma(1 + \frac{2}{\theta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\theta}) \right] \beta^2$ alınsın.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \beta} = -\frac{2\beta^2}{\theta^2} \Psi(1 + \frac{1}{\theta}) \left(\Gamma(1 + \frac{2}{\theta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\theta}) \right)$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{2\beta^2}{\theta^2} \left(\Gamma^2(1 + \frac{1}{\theta}) \Psi(1 + \frac{1}{\theta}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\theta}) \Psi(1 + \frac{2}{\theta}) \right)$$

olup $\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \beta} \neq \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \theta}$ bulunur. Bu durumda Teorem 2.1.8 'in uygulanmasıyla (6.69)' daki ifade elde edilir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak

$$\hat{\mu} \sim AN(\mu, \phi_{11})$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 \sim AN(\sigma^2, \phi_{22})$$

dır. Ayrıca (6.50) ifadesinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0$ ile $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{11} = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{22} = 0$ olduğundan $\hat{\mu}$

ve $\hat{\sigma}^2$ ML tahmin edicileri tutarlıdır.

7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde α -seri sürecin üç önemli parametresi olan α, μ ve σ^2 için önerilen $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_{MML}, \hat{\mu}_i, i=1,2,...,6, \hat{\mu}_{ML}, \hat{\mu}_{MML}$ ve $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$ tahmin edicilerinin performansları bir simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Tahmin edicilerin performansları yan ve MSE ölçütlerine göre değerlendirilmiştir.

Yapılan simülasyon çalışmasında aşağıdaki üç dağılım kullanılmıştır.

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau x}} e^{-\frac{(\ln x - \delta)^2}{2\tau^2}}, \quad x > 0; \delta \in \Re, \tau > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile lognormal dağılım, burada (δ, τ) sırasıyla (0,0.5), (0.4,0.4), (0.7, 0.3) ve (1, 0.2) olarak alınmıştır.

$$(ii) \quad f(x) = \frac{\theta}{\beta^\theta} x^{\theta-1} e^{-(x/\beta)^\theta}, \quad x > 0; \theta, \beta > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile Weibull dağılımı, burada (θ, β) sırasıyla (1.5,1), (2,1), (1.2, 0.5) ve (3, 1) olarak alınmıştır.

$$(iii) \quad f(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\beta^\theta} x^{\theta-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0; \theta, \beta > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile gama dağılımı, burada (θ, β) sırasıyla (1.5,1), (2,1), (3, 0.5) ve (4, 0.5) olarak alınmıştır.

Çalışmada $\alpha = -2(0.2)2$ değerleri seçilmiştir. Ayrıca tahmin edicilerin küçük ve büyük örneklem özelliklerini incelemek için n örneklem hacmi 20(10)150 alınmıştır. Sonuçlar kısaltılarak aşağıdaki tablolarda verilmiştir. Tüm tablolar 1000 simülasyon üzerine kurulmuştur.

Çizelge 7.1 Lognormal dağılım ($\alpha = -0.5$, $\delta = 0$, $\tau = 0.5$; $\mu = 1.1331$, $\sigma^2 = 0.3647$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}$			$\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{ML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	ML	-0.4955	0.0045	0.0192	1.1869	0.0538	0.1491	0.4089	0.0442	0.1065
	NP1	-0.4955	0.0045	0.0192	1.1726	0.0395	0.1431	0.3196	-0.0451	0.0648
	NP2				1.2029	0.0698	0.1587	0.4198	0.0551	0.1750
	NP3				1.1924	0.0593	0.1511			
	NP4				1.1891	0.0560	0.1506			
	NP5				1.1868	0.0537	0.1497			
	NP6				1.1896	0.0565	0.1521			
30	ML	-0.4966	0.0034	0.0113	1.1712	0.0381	0.1186	0.3990	0.0343	0.0953
	NP1	-0.4966	0.0034	0.0113	1.1619	0.0288	0.1129	0.3137	-0.0510	0.0518
	NP2				1.1940	0.0609	0.1240	0.4117	0.0470	0.1174
	NP3				1.1818	0.0487	0.1193			
	NP4				1.1813	0.0482	0.1191			
	NP5				1.1802	0.0469	0.1198			
	NP6				1.1812	0.0481	0.1191			
50	ML	-0.4944	0.0066	0.0061	1.1647	0.0316	0.0849	0.4001	0.0354	0.0479
	NP1	-0.4944	0.0066	0.0061	1.1590	0.0259	0.0819	0.3011	-0.0636	0.0311
	NP2				1.1965	0.0634	0.0922	0.4119	0.0472	0.0733
	NP3				1.1780	0.0449	0.0861			
	NP4				1.1819	0.0488	0.0875			
	NP5				1.1809	0.0478	0.0870			
	NP6				1.1823	0.0492	0.0881			
100	ML	-0.5006	-	0.0029	1.1367	0.0036	0.0559	0.3842	0.0195	0.0318
	NP1	-0.5006	0.0006	0.0029	1.1248	-	0.0543	0.2897	-0.0750	0.0227
	NP2		-		1.1632	0.0083	0.0591	0.3854	0.0207	0.0387
	NP3		0.0006		1.1431	0.0301	0.0562			
	NP4				1.1493	0.0100	0.0571			
	NP5				1.1485	0.0162	0.0568			
	NP6				1.1498	0.0154	0.0576			
150	ML	-0.4998	0.0002	0.0020	1.1275	-	0.0457	0.3819	0.0172	0.0221
	NP1	-0.4998	0.0002	0.0020	1.1674	0.0056	0.0508	0.2782	-0.0865	0.0217
	NP2				1.1456	0.0343	0.0475	0.3876	0.0229	0.0306
	NP3				1.1523	0.0125	0.0483			
	NP4				1.1520	0.0192	0.0484			
	NP5				1.1521	0.0189	0.0483			
	NP6				1.1410	0.0190	0.0473			

Çizelge 7.2 Lognormal dağılım ($\alpha = 0.5, \delta = 0.4, \tau = 0.4; \mu = 1.6161, \sigma^2 = 0.4532$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}$			$\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{ML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	ML	0.4967	-	0.0124	1.6241	0.0080	0.1746	0.4555	0.0023	0.1038
	NP1	0.4967	0.0033	0.0124	1.6287	0.0126	0.1729	0.4056	-0.0476	0.0716
	NP2		-		1.6437	0.0276	0.1777	0.4602	0.0070	0.1157
	NP3		0.0033		1.6418	0.0257	0.1768			
	NP4				1.6279	0.0118	0.1725			
	NP5				1.6333	0.0172	0.1744			
	NP6				1.6174	0.0013	0.1759			
30	ML	0.5035	0.0035	0.0072	1.6418	0.0257	0.1432	0.4673	0.0141	0.0714
	NP1	0.5035	0.0035	0.0072	1.6414	0.0253	0.1414	0.4048	-0.0484	0.0494
	NP2				1.6607	0.0446	0.1470	0.4753	0.0221	0.0877
	NP3				1.6540	0.0379	0.1446			
	NP4				1.6476	0.0315	0.1426			
	NP5				1.6503	0.0442	0.1446			
	NP6				1.6447	0.0286	0.1529			
50	ML	0.4978	-	0.0041	1.6189	0.0028	0.1064	0.4576	0.0044	0.0492
	NP1	0.4978	0.0022	0.0041	1.6157	-	0.1058	0.3869	-0.0663	0.0369
	NP2		-		1.6363	0.0040	0.1091	0.4589	0.0057	0.0539
	NP3		0.0022		1.6279	0.0202	0.1077			
	NP4				1.6223	0.0118	0.1057			
	NP5				1.6273	0.0062	0.1074			
	NP6				1.6091	0.0112	0.1068			
100	ML	0.4985	-	0.0019	1.6165	0.0004	0.0710	0.4617	0.0085	0.0299
	NP1	0.4985	0.0015	0.0019	1.6120	-	0.0699	0.3931	-0.0601	0.0233
	NP2		-		1.6366	0.0041	0.0728	0.4661	0.0129	0.0356
	NP3		0.0015		1.6240	0.0205	0.0711			
	NP4				1.6259	0.0079	0.0729			
	NP5				1.6265	0.0098	0.0713			
	NP6				1.6254	0.0104	0.0810			
150	ML	0.5010	0.0010	0.0012	1.6265	0.0104	0.0560	0.4702	0.0170	0.0205
	NP1	0.5010	0.0010	0.0012	1.6210	0.0049	0.0547	0.3845	-0.0687	0.0211
	NP2				1.6455	0.0294	0.0577	0.4699	0.0167	0.0282
	NP3				1.6331	0.0170	0.0560			
	NP4				1.6348	0.0187	0.0573			
	NP5				1.6362	0.0201	0.0564			
	NP6				1.6286	0.0125	0.0676			

Çizelge 7.3 Lognormal dağılım ($\alpha = 0.8$, $\delta = 0.7$, $\tau = 0.3$; $\mu = 2.1064$, $\sigma^2 = 0.4179$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}$			$\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{ML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	ML	0.8026	0.0026	0.0076	2.1489	0.0425	0.1773	0.4160	-0.0019	0.0616
	NP1	0.8026	0.0026	0.0076	2.1500	0.0436	0.1775	0.4021	-0.0158	0.0519
	NP2				2.1552	0.0488	0.1791	0.4284	0.0105	0.0681
	NP3				2.1562	0.0498	0.1795			
	NP4				2.1399	0.0335	0.1765			
	NP5				2.1485	0.0421	0.1771			
	NP6				2.1246	0.0182	0.2088			
30	ML	0.7961	-	0.0046	2.1103	0.0039	0.1348	0.4096	-0.0083	0.0345
	NP1	0.7961	0.0039	0.0046	2.1086	0.0022	0.1359	0.3902	-0.0277	0.0286
	NP2		-		2.1184	0.0100	0.1376	0.4187	0.0008	0.0423
	NP3		0.0039		2.1144	0.0080	0.1368			
	NP4				2.1057	-	0.1384			
	NP5				2.1103	0.0007	0.1363			
	NP6				2.1005	0.0039	0.1822			
50	ML	0.7990	-	0.0023	2.1150	0.0086	0.1044	0.4154	-0.0025	0.0272
	NP1	0.7990	0.0010	0.0023	2.1110	0.0046	0.1038	0.3879	-0.0300	0.0222
	NP2		-		2.1204	0.0140	0.1053	0.4229	0.0050	0.0316
	NP3		0.0010		2.1167	0.0103	0.1045			
	NP4				2.1130	0.0066	0.1067			
	NP5				2.1150	0.0086	0.1044			
	NP6				2.1109	0.0045	0.1571			
100	ML	0.7964	-	0.0011	2.0901	-	0.0712	0.4151	-0.0028	0.0157
	NP1	0.7964	0.0036	0.0011	2.0809	0.0163	0.0708	0.3796	-0.0383	0.0144
	NP2		-		2.0994	-	0.0714	0.4168	-0.0011	0.0178
	NP3		0.0036		2.0949	0.0171	0.0711			
	NP4				2.0955	-	0.0747			
	NP5				2.0950	0.0070	0.0711			
	NP6				2.1001	-	0.1405			
150	ML	0.7991	-	0.0007	2.1051	-	0.0543	0.4116	-0.0063	0.0112
	NP1	0.7991	0.0009	0.0007	2.1041	0.0013	0.0539	0.3830	-0.0349	0.0108
	NP2		-		2.1148	-	0.0546	0.4247	0.0068	0.0129
	NP3		0.0009		2.1097	0.0023	0.0542			
	NP4				2.1102	0.0084	0.0574			
	NP5				2.1105	0.0033	0.0543			
	NP6				2.1115	0.0038	0.1285			
						0.0041				
						0.0051				

Çizelge 7.4 Lognormal dağılım ($\alpha=1.5, \delta=1, \tau=0.2; \mu=2.7732, \sigma^2=0.3139$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}$			$\hat{\mu}_i (i=1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{ML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	ML	1.5028	0.0028	0.0033	2.8016	0.0284	0.1345	0.2948	-0.0191	0.0177
	NP1	1.5028	0.0028	0.0033	2.8049	0.0317	0.1350	0.3083	-0.0056	0.0175
	NP2				2.8046	0.0314	0.1351	0.3068	-0.0071	0.0202
	NP3				2.8066	0.0334	0.1353			
	NP4				2.7877	0.0145	0.1550			
	NP5				2.8015	0.0283	0.1345			
	NP6				2.7740	0.0008	0.2435			
30	ML	1.5005	0.0005	0.0020	2.7918	0.0186	0.1071	0.3058	-0.0081	0.0134
	NP1	1.5005	0.0005	0.0020	2.7993	0.0261	0.1078	0.3037	-0.0102	0.0127
	NP2				2.8002	0.0270	0.1081	0.3085	-0.0054	0.0155
	NP3				2.8009	0.0277	0.1080			
	NP4				2.7858	0.0126	0.1344			
	NP5				2.7977	0.0245	0.1076			
	NP6				2.7705	-	0.2339			
50	ML	1.5004	0.0004	0.0011	2.7857	0.0125	0.0791	0.3051	-0.0088	0.0087
	NP1	1.5004	0.0004	0.0011	2.7857	0.0125	0.0800	0.3012	-0.0127	0.0080
	NP2				2.7876	0.0144	0.0802	0.3103	-0.0036	0.0094
	NP3				2.7873	0.0141	0.0801			
	NP4				2.7922	0.0190	0.1192			
	NP5				2.7856	0.0124	0.0801			
	NP6				2.8007	0.0275	0.2190			
100	ML	1.4992	-	0.0005	2.7721	-	0.0504	0.3119	-0.0020	0.0046
	NP1	1.4992	0.0008	0.0005	2.7747	0.0011	0.0507	0.3023	-0.0116	0.0049
	NP2		-		2.7771	0.0015	0.0508	0.3136	-0.0003	0.0056
	NP3		0.0008		2.7763	0.0039	0.0508			
	NP4				2.7761	0.0031	0.0901			
	NP5				2.7757	0.0029	0.0508			
	NP6				2.7725	0.0025	0.2001			
150	ML	1.4999	-	0.0003	2.7782	0.0050	0.0418	0.3128	-0.0011	0.0028
	NP1	1.4999	0.0000	0.0003	2.7786	0.0054	0.0421	0.3016	-0.0123	0.0034
	NP2		-		2.7814	0.0082	0.0424	0.3149	0.0010	0.0040
	NP3		0.0000		2.7801	0.0069	0.0422			
	NP4				2.7809	0.0077	0.0848			
	NP5				2.7800	0.0068	0.0422			
	NP6				2.7796	0.0064	0.1945			

Çizelge 7.5 Weibull dağılım ($\alpha = -0.5, \theta = 1.5, \beta = 1; \mu = 0.9027, \sigma^2 = 0.3757$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{MML}$			$\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{MML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	MML	-0.5151	-	0.0429	0.9196	0.0169	0.1684	0.4726	0.0969	0.2695
	NP1	-0.4915	0.0151	0.0600	0.9891	0.0864	0.2749	0.5703	0.1946	0.5735
	NP2		0.0085		1.0042	0.1015	0.2840	0.6279	0.2522	0.6933
	NP3				1.0780	0.1753	0.3623			
	NP4				1.0310	0.1283	0.3137			
	NP5				1.0280	0.1253	0.3044			
	NP6				1.0340	0.1313	0.3210			
30	MML	-0.5127	-	0.0226	0.8972	-	0.1209	0.4265	0.0508	0.1459
	NP1	-0.5062	0.0127	0.0328	0.9327	0.0055	0.1878	0.4839	0.1082	0.3127
	NP2		-		0.9468	0.0300	0.1934	0.5316	0.1559	0.3965
	NP3		0.0062		1.0142	0.0441	0.2396			
	NP4				0.9759	0.1115	0.2169			
	NP5				0.9736	0.0732	0.2090			
	NP6				0.9778	0.0709	0.2223			
50	MML	-0.5112	-	0.0140	0.8982	-	0.1000	0.4115	0.0358	0.0996
	NP1	-0.5068	0.0112	0.0212	0.9163	0.0045	0.1584	0.4566	0.0809	0.2058
	NP2		-		0.9331	0.0136	0.1650	0.5130	0.1373	0.2754
	NP3		0.0068		0.9953	0.0304	0.1978			
	NP4				0.9641	0.0926	0.1855			
	NP5				0.9611	0.0614	0.1777			
	NP6				0.9662	0.0584	0.1908			
100	MML	-0.5033	-	0.0053	0.9104	0.0077	0.0602	0.3903	0.0146	0.0509
	NP1	-0.4954	0.0033	0.0082	0.9176	0.0149	0.0931	0.4166	0.0409	0.0974
	NP2		0.0046		0.9343	0.0316	0.0972	0.4678	0.0921	0.1299
	NP3				0.9949	0.0922	0.1187			
	NP4				0.9667	0.0640	0.1112			
	NP5				0.9645	0.0618	0.1061			
	NP6				0.9678	0.0651	0.1143			
150	MML	-0.5046	-	0.0033	0.9049	0.0022	0.0486	0.3896	0.0139	0.0403
	NP1	-0.5035	0.0046	0.0050	0.8824	0.0203	0.0688	0.3869	0.0112	0.0632
	NP2		-		0.8981	0.0046	0.0705	0.4214	0.0457	0.0770
	NP3		0.0035		0.9566	0.0539	0.0835			
	NP4				0.9288	0.0261	0.0791			
	NP5				0.9280	0.0253	0.0759			
	NP6				0.9292	0.0265	0.0809			

Çizelge 7.6 Weibull dağılım ($\alpha = 0.5, \theta = 2, \beta = 1; \mu = 0.8862, \sigma^2 = 0.2146$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{MML}$			$\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{MML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	MML	0.4878	-	0.0247	0.8798	-	0.0917	0.2298	0.0152	0.0332
	NP1	0.4978	0.0122	0.0342	0.9365	0.0064	0.1419	0.2942	0.0796	0.0899
	NP2		-		0.9310	0.0503	0.1407	0.2796	0.0650	0.0856
	NP3		0.0022		0.9709	0.0448	0.1577			
	NP4				0.9285	0.0847	0.1254			
	NP5				0.9436	0.0423	0.1449			
	NP6				0.9077	0.0574	0.1087			
30	MML	0.4867	-	0.0131	0.8701	-	0.0640	0.2214	0.0068	0.0198
	NP1	0.4987	0.0133	0.0188	0.9206	0.0161	0.0984	0.2808	0.0622	0.0586
	NP2		-		0.9154	0.0334	0.0973	0.2669	0.0553	0.0523
	NP3		0.0013		0.9546	0.0292	0.1110			
	NP4				0.9190	0.0684	0.0893			
	NP5				0.9309	0.0328	0.1016			
	NP6				0.9033	0.0447	0.0811			
50	MML	0.4902	-	0.0067	0.8761	-	0.0466	0.2204	0.0058	0.0142
	NP1	0.4959	0.0098	0.0109	0.9001	0.0101	0.0720	0.2643	0.0497	0.0364
	NP2		-		0.8933	0.0139	0.0710	0.2472	0.0326	0.0298
	NP3		0.0041		0.9331	0.0071	0.0799			
	NP4				0.9048	0.0469	0.0664			
	NP5				0.9117	0.0186	0.0743			
	NP6				0.8947	0.0255	0.0614			
100	MML	0.4948	-	0.0031	0.8785	-	0.0342	0.2197	0.0051	0.0094
	NP1	0.4963	0.0052	0.0046	0.8874	0.0077	0.0509	0.2433	0.0287	0.0206
	NP2		-		0.8812	0.0012	0.0504	0.2371	0.0225	0.0178
	NP3		0.0037		0.9197	-	0.0557			
	NP4				0.8958	0.0005	0.0475			
	NP5				0.9007	0.0335	0.0529			
	NP6				0.8863	0.0096	0.0451			
150	MML	0.4992	-	0.0019	0.8927	0.0065	0.0251	0.2247	0.0101	0.0071
	NP1	0.5018	0.0008	0.0032	0.9012	0.0150	0.0437	0.2602	0.0456	0.0193
	NP2		0.0018		0.8938	0.0076	0.0428	0.2419	0.0273	0.0152
	NP3				0.9342	0.0480	0.0492			
	NP4				0.9100	0.0238	0.0410			
	NP5				0.9148	0.0286	0.0455			
	NP6				0.8985	0.0123	0.0390			

Çizelge 7.7 Weibull dağılım ($\alpha = 0.8, \theta = 1.2, \beta = 0.5; \mu = 0.4703, \sigma^2 = 0.1549$)
durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{MML}$			$\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{MML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmi n	Yan	MSE
20	MML	0.7851	-	0.0708	0.4967	0.0264	0.0817	0.2354	0.0805	0.1329
	NP1	0.8048	0.0149	0.0888	0.5148	0.0455	0.1157	0.2323	0.0774	0.1678
	NP2		0.0048		0.5517	0.0814	0.1505	0.3447	0.1898	0.9847
	NP3				0.5975	0.1272	0.1798			
	NP4				0.5223	0.0520	0.0902			
	NP5				0.5678	0.0975	0.1588			
	NP6				0.4902	0.0199	0.0877			
30	MML	0.7869	-	0.0298	0.4795	0.0092	0.0529	0.1963	0.0414	0.0497
	NP1	0.7982	0.0131	0.0433	0.4840	0.0137	0.0764	0.1908	0.0359	0.0766
	NP2		-		0.5178	0.0475	0.0876	0.2473	0.0924	0.1568
	NP3		0.0018		0.5597	0.0894	0.1165			
	NP4				0.5049	0.0346	0.0654			
	NP5				0.5355	0.0652	0.0976			
	NP6				0.4858	0.0155	0.0759			
50	MML	0.7902	-	0.0183	0.4853	0.0150	0.0423	0.1876	0.0327	0.0353
	NP1	0.7963	0.0098	0.0289	0.4796	0.0093	0.0647	0.1776	0.0227	0.0598
	NP2		-		0.5133	0.0400	0.0740	0.2292	0.0743	0.1078
	NP3		0.0037		0.5521	0.0818	0.0944			
	NP4				0.5065	0.0362	0.0577			
	NP5				0.5314	0.0611	0.0822			
	NP6				0.4850	0.0147	0.0667			
100	MML	0.7966	-	0.0084	0.4815	0.0112	0.0271	0.1768	0.0219	0.0177
	NP1	0.8016	0.0034	0.0132	0.4601	-	0.0383	0.1514	-0.0035	0.0222
	NP2		0.0016		0.4932	0.0102	0.0443	0.1921	0.0372	0.0431
	NP3				0.5299	0.0229	0.0546			
	NP4				0.4942	0.0596	0.0320			
	NP5				0.5118	0.0239	0.0489			
	NP6				0.4741	0.0415	0.0486			
150	MML	0.7992	-	0.0057	0.4701	-	0.0221	0.1697	0.0148	0.0135
	NP1	0.7985	0.0008	0.0088	0.4447	0.0002	0.0295	0.1384	-0.0165	0.0125
	NP2		-		0.4773	-	0.0335	0.1884	0.0335	0.0282
	NP3		0.0015		0.5133	0.0256	0.0401			
	NP4				0.4834	0.0070	0.0216			
	NP5				0.4960	0.0430	0.0365			
	NP6				0.4707	0.0131	0.0328			
						0.0257				
						0.0004				

Çizelge 7.8 Weibull dağılım ($\alpha=1.5, \theta=3, \beta=1; \mu=0.8930, \sigma^2=0.1053$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{MML}$			$\hat{\mu}_i (i=1,2,...,6), \hat{\mu}_{MML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	MML	1.4888	-	0.0108	0.8735	-	0.0404	0.1043	-0.0010	0.0032
	NP1	1.5054	0.0112	0.0144	0.9295	0.0195	0.0594	0.1442	0.0389	0.0144
	NP2		0.0054		0.9197	0.0365	0.0569	0.1203	0.0150	0.0070
	NP3				0.9395	0.0267	0.0622			
	NP4				0.9100	0.0465	0.0516			
	NP5				0.9259	0.0170	0.0585			
	NP6				0.9051	0.0329	0.0761			
30	MML	1.4928	-	0.0057	0.8933	0.0003	0.0289	0.1031	-0.0022	0.0022
	NP1	1.5022	0.0072	0.0095	0.9111	0.0181	0.0497	0.1376	0.0323	0.0092
	NP2		0.0022		0.9019	0.0089	0.0483	0.1202	0.0149	0.0053
	NP3				0.9205	0.0275	0.0514			
	NP4				0.8942	0.0012	0.0461			
	NP5				0.9092	0.0162	0.0494			
	NP6				0.8910	-	0.0785			
50	MML	1.4949	-	0.0028	0.8877	-	0.0205	0.1051	-0.0002	0.0015
	NP1	1.5012	0.0051	0.0044	0.9168	0.0053	0.0345	0.1346	0.0293	0.0061
	NP2		0.0012		0.9077	0.0238	0.0331	0.1142	0.0089	0.0032
	NP3				0.9256	0.0147	0.0358			
	NP4				0.9024	0.0326	0.0341			
	NP5				0.9161	0.0094	0.0342			
	NP6				0.8994	0.0231	0.0713			
100	MML	1.4968	-	0.0014	0.8859	-	0.0147	0.1052	-0.0001	0.0009
	NP1	1.4974	0.0032	0.0021	0.9014	0.0071	0.0228	0.1246	0.0193	0.0028
	NP2		-		0.8924	0.0084	0.0223	0.1103	0.0050	0.0015
	NP3		0.0026		0.9099	-	0.0234			
	NP4				0.8939	0.0006	0.0299			
	NP5				0.9016	0.0169	0.0228			
	NP6				0.8921	0.0009	0.0688			
150	MML	1.4983	-	0.0008	0.8878	-	0.0113	0.1051	-0.0002	0.0007
	NP1	1.4993	0.0017	0.0013	0.8999	0.0052	0.0174	0.1290	0.0237	0.0024
	NP2		-		0.8904	-	0.0170	0.1091	0.0038	0.0012
	NP3		0.0007		0.9084	0.0069	0.0179			
	NP4				0.8919	-	0.0279			
	NP5				0.9002	0.0026	0.0176			
	NP6				0.8903	0.0154	0.0632			
						-				
						0.0011				
						0.0072				
						-				
						0.0027				

Çizelge 7.9 Gama dağılım ($\alpha = -0.5, \theta = 1.5, \beta = 1; \mu = 1.5, \sigma^2 = 1.5$) durumunda α -
seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen
tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_{MML}$			$\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{ML}, \hat{\mu}_{MML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmi n	Yan	MSE
20	ML	-0.5201	-	0.0425	1.5420	0.0420	0.6301	1.7796	0.2796	4.9645
	MML	-0.5201	0.0201	0.0426	1.5462	0.0462	0.6331	1.7805	0.2805	4.9730
	NP1	-0.5119	-	0.0547	1.5463	0.0463	0.7940	1.6559	0.1559	5.3208
	NP2		0.0201		1.6503	0.1503	0.9484	2.4465	0.9465	13.8737
	NP3		-		1.7249	0.2249	1.0584			
	NP4		0.0119		1.6780	0.1780	0.9902			
	NP5				1.6727	0.1727	0.9659			
	NP6				1.6808	0.1808	1.0092			
30	ML	-0.5168		0.0272	1.5425	0.0425	0.5304	1.7456	0.2456	2.8749
	MML	-0.5163		0.0271	1.5443	0.0443	0.5301	1.7486	0.2486	2.8661
	NP1	-0.5049		0.0385	1.5299	0.0299	0.6648	1.6392	0.1392	3.3506
	NP2				1.6423	0.1423	0.7986	2.3369	0.8369	10.5145
	NP3				1.7188	0.2188	0.9158			
	NP4				1.6729	0.1729	0.8542			
	NP5				1.6683	0.1683	0.8249			
	NP6				1.6759	0.1759	0.8782			
50	ML	-0.5128		0.0176	1.5313	0.0313	0.4259	1.7058	0.2058	1.9870
	MML	-0.5124		0.0176	1.5338	0.0338	0.4281	1.7112	0.2112	2.0049
	NP1	-0.5086		0.0244	1.4851	-	0.5242	1.4542	0.0458	2.6602
	NP2				1.6047	0.0149	0.6446	2.2277	0.7277	7.4690
	NP3				1.6584	0.1047	0.6906			
	NP4				1.6320	0.1584	0.6866			
	NP5				1.6281	0.1320	0.6584			
	NP6				1.6347	0.1281	0.7082			
100	ML	-0.5049		0.0082	1.5248	0.0248	0.2812	1.6417	0.1417	1.3249
	MML	-0.5046		0.0083	1.5252	0.0250	0.2822	1.6486	0.1486	1.3331
	NP1	-0.4995		0.0111	1.4852	-	0.3394	1.3562	-0.1438	1.3147
	NP2				1.5811	0.0148	0.4003	1.9812	0.4812	3.1307
	NP3				1.6447	0.0811	0.4504			
	NP4				1.6177	0.1447	0.4407			
	NP5				1.6136	0.1177	0.4217			
	NP6				1.6205	0.1136	0.4542			
150	ML	-0.5016		0.0048	1.5112	0.0112	0.2009	1.6041	0.1041	0.8856
	MML	-0.5015		0.0048	1.5113	0.0113	0.2012	1.6056	0.1056	0.8864
	NP1	-0.4975		0.0065	1.4546	-	0.2353	1.3001	-0.1999	0.8932
	NP2				1.5543	0.0454	0.2783	1.8119	0.3119	2.2460
	NP3				1.6117	0.0543	0.3050			
	NP4				1.5873	0.1117	0.3014			
	NP5				1.5846	0.0873	0.2895			
	NP6				1.5883	0.0846	0.3086			
						0.0883				

Çizelge 7.10 Gama dağılım ($\alpha = 0.5, \theta = 2, \beta = 1; \mu = 2, \sigma^2 = 2$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

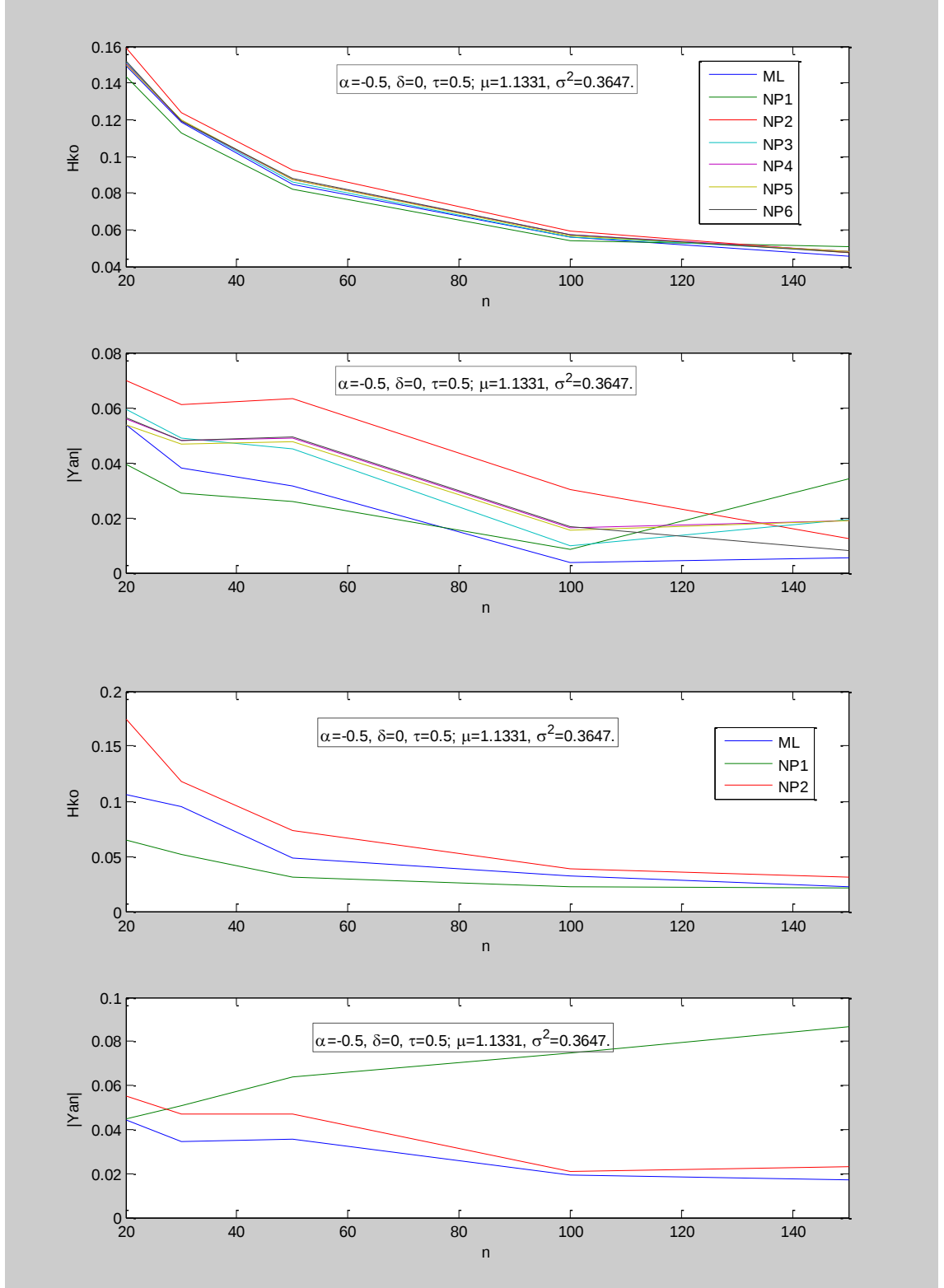
$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_{MML}$ $\hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{ML}, \hat{\mu}_{MML}$ $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$										
n	Yöntem	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	ML	0.4866	-	0.0323	2.0859	0.0859	0.8336	2.3103	0.3103	4.9802
	MML	0.4876	0.0134	0.0323	2.0899	0.0899	0.8358	2.3148	0.3148	4.9994
	NP1	0.5075	-	0.0392	2.1181	0.1181	0.9695	2.2470	0.2470	5.3825
	NP2		0.0124		2.2038	0.2038	1.0955	2.8712	0.8712	10.9539
	NP3		0.0075		2.2701	0.2701	1.1803			
	NP4				2.1672	0.1672	0.9484			
	NP5				2.2187	0.2187	1.1071			
	NP6				2.0947	0.0947	0.8649			
30	ML	0.4925		0.0197	2.0626	0.0626	0.7210	2.2807	0.2807	3.7411
	MML	0.4930		0.0197	2.0634	0.0634	0.7209	2.2855	0.2855	3.7597
	NP1	0.5039		0.0241	2.0737	0.0737	0.8562	2.1434	0.1434	4.1661
	NP2				2.1564	0.1564	0.9652	2.6756	0.6756	8.4599
	NP3				2.2216	0.2216	1.0166			
	NP4				2.1368	0.1368	0.8408			
	NP5				2.1773	0.1773	0.9704			
	NP6				2.0712	0.0712	0.7721			
50	ML	0.4956		0.0134	2.0378	0.0378	0.5326	2.1741	0.1741	2.3429
	MML	0.4957		0.0134	2.0383	0.0383		2.1810	0.1810	2.3546
	NP1	0.5021		0.0170	2.0368	0.0368	0.5363	2.1090	0.1090	3.0210
	NP2				2.1011	0.1011	0.6475	2.5014	0.5014	5.8950
	NP3				2.1801	0.1801	0.7151			
	NP4				2.1025	0.1025	0.7756			
	NP5				2.1340	0.1340	0.6432			
	NP6				2.0464	0.0464	0.7331			
100	ML	0.4976		0.0061	2.0212	0.0212	0.3650	2.1237	0.1237	1.4878
	MML	0.4978		0.0061	2.0220	0.0220	0.3650	2.1253	0.1253	1.4885
	NP1	0.5010		0.0082	1.9822	-	0.4633	1.8734	-	1.9742
	NP2				2.0869	0.0178	0.5169	2.3746	0.1266	2.9139
	NP3				2.1310	0.0869	0.5491		0.3746	
	NP4				2.0920	0.1310	0.4759			
	NP5				2.1133	0.0920	0.5304			
	NP6				2.0330	0.1133	0.4575			
150	ML	0.4994		0.0039	2.0148	0.0148	0.2777	2.0977	0.0977	1.0462
	MML	0.4992		0.0039	2.0149	0.0149	0.2779	2.0981	0.0981	1.0460
	NP1	0.5011		0.0049	1.9516	-	0.3361	1.8415	-	1.2155
	NP2				2.0403	0.0484	0.3658	2.2090	0.1585	2.2268
	NP3				2.0809	0.0403	0.3904		0.2090	
	NP4				2.0541	0.0809	0.3474			
	NP5				2.0657	0.0541	0.3783			
	NP6				2.0213	0.0657	0.3372			

Çizelge 7.11 Gama dağılım ($\alpha = 0.8, \theta = 3, \beta = 0.5; \mu = 1.5, \sigma^2 = 0.75$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

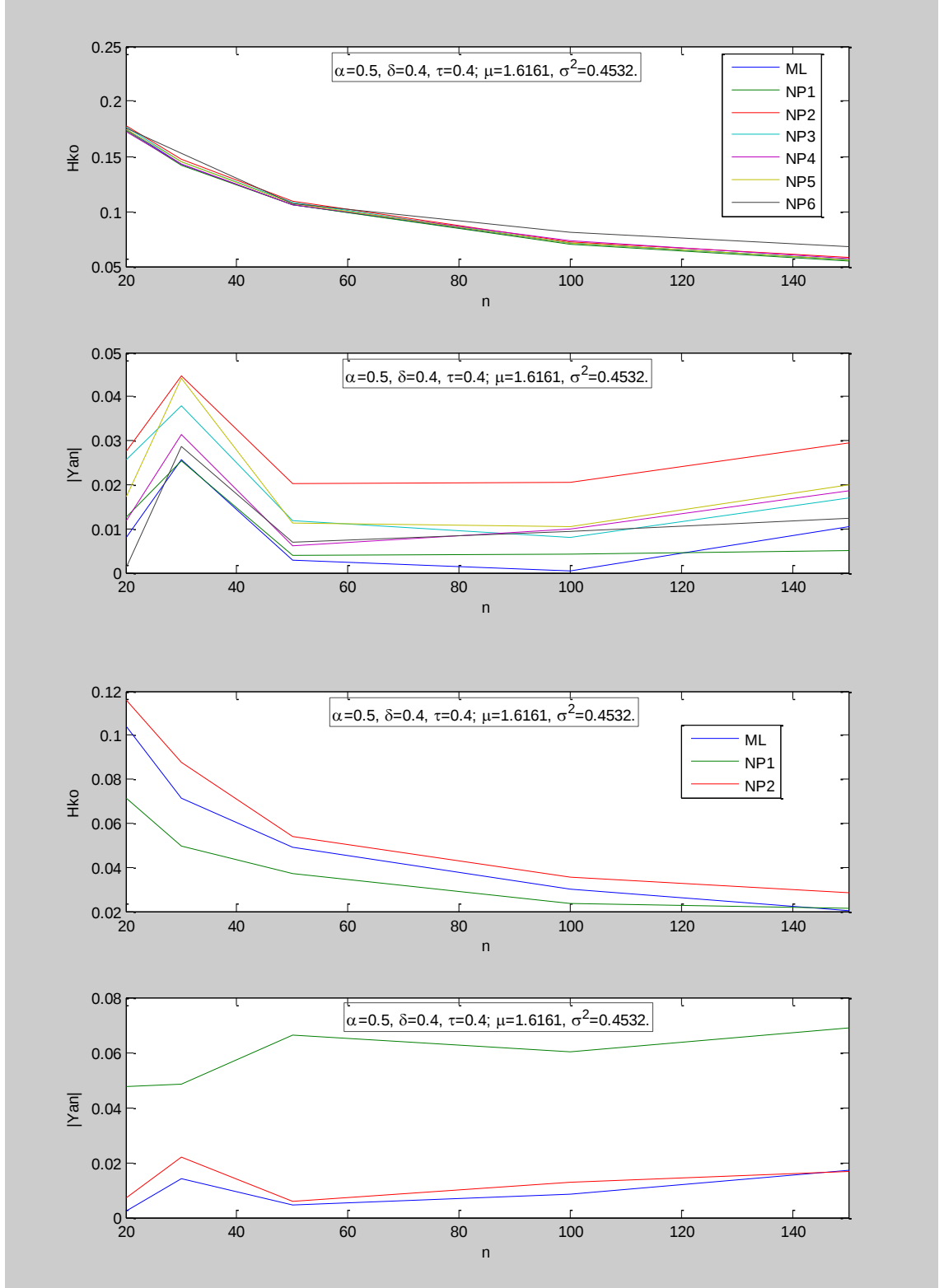
$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_{MML} \quad \hat{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, 6), \hat{\mu}_{ML}, \hat{\mu}_{MML} \quad \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$										
n	Yöntem	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	ML	0.7921	-	0.0224	1.5379	0.0379	0.3048	0.8150	0.0650	0.4445
	MML	0.7925	0.0079	0.0224	1.5392	0.0392	0.3043	0.8161	0.0661	0.4446
	NP1	0.8031	-	0.0256	1.5573	0.0573	0.3342	0.8020	0.0520	0.4725
	NP2		0.0075		1.5831	0.0831	0.3493	0.9293	0.1793	0.7456
	NP3		0.0031		1.6120	0.1120	0.3696			
	NP4				1.5613	0.0613	0.3212			
	NP5				1.5869	0.0869	0.3516			
	NP6				1.5339	0.0339	0.3855			
30	ML	0.7943	-	0.0117	1.5312	0.0312	0.2293	0.8059	0.0559	0.3616
	MML	0.7938	0.0057	0.0117	1.5328	0.0328	0.2296	0.8078	0.0578	0.3626
	NP1	0.8010	-	0.0140	1.5391	0.0391	0.2573	0.7782	0.0282	0.3860
	NP2		0.0062		1.5674	0.0674	0.2712	0.9160	0.1660	0.6458
	NP3		0.0010		1.5912	0.0912	0.2830			
	NP4				1.5378	0.0378	0.2451			
	NP5				1.5721	0.0721	0.2727			
	NP6				1.5252	0.0252	0.3375			
50	ML	0.7958	-	0.0089	1.5121	0.0121	0.1835	0.7753	0.0253	0.2719
	MML	0.7960	0.0042	0.0089	1.5128	0.0128	0.1838	0.7755	0.0255	0.2722
	NP1	0.7990	0.0040	0.0101	1.5135	0.0135	0.2151	0.7373	-0.0127	0.2896
	NP2		0.0010		1.5424	0.0424	0.2257	0.8580	0.1080	0.3949
	NP3				1.5657	0.0657	0.2345			
	NP4				1.5185	0.0185	0.2015			
	NP5				1.5501	0.0501	0.2276			
	NP6				1.5130	0.0130	0.2685			
100	ML	0.7977	-	0.0036	1.5103	0.0103	0.1187	0.7835	0.0335	0.1609
	MML	0.7978	0.0023	0.0036	1.5108	0.0108	0.1188	0.7841	0.0341	0.1614
	NP1	0.7991	-	0.0043	1.4927	-	0.1358	0.7001	-0.0499	0.1565
	NP2		0.0022		1.5230	0.0073	0.1367	0.8140	0.0640	0.2470
	NP3		0.0009		1.5435	0.0230	0.1428			
	NP4				1.5121	0.0435	0.1268			
	NP5				1.5324	0.0121	0.1393			
	NP6				1.5312	0.0324	0.2522			
150	ML	0.8003	0.0003	0.0026	1.5096	0.0096	0.0971	0.7718	0.0218	0.1102
	MML	0.8004	0.0004	0.0026	1.5096	0.0096	0.0973	0.7719	0.0219	0.1105
	NP1	0.8015	0.0015	0.0031	1.4845	-	0.1114	0.6812	-0.0688	0.1126
	NP2				1.5182	0.0155	0.1166	0.8075	0.0575	0.1576
	NP3				1.5374	0.0182	0.1202			
	NP4				1.5121	0.0374	0.1077			
	NP5				1.5277	0.0121	0.1183			
	NP6				1.5095	0.0277	0.2137			

Çizelge 7.12 Gama dağılım ($\alpha=1.5, \theta=4, \beta=0.5; \mu=2, \sigma^2=1$) durumunda α -seri sürecin α parametresi, dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE'leri

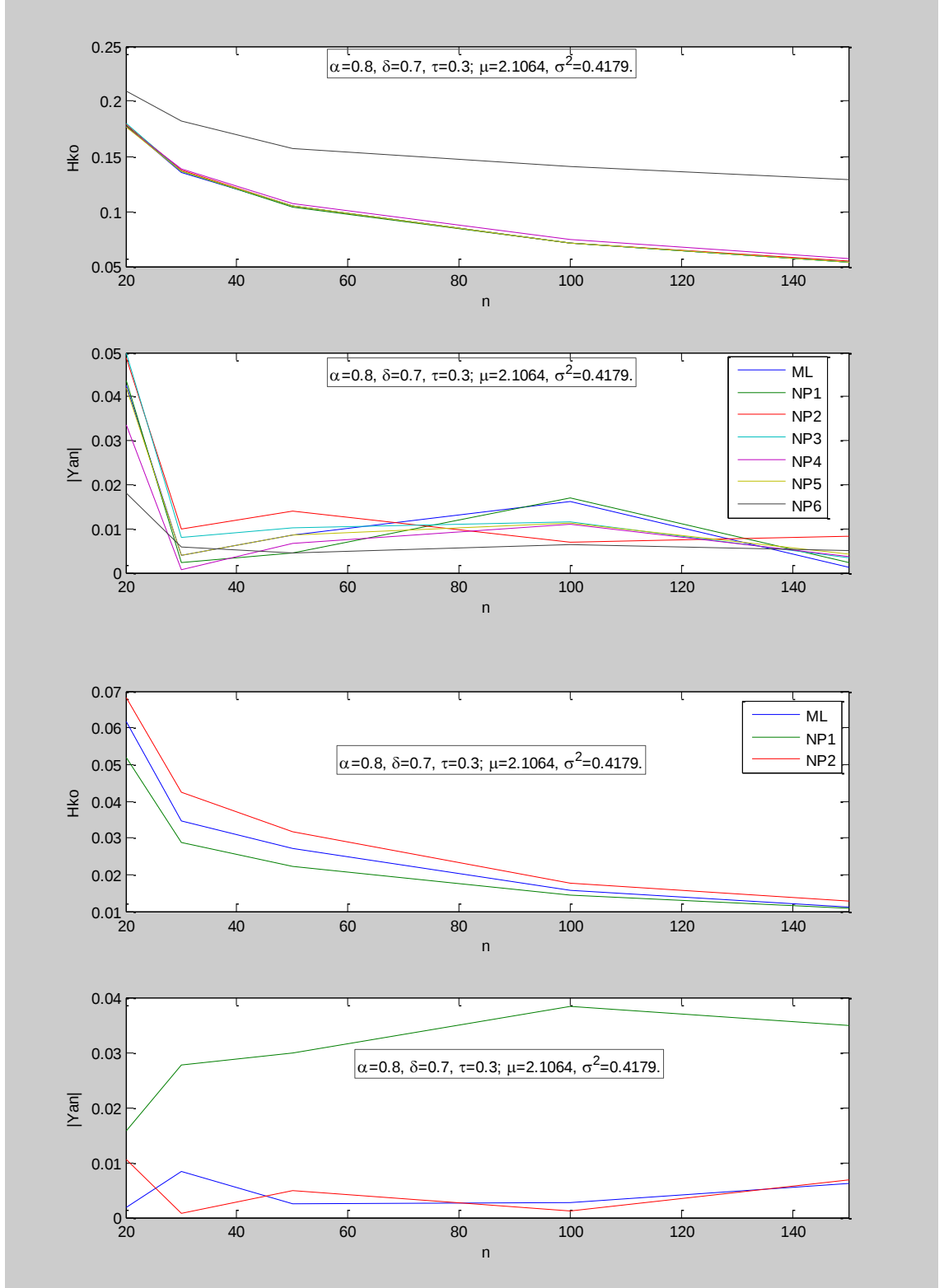
n	Yöntem	$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_{MML}$			$\hat{\mu}_i (i=1,2,...,6), \hat{\mu}_{ML}, \hat{\mu}_{MML}$			$\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{ML}^2, \hat{\sigma}_{MML}^2$		
		Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE	Tahmin	Yan	MSE
20	ML	1.4913	-0.0087	0.0152	2.0100	0.0100	0.4510	0.9995	-0.0005	0.6298
	MML	1.4914	-0.0086	0.0152	2.0113	0.0113	0.4541	1.0026	0.0026	0.6531
	NP1	1.5016	0.0016	0.0164	2.0421	0.0421	0.5130	1.0332	0.0332	0.7808
	NP2				2.0539	0.0539	0.5143	1.0964	0.0964	0.8462
	NP3				2.0840	0.0840	0.5421			
	NP4				2.0028	0.0028	0.5027			
	NP5				2.0552	0.0552	0.5189			
	NP6				1.9775	-	0.7532			
30	ML	1.4946	-0.0054	0.0097	2.0110	0.0110	0.3476	1.0106	0.0106	0.4701
	MML	1.4945	-0.0055	0.0098	2.0126	0.0126	0.3517	1.0146	0.0146	0.4737
	NP1	1.4989	-0.0011	0.0110	2.0290	0.0290	0.4013	0.9894	-0.0106	0.5435
	NP2				2.0476	0.0476	0.4119	1.1059	0.1059	0.7698
	NP3				2.0711	0.0711	0.4243			
	NP4				2.0014	0.0014	0.4172			
	NP5				2.0503	0.0503	0.4123			
	NP6				1.9802	-	0.7284			
50	ML	1.4972	-0.0028	0.0060	2.0145	0.0145	0.2529	1.0264	0.0264	0.3063
	MML	1.4971	-0.0029	0.0060	2.0148	0.0148	0.2549	1.0288	0.0288	0.3118
	NP1	1.5005	0.0005	0.0075	2.0199	0.0199	0.2850	0.9828	-0.0172	0.3242
	NP2				2.0429	0.0429	0.2951	1.0874	0.0874	0.4119
	NP3				2.0606	0.0606	0.2997			
	NP4				2.0128	0.0128	0.3539			
	NP5				2.0468	0.0468	0.2949			
	NP6				1.9946	-	0.7187			
100	ML	1.4989	-0.0011	0.0030	1.9985	-	0.1577	1.0161	0.0161	0.1750
	MML	1.4989	-0.0011	0.0030	1.9989	0.0015	0.1578	1.0166	0.0166	0.1752
	NP1	1.5010	0.0010	0.0036	1.9887	-	0.1723	0.9481	-0.0519	0.1698
	NP2				2.0129	0.0011	0.1770	1.0547	0.0547	0.2183
	NP3				2.0283	-	0.1793			
	NP4				2.0065	0.0113	0.2695			
	NP5				2.0189	0.0129	0.1774			
	NP6				2.0214	0.0283	0.7010			
150	ML	1.4986	-0.0014	0.0019	2.0038	0.0038	0.1296	1.0119	0.0119	0.1466
	MML	1.4986	-0.0014	0.0019	2.0040	0.0040	0.1300	1.0124	0.0124	0.1474
	NP1	1.5015	0.0015	0.0022	1.9895	-	0.1421	0.9472	-0.0528	0.1496
	NP2				2.0135	0.0105	0.1413	1.0405	0.0405	0.1804
	NP3				2.0292	0.0135	0.1447			
	NP4				2.0039	0.0292	0.2474			
	NP5				2.0209	0.0039	0.1427			
	NP6				1.9966	0.0209	0.6693			
150						-				
						0.0034				



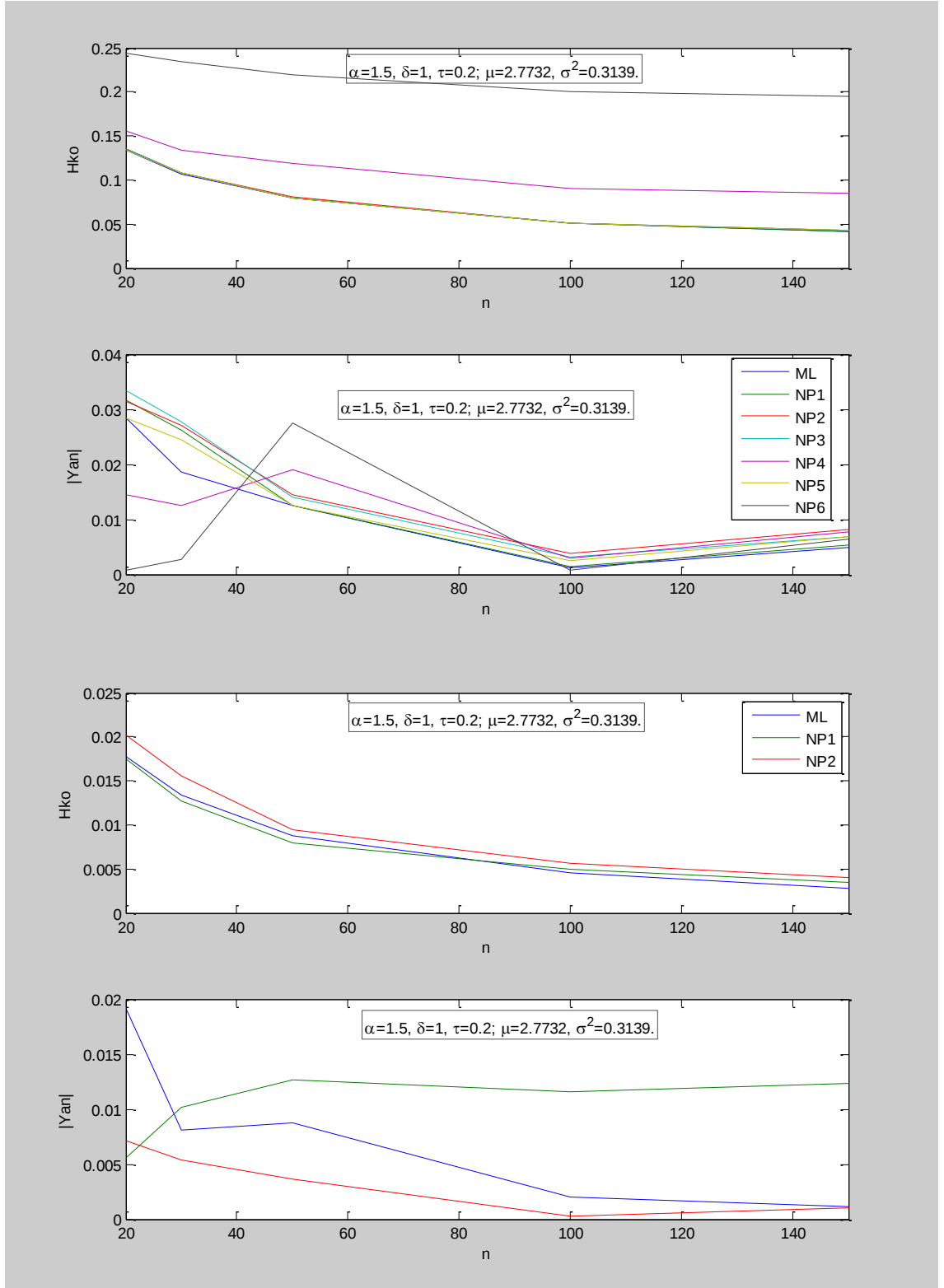
Şekil 7.1 Çizelge 7.1’deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



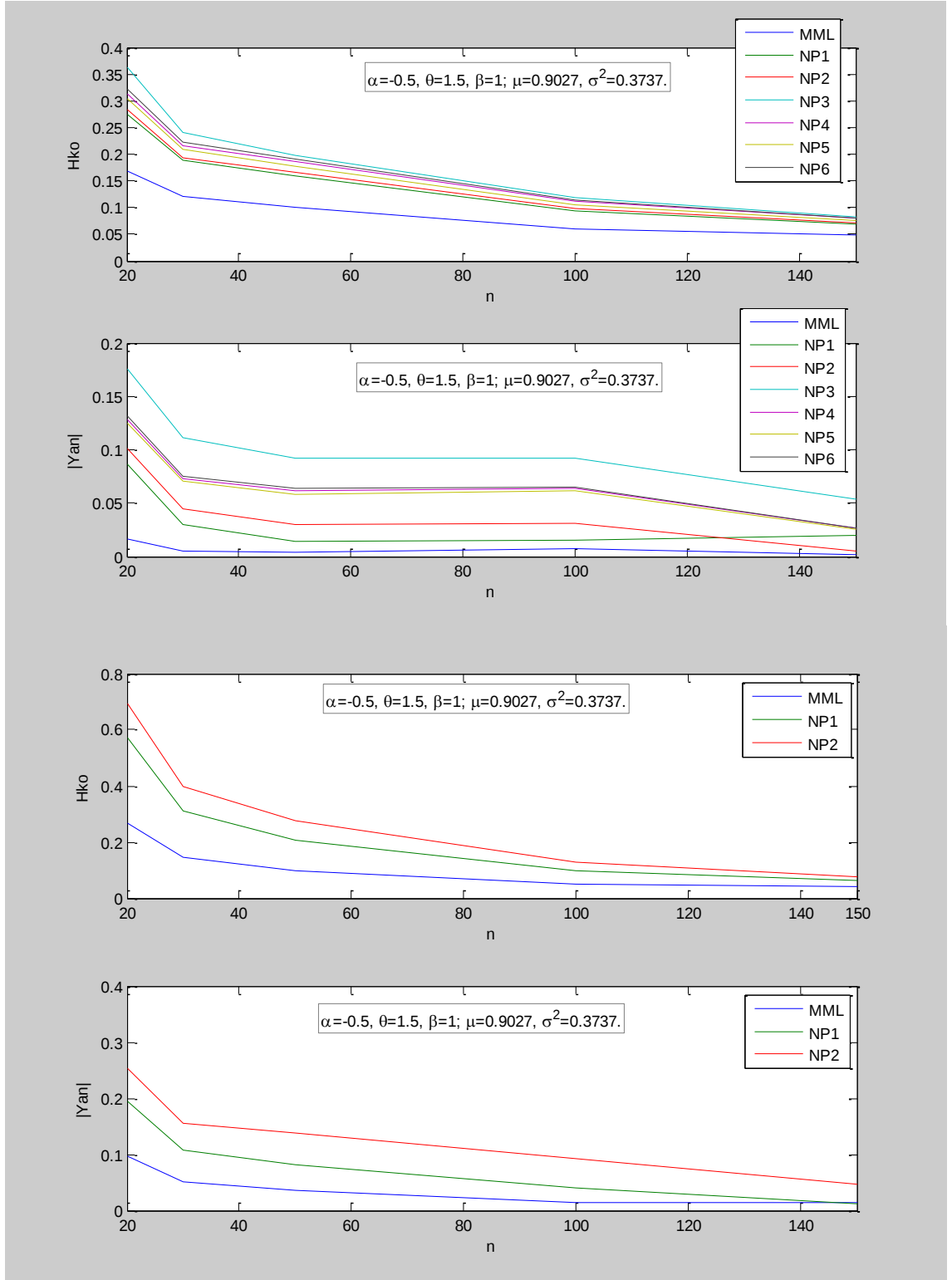
Şekil 7.2 Çizelge 7.2'deki sonuçlara göre dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



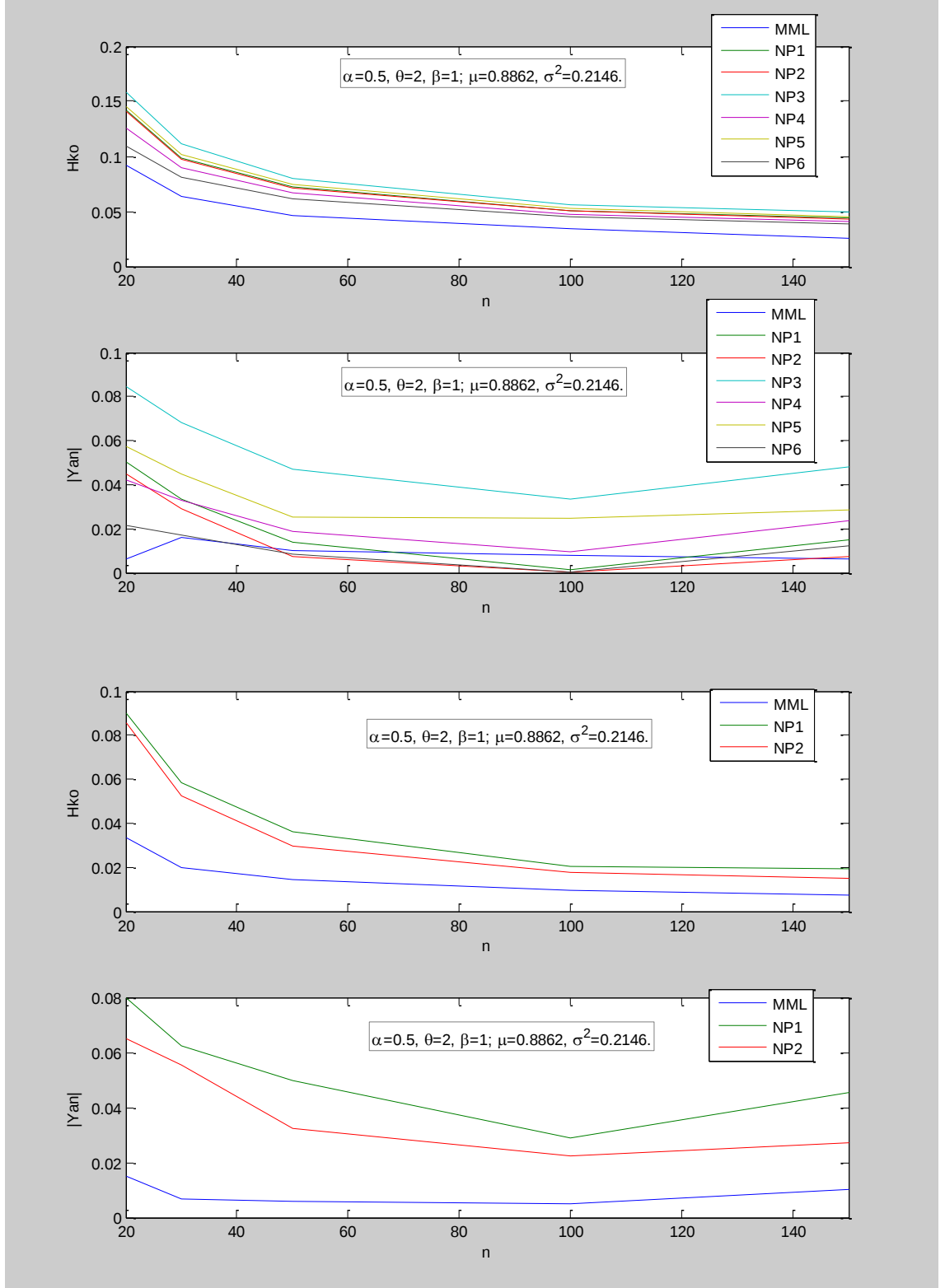
Şekil 7.3 Çizelge 7.3'deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



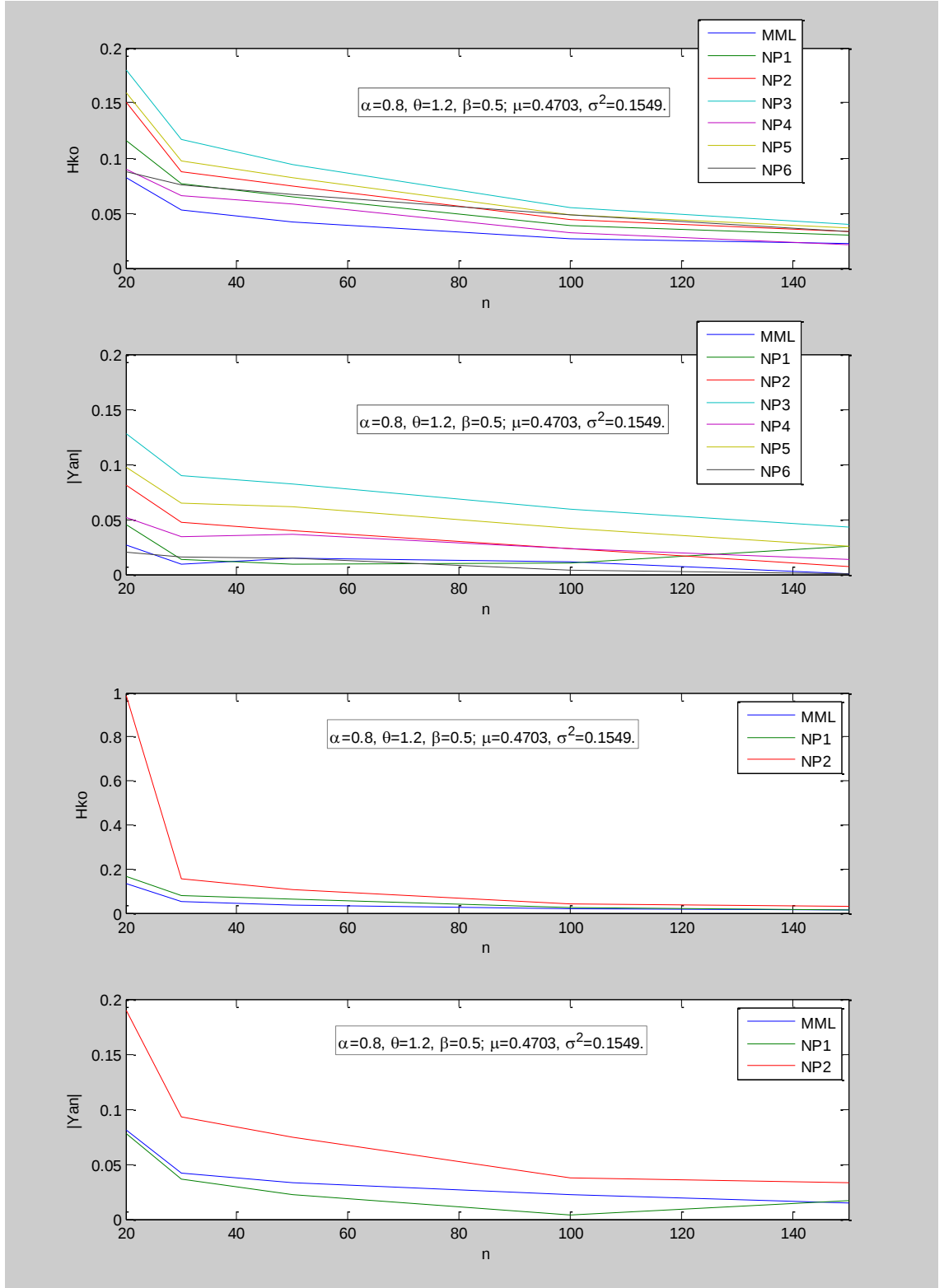
Şekil 7.4 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



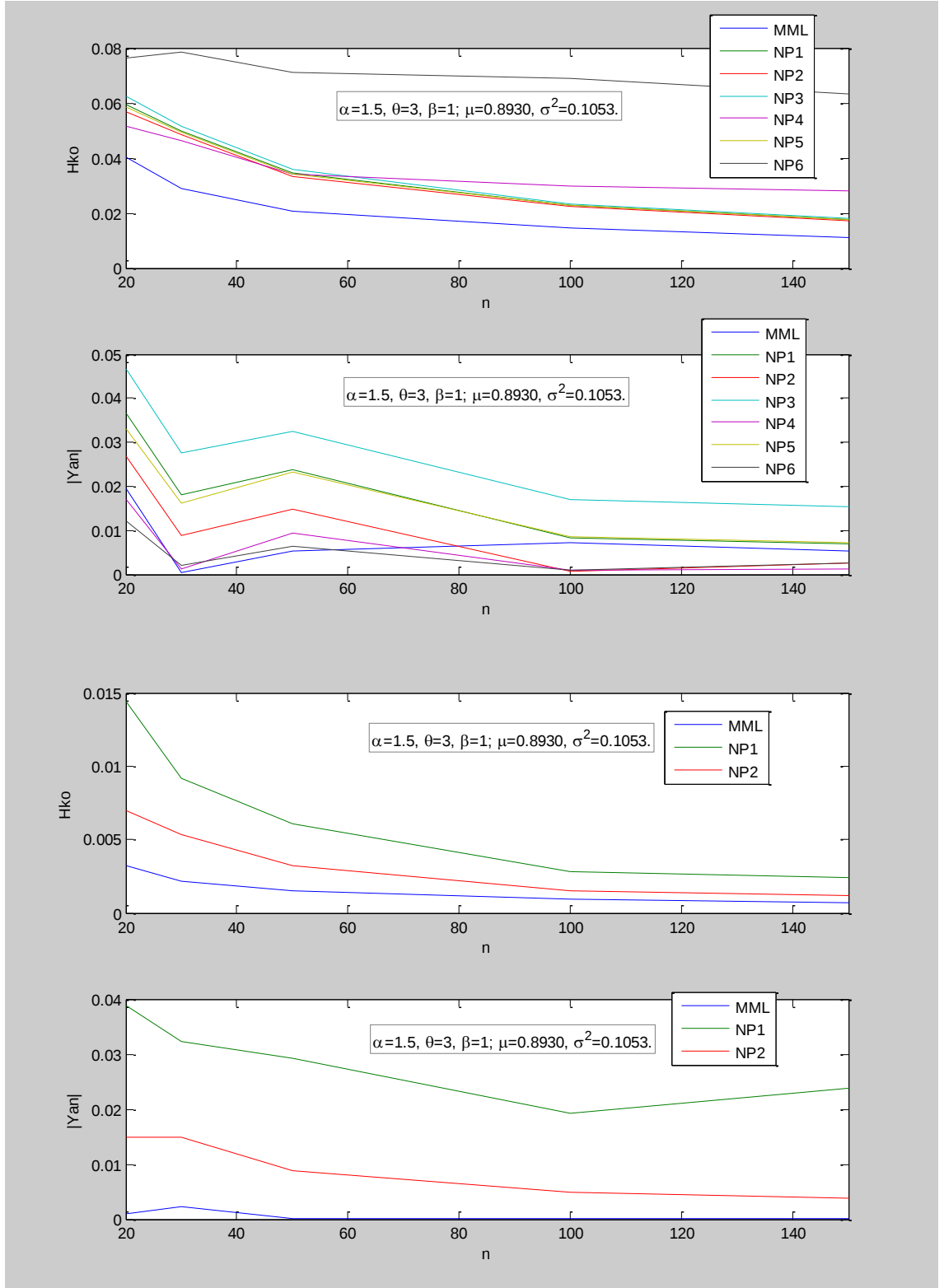
Şekil 7.5 Çizelge 7.5 ‘deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



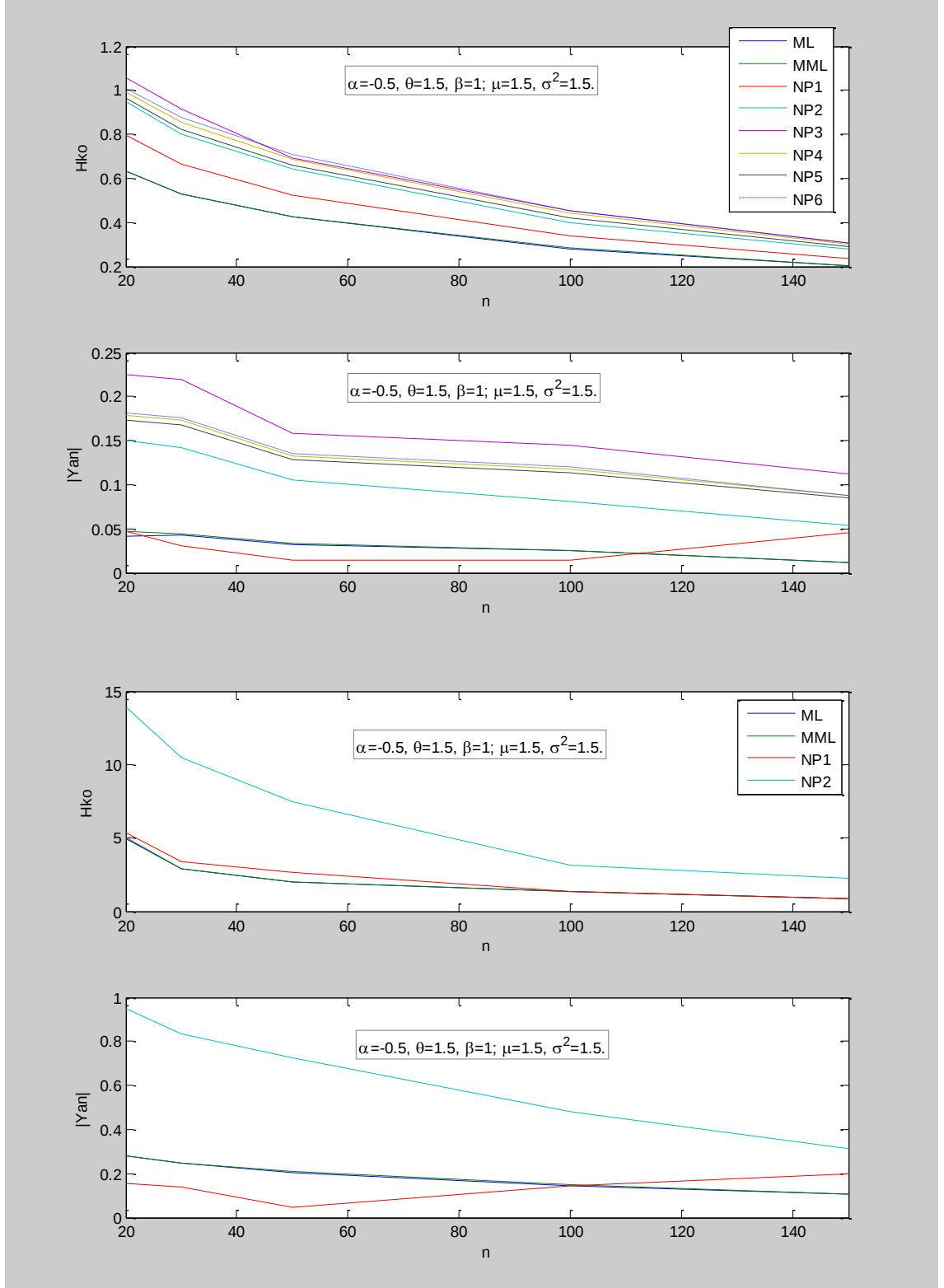
Şekil 7. 6 Çizelge 7.6'daki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



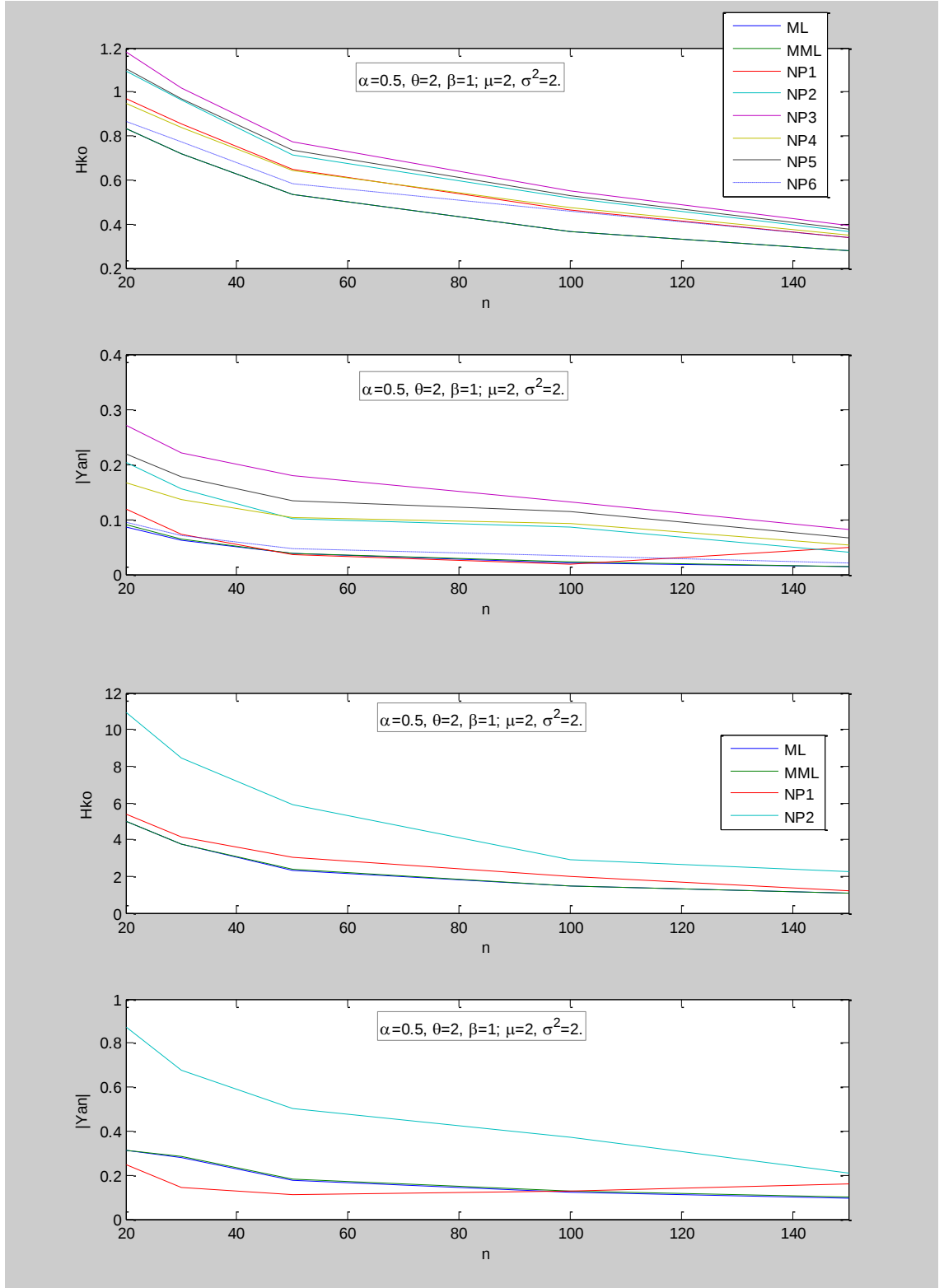
Şekil 7.7 Çizelge 7.7 ‘deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



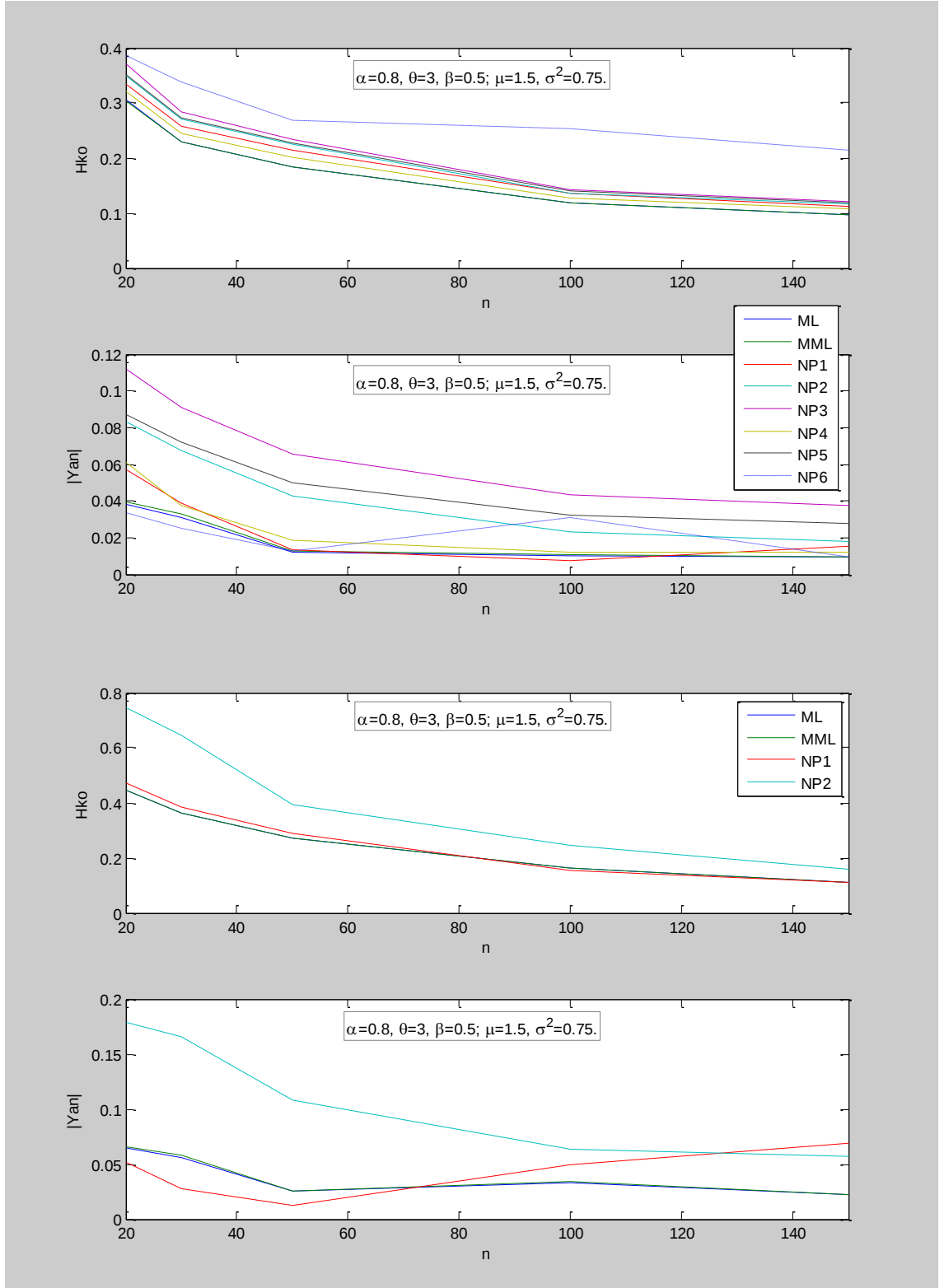
Şekil 7.8 Çizelge 7.8'deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



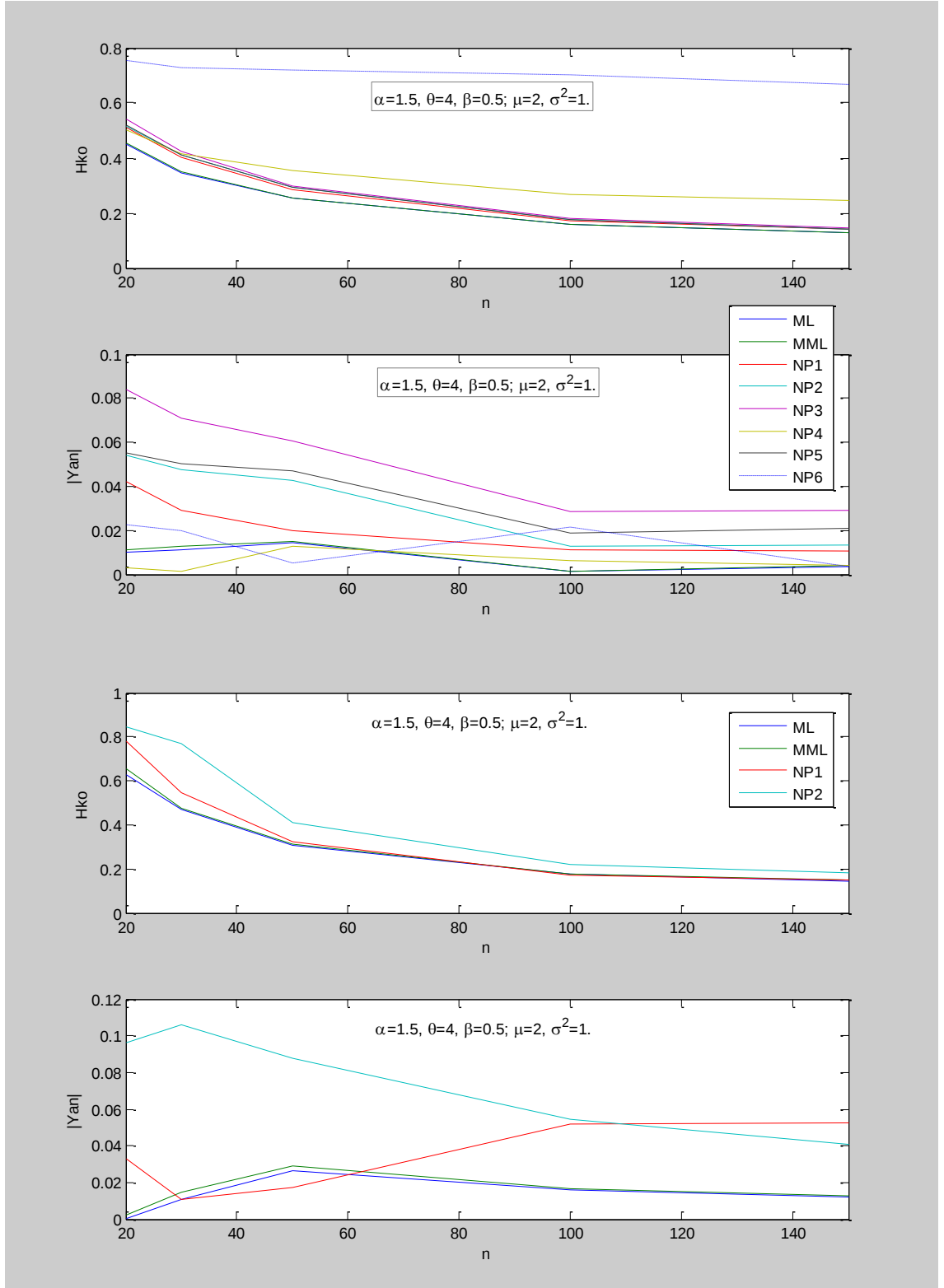
Şekil 7.9 Çizelge 7.9 ‘daki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



Şekil 7.10 Çizelge 7.10 ‘daki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



Şekil 7.11 Çizelge 7.11'deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri



Şekil 7.12 Çizelge 7.12'deki sonuçlara göre dağılımın ortalaması ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve MSE grafikleri

Genel olarak simülasyon sonuçlarına göre F dağılım fonksiyonunun bilinmediği durumda hata kareler ortalaması ve yan ölçütüne göre μ için $\alpha < 0$ ya da $\alpha > 1$ iken $\hat{\mu}_1$ 'nin diğerlerine göre tercih edilir. $0 < \alpha \leq 0.5$ durumunda $\hat{\mu}_6$ ve $0.5 < \alpha \leq 1$ durumunda $\hat{\mu}_4$ diğerlerine göre daha iyi olduğu görülmektedir. F dağılımının σ^2 varyansı için yan ve hata kareler ölçütüne göre $\hat{\sigma}_1^2$ 'nin daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca Weibull ve gama dağılım durumunda şekil parametresi büyüdükçe $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_5$ ve $\hat{\sigma}_2^2$ tahmin edicilerinin performanslarının arttığı söylenebilir. F dağılım fonksiyonunun bilinmesi durumunda μ ve σ^2 için ML ve MML tahmin edicilerinin NP tahmin edicilerinden daha iyi olduğu belirlenmiştir.

8. UYGULAMA

Bu bölümde 5 ayrı gerçek veri kümesi gözönüne alınır. Her bir veri kümesinde trendin varlığı tespit edilir ve her birisi için seçilen bir ilk gerçekleşiş zamanı dağılımı ile α -seri sürecin uyumlu bir model olabileceği gösterilir. Her bir modelde bilinmeyen α, μ ve σ^2 parametrelerinin daha önce tanımladığımız parametrik ve parametrik olmayan tahmin edicileri ile tahmin değerleri hesaplanır. Tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri ve simülasyon sonuçları göz önüne alınarak, her bir model için uygun parametre tahmin değerleri seçilir. Ayrıca geometrik, Cox-Lewis, Weibull ve yenileme süreci modelleri ile α -seri süreç modeli karşılaştırılır. Modellerin karşılaştırılmasında kestirimler için hata kareler ortalaması (MSE^*) ve en büyük görelî hata (MRE) olarak adlandırılan iki ölçüt kullanılır. Bu ölçütler sırasıyla,

$$MSE^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{n} \quad (8.1)$$

ve

$$MRE = \max_{i=1,2,\dots,n} \left| \frac{S_i - \hat{S}_i}{S_i} \right| \quad (8.2)$$

ile tanımlanır (Lam vd. 2004). Burada $\hat{X}_i$ X_i 'nin ve $\hat{S}_i = \sum_{j=1}^i \hat{X}_j$ ile S_i 'nin bir kestirimidir. Bu kestirimler α -seri süreç, geometrik süreç, Cox-Lewis ve Weibull modelleri için sırasıyla aşağıdaki gibi verilir.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $\{N(t), t \geq 0\}$ α -seri sürecinden gelen n birimlik bir veri kümesi olsun.

(3.18)'den $E(X_i) = \frac{\mu}{i^\alpha}, i = 1, 2, \dots, n$, olduğunu biliyoruz. α 'nın ve μ 'nün tahmin değerlerinin kullanılmasıyla α -seri süreç için X_i 'nin bir kestirimi

$$\hat{X}_i = \frac{\hat{\mu}}{i^{\hat{\alpha}}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (8.3)$$

ile verilir.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $\{N(t), t \geq 0\}$ geometrik sürecinden gelen n birimlik bir veri kümesi olsun. $E(X_i) = \frac{\mu}{a^{i-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğunu biliyoruz. Böylece geometrik süreç için X_i 'nin bir kestirimi

$$\hat{X}_i = \frac{\hat{\mu}}{\hat{a}^{i-1}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (8.4)$$

olur. Burada $\hat{a} = \exp\left(\frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln x_i\right)$ ve $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{a}^{i-1} x_i$ (Lam vd. 2004).

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 t}$ şiddet fonksiyonu ile bir Cox-Lewis süreci ve $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bu süreçten gelen bir veri kümesi olsun. (3.4) ifadesinin kullanılmasıyla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$ verildiğinde S_i 'nin koşullu dağılımı ve buna bağlı olarak koşullu beklenen değeri sırasıyla

$$f(t | s_1, s_2, \dots, s_{i-1}) = \exp\left(\alpha_0 + \alpha_1 t - \frac{1}{\alpha_1} (e^{\alpha_0 + \alpha_1 t} - e^{\alpha_0 + \alpha_1 s_{i-1}})\right), t > s_{i-1}$$

ve

$$E(S_i | S_1, S_2, \dots, S_{i-1}) = \exp\left(\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1} e^{\alpha_0 + \alpha_1 S_{i-1}}\right) \int_{S_{i-1}}^{\infty} t \exp\left(\alpha_1 t - \frac{1}{\alpha_1} e^{\alpha_0 + \alpha_1 t}\right) dt \quad (8.5)$$

olur. Burada $S_i = \sum_{j=1}^i X_j$. (8.5) ifadesinde α_0 ve α_1 parametreleri yerine Kısım 3.3.3'de elde edilen ML tahmin edicileri olan $\hat{\alpha}_0$ ve $\hat{\alpha}_1$ 'nin alınmasıyla S_i 'nin bir kestirimi

$$\hat{S}_i = \exp\left(\hat{\alpha}_0 + \frac{1}{\hat{\alpha}_1} e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 S_{i-1}}\right) \int_{\hat{S}_{i-1}}^{\infty} t \exp\left(\hat{\alpha}_1 t - \frac{1}{\hat{\alpha}_1} e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t}\right) dt \quad (8.6)$$

ve buna bağlı olarak X_i 'nin bir kestirimi

$$\hat{X}_i = \hat{S}_i - \hat{S}_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (8.7)$$

olur. Böylece $\hat{S}_0 = 0$ alınarak, (8.6) ifadesinden i 'ye göre ardışık olarak $\hat{S}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ kestirimleri ve bunlar yardımıyla (8.7)'den $\hat{X}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ kestirimleri elde edilir.

Weibull modelinde $i=1,2,...,n$ için $\hat{X}_i$ kestirimleri $\lambda(t)$ yerine $\theta_0\theta_1 t^{\theta_1-1}$ şiddet fonksiyonu alınarak, yukarıdaki adımların tekrarlanmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t) = \theta_0\theta_1 t^{\theta_1-1}$ şiddet fonksiyonu ile bir Weibull süreci ve $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ bu süreçten gelen bir veri kümesi olsun. (3.4) ifadesinin kullanılmasıyla $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere $S_1, S_2, ..., S_{i-1}$ verildiğinde S_i nin koşullu dağılımı ve buna bağlı olarak beklenen değeri sırasıyla

$$f(t | s_1, s_2, ..., s_{i-1}) = \theta_0\theta_1 t^{\theta_1-1} e^{-\theta_0(t^{\theta_1} - s_{i-1}^{\theta_1})}, \quad t > s_{i-1}$$

ve

$$E(S_i | S_1, S_2, ..., S_{i-1}) = \frac{e^{\theta_0 S_{i-1}^{\theta_1}}}{\theta_0^{1/\theta_1}} \int_{\theta_0 S_{i-1}^{\theta_1}}^{\infty} t^{1/\theta_1} e^{-t} dt \quad (8.8)$$

olur. (8.8) ifadesinde θ_0 ve θ_1 parametreleri yerine Kısım 3.3.3' de verilen ML tahmin edicileri olan $\hat{\theta}_0$ ve $\hat{\theta}_1$ 'nin alınmasıyla S_i 'nin bir kestirimi

$$\hat{S}_i = \frac{e^{\hat{\theta}_0 S_{i-1}^{\hat{\theta}_1}}}{\hat{\theta}_0^{1/\hat{\theta}_1}} \int_{\hat{\theta}_0 S_{i-1}^{\hat{\theta}_1}}^{\infty} t^{1/\hat{\theta}_1} e^{-t} dt \quad (8.9)$$

ve buna bağlı olarak X_i 'nin bir kestirimi

$$\hat{X}_i = \hat{S}_i - \hat{S}_{i-1}, \quad i = 1, 2, ..., n \quad (8.10)$$

olur. Böylece $\hat{S}_0 = 0$ alınarak, (8.9) ifadesinden i 'ye göre ardışık olarak $\hat{S}_i, i = 1, 2, ..., n$ kestirimleri ve bunlar yardımıyla (8.10)'dan $\hat{X}_i, i = 1, 2, ..., n$ kestirimleri elde edilir.

8.1 2 Nolu uçağın havalandırma sistemi verisi

Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri saat olarak çizelge 8.1'deki gibi gözlenmiştir (Cox ve Lewis 1966). Burada ilk çalışma süresi 413 ve son çalışma süresi 34 saattir. Cox ve Lewis 1966 ve Proschan 1963 bu veri kümesini analiz edip model olarak homojen olmayan Poisson sürecini önermişlerdir. Bu çalışmada aynı veri kümesi tekrar analiz edilerek, α – seri süreçle

uyumlu olduğu gösterilir. Bu α –seri süreçteki bilinmeyen α, μ ve σ^2 parametreleri tahmin edilir.

Çizelge 8.1 Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri

413	14	58	37	100	65	9	169	447	184	36
201	118	34	31	18	18	67	57	62	7	22
34										

Çizelge 8.2 α –seri sürece uygunluk ve trend testi sonuçları

Trend Testi		α -Seri Sürece Uygunluk Testleri			
Laplace	p - değeri	Dönüm Noktaları	p - değeri	Fark İşaret	p - değeri
2.2354	0.0254	0.6942	0.4876	-1.2247	0.2207

Çizelge 8.2’deki sonuçlar incelendiğinde, Laplace test istatistiği 2.2354 ve buna bağlı olarak p değeri 0.0254 olarak hesaplanmıştır. Buna göre veri kümesinin trende sahip olduğu söylenebilir. Böylece model olarak monoton bir sayma süreci düşünülmelidir. Veri kümesinin α –seri sürece uygunluğunun incelenmesi için yapılan dönüm noktaları ve fark işaret testlerine ait p değerleri sırasıyla 0.4876 ve 0.2207 olarak bulunmuştur. Her iki test istatistiğinin sonucuna göre bu veri kümesi için α –seri süreç bir model olarak önerilebilir.

Bu veri kümesine dayalı olarak F nin bilinmediği kabulü altında α, μ ve σ^2 parametrelerinin 5. Bölümde verilen parametrik olmayan tahmin ediciler ile tahmin değerleri hesaplanmıştır. F sırasıyla Weibull, gama ve lognormal dağılım fonksiyonu alınarak, α, μ ve σ^2 parametrelerinin 6. Bölümde verilen parametrik tahmin edicilerinin değerleri bulunmuştur. Bu veri kümesine uygun olan α -seri süreci modelinin belirlenmesi amacıyla parametrik ve parametrik olmayan tahmin değerlerine bağlı olarak kestirimler için MSE^* değerleri hesaplatılmıştır. Tahmin değerleri ile birlikte MSE^* değerleri çizelge 8.3’ de verilmiştir.

Çizelge 8.3 2 Nolu uçağın havalandırma sistemi verisi için parametrelerin tahminleri

Yöntem	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	MSE*/10 ⁴
Weibull	0.5373	284.7726	82725.1786	1.1103
Gama(ML)	0.5403	292.9597	76390.4237	1.1117
Gama (MML)	0.5415	293.7287	76784.8403	1.1118
Lognormal	0.4043	225.0705	101078.1794	1.1321
NP1	0.4043	178.7369	20320.2505	1.1914
NP2		228.7317	59084.7175	1.1313
NP3		208.1729		1.1431
NP4		223.1970		1.1327
NP5		216.9844		1.1358
NP6		231.9500		1.1311

Çizelge 8.3'deki sonuçlara göre $\hat{\alpha} > 0$ olduğundan süreç stokastik olarak monoton azalandır. MSE* değerleri incelendiğinde Weibull ve gama ilk varış zamanı dağılımına sahip α -seri süreci modellerinin bu veri kümesine uygun olduğu söylenebilir. Hem MSE* değerinin daha küçük olduğu ve hem de tahmin değerlerinin daha kolay hesaplanabildiğinin gözönüne alınmasıyla $\hat{\alpha} = 0.5373$, $\hat{\mu} = 284.7726$ ve $\hat{\sigma}^2 = 82725.1786$ tahmin değerleri ile ilk varış zamanı dağılımı Weibull olan α -seri süreci modeli bu veri kümesi için uygun bir model olarak kullanılabilir.

Bu α -seri süreci modelini yenileme süreci, geometrik süreç, Cox-Lewis ve Weibull modelleriyle MSE* ve MRE ölçütlerine göre karşılaştırmak için çizelge 8.4 oluşturulmuştur. Bu çizelgede MSE* ölçütüne göre bu veri kümesi için Weibull modelinin ve MRE ölçütüne göre α -seri süreci modelinin daha uygun olduğu söylenebilir.

Çizelge 8.4 Modellerin karşılaştırılması

	α -seri süreç		GP		RP (HPP)		CLM		WM	
MSE*/10 ⁴	1.1103		1.1926		1.3611		1.1887		1.0260	
MRE	0.4761		0.6162		0.7683		0.6262		0.5311	
Tahmin	α	0.5373	a	1.0582	α	0	α_0	-5.6926	θ_0	8.8783x10 ⁻⁴
	μ	284.7726	μ	158.5001	μ	95.6957	α_1	8.8783x10 ⁻⁴	θ_1	1.7406
	σ^2	82725.1786	σ^2	27003.1674	σ^2	14230.0395				

8.2 7 Nolu Uçağın Havalandırma Sistemi Verisi

Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri saat olarak çizelge 8.5’deki gibi gözlenmiştir (Proschan 1963 , Cox ve Lewis 1966). Burada ilk çalışma süresi 97 ve son çalışma süresi 24 saattir. Proschan 1963 ve Cox ve Lewis 1966 bu veri kümesine homojen Poisson sürecini model olarak uygulamışlardır. Lam vd. 2004 bu veri kümesini analiz edip homojen Poisson sürecinin yanı sıra geometrik sürecinde model olarak kullanılabileceğini göstermişlerdir. Bu çalışmada aynı veri kümesi tekrar analiz edilerek, α –seri süreçle uyumlu olduğu gösterilir. α –seri süreçteki bilinmeyen α, μ ve σ^2 parametreleri tahmin edilir.

Çizelge 8.5 Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri

97	51	11	4	141	18	142	68	77	80	1
16	106	206	82	54	31	216	46	111	39	63
18	191	18	163	24						

Çizelge 8.6 α –seri sürece uygunluk ve trend testi sonuçları

Trend Testi		α –Seri Sürece Uygunluk Testleri			
Laplace	p -değeri	Dönüm Noktaları	p -değeri	Fark İşaret	p -değeri
-0.5447	0.5859	-0.9535	0.3404	-1.7321	0.0833

Çizelge 8.6’daki sonuçlar incelendiğinde, Laplace test istatistiği -0.5447 ve buna bağlı olarak p değeri 0.5859 olarak hesaplanmıştır. Buna göre veri kümesinin trende sahip olmadığı söylenebilir. Böylece RP veya HPP model olarak kullanılabilir. Veri kümesinin α –seri sürece uygunluğunun incelenmesi için yapılan dönüm noktaları ve fark işaret testlerine ait p değerleri sırasıyla 0.3404 ve 0.0833 olarak bulunmuştur. Her iki test istatistiğinin sonucuna göre bu veri kümesi için α –seri süreç bir model olarak önerilebilir.

Bu veri kümesine dayalı olarak F ’nin bilinmediği kabulü altında α, μ ve σ^2 parametrelerinin 5. Bölümde verilen parametrik olmayan tahmin ediciler ile tahmin

değerleri hesaplanmıştır. F sırasıyla Weibull, gama ve lognormal dağılım fonksiyonu alınarak, α, μ ve σ^2 parametrelerinin 6. Bölümde verilen parametrik tahmin edicilerinin değerleri bulunmuştur. Bu veri kümesine uygun olan α -seri süreci modelinin belirlenmesi amacıyla parametrik ve parametrik olmayan tahmin değerlerine bağlı olarak kestirimler için MSE^* değerleri hesaplatılmıştır. Tahmin değerleri ile birlikte MSE^* değerleri çizelge 8.7’de verilmiştir.

Çizelge 8.7 7 Nolu uçağın havalandırma sistemi verisi için parametrelerin tahminleri

Yöntem	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$MSE^*/10^3$
Weibull	-0.1288	55.2891	2599.2707	3.8426
Gama(ML)	-0.1253	56.6102	2801.3982	3.8415
Gama (MML)	-0.1265	56.4562	2785.8645	3.8413
Lognormal	-0.1788	64.1018	14277.3639	4.3720
NP1	-0.1788	44.2723	1486.0820	3.9082
NP2		45.1689	1628.7058	3.8877
NP3		54.8235		3.9159
NP4		49.5766		3.8440
NP5		49.8654		3.8445
NP6		49.3978		3.8439

Çizelge 8.7’deki sonuçlara göre MSE^* değerleri incelendiğinde $\hat{\alpha} = -0.1265$, $\hat{\mu} = 56.4562$ ve $\hat{\sigma}^2 = 2785.8645$ tahmin değerleri ile ilk varış zamanı dağılımı gama olan α -seri süreci modeli bu veri kümesi için uygun bir model olarak kullanılabilir.

Bu α -seri süreci modelini geometrik süreç,yenileme süreci, Cox-Lewis ve Weibull modelleriyle MSE^* ve MRE ölçütlerine göre karşılaştırmak için Çizelge 8.8 oluşturulmuştur. Bu çizelgede MSE^* ölçütüne göre bu veri kümesi için α -seri süreci modelinin ve MRE ölçütüne göre geometrik süreç modelinin daha uygun olduğu söylenebilir.

Çizelge 8.8 Modellerin karşılaştırılması

	α -seri süreç		GP		RP (HPP)		CLM		WM	
MSE*/10 ³	3.8413		3.9067		3.9090		3.8720		3.8975	
MRE	0.5352		0.4214		0.8850		0.7849		0.8461	
Tahmin	α	-0.1265	a	0.9764	α	0	α_0	-4.2751	θ_0	1.4295x10 ⁻²
	μ	56.4562	μ	56.1260	μ	76.8148	α_1	-6.470x10 ⁻⁵	θ_1	0.9878
	σ^2	2785.8645	σ^2	2080.7775	σ^2	4059.3105				

8.3 Sistem Yazılım Verisi

Bir sistem yazılımının ana işlemci biriminin ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri saniye olarak çizelge 8.9'deki gibi gözlenmiştir (Musa 1979, Musa vd. 1987). Burada ilk çalışma süresi 3 ve son çalışma süresi 4116 saniyedir. Bu veri kümesinde üç tane 0 olup 0.5 olarak değiştirilmiştir. Musa vd. 1987 yılında bu veri kümesini analiz etmiş ve model olarak homojen olmayan Poisson sürecini önermişlerdir. Lam vd. 2004 yılında bu veri kümesinin monoton artan bir geometrik süreçle modellenebileceğini göstermişler ve süreçle ilgili parametrelerin tahminlerini elde etmişlerdir. Bu çalışmada aynı veri kümesi tekrar analiz edilerek, α –seri süreçle uyumlu olduğu gösterilir. α –seri süreçteki bilinmeyen α, μ ve σ^2 parametreleri tahmin edilir.

Çizelge 8.9 Bir sistem yazılımının ana işlemci biriminin ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri

3	30	131	81	115	9	2	91	112	15	138
50	77	24	108	88	670	120	26	114	325	55
242	68	422	180	10	1146	600	15	36	4	0.5
8	227	65	176	58	457	300	97	263	452	255
197	193	6	79	816	1351	148	21	233	134	357
193	236	31	369	748	0.5	232	330	365	1222	543
10	16	529	379	44	129	810	290	300	529	281
160	828	1011	445	296	1755	1064	1783	860	983	707
33	868	724	2323	2930	1461	843	12	261	1800	865
1435	30	143	108	0.5	3110	1247	943	700	875	245
729	1897	447	386	446	122	990	948	1082	22	75
482	5509	100	10	1071	371	790	6150	3321	1045	648
5485	1160	1864	4116							

Çizelge 8.10 α – seri sürece uygunluk ve trend testi sonuçları

Trend Testi		α – Seri Sürece Uygunluk Testleri			
Laplace	p -değeri	Dönüm Noktaları	p -değeri	Fark İşaret	p -değeri
-9.1065	0.0000	-0.9754	0.3293	0.2928	0.7697

Çizelge 8.10'daki sonuçlar incelendiğinde, Laplace test istatistiği -9.1065 ve buna bağlı olarak p değeri 0.0000 olarak hesaplanmıştır. Buna göre veri kümesinin trende sahip olduğu söylenebilir. Böylece model olarak monoton bir sayma süreci düşünülmelidir. Veri kümesinin α – seri sürece uygunluğunun incelenmesi için yapılan dönüm noktaları ve fark işaret testlerine ait p değerleri sırasıyla 0.3293 ve 0.7697 olarak bulunmuştur. Her iki test istatistiğinin sonucuna göre bu veri kümesi için α – seri süreç bir model olarak önerilebilir.

Bu veri kümesine dayalı olarak F nin bilinmediği kabulü altında α, μ ve σ^2 parametrelerinin 5. Bölümde verilen parametrik olmayan tahmin ediciler ile tahmin değerleri hesaplanmıştır. F sırasıyla Weibull, gama ve lognormal dağılım fonksiyonu alınarak, α, μ ve σ^2 parametrelerinin 6. Bölümde verilen parametrik tahmin edicilerinin değerleri bulunmuştur. Bu veri kümesine uygun olan α -seri süreci modelinin belirlenmesi amacıyla parametrik ve parametrik olmayan tahmin değerlerine bağlı olarak kestirimler için MSE^* değerleri hesaplatılmıştır. Tahmin değerleri ile birlikte MSE^* değerleri çizelge 8.11'de verilmiştir.

Çizelge 8.11 Sistem yazılım verisi için parametrelerin tahminleri

Yöntem	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$MSE^*/10^5$
Weibull	-0.9823	9.6540	137.6581	8.2420
Gama(ML)	-0.9839	9.5533	123.2845	8.245 0
Gama (MML)	-0.9845	9.5329	122.7675	8.244 0
Lognormal	-0.9436	20.3390	6486.4357	10.0700
NP1	-0.9436	8.3136	70.8364	9.1970
NP2		10.3683	157.6645	8.5840
NP3		12.0921		8.3120
NP4		12.2045		8.3020
NP5		11.2059		8.4240
NP6		13.3488		8.2530

Çizelge 8.11'deki sonuçlara göre $\hat{\alpha} < 0$ olduğundan süreç stokastik olarak monoton artandır. MSE^* değerlerinin incelenmesiyle Weibull ve gama ilk varış zamanı dağılımına sahip α -seri süreci modellerinin bu veri kümesine uygun olduğu söylenebilir. Hem MSE^* değerinin daha küçük olduğu ve hem de tahmin değerlerinin daha kolay hesaplanabildiğinin göz önüne alınmasıyla $\hat{\alpha} = -0.9823$, $\hat{\mu} = 9.6540$ ve $\hat{\sigma}^2 = 137.6581$ tahmin değerleri ile ilk varış zamanı dağılımı Weibull olan α -seri süreci modeli bu veri kümesi için uygun bir model olarak kullanılabilir.

Bu α -seri süreci modelini geometrik süreç, yenileme süreci, Cox-Lewis ve Weibull modelleriyle MSE^* ve MRE ölçütlerine göre karşılaştırmak için çizelge 8.12 oluşturulmuştur. Bu çizelgeden MSE^* ölçütüne göre bu veri kümesi için geometrik süreç modelinin ve MRE ölçütüne göre Weibull modelinin daha uygun olduğu söylenebilir.

Çizelge 8.12 Modellerin karşılaştırılması

	α -seri süreç		GP		RP (HPP)		CLM		WM	
$MSE^*/10^5$	8.2420		7.5010		1.0633		8.1868		8.1474	
MRE	2.2180		29.8410		216.3615		67.6900		1.3267	
Tahmin	α	-0.9823	a	0.9769	α	0	α_0	-5.3212	θ_0	0.5684
	μ	9.6540	μ	92.5229	μ	652.0846	α_1	-3.4204x10 ⁻⁵	θ_1	0.4808
	σ^2	137.6581	σ^2	10109.6433	σ^2	1071149.05				

8.4 Bilgisayar Verisi

Bir Bilgisayarın ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri çizelge 8.13'deki gibi gözlenmiştir (Cox ve Lewis 1966). Burada ilk çalışma süresi 340 ve son çalışma süresi 860 dır. Lam vd. 2004 yılında bu veri kümesinin geometrik süreçle modellenebileceğini göstermişler ve sürecin parametrelerinin tahminlerini elde etmişlerdir. Ayrıca RP ve HPP modellerinin uygulanabileceğini belirtmişlerdir. Bu çalışmada aynı veri kümesi

tekrar analiz edilerek, α –seri süreçle uyumlu olduğu gösterilir. α –seri süreçteki bilinmeyen α, μ ve σ^2 parametreleri tahmin edilir.

Çizelge 8.13 Bir bilgisayarın ardışık bozulmalar arası geçen zaman süreleri

340	230	34	754	111	15	135	145	98	293	265
146	234	88	113	288	46	73	235	71	776	18
360	293	38	29	517	528	568	1022	1284	240	2555
313	48	432	247	651	279	162	174	333	339	56
354	3	133	4	1694	135	940	11	183	14	132
246	8	21	316	5	181	230	281	760	1	317
77	220	49	185	533	295	477	299	130	130	33
7	161	12	95	91	65	158	70	55	2067	962
414	231	428	2	536	318	34	524	139	19	17
11	103	22	397	8	16	1131	4168	4494	455	628
806	260	86	642	695	445	1317	856	816	839	22
578	717	1577	1747	31	620	167	525	483	447	664
264	220	36	304	537	69	867	572	198	396	1085
545	404	42	57	254	1356	39	1392	652	189	21
261	428	355	116	504	261	192	2	4	35	41
104	3	509	929	2	420	1320	506	279	100	610
194	4	635	83	676	60	413	253	166	71	15
13	449	110	160	10	68	195	57	6	401	276
9	784	224	158	241	884	222	72	380	235	7
236	17	27	394	185	353	1218	131	129	277	10
39	701	198	508	442	589	121	350	93	60	307
332	90	56	385	134	97	46	188	78	339	29
231	137	18	1149	59	395	375	20	341	54	6
305	68	1376	860							

Çizelge 8.14 α –seri sürece uygunluk ve trend testi sonuçları

Trend Testi		α –Seri Sürece Uygunluk Testleri			
Laplace	p -değeri	Dönüm Noktaları	p -değeri	Fark İşaret	p -değeri
0.8389	0.4015	1.1028	0.2701	-0.2148	0.8299

Çizelge 8.14’deki sonuçlar incelendiğinde, Laplace test istatistiği 0.8389 ve buna bağlı olarak p değeri 0.4015 olarak hesaplanmıştır. Buna göre veri kümesinin trende sahip olmadığı söylenebilir. Böylece RP veya HPP model olarak kullanılabilir. Veri kümesinin α –seri sürece uygunluğunun incelenmesi için yapılan dönüm noktaları ve fark işaret testlerine ait p değerleri sırasıyla 0.2701 ve 0.8299 olarak bulunmuştur. Her

iki test istatistiğinin sonucuna göre bu veri kümesi için α –seri süreç bir model olarak önerilebilir.

Bu veri kümesine dayalı olarak F nin bilinmediği kabulü altında α, μ ve σ^2 parametrelerinin 5. Bölümde verilen parametrik olmayan tahmin ediciler ile tahmin değerleri hesaplanmıştır. F sırasıyla Weibull, gama ve lognormal dağılım fonksiyonu alınarak, α, μ ve σ^2 parametrelerinin 6. Bölümde verilen parametrik tahmin edicilerinin değerleri bulunmuştur. Bu veri kümesine uygun olan α -seri süreci modelinin belirlenmesi amacıyla parametrik ve parametrik olmayan tahmin değerlerine bağlı olarak kestirimler için MSE^* değerleri hesaplatılmıştır. Tahmin değerleri ile birlikte MSE^* değerleri çizelge 8.15’de verilmiştir.

Çizelge 8.15 Bilgisayar verisi için parametrelerin tahminleri

Yöntem	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$MSE^*/10^5$
Weibull	-0.0440	293.1569	139328.0138	2.6409
Gama(ML)	-0.0484	290.7339	119491.4425	2.6409
Gama (MML)	-0.0472	292.3528	120836.2610	2.6408
Lognormal	0.0031	529.8439	2930312.8428	2.8972
NP1	0.0031	251.9107	60281.4086	2.7733
NP2		387.9184	272876.8489	2.6462
NP3		349.0545		2.6458
NP4		367.9894		2.6423
NP5		368.0318		2.6424
NP6		367.9462		2.6422

Çizelge 8.15’deki sonuçlara göre MSE^* değerleri incelendiğinde $\hat{\alpha} = -0.0472$, $\hat{\mu} = 292.3528$ ve $\hat{\sigma}^2 = 120836.2610$ tahmin değerleri ile ilk varış zamanı dağılımı gama olan α -seri süreci modeli bu veri kümesi için uygun bir model olarak kullanılabilir.

Bu α -seri süreci modelini geometrik süreç, yenileme süreci, Cox-Lewis ve Weibull modelleriyle MSE^* ve MRE ölçütlerine göre karşılaştırmak için çizelge 8.16 oluşturulmuştur. Bu çizelgede MSE^* ölçütüne göre bu veri kümesi için geometrik süreç

modelinin ve MRE ölçütüne göre α -seri süreci modelinin daha uygun olduğu söylenebilir.

Çizelge 8.16 Modellerin karşılaştırılması

	α -seri süreç		GP		RP (HPP)		CLM		WM	
MSE*/10 ⁵	2.6408		2.6397		2.6420		2.7378		2.6465	
MRE	0.7336		1.0255		0.9540		1.1487		0.7635	
Tahmin	α	-0.0472	a	1.0003	α	0	α_0	-5.9980	θ_0	4.3491x10 ⁻³
	μ	292.3528	μ	377.2425	μ	362.8599	α_1	2.1920x10 ⁻⁶	θ_1	0.9601
	σ^2	120836.26	σ^2	284228.19	σ^2	265235.87				

8.5 Denizaltı Verisi

Bir Amerikan denizaltısı olan USS Halfbeak'ın 4 numaralı ana itici güç motorunun birikimli bozulma zamanları saat olarak çizelge 8.17'de verilmiştir (Ascher ve Feingold 1984). Bu veri kümesinde bir tane 0 olup 0.5 olarak değiştirilmiştir. Burada ilk çalışma süresi 860 ve son çalışma süresi 460 dır. Lee 1980a, Lee 1980b bu veri kümesini analiz edip HPP ve Weibull sürecini model olarak kullanmıştır. Daha sonra Ascher ve Feingold 1984 yılında bu veri kümesini analiz edip HPP modelini uygulamışlardır. Son olarak Lam vd. 2004 bu veri kümesi için geometrik sürecin uyumlu olduğunu ve bunun yanı sıra HPP ve RP modellerinin de kullanılabileceğini göstermiştir. Bu çalışmada aynı veri kümesi tekrar analiz edilerek, α -seri süreçle uyumlu olduğu gösterilir. α -seri süreçteki bilinmeyen α, μ ve σ^2 parametreleri tahmin edilir.

Çizelge 8.17 Bir Amerikan denizaltısı olan USS Halfbeak'ın 4 numaralı güç motorunun birikimli bozulma zamanları

860	398	59	125	455	114	111	317	764	95	604
8	90	247	164	45	61	382	11	766	79	382
84	90	302	362	360	823	340	192	352	288	64
32	446	319	1320	64	525	26	242	313	114	604
269	112	97	130	21	7	138	0.5	276	138	23
460										

Çizelge 8.18 α – seri sürece uygunluk ve trend testi sonuçları

Trend Testi		α – Seri Sürece Uygunluk Testleri			
Laplace	p -değeri	Dönüm Noktaları	p -değeri	Fark İşaret	p -değeri
0.9989	0.3178	0.9535	0.3404	0.4472	0.6547

Çizelge 8.18 ‘deki sonuçlar incelendiğinde, Laplace test istatistiği 0.9989 ve buna bağlı olarak p değeri 0.3178 olarak hesaplanmıştır. Buna göre veri kümesinin trende sahip olmadığı söylenebilir. Böylece RP veya HPP model olarak kullanılabilir. Veri kümesinin α –seri sürece uygunluğunun incelenmesi için yapılan dönüm noktaları ve fark işaret testlerine ait p değerleri sırasıyla 0.3404 ve 0.6547 olarak bulunmuştur. Her iki test istatistiğinin sonucuna göre bu veri kümesi için α –seri süreç bir model olarak önerilebilir.

Bu veri kümesine dayalı olarak F nin bilinmediği kabulü altında α, μ ve σ^2 parametrelerinin 5. Bölümde verilen parametrik olmayan tahmin ediciler ile tahmin değerleri hesaplanmıştır. F sırasıyla Weibull, gama ve lognormal dağılım fonksiyonu alınarak, α, μ ve σ^2 parametrelerinin 6. Bölümde verilen parametrik tahmin edicilerinin değerleri bulunmuştur. Bu veri kümesine uygun olan α -seri süreci modelinin belirlenmesi amacıyla parametrik ve parametrik olmayan tahmin değerlerine bağlı olarak kestirimler için MSE^* değerleri hesaplatılmıştır. Tahmin değerleri ile birlikte MSE^* değerleri çizelge 8.19’da verilmiştir.

Çizelge 8.19 Denizaltı verisi için parametrelerin tahminleri

Yöntem	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$MSE^*/10^4$
Weibull	0.1521	422.2692	193549.5457	6.6535
Gama(ML)	0.1484	420.6211	187603.8337	6.6548
Gama (MML)	0.1503	423.1086	189819.8563	6.6536
Lognormal	0.2954	932.1017	5051476.1736	8.6582
NP1	0.2954	546.2605	253736.0679	6.8339
NP2		635.8904	466700.5106	6.7438
NP3		712.3730		6.9129
NP4		642.5241		6.7495
NP5		666.9684		6.7852
NP6		617.0737		6.7369

Çizelge 8.19'daki sonuçlara göre MSE^* değerleri incelendiğinde Weibull ve gama ilk varış zamanı dağılımına sahip α -seri süreci modellerinin bu veri kümesine uygun olduğu söylenebilir. Hem MSE^* değerinin daha küçük olduğu ve hem de tahmin değerlerinin daha kolay hesaplanabildiğinin gözönüne alınmasıyla $\hat{\alpha} = 0.1521$, $\hat{\mu} = 422.2692$ ve $\hat{\sigma}^2 = 193549.5457$ tahmin değerleri ile ilk varış zamanı dağılımı Weibull olan α -seri süreci bu veri kümesi için uygun bir model olarak kullanılabilir.

Bu α -seri süreci modelini geometrik süreç, yenileme süreci, Cox-Lewis ve Weibull modelleriyle MSE^* ve MRE ölçütlerine göre karşılaştırmak için çizelge 8.20 oluşturulmuştur. Bu çizelgede hem MSE^* hem de MRE ölçütüne göre bu veri kümesi için Weibull modelinin daha uygun olduğu söylenebilir.

Çizelge 8.20 Modellerin karşılaştırılması

	α -seri süreç		GP		RP (HPP)		CLM		WM	
$MSE^*/10^4$	6.6535		6.9905		6.8629		6.7627		6.5707	
EGH	0.5090		0.4879		0.6871		0.5842		0.3975	
Tahmin	α	0.1521	a	1.0181	α	0	α_0	-5.8929	θ_0	4.5696×10^{-4}
	μ	422.2692	μ	440.4224	μ	269.1161	α_1	3.7732×10^{-5}	θ_1	1.2179
	σ^2	193549.55	σ^2	202345.84	σ^2	69876.85				

9. SONUÇLAR

Bir sayma sürecinden gelen veri kümesi bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyor ise model olarak bir yenileme süreci kullanılmaktadır. Bu rasgele değişkenler üstel dağılımlı ise model olarak homojen Poisson süreci model olarak uygulanmaktadır. Fakat sayma sürecinden gelen olaylar arası geçen zamanlar monoton olarak büyüme ya da küçülme eğilimde ise model olarak ne homojen Poisson ne de yenileme süreci kullanılamaz. Uygulamada ortaya çıkan bir çok bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenilirlik teorisindeki başka analizlerde sayma sürecinden gelen veri kümesi monoton eğilimli rasgele değişkenlerden oluşur. Bu durum sayma sürecinden gelen veri kümesi içerisinde trend olduğunu ve bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanların dağılımının aynı olmadığını ifade eder. α –seri süreç bu tür durumlarda geometrik süreç ve homojen olmayan Poisson sürecine alternatif olarak sık kullanılan stokastik monoton bir süreçtir. Bu çalışmada α -seri sürece göre ilk olayın gerçekleşme zamanı olan X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F' nin bilinmediği kabul edilerek, sürecin üç önemli parametresi olan α, μ ve σ^2 'nin LSE yöntemine dayalı olarak parametrik olmayan tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen bazı tahmin edicilerin tutarlılık ve asimptotik normallik gibi istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca α -seri sürecin yenileme sürecinden ayırt edilmesine yönelik bir test istatistiği geliştirilmiştir. X_1 rasgele değişkeninin dağılımının Weibull, gama ve lognormal olması durumunda α, μ ve σ^2 'nin ML ve MML tahmin edicileri elde edilmiş ve bu tahmin edicilerin bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir.

Genel olarak simülasyon sonuçlarına göre F dağılım fonksiyonunun bilinmediği durumda hata kareler ortalaması ve yan ölçütüne göre μ için $\alpha < 0$ ya da $\alpha > 1$ iken $\hat{\mu}_1$ 'nın diğerlerine göre tercih edilebileceği gösterilmiştir. $0 < \alpha \leq 0.5$ durumunda $\hat{\mu}_6$ ve $0.5 < \alpha \leq 1$ durumunda $\hat{\mu}_4$ diğerlerine göre daha iyi olduğu gözlemlenmiştir. F dağılımının σ^2 varyansı için yan ve hata kareler ölçütüne göre $\hat{\sigma}_1^2$ 'nin daha iyi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Weibull ve gama dağılım durumunda şekil parametresi büyüdükçe $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_5$ ve $\hat{\sigma}_2^2$ tahmin edicilerinin performanslarının iyileştiği saptanmıştır.

F dağılım fonksiyonunun bilinmesi durumunda μ ve σ^2 için ML ve MML tahmin edicilerinin NP tahmin edicilerinden daha iyi olduğu belirlenmiştir.

Son olarak beş ayrı gerçek veri kümesi göz önüne alınmış ve her bir veri kümesinde trendin olup olmadığı tespit edilmiştir. Trendin varlığı durumunda bu veri kümelerinin bir α -seri sürece uygun olup olmadığına yönelik bir test geliştirilmiştir.

Bu veri kümelerine dayalı olarak F' nin bilinmediği kabulü altında α, μ ve σ^2 parametrelerinin parametrik olmayan tahmin ediciler ile tahmin değerleri hesaplanmıştır. F sırasıyla Weibull, gama ve lognormal dağılım fonksiyonu alınarak, α, μ ve σ^2 parametrelerinin parametrik tahmin edicilerinin değerleri bulunmuştur. Bu veri kümelerine uygun olan α -seri süreci modelinin belirlenmesi amacıyla parametrik ve parametrik olmayan tahmin değerlerine bağlı olarak kestirimler için MSE^* değerleri hesaplatılmıştır. MSE^* değerlerine göre, bu veri kümeleri için Weibull ve gama ilk varış zamanı dağılımına sahip α -seri süreci modellerinin uygun olduğu saptanmıştır. Ayrıca bu veri kümeleri için uygulamada çok sık kullanılan geometrik süreç, Weibull süreci, Cox-Lewis süreci ve yenileme süreci modelleri ile α -seri süreç modeli karşılaştırılmış ve α -seri sürecin bu veri kümelerini daha iyi modellediği gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Ascher, H. and Feingold, H. 1984. Repairable Systems Reliability. Marcel Dekker, pp. 70- 84., New York.
- Arnold, S.F. 1990. Mathematical Statistics. Prentice-Hall, p. 340., New Jersey.
- Aydoğdu, H., Şenoğlu, B. and Kara, M. 2010. Application of MML methodology to an α -series process with Weibull distribution. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3), 449-460.
- Aydoğdu, H. and Kara, M. 2012. Nonparametric estimation in α -series processes. Computational Statistics and Data Analysis, 56, 190-201.
- Barnett, V. D. 1966. Evaluation of the maximum likelihood estimator where the likelihood equation has multiple roots. Biometrika, 53, 151-165.
- Bates, G.E. 1955. Joint Distributions of Time Intervals for the Occurrence of Successive Accidents in a Generalized Polya Scheme. Ann. Math. Stat., 26, 705-720.
- Braun, W. J., Li, W. and Leung, Y. Q. 2005. Properties of the geometric and related processes. Naval Research Logistics, 52, 607-616.
- Braun, W. J., Li, W. and Leung, Y. Q. 2008. Some theoretical properties of the geometric and α -series processes. Communications in Statistics Theory and Methods, 37, 1483-1496.
- Cox, D.R. and Lewis, P. A. W. 1966. The Statistical Analysis of Series of Events. Methuen, pp. 4-16., London.
- DasGupta, A. 2008. Asymptotic Theory of Statistics and Probability. Springer-Verlag, p. 35., New York.
- Gertsbakh, I.B. 1989. Statistical Reliability Theory. Marcel Dekker, 331,p. 201., New York.
- Greenwood, J.A. and Durand, D. 1960. Aids for fitting Gama distribution by maximum likelihood. Technometrics, 2, 55-65.
- Hoeffding, W. 1953. On the distribution of the expected values of the order statistics. Ann. Math. Stats., 24, 93-100.
- Kvaloy, J.T. and Lindqvist, B.H. 2003. A Class of Tests for Renewal Process Versus Monotonic and Nonmonotonic Trend in Repairable Systems Data, in Mathematical and Statistical Methods in Reliability, 401-414.

- Lam, Y., Zhu, L., Chan, S. K. and Liu, Q. 2004. Analysis of data from a series of events by geometric process model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 20(2), 263-282.
- Lee, L. 1980a. Testing adequacy of the Weibull and loglinear rate models for a Poisson process. *Technometrics*, 22, 195-199.
- Lee, L. 1980b. Comparing rates of several independent Weibull processes. *Technometrics*, 22, 427-430.
- Lehmann, E.L. 1999. *Elements of Large Sample Theory*. Springer-Verlang, 613 p., New York.
- Musa, B.D. 1979. *Software Reliability Data*. Data Analysis Center for Software, Rome Air Development Center, Rome, NY.
- Musa, J.D., Iannino, A. and Okumoto, K. 1987. *Software Reliability: Measurement, Prediction, Application*, McGraw-Hill, New York.
- Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H. ve Karabulut, İ. 2006. *Parametre Tahmini ve Hipotez Testi*. Bıçaklar Kitapevi, Ankara.
- Pekalp, M.H. 2013. *Sayma süreçlerine ilişkin trend testleri ve karşılaştırılmaları*. Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Ankara.
- Proschan, F. 1963. Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate. *Technometrics*, 5, 375-383.
- Puthenpura, S. and Sinha, N. K. 1986. Modified maximum likelihood method for the robust estimation of system parameters from very noisy data. *Automatica*, 22, 231-235.
- Roy, A. and Seidman, T.I. 2002. On consistency of estimators in simple linear regression models. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 53, 261-264.
- Serfling, R. J. 1980. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons.
- Tiku, M. L. 1967. Estimating the mean and Standard deviation from censored normal samples. *Biometrika*, 54, 155-165.
- Tiku, M. L. 1968. Estimating the parameters of lognormal distribution from censored samples. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 63, 134-140.
- Tiku, M. L. and Akkaya, A. D. 2004. *Robust estimation and hypothesis testing*. New Age International (P) Limited, Publishers, pp. 33-35., New Delhi.

Vaughan, D.C. and Tiku, M. L. 2000. Estimation and hypothesis testing for a nonnormal bivariate distribution with applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 32, 53-67.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mahmut KARA

Doğum Yeri : Erzurum

Doğum Tarihi : 30.01.1981

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Van Atatürk Lisesi (2000)

Lisans : Karedeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü (2005)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2009)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2006)

SCI Yayınlar

1. Aydoğdu, H., Şenoğlu, B. and Kara, M. 2010. Application of MML methodology to an α -series process with Weibull distribution. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3), 449-460.
2. Aydoğdu, H., Şenoğlu, B. and Kara, M. 2010. Parameter estimation in geometric process with Weibull distribution. Applied Mathematics and Computation, 217(6), 2657-2665.
3. Aydoğdu, H. and Kara, M. 2012. Nonparametric estimation in α -series processes . Computational Statistics and Data Analysis, 56, 190-201.

Uluslararası Kongreler

1. Altındağ, Ö., Aydoğdu, H. and Kara, M. 2011. Monte Carlo estimation of the mean value function in geometric process. The 24th international conference of Jangjeon Mathematical Society, Konya, Turkey.
2. Türkşen, Ö., Kara, M. and Aydoğdu, H. 2013. Parameter estimation in geometric process with the inverse Gaussian distribution. 2th international eurasian conference on mathematical sciences and applications, Sarajevo, BOSNA.

Ulusal Kongreler

1. Kara, M. and Aydoğdu, H. 2008. Geometrik süreçlerde bazı parametrelerin parametrik olmayan tahmini. 6. istatistik sempozyumu, Samsun, Türkiye.