

149784

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

149784

İKİ PARAMETRELİ HAREKETLERİN KİNEMATİK UYGULAMALARI

Murat Kemal KARACAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2004

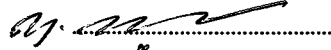
Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. Yusuf YAYLI danışmanlığında, Murat Kemal KARACAN tarafından hazırlanan bu çalışma 12 / 04 / 2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

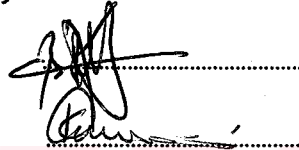
Başkan : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU



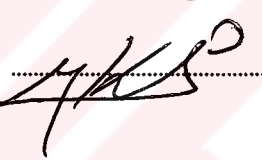
Prof. Dr. Yusuf YAYLI



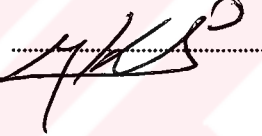
Prof. Dr. Baki KARLIĞA



Prof. Dr. Kadri ARSLAN



Doç. Dr. Mustafa Kemal SAĞEL



Yukarıdaki sonucu onaylarım.



Prof. Dr. Metin OLGUN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ PARAMETRELİ HAREKETLERİN KİNEMATİK UYGULAMALARI

Murat Kemal KARACAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu doktora tezi altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölüm de, temel kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde, Öklid düzleminde genel ve özel iki parametrelî hareketler tanımlandı. Bu hareketlerden elde edilen bir parametrelî hareketlerin $\forall(\lambda, \mu)$ konumundaki sürüklenme hızı, pol doğrusu, hodografi ve ivme polü bulundu. Bazı teorem ve sonuçlar elde edildi.

Dördüncü bölümde, Lorentz düzleminde genel ve özel iki parametrelî hareketler tanımlandı. Bu hareketlerden elde edilen bir parametrelî hareketlerin $\forall(\lambda, \mu)$ konumundaki sürüklenme hızı, pol doğrusu, hodografi ve ivme polü bulundu. Üçüncü bölümde elde edilen teorem ve sonuçların Lorentz düzlemindeki karşılıkları incelendi.

Beşinci bölümde, E_1^3 Minkowski uzayında bir eğri boyunca iki parametrelî hareket tanımlandı ve bazı teoremler elde edildi. E_1^3 uzayında bazı yörünge yüzeylerinin karakterizasyonları bulundu.

Son bölümde, genel olarak iki parametrelî hareketler, dönme matrisinin rankı yardımıyla verildi. Ani vida eksenlerinin geometrik yerinin bir regle yüzey olduğu gösterildi.

2004, 108 sayfa

ANAHTAR KELİMELELER:Bir parametrelî Hareket, İki parametrelî Hareket, Düzlemsel Hareket , Lorentz uzayı, Bir Eğri Boyunca Hareket.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

THE KINEMATIC APPLICATIONS OF THE TWO PARAMETERS MOTIONS

Murat Kemal KARACAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters. The first chapter has been devoted to the introduction.

Second chapter is devoted to fundamental notions.

In the third chapter, general and special two parameter motions in Euclidean plane are defined. The Sliding velocity , pole line, hodograph and acceleration pole at each (λ, μ) position of one parameter motion which are obtained from two parameter motion calculated. Some theorems and results are obtained.

In the forth chapter, general and special two parameter motions in Lorentzian plane are defined. Sliding velocity , pole line, hodograph and acceleration pole at each (λ, μ) position of one parameter motion which are obtained from two parameter motion calculated. Correspondence in Lorentzian plane of theorems and results which are obtained in the third chapter are investigated.

In the fifth chapter, two parameter motion along a curve in Minkowski space E_1^3 is defined and some theorems are obtained. Characterizations of some orbit surfaces in E_1^3 are found.

In the last chapter, general two parameter motions are given with the aid of rank of the rotation matrix. It is shown that geometric locus of instantaneous screw axis is a ruled surface.

2004, 108 pages

Key Words: One Parameter Motion, Two Parameter Motion, Planar Motion, Lorentz Space, Motion Along a Curve.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, Tez İzleme Komitemde bulunan, yakın ilgileriyle çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteklerini ömür boyu daima hissettiğim rahmetli babam Bekir KARACAN , rahmetli annem Niğmet KARACAN, sevgili eşim Hilal KARACAN' ve tüm kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

Murat Kemal KARACAN

Ankara, Nisan 2004

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Bir Parametrelî Düzlem Hareketi.....	2
2.1.1. Hızlar ve hızların birleşimi.....	2
2.2. İki Boyutlu Lorentz Uzayı	4
2.2.1. Hiperbolik radyan	8
2.2.2. Açık kavramı	9
2.2.3. L^2 de dönme.....	11
2.3. 3-Boyutlu IR_1^3 Minkowski Uzayında Vektörel Çarpım	14
3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HAREKETLER.....	17
3.1. Genel İki Parametrelî Düzlemsel Hareket	17
3.1.1. Hareketin ivme polü	25
3.2. Özel İki Parametrelî Düzlemsel Hareket	26
3.2.1. Hareketin ivme polü	38
4. LORENTZ DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HAREKETLER	40
4.1. Genel İki Parametrelî Düzlemsel Hareket	40
4.1.1. Hareketin ivme polü	47
4.2. Özel İki Parametrelî Düzlemsel Hareket	49
4.2.1. Hareketin ivme polü	61

5. E_1^3 DE BİR EĞRİ BOYUNCA İKİ PARAMETRELİ UZAY HAREKETİ	63
5.1. Yörünge Yüzeylerinin Parametrizasyonları.....	70
5.1.1. Silindir yüzeyi.....	70
5.1.2. Tor yüzeyi.....	73
5.1.3. Hiperboloid yüzeyi	76
5.1.4. Catenoid yüzeyi.....	78
5.1.5. Hortum yüzeyi.....	80
5.1.5. 1. Hortum yüzeyi üzerinde çizili helis eğrisi.....	80
5.1.5. 2. $\beta(s)$ eğrisi ile belirli hortum yüzeyi.....	84
5.2. $\vec{c} = \vec{T}$, $p = \mu\vec{T} + \lambda\vec{N} + \kappa\vec{B}$ durumu	88
5.3. $\vec{c} = \vec{N}$, $p = \mu\vec{T} + \lambda\vec{N} + \kappa\vec{B}$ durumu.....	92
5.4. $\vec{c} = \vec{B}$, $p = \mu\vec{T} + \lambda\vec{N} + \kappa\vec{B}$ durumu.....	95
6. İKİ PARAMETRELİ HAREKETLERİN GEOMETRİSİ	98
6.1. $n = 3$ özel durumu	101
KAYNAKLAR.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	108

SİMGELER DİZİNİ

C	Antisimetrik Matris
A	Ortogonal Matris
ε	İşaret Matrisi
$so(n)$	Antisimetrik Matrisler Uzaı
$SO(n)$	Pozitif Ortogonal Matrisler Uzaı
$O(n)$	Ortogonal Matrislerin Cümlesi
$\langle \rangle_L$	Lorentz İç Çarpımı
$\ \ _L$	Lorentz Normu
E_1^n	n-Boyutlu Lorentz Uzaı
E_1^3	İndeksi bir olan 3-Boyutlu Semi Öklidiyen Uzaı
E^n	n-Boyutlu Öklid Uzaı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. L^2 uzayı.....	8
Şekil 2.2. L^2 de çember parçasının alanı.....	8
Şekil 2.3. öklid daire diliminin alanı.....	8
Şekil 2.4. L^2 de açılar 1.....	9
Şekil 2.5. L^2 de açılar 2.....	10
Şekil 2.6. L^2 de açılar 3.....	10
Şekil 2.7. L^2 de eksenlerin dönmesi.....	11
Şekil 2.8. L^2 de dönmenin geometrik ifadesi.....	11
Şekil 5.1. uzaysı silindir.....	71
Şekil 5.2. zamansı silindir.....	72
Şekil 5.3. uzaysı tor yüzeyi 1.....	73
Şekil 5.4. uzaysı tor yüzeyi 2.....	74
Şekil 5.5. zamansı tor yüzeyi.....	75
Şekil 5.6. uzaysı hiperboloid yüzeyi.....	77
Şekil 5.7. zamansı hiperboloid yüzeyi.....	78
Şekil 5.8. uzaysı catenoid yüzeyi.....	79
Şekil 5.9. zamansı catenoid yüzeyi.....	80
Şekil 5.10. uzaysı hortum yüzeyi 1.....	81
Şekil 5.11. uzaysı hortum yüzeyi 2.....	82
Şekil 5.12. zamansı hortum yüzeyi.....	83
Şekil 5.13. $\beta(s)=(chs, shs, s)$ eğrisi ile elde edilen hortum yüzeyi.....	85
Şekil 5.14. $\beta(s)=(-shs, chs, s)$ eğrisi ile elde edilen hortum yüzeyi.....	86
Şekil 5.15. $\beta(s)=(s, coss, sins)$ eğrisi ile elde edilen hortum yüzeyi.....	88

1.GİRİŞ

İki parametrelili düzlem hareketleri H.R. MÜLLER tarafından geniş bir şekilde incelenmiştir. Düzlemde bir parametrelili hareketler için verilen teoremlerin karşılıkları yine düzlemdeki iki parametrelili hareketler için de verilmiştir. Düzlemde bir parametrelili hareketleri temsil eden pol noktaları yerine iki parametrelili hareketlerden elde edilen bir parametrelili hareketlerde pol eksenlerinin mevcut olduğu gösterilmiştir. 3-boyutlu uzayda Adolf KARGER ve Oene BOTTEMA , iki parametrelili hareketleri incelemiştir. Biz bu çalışmada , yukarıda sözü edilen yazarların yaptıklarından esinlenerek önce, Lorentz düzleminde iki parametrelili hareketleri tanımlayıp, daha önce düzlemde elde edilen sonuçların, Lorentz düzlemindeki karşılıklarını arayacağız. Daha sonra, Lorentz 3-uzayında iki parametrelili uzay hareketlerini tanımlayıp,böyle hareketleri inceleyeceğiz. İki parametrelili hareketlerin Fizik'te, Mühendislik'te, Diferensiyel Geometri'de, Robot Kinematığında önemli uygulama sahası vardır. Bir parametrelili hareketler oldukça geniş bir şekilde incelenmiş ve uygulanmıştır. Fakat iki ve daha büyük parametrelili hareketler hakkında fazla bir şey söylenememektedir. Bu tezin, bu konudaki çalışmalara önemli bir katkı getireceğine inanıyoruz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bir Parametrelili Düzlem Hareketi

Tanım 2.1.1. Bir genel düzlem hareketi

$$\begin{aligned}y_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta + a \\y_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta + b\end{aligned}\quad (2.1)$$

ile verilir. Eğer θ , a ve b ; t zaman parametresi olmak üzere, t parametresinin bir fonksiyonu olarak verilirlerse bu harekete 1-parametrelili hareket denir.

Tanım 2.1.2. Bir parametrelili düzlem hareketi

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile verilir. $A \in O(2)$ olmak üzere, matris formu

$$Y = AX + C \quad (2.2)$$

şeklinde de yazılabilir.

Burada, Y ve X sırası ile sabit ve hareketli koordinat sistemine göre aynı bir B noktasının yer vektörleri, C öteleme vektörüdür.

2.1.1. Hızlar ve hızların birleşimi

Bir parametrelili hareketler için hız kavramını açıklayacağız. Hareketli düzlem, sabit düzleme göre hareket ederken, hareketli düzlemdeki sabit B noktası sabit düzlemde t zamanı ile bir eğri çizsin. Böylece (2.2) denkleminin t ye göre türevi alınır

$$\dot{Y} = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C} \quad (2.3)$$

elde edilir.

Tanım 2.1.1.1. (Rölatif Hız). B noktasının hareketli düzleme göre hız vektörüne, yani B noktası hareketli düzlemde yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hıza B noktasının izafi (rölatif) hızı denir ve $\vec{V}_r$ ile gösterilir. (2.3)' denkleminde

$$\vec{V}_r = A\dot{X}$$

dır.

Tanım 2.1.1.2. (Mutlak Hız). B noktasının sabit düzleme göre hızına mutlak hızı denir ve $\overrightarrow{V}_a$ ile gösterilir. (2.3)' den

$$\overrightarrow{V}_a = \dot{Y}$$

dır.

Tanım 2.1.1.3. (Sürüklenme hızı). (2.3) denkleminde

$$\overrightarrow{V}_f = \dot{A}X + \dot{C}$$

vektörüne B noktasının sürüklenme hızı denir. Yani bir B noktası hareketli düzlemin bir noktası olarak alınırsa, bu noktanın hızı sürüklenme hızı olur.

Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.1.1.1. Bir parametrelili bir harekette, bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$\overrightarrow{V}_a = \overrightarrow{V}_f + \overrightarrow{V}_r$$

dir.

2.1.2 Dönme polü ve pol yörüngeleri

Tanım 2.1.2.1. Bir parametrelili harekette $\forall t$ anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım. Bu noktalar $\forall t$ anında yalnız hareketli düzlemde değil aynı zamanda sabit düzlemde de sabit olmak zorundadır. Bu noktalara hareketin $\forall t$ anındaki polü, dönme polü veya ani dönme merkezi denir.

O halde $\overrightarrow{V}_f = 0$ denkleminin çözümü bize hareketli düzlemdeki $P = (x_p, y_p)$ pol noktalarını verir. Bu noktaların geometrik yeri hareketli pol eğrisidir. Bunun sabit düzlemdeki karşılığı sabit $\overline{P} = (\overline{x_p}, \overline{y_p})$ pol noktasıdır ve geometrik yeri sabit pol eğrisidir.

2.2 İki Boyutlu Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1. L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle_L = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Lorentz iç çarpımı ile donatılmış IR^2 dir (Birman-Nomizu,1984-A).

Tanım 2.2.2. $\bar{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ olsun. Eğer

i) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L < 0$ ise $\bar{x}$ 'e zamansı vektör

ii) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L > 0$ ise $\bar{x}$ 'e uzaysı vektör

iii) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L = 0$ ise $\bar{x}$ 'e boşluksu vektör

adı verilecektir (O'Neill,1983).

Tanım 2.2.3. $\bar{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ için $\bar{x}$ 'in normu

$$\|\bar{x}\|_L = \sqrt{|\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L|}$$

olarak tanımlanır (Birman-Nomizu,1984-A).

Bu norm tanımına göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.1 $\bar{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ olmak üzere

i) $\|\bar{x}\|_L > 0$

ii) $\|\bar{x}\|_L = 0 \Leftrightarrow \bar{x}$ boşluksu bir vektördür.

iii) $\bar{x}$ zamansı bir vektör ise $\|\bar{x}\|_L^2 = -\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L$

iv) $\bar{x}$ uzaysı bir vektör ise $\|\bar{x}\|_L^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L$

(Birman-Nomizu,1984-A).

Tanım 2.2.4. L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{x}, \vec{y} \in L^2$ olsun.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = 0$$

ise $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Birman-Nomizu,1984-A).

Örnek 2.2.1. $\vec{0}$ vektörünün L^2 deki tüm vektörlere dik olduğu açıktır.

Örnek 2.2.2. $\vec{x} = (1,1)$ ve $\vec{y} = (-1,1)$ vektörleri Öklid uzayında dik olmalarına rağmen ,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

olduğundan Lorentz anlamında dik değildir.

Örnek 2.2.3. $\vec{x} = (1,2)$ ve $\vec{y} = (2,1)$ vektörleri birbirine diktirler. Çünkü,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = 1.2 - 2.1 = 0$$

dır. Genel olarak $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ve $\vec{y} = (x_2, x_1) \in L^2$ vektörleri birbirine diktir.

Teorem 2.2.2. Her ikisi de zamansı veya uzaysı olan iki vektör birbirine dik olamaz.

İspat. $\vec{x}, \vec{y} \in L^2$ iki zamansı vektör olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2)$ için

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_L = y_1^2 - y_2^2 < 0 \quad \text{olmak üzere}$$

$$x_1^2 < x_2^2$$

$$y_1^2 < y_2^2$$

elde edilir. Taraf tarafa çarpılırsa

$$x_1^2 y_1^2 < x_2^2 y_2^2$$

$$|x_1 y_1| < |x_2 y_2|$$

$$x_1 y_1 \neq x_2 y_2$$

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 \neq 0$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L \neq 0$$

elde edilir. Yani $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri dik olamaz. Benzer ispat uzaysı iki vektör için de yapılabilir.

Sonuç 2.2.1. İki vektörün Lorentz anlamında dik olması için birinin zamansı diğerinin uzaysı vektör olması gerekir.

Tanım 2.2.5. $\vec{x} \in L^2$ zamansı bir vektör olsun. $\vec{e} = (0,1)$ olmak üzere,

- i) $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle_L < 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne bir zamansı gelecek(future-pointing) vektör denir.
- ii) $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle_L > 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne bir zamansı geçmiş(past pointing) vektör denir. (O'Neill,1983).

Bu tanıma göre $\vec{x}$ vektörü zamansı gelecek ise

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad \text{ve} \quad x_2 > 0$$

dır. Bu iki özelliği içinde toplayan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.2. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ vektörünün zamansı gelecek olması için gerek ve yeter şart

$$|x_1| < x_2$$

olmasıdır.

İspat.

$\Rightarrow$: $\vec{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ zamansı olduğundan

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = x_1^2 - x_2^2 < 0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} x_1^2 &< x_2^2 \\ |x_1| &< |x_2| \end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\vec{x} = (x_1, x_2)$ gelecek olduğundan

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2), (0,1) \rangle_L &< 0 \\ -x_2 &< 0 \\ x_2 &> 0 \end{aligned}$$

olur. Bu değeri (2.4) de yerine yazarsak

$$|x_1| < x_2$$

elde edilir.

$\Leftarrow: |x_1| < x_2$ olsun. Bu $0 < x_2$ olduğunu ifade eder. O halde

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle < 0$$

demektir. Yani $\vec{x}$ bir gelecek vektördür. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |x_1| < x_2 &\Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

$\vec{x}$ zamansı bir vektördür.

Örnek 2.2.4. $\vec{x} = (1, 2)$ vektörü için,

$$|1| < 2$$

olduğundan $\vec{x}$ bir zamansı gelecek vektördür.

Yukarıdaki açıklamalara göre $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ için vektörlerin cinsini

Şekil 2.1 deki gibi gösterebiliriz.

Teorem 2.2.3. L^2 de birim zamansı vektör $\vec{\ell}$ olsun.

$$\langle \vec{\ell}, \vec{\ell}' \rangle_L = 0$$

olacak şekilde bir tek $\vec{\ell}'$ birim vektörü vardır (Birman-Nomizu, 1984-B).

İspat. Kabul edelim ki $\vec{\ell}'$ tek olmasın. Yani

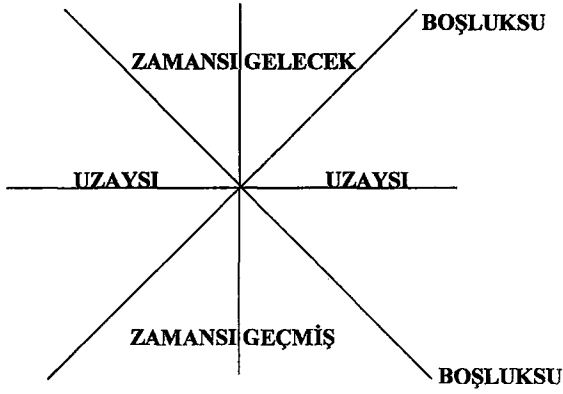
$$\langle \vec{\ell}, \vec{\ell}' \rangle_L = 0 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{\ell}, \vec{\ell}'' \rangle_L = 0$$

olacak şekilde $\vec{\ell}' = (\ell'_1, \ell'_2)$ ve $\vec{\ell}'' = (\ell''_1, \ell''_2)$ iki vektör olsun. $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \vec{\ell}, \vec{\ell}' \rangle_L = \ell_1 \ell'_1 - \ell_2 \ell'_2 = 0 \\ \langle \vec{\ell}, \vec{\ell}'' \rangle_L = \ell_1 \ell''_1 - \ell_2 \ell''_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell'_1}{\ell'_2} \\ \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell''_1}{\ell''_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\ell'_1}{\ell'_2} = \frac{\ell''_1}{\ell''_2} \Rightarrow \ell'_2 = \lambda \ell''_2, \ell'_1 = \lambda \ell''_1$$

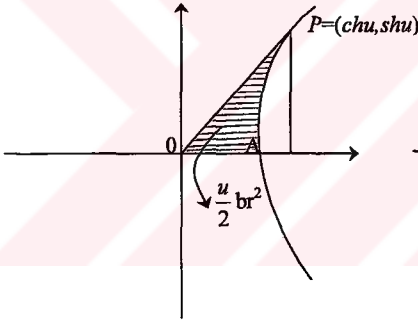
elde edilir ki, bu ise $\vec{\ell}'$ ve $\vec{\ell}''$ vektörlerinin lineer bağımlı olması demektir. Yani $\vec{\ell}'$ tekdir.

Böylece L^2 uzayını geren birim vektörlerden oluşmuş bir $(\vec{\ell}, \vec{\ell}')$ bazı bulunmuş olur.

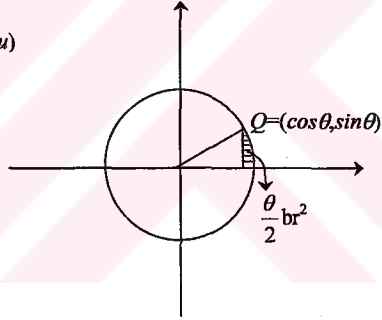


Şekil.2.1. L^2 uzayı

2.2.1. Hiperbolik radyan



Şekil.2.2. L^2 de çember parçasının alanı



Şekil.2.3. Öklid daire diliminin alanı

L^2 de açı kavramına geçmeden önce hiperbolik radyan kavramından bahsetmek yararlı olacaktır. Sıkça kullanılan "shu", "chu" ifadelerindeki "u" , hiperbolik radyan cinsinden açı birimidir. Şekil 2.2 deki birim hiperbol üzerindeki bir P noktasının koordinatları olarak verilen "shu", "chu" sayıları, birim çember (Şekil 2.3) üzerindeki bir $Q = (\cos \theta, \sin \theta)$ noktasının koordinatlarına oldukça benzemektedir. Birim çember üzerinde Q noktasının koordinatları için kullanılan θ radyanlık açı Şekil 2.3' deki

taralı alanın “2 katından” ibaret bir büyüklüktür. Aynı şekilde hiperbol üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan “u” hiperbolik radyanlık açı ise yine Şekil 2.2.’deki taralı bölgenin alanının “2 katından” ibaret olan bir büyüklüktür (Silverman ,1985).

2.2.2 Açı kavramı

Şimdiye kadar yapılan açıklamalar yardımıyla açı kavramını tanımlayabiliriz.

Tanım 2.2.2.1. (Zamansı gelecek (geçmiş) vektörler arasındaki açı).

$\vec{x}, \vec{y} \in L^2$ zamansı birim ve gelecek (geçmiş) iki vektör olsun. $\vec{x}$ den $\vec{y}$ ye açının Lorentz anlamındaki ölçüsü $u \in IR$ ise,

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) = u$$

olarak gösterilecek ve bundan $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ için $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = u$ olması,

$$\begin{bmatrix} chu & shu \\ shu & chu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

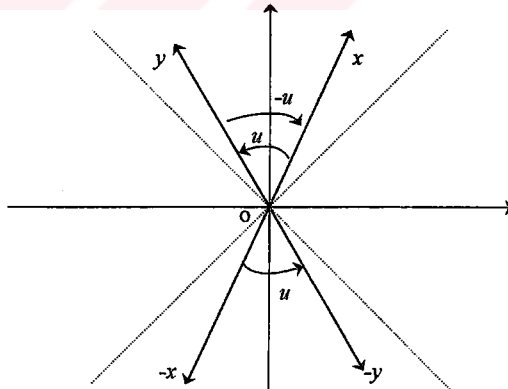
eşitliğinin sağlanması olarak anlaşılabacaktır (Birman-Nomizu,1984 A-B). $\vec{x}, \vec{y}$ vektörleri arasındaki açı, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ nin koordinatlarının belirlenmesinde kullanılan bazın seçilişinden bağımsızdır. Bu tanıma göre,

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) = u$$

ise

$$\angle(\vec{y}, \vec{x}) = -\angle(\vec{x}, \vec{y}) \text{ ve } \angle(-\vec{x}, -\vec{y}) = \angle(\vec{x}, \vec{y})$$

dir.



Şekil 2.4. L^2 de açılar 1

Tanım 2.2.2.2. (Zamansı, biri gelecek diğeri geçmiş olan iki vektör arasındaki açı).

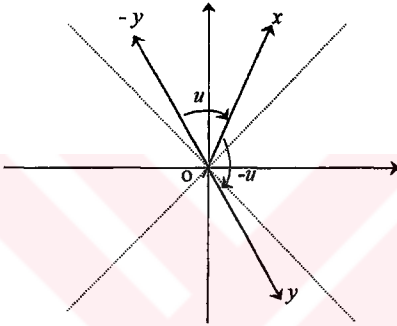
$\bar{x}$ zamansı gelecek birim vektör, $\bar{y}$ zamansı geçmiş birim vektör olsun. Bu durumda $\bar{y}$ gelecek birim zamansı vektördür. Tanım 2.2.2.1 e göre

$$u = \angle(-\bar{y}, \bar{x})$$

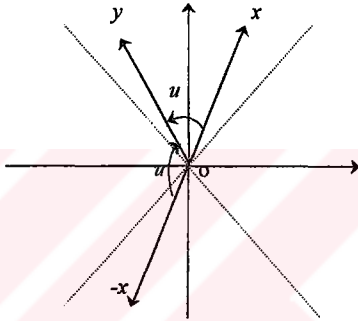
ise $\bar{x}$ den $\bar{y}$ ye olan açı

$$\angle(\bar{x}, \bar{y}) = -u$$

olarak tanımlanır (Şekil 2.5)(Birman-Nomizu 1984-B).



Şekil.2.5. L^2 de açılar 2



Şekil.2.6. L^2 de açılar 3

Teorem 2.2.2.1. $\bar{x}$ den $\bar{y}$ ye açı "u" ve $\bar{x}, \bar{y}$ zamansı gelecek birim iki vektör ise

$$chu = -\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

dır (Birman Nomizu,1984-A).

İspat. $\bar{x}$ den $\bar{y}$ ye açı "u" olduğuna göre,

$$\begin{bmatrix} chu & shu \\ shu & chu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = x_1 chu + x_2 shu$$

$$y_2 = x_1 shu + x_2 chu$$

dır.

bölgede ise, merkeze ve boşluksu vektörlere yaklaşan noktalar bu dönmenin esasını oluşturmaktadır.

Teorem 2.2.3.1. $A(u)$ matrisine karşılık gelen $A: L^2 \rightarrow L^2$ lineer dönüşümü, zamansı vektörleri zamansı vektörlere, uzaysı vektörleri uzaysı vektörlere, boşluksu vektörleri boşluksu vektörlere dönüştürür. Yani A yönlendirmeyi korur (Birman Nomizu, 1984-A).

İspat. $\bar{x} \in L^2$ ve $\bar{x}$ zamansı bir vektör olsun. $\bar{x} = (x_1, x_2)$ olmak üzere,

$$\overline{A(u)x} = \begin{bmatrix} x_1 chu + x_2 shu \\ x_1 shu + x_2 chu \end{bmatrix}$$

dır ve

$$\begin{aligned} \langle \overline{A(u)x}, \overline{A(u)x} \rangle_L &= (x_1 chu + x_2 shu)^2 - (x_1 shu + x_2 chu)^2 \\ &= x_1^2 (ch^2 u - sh^2 u) - x_2^2 (ch^2 u - sh^2 u) \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle_L \end{aligned}$$

$\bar{x}$ zamansı olduğundan,

$$\langle \overline{A(u)x}, \overline{A(u)x} \rangle_L < 0$$

elde edilir. Benzer ispat uzaysı ve boşluksu vektörler için de yapılabilir.

Teorem 2.2.3.2. $A(u)$ matrisine karşılık gelen $A: L^2 \rightarrow L^2$ lineer dönüşümü, zaman yönlendirmesini korur (Birman Nomizu 1984-A).

İspat. $\bar{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ ve $\bar{x}$ gelecek olsun. $\bar{e} = (0,1)$ olmak üzere,

$$\langle \overline{A(u)x}, \overline{A(u)e} \rangle_L < 0$$

olur. Benzer şekilde, geçmiş $\bar{x}$ vektörü için yine

$$\langle \overline{A(u)x}, \overline{A(u)e} \rangle_L > 0$$

olur ki, $A(u)$ zaman yönlendirmesini korur.

Teorem 2.2.3.3. $A(u)$ matrisine karşılık gelen $A : L^2 \rightarrow L^2$ lineer dönüşümü, iki nokta arasındaki uzaklığı korur.

İspat. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in L^2$ de iki nokta olmak üzere,

$$\overline{xy} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$$

olur.

$$d(x, y) = \|\overline{xy}\|_L = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$A(u)x = (x_1 chu + x_2 shu, x_1 shu + x_2 chu)$$

$$A(u)y = (y_1 chu + y_2 shu, y_1 shu + y_2 chu)$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} d(A(u)x, A(u)y) &= \|\overline{A(u)x A(u)y}\|_L \\ &= \|(x_1 - y_1)chu + (x_2 - y_2)shu, (x_1 - y_1)shu + (x_2 - y_2)chu\|_L \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 ch^2 u + (x_2 - y_2)^2 sh^2 u + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)chushu} \\ &= \sqrt{-(x_1 - y_1)^2 \sinh^2 u - (x_2 - y_2)^2 \cosh^2 u - 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)chushu} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 (ch^2 u - sh^2 u) - (x_2 - y_2)^2 (ch^2 u - sh^2 u)} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

2.3. 3- Boyutlu IR_1^3 Minkowski Uzayında Vektörel Çarpım

Bu kesimde, IR_1^3 uzayındaki eğriler ve yüzeyler geometrisinde önemli kavram olan, Lorentz anlamında vektörel çarpım ve bununla ilgili temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.3.1. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ gibi iki vektörün Lorentz anlamında standart iç çarpımı

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : IR_1^3 \times IR_1^3 \rightarrow IR$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\vec{x} = \vec{y}$ ise,

$$\|\vec{x}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L|}$$

eşitliğine $\vec{x}$ vektörünün normu denir (O' Neil, 1983)

Tanım 2.3.2. $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3), \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ olmak üzere $\vec{c}$ ve $\vec{p}$ nin vektörel çarpımı

$$\vec{c} \wedge_L \vec{p} = \det \begin{bmatrix} - & + & + \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$= (p_2 c_3 - c_2 p_3, p_1 c_3 - c_1 p_3, c_1 p_2 - c_2 p_1)$$

biçiminde tanımlanır. $\vec{c}$ ye karşılık gelen matris C ise $C.p = \vec{c} \wedge_L \vec{p}$ dir.

Teorem 2.3.1. IR_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında dört vektör $\vec{u} = (a, b, c), \vec{v} = (x, y, z), \vec{w} = (p, q, r)$ ve $\vec{t} = (k, l, m)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$i) \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad (2.5)$$

$$ii) \vec{u} \wedge_L (\vec{v} \wedge_L \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \vec{v} \quad (2.6)$$

$$iii) \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \rangle_L = 0, \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{v} \rangle_L = 0 \quad (2.7)$$

$$iv) \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \wedge_L \vec{t} \rangle_L = -\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle_L + \langle \vec{u}, \vec{t} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L \quad (2.8)$$

$$v) \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \wedge_L \vec{v} \rangle_L = -\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_L \quad (2.9)$$

İspat.

$$i) \vec{u} \wedge_L \vec{v} = (cy - bz, cx - az, ay - bx) \quad (2.10)$$

$$\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = -pcy + pbz + qcx - qaz + ray - rbx$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -pcy + pbz + qcx - qaz + ray - rbx$$

(2.10) ve (2.11) eşitliklerinden

$$\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

elde edilir.

$$ii) \vec{u} \wedge_L \vec{w} = (qz - yr, pz - xr, xq - py)$$

$$\vec{u} \wedge_L (\vec{v} \wedge_L \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} - & + & + \\ a & b & c \\ qz - yr & pz - xr & xq - py \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge_L (\vec{v} \wedge_L \vec{w}) = (cpz - cxr - bxq + byp, czq - cyr - axq + apy, apz - axr - bqz + byr)$$

$$\vec{u} \wedge_L (\vec{v} \wedge_L \vec{w}) = (-ax + by + cz)(p, q, r) - (-ap + bq + cz)(-x, -y, -z)$$

$$\vec{u} \wedge_L (\vec{v} \wedge_L \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \vec{v}$$

iii) (2.5) denkleminde

$$\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \rangle_L = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{v} \rangle_L = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

iv)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \wedge_L \vec{t} \rangle_L &= \langle \vec{k}, \vec{w} \wedge_L \vec{t} \rangle_L \\ &= \langle \vec{k} \wedge_L \vec{w}, \vec{t} \rangle_L \\ &= \langle (\vec{u} \wedge_L \vec{v}) \wedge_L \vec{w}, \vec{t} \rangle_L \\ &= \langle -\vec{w} \wedge_L (\vec{u} \wedge_L \vec{v}), \vec{t} \rangle_L \\ &= \langle -\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle_L \vec{v} + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_L \vec{u}, \vec{t} \rangle_L \\ &= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L \langle \vec{u}, \vec{t} \rangle_L - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle_L \end{aligned}$$

elde edilir.

v) (2.8) eşitliği her $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t} \in \mathbb{R}_1^3$ için geçerlidir. Özel olarak

$$\vec{u} = \vec{w} \text{ ve } \vec{v} = \vec{t}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \wedge_L \vec{v} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_L \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L - \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L \\ &= -\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L + (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.3. $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine semi-ortogonal matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve işaret matrisimiz } \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. O halde

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \varepsilon A^T \varepsilon \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ -a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tanım 2.3.4. $C^T = -\varepsilon C \varepsilon$ eşitliğini sağlayan C matrisine Lorentz anlamında anti-simetrik matris denir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi $C^T = -\varepsilon C \varepsilon$ şartını sağladığından Lorentz anlamında anti-simetrik matristir.

Ayrıca $C \leftrightarrow \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ise $C.c = [0]$ dır.

3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HAREKETLER

3.1. Genel İki Parametrelili Düzlemsel Hareket

Bu bölümde genel iki-parametrelili düzlem hareketini inceleyeceğiz.

Tanım 3.1.1. Genel bir iki-parametrelili düzlem hareketi

$$\begin{aligned} y_1 &= x \cos \theta(\lambda, \mu) - y \sin \theta(\lambda, \mu) + a(\lambda, \mu) \\ y_2 &= x \sin \theta(\lambda, \mu) + y \cos \theta(\lambda, \mu) + b(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ile verilir ve M_H ile gösterilir (Stanisic, 1986). Burada (y_1, y_2) sabit Σ düzleminin ve (x, y) de hareketli E düzleminin koordinat fonksiyonlarıdır. Eğer λ ve μ , t zaman parametresi olmak üzere, t nin fonksiyonları olarak alınırsa, bir-parametrelili M_I hareketi elde edilir. Bu harekete M_H hareketinden elde edilen M_I hareketi denir. (3.1) denklemini

$$Y = AX + C, Y = [y_1 \ y_2]^T, X = [x \ y]^T, C = [a \ b]^T, A = \begin{bmatrix} \cos \theta(\lambda, \mu) & -\sin \theta(\lambda, \mu) \\ \sin \theta(\lambda, \mu) & \cos \theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Biz burada genelliği bozmayacak şekilde $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda iki düzlemin çakışması için $\theta(0, 0) = a(0, 0) = b(0, 0) = 0$ alabiliriz.

Teorem 3.1.1. M_H den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\forall (\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. A ve C matrislerinin t ye göre türevleri alınırsa, $\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin çözümü, hareketli düzlemin pol noktalarını verir. Hareketli düzlemin pol noktaları

$$P(x_p, y_p) = X = -(\dot{A})^{-1} \cdot \dot{C}$$

dır.

$$\begin{aligned}
x_p &= \frac{\sin \theta(\lambda, \mu) \left(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu} \right) - \cos \theta(\lambda, \mu) \left(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right)} \\
y_p &= \frac{\cos \theta(\lambda, \mu) \left(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu} \right) + \sin \theta(\lambda, \mu) \left(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right)}
\end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. y_p den $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ çekilip x_p de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\cos \theta(\lambda, \mu) a_\mu \theta_\lambda + \sin \theta(\lambda, \mu) b_\mu \theta_\lambda - \cos \theta(\lambda, \mu) a_\lambda \theta_\mu - \sin \theta(\lambda, \mu) b_\lambda \theta_\mu \right] x_p \\
& + \left[\sin \theta(\lambda, \mu) a_\lambda \theta_\mu - \cos \theta(\lambda, \mu) b_\lambda \theta_\mu - \sin \theta(\lambda, \mu) a_\mu \theta_\lambda + \cos \theta(\lambda, \mu) b_\mu \theta_\lambda \right] y_p \\
& = \left[(\cos \theta(\lambda, \mu))^2 a_\lambda b_\mu - (\sin \theta(\lambda, \mu))^2 b_\lambda a_\mu - (\cos \theta(\lambda, \mu))^2 a_\mu b_\lambda + (\sin \theta(\lambda, \mu))^2 a_\lambda b_\mu \right]
\end{aligned} \quad (3.3)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.1.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) x_p + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) y_p = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda \quad (3.4)$$

doğrusu üzerinde bulunur.

Teorem 3.1.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. (3.2) deki $P(x_p, y_p)$ noktası $Y = AX + C$ denklemine X yerine yazılırsa, sabit düzlemin $\overline{P} = (\overline{x_p}, \overline{y_p})$ polü bulunur.

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta(\lambda, \mu) & -\sin \theta(\lambda, \mu) \\ \sin \theta(\lambda, \mu) & \cos \theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(\lambda, \mu) \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

denkleminde

$$\begin{aligned}\overline{x_p} &= -\frac{b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} + a(\lambda, \mu) \\ \overline{y_p} &= \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} + b(\lambda, \mu)\end{aligned}\quad (3.5)$$

pol noktaları elde edilir. $\overline{y_p}$ değerinden $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ çekilip $\overline{x_p}$ de yerine yazılırsa

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) \overline{x_p} + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) \overline{y_p} = b(\lambda, \mu)(-b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) + a(\lambda, \mu)(a_\mu \theta_\lambda + a_\lambda \theta_\mu) + a_\lambda b_\mu - b_\lambda a_\mu \quad (3.6)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.1.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) \overline{x_p} + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) \overline{y_p} = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda$$

doğrusu üzerinde bulunur.

Sonuç 3.1.3. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğruları $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda çakışıktır.

M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin pol doğrusunu hareketli düzlemdeki y eksenini olarak seçelim. Bunun için $\lambda = \mu = 0$ için $x_p = 0$ olduğundan

$$x_p = -\frac{b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}}$$

den

$$b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} = 0$$

elde edilir. λ ve μ bağımsız hareket parametreleri olduklarından sıfırdan farklıdırlar. O halde $b_\lambda = b_\mu = 0$ olmalıdır. Böylece

$$\begin{aligned} x_p &= 0 \\ y_p &= \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu özel durum sabit düzlemin pol doğrusunun da , sabit düzlemin y_2 eksenini ile çakışmasını gerektirir. Yani

$$\begin{aligned} \overline{x_p} &= 0 \\ \overline{y_p} &= \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \end{aligned}$$

dır.

Hareketli düzlemdeki herhangi bir sabit $B(x, y)$ noktasının, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda ve pol eksenini y eksenini seçtiğimiz, yani $b_\lambda = b_\mu = 0$ durumunda sürüklenme hızı

$\overline{V_f} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ dır. $b_\lambda = b_\mu = 0$ için

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}\right)y + a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= \left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}\right)x \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3. M_H den elde edilen M_I hareketleri, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda ve y eksenini pol eksenini olması durumunda ($b_\lambda = b_\mu = 0$) , P pol noktasından B noktasına giden pol ışını, B noktasının $\overline{V_f}$ sürüklenme hız vektörüne diktir.

İspat.

$$P = \left(0, \frac{a_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \right), \quad B = (x, y),$$

$$\overline{V_f} = \left(-(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})y + a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}, (\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu})x \right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{V_f}, \overrightarrow{PB} \rangle &= -xy(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) + x(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) + xy(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) - x(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörlerinin boyları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{V_f}\| &= \left\| \theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right\| \|\overrightarrow{PB}\| \\ &= \left\| \dot{\theta} \right\| \|\overrightarrow{PB}\| \end{aligned}$$

dır.

İspat.

$$\overrightarrow{V_f} = \dot{\theta} (-\sin \theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \cos \theta(\lambda, \mu)(y - y_p), \cos \theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \sin \theta(\lambda, \mu)(y - y_p))$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{V_f}\| &= \left\| \dot{\theta} \right\| \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2} \\ &= \left\| \dot{\theta} \right\| \|\overrightarrow{PB}\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5. M_{II} den elde edilen M_I hareketleri için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörü arasındaki açı ψ olmak üzere, $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda $\psi(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu)$ bağıntısı vardır. Bu iki vektörün dik olması için $\theta(\lambda, \mu) = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) olmalıdır.

İspat.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = - \left(\dot{A} \right)^{-1} \cdot \dot{C}$$

eşitliğinden $\dot{C}$ çekilip $\vec{V}_f = \dot{A} X + \dot{C}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\vec{V}_f = \dot{\theta} (-\sin \theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \cos \theta(\lambda, \mu)(y - y_p), \cos \theta(\lambda, \mu)(x - x_p) - \sin \theta(\lambda, \mu)(y - y_p))$$

bulunur.

$$\vec{PB} = (x - x_p, y - y_p)$$

olduğundan

$$\langle \vec{PB}, \vec{V}_f \rangle = -\dot{\theta} \cdot \sin \theta(\lambda, \mu) \cdot \|\vec{PB}\|^2 \quad (3.9)$$

elde edilir.

$$\langle \vec{PB}, \vec{V}_f \rangle = \|\vec{V}_f\| \cdot \|\vec{PB}\| \cos \psi(\lambda, \mu)$$

olduğundan bunu (3.9) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \|\vec{V}_f\| \cdot \|\vec{PB}\| \cdot \cos \psi(\lambda, \mu) &= -\dot{\theta} \cdot \sin \theta(\lambda, \mu) \cdot \|\vec{PB}\|^2 \\ \left| \dot{\theta} \right| \cdot \|\vec{PB}\| \cdot \|\vec{PB}\| \cdot \cos \psi(\lambda, \mu) &= -\dot{\theta} \cdot \sin \theta(\lambda, \mu) \cdot \|\vec{PB}\|^2 \\ \cos \psi(\lambda, \mu) &= -\sin \theta(\lambda, \mu) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu) \right) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\psi(\lambda, \mu) = \frac{\pi}{2} + \theta(\lambda, \mu)$$

elde edilir.

Tanım 3.1.2. (Hodograf). Sabit bir noktanın sürüklenme hız vektörleri, kendilerine paralel kalmak üzere başlangıç noktasına taşındığında, bu vektörlerin uç noktalarının geometrik yeri bir eğri olup bu eğriye hodograf denir (Şuhubi 1981).

Şimdi de M_{II} den elde edilen M_I hareketlerindeki herhangi bir (x, y) noktasının hodografinın geometrik yerini $\forall(\lambda, \mu)$ için araştıralım. Bunun için $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ alalım. (3.1) denkleminin t ye göre türevi alınıp $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) + a_\lambda) \dot{\lambda} + (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu) \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) + b_\lambda) \dot{\lambda} + (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu) \dot{\mu}\end{aligned}$$

elde edilir. Cramer metodu ile $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ değerleri bulunup $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ de yerine yazılırsa ,

$$\Gamma = (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + a_\lambda)(x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu) - (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + b_\lambda)(-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}& \left[(x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu)^2 + (x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + b_\lambda)^2 \right] \dot{y}_1^2 \\ & + \left[(-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu)^2 + (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + a_\lambda)^2 \right] \dot{y}_2^2 \\ & - 2 \left[(x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + b_\mu)(-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\mu + a_\mu) \right. \\ & \left. + (-x \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + a_\lambda)(x \cos \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda - y \sin \theta(\lambda, \mu) \theta_\lambda + b_\lambda) \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ & = \Gamma^2\end{aligned}\tag{3.10}$$

denklemini elde edilir.

Teorem 3.1.6. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinde herhangi bir (x, y) noktasının, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda ve pol doğrusunun y eksenini olması ($b_\lambda = b_\mu = 0$) durumdaki hodografı bir elipstir.

İspat. (3.10) denkleminde $\lambda = \mu = \bar{b}_\lambda = \bar{b}_\mu = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & [x^2(\theta_\mu^2 + \theta_\lambda^2)]\dot{y}_1^2 + [y^2(\theta_\mu^2 + \theta_\lambda^2) - 2y(\theta_\lambda a_\lambda + \theta_\mu a_\mu) + (a_\lambda^2 + a_\mu^2)]\dot{y}_2^2 \\ & - 2[-xy(\theta_\mu^2 + \theta_\lambda^2) + x(\theta_\lambda a_\lambda + \theta_\mu a_\mu)]\dot{y}_1\dot{y}_2 = [x(\theta_\mu a_\lambda - \theta_\lambda a_\mu)]^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. Bu ise bir elipstir. Gerçekten de,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genel konik denklemi olmak üzere, (3.11) denkleminde

$$A = x^2(\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2)$$

$$B = -xy(\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) + x(\theta_\lambda a_\lambda + \theta_\mu a_\mu)$$

$$C = y^2(\theta_\lambda^2 + \theta_\mu^2) - 2y(\theta_\lambda a_\lambda + \theta_\mu a_\mu) + (a_\lambda^2 + a_\mu^2)$$

olduğundan,

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = x^2(\theta_\lambda a_\mu - \theta_\mu a_\lambda)^2 > 0$$

dır. Bu ise denklemin elips olduğunu gösterir.

Bu elipsin alanı ise $\pi x(\theta_\lambda a_\mu - \theta_\mu a_\lambda)$ dır. Görüldüğü gibi bu alan sadece x e bağlıdır. Yani y eksenini üzerindeki bir noktanın hodografinin oluşturduğu elipsin alanı sıfırdır.

Teorem 3.1.7. M_H den elde edilen M_I hareketlerinde, x eksenini üzerinde bulunan simetrik iki noktanın, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda ve pol doğrusunun y eksenini olması $(\bar{b}_\lambda = \bar{b}_\mu = 0)$ halinde hodografları aynı bir elipstir.

İspat. (3.11) denkleminde $B_0(\ell, 0)$ noktası için

$$(\ell^2(\theta_\mu^2 + \theta_\lambda^2))\dot{y}_1^2 + (a_\lambda^2 + a_\mu^2)\dot{y}_2^2 - 2(\ell(\theta_\lambda a_\lambda + \theta_\mu a_\mu))\dot{y}_1\dot{y}_2 = (\ell(\theta_\mu a_\lambda - \theta_\lambda a_\mu))^2 \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir ki, bu ise bir elipstir. Bu elipsin alanı ise $\pi \ell(\theta_\mu a_\lambda - \theta_\lambda a_\mu)$ dır.

$B_0(-\ell, 0)$ noktası içinde aynı elips elde edilir.

3.1.1. Hareketin ivme polü

Hareketin sürüklenme ivmesinin sıfır olması yani $\ddot{\vec{A}}\vec{X} + \ddot{\vec{C}} = 0$ denkleminin çözümü bize hareketin ivme pollerinin koordinatlarını verir. Denklemin çözümünden

$$\vec{X} = P(x_{ip}, y_{ip}) = -\left(\ddot{\vec{A}}\right)^{-1} \ddot{\vec{C}}$$

veya

$$\begin{aligned} x_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a} \left(\ddot{\theta} \sin \theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 \cos \theta(\lambda, \mu) \right) + \ddot{b} \left(-\ddot{\theta} \cos \theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 \sin \theta(\lambda, \mu) \right) \right)}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \\ y_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a} \left(\ddot{\theta} \cos \theta(\lambda, \mu) - \dot{\theta}^2 \sin \theta(\lambda, \mu) \right) + \ddot{b} \left(\ddot{\theta} \sin \theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 \cos \theta(\lambda, \mu) \right) \right)}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Bununla beraber $\theta(\lambda, \mu) = (0,0) = 0$ için

$$\begin{aligned} x_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a} \dot{\theta}^2 - \ddot{b} \ddot{\theta} \right)}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \\ y_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a} \ddot{\theta} - \ddot{b} \dot{\theta}^2 \right)}{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin ivme polleri, $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ olması halinde, sabit ve hareketli düzlemin pole doğrusu ile çıkarır.

İspat. (3.13) denkleminde $(\lambda, \mu) = (0,0)$ ve $(\dot{\lambda}, \dot{\mu}) = (0,0)$ yazılıp düzenlenirse

$$x_p = - \frac{\left(b_\lambda \ddot{\lambda} + b_\mu \ddot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \ddot{\lambda} + \theta_\mu \ddot{\mu} \right)} \quad (3.14)$$

$$y_p = \frac{\left(a_\lambda \ddot{\lambda} + a_\mu \ddot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \ddot{\lambda} + \theta_\mu \ddot{\mu} \right)}$$

elde edilir. y_p den $\frac{\ddot{\lambda}}{\ddot{\mu}}$ çekilip x_p de yerine yazılırsa

$$(a_\mu \theta_\lambda - a_\lambda \theta_\mu) x_p + (b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) y_p = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda$$

doğrusu elde edilir ki, bu da söz konusu doğrunun sabit ve hareketli düzlemin pol doğruları ile çakışması demektir.

3.2. Özel İki Parametrelî Düzlemsel Hareket

Bu Kısımda, Bottema'nın incelediği iki parametrelî düzlem hareketi, bir önceki kısımda genel olarak incelediğimiz iki parametrelî hareketlerden elde edeceğiz.

Tanım 3.2.1. (3.1) denklemindeki genel iki parametrelî düzlemsel harekette eğer $\theta(\lambda, \mu) = \lambda$ ve $a(\lambda, \mu) = \ell\mu$ alınırsa, bu harekete özel iki parametrelî hareket denir ve bu

$$\begin{aligned} y_1 &= x \cos \lambda - y \sin \lambda + \ell \mu \\ y_2 &= x \sin \lambda + y \cos \lambda + b(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (3.15)$$

dır (O. Bottema, 1979).

λ ve μ , t nin fonksiyonu olarak alınırsa, bir parametrelî hareket elde edilir. Bu harekete M_{II} den elde edilen bir parametrelî hareket denir ve M_I ile gösterilir. $\lambda(t)$, $\mu(t)$ seçilişlerinin her biri bir parametrelî hareket verir. Yani burada

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lambda_1(t) & \mu(t) &= \mu_1(t) \\
\lambda(t) &= \lambda_2(t) & \mu(t) &= \mu_2(t) \\
&\vdots & & \vdots \\
&\vdots & & \vdots \\
&\vdots & & \vdots \\
\lambda(t) &= \lambda_\infty(t) & \mu(t) &= \mu_\infty(t)
\end{aligned}$$

seçilişleri ayrı ayrı birer bir parametrelili hareketler tanımlarlar. $b(\lambda, \mu)$ belirlendiğinde, t ye bağlı λ ve μ fonksiyonları değiştiğinden sonsuz tane bir parametrelili hareket elde edilir. Yani iki parametrelili M_{II} hareketinden sonsuz tane bir parametrelili M_I hareketleri elde edilir.

Şimdi M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin hız vektörlerini araştıralım. Bunun için hareketli düzlemdeki sabit bir $B(x, y)$ noktasının sürüklenme hızı $\vec{V}_f$ olsun.

Teorem 3.2.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. B noktası hareketli düzlemde sabit olacağından $\vec{V}_r = 0$ ve aynı nokta sabit düzlemde de sabit olacağı için $\vec{V}_f = 0$ olacaktır. $\vec{V}_f = 0$ için

$$\dot{A}X + \dot{C} = 0$$

denkleminin çözümü hareketli düzlemin pol noktalarını verir. Hareketli düzlemin pol noktaları

$$X = P = -(\dot{A})^{-1} \dot{C} \quad (3.16)$$

dır.

Burada $\det \dot{A} \neq 0$ ve dolayısı ile $\dot{A}$ regülerdir ve $(\dot{A})^{-1}$ mevcut olur. Gerçekten (3.15) denklemi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir ve A nın t ye göre türevi alınırsa

$$\dot{A} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \dot{\mu}$$

elde edilir.

$$\left(\dot{A} \right)^{-1} = \frac{1}{\dot{\lambda}} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix}$$

ve $\dot{C}$ nin türevi alınırsa

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{\ell} \dot{\mu} \\ b_{\lambda} \dot{\lambda} + b_{\mu} \dot{\mu} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler (3.16) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} X &= -(\dot{A})^{-1} \cdot \dot{C} \\ &= \frac{1}{\dot{\lambda}} \begin{bmatrix} \dot{\ell} \dot{\mu} - \cos \lambda (b_{\lambda} \dot{\lambda} + b_{\mu} \dot{\mu}) \\ \dot{\ell} \dot{\mu} \cos \lambda + \sin \lambda (b_{\lambda} \dot{\lambda} + b_{\mu} \dot{\mu}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece hareketli düzlem için $P = (x_p, y_p)$ bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_p &= \dot{\ell} \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \sin \lambda - \frac{(b_{\lambda} \dot{\lambda} + b_{\mu} \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} \cos \lambda \\ y_p &= \dot{\ell} \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \cos \lambda + \frac{(b_{\lambda} \dot{\lambda} + b_{\mu} \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} \sin \lambda \end{aligned} \quad (3.17)$$

olarak da yazabilir. Şimdi (3.17) de bulduğumuz y_p değerinden $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ değerini

çekersek

$$\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} = \frac{y_p - b_{\lambda} \sin \lambda}{b_{\mu} \sin \lambda + \ell \cos \lambda}$$

olur ve x_p de yerine yazarsak

$$(b_{\mu} \sin \lambda + \ell \cos \lambda) x_p + (-\ell \sin \lambda + b_{\mu} \cos \lambda) y_p + \ell b_{\lambda} = 0 \quad (3.18)$$

doğru ailesi elde edilir. $\forall \lambda, \mu$ için bu denklemden bir doğru elde edilir.

Sonuç 3.2.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\lambda = \mu = 0$ konumunda,

$$\ell x_p + b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0 \quad (3.19)$$

doğrusu üzerinde bulunurlar.

Gerçekten (3.18) denkleminde $\lambda = \mu = 0$ alınırsa bütün M_I hareketlerinin pol noktalarının geometrik yeri

$$\ell x_p + b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0$$

doğrusudur (Bottema, 1979) .

Özel olarak $y_p = 0$ için

$$x_p = \frac{-\ell b_\lambda}{b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda}$$

elde edilir. Bu ise $\forall t$ anında pol doğruları, kesim noktası $\left(\frac{-\ell b_\lambda}{b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda}, 0 \right)$ olan bir doğru demeti oluşturur.

Teorem 3.2.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunurlar.

İspat. Bulduğumuz $P = (x_p, y_p)$ noktasını $Y = AX + C$ denkleminde X yerine yazarsak sabit düzlemin $\bar{P} = (\overline{x_p}, \overline{y_p})$ polünü bulmuş oluruz. Böylece

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_\lambda \cos \lambda + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} (\ell \sin \lambda + b_\mu \cos \lambda) \\ b_\lambda \sin \lambda + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} (b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \left(-b_\lambda + \ell\mu - b_\mu \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}, b(\lambda, \mu) + \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \right) \\ \overline{x_p} &= -b_\lambda + \ell\mu - b_\mu \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \\ \overline{y_p} &= b(\lambda, \mu) + \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}\end{aligned}\quad (3.20)$$

elde edilir. $\overline{y_p}$ değerinden $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ çekilip $\overline{x_p}$ de yerine yazılırsa

$$\ell \overline{x_p} + b_\mu \overline{y_p} + \ell b_\lambda - \ell^2 \mu - b_\mu b(\lambda, \mu) = 0 \quad (3.21)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.2.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları

$\lambda = \mu = 0$ konumunda,

$$\ell \overline{x_p} + b_\mu \overline{y_p} + \ell b_\lambda = 0 \quad (3.22)$$

doğrusu üzerinde bulunurlar.

Gerçekten (3.21) denkleminde $\lambda = \mu = 0$ alınırsa bütün M_I hareketlerinin sabit düzlemdeki pol noktalarının geometrik yeri olarak

$$\ell \overline{x_p} + b_\mu \overline{y_p} + \ell b_\lambda = 0$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 3.2.3. Sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğruları $\lambda = \mu = 0$ konumunda çakışıktır.

M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin sürüklenme hız vektörlerinin pol ışınına dik olup olmadığını araştıralım. Öncelikle O. Bottema' nın incelediği pol eksenini y eksenini olan ve M_{II} den elde edilen M_I hareketlerini ele alalım. Bunun için $\lambda = \mu = 0, b_\lambda = b_\mu = 0$ olmalıdır. (3.17) dan

$$\begin{aligned} x_p &= 0 \\ y_p &= \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir.

Hareketli düzlemdeki herhangi bir sabit $B(x,y)$ noktasının sürüklenme hızı $\vec{V}_f = \left(\dot{y}_1, \dot{y}_2 \right)$ dir. $\lambda = \mu = 0$ ve $b_\lambda = b_\mu = 0$, $b(\lambda, \mu) \neq 0$ için (3.15) denkleminin türevinden

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y \dot{\lambda} + \ell \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= x \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. Pol eksen y eksen olan M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin sürüklenme hız vektörleri için aşağıdaki teoremi vermek mümkündür.

Teorem 3.2.3. M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketleri için $\lambda = \mu = 0$ konumunda, P pol noktasından B noktasına giden pol ışını, $\vec{V}_f$ sürüklenme hız vektörüne diktir.

İspat. M_{II} hareketinde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PB} &= (x, y - \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}) \\ \vec{V}_f &= (-y \dot{\lambda} + \ell \dot{\mu}, x \dot{\lambda}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\langle \overrightarrow{PB}, \vec{V}_f \rangle = 0$$

elde edilir.

Yani, pol eksen y eksen olan iki parametrelili M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketleri için $\overrightarrow{PB}$ ile $\vec{V}_f$ birbirine diktir. Bu eşitliğin bir parametrelili hareketler için daima sağlandığı (Müller, 1963) tarafından gösterilmiştir.

Şimdi herhangi bir (λ, μ) konumu için bu eşitliğin sağlanıp sağlanmadığını araştıralım.

Teorem 3.2.4. M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketlerinde, $\overline{V_f}$ sürüklenme hız vektörünün boyu

$$\|\overline{V_f}\| = \left| \dot{\lambda} \right| \|\overline{PB}\| \quad (3.24)^*$$

dir.

İspat. Bir önceki teoremin ispatında tanımlanan

$\overline{PB}$ ve $\overline{V_f}$ vektörlerinin normları alınırsa

$$\|\overline{PB}\| = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}$$

ve

$$\|\overline{V_f}\| = \left| \dot{\lambda} \right| \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}$$

elde edilir. Buradan (3.24)* eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 3.2.5. M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketleri için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile $\overline{V_f}$ sürüklenme hız vektörü arasındaki açı θ

olmak üzere, (λ, μ) konumunda $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda$ bağıntısı vardır. Bunların dik olması için

$\lambda = 2k\pi$ ($k=0,1,2,\dots$) olmalıdır.

İspat. Bunun için önce (3.15) hareketinin sürüklenme hızını bulalım. Hız vektörü pol noktaları cinsinden yazılırsa, (3.15) denkleminde

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = -(A)^{-1} \cdot \dot{C}$$

elde edilir, buradan da

$$\dot{\vec{C}} = -\dot{A} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bu eşitlik $\overrightarrow{V_f} = \dot{A}X + \dot{\vec{C}}$ denkleminde yerine yazılır ise

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_f} &= \dot{A}X + \dot{\vec{C}} \\ &= \dot{A}X - \dot{A} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \\ &= \dot{A} \left(X - \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \right) \\ &= \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{bmatrix} \\ &= \dot{\lambda} \begin{bmatrix} -(x - x_p) \sin \lambda & -(y - y_p) \cos \lambda \\ (x - x_p) \cos \lambda & -(y - y_p) \sin \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ya da

$$\overrightarrow{V_f} = \dot{\lambda} \left(-(x - x_p) \sin \lambda - (y - y_p) \cos \lambda, (x - x_p) \cos \lambda - (y - y_p) \sin \lambda \right) \quad (3.25)$$

ve

$$\overrightarrow{PB} = (x - x_p, y - y_p) \quad (3.26)$$

olur. Buradan

$$\langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{V_f} \rangle = -\dot{\lambda} \sin \lambda \left((x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \right)$$

elde edilir. Bu da

$$\langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{V_f} \rangle = -\dot{\lambda} \sin \lambda \|\overrightarrow{PB}\|^2$$

denklemine eşittir. Ayrıca

$$\langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{V_f} \rangle = \|\overrightarrow{PB}\| \|\overrightarrow{V_f}\| \cos \theta$$

olduğundan son iki denklemi birbirine eşitlersek

$$\|\overrightarrow{PB}\| \|\overrightarrow{V_f}\| \cos \theta = -\dot{\lambda} \sin \lambda \|\overrightarrow{PB}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{PB}\| \dot{\lambda} \|\overrightarrow{PB}\| \cos \theta = -\dot{\lambda} \sin \lambda \|\overrightarrow{PB}\|^2$$

buradan da $\cos \theta = -\sin \lambda$ elde edilir. Bu eşitlik çözüldürse

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \\ &= \cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur ve $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda$ sonucuna varılır. Eğer $\lambda = 2k\pi$ ($k=0,1,2,\dots$) ise bu iki vektör birbirine dik, $\lambda \neq 2k\pi$ ise noktanın sürüklenme hız vektörü ile noktayı P polüne bağlayan θ açısı ile λ arasında $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda$ bağıntısı mevcuttur.

Teorem 3.2.6. M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketlerinin (λ, μ) konumuna karşılık gelen sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğrularının doğrultman vektörlerinin boyları eşittir.

İspat. (3.18) denklemindeki P polü, $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ parametresi cinsinden yazılırsa

$$P = (-b_\lambda \cos \lambda, b_\lambda \sin \lambda) + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} (\ell \sin \lambda - b_\mu \cos \lambda, b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda) \quad (3.27)$$

bağıntısı elde edilir. P polünü $P = p_1 + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \vec{v}_1$ şeklinde yazarsak, bunun anlamı P nin

geometrik yeri p_1 noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{v}_1$ olan bir doğru ailesi

olmasıdır. (3.21) denklemindeki sabit düzlemin $\bar{P}$ polünü $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ parametresi cinsinden

yazarsak

$$\bar{P} = (-b_\lambda + \ell \mu, b(\lambda, \mu)) + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} (-b_\mu, \ell) \quad (3.28)$$

doğrusu elde edilir. $\bar{P} = \bar{p}_2 + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \vec{v}_2$ şeklinde yazabiliriz. (3.27) ve (3.28) eşitliklerindeki

doğrultmanlar

$$\vec{v}_1 = (\ell \sin \lambda - b_\mu \cos \lambda, b_\mu \sin \lambda + \ell \cos \lambda)$$

ve

$$\vec{v}_2 = (-b_\mu, \ell)$$

olmak üzere bu her iki vektörün normu alınır

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\ell^2 + b_\mu^2}$$

ve

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\ell^2 + b_\mu^2}$$

elde edilir. O halde

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\|$$

dir.

Üstelik öteleme vektörü $C = (\ell, b_\mu)$ olmak üzere,

$$C_\mu = (\ell, b_\mu)$$

olduğundan

$$\|C_\mu\| = \sqrt{\ell^2 + b_\mu^2}$$

elde edilir ki buradan

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \|C_\mu\|$$

olduğu görülür.

Bu da bize sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğrularının doğrultman vektörlerinin boylarının eşit olduğunu gösterir.

Şimdi de özel olarak $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ alalım ve M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketlerindeki herhangi bir (x, y) noktasının hodograflarının hangi cins konik olduğunu λ ve μ konumuna göre inceleyelim. Özel hareket denklemi (3.15) nin t ye göre türevi alınır

$$\dot{y}_1 = (-x \sin \lambda - y \cos \lambda) \dot{\lambda} + \ell \dot{\mu}$$

$$\dot{y}_2 = (x \cos \lambda - y \sin \lambda) \dot{\lambda} + b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}$$

ya da

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= (-x \sin \lambda - y \cos \lambda) \dot{\lambda} + \ell \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= (x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda) \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}\end{aligned}$$

elde edilir. $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ değerlerini çekersek

$$\Delta = \begin{bmatrix} -x \sin \lambda - y \cos \lambda & \ell \\ x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda & b_\mu \end{bmatrix}$$

yardımlı ile

$$\det \Delta = b_\mu (-x \sin \lambda - y \cos \lambda) + \ell (-x \cos \lambda + y \sin \lambda - b_\lambda)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{\begin{vmatrix} \dot{y}_1 & \ell \\ \dot{y}_2 & b_\mu \end{vmatrix}}{\det \Delta} \\ &= \frac{b_\mu \dot{y}_1 - \ell \dot{y}_2}{\det \Delta}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \frac{\begin{vmatrix} -x \sin \lambda - y \cos \lambda & \dot{y}_1 \\ x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda & \dot{y}_2 \end{vmatrix}}{\det \Delta} \\ &= \frac{(-x \sin \lambda - y \cos \lambda) \dot{y}_2 - (x \cos \lambda - y \sin \lambda + b_\lambda) \dot{y}_1}{\det \Delta}\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}& (b_\mu^2 + x^2 \cos^2 \lambda + y^2 \sin^2 \lambda + b_\lambda^2 - 2xy \sin \lambda \cos \lambda + 2xb_\lambda \cos \lambda - 2yb_\lambda \sin \lambda) \dot{y}_1^2 \\ & + \\ & (\ell^2 + x^2 \sin^2 \lambda + y^2 \cos^2 \lambda + 2xy \sin \lambda \cos \lambda) \dot{y}_2^2 \\ & + \\ & (-2\ell b_\mu + 2xy \sin \lambda \cos \lambda - 2xy \sin^2 \lambda + 2xb_\lambda \sin \lambda + 2xy \cos^2 \lambda - 2y^2 \sin \lambda \cos \lambda + 2yb_\lambda \cos \lambda) \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ & = (\det \Delta)^2\end{aligned}\tag{3.29}$$

denklemini elde edilir. Bu ise (λ, μ) konumundaki hodografin genel denklemini verir. Bunun elips ve çember olma hallerini aşağıdaki teoremlerle verebiliriz.

Teorem 3.2.7. M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketlerindeki herhangi bir (x, y) noktasının $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ konumundaki hodograf'ı bir elips dir .

İspat. Özel olarak (3.29) denkleminde $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ seçilirse

$$x^2 \dot{y}_1^2 + (\ell^2 + y^2) \dot{y}_2^2 + 2xy \dot{y}_1 \dot{y}_2 = x^2 \ell^2 \quad (3.30)$$

denklemini elde edilir ki bu bir elips denklemdir. Gerçekten de,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genel konik denklemini olmak üzere, (3.30) denkleminde

$$A = x^2$$

$$B = xy$$

$$C = y^2 + \ell^2$$

olduğundan,

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = x^2 \ell^2 > 0$$

dır. Bu ise denklemin elips olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.8. x ekseninde bulunan simetrik iki noktanın $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ konumundaki hodograf'ları aynı bir çemberdir.

İspat. (3.30) denkleminde, $B_0 = (\ell, 0)$ noktası için

$$\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 = \ell^2$$

denklemini elde edilir. Bu ise yarıçapı ℓ olan bir çemberdir.

Burada sadece $B_0 = (\ell, 0)$ ve $\lambda = b_\lambda = b_\mu = 0$ için değil aynı zamanda $B_0 = (-\ell, 0)$ ve $\lambda = b_\lambda = b_\mu = 0$ için de bu noktanın hodograf'ı da bir çemberdir.

$B_0 = (\ell, 0)$ noktasının yörüngesi için (3.15) denkleminde

$$\begin{aligned} y_1 &= \ell \cos \lambda + \ell \mu \\ y_2 &= \ell \sin \lambda + b(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

bulunur. $\forall(\lambda, \mu)$ ye göre bu yörünge değişir. $B_0 = (\ell, 0)$ noktası için (3.24) denkleminde

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \ell \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= \ell \dot{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan da

$$\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 = \ell^2$$

bulunur. B_0 noktasının skalar hızı ise

$$\left\| \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \right\| = \ell$$

olup sabittir. Elemanter analitik geometri gösterir ki elde edilen (3.30) elipsinin alanı $\pi \ell |x|$ dir. Bu alan sadece x 'e bağlıdır. Pol doğrusu üzerindeki bir nokta için elipsin alanı sıfırdır.

3.2.1. Hareketin ivme polü

Sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaların geometrik yerini araştıracağız. Bunun için

$$\ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \quad (3.31)$$

denklemini çözeceğiz. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin ivmesi

$$P_p = -\left(\ddot{A}\right)^{-1} \ddot{C}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \begin{bmatrix} \ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda & -\ddot{\lambda} \cos \lambda + (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda \\ \ddot{\lambda} \cos \lambda - (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda & \ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda \end{bmatrix} \ddot{C}$$

denklemden

$$x_p = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \left[(\ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda)(\ell \ddot{\mu}) + (-\ddot{\lambda} \cos \lambda + (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda)(b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu}) \right]$$

$$y_p = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \left[(\ddot{\lambda} \cos \lambda - (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda)(\ell \ddot{\mu}) + (\ddot{\lambda} \sin \lambda + (\dot{\lambda})^2 \cos \lambda)(b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu}) \right]$$

değerleri (λ, μ) konumundaki ivme polünün koordinatlarıdır. $\lambda = \mu = 0$ konumu için

$$x_p = \frac{\ell \ddot{\mu} (\dot{\lambda})^2}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} - \frac{\ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} (b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu})$$

$$y_p = \frac{\ell \ddot{\mu} \ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} + \frac{(\dot{\lambda})^2}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} (b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu} \dot{\lambda} \dot{\mu} + b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu}) \quad (3.32)$$

dır.

Teorem 3.4.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin ivme polü $\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ konumunda sabit ve hareketli düzlemin pol doğrusu ile çıkarılır.

İspat. (3.32) den

$$x_p = -\frac{\ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} (b_{\lambda} \ddot{\lambda} + b_{\mu} \ddot{\mu})$$

$$y_p = \frac{\ell \ddot{\mu} \ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2}$$

elde edilir. Bununla beraber y_p den $\frac{\mu}{\lambda}$ çekilip x_p de yerine yazılırsa

$$\ell x_p + b_{\mu} y_p + \ell b_{\lambda} = 0$$

elde edilir. Bu da sabit ve hareketli düzlemin pol doğruları ile çıkışması demektir.

4. LORENTZ DÜZLEMİNDE İKİ PARAMETRELİ HAREKETLER

4.1. Genel İki Parametrelili Düzlemsel Hareket

3. Bölümde, Öklid düzleminde denklemini

$$\begin{aligned}y_1 &= x \cos \theta(\lambda, \mu) - y \sin \theta(\lambda, \mu) + a(\lambda, \mu) \\y_2 &= x \sin \theta(\lambda, \mu) + y \cos \theta(\lambda, \mu) + b(\lambda, \mu)\end{aligned}$$

şeklinde verilen genel iki-parametrelili hareket incelendi ve bazı teoremler ve sonuçlar verildi. Bu bölümde , bu hareketin Lorentz düzlemine genelleştirilmesi yapılacak, verilen teorem ve sonuçların Lorentz düzlemindeki karşılıkları aranacaktır. Yaptığımız tüm işlemler Lorentz düzleminde yapıldığından tekrar tekrar söylenmeyecektir.

Tanım 4.1.1. Lorentz düzleminde genel iki-parametrelili düzlem hareketi

$$\begin{aligned}y_1 &= xch\theta(\lambda, \mu) + ysh\theta(\lambda, \mu) + a(\lambda, \mu) \\y_2 &= xsh\theta(\lambda, \mu) + ych\theta(\lambda, \mu) + b(\lambda, \mu)\end{aligned} \quad (4.1)$$

ile verilir ve M_{II} ile gösterilir. Burada (y_1, y_2) sabit Σ düzleminin ve (x, y) de hareketli E düzleminin koordinat fonksiyonlarıdır. Eğer λ ve μ , t zaman parametresi olmak üzere, t nin fonksiyonları olarak alınırsa, bir-parametrelili M_I hareketi elde edilir. Bu harekete M_{II} hareketinden elde edilen M_I hareketi denir. (4.1) denklemini

$$Y = AX + C, Y = [y_1 \ y_2]^T, X = [x \ y]^T, C = [a \ b]^T, A = \begin{bmatrix} ch\theta(\lambda, \mu) & sh\theta(\lambda, \mu) \\ sh\theta(\lambda, \mu) & ch\theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Biz burada genelliği bozmayacak şekilde $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda iki düzlemin çakışması için $\theta(0, 0) = a(0, 0) = b(0, 0) = 0$ alabiliriz.

Teorem 4.1.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunur.

İspat. A ve C matrisinin t ye göre türevi alınırsa, $\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin çözümü, hareketli düzlemin pol noktalarını verir. Hareketli düzlemin pol noktaları

$$P(x_p, y_p) = X = -(\dot{A})^{-1} \cdot \dot{C}$$

dır.

$$x_p = \frac{sh\theta(\lambda, \mu) \left(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu} \right) - ch\theta(\lambda, \mu) \left(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right)} \quad (4.2)$$

$$y_p = \frac{-ch\theta(\lambda, \mu) \left(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu} \right) + sh\theta(\lambda, \mu) \left(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right)}$$

elde edilir. y_p den $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ çekilip x_p de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & [-ch\theta(\lambda, \mu)a_\mu\theta_\lambda + sh\theta(\lambda, \mu)b_\mu\theta_\lambda + ch\theta(\lambda, \mu)a_\lambda\theta_\mu - sh\theta(\lambda, \mu)b_\lambda\theta_\mu]x_p \\ & + [sh\theta(\lambda, \mu)a_\lambda\theta_\mu - ch\theta(\lambda, \mu)b_\lambda\theta_\mu - sh\theta(\lambda, \mu)a_\mu\theta_\lambda + ch\theta(\lambda, \mu)b_\mu\theta_\lambda]y_p \\ & = \left[-(ch\theta(\lambda, \mu))^2 a_\lambda b_\mu - (sh\theta(\lambda, \mu))^2 b_\lambda a_\mu + (ch\theta(\lambda, \mu))^2 a_\mu b_\lambda + (sh\theta(\lambda, \mu))^2 a_\lambda b_\mu \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 4.1.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda

$$(a_\lambda\theta_\mu - a_\mu\theta_\lambda)x_p - (b_\lambda\theta_\mu - b_\mu\theta_\lambda)y_p = a_\mu b_\lambda - a_\lambda b_\mu \quad (4.4)$$

doğrusu üzerinde bulunurlar.

Teorem 4.1.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunurlar.

İspat. (4.2) deki $P(x_p, y_p)$ noktasının kordinatları $Y = AX + C$ denkleminde X yerine yazılırsa, sabit düzlemin $\overline{P} = (\overline{x_p}, \overline{y_p})$ polü bulunur.

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} ch\theta(\lambda, \mu) & sh\theta(\lambda, \mu) \\ sh\theta(\lambda, \mu) & ch\theta(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(\lambda, \mu) \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

denklemden

$$\begin{aligned}\overline{x_p} &= -\frac{b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} + a(\lambda, \mu) \\ \overline{y_p} &= -\frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} + b(\lambda, \mu)\end{aligned}\quad (4.5)$$

pol noktalarının koordinatları elde edilir. $\overline{y_p}$ değerinden $\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\mu}}$ çekilip $\overline{x_p}$ de yerine

yazılırsa

$$(a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) \overline{x_p} - (b_\lambda \theta_\mu - b_\mu \theta_\lambda) \overline{y_p} = b(\lambda, \mu)(b_\mu \theta_\lambda - b_\lambda \theta_\mu) + a(\lambda, \mu)(a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) - a_\lambda b_\mu + b_\lambda a_\mu \quad (4.6)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 4.1.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda

$$(a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) \overline{x_p} - (b_\lambda \theta_\mu - b_\mu \theta_\lambda) \overline{y_p} = a_\mu b_\lambda - a_\lambda b_\mu$$

doğrusu üzerinde bulunurlar.

Sonuç 4.1.3. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit ve hareketli düzlemdeki pol noktaları $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda çakışiktır.

M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin pol doğrusunu hareketli düzlemdeki y eksenini olarak seçelim. Bunun için $\lambda = \mu = 0$ için

$$x_p = -\frac{b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}}$$

den $x_p = 0$ olduğundan

$$b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu} = 0$$

elde edilir. λ ve μ bağımsız hareket parametreleri olduğundan sıfırdan farklıdırlar. O halde $b_\lambda = b_\mu = 0$ olmalıdır. Böylece

$$x_p = 0$$

$$y_p = -\frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \quad (4.7)$$

elde edilir. Bu özel durum, sabit düzlemin pol doğrusunun da, sabit düzlemin y_2 eksenini ile çakışmasını gerektirir. Yani

$$\overline{x_p} = 0$$

$$\overline{y_p} = -\frac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}}$$

dır.

Hareketli düzlemdeki herhangi bir sabit $B(x, y)$ noktasının, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda ve pol eksenini y eksenini seçtiğimiz, yani $b_\lambda = b_\mu = 0$ durumunda sürüklenme hızı

$\overline{V_f} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ dır. $b_\lambda = b_\mu = 0$ için

$$\dot{y}_1 = \left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right) y + a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}$$

$$\dot{y}_2 = \left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right) x \quad (4.8)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. M_H den elde edilen M_I hareketleri, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda ve y eksenini pol eksenini olması durumunda ($b_\lambda = b_\mu = 0$), P pol noktasından B noktasına giden pol ışını, B noktasının $\overline{V_f}$ sürüklenme hız vektörüne diktir.

İspat.

$$P = \left(0, -\frac{a_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \right), B = (x, y)$$

ve

$$\overline{V_f} = \left((\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) y + a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}, (\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) x \right)$$

olmak üzere

$$\left\langle \overrightarrow{V_f}, \overrightarrow{PB} \right\rangle_L = -xy(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) + x(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) + xy(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}) - x(a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}) = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.4. M_H den elde edilen M_I hareketleri için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını ile $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörünün dik olması için $\theta(\lambda, \mu) = \theta(0,0) = 0$ olmalıdır.

İspat.

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = -\left(\dot{A}\right)^{-1} \cdot \dot{C}$$

eşitliğinden $\dot{C}$ çekilip $\overrightarrow{V_f} = \dot{A}X + \dot{C}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{V_f} = \dot{\theta}(sh\theta(\lambda, \mu)(x - x_p) + ch\theta(\lambda, \mu)(y - y_p), ch\theta(\lambda, \mu)(x - x_p) + sh\theta(\lambda, \mu)(y - y_p))$$

bulunur.

$$\overrightarrow{PB} = (x - x_p, y - y_p)$$

olduğundan

$$\left\langle \overrightarrow{V_f}, \overrightarrow{PB} \right\rangle_L = \dot{\theta} \cdot sh\theta(\lambda, \mu) \cdot \left\| \overrightarrow{PB} \right\|_L^2 \quad (4.9)$$

elde edilir.

Bu iki vektörün $(\lambda(t), \mu(t))$ konumundaki harekette dik olmaları için $(\lambda(t), \mu(t)) = (0,0) = 0$ olmalıdır. Burada mutlaka vektörlerden birinin uzaysı(zamansı) diğerinin zamansı(uzaysı) olması gerekmektedir.

Sonuç 4.1.5. M_H den elde edilen M_I hareketlerinin $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörünün boyu $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{V_f} \right\|_L &= \left| \theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu} \right| \left\| \overrightarrow{PB} \right\|_L \\ &= \left| \dot{\theta} \right| \left\| \overrightarrow{PB} \right\|_L \end{aligned}$$

dır.

İspat.

$$\vec{V}_f = \dot{\theta} (sh\theta(\lambda, \mu)(x - x_p) + ch\theta(\lambda, \mu)(y - y_p), ch\theta(\lambda, \mu)(x - x_p) + sh\theta(\lambda, \mu)(y - y_p))$$

$$\|\vec{V}_f\|_L = \left| \dot{\theta} \right| \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}$$

$$= \left| \dot{\theta} \right| \|\vec{PB}\|_L$$

elde edilir.

Şimdi de M_{II} den elde edilen M_I hareketlerindeki herhangi bir (x, y) noktasının

hodografını $\forall (\lambda, \mu)$ için araştıralım. Bunun için $\dot{\mu}^2 - \dot{\lambda}^2 = 1$ alalım. (4.1) denkleminin

t ye göre türevi alınıp $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ ye göre düzenlenirse

$$\dot{y}_1 = (-xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda - ych\theta(\lambda, \mu) + a_\lambda)\dot{\lambda} + (-xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu - ych\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + a_\mu)\dot{\mu}$$

$$\dot{y}_2 = (xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda - ysh\theta(\lambda, \mu) + b_\lambda)\dot{\lambda} + (-xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu - ysh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + b_\mu)\dot{\mu}$$

elde edilir. Cramer metodu ile $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ değerleri bulunup $\dot{\mu}^2 - \dot{\lambda}^2 = 1$ de yerlerine yazılırsa ,

$$\Gamma = (xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + ych\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + a_\lambda)(xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + ysh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + b_\mu)$$

$$- (xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + ysh\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + b_\lambda)(xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + ych\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + a_\mu)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left[\left(xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + ysh\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + b_\lambda \right)^2 - \left(xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + ysh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + b_\mu \right)^2 \right] \dot{y}_1^2 \\
& + \left[\left(xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + ych\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + a_\lambda \right)^2 - \left(xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + ych\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + a_\mu \right)^2 \right] \dot{y}_2^2 \\
& + 2 \left[\left(xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + ysh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + b_\mu \right) \left(xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + ych\theta(\lambda, \mu)\theta_\mu + a_\mu \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(xsh\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + ych\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + a_\lambda \right) \left(xch\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + ysh\theta(\lambda, \mu)\theta_\lambda + b_\lambda \right) \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\
& = \Gamma^2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

denklemini elde edilir. Bu ise (λ, μ) konumundaki hodografin genel denklemini verir.

Sonuç 4.1.6. M_μ den elde edilen M_λ hareketlerinde herhangi bir (x, y) noktasının, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumundaki ve pol doğrusunun y eksenini olması ($b_\lambda = b_\mu = 0$) durumundaki hodografi bir hiperboldür.

İspat. (4.10) denkleminde $\lambda = \mu = b_\lambda = b_\mu = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left[x^2(\theta_\lambda^2 - \theta_\mu^2) \right] \dot{y}_1^2 + \left[y^2(\theta_\lambda^2 - \theta_\mu^2) + 2y(\theta_\lambda a_\lambda - \theta_\mu a_\mu) + (a_\lambda^2 - a_\mu^2) \right] \dot{y}_2^2 \\
& - 2 \left[xy(\theta_\lambda^2 - \theta_\mu^2) + x(\theta_\lambda a_\lambda - \theta_\mu a_\mu) \right] \dot{y}_1 \dot{y}_2 = \left[x(\theta_\mu a_\lambda - \theta_\lambda a_\mu) \right]^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

denklemini elde edilir. Bu ise bir hiperboldür. Gerçekten de,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genel konik denklemini olmak üzere, (4.11) denkleminde

$$\begin{aligned}
A &= x^2(\theta_\lambda^2 - \theta_\mu^2) \\
B &= xy(\theta_\lambda^2 - \theta_\mu^2) + x(\theta_\lambda a_\lambda - \theta_\mu a_\mu) \\
C &= y^2(\theta_\lambda^2 - \theta_\mu^2) + 2y(\theta_\lambda a_\lambda - \theta_\mu a_\mu) + (a_\lambda^2 - a_\mu^2)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = -x^2(\theta_\lambda a_\mu - \theta_\mu a_\lambda)^2 < 0$$

dır. Bu ise denklemin hiperbol olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.7. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinde, x eksenı üzerinde bulunan simetrik iki noktanın, $(\lambda, \mu) = (0,0)$ konumunda ve pol doğrusunun y eksenı olması $(b_\lambda = b_\mu = 0)$ halinde hodografları aynı bir hiperboldür.

İspat. (4.11) denkleminde $B_0(\ell,0)$ noktası için

$$(\ell^2(\theta_\lambda^2 - \theta_\mu^2))\dot{y}_1^2 + (a_\lambda^2 - a_\mu^2)\dot{y}_2^2 - 2(\ell(\theta_\lambda a_\lambda - \theta_\mu a_\mu))\dot{y}_1\dot{y}_2 = (\ell(\theta_\mu a_\lambda - \theta_\lambda a_\mu))^2 \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir ki, bu ise bir hiperboldür. $B_0(-\ell,0)$ noktası için de aynı hiperbol elde edilir.

Tüm yukarıda verdiğimiz teoremlerde $\theta(\lambda, \mu) = \lambda$, $a(\lambda, \mu) = \ell\mu$ ve $b(\lambda, \mu) = b(\lambda, \mu)$ alınrsa, 4.bölümde elde ettiğimiz sonuçlar elde edilir.

4.1.1. Hareketin ivme polü

Hareketin sürüklenme ivmesinin sıfır olması yani $\ddot{A}X + \ddot{C} = 0$ denkleminin çözümü bize hareketin ivme pollerinin koordinatlarını verir.

$$X = P(x_{ip}, y_{ip}) = -\left(\ddot{A}\right)^{-1} \ddot{C}$$

çözülürse

$$\begin{aligned} x_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a} \left(-\ddot{\theta} sh\theta(\lambda, \mu) - \dot{\theta}^2 ch\theta(\lambda, \mu) \right) + \ddot{b} \left(\ddot{\theta} ch\theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 sh\theta(\lambda, \mu) \right) \right)}{\ddot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} \\ y_{ip} &= \frac{\left(\ddot{a} \left(\ddot{\theta} ch\theta(\lambda, \mu) + \dot{\theta}^2 sh\theta(\lambda, \mu) \right) + \ddot{b} \left(-\ddot{\theta} sh\theta(\lambda, \mu) - \dot{\theta}^2 ch\theta(\lambda, \mu) \right) \right)}{\ddot{\theta}^4 - \ddot{\theta}^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. $\theta(\lambda, \mu) = (0,0) = 0$ için

$$x_{ip} = \frac{\left(-\ddot{a} \dot{\theta}^2 + \ddot{b} \ddot{\theta} \right)}{\dot{\theta}^4 - \ddot{\theta}^2}$$

$$y_{ip} = \frac{\left(\ddot{a} \ddot{\theta} - \ddot{b} \dot{\theta}^2 \right)}{\dot{\theta}^4 - \ddot{\theta}^2}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin ivme polleri, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumunda ve $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ olması halinde, sabit ve hareketli düzlemin pol doğrusu ile çakışır.

İspat. (4.13) denkleminde $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} x_{ip} &= -\frac{\left(b_\lambda \ddot{\lambda} + b_\mu \ddot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \ddot{\lambda} + \theta_\mu \ddot{\mu} \right)} \\ y_{ip} &= -\frac{\left(a_\lambda \ddot{\lambda} + a_\mu \ddot{\mu} \right)}{\left(\theta_\lambda \ddot{\lambda} + \theta_\mu \ddot{\mu} \right)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. y_{ip} den $\frac{\ddot{\lambda}}{\ddot{\mu}}$ çekilip x_{ip} de yerine yazılırsa

$$(a_\lambda \theta_\mu - a_\mu \theta_\lambda) x_{ip} - (b_\lambda \theta_\mu - b_\mu \theta_\lambda) y_{ip} = a_\mu b_\lambda - a_\lambda b_\mu$$

doğrusu elde edilir ki, bu da sabit ve hareketli Lorentz düzlemlerinin pol doğrularının ile çakışması demektir.

4.2. Özel İki Parametrelili Düzlemsel Hareket

L^2 Lorentz düzlemindeki özel iki parametrelili hareketleri inceleyeceğiz. Lorentz düzleminde bir parametrelili bir harekette, hareketli Lorentz düzlemindeki herhangi bir sabit noktanın $\forall t$ anında bir pol noktası ve bir hız vektörü vardır (Ergin,1989). Şimdi biz, bir parametrelili sonsuz tane hareketi düşünüyoruz. Yani hareketli Lorentz düzleminde, $(\lambda(t), \mu(t))$ konumundaki sabit bir noktanın, iki parametrelili hareketten elde edilen bütün bir parametrelili hareketlerinin sürüklenme hız vektörlerinin elde edilmesi, pol ve ivme pol noktalarının elde edilmesi ve bunların geometrik yerlerinin bulunmasını inceleyeceğiz. Bu bölümde yaptığımız tüm işlemler, Lorentz anlamında olduğundan, tekrar tekrar söylenmeyecektir.

Tanım 4.1. Lorentz düzleminde (4.1) denklemleri ile verilen genel düzlemsel hareket denklemlerinde $\theta(\lambda, \mu) = \lambda$, $a(\lambda, \mu) = \ell\mu$ alınırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= xch\lambda + ysh\lambda + \ell\mu \\ y_2 &= xsh\lambda + ych\lambda + b(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (4.15)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere özel iki parametrelili hareket denklemleri denir ve bu hareket M_{II} ile gösterilir.

Burada ℓ birim uzunluk olarak da alınabilir. $\lambda = \mu = 0$ da yani hareketin başlangıç anında çakışık iki çatı seçiyoruz. Böylece $b(0,0) = 0$ dır. Gerçekten $\lambda = \mu = 0$ için, (4.15) denkleminde

$$\begin{aligned} y_1 &= x.1 + y.0 + 0 & \Rightarrow y_1 &= x \\ y_2 &= x.0 + y.1 + b(0,0) & \Rightarrow y_2 &= y \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.2.2. Eğer hareketin parametresi olarak zamanı düşünersek o zaman $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$, (4.15) 'e ait bir parametrelili hareket tanımlar. Bu harekete M_{II} den elde edilen M_I hareketi denir.

Teorem 4.2.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunurlar.

İspat. B noktası hareketli düzlemde sabit olacağından $\vec{V}_r = 0$ ve aynı nokta sabit düzlemde de sabit olacağı için $\vec{V}_f = 0$ olacaktır. O halde $\vec{V}_f = 0$ ise

$$\dot{A}X + \dot{C} = 0$$

denkleminin çözümü hareketli düzlemin P pol noktalarını verir . Hareketli düzlemin pol noktaları için

$$X = P = -(\dot{A})^{-1} \dot{C} \quad (4.16)$$

dır.

Burada $\det \dot{A} \neq 0$ ve dolayısı ile $(\dot{A})^{-1}$ mevcut olur. Gerçekten

(4.15) denklemi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\lambda & sh\lambda \\ sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell\mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\dot{A} = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} sh\lambda & ch\lambda \\ ch\lambda & sh\lambda \end{bmatrix}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \dot{\mu}$$

matrisinin tersi alınırsa

$$\left(\begin{bmatrix} \dot{A} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{\dot{\lambda}} \begin{bmatrix} -sh\lambda & ch\lambda \\ ch\lambda & -sh\lambda \end{bmatrix}$$

ve C nin türevi alınırsa

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} \ell\dot{\mu} \\ b_\lambda\dot{\lambda} + b_\mu\dot{\mu} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bulunan bu değerler (4.16) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} X &= -(\dot{A})^{-1} \dot{C} \\ &= \frac{1}{\dot{\lambda}} \begin{bmatrix} sh\lambda\dot{\mu} - ch\lambda(b_\lambda\dot{\lambda} + b_\mu\dot{\mu}) \\ -ch\lambda\ell\dot{\mu} + sh\lambda(b_\lambda\dot{\lambda} + b_\mu\dot{\mu}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece hareketli düzlemin P polü bulunur. $P = (x_p, y_p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_p &= \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} sh\lambda - \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu}_1)}{\dot{\lambda}} ch\lambda \\ y_p &= -\ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} ch\lambda + \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} sh\lambda \end{aligned} \quad (4.17)$$

olarak da yazılabilir.

Şimdi (4.17) de bulduğumuz y_p değerinden $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ değerini çekip x_p de yerine yazarsak

$$\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} = \frac{y_p - b_\lambda sh\lambda}{- \ell ch\lambda + b_\mu sh\lambda}$$

değerinden

$$(b_\mu sh\lambda - \ell ch\lambda)x_p + (-\ell sh\lambda + b_\mu ch\lambda)y_p - \ell b_\lambda = 0 \quad (4.18)$$

doğru ailesi elde edilir. Bu denklemden $\forall \lambda, \mu$ için bir başka bulunur.

Sonuç 4.2.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, hareketli düzlemdeki pol noktaları $\lambda = \mu = 0$ konumunda,

$$\ell x_p - b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0 \quad (4.19)$$

doğrusu üzerinde bulunurlar.

Gerçekten (4.18) denkleminde $\lambda = \mu = 0$ alınırsa bütün M_I hareketlerinin hareketli düzlemdeki pol noktalarının geometrik yeri

$$\ell x_p - b_\mu y_p + \ell b_\lambda = 0$$

doğrusudur.

Özel olarak $y_p = 0$ için

$$x_p = \frac{\ell b_\lambda}{b_\mu sh\lambda - \ell ch\lambda}$$

elde edilir. Bu ise $\forall t$ anında pol doğruları, tepe noktası $\left(\frac{\ell b_\lambda}{b_\mu sh\lambda - \ell ch\lambda}, 0 \right)$ olan bir doğru demeti oluşturur.

Teorem 4.2.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $\forall(\lambda, \mu)$ konumunda bir doğru üzerinde bulunurlar.

İspat. Bulduğumuz $P = (x_p, y_p)$ noktasının koordinatlarını $Y = AX + C$ denkleminde X yerine yazarsak sabit düzlemin $\overline{P} = (\overline{x_p}, \overline{y_p})$ polünü bulmuş oluruz.

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} ch\lambda & sh\lambda \\ sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_\lambda ch\lambda - \frac{\dot{\mu}}{\lambda} (b_\mu ch\lambda - \ell sh\lambda) \\ b_\lambda sh\lambda + \frac{\dot{\mu}}{\lambda} (b_\mu sh\lambda - \ell ch\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \left(-b_\lambda - \ell \mu - b_\mu \frac{\dot{\mu}}{\lambda}, b(\lambda, \mu) - \ell \frac{\dot{\mu}}{\lambda} \right) \\ \overline{x_p} &= -b_\lambda - \ell \mu - b_\mu \frac{\dot{\mu}}{\lambda} \\ \overline{y_p} &= b(\lambda, \mu) - \ell \frac{\dot{\mu}}{\lambda} \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. $\overline{y_p}$ değerinden $\frac{\dot{\mu}}{\lambda}$ çekilip $\overline{x_p}$ de yerine yazılırsa

$$\ell \overline{x_p} - b_\mu \overline{y_p} + \ell b_\lambda + \ell^2 \mu + b_\mu b(\lambda, \mu) = 0 \quad (4.21)$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 4.2.2. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin, sabit düzlemdeki pol noktaları $\lambda = \mu = 0$ konumunda,

$$\ell \overline{x_p} - b_\mu \overline{y_p} + \ell b_\lambda = 0 \quad (4.22)$$

doğrusu üzerinde bulunurlar.

Gerçekten (4.21) denkleminde $\lambda = \mu = 0$ alınırsa bütün M_1 hareketlerinin sabit düzlemdeki pol noktalarının geometrik yeri olarak

$$\ell \overline{x_p} - b_\mu \overline{y_p} + \ell b_\lambda = 0$$

doğrusu elde edilir.

Sonuç 4.2.3. Sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğruları $\lambda = \mu = 0$ konumunda çakışıktır.

Sonuç 4.2.4. İki parametrelili bir harekette, $\forall (\lambda, \mu)$ konumunda, her noktadan bir pol doğrusu geçer.

M_{II} den elde edilen ve $\lambda = \mu = 0$, $b_\lambda = b_\mu = 0$ şartlarına uyan bir M_1 hareketinin pol noktasının koordinatı (4.17) den

$$\begin{aligned} x_p &= 0 \\ y_p &= -\ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

dir.

Teorem 4.2.3. M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_1 hareketleri için $\lambda = \mu = 0$ konumunda, P pol noktasından B noktasına giden pol ışını, $\vec{V_f}$ sürüklenme hız vektörüne diktir.

İspat.

$$\begin{aligned} \vec{PB} &= (x, y + \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}) \\ \vec{V_f} &= (y \dot{\lambda} + \ell \dot{\mu}, x \dot{\lambda}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\langle \vec{PB}, \vec{V_f} \rangle_L = 0$$

elde edilir.

Yani, pol eksen y eksen olan iki parametrel M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketleri için $\overline{PB}$ ile $\overline{V_f}$ birbirine diktir.

Şimdi herhangi bir (λ, μ) konumu için bu eşitlik sağlanır mı? Araştıralım.

Teorem 4.2.4. M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketleri için P pol noktasından B noktasına giden pol ışını, (λ, μ) konumunda $\overline{V_f}$ sürüklenme hız vektörüne dik olması için $\lambda = 0$ olmalıdır.

İspat. Bunun için önce (4.15) hareketinin sürüklenme hızını bulalım. Hız vektörü pol noktaları cinsinden yazılırsa

(4.15) denkleminde

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = -(A)^{-1} \cdot \dot{C}$$

elde edilir, buradan da

$$\dot{C} = -\dot{A} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu değer $\overline{V_f} = \dot{A}X + \dot{C}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{V_f} &= \dot{A}X + \dot{C} \\ &= \dot{A}X - \dot{A} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \\ &= \dot{A} \left(X - \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \right) \\ &= \dot{\lambda} \begin{bmatrix} sh\lambda & ch\lambda \\ ch\lambda & sh\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{bmatrix} \\ &= \dot{\lambda} \begin{bmatrix} (x - x_p)sh\lambda & (y - y_p)ch\lambda \\ (x - x_p)ch\lambda & (y - y_p)sh\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\overline{V_f} = \dot{\lambda}((x - x_p)sh\lambda + (y - y_p)ch\lambda, (x - x_p)ch\lambda + (y - y_p)sh\lambda) \quad (4.24)$$

ve

$$\overline{PB} = (x - x_p, y - y_p) \quad (4.25)$$

elde edilir. Buradan da

$$\langle \overline{PB}, \overline{V_f} \rangle_L = -\dot{\lambda} sh\lambda \left((x - x_p)^2 - (y - y_p)^2 \right)$$

elde edilir. Bu da

$$\langle \overline{PB}, \overline{V_f} \rangle_L = -\dot{\lambda} sh\lambda \left\| \overline{PB} \right\|_L^2$$

denklemini verir.

Bu iki vektörün $(\lambda(t), \mu(t))$ konumundaki harekette dik olmaları için $\lambda(t) = 0$ olmalıdır. Burada mutlaka vektörün birinin uzaysı(zamansı) diğerrinin zamansı(uzaysı) olması gerekmektedir.

Teorem 4.2.5. $\overline{V_f}$ sürüklenme hız vektörünün boyu

$$\left\| \overline{V_f} \right\|_L = \left| \dot{\lambda} \right| \left\| \overline{PB} \right\|_L$$

dir.

İspat.

(4.24) ve (4.25) eşitliklerindeki $\overline{PB}$ ve $\overline{V_f}$ vektörlerinin normları alınırsa

$$\left\| \overline{PB} \right\|_L = \sqrt{(x - x_p)^2 - (y - y_p)^2}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\| \overline{V_f} \right\|_L &= \left| \dot{\lambda} \right| \sqrt{(x - x_p)^2 - (y - y_p)^2} \\ &= \left| \dot{\lambda} \right| \left\| \overline{PB} \right\|_L \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\|\overline{V_f}\|_L = \left| \dot{\lambda} \right| \|\overline{PB}\|_L$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6. M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketlerinin (λ, μ) konumuna karşılık gelen sabit ve hareketli düzlemdeki pol doğrularının doğrultman vektörlerinin boyları eşittir.

İspat. (4.17) denklemindeki P polünü $\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$ parametresi cinsinden yazalım.

$$P = (x_p, y_p) = \left(\ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} sh\lambda - \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} ch\lambda, -\ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} ch\lambda + \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} sh\lambda \right)$$

ifadesinden

$$P = (-b_\lambda ch\lambda, b_\lambda sh\lambda) + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} (\ell sh\lambda - b_\mu ch\lambda, b_\mu sh\lambda - \ell ch\lambda) \quad (4.26)$$

elde edilir. P polünü $P = p_1 + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \overrightarrow{v_1}$ şeklinde yazarsak, bunun anlamı p_1 noktasından geçen ve doğrultmanı $\overrightarrow{v_1}$ olan bir doğru ailesidir. Özel olarak $\lambda = \mu = 0$ ve $b_\lambda = b_\mu = 0$ alınırsa

$$P = \left(0, -\ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \right)$$

elde edilir ki bu da y ekseninin pol doğrusu olması demektir.

Bulduğumuz $P = (x_p, y_p)$ noktasının koordinatlarını $Y = AX + C$ denkleminde X yerine yazarsak sabit düzlemin $\overline{P}$ polünü bulmuş oluruz.

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} ch\lambda & sh\lambda \\ sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} sh\lambda - \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} ch\lambda \\ -\ell \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} ch\lambda + \frac{(b_\lambda \dot{\lambda} + b_\mu \dot{\mu})}{\dot{\lambda}} sh\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \mu \\ b(\lambda, \mu) \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\bar{P} = (-b_\lambda + \ell\mu, b(\lambda, \mu)) + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}(-b_\mu, -\ell) \quad (4.27)$$

doğrusu elde edilir. $\bar{P} = p_2 + \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} \vec{v}_2$ şeklinde yazabilir.

(4.26) ve (4.27) eşitliklerinde P ve $\bar{P}$ in doğrultmanları

$$\vec{v}_1 = (\ell sh\lambda - b_\mu ch\lambda, b_\mu sh\lambda - \ell ch\lambda)$$

ve

$$\vec{v}_2 = (-b_\mu, -\ell)$$

olmak üzere bu her iki vektörün normu alınırsa

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1\|_L &= \sqrt{\left| \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle_L \right|} \\ &= \sqrt{|b_\mu^2 - \ell^2|} \end{aligned}$$

ve

$$\|\vec{v}_2\|_L = \sqrt{|b_\mu^2 - \ell^2|}$$

elde edilir. O halde

$$\|\vec{v}_1\|_L = \|\vec{v}_2\|_L$$

dir.

Öteleme vektörü $C = (\ell\mu, b(\lambda, \mu))$ olmak üzere

$$C_\mu = (\ell, b_\mu)$$

olduğundan

$$\|C_\mu\|_L = \sqrt{|b_\mu^2 - \ell^2|}$$

elde edilir ki buradan

$$\|\vec{v}_1\|_L = \|\vec{v}_2\|_L = \|C_\mu\|_L$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.2.5. M_{II} hareketinden elde edilen bütün M_I hareketlerinin (λ, μ) konumunda, hareketli ve sabit düzlemlerdeki pol doğrularının, yani P ve $\bar{P}$ ın geçtiği noktalar farklı olmasına rağmen hız vektörlerin boyları birbirine eşittir.

Şimdi de özel olarak $\dot{\mu}^2 - \dot{\lambda}^2 = 1$ alalım ve M_{II} den elde edilen bütün M_I hareketlerindeki herhangi bir (x, y) noktasının hodograflarının hangi cins konik olduğunu inceleyelim.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= (xsh\lambda + ych\lambda)\dot{\lambda} + \ell\dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= (xch\lambda + ysh\lambda)\dot{\lambda} + b_\lambda\dot{\lambda} + b_\mu\dot{\mu}\end{aligned}$$

denklemden

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= (xsh\lambda + ych\lambda)\dot{\lambda} + \ell\dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= (xch\lambda + ysh\lambda + b_\lambda)\dot{\lambda} + b_\mu\dot{\mu}\end{aligned}$$

elde edilir. $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ değerlerini çekersek

$$\Delta = \begin{bmatrix} xsh\lambda + ych\lambda & \ell \\ xch\lambda + ysh\lambda + b_\lambda & b_\mu \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\det \Delta = b_\mu xsh\lambda + b_\mu ych\lambda - \ell xch\lambda - \ell ysh\lambda - \ell b_\lambda \neq 0 \text{ (olması durumunda)}$$

elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{\begin{vmatrix} \dot{y}_1 & \ell \\ \dot{y}_2 & b_\mu \end{vmatrix}}{\det \Delta} \\ &= \frac{b_\mu \dot{y}_1 - \ell \dot{y}_2}{\det \Delta}\end{aligned}$$

ve

$$\dot{\mu} = \frac{\begin{vmatrix} xsh\lambda + ych\lambda & \dot{y}_1 \\ xch\lambda + ysh\lambda + b_\lambda & \dot{y}_2 \end{vmatrix}}{\det \Delta} \\ = \frac{(xsh\lambda + ych\lambda) \dot{y}_2 - (xch\lambda + ysh\lambda + b_\lambda) \dot{y}_1}{\det \Delta}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler $\dot{\mu}^2 - \dot{\lambda}^2 = 1$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (x^2 c h^2 \lambda + y^2 s h^2 \lambda + 2xy sh\lambda ch\lambda + 2xb_\lambda ch\lambda + 2yb_\lambda sh\lambda + b_\lambda^2 - b_\mu^2) \dot{y}_1^2 \\ & + \\ & (x^2 s h^2 \lambda + y^2 c h^2 \lambda + 2xy sh\lambda ch\lambda - \ell^2) \dot{y}_2^2 \\ & - \\ & (x^2 ch\lambda sh\lambda + y^2 sh\lambda ch\lambda + xy sh^2 \lambda + xy ch^2 \lambda + xb_\lambda sh\lambda + yb_\lambda ch\lambda - 2\ell b_\mu) \dot{y}_1 \dot{y}_2 \\ & = (\det \Delta)^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

denklemini elde edilir.

Teorem 4.2.7. M_Π den elde edilen bütün M_I hareketlerindeki herhangi bir (x,y) noktasının $\lambda = b_\lambda = b_\mu = 0$ konumundaki hodografi bir hiperbol dır .

İspat. Özel olarak (4.28) denkleminde $\lambda = b_\lambda = b_\mu = 0$ seçilirse

$$x^2 \dot{y}_1^2 + (y^2 - \ell^2) \dot{y}_2^2 - 2xy \dot{y}_1 \dot{y}_2 = x^2 \ell^2 \quad (4.29)$$

denklemini elde edilir ki bu bir hiperboldür. Gerçekten de,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genel konik denklemini olmak üzere, (3.30) denkleminde

$$A = x^2$$

$$B = -xy$$

$$C = y^2 - \ell^2$$

olduğundan,

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = -x^2 \ell^2 < 0$$

dır. Bu ise denklemin hiperbol olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.7. x ekseninde bulunan simetrik iki noktanın $\lambda = b_\lambda = b_\mu = 0$ konumundaki hodografları aynı bir Lorentz çemberidir.

İspat. (4.29) denkleminde, $B_0 = (\ell, 0)$ noktası için

$$\dot{y}_1^2 - \dot{y}_2^2 = \ell^2$$

denklemini elde edilir. Bu ise yarıçapı ℓ olan bir Lorentz çemberidir.

Burada sadece $B_0 = (\ell, 0)$ ve $\lambda = b_\lambda = b_\mu = 0$ için değil aynı zamanda $B_0 = (-\ell, 0)$ ve $\lambda = b_\lambda = b_\mu = 0$ için de bu noktanın hodografları aynı Lorentz çemberidir.

$B_0 = (\ell, 0)$ noktasının yörüngesi için (4.15) denkleminde

$$\begin{aligned} y_1 &= \ell ch\lambda + \ell \mu \\ y_2 &= \ell sh\lambda + b(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

bulunur. $\forall(\lambda, \mu)$ ye göre bu yörünge değişir. $B_0 = (\ell, 0)$ noktası için (4.24) denkleminde

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \ell \dot{\mu} \\ \dot{y}_2 &= \ell \dot{\lambda} \end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir ki buradan da

$$\dot{y}_1^2 - \dot{y}_2^2 = \ell^2$$

bulunur. B_0 noktasının skalar hızı ise (4.32) den

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \right\|_L &= \sqrt{\ell^2 \dot{\mu}^2 - \ell^2 \dot{\lambda}^2} \\ &= \ell \end{aligned}$$

olup sabittir.

4.2.1. Hareketin ivme polü

Sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaların geometrik yerini araştıracağız. Bunun için

$$\ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \quad (4.31)$$

denklemini çözeceğiz. M_{II} den elde edilen M_I hareketinin ivmesi

$$P_p = -\left(\ddot{A}\right)^{-1} \ddot{C}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 - (\ddot{\lambda})^2} \begin{bmatrix} -\ddot{\lambda} sh\lambda - (\dot{\lambda})^2 ch\lambda & \ddot{\lambda} ch\lambda + (\dot{\lambda})^2 sh\lambda \\ \ddot{\lambda} ch\lambda + (\dot{\lambda})^2 \sin \lambda & -\ddot{\lambda} sh\lambda - (\dot{\lambda})^2 ch\lambda \end{bmatrix} \ddot{C}$$

denkleminde

$$x_p = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 - (\ddot{\lambda})^2} \left[(-\ddot{\lambda} sh\lambda - (\dot{\lambda})^2 ch\lambda)(\ddot{\ell}\mu) + (\ddot{\lambda} ch\lambda + (\dot{\lambda})^2 sh\lambda)(b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu}\dot{\lambda}\dot{\mu} + b_{\lambda\lambda}\ddot{\lambda} + b_{\mu\mu}\ddot{\mu}) \right]$$

$$y_p = \frac{1}{(\dot{\lambda})^4 + (\ddot{\lambda})^2} \left[(\ddot{\lambda} ch\lambda - (\dot{\lambda})^2 sh\lambda)(\ddot{\ell}\mu) + (-\ddot{\lambda} sh\lambda - (\dot{\lambda})^2 ch\lambda)(b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu}\dot{\lambda}\dot{\mu} + b_{\lambda\lambda}\ddot{\lambda} + b_{\mu\mu}\ddot{\mu}) \right]$$

değerleri (λ, μ) konumundaki ivme polünün koordinatlarıdır. Özel olarak $\lambda = \mu = 0$ konumu için

$$\begin{aligned} x_p &= -\frac{\ddot{\ell}\mu(\dot{\lambda})^2}{(\dot{\lambda})^4 - (\ddot{\lambda})^2} + \frac{\ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 - (\ddot{\lambda})^2} (b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu}\dot{\lambda}\dot{\mu} + b_{\lambda\lambda}\ddot{\lambda} + b_{\mu\mu}\ddot{\mu}) \\ y_p &= \frac{\ddot{\ell}\mu\ddot{\lambda}}{(\dot{\lambda})^4 - (\ddot{\lambda})^2} - \frac{(\dot{\lambda})^2}{(\dot{\lambda})^4 - (\ddot{\lambda})^2} (b_{\lambda\lambda}(\dot{\lambda})^2 + b_{\mu\mu}(\dot{\mu})^2 + 2b_{\lambda\mu}\dot{\lambda}\dot{\mu} + b_{\lambda\lambda}\ddot{\lambda} + b_{\mu\mu}\ddot{\mu}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

dir.

Teorem 4.2.1.1. M_{II} den elde edilen M_I hareketlerinin ivme polü doğrusu

$\lambda = \mu = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ konumunda sabit ve hareketli düzlemin pol doğrusu ile çakışır.

İspat. (4.32) den

$$x_{ip} = -\frac{b_{\lambda}^{\ddot{\lambda}} + b_{\mu}^{\ddot{\mu}}}{\ddot{\lambda}}, \quad y_{ip} = -\frac{\ell \ddot{\mu}}{\ddot{\lambda}}$$

elde edilir. y_{ip} den $\frac{\ddot{\mu}}{\ddot{\lambda}}$ çekilip x_{ip} de yerine yazılırsa

$$\ell x_{ip} - b_{\mu} y_{ip} + \ell b_{\lambda} = 0$$

elde edilir. Bu da sabit ve hareketli düzlemin pol doğrularının çakışması demektir.

5. E_1^3 DE BİR EĞRİ BOYUNCA İKİ PARAMETRELİ UZAY HAREKETİ

Bu bölümde, E_1^3 uzayında, bir eğri boyunca iki parametrelili uzay hareketi tanımlandı ve bazı yörünge yüzeylerinin karakterizasyonu elde edildi.

E_1^3 uzayında bir hareket esnasında, L hareketli Lorentz uzayını ve L' de sabit Lorentz uzayını gösterebiliriz. L nin L' ye göre hareketi, 6 bağımsız parametreye bağlıdır. Bunlardan ilk 3'ü, dönmeyi temsil eden semi ortogonal matrisin 3 bileşeni (*boy* $SO(3,1)=3$) ve diğer 3'ü de ötelemeyi veren vektörün 3 bileşenidir. L nin L' ye göre Lorentz anlamında iki parametrelili hareketinde parametreler s ve t ile gösterilsin. Bu durumda genel olarak bir noktanın geometrik yeri Lorentz anlamında bir yüzeydir.

L nin L' ye göre genel iki parametrelili hareketi,

$$P(s,t) = A(s,t)p + d(s,t) \quad (5.1)$$

ile verilir. Burada $A(s,t)$ bir semi-ortogonal matris ve $d(s,t)$ öteleme vektörüdür.

L ve L' nün semi-ortogonal çatıları, sırası ile, $\{0, l_1, l_2, l_3\}$ ve $\{0', l'_1, l'_2, l'_3\}$ olsun. Bu iki çatı başlangıç anında çakışmıştır.

Bu bölümde, $A(s,t)$ semi-ortogonal matrisi ile $d(s,t)$ öteleme vektörünün özel seçimiyle Lorentz anlamında bazı yörünge yüzeylerinin parametrisasyonları verilecektir. Önce $A(s,t)$ nin özel seçimini verelim. 3×3 tipindeki semi-ortogonal matrislerin cümlesini $SO(3,1)$ ile gösterelim. *boy* $SO(3,1)=3$ dür. 3×3 tipindeki semi-antisimetrik matrislerin cümlesini $C(3,1)$ ile gösterelim. $C(3,1)$ bir vektör uzayı yapısına sahip olduğundan

$$C(3,1) = \left\{ C \in IR_3^3 \mid C^T = -\varepsilon C \varepsilon, C = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}, c_i \in IR \right\}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cümlesini yazabiliriz. Lorentz anlamında Bracket operatörü için

$$[\cdot, \cdot]_L : C(3,1) \times C(3,1) \rightarrow C(3,1)$$

$$C, D \rightarrow [C, D]_L = CD - DC$$

- i) $[C, D]_L = -[D, C]_L$ (anti-simetrik)
- ii) $[\lambda C + \mu D, E]_L = \lambda [C, E]_L + \mu [D, E]_L \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (2-lineer)
- iii) $[C, [D, E]_L]_L + [D, [E, C]_L]_L + [E, [C, D]_L]_L = 0$ (Jakobi özdeşliği)

eşitlikleri sağlandığından $(C(3,1), [\cdot, \cdot]_L)$, bir Lie cebiridir. Bu Lie cebiri $SO(3,1)$ 'in Lie cebiridir (O'Neill, 1983).

Diğer taraftan $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in E_1^3$ olmak üzere

$$\eta : E_1^3 \rightarrow C(3,1)$$

$$\vec{c} \rightarrow \eta(\vec{c}) = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm 1:1, örten ve lineer olduğundan bir izomorfizmdir. Yani her semi-antisimetrik matris ile özdeşleşen bir vektör vardır.

Ayrıca E_1^3 de vektörel çarpımın

$$[\cdot, \cdot]_L : E_1^3 \times E_1^3 \rightarrow E_1^3$$

$$\vec{c}, \vec{d} \rightarrow [\vec{c}, \vec{d}]_L = \vec{c} \wedge_L \vec{d}$$

özelligi vardır ve $(E_1^3, \wedge_L)$ bir Lie cebiridir. Tüm bu dönüşümler ile birlikte

$$\eta(\vec{c})\eta(\vec{d}) - \eta(\vec{d})\eta(\vec{c}) = [\eta(\vec{c}), \eta(\vec{d})]_L = \eta(\vec{c} \wedge_L \vec{d})$$

olduğundan $(E_1^3, \wedge_L)$ ve $(C(3,1), [\cdot, \cdot]_L)$ Lie cebirleri Lorentz anlamında izomorfiktir.

Üstelik $C \in C(3,1)$ ve $p \in E_1^3$ için p ye karşılık gelen sütun matris P ve $\vec{c}$ ye karşılık gelen matris semi-antisimetrik matris C olmak üzere

$$C.P = \vec{c} \wedge_L \vec{p}$$

yazılabilir. Yani iki vektörün vektörel çarpımı, bu vektörlere karşılık gelen matrislerin çarpımına eşittir. Her bir $c_i(s)$ bileşeni $s \in \mathbb{R}$ ye göre differensiyellenebilir fonksiyonlar olan $(c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ bileşenli vektör değerli tanımlı bir fonksiyon $\vec{c}(s)$ olsun. Buna göre $\vec{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ ve bir $p \in E_1^3$ için

$$C(s).P(s) = \vec{c}(s) \wedge_L \vec{p}(s) \quad (5.2)$$

eşitliğini sağlayan

$$C(s) = \begin{bmatrix} 0 & c_3(s) & -c_2(s) \\ c_3(s) & 0 & -c_1(s) \\ -c_2(s) & c_1(s) & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı ve $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için doğru olan tek türlü bir $C(s)$ semi-antisimetrik matrisi vardır. $\vec{c}(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ uzaysı veya zamansı bir vektör olmak üzere bu vektöre karşılık gelen $C(s)$ semi-antisimetrik matrisi yardımı ile tanımlanan semi-ortogonal matrisler,

i) $\vec{c}(s)$ uzaysı bir vektör ise ,

$$A_1(s, t) = I + sht C + (-1 + cht) C^2 \quad (5.3)$$

ii) $\vec{c}(s)$ zamansı bir vektör ise ,

$$A_2(s, t) = I + \sin t C + (1 - \cos t) C^2 \quad (5.4)$$

dır (Kula, 2003).

Bir $p \in E_1^3$ noktasının yer vektörünü $\vec{p}$ ve matris formunu da P ile gösterelim. Buna göre (5.3) denkleminde ve $\vec{c}(s)$ uzaysı bir vektör ise

$$\begin{aligned} A_1(s, t)P &= A_1(s, t)P \\ &= [I + sht C + (-1 + cht) C^2]P \end{aligned} \quad (5.5)$$

olup (5.4) denkleminde ve $\vec{c}(s)$ zamansı bir vektör ise

$$\begin{aligned} A_2(s, t)P &= A_2(s, t)P \\ &= [I + \sin t C + (1 - \cos t) C^2]P \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde edilir. Ayrıca $C.P = \vec{c} \wedge_L \vec{p}$ ve $\vec{c} \wedge_L (\vec{c} \wedge_L \vec{p}) = -\langle \vec{c}, \vec{p} \rangle_L \vec{c} + \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle_L \vec{p}$ olduğundan (5.5) ve (5.6) eşitliği kullanılarak

$$A_1(s, t)P = \vec{p}cht + \langle \vec{c}, \vec{p} \rangle_L \vec{c}(1 - cht) + (\vec{c} \wedge_L \vec{p})sht \quad (5.7)$$

ve

$$A_2(s, t)P = \vec{p} \cos t - \langle \vec{c}, \vec{p} \rangle_L \vec{c}(1 - \cos t) + (\vec{c} \wedge_L \vec{p}) \sin t \quad (5.8)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik oldukça kullanışlıdır.

Şimdiye kadar $C(s)$ semi-antisimetrik matrisinin özel seçimi ile ilgilendik ve bu seçimi $\vec{c}(s)$ vektörünün seçimine bağladık. Şimdi de $\vec{c}(s)$ vektörünün bir özel seçimini ele alalım.

$s \in I \subset \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow E_1^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s)\end{aligned}$$

ile verilen eğri diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Ayrıca $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı bir vektör alanı

$$\begin{aligned}c : \alpha(I) &\rightarrow \bigcup_{s \in I} T_{E_1^3}(\alpha(s)) \\ s &\rightarrow c(s) = (\alpha(s), \vec{c}(s)) \\ &= \vec{c}(s)|_{\alpha(s)}\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. $\forall s \in I$ için $\vec{c}(s)$ vektörü ile belli olan semi-antisimetrik matris $C(s)$ ve bu matris ile tanımlı semi-ortogonal matris $A_1(s, t), A_2(s, t)$ ve $\alpha(I)$ eğrisi boyunca hareketli çatı $\{\alpha(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ ve bu çatıya göre sabit bir nokta p olsun. Bu notasyon ve kabuller ile aşağıdaki tanımlı yapabiliriz.

Tanım 5.1. (İki-Parametrelî hareket)

$$\varphi(s, t)(p) = A_{1,2}(s, t)p + \alpha(s)$$

şeklinde tanımlı iki-parametrelî harekete, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı Lorentz uzayında iki-parametrelî hareket denir. $\varphi(s, t)(p)$, bir yörünge yüzeyi belirtir. $\varphi(s, t)(p)$ nin özelliklerini inceleyelim.

Bundan sonraki işlemlerimizde sık sık kullanacağımız $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ çatısı yerine $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ yi kullanacağız. $\vec{c}(s)$ vektör alanı yerine de $\vec{T}$ teğet vektör alanını seçeceğiz.

İki parametrelî hareket altında bir p noktasının yörüngesi bir yüzey belirtir. Bu yüzeyin denklemi :

i) $\vec{c}$ uzaysı bir vektör ise

(5.3) ve (5.7) denkleminde

$$\varphi_1(s, t)(p) = \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})sht + \alpha(s) \quad (5.9)$$

dır.

ii) $\vec{c}$ zamansı bir vektör ise

(5.4) ve (5.8) denkleminde

$$\varphi_2(s, t)(p) = \vec{p} \cos t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p}) \sin t + \alpha(s) \quad (5.10)$$

şeklinde verilebilir. Bu yüzeylerin normallerini hesaplırsak, α nın uzaysı ve zamansı olmasına göre iki hal vardır.

1) $\alpha(s)$ uzaysı bir eğri ise $\vec{T}$ de uzaysıdır.

Bu durumda iki hal vardır:

1-a) $\vec{N}$ zamansı ve $\vec{B}$ uzaysı olması halinde

Bu durumda

$$\varphi_1(s, t)(p) = \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})sht + \alpha(s)$$

denkleminde

$$\vec{T}' = k_1 \vec{N}$$

$$\vec{N}' = k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}$$

$$\vec{B}' = k_2 \vec{N}$$

olmak üzere

$$\varphi_{1t}(s, t) = sht \cdot \vec{p} + cht(\vec{T} \wedge_L \vec{p}) - sht \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}$$

$$\varphi_{1s}(s, t) = sht k_1 (\vec{N} \wedge_L \vec{p}) + (1 - cht) k_1 \langle \vec{N}, \vec{p} \rangle_L \vec{T} + (1 - cht) \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L k_1 \vec{N} + \vec{T}$$

elde edilir. $\vec{p} = \lambda \vec{N}$ seçersek,

$$\varphi_{1t}(s, t) = sht \lambda \vec{N} + cht \lambda \vec{B}$$

$$\varphi_{1s}(s, t) = (- (1 - cht) k_1 \lambda + 1) \vec{T}$$

denklemlerinden

$$\varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} = (sht(-1 + cht) k_1 \lambda^2 + sht \lambda) \vec{B} + (cht(-1 + cht) k_1 \lambda^2 + cht \lambda) \vec{N}$$

elde edilir. Bu çarpım $\vec{p}$ noktasının yörüngesinin çizdiği yüzeyin normalidir. Bu yüzeyin normali, $\alpha(s)$ eğrisinin $\vec{T}$ teğet vektör alanına dik olan normal düzlemindedir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1. E_1^3 de $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin asli normali zamansı olmak üzere, α uzaysı eğrisinin asli normali üzerinde seçilen bir p noktasının geometrik yeri uzaysı bir yüzeydir.

İspat. Yüzeyin normali '

$$\varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} = (sht(-1 + cht)k_1\lambda^2 + sht.\lambda)\vec{B} + (cht(-1 + cht)k_1\lambda^2 + cht.\lambda)\vec{N}$$

ve $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ zamansı, $\vec{B}$ uzaysı olduğundan

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = -\lambda^2(1 - (1 - cht)k_1\lambda)^2 < 0$$

elde edilir ki, bu ise yüzeyin uzaysı olmasıdır.

1-b) $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ zamansı ve $\vec{B}$ zamansı olması halinde

Bu durumda

$$\varphi_1(s, t)(p) = \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})sht + \alpha(s)$$

denklemden

$$\vec{T}' = k_1 \vec{N}$$

$$\vec{N}' = -k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}$$

$$\vec{B}' = k_2 \vec{N}$$

olmak üzere

$$\varphi_{1t}(s, t) = sht.\vec{p} + cht(\vec{T} \wedge_L \vec{p}) - sht \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}$$

$$\varphi_{1s}(s, t) = sht.k_1(\vec{N} \wedge_L \vec{p}) + (1 - cht)k_1 \langle \vec{N}, \vec{p} \rangle_L \vec{T} + (1 - cht) \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L k_1 \vec{N} + \vec{T} \text{ elde}$$

edilir. $\vec{p} = \lambda \vec{N}$ alınırsa

$$\varphi_{1t}(s, t) = sht.\lambda \vec{N} - cht.\lambda \vec{B}$$

$$\varphi_{1s}(s, t) = (1 - cht)k_1 \lambda \vec{T} + \vec{T}$$

elde edilir. Yüzeyin normali ise

$$\varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} = (cht.\lambda + (1-cht)chtk_1\lambda^2)\vec{N} + (-sht.\lambda - (1-cht)shstk_1\lambda^2)\vec{B}$$

Bu çarpım vektörü $\vec{p}$ noktasının yörüngesinin çizdiği yüzeyin normal vektörüdür.

Teorem 5.2. E_1^3 de $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin binormali zamansı olmak üzere, α eğrisinin asli normali üzerinde seçilen bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

İspat. Yüzeyin normali

$$\varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} = (cht.\lambda + (1-cht)chtk_1\lambda^2)\vec{N} + (-sht.\lambda - (1-cht)shstk_1\lambda^2)\vec{B}$$

ve $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ uzaysı, $\vec{B}$ zamansı olduğundan

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = (\lambda + (1-cht)k_1\lambda^2)^2 > 0$$

elde edilir ki, bu ise yüzeyin zamansı olmasıdır.

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri ise $\vec{T}$ zamansıdır.

Bu durumda, $\vec{N}$ uzaysı ve $\vec{B}$ uzaysı olur. O zaman

$$\varphi_2(s, t)(p) = \vec{p} \cos t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p}) \sin t + \alpha(s)$$

denkleminde

$$\vec{T}' = k_1 \vec{N}$$

$$\vec{N}' = k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}$$

$$\vec{B}' = -k_2 \vec{N}$$

olmak üzere, $\vec{p} = \lambda \vec{N}$ alınırsa

$$\varphi_{2t}(s, t) = -\sin t.\lambda \vec{N} + \cos t.\lambda \vec{B}$$

$$\varphi_{2s}(s, t) = (1 - (1 - \cos t).k_1\lambda)\vec{T}$$

elde edilir. Yüzeyin normalini hesaplırsak

$$\varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} = (-\cos t.\lambda + (1 - \cos t)\cos tk_1\lambda^2)\vec{N} + (-\sin t.\lambda + (1 - \cos t)\sin tk_1\lambda^2)\vec{B}$$

dır. Bu çarpım $\vec{p}$ noktasının yörüngesinin çizdiği yüzeyin normalidir.

Teorem 5.3. E_1^3 de $A_2(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, zamansı α eğrisinin asli normali üzerinde seçilen bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

İspat. Yüzeyin normali

$$\varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} = (-\cos t \lambda + (1 - \cos t) \cos tk_1 \lambda^2) \vec{N} + (-\sin t \lambda + (1 - \cos t) \sin tk_1 \lambda^2) \vec{B}$$

ve $\vec{T}$ zamansı, $\vec{N}$ uzaysı, $\vec{B}$ uzaysı olduğundan

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = (\lambda - (1 - \cos t) k_1 \lambda^2)^2 > 0$$

elde edilir ki, bu ise yüzeyin zamansı olması demektir.

5.1. Yörünge Yüzeylerinin Parametrizasyonları

Bu bölümde E_1^3 deki iki parametrelili hareketler yardımıyla bazı yörünge yüzeylerinin parametrizasyonlarını elde edeceğiz.

5.1.1. Silindir yüzeyi

1) $\alpha(s)$ uzaysı bir eğri ise

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E_1^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (0, 0, s) \end{aligned}$$

eğrisini ele alalım.

$\vec{T} = (0, 0, 1)$ ve $p \in E_1^3$ noktası da $p = (p_1, p_2, p_3)$ şeklinde verilsin. Bu değerler (5.9) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_1(s, t)(p) &= \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})sht + \alpha(s) \\ &= (p_1cht + p_2sht, p_2cht + p_1sht, p_3 + s) \end{aligned}$$

elde edilir. $p = (p_1, p_2, 0)$ olarak seçilirse

$$\varphi_1(s, t)(p) = (p_1cht + p_2sht, p_2cht + p_1sht, s)$$

bulunur.

$$p_1 = rsh\theta$$

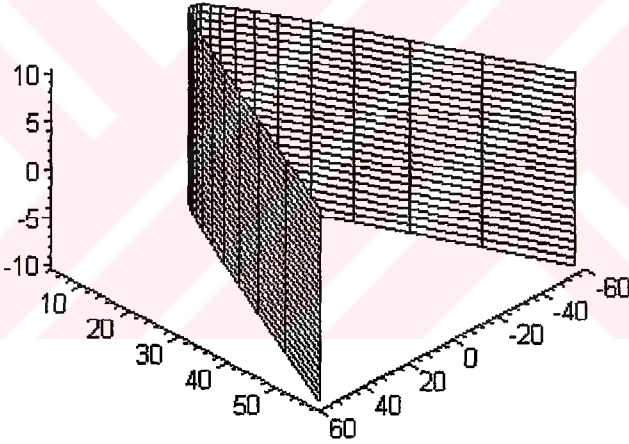
$$p_2 = rch\theta$$

yazılabileceğinden

$$\varphi_1(s,t)(p) = (rsh\theta cht + rsh\theta ch\theta, rch\theta cht + rsh\theta sht, s)$$

$$= (rsh(\theta + t), rch(\theta + t), s)$$

elde edilir ki, bu ise z eksenli Lorentz silindir yüzeyi için bir parametrisasyondur Şekil 5.1.



Şekil 5.1. uzaysı silindir

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri ise

$\alpha(s) = (s, 0, 0)$ olacak şekilde seçebiliriz.

$T = \alpha'(s) = (1, 0, 0)$ ve $p = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{c} = \vec{T}$ olmak üzere (5.10) denkleminde

$$\begin{aligned}\varphi_2(s,t)(p) &= \vec{p} \cos t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p}) \sin t + \alpha(s) \\ &= (p_1 + s, p_2 \cos t - p_3 \sin t, p_3 \cos t + p_2 \sin t)\end{aligned}$$

$p = (0, p_2, p_3)$ olarak seçilirse

$$\varphi_2(s,t)(p) = (s, p_2 \cos t - p_3 \sin t, p_3 \cos t + p_2 \sin t)$$

elde edilir.

$$p_2 = r \cos \theta$$

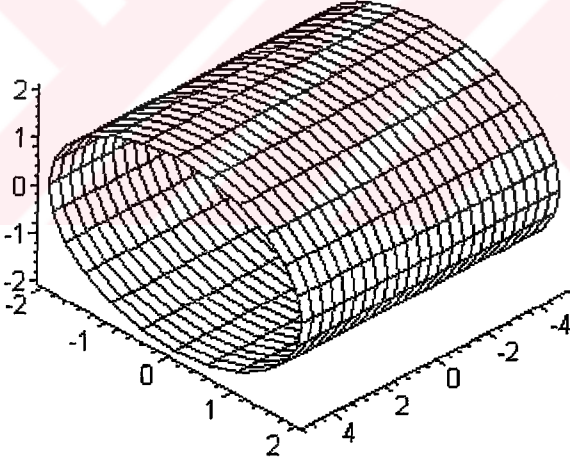
$$p_3 = r \sin \theta$$

şeklinde alınırsa

$$\varphi_2(s,t)(p) = (s, r \cos \theta \cos t - r \sin \theta \sin t, r \sin \theta \cos t + r \cos \theta \sin t)$$

$$= (s, r \cos(\theta + t), r \sin(\theta + t))$$

elde edilir ki, bu x - eksenli Lorentz silindiri yüzeyinin parametrisasyonudur Şekil5.2.



Şekil 5.2. zamansıl silindir

5.1.2. Tor yüzeyi

1) $\alpha(s)$ uzaysı bir eğri ise

İki hal vardır. Bunları sırası ile inceleyelim.

1-a) $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ zamansı ve $\vec{B}$ uzaysı olsun.

$\alpha(s) = (rchs, rshs, 0)$ eğrisi x_0y - düzleminde r yarıçaplı Lorentz çemberidir. Bu eğri için

$$\alpha'(s) = (rshs, rchs, 0)$$

$$\vec{T} = (shs, chs, 0)$$

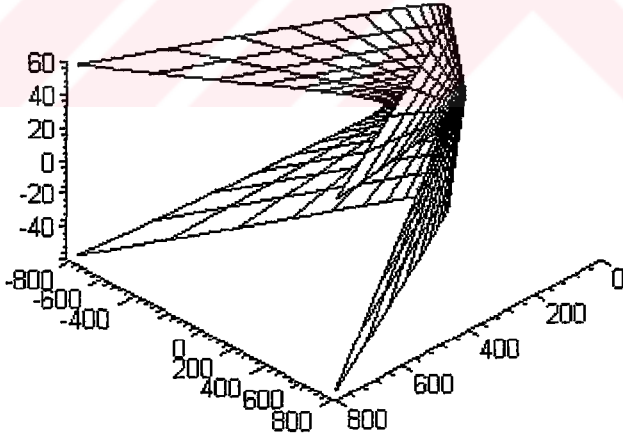
$$\vec{B} = (0, 0, -1)$$

$$\vec{N} = (chs, shs, 0)$$

ve $\vec{p} = \lambda \vec{N}$ olmak üzere bu değerler (5.9) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_1(s, t)(p) &= \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})shs + \alpha(s) \\ &= \lambda \vec{N}cht + \lambda \vec{B}shs + \alpha(s) \\ &= (chs(r + \lambda cht), shs(r + \lambda cht), -\lambda shs) \end{aligned}$$

bulunur Şekil 5.3.



Şekil 5.3. uzaysı tor yüzeyi 1

1-b) $\vec{T}$ uzayısı, $\vec{N}$ uzayısı ve $\vec{B}$ zamansı olsun.

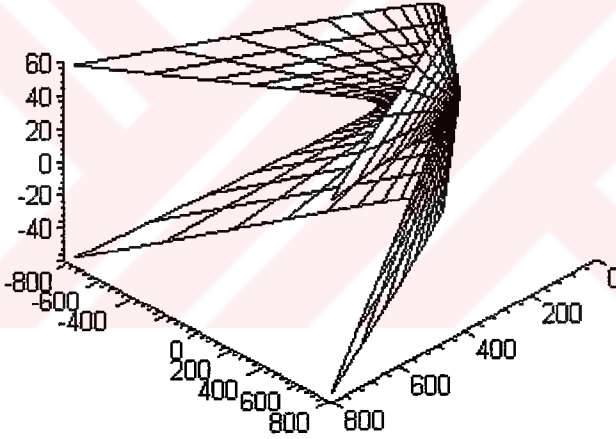
$\vec{p} = \lambda \vec{N}$ olmak üzere (5.9) denkleminde

$$\varphi_1(s, t)(p) = \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})sht + \alpha(s)$$

$$= \lambda \vec{N}cht - \lambda \vec{B}sht + \alpha(s)$$

$$= (chs(r + \lambda cht), shs(r + \lambda cht), \lambda sht)$$

elde edilir. Bu ise $0 < t < 2\pi, 0 < s < 2\pi$ olmak üzere, λ yarıçaplı bir Lorentz çemberinin, aynı düzlemde orijine uzaklığı r olan bir çember etrafında dönmesiyle oluşan tor yüzeyinin parametrisasyonudur Şekil 5.4.



Şekil 5.4. uzayısı tor yüzeyi 2

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri ise

xOy düzleminde r yarıçaplı Lorentz çemberi olarak alınabilir. $\alpha(s) = (rshs, rchs, 0)$ olmak üzere

$$\alpha'(s) = (rchs, rshs, 0)$$

$$\vec{T} = (chs, shs, 0)$$

$$\vec{B} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{N} = (shs, chs, 0)$$

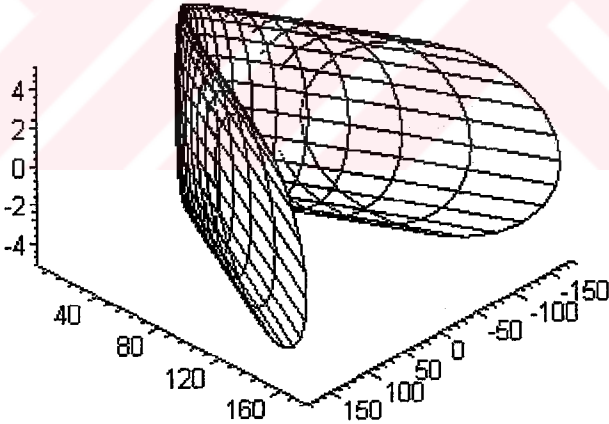
ve $\vec{p} = \lambda \vec{N}$ olmak üzere bulunan bu değerler (5.10) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\varphi_2(s, t)(p) = \vec{p} \cos t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p}) \sin t + \alpha(s)$$

$$= \lambda N \cos t + \lambda \vec{B} \sin t + \alpha(s)$$

$$= (shs(r + \lambda \cos t), chs(r + \lambda \cos t), \lambda \sin t)$$

elde edilir. Bu ise $0 < t < 2\pi, 0 < s < 2\pi$ olmak üzere, λ yarıçaplı bir çemberin, aynı düzlemde orijine uzaklığı r olan bir çember etrafında dönmesiyle oluşan tor yüzeyinin parametrizasyonudur Şekil 5.5.



Şekil 5.5. zamansı tor yüzeyi

E_1^3 uzayında dönel yüzeyleri, ele aldığımız anlamda , yörünge yüzeyleri olarak da vermek mümkündür. Bu durumda noktayı hareketli ve eksenini sabit almak, işlemlerin kolaylığı açısından önemlidir.

$\beta(s)$, xOz -düzleminde $\alpha(s) = (0,0,s)$ uzaysı bir eğri olmak üzere, z - eksenini dönme eksenini olsun.

$\alpha(s) = (0,0,s)$ olmak üzere $\vec{T} = (0,0,1)$ ve yüzeyin hareketli noktası

$$p(s) = \beta(s) = (\beta_1(s), 0, \beta_3(s))$$

ise (5.9) denkleminde

$$\begin{aligned}\varphi_1(s,t)(p) &= \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge \vec{p})sht + \alpha(s) \\ &= (\beta_1(s)cht, -\beta_1(s)sht, \beta_3(s) + s)\end{aligned}$$

şeklinde yörünge yüzeylerinin parametrizasyonu elde edilir.

Şimdi de $\beta(s)$, xOz düzleminde bir eğri ve $\alpha(s)$ de zamansız bir eğri olmak üzere, x - eksenini dönme eksenini olsun. $\alpha(s) = (s,0,0)$ olmak üzere $\vec{T} = (1,0,0)$ ve yüzeyin hareketli noktası

$$p(s) = \beta(s) = (\beta_1(s), 0, \beta_3(s))$$

ise (5.10) denkleminde

$$\begin{aligned}\varphi_2(s,t)(p) &= \vec{p} \cos t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p}) \sin t + \alpha(s) \\ &= (\beta_1(s) + s, -\beta_3(s) \sin t, \beta_3(s) \cos t)\end{aligned}$$

şeklinde yörünge yüzeylerinin parametrizasyonu elde edilir. Bu tür dönel yüzeyleri çoğaltmak mümkündür.

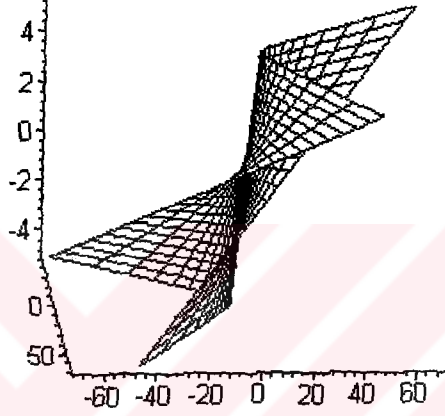
5.1.3. Hiperboloid yüzeyi

1) $\alpha(s)$ uzaysı bir eğri ise:

$\alpha(s) = (0,0,s)$ ve $p(s) = \beta(s) = (1,s,0)$ olarak alınabilir. Bu durumda (5.9) denkleminde

$$\begin{aligned}\varphi_1(s,t)(p) &= \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})sh t + \alpha(s) \\ &= (cht - s sh t, s cht + sh t, s)\end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir ki, bu 3-boyutlu Lorentz uzayında dönel hiperboloid yüzeyidir
Şekil 5.6.



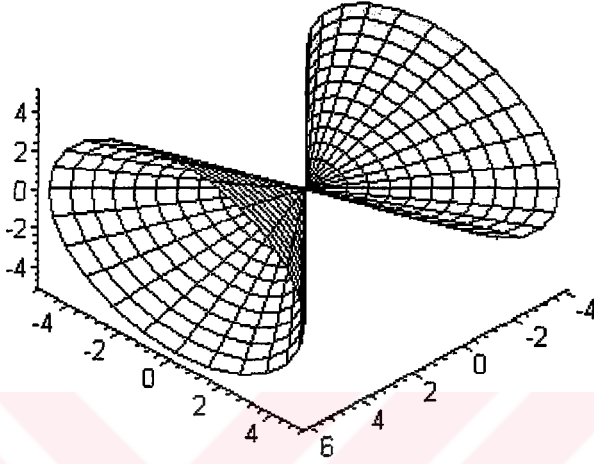
Şekil 5.6. uzaysı hiperboloid yüzeyi

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri ise:

$\alpha(s) = (s, 0, 0)$ ve $p(s) = \beta(s) = (1, s, 0)$ olarak alınabilir. Bu durumda (5.10) denkleminde

$$\begin{aligned}\varphi_2(s,t)(p) &= \vec{p} \cos t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p}) \sin t + \alpha(s) \\ &= (1 + s, s \cos t, s \sin t)\end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir ki, bu 3-boyutlu Lorentz uzayında dönel hiperboloid yüzeyidir
Şekil 5.7.



Şekil 5.7. zamansız hiperboloid yüzeyi

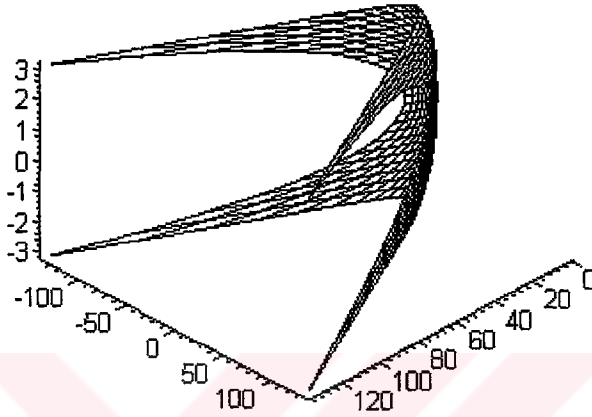
5.1.4. Catenoid yüzeyi

1) $\alpha(s)$ uzaysı bir eğri ise:

$\alpha(s) = (0, 0, s)$ ve $p(s) = (chs, 0, 0)$ olarak alınabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\varphi_1(s, t)(p) &= \bar{p}cht + \langle \bar{T}, \bar{p} \rangle_L \bar{T}(1 - cht) + (\bar{T} \wedge_L \bar{p})sht + \alpha(s) \\ &= (chs\,sht, -chs\,sht, s)\end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir ki, bu 3-boyutlu Lorentz uzayında catenoid yüzeyidir Şekil 5.8.



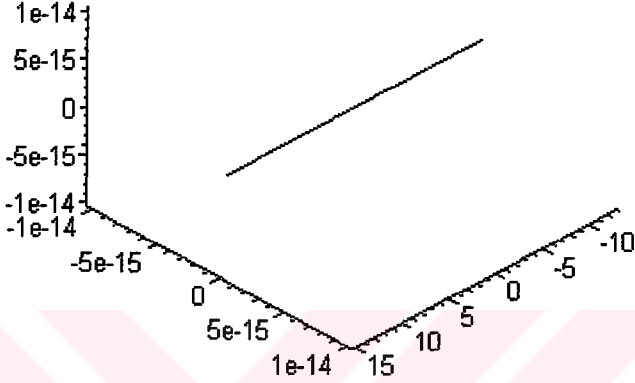
Şekil 5.8. uzaysı catenoid yüzeyi

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri ise:

$\alpha(s) = (s, 0, 0)$ ve $p(s) = \beta(s) = (chs, 0, 0)$ olarak alınabilir. Bu durumda (5.10) denkleminde

$$\begin{aligned} \varphi_2(s, t)(p) &= \bar{p} \cos t - \langle \bar{T}, \bar{p} \rangle_L \bar{T} (1 - \cos t) + (\bar{T} \wedge_L \bar{p}) \sin t + \alpha(s) \\ &= (\cos t(chs - 1) + 1 + s, 0, 0) \end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir ki, bu 3-boyutlu Lorentz uzayında catenoid yüzeyidir Şekil 5.9.



Şekil 5.9. zamansız catenoid yüzeyi

5.1.5. Hortum yüzeyi

5.1.5.1. Hortum yüzeyi üzerine çizili helis eğrisi

1) $\alpha(s)$ uzaysı bir eğri ise

$$\varphi_1(s, t)(p) = \vec{p}cht + \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T}(1 - cht) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p})sht + \alpha(s)$$

iki parametrelili hareketinde $\vec{p} = \lambda \vec{N}(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ özel seçimini yapalım.

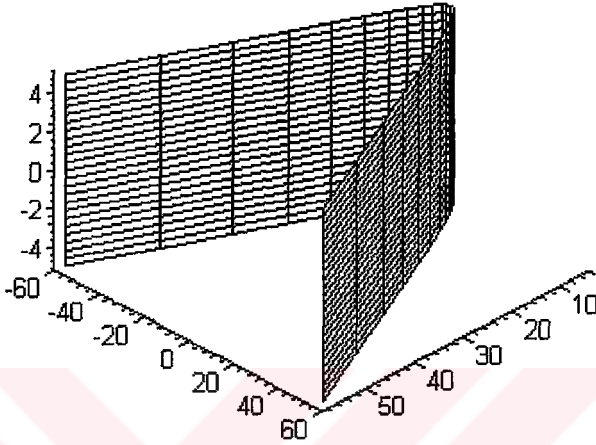
1-a) $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ zamansız ve $\vec{B}$ uzaysı olması halinde

$$\varphi_1(s, t)(p) = \lambda \vec{N}cht + \lambda \vec{B}sht + \alpha(s) \quad (5.11)$$

dır. Eğer $\alpha(s) = (0, 0, s)$, $\vec{T} = (0, 0, 1)$, $\vec{N} = (1, 0, 0)$, $\vec{B} = (0, 1, 0)$ olarak alınıp (5.11) denkleminde yerine yazılır ise

$$\varphi_1(s, t) = (\lambda cht, \lambda sht, s)$$

özel bir hortum yüzeyi olan Lorentz silindiri elde edilir Şekil 5.10.



Şekil 5.10.uzaysı hortum yüzeyi 1

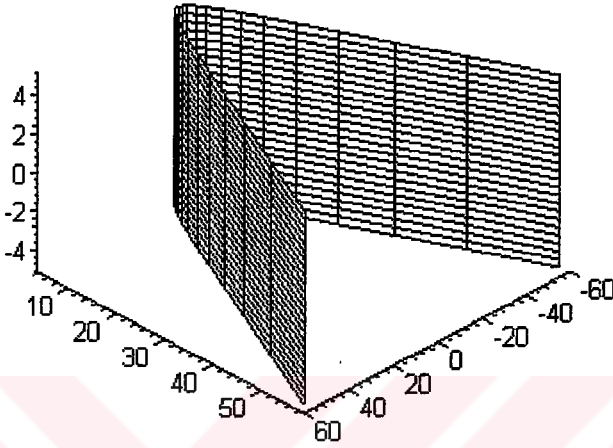
1-b) $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ uzaysı ve $\vec{B}$ zamansı olması halinde

$$\varphi_1(s,t)(p) = \lambda \vec{N}cht - \lambda \vec{B}sht + \alpha(s) \quad (5.12)$$

elde edilir ki, bu ise $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı E_1^3 uzayında hortum yüzeyinin parametrik denklemdir. Eğer $\alpha(s) = (0,0,s)$ $\vec{T} = (0,0,1)$, $\vec{N} = (0,1,0)$, $\vec{B} = (1,0,0)$ olarak alınıp (5.12) denkleminde yerine yazılır ise

$$\varphi_1(s,t) = (-\lambda sht, \lambda cht, s)$$

özel bir hortum yüzeyi olan silindir elde edilir. Şekil 5.11.



Şekil 5.11. uzaysı hortum yüzeyi 2

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri ise

$$\varphi_2(s, t)(p) = \vec{p} \cos t - \langle \vec{T}, \vec{p} \rangle_L \vec{T} (1 - \cos t) + (\vec{T} \wedge_L \vec{p}) \sin t + \alpha(s)$$

iki parametrelili hareketinde $\vec{p} = \lambda \vec{N}(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ özel seçimini yapalım.

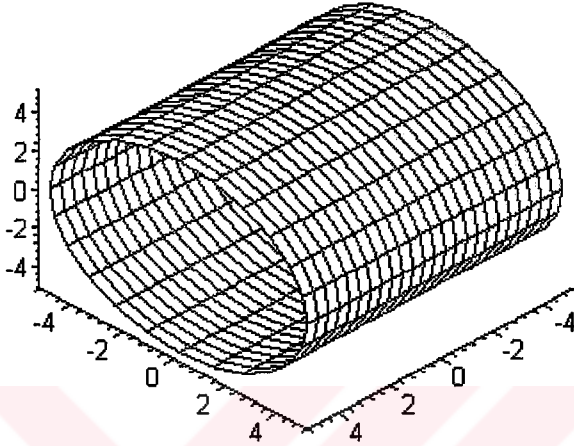
$$\varphi_2(s, t)(p) = \lambda \vec{N} \cos t + \lambda \vec{B} \sin t + \alpha(s) \quad (5.13)$$

elde edilir ki, bu $\alpha(s)$ eğrisi boyunca tanımlı hortum yüzeyinin parametrik denklemdir.

Eğer $\alpha(s) = (s, 0, 0)$, $\vec{T} = (1, 0, 0)$, $\vec{N} = (0, 1, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, 1)$ olarak alınıp (5.13) de yerine yazılırsa

$$\varphi_2(s, t)(p) = (s, \lambda \cos t, \lambda \sin t)$$

elde edilir Şekil 5.12.



Şekil 5.12. zamansız hortum yüzeyi

$t = t(s)$ ve özel olarak da $t = s$ alalım. O halde hortum yüzeyi üzerine çizili olan bir eğri elde edilir. Bu eğrinin denklemi (5.11) denkleminde

$$\beta(s) = \lambda \vec{N}(s)chs + \lambda \vec{B}(s)shs + \alpha(s) \quad (5.14)$$

elde edilir. (5.12) den

$$\beta(s) = \lambda \vec{N}(s)chs - \lambda \vec{B}(s)shs + \alpha(s) \quad (5.15)$$

ve (5.13) denkleminde

$$\beta(s) = \lambda \vec{N}(s)\cos s + \lambda \vec{B}(s)\sin s + \alpha(s) \quad (5.16)$$

olarak bellidir. Bu eğriler E_1^3 uzayında hortum yüzeyi üzerine çizili helis eğrileridir.

1) Eğer $\alpha(s) = (0,0,s)$ uzaysı bir eğri ise

1-a) $\vec{T} = (0,0,1), \vec{N} = (1,0,0), \vec{B} = (0,1,0)$ ve $\lambda = 1$ olmak üzere (5.14) den

$$\beta(s) = (chs, shs, s) \quad (5.17)$$

dir.

1-b) $\vec{T} = (0,0,1), \vec{N} = (0,1,0), \vec{B} = (1,0,0)$ ve $\lambda = 1$ olmak üzere (5.15) den

$$\beta(s) = (-shs, chs, s) \quad (5.18)$$

elde edilir.

2) Eğer $\alpha(s) = (s, 0, 0)$ zamansı bir eğri ise $\vec{T} = (1, 0, 0), \vec{N} = (0, 1, 0), \vec{B} = (0, 0, 1)$ ve $\lambda = 1$ olmak üzere (5.16) dan

$$\beta(s) = (s, \cos s, \sin s) \quad (5.19)$$

helis eğrileri elde edilmiş olur.

Bu özel seçime dikkat edilirse ele alınan eğriler, ekseni z veya ekseni x olan 3-boyutlu Lorentz uzayındaki silindir üzerine kurulu helis eğrileridir.

5.1.5.2. $\beta(s)$ eğrisi ile belirli hortum yüzeyi

Bu bölümde (5.14),(5.15),(5.16) denklemlerindeki $\beta(s)$ eğrisini ele alıp, $\beta(s)$ kaynaklı hortum yüzeyini ele alacağız. Bu yüzeyin denklemi için $\vec{p}^* = \lambda \vec{N}^*(s)$ olmak üzere (5.9) denkleminde

$$\varphi^*(s, t)(p^*) = \lambda \vec{N}^*(s)cht + \lambda \vec{B}^*(s)sht + \beta(s) \quad (5.20)$$

ve

$$\varphi^*(s, t)(p^*) = \lambda \vec{N}^*(s)cht - \lambda \vec{B}^*(s)sht + \beta(s) \quad (5.21)$$

elde edilir. Ayrıca (5.10) denkleminde de

$$\varphi^*(s, t)(p^*) = \lambda \vec{N}^*(s) \cos t + \lambda \vec{B}^*(s) \sin t + \beta(s) \quad (5.22)$$

olarak hesaplayacağız.

(5.11), (5.12) ve (5.13) deki elde edilen yüzeyler üzerinde özel seçilen $\beta(s)$ eğrisi yardımı ile hortum yüzeylerinin denklemlerini yazabiliriz.

a) $\beta(s) = (chs, shs, s)$ eğrisi üzerine kurulu hortum yüzeyi

$\beta(s) = (chs, shs, s)$ olmak üzere

$$\vec{T}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(shs, chs, 1)$$

$$\vec{B}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(shs, chs, -1)$$

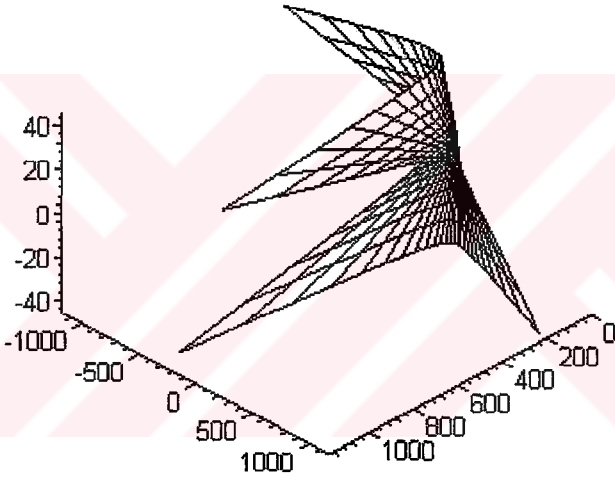
$$\vec{N}^* = (-chs, -shs, 0)$$

elde edilir.

$\vec{p}^* = \lambda \vec{N}^* = \lambda(-chs, -shs, 0), \lambda \in \mathbb{R}$ olup bu değerler (5.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$\varphi^*(s, t)(p^*) = \begin{pmatrix} -\lambda chs cht + \frac{\lambda shs sht}{\sqrt{2}} + chs, \\ -\lambda shs cht + \frac{\lambda chs sht}{\sqrt{2}} + shs, \\ -\frac{\lambda sht}{\sqrt{2}} + s \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, bu eşitlik aranan hortum yüzeyinin parametrisasyonudur Şekil 5.13.



Şekil 5.13. $\beta(s) = (chs, shs, s)$ eğrisi ile elde edilen hortum yüzeyi

b) $\beta(s) = (-shs, chs, s)$ eğrisi üzerine kurulu hortum yüzeyi

$\beta(s) = (-shs, chs, s)$ olmak üzere $\vec{T}^* = \beta'(s) = (-chs, shs, 1)$ olduğundan

eğri boşluksu bir eğridir. Eğrinin binormal vektör alanı $B^* = W_1 = \beta''(s) = (-shs, chs, 0)$

olacak şekilde seçelim. N^* vektör alanını $\langle N^*, N^* \rangle_L = 0$ ve $\langle T^*, N^* \rangle_L = 1$ olacak şekilde bulmalıyız. Bunun için $\langle T^*, V \rangle_L \neq 0$ olacak şekilde V vektörü bulabiliriz.

Gerçekten $V = (1, 0, 0)$ alırsak $\langle T^*, V \rangle_L \neq 0$ dir. N^* için

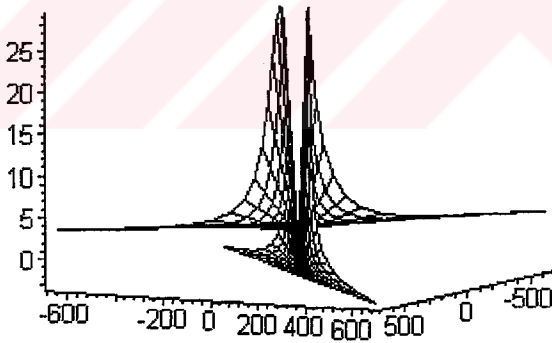
$$N^* = \frac{1}{\langle T^*, V \rangle_L} \left[V - \frac{\langle V, V \rangle_L}{2\langle T^*, V \rangle_L} T^* \right]$$

eşitliğinde değerleri yerlerine yazılırsa $N^* = \left(\frac{1}{2chs}, \frac{shs}{2ch^2s}, \frac{1}{2ch^2s} \right)$ elde edilir. O halde boşluksu eğrimizin E_1^3 uzayında Frenet çatısı bulunmuş olur. Bulunan bu değerler (5.21) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\varphi^*(s, t)(p^*) = \lambda N^*(s) \cos t - \lambda B^*(s) \sin t + \beta(s)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda cht}{2chs} + \lambda shs sht - shs, \\ \frac{\lambda shs cht}{2ch^2s} - \lambda chs sht + chs, \\ \frac{\lambda cht}{2ch^2s} + s \end{pmatrix}$$

elde edilir ki bu ise aranan hortum yüzeyinin parametrizasyonudur Şekil 5.14.



Şekil 5.14. $\beta(s) = (-shs, chs, s)$ eğrisi ile elde edilen hortum yüzeyi

c) $\beta(s) = (s, \cos s, \sin s)$ eğrisi üzerine kurulu hortum yüzeyi

$\beta(s) = (s, \cos s, \sin s)$ olmak üzere $\vec{T}^* = \beta'(s) = (1, -\sin s, \cos s)$ olduğundan eğri boşluksu bir eğridir. Eğrinin binormal vektör alanını

$B^* = W_1 = \beta''(s) = (0, -\cos s, -\sin s)$ olacak şekilde seçelim. N^* vektör alanını

$\langle N^*, N^* \rangle_L = 0$ ve $\langle T^*, N^* \rangle_L = 1$ olacak şekilde bulmalıyız. Bunun için $\langle T^*, V \rangle_L \neq 0$

olacak şekilde bir V vektörü bulabiliriz. Gerçekten $V = (1, 0, 0)$ alırsak $\langle T^*, V \rangle_L \neq 0$

dır. N^* için

$$N^* = \frac{1}{\langle T^*, V \rangle_L} \left[V - \frac{\langle V, V \rangle_L}{2\langle T^*, V \rangle_L} T^* \right]$$

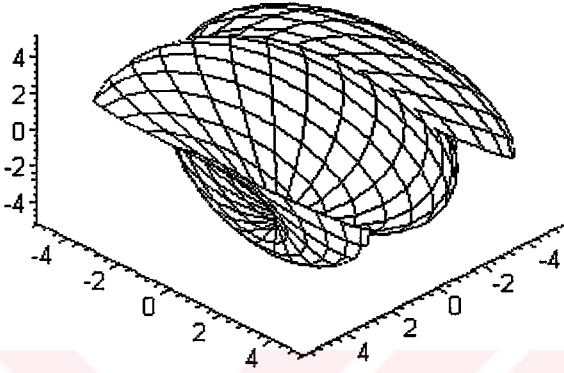
eşitliğinde değerleri yerlerine yazılırsa $N^* = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sin s}{2}, \frac{\cos s}{2} \right)$ elde edilir. O halde

boşluksu eğrimizin E_1^3 uzayında Frenet çatısı bulunmuş olur. Bulunan bu değerler (5.22) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\varphi^*(s, t)(p^*) = \lambda N^*(s) \cos t + \lambda B^*(s) \sin t + \beta(s)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-\lambda \cos t}{2} + s, \\ \frac{-\lambda \sin s \cos t}{2} - \lambda \cos s \sin t, \\ \frac{\lambda \cos s \cos t}{2} - \lambda \sin s \sin t \end{pmatrix}$$

elde edilir ki bu ise aranan hortum yüzeyinin parametrisasyonudur Şekil 5.15.



Şekil 5.15. $\beta(s) = (s, \cos s, \sin s)$ eğrisi ile elde edilen hortum yüzeyi

5.2. $\vec{c} = \vec{T}$, $p = \mu\vec{T} + \lambda\vec{N} + \kappa\vec{B}$ durumu

Bu kesimde, 5.1 de özel seçilen p noktası genel olarak ele alınacaktır. Ayrıca $\vec{c}$ dönme ekseninin seçilen eğrinin normali, binormali ve teğeti olması halleri ele alınacaktır.

Bu durumu iki halde inceleyelim.

1) $\alpha(s)$ uzayısı bir eğri olması hali:

1-a) $\vec{T}$ uzayısı, $\vec{N}$ zamansı ve $\vec{B}$ uzayısı olsun. Bu durumda

(5.9) denkleminde

$$\varphi_{1s}(s, t) = \sinh(\vec{T}' \wedge_L p) + (1 - \cosh)\langle \vec{T}', p \rangle_L \vec{T} + (1 - \cosh)\langle \vec{T}, p \rangle_L \vec{T}' + T$$

$$\varphi_{1s}(s, t) = p \sinh + \cosh(\vec{T} \wedge_L p) - \sinh\langle \vec{T}, p \rangle_L \vec{T}$$

elde edilir. Üstelik

$$\vec{T}' = k_1 \vec{N}$$

$$\vec{N}' = k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}$$

$$\vec{B}' = k_2 \vec{N}$$

olduğundan, p noktası yerine konur ve hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\varphi_{1s}(s, t) &= (sht.k_1\kappa - (1 - cht)k_1\lambda + 1)\vec{T} + ((1 - cht)k_1\mu)\vec{N} - (sht.k_1\mu)\vec{B} \\ \varphi_{1t}(s, t) &= (sht.\lambda + cht.\kappa)\vec{N} + (sht.\kappa + cht.\lambda)\vec{B}\end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali için de

$$\begin{aligned}\varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} &= [((1 - cht)k_1\mu)(sht.\kappa + cht.\lambda) + (sht.k_1\mu)(sht.\lambda + cht.\kappa)]\vec{T} \\ &+ [(1 + sht.k_1\kappa - (1 - cht)k_1\lambda)(sht.\kappa + cht.\lambda)]\vec{N} \\ &+ [(1 + sht.k_1\kappa - (1 - cht)k_1\lambda)(sht.\lambda + cht.\kappa)]\vec{B}\end{aligned}\quad (5.23)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.1. E_1^3 uzayında $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin asli normali zamansı ve dönme eksenli eğrinin teğeti olmak üzere, $\kappa\vec{B}$ veya $\mu\vec{T} + \kappa\vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzey, $\lambda\vec{N}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri uzaysı bir yüzey ve $\mu\vec{T}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

İspat. (5.23) denkleminde

$\lambda = 0$ ise

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L &= [(1 - (1 - cht)k_1\mu)(sht.\kappa) + (sht.k_1\mu)(cht.\kappa)]^2 \\ &+ \kappa^2(1 + sht.k_1\kappa) > 0\end{aligned}$$

$\lambda = \mu = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = \kappa^2(1 + sht.k_1\kappa)^2 > 0$$

olduğundan p noktasının yörüngesinin geometrik yeri, $\kappa\vec{B}$ veya $\mu\vec{T} + \kappa\vec{B}$ için zamansı bir yüzeydir.

$\mu = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = -\lambda^2(1 - (1 - cht)k_1\lambda)^2 < 0$$

olduğundan p noktasının yörüngesinin geometrik yeri, $\lambda\vec{N}$ için uzaysı bir yüzeydir.

$\lambda = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = 0$$

olduğundan p noktasının yörüngesinin geometrik yeri, $\mu\vec{T}$ için boşluksu bir yüzeydir

1-b) $\vec{T}$ uzayısı, $\vec{N}$ uzayısı ve $\vec{B}$ zamansı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= k_1 \vec{N} \\ \vec{N}' &= -k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B} \\ \vec{B}' &= k_2 \vec{N}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi_{1s}(s, t) &= (sht.k_1\kappa + (1 - cht)k_1\lambda + 1)\vec{T} + ((1 - cht)k_1\mu)\vec{N} - (sht.k_1\mu)\vec{B} \\ \varphi_{1t}(s, t) &= (sht.\lambda - cht.\kappa)\vec{N} + (sht.\kappa - cht.\lambda)\vec{B}\end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali içinde

$$\begin{aligned}\varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} &= [(1 - cht)k_1\mu(sht.\kappa - \cosh t.\lambda) - (sht.k_1\mu)(sht.\lambda - cht.\kappa)]\vec{T} \\ &\quad - [(1 + sht.k_1\kappa + (1 - cht)k_1\lambda)(sht.\kappa - cht.\lambda)]\vec{N} \\ &\quad - [(1 + sht.k_1\kappa - (1 - cht)k_1\lambda)(sht.\lambda - cht.\kappa)]\vec{B}\end{aligned} \quad (5.24)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.2. E_1^3 uzayında $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin binormali zamansı ve dönme eksen eğrinin teğeti olmak üzere, $\lambda\vec{N}$ veya $\mu\vec{T} + \lambda\vec{N}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzey, $\kappa\vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri uzayısı bir yüzey, $\mu\vec{T}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksuz bir yüzeydir.

İspat. (5.24) denkleminde

$\kappa = 0$ ise

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L &= [((1 - cht)k_1\mu)(cht.\lambda) - (sht.k_1\mu)(sht.\lambda)]^2 \\ &\quad + \lambda^2(1 + (1 - cht)k_1\lambda)^2 > 0\end{aligned}$$

ve

$\mu = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = \lambda^2(1 + (1 - cht)k_1\lambda)^2 > 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

$\mu = \lambda = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = -\kappa^2(1 + sht.k_1\kappa)^2 < 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri uzayısı bir yüzeydir.

$\lambda = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri olması hali:

$\vec{T}$ zamansı, $\vec{N}$ uzaysı ve $\vec{B}$ uzaysı olsun. Bu durumda

(5.10) denkleminde

$$\begin{aligned} \varphi_{2s}(s, t) &= \sin t (\vec{T}' \wedge_L p) - (1 - \cos t) \langle \vec{T}', p \rangle_L \vec{T} - (1 - \cos t) \langle \vec{T}, p \rangle_L \vec{T}' + T \\ \varphi_{2t}(s, t) &= -p \sin t + \cos t (\vec{T} \wedge_L p) - \sin t \langle \vec{T}, p \rangle_L \vec{T} \end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= k_1 \vec{N} \\ \vec{N}' &= k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B} \\ \vec{B}' &= -k_2 \vec{N} \end{aligned}$$

olduğundan, p noktasının koordinatları yerlerine konur ve hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \varphi_{2s}(s, t) &= (-\sin t k_1 \kappa - (1 - \cos t) k_1 \lambda + 1) \vec{T} + ((1 - \cos t) k_1 \mu) \vec{N} - (\sin t k_1 \mu) \vec{B} \\ \varphi_{2t}(s, t) &= -(\sin t \lambda + \cos t \kappa) \vec{N} + (\cos t \lambda - \sin t \kappa) \vec{B} \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali için de

$$\begin{aligned} \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} &= -[(1 - \cos t) k_1 \mu (\cos t \lambda - \sin t \kappa) + (\sin t k_1 \mu) (-\sin t \lambda - \cos t \kappa)] \vec{T} \\ &\quad - [(1 - \sin t k_1 \kappa - (1 - \cos t) k_1 \lambda) (\cos t \lambda - \sin t \kappa)] \vec{N} \\ &\quad + [(1 - \sin t k_1 \kappa - (1 - \cos t) k_1 \lambda) (-\sin t \lambda - \cos t \kappa)] \vec{B} \end{aligned} \quad (5.25)$$

dır.

Teorem 5.2.3. E_1^3 uzayında $A_2(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, zamansı eğrinin, $\lambda \vec{N}$, $\kappa \vec{B}$ veya $\lambda \vec{N} + \kappa \vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzey, $\mu \vec{T}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

İspat. (5.25) denkleminde

$\mu = 0$ ise

$$\langle \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t}, \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} \rangle_L = (1 - \sin t k_1 \kappa - (1 - \cos t) k_1 \lambda)^2 (\lambda^2 + \kappa^2) > 0$$

$\mu = \lambda = 0$ ise

$$\langle \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t}, \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} \rangle_L = (1 - \sin t k_1 \kappa - (1 - \cos t) k_1 \lambda)^2 (\lambda^2 + \kappa^2) > 0$$

$\mu = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t}, \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} \rangle_L = \lambda^2 (1 - (1 - \cos t) k_1 \lambda)^2 > 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

$\lambda = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t}, \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} \rangle_L = 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

5.3. $\vec{c} = \vec{N}$, $p = \mu \vec{T} + \lambda \vec{N} + \kappa \vec{B}$ durumu

Bu durumda iki hal vardır. Bunları sırası ile inceleyelim.

1) $\alpha(s)$ uzayısı bir eğri olması hali:

1-a) $\vec{T}$ uzayısı, $\vec{N}$ zamansı ve $\vec{B}$ uzayısı olsun. Bu durumda

$$\varphi_{2s}(s, t) = \sin t (\vec{N}' \wedge_L p) - (1 - \cos t) \langle \vec{N}', p \rangle_L \vec{N} - (1 - \cos t) \langle \vec{N}, p \rangle_L \vec{N}' + T$$

$$\varphi_{2t}(s, t) = -p \sin t + \cos t (\vec{N} \wedge_L p) - \sin t \langle \vec{N}, p \rangle_L \vec{N}$$

elde edilir. p noktasın koordinatları yerlerine konur ve hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \varphi_{2s}(s, t) = & (-\sin t k_2 \lambda + (1 - \cos t) k_1 \lambda + 1) \vec{T} + ((\sin t k_1 \kappa - \sin t k_2 \mu) - (1 - \cos t)(k_1 \mu + k_2 \kappa)) \vec{N} \\ & + (\sin t k_1 \lambda + (1 - \cos t) k_2 \lambda) \vec{B} \end{aligned}$$

$$\varphi_{2t}(s, t) = (\cos t \kappa - \sin t \mu) \vec{T} - (\sin t \kappa + \cos t \mu) \vec{B}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali için de

$$\begin{aligned} \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} = & [(\sin t (k_1 \kappa - k_2 \mu) - (1 - \cos t)(k_1 \mu + k_2 \kappa))(-\sin t \kappa - \cos t \mu)] \vec{T} \\ & + \left[(1 + (1 - \cos t) k_1 \lambda - \sin t k_2 \lambda)(-\sin t \kappa - \cos t \mu) \right] \vec{N} \\ & - [(\sin t (k_1 \kappa - k_2 \mu) - (1 - \cos t)(k_1 \mu + k_2 \kappa))(\cos t \kappa - \sin t \mu)] \vec{B} \end{aligned} \quad (5.26)$$

elde edilir.

Teorem 5.3.1. E_1^3 uzayında $A_2(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin asli normalı zamansı ve dönme eksenı eğrinin asli normalı olmak üzere, $\lambda \vec{N}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

İspat. (5.26) denkleminde

$\mu = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t}, \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} \rangle_L = 0$$

olduğundan p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

1-b) $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ uzaysı ve $\vec{B}$ zamansı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}(s, t) &= (-sht.k_2\lambda - (1-cht)k_1\lambda + 1)\vec{T} + ((1-cht)\lambda + sht.k_1\kappa + sht.k_2\mu)\vec{N} \\ &\quad + (sht.k_1\lambda + (1-cht)k_2\lambda)\vec{B} \\ \varphi_{1t}(s, t) &= (sht.\mu + cht.\kappa)\vec{T} + (sht.\kappa + cht.\mu)\vec{B} \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzeyin normalı için de

$$\begin{aligned} \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} &= \left[((1-cht)\lambda + sht.k_1\kappa + sht.k_2\mu)(sht.\kappa + cht.\mu) \right] \vec{T} \\ &\quad + \left[(sht.k_1\lambda + (1-cht)k_2\lambda)(sht.\mu + cht.\kappa) \right. \\ &\quad \left. - (1-sht.k_2\lambda - (1-cht)k_1\lambda)(sht.\kappa + cht.\mu) \right] \vec{N} \\ &\quad + \left[(sht.k_1\kappa + sht.k_2\mu + (1-cht)\lambda)(sht.\mu + cht.\kappa) \right] \vec{B} \end{aligned} \quad (5.27)$$

elde edilir.

Teorem 5.3.2. E_1^3 uzayında $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin binormalı zamansı ve dönme eksenı eğrinin asli normalı olmak üzere, $\mu \vec{T}$, $\mu \vec{T} + \lambda \vec{N}$ veya $\mu \vec{T} + \kappa \vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzey, $\lambda \vec{N}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

İspat. (5.27) denkleminde

$\lambda = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = (sht.\kappa + cht.\mu)^2 > 0$$

$\lambda = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = (cht.\mu)^2 > 0$$

$\kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = \mu^2 \left[((1 - cht)\lambda + sht k_2 \mu) \right]^2 + \left[\begin{aligned} &(sht k_1 \lambda + (1 - cht)k_2 \lambda)(sht, \mu) \\ &- (1 - sht k_2 \lambda - (1 - cht)k_1 \lambda)(cht, \mu) \end{aligned} \right]^2 > 0$$

olduğundan p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

$\mu = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = 0$$

olduğundan p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri olması hali:

$\vec{T}$ zamansı, $\vec{N}$ uzaysı ve $\vec{B}$ uzaysı olması halinde

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}(s, t) &= (sht k_2 \lambda + (1 - cht)k_1 \lambda + 1)\vec{T} \\ &+ ((1 - cht)k_2 \kappa - (1 - cht)k_1 \mu - sht k_1 \kappa + sht k_2 \mu)\vec{N} \\ &- (sht k_1 \lambda + (1 - cht)k_2 \lambda)\vec{B} \\ \varphi_{1t}(s, t) &= (sht, \mu - cht, \kappa)\vec{T} + (sht, \kappa - cht, \mu)\vec{B} \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali için de

$$\begin{aligned} \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} &= -[(sht k_2 \mu - sht k_1 \kappa - (1 - cht)k_1 \mu + (1 - cht)k_2 \kappa)(sht, \kappa - cht, \mu)]\vec{T} \\ &+ \left[\begin{aligned} &(sht k_1 \lambda + (1 - cht)k_2 \lambda)(sht, \mu - cht, \kappa) \\ &- (1 + sht k_2 \lambda + (1 - cht)k_1 \lambda)(sht, \kappa - cht, \mu) \end{aligned} \right]\vec{N} \\ &- [(sht k_2 \mu - sht k_1 \kappa - (1 - cht)k_1 \mu + (1 - cht)k_2 \kappa)(sht, \mu - cht, \kappa)]\vec{B} \end{aligned} \quad (5.28)$$

dır.

Teorem 5.3.3. E_1^3 uzayında $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, zamansı eğrinin, $\kappa \vec{B}$ veya $\lambda \vec{N} + \kappa \vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzey, $\lambda \vec{N}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

İspat. (5.28) denkleminde

$\mu = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = \kappa^2 (-sht k_1 \kappa + (1 - cht)k_2 \kappa)^2 + \left[\begin{aligned} &(sht k_1 \lambda + (1 - cht)k_2 \lambda)(-cht, \kappa) \\ &- (1 + sht k_2 \lambda + (1 - cht)k_1 \lambda)(sht, \kappa) \end{aligned} \right]^2 > 0$$

ve

$$\mu = \lambda = 0 \text{ ise}$$

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = \kappa^2 (-\sinh t k_1 \kappa + (1 - \cosh t) k_2 \kappa)^2 + (\sinh t \kappa)^2 > 0$$

olduğundan p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

$$\mu = \kappa = 0 \text{ ise}$$

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = 0$$

olduğundan p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

5.4. $\vec{c} = \vec{B}$, $p = \mu \vec{T} + \lambda \vec{N} + \kappa \vec{B}$ durumu

Bu durumda iki hal vardır. Bunları sırası ile inceleyelim.

1) $\alpha(s)$ uzaysı bir eğri olması hali:

1-a) $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ zamansı ve $\vec{B}$ uzaysı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}(s, t) &= (\sinh t k_2 \kappa + 1) \vec{T} + ((1 - \cosh t) k_2 \kappa) \vec{N} - ((\sinh t k_2 \mu + (1 - \cosh t) k_2 \lambda) \vec{B} \\ \varphi_{1t}(s, t) &= (\sinh t \mu - \cosh t \lambda) \vec{T} + (\sinh t \lambda - \cosh t \mu) \vec{B} \end{aligned}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali için de

$$\begin{aligned} \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} &= [(\sinh t k_2 \mu + (1 - \cosh t) k_2 \lambda)(\sin t \lambda - \cosh t \mu)] \vec{T} \\ &+ [(\sinh t k_2 \mu + (1 - \cosh t) k_2 \lambda)(\sin t \mu - \cosh t \lambda)] \vec{N} \\ &+ [(1 + \sinh t k_2 \kappa)(\sinh t \lambda - \cosh t \mu) - ((1 - \cosh t) k_2 \kappa)(\sinh t \mu - \cosh t \lambda)] \vec{B} \end{aligned} \quad (5.29)$$

elde edilir.

Teorem 5.4.1. E_1^3 uzayında $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin asli normali zamansı ve dönme eksen eğrinin binormali olmak üzere, $\mu \vec{T} + \kappa \vec{B}$ veya $\mu \vec{T}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzey, $\kappa \vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

İspat. (5.29) denkleminde

$$\lambda = 0 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L &= (\sinh t k_2 \mu)^2 \mu^2 \\ &+ [(1 + \sinh t k_2 \kappa)(-\cosh t \mu) - ((1 - \cosh t) k_2 \kappa)(\sinh t \mu)]^2 > 0 \end{aligned}$$

ve

$$\lambda = \kappa = 0 \text{ ise}$$

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = (sht.k_2\mu)^2 \mu^2 + (-cht.\mu)^2 > 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

$$\mu = \lambda = 0 \text{ ise}$$

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

1-b) $\vec{T}$ uzaysı, $\vec{N}$ uzaysı ve $\vec{B}$ zamansı olsun. Bu durumda

$$\varphi_{2s}(s, t) = (\sin t.k_2\kappa + 1)\vec{T} + ((1 - \cos t)k_2\kappa)\vec{N} + (\sin t.k_2\mu - (1 - \cos t)k_2\lambda)\vec{B}$$

$$\varphi_{2t}(s, t) = -(\sin t.\mu + \cos t.\lambda)\vec{T} + (\cos t.\mu - \sin t.\lambda)\vec{N}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali için de

$$\begin{aligned} \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} = & -[(\sin t.k_2\mu - (1 - \cos t)k_2\lambda)(\cos t.\mu - \sin t.\lambda)]\vec{T} \\ & -[(\sin t.k_2\kappa - (1 - \cos t)k_2\lambda)(\sin t.\mu + \cos t.\lambda)]\vec{N} \\ & -[(1 - \cos t)k_2\kappa(\sin t.\mu + \cos t.\lambda) + (1 + \sin t.k_2\kappa)(\cos t.\mu - \sin t.\lambda)]\vec{B} \end{aligned} \quad (5.30)$$

elde edilir.

Teorem 5.4.2. E_1^3 uzayında $A_2(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, eğrinin binormali zamansı ve dönme eksen eğrinin binormali olmak üzere, $\kappa\vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir .

İspat. (5.30) denkleminde

$$\mu = \lambda = 0 \text{ ise}$$

$$\langle \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t}, \varphi_{2s} \wedge_L \varphi_{2t} \rangle_L = 0$$

olduğundan p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir .

2) $\alpha(s)$ zamansı bir eğri olması hali:

$\vec{T}$ zamansı, $\vec{N}$ uzaysı ve $\vec{B}$ uzaysı olsun. Bu durumda

$$\varphi_{1s}(s, t) = (sht.k_2\kappa + 1)\vec{T} + ((1 - cht)k_2\kappa)\vec{N} + (sht.k_2\mu - (1 - cht)k_2\lambda)\vec{B}$$

$$\varphi_{1t}(s, t) = (sht.\mu + cht.\lambda)\vec{T} + (sht.\lambda + cht.\mu)\vec{N}$$

bulunur. Bu yüzeyin normali için de

$$\begin{aligned}\varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} = & [(sht.k_2\mu - (1-cht)k_2\lambda)(sht.\lambda + cht.\mu)]\vec{T} \\ & + [(sht.k_2\mu - (1-cht)k_2\lambda)(sht.\mu + cht.\lambda)]\vec{N} \\ & + [(1 + sht.k_2\kappa)(sht.\lambda + cht.\mu) + (1 - (1-cht)k_2\kappa)(sht.\mu - cht.\lambda)]\vec{B}\end{aligned}\quad (5.31)$$

dır.

Teorem 5.4.3. E_1^3 uzayında $A_1(s, t)$ yardımıyla elde edilen iki parametrelili harekette, zamansı eğrinin, $\lambda\vec{N}$ veya $\lambda\vec{N} + \kappa\vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzey, $\kappa\vec{B}$ üzerinde seçilmiş bir p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

İspat. (5.31) denkleminde

$\mu = 0$ ise

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = & (-(1-cht)k_2\lambda)^2 \lambda^2 \\ & + [(1 + sht.k_2\kappa)(sht.\lambda) + (1 - (1-cht)k_2\kappa)(-cht.\lambda)]^2 > 0\end{aligned}$$

ve

$\mu = \kappa = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = (-(1-cht)k_2\lambda)^2 \lambda^2 + (sht.\lambda - cht.\lambda)^2 > 0$$

olduğundan bir p noktasının geometrik yeri zamansı bir yüzeydir.

$\mu = \lambda = 0$ ise

$$\langle \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t}, \varphi_{1s} \wedge_L \varphi_{1t} \rangle_L = 0$$

olduğundan p noktasının geometrik yeri boşluksu bir yüzeydir.

6. İKİ PARAMETRELİ HAREKETLERİN GEOMETRİSİ

n -boyutlu Öklid uzayında bir cismin iki parametrelî hareketi

$$Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)X + C(\lambda, \mu) \quad (6.1)$$

ile tanımlanır. Burada $A \in SO(n)$ pozitif ortogonal bir matris, $C \in \mathbb{R}_1^n$ bir sütun matrisi, Y ve X , aynı bir B noktasının, sırasıyla, sabit ve hareketli uzayın ortonormal koordinat sistemlerine göre yer vektörleridir.

(6.1) ile verilen iki parametrelî harekette

$(\lambda, \mu) = (0, 0)$ için

$$A(0, 0) = A^{-1}(0, 0) = A^T(0, 0) = I \quad \text{ve} \quad C(0, 0) = 0$$

dır. Bu durumda sabit ve hareketli uzay çakışıkır. Eğer $\lambda = \lambda(t), \mu = \mu(t)$ ise iki parametrelî hareketten elde edilen bir parametrelî hareket söz konusudur. $A \in SO(n)$ olduğundan

$$A^T(\lambda, \mu)A(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)A^T(\lambda, \mu) = I$$

dır. Bundan sonra kısalığın hatırı için $A^T(\lambda, \mu) = A^T$ ve $A(\lambda, \mu) = A$ olarak alacağız.

Teorem 6.1. $A \in SO(n)$ ve n tek bir sayı olsun. Bu durumda A_λ ve A_μ nün rank'ları çifttir.

İspat. $A^T(\lambda, \mu)A(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)A^T(\lambda, \mu) = I$ ve $A(0, 0) = A^T(0, 0) = I$ olduğundan

$$A_\lambda A^T + A A_\lambda^T = 0$$

$$A_\lambda + A_\lambda^T = 0$$

ve

$$A_\mu A^T + A A_\mu^T = 0$$

$$A_\mu + A_\mu^T = 0$$

elde edilir. O halde A_λ ve A_μ anti-simetrik matrislerdir. n tek bir sayı olduğundan

$$\det A_\lambda = 0 \quad \text{ve} \quad \det A_\mu = 0$$

dır. O halde $\text{rank } A_\lambda = r(\text{çift})$ ve $\text{rank } A_\mu = r(\text{çift})$ olmalıdır.

Teorem 6.2. $A \in SO(n)$ olsun. O zaman

$$\text{rank } A_{\lambda\lambda} = 0 \Leftrightarrow \text{rank } A_\lambda = 0$$

ve

$$\text{rank } A_{\mu\mu} = 0 \Leftrightarrow \text{rank } A_\mu = 0$$

dır.

İspat. $A(\lambda, \mu)A^T(\lambda, \mu) = I$ olduğundan, λ ya göre türev alınırsa,

$$A_\lambda A^T + A A_\lambda^T = 0$$

$$A_{\lambda\lambda} A^T + A_\lambda A_\lambda^T + A_\lambda A_\lambda^T + A A_{\lambda\lambda}^T = 0$$

$$A_{\lambda\lambda} A^T + 2A_\lambda A_\lambda^T + A A_{\lambda\lambda}^T = 0$$

dır. $\text{rank } A_{\lambda\lambda} = 0$ olduğundan $A_{\lambda\lambda} = 0$ dır. O halde

$$A_\lambda A_\lambda^T = 0$$

elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$(A_\lambda A_\lambda^T)x^T = (0)x^T$$

$$(A_\lambda A_\lambda^T)x^T = 0$$

$$x(A_\lambda A_\lambda^T)x^T = 0$$

$$xA_\lambda A_\lambda^T x^T = 0$$

$$(xA_\lambda)(xA_\lambda)^T = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\langle xA_\lambda, xA_\lambda \rangle = 0$$

$$xA_\lambda = 0$$

dır. $\forall x \in \mathbb{R}_1^n$ için doğru olduğundan

$$A_\lambda = 0 \text{ ve } \text{rank } A_\lambda = 0$$

elde edilir. μ ye göre türev alınırsa, benzer şekilde

$$A_\mu A^T + A A_\mu^T = 0$$

$$A_{\mu\mu}A^T + A_\mu A_\mu^T + A_\mu A_\mu^T + AA_{\mu\mu}^T = 0$$

$$A_{\mu\mu}A^T + 2A_\mu A_\mu^T + AA_{\mu\mu}^T = 0$$

dır. $rank A_{\mu\mu} = 0$ olduğundan $A_{\mu\mu} = 0$ dır. O halde

$$A_\mu A_\mu^T = 0$$

elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$(A_\mu A_\mu^T)x^T = (0)x^T$$

$$(A_\mu A_\mu^T)x^T = 0$$

$$x(A_\mu A_\mu^T)x^T = 0$$

$$xA_\mu A_\mu^T x^T = 0$$

$$(xA_\mu)(xA_\mu)^T = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle xA_\mu, xA_\mu \rangle &= 0 \\ xA_\mu &= 0 \end{aligned}$$

dır. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için doğru olduğundan

$$A_\mu = 0 \text{ ve } rank A_\mu = 0$$

elde edilir. Tersi açıkça görülmektedir.

Tanım 6.1. $Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)X + C(\lambda, \mu)$ eşitliğinde $\lambda = \lambda(t)$ ve $\mu = \mu(t)$ ise, t ye

göre türev alınırsa, $\dot{Y} = Y_\lambda \dot{\lambda} + Y_\mu \dot{\mu}$, $\dot{A} = A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu}$, $\dot{C} = C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu}$ olmak üzere

$$\dot{Y} = \dot{A}X + \dot{C} + A\dot{X}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\dot{Y}, \dot{A}X + \dot{C}, A\dot{X}$, sırasıyla, $\bar{b}$ yer vektörüne sahip olan bir B noktasının; mutlak, sürüklenme ve relatif hızı denir.

$$\dot{A}X + \dot{C} = 0$$

sisteminin X çözümü, t anında sabit ve hareketli uzaylarda sabittir. Bu X noktalarına her t anı için ani pol noktaları denir.

Tanım 6.2. Ani Vida Eksen (A.V.E)

$Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)X + C(\lambda, \mu)$ denkleminde verilen iki parametrelili harekette $\text{rank } \dot{A} = n - 1 = \text{çift}$ ise hareketli uzayda herhangi bir anda sabit normlu bir hız vektörüne sahip noktaların geometrik yeri bir doğrudur. Bu doğruya ani vida eksen denir ve A.V.E ile gösterilir. Ayrıca, hareketli uzayın vida eksen

$$X = P + \sigma E$$

şeklindedir. Burada P , $\dot{A}X + \dot{C} = 0$ denkleminin bir özel çözümünü ve E de $\dot{A}X = 0$ homogen denkleminin çözüm uzayının bir bazını göstermektedir (Hacısalihoglu 1974).

6.1. $n = 3$ özel durumu

A_λ ve A_μ anti-simetrik matrisler olduğundan özel olarak

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & -j_3 & j_2 \\ j_3 & 0 & -j_1 \\ -j_2 & j_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & -i_3 & i_2 \\ i_3 & 0 & -i_1 \\ -i_2 & i_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ olsun. } A_\lambda = -A_\lambda^T, A_\mu = -A_\mu^T.$$

$$Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)X$$

denkleminde

$$X^{-1} = A^{-1}(\lambda, \mu)Y(\lambda, \mu)$$

bulunur. $Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)X$ eşitliğinden t ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} Y_\lambda \dot{\lambda} + Y_\mu \dot{\mu} &= \left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) X \\ &= \left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) A^{-1}(\lambda, \mu) Y(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

ve buradan $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ konumu ile

$$\begin{aligned} Y_\lambda \dot{\lambda} + Y_\mu \dot{\mu} &= \left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) Y(\lambda, \mu) \\ &= \Omega Y(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

elde edilir. A_λ ve A_μ anti-simetrik matrisler olduğundan

$$\Omega = A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -(j_3 \dot{\lambda} + l_3 \dot{\mu}) & (j_2 \dot{\lambda} + l_2 \dot{\mu}) \\ (j_3 \dot{\lambda} + l_3 \dot{\mu}) & 0 & -(j_1 \dot{\lambda} + l_1 \dot{\mu}) \\ (j_2 \dot{\lambda} + l_2 \dot{\mu}) & (j_1 \dot{\lambda} + l_1 \dot{\mu}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

açısal hız matrisi de anti-simetrik'dir. A matrisi ortogonal olduğundan

$$A(\lambda, \mu) A^T(\lambda, \mu) = I$$

dir. Buradan t ye göre türev alınırsa

$$\left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) A^T(\lambda, \mu) + A(\lambda, \mu) \left(A_\lambda^T \dot{\lambda} + A_\mu^T \dot{\mu} \right) = 0$$

dir. $(\lambda, \mu) = (0,0)$ için

$$\left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) + \left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right)^T = 0$$

elde edilir.

$\Omega = A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu}$ olduğundan

$$\Omega + \Omega^T = 0$$

$$\Omega^T = -\Omega$$

elde edilir ki, Ω anti-simetrik matristir.

$V_f = \left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) X + \left(C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right)$ ile verilen, sürüklenme hızı sıfır olan noktalar pol noktaları olduğundan

$$Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu) X + C(\lambda, \mu)$$

ile belirlenen iki parametrelili hareketin pol noktalarını verir.

$$\left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) X + \left(C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right) = 0 \quad (6.2)$$

denkleminin çözülebilmesi için $\text{rank} \left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) = \text{rank} \Omega = 2$ olmalıdır.

$$Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)X + C(\lambda, \mu)$$

$$A(\lambda, \mu)X = Y(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu)$$

$$A^{-1}(\lambda, \mu)A(\lambda, \mu)X = A^{-1}(\lambda, \mu)(Y(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu))$$

$$X = A^{-1}(\lambda, \mu)(Y(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu))$$

elde edilir. Bu X değerini (6.2) denkleminde yazarsak

$$\left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) \left[A^{-1}(\lambda, \mu)(Y(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu)) \right] + \left(C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right) = 0 \quad (6.3)$$

(0,0) konumunda

$$\left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) A^{-1}(\lambda, \mu) = \left(A_\lambda \dot{\lambda} + A_\mu \dot{\mu} \right) = \Omega$$

ve

$$Y(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu) = Y^*(\lambda, \mu)$$

dersek (6.3) denklemi

$$\Omega \wedge Y^*(\lambda, \mu) + \left(C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right) = 0 \quad (6.4)$$

şekline gelir. Bu denklemin çözümü hareketin sabit pol noktasını verir. (6.4) denklemin çözülmesi için

$$\left\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right\rangle = 0$$

şartı sağlanmalıdır. Genel olarak bu şart sağlanmaz. Fakat $C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu}$ vektörünü $\bar{\Omega}$ ya dik ve paralel olmak üzere iki bileşene ayırabiliriz.

Hareketli uzayın açılal hız matrisi W ise

$$W = A^{-1}(\lambda, \mu)\Omega$$

ile bulunabilir (Bükçü 2003). $A^{-1}(0,0) = I$ olduğundan (0,0) konumunda $W = \Omega$ dir.

$$E = \frac{\Omega}{\|\Omega\|} \text{ ve } E^* = \frac{W}{\|W\|}$$

olmak üzere

$$E^* = \eta AE, \eta \in IR$$

dir. $(0,0)$ ve $\eta=1$ için

$$E^* = E$$

elde edilir. $C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu}$ vektörünü

$$C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} = \left(C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right) - \frac{\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega + \frac{\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega$$

olmak üzere

$$U = \left(C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right) - \frac{\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega$$

ve

$$V = \frac{\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega$$

şeklinde biri $\tilde{\Omega}$ vektörüne dik, diğeri $\tilde{\Omega}$ vektörüne paralel olmak üzere iki bileşene ayrabiliriz. Yani,

$$\begin{aligned} \langle \Omega, U \rangle &= \left\langle \Omega, \left(C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \right) - \frac{\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega \right\rangle \\ &= \langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle - \frac{\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \langle \Omega, \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle - \langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} V &= \frac{\langle \Omega, C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu} \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \Omega \\ V &= \sigma \tilde{\Omega} \end{aligned}$$

dir. (6.4) denkleminde $C_\lambda \dot{\lambda} + C_\mu \dot{\mu}$ yerine U vektörü yazılırsa

$$\Omega \wedge Y^*(\lambda, \mu) + U = 0$$

bulunur. Bu denklemde $\langle \Omega, U \rangle = 0$ şartı sağlandığından $rank \Omega = 2$ olup sistem çözülebilir. Şimdi

$$a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$$

olmak üzere

$$\Omega \wedge Y^*(\lambda, \mu) + U = 0$$

denklemini çözelim.

$$\Omega \wedge Y^*(\lambda, \mu) + U = 0$$

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge Y^*(\lambda, \mu) + U) = 0$$

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge Y^*(\lambda, \mu)) + \Omega \wedge U = 0$$

$$\langle \Omega, Y^*(\lambda, \mu) \rangle \Omega - \langle \Omega, \Omega \rangle Y^*(\lambda, \mu) + \Omega \wedge U = 0$$

$$Y^*(\lambda, \mu) = \frac{\langle \Omega, Y^*(\lambda, \mu) \rangle \Omega + \Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle}$$

$$Y^*(\lambda, \mu) = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \frac{\langle \Omega, Y^*(\lambda, \mu) \rangle \Omega}{\langle \Omega, \Omega \rangle}$$

$$Y^*(\lambda, \mu) = \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \sigma \Omega$$

elde edilir. Son eşitlik

$$Y^*(\lambda, \mu) = Y(\lambda, \mu) - C(\lambda, \mu)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Y(\lambda, \mu) &= Y^*(\lambda, \mu) + C(\lambda, \mu) \\ &= \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + C(\lambda, \mu) + \sigma \Omega \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$Y(\lambda, \mu) = Q + \sigma \Omega, \quad \sigma \in \mathbb{R} \quad (6.5)$$

elde edilir. Bunun anlamı ise, Q noktasından geçen ve doğrultmanı Ω olan bir doğrudur. Bu doğruya sabit uzayda sabit pol (vida) eksenini denir. Sabit pol ekseninin

hareketli uzaydaki ifadesi (6.1) eşitliğinde $Y(\lambda, \mu)$ nün yerine değeri yazılarak bulunur.

$$Y(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu)X + C(\lambda, \mu)$$

$$\frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + C(\lambda, \mu) + \sigma \Omega = A(\lambda, \mu)X + C(\lambda, \mu)$$

$$\frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \sigma \Omega = A(\lambda, \mu)X$$

$$X = A^{-1}(\lambda, \mu) \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + A^{-1}(\lambda, \mu) \sigma \Omega$$

$$X = A^{-1}(\lambda, \mu) \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \sigma A^{-1}(\lambda, \mu) \Omega$$

(0,0) konumunda

$$\begin{aligned} X &= \frac{\Omega \wedge U}{\langle \Omega, \Omega \rangle} + \sigma \Omega \\ X &= P + \sigma \Omega \end{aligned} \quad (6.6)$$

elde edilir. (0,0) konumunda $C(0,0) = 0$ olduğundan $P = Q$ olup sabit ve hareketli uzayın pol eksenleri (0,0) konumunda çıkışıktır.

O halde, Q ve P noktalarından geçen ve doğrultmamı $\tilde{\Omega}$ olan doğrular, sabit ve hareketli uzaydaki pol eksenleridir. Hareketin (λ, μ) konumunda sabit normlu bir hız vektörüne sahip olan noktaların geometrik yeri olan bu doğrulara sabit ve hareketli uzayın ani vida eksenleri denir.

$$Y(\lambda, \mu) = Q + \sigma \Omega, \quad \sigma \in IR$$

$$X = P + \sigma \Omega$$

denklemleri $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ parametrelerine bağlıdır. O halde ∞^2 tane bir parametrelili hareket vardır. $\dot{\lambda}$ ve $\dot{\mu}$ parametreleri de t ye bağlı olduğundan ∞ tane ani vida eksenli vardır. (Bottema 1979). Bu vida eksenlerinin geometrik yeri ise bir regle yüzeydir. Gerçekten

$$Y(t, \sigma) = Q(t) + \sigma \Omega(t), \quad \sigma \in IR$$

$$X(t, \sigma) = P(t) + \sigma \Omega(t)$$

denklemleri bir regle yüzey belirtir.

KAYNAKLAR

- Birman, G. S. Nomizu, K. 1984-A. Trigonometry in Lorentzian Geometry. Ann. Math. Month. 91(9), 534-549.
- Birman, G. S., Nomizu, K. 1984-B. The Gauss-Bonnet Theorem for 2-Dimensional Space-Times. Michigan Math., J.31.,77-81.
- Bottema, O., Roth, B.1979.Theoretical Kinematics. North Holland publ. Com.
- Bükçü, B. 2003. Lorentz Uzayında Cayley Formülü ve Uygulamaları. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bil. Enst.
- Ergin, A. A.1989.Lorentz düzleminde kinematik geometri. Doktora Tezi, A. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Hacısalıhoğlu ,H.H.1974.On The Geometry of Motion In The Euclidean n-Space. Communications. Ank. Üniv. Seri 23 A.
- Kula ,J. 2003.Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Doktora Tezi
- Müller, H.R. 1963. Kinematik Dersleri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları , Um.96-Mat No:2
- O'Neill, B.1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London
- Stanisic,M.M, Pennock,G.R.1986. The Canonical Inverse Velocity and Acceleration Solutions of a Planar Two-Link Open Chain. The International Journal of Robotics Research. Vol. 5, No.2, Summer 1986.
- Silverman, R.A., Calculus with Analytic Geometry. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632
- Şuhubi,Erdoğan S. 1981.Rijid Cisimler Dinamiği. İst. Tek. Üniv. Kütüphanesi Sayı:1175. Fatih Yayınevi Matbaası.

ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında Kayseri ili Yeşilhisar ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Yeşilhisar'da, lise öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 1991 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 1993 yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 1995 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisansını tamamladı. 1997 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora öğrenimine başladı. 1999 yılında Araştırma Görevliliği kadrosu 35. Maddeye göre Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne aktarıldı. Halen bu görevine devam etmektedir.