

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÜÇ BOYUTLU KONTAK MANİFOLDLARDA ÖZEL EĞRİLER VE
YÜZEYLER ÜZERİNE**

Osman ATEŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

18/07/2014

Osman ATEŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU KONTAK MANİFOLDLARDA ÖZEL EĞRİLER VE YÜZEYLER ÜZERİNE

Osman ATEŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle slant eğriler ile ilgili tanım ve karakterizasyonlara yer verilmiştir. Slant eğrilerle ilgili yeni karakterizasyonlar olan bazı diferensiyel denklemler elde edilmiştir. Daha sonra Sasaki uzayında N -slant helisler tanımlanmış ve bu eğriler karakterize edilmiştir. Sasaki uzayında slant eğriler için C -paralel ve C -proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olma koşulları incelenmiştir. N -slant helisler için bu sonuçlar genelleştirilmiştir. Ayrıca Sasakian uzayda slant ve N -slant eğrilerin $AW(k)$ -tipinden eğri olma şartları belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde, normal vektörü kontak distribüsyonda yatan yüzeyler ile ilgili tanım, teorem ve örneklerle yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, önceki bölümlerde elde edilen sonuçların tartışması yapılmıştır.

Temmuz 2014, 89 sayfa

Anahtar Kelimeler: Slant eğri, N -slant helis, C -paralel ve C -proper ortalama eğrilik vektör alanı, $AW(k)$ -tipinden eğri.

ABSTRACT

Master Thesis

ON SPECIAL CURVES AND SURFACES IN THREE DIMENSIONAL CONTACT MANIFOLDS

Osman ATEŞ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsmail GÖK

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains some notions, definitions and theorems which are needed in the thesis.

In the third chapter, firstly, we give definition and characterization for slant curves and we obtain some new differential equations which characterize slant curves. Then, we define N -slant helix and characterize these curves in Sasakian manifolds. We research necessary and sufficient conditions for a slant curve to have C -parallel and C -proper mean curvature vector fields. We generalize these results for a N -slant helix. Moreover, we investigate slant curves and N -slant helix of $AW(k)$ -type.

In the fourth chapter, we give definition, theorem and examples for a surface whose unit normal vector field belongs to contact distribution

In the fifth chapter, the results obtain in the previous chapters are examined.

July 2014, 89 pages

Key Words: Slant curves, N -slant helix, C -parallel and C -proper mean curvature vector fields, curves of $AW(k)$ -type.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'e, fikirleriyle beni yönlendiren değerli hocalarım Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ya ve Prof. Dr. F.Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ye ve hayatım boyunca yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Osman ATEŞ

Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1 Riemann Manifoldları, Eğriler ve Yüzeyler.....	3
2.2 AW(k)-tipinden Eğriler.....	7
2.3 Has ve Harmonik Ortalama Eğrilik Vektör Alanı.....	9
2.4 Kontak Metrik Manifold.....	11
2.5 Kontak Geometride Vektörel Çarpım.....	33
3. KONTAK GEOMETRİDE SLANT ve N-SLANT HELİSLER.....	40
3.1 Slant Helisler.....	40
3.2 N-slant Helisler.....	50
3.3 C-paralel Ortalama Eğrilik Vektör Alanı.....	61
3.4 C-proper Ortalama Eğrilik Vektör Alanı.....	64
3.5 Normal Demette C-paralel Ortalama Eğrilik Vektör Alanı.....	66
3.6 Normal Demette C-proper Ortalama Eğrilik Vektör Alanı.....	68
3.7 Kontak Geometride AW(k)-tipinden Eğriler.....	71
4. $\mathbb{R}^3(-3)$ HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDUNDA YÜZEYLER.....	78
4.1 $\mathbb{R}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldunda Herhangi Bir Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanının Bulunuşu.....	78
4.2 $\mathbb{R}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldunda Normal Vektörü Kontak Distribüsyonda Yatan Yüzeyler.....	81
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	86
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ.....	89

SİMGELER DİZİNİ

M^n	n -boyutlu Riemann manifoldu
φ	(1,1)-tensör alanı
ξ	Karakteristik (Reeb) vektör alanı
η	Kontak 1-form
g	Metrik tensörü
(M, η)	Kontak manifold
(φ, ξ, η)	Hemen hemen kontak yapı
(M, φ, ξ, η)	Hemen hemen kontak manifold
(φ, ξ, η, g)	Hemen hemen kontak metrik yapı
$(M, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$	Hemen hemen kontak metrik manifold
D, ∇	Riemann koneksiyonları
Δ	Laplas dönüşümü
H	Ortalama eğrilik vektör alanı
$\mathcal{H}$	Harmonik eğrilik fonksiyonu
R	Riemann eğrilik tensörü
K	Bir yüzeyin Gauss eğriliği
$\wedge$	Kontak manifoldlarda vektörel çarpım
$[,]$	Lie (Bracket) operatörü
Γ_{ij}^k	Chrisstoffel sembolleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1	S_1 yüzeyi.....	83
Şekil 4.2	S_2 yüzeyi.....	84
Şekil 4.3	S_3 yüzeyi.....	84
Şekil 4.4	S_4 yüzeyi.....	85

1. GİRİŞ

Kontak geometri; ilk olarak Christian Huygens, Barrow ve Isaac Newton tarafından yapılan çalışmalar ile ortaya çıkmıştır. Kontak dönüşümler teorisi daha sonraları S. Lie tarafından bazı diferensiyel denklemlerin çözümünü bulmak için geliştirilmiştir. Kontak geometri, günümüzde de pek çok matematikçinin ilgisini çekmektedir. Bu alanda özellikle D.E. Blair'ın kitap ve makaleleri, Japon matematikçi K. Yano'nun kitapları çok yararlı kaynaklardır.

Kontak manifoldlarda önemli bir yeri olan Sasaki manifoldlarının tanımı 1960'lı yıllarda Japon matematikçi S. Sasaki tarafından verilmiştir. Yine aynı yıllarda yaşayan M. Gray, K. Ogiue ve W. M. Boothby gibi matematikçilerin çalışmaları dikkat çekmektedir. Öklid uzayında özel eğriler ve yüzeyler ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların çoğu geodezikler, çemberler, helisler, slant helisler, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri vb... konulardadır. Bu eğrilerden özellikle helisler ve slant helisler sanatta, mimaride, tıpta ve mekanikte oldukça kullanım alanı bulmuştur. Camcı'nın 2007 yılında yazdığı 'Kontak Geometride Eğriler Teorisi' bu tez çalışması için önemli bir yol gösterici olmuştur. Sasaki uzayında bazı özel eğrilerle ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; biharmonik eğriler, slant helisler, parabolik geodezikler, Legendre eğrileri, küresel eğriler gibi özel eğrilerin Sasaki manifoldlarında tanımlamaları yapılmış ve önemli karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca, Camcı (Cancı 2011) 3-boyutlu kontak manifoldlarda vektörel çarpımı tanımlamış ve bu çarpımı kullanarak eğrileri yeniden karakterize etmiştir.

Baikoussis ve Blair göstermişlerdir ki; $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayındaki Legendre eğrileri, üç boyutlu Öklid uzayına göre daha doğal eğrilerdir. Benzer şekilde görebiliriz ki; $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayındaki integral yüzeyleri 3-boyutlu Öklid uzayına göre daha doğal yüzeylerdir. Kontak geometrinin fizik, optik, mekanik, kontrol teori gibi pek çok alanda uygulaması vardır (Gieges 2001, Camcı 2007). Bu açıdan da bakıldığında kontak geometride eğriler ve yüzeyler teorisi önem kazanmaktadır. Bu alanda eğrilerle ilgili bir çok çalışma olmasına rağmen yüzeylerle ilgili çok fazla çalışma bulun-

mamaktadır. Gök (Gök 2010) doktora tezinde kontak geometride yüzeyler teorisinin temellerini oluşturmuş ve bir yüzeyin şekil operatörü, Gauss eğriliği gibi değişmezlerini elde etmiştir. Bu çalışmada Gök' ün doktora tezine (Gök 2010) geniş bir şekilde yer verilmiştir. Daha sonra Gök ve Camcı 2014 yılında yayına hazırladıkları makalelerinde özel bir yüzey ailesi tanımlamış, üstelik bazı örnekler vermişlerdir.

Sasaki uzayında Cho vd. (2006), slant helisler ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmada slant eğrilerle ilgili yeni karakterizasyonlar elde edilmiştir. Ayrıca Sasaki uzayında slant eğrilerin bir genellemesi olan N -slant eğriler tanımlanmış, bu eğriler karakterize edilmiştir. Daha sonra Lee vd. (2012) tarafından, Sasaki uzayında slant helisler boyunca C -paralel ve C -proper olma şartları araştırılmıştır. Bu eğriler için C -paralel ve C -proper koşulları yeniden ele alınmıştır. Son olarak Sasaki uzayında slant ve N -slant eğrilerin $AW(k)$ -tipi eğri olma şartları için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Bu tezde genel olarak özel eğriler ile ilgili orjinal sonuçlar ve karakterizasyonlar verilmiştir. Özel yüzeyler ile ilgili Gök ve Camcı (2014)'nın çalışmasından örnekleri ile birlikte bahsedilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Riemann Manifolları, Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.1 (Riemann Metriği) M , bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

metrik tensörü, simetrik, bi-lineer ve pozitif tanımlılık özelliklerine sahipse g metrik tensörüne M manifoldu üzerinde *Riemann metriği* adı verilir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.1.2 (Riemann Manifoldu) M , bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanabiliyorsa (M, g) ikilisine bir *Riemann manifoldu* denir. Eğer g Riemann metriğinde pozitif tanımlılık aksiyomu yerine non-dejenere aksiyomu sağlanıyorsa (M, g) ikilisine bir *yarı Riemann manifoldu* denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Teorem 2.1.1 V vektör uzayının bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.

$$\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$$

olmak üzere $\forall X \in V$ vektörü

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O' Neill 1983).

Tanım 2.1.3 (Kovaryant Türev) Bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir Riemann koneksiyonu ∇ olsun. ∇ nin M manifolduna ait bir bölge üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

bi-lineer dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} i) \quad & \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ ii) \quad & \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ iii) \quad & \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \\ iv) \quad & \nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y \end{aligned}$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ dönüşümüne M üzerinde tanımlı bir *afin koneksiyon* veya *kovaryant türev* adı verilir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.1.4 (Levi-Civita Koneksiyonu) (M, g) bir Riemann manifoldu ve M üzerinde tanımlı bir afin koneksiyon ∇ olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü,

- i) Sıfır torsiyon özeliği: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
 - ii) Koneksiyonun metrikle bağdaşabilme özeliği: $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- şartlarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne M üzerinde *Riemann Koneksiyonu* veya M manifoldunun *Levi – Civita Koneksiyonu* denir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.1.5 (C^k sınıfı) $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere bir $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k . mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıftan (k . sınıftan) *diferensiyellenebilir fonksiyon* denir. Özel olarak f fonksiyonu sadece sürekli ise C^0 sınıftandır denir. $C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından ve } k \text{ sonlu}\}$ şeklinde gösterilir. Eğer k sonlu değil ise $C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.1.6 (Eğri) E^n , n -boyutlu Öklid uzayı ve I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n uzayı içinde bir eğri denir (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 2.1.7 (Diferensiyellenebilir Eğri) M bir C^∞ manifold ve $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun.

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise γ eğrisine M üzerinde *diferensiyellenebilir eğri* denir (Hacısalihoglu 2003).

Tanım 2.1.8 $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir γ eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \gamma(t) \in M \\ \gamma'(t) &= \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

dır. $\gamma'(t)$ tanjant vektörüne, γ eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\gamma(t)$ noktasında, (I, γ) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir.

Eğer $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise γ eğrisine (I, γ) koordinat komşuluğuna göre *birim hızlı eğri* denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine *yay parametresi* adı verilir (Hacısalihoglu 2003).

Tanım 2.1.9 $M^3 = (M, g)$, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde tanımlı bir Levi-Civita koneksiyonu ∇ olsun. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde s yay parametrelili bir eğri ve eğri üzerindeki herhangi bir noktadaki teğet vektör alanı $T(s) = \gamma'(s)$, normal vektör alanı $N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$ ve binormal vektör alanı $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ olmak üzere γ eğrisinin Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\kappa = \|\nabla_{\gamma'} \gamma'\|$ ve τ , sırasıyla, γ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu olmak üzere

$$\nabla_T T = \kappa N, \quad \nabla_T N = -\kappa T + \tau B, \quad \nabla_T B = -\tau N \quad (2.1)$$

dir (Cho vd. 2006).

Tanım 2.1.10 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{n+1}$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), \dots, \gamma^{(n-1)}(s)$ lineer bağımsız ise γ eğrisine *cenerik eğri* ya da $(n-1)$ -oskületör metrebeli eğri denir (Hacısalıhoğlu 2003).

Önerme 2.1.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{n+1}$, M de oskületör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$ ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= T(s) \\ \gamma''(s) &= \nabla_T T(s) = \kappa(s)N(s) \\ \gamma'''(s) &= \nabla_T \nabla_T T(s) = -\kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s) \\ \gamma^{iv}(s) &= \nabla_T \nabla_T \nabla_T T(s) = -3\kappa(s)\kappa'(s)T(s) + \{\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s)\}N(s) \\ &\quad + \{2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\}B(s)\end{aligned}\tag{2.2}$$

dir (Arslan ve Özgür 1999).

Tanım 2.1.11 U, E^2 de bir açık alt cümle olmak üzere $X : U \rightarrow E^3$

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

biçiminde tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşümüne E^3 de bir yama, lokal yüzey veya iki parametrelili yüzey denir (Gray 1993).

Tanım 2.1.12 Bir $X : U \rightarrow E^3$ yüzeyi için $X_u \times X_v$ sıfırdan farklı olacak biçimde $(u, v) \in U$ noktalarında birim normal vektör alanı veya yüzeyin normali;

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v)$$

eşitliği ile tanımlanır (Gray 1993). Burada $\times$ vektörel çarpımı belirtmektedir.

Tanım 2.1.13 Bir $X : U \rightarrow E^3$ yüzeyi için $X_u \times X_v = 0$ olacak biçimde $(u, v) \in U$ noktalarına yüzeyin singüler noktaları denir (Gray 1993).

2.2 $AW(k)$ -tipinden Eğriler

Notasyon 2.2.1

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(s) &= (\gamma''(s))^\perp = \kappa(s)N(s) \\ \mathcal{N}_2(s) &= (\gamma'''(s))^\perp = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s) \\ \mathcal{N}_3(s) &= (\gamma^{iv}(s))^\perp = \{\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s)\}N(s) \\ &\quad + \{2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\}B(s)\end{aligned}\tag{2.3}$$

ile ifade edilir (Arslan ve Özgür 1999).

Dikkat edilirse bir X vektör alanının $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına göre ifadesi

$$X = \lambda_1 T(s) + \lambda_2 N(s) + \lambda_3 B(s)$$

olmak üzere

$$X^\perp = \lambda_2 N(s) + \lambda_3 B(s)$$

olur. Yani teğet bileşeni içermeyen terimler alınır.

Tanım 2.2.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{n+1}$, M de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun.

(i) Eğer

$$\mathcal{N}_3(s) = 0 \quad (2.4)$$

ise γ eğrisine *AW(1)-tip eğri* denir.

(ii) Eğer

$$\|\mathcal{N}_2(s)\|^2 \mathcal{N}_3(s) = \langle \mathcal{N}_3(s), \mathcal{N}_2(s) \rangle \mathcal{N}_2(s) \quad (2.5)$$

ise γ eğrisine *AW(2)-tip eğri* denir.

(iii) Eğer

$$\|\mathcal{N}_1(s)\|^2 \mathcal{N}_3(s) = \langle \mathcal{N}_3(s), \mathcal{N}_1(s) \rangle \mathcal{N}_1(s) \quad (2.6)$$

ise γ eğrisine *AW(3)-tip eğri* denir (Arslan ve Özgür 1999).

Önerme 2.2.1 γ eğrisi oskülatör mertebesi 3 olan bir eğri ve bu eğrinin eğrilikleri κ, τ olsun. Bu durumda γ eğrisinin *AW(1)-tip* olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s) = 0 \quad (2.7)$$

ve

$$\tau(s) = \frac{c}{\kappa^2(s)}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

olmasıdır (Arslan ve Özgür 1999).

Önerme 2.2.2 γ eğrisi oskülatör mertebesi 3 olan bir eğri ve bu eğrinin eğrilikleri κ, τ olsun. Bu durumda γ eğrisinin *AW(2)-tip* olması için gerek ve yeter koşul

$$2(\kappa'(s))^2\tau(s) + \kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s) = \kappa(s)\kappa''(s)\tau(s) - \kappa^4(s)\tau(s) - \kappa^2(s)\tau^3(s) \quad (2.9)$$

olmasıdır (Arslan ve Özgür 1999).

Önerme 2.2.3 γ eğrisi oskülatör mertebesi 3 olan bir eğri ve bu eğrinin eğrilikleri κ, τ olsun. Bu durumda γ eğrisinin $AW(3) - tip$ olması için gerek ve yeter koşul

$$2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s) = 0$$

olmasıdır. Bu diferensiyel denklem çözülerek γ eğrisinin $AW(3) - tip$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\tau(s) = \frac{c}{\kappa^2(s)}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

olarak bulunur (Arslan ve Özgür 1999).

2.3 Has ve Harmonik Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

Tanım 2.3.1 $M^3 = (M, g)$, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M manifoldu üzerinde tanımlı bir Levi-Civita koneksiyonu ∇ olsun. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde s yay parametrelili bir eğri ve γ eğrisi üzerindeki Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere

$$H = \nabla_T T = \kappa N \quad (2.11)$$

eşitliğiyle tanımlanan H vektör alanına γ eğrisinin *ortalama eğrilik vektör alanı* denir (Arrayo vd. 1997).

Tanım 2.3.2 $M^3 = (M, g)$, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde tanımlı bir Levi-Civita koneksiyonu ∇ olsun. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde s yay parametrelili bir eğri olmak üzere H ortalama eğrilik vektör alanının *tanjant demette Laplas'ı*

$$\Delta H = -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır (Arrayo vd. 1997).

Tanım 2.3.3 $M^3 = (M, g)$, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde tanımlı bir Levi-Civita koneksiyonu ∇ olsun. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde s

yay parametreli bir eğri olmak üzere H ortalama eğrilik vektör alanının normal demette Laplas'ı

$$\Delta^\perp H = -\nabla_T^\perp \nabla_T^\perp \nabla_T^\perp T \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır (Arrayo vd. 1997).

Tanım 2.3.4 $M^3 = (M, g)$, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde birim hızlı bir eğri olsun.

$$\Delta H = \lambda H$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ eğrisine has ortalama eğrilik vektör alanına sahip eğri denir.

Özel olarak $\Delta H = 0$ ise γ eğrisine harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri denir (Arrayo vd. 1997).

Tanım 2.3.5 $M^3 = (M, g)$, 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde birim hızlı bir eğri olsun.

$$\Delta^\perp H = \lambda H$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ eğrisine normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip eğri denir.

Özel olarak $\Delta^\perp H = 0$ ise γ eğrisine normal demette harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri denir (Arrayo vd. 1997).

2.4 Kontak Metrik Manifold

Tanım 2.4.1 (Kontak Manifold) $(2n+1)$ -boyutlu bir C^∞ diferensiyellenebilir M manifoldu verilsin. Bu manifold üzerinde alınan her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlayan bir η diferensiyel 1-formu varsa η ya *kontak form*, (M, η) ikilisine de *kontak manifold* denir. Burada $(d\eta)^n$ ifadesi $d\eta$ nın kendisi ile n defa dış çarpımını gösterir, yani;

$$(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge \dots \wedge d\eta}_{n\text{-tane}}$$

dir. η , 1-form olduğundan $d\eta$, 2-form ve $\eta \wedge (d\eta)^n$ ifadesi $(2n+1)$ -form olur. Bu yüzden Kontak manifoldlar $(2n+1)$ boyutlu manifoldlardır (Blair 1976).

Örnek 2.4.1 3-boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1-formunu gözönüne alalım. M manifoldu üzerinde her $(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ noktasında

$$\begin{aligned} d\eta &= -\sin z dz \wedge dx + \cos z d(dx) + \cos z dz \wedge dy + \sin z d(dy) \\ &= -\sin z dz \wedge dx + \cos z dz \wedge dy \end{aligned}$$

ve $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ olduğundan η *kontak form* ve (M, η) ikilisi de 3-boyutlu *kontak manifold* olur (Blair 1976).

Tanım 2.4.2 (Kontak Distribüsyon) $(2n+1)$ -boyutlu (M, η) kontak manifoldu olmak üzere

$$D = \{X \in \chi(M) : \eta(X) = 0\} \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlı D cümlesine M manifoldunun *kontak dağılımı* (*distribüsyon*)

denir. $\chi(M)$ vektör uzayı $(2n+1)$ boyutlu olduğundan $\chi(M)^*$ vektör uzayı $(2n+1)$ boyutludur. Bu iki dual vektör uzayının, sırasıyla, $\{\xi, X_1, \dots, X_{2n}\}$ ve $\{\eta, \eta_1, \dots, \eta_{2n}\}$ dual tabanları vardır. Böylece $i = 1, 2, \dots, 2n$ için $\eta(X_i) = 0$ ve $\{X_1, \dots, X_{2n}\} \subset D$ dir. Burada $D = sp\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla $boyD = 2n$ olur (Blair 1976).

Tanım 2.4.3 (M, η) ikilisi $(2n+1)$ -boyutlu kontak manifold ve $\text{Ker}\eta$, η kontak formunun çekirdeği olmak üzere

$$\text{çek}\eta = D$$

dir (Blair 1976).

Tanım 2.4.4 (Hemen Hemen Kontak Manifold) $(2n+1)$ -boyutlu bir C^∞ diferensiyellenebilir M manifoldu verilsin. $\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$ dönüşümü $(1, 1)$ tipinden bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve $\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{dif.bilir}} C^\infty(M, \mathbb{R})$ dönüşümü M üzerinde bir diferensiyel form olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$$

koşulları sağlanıyor ise (φ, ξ, η) üçlüsüne *hemen hemen kontak yapı*, (M, φ, ξ, η) dörtlüsüne de *hemen hemen kontak manifold* adı verilir (Blair 1976).

Örnek 2.4.2 $\mathbb{R}^3$ de (x, y, z) standart koordinatlar olmak üzere η kontak formu

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$$

şeklinde verilsin. Burada $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z} \in \chi(\mathbb{R}^3)$ için

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \frac{1}{2}(dz - ydx)\left(2\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ &= dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - ydx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğu görülmüştür. Ayrıca φ endomorfizimine karşılık gelen matris

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \chi(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi^2(X) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \\ &= - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 - yx_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\varphi^2(X) = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $X = (x_1, x_2, x_3) \in \chi(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

dir. Ayrıca $\eta(X)$ değerini hesaplırsak

$$\begin{aligned}\eta(X) &= \frac{1}{2}(dz - ydx)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + x_2\frac{\partial}{\partial y} + x_3\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(dz\left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + x_2\frac{\partial}{\partial y} + x_3\frac{\partial}{\partial z}\right) - ydx\left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + x_2\frac{\partial}{\partial y} + x_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\right), \\ &= \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ sağlanır. Böylece $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen kontak manifolddur (Blair 1976).

Tanım 2.4.5 (Karakteristik Vektör Alanı) M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ için,

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } d\eta(\xi, X) = 0 \quad (2.15)$$

olacak biçimde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı var ise ξ ye η -kontak yapısının *karakteristik vektör alanı* veya *Reeb vektör alanı* denir. Burada

$$\xi : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_M(P)$$

şeklinde tanımlı 1:1 ve örten $(1,0)$ tipinde tensör alanıdır (Blair 1976).

Örnek 2.4.3 3-boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1-formu için

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

vektör alanı karakteristik vektör alanıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) &= (\cos z dx + \sin z dy)(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}), \\
&= \cos z \cos z dx(\frac{\partial}{\partial x}) + \cos z \sin z dx(\frac{\partial}{\partial y}) \\
&\quad + \sin z \cos z dy(\frac{\partial}{\partial x}) + \sin z \sin z dy(\frac{\partial}{\partial y}), \\
&= \cos^2 z + \sin^2 z, \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve

$$d\eta(\xi, X) = 0$$

sağlanır. (Blair 1976).

Sonuç 2.4.1 $(2n + 1)$ boyutlu (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontak manifoldunda

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi) &= 0, \\
\eta \circ \varphi &= 0, \\
\text{rank} \varphi &= 2n
\end{aligned} \tag{2.16}$$

eşitlikleri sağlanır (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.6 (Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold) $(2n + 1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.17}$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.18}$$

koşullarını sağlayan bir g metriği yapısı var ise (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir *hemen hemen kontak metrik yapı* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de *hemen hemen kontak metrik manifold* denir (Yano ve Kon 1976).

Örnek 2.4.4 Örnek 2.4.2 deki $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen kontak manifoldunda g metriği

$$g = \frac{1}{4}((1 + y^2) dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2y dx dz)$$

olarak tanımlanırsa g metriğinin matris yazılımının

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece $X = (x_1, x_2, x_3) \in \chi(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g(X, \xi) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (x_3 - yx_1) \end{aligned}$$

olup $\eta(X) = g(X, \xi)$ olduğu görülür.

Burada $\forall X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \chi(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix}, \\ \varphi(Y) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = (\varphi(X))^T g \varphi(Y)$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} g(\varphi(X), \varphi(Y)) &= \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & yx_2 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{4} (x_2 y_2 + x_1 y_1) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\eta(X) = \frac{1}{2} (x_3 - yx_1)$ ve $\eta(Y) = \frac{1}{2} (y_3 - yy_1)$ olup

$$\begin{aligned} \eta(X)\eta(Y) &= \frac{1}{4} (x_3 y_3 - yx_3 y_1 - yx_1 y_3 + y^2 x_1 y_1), \\ g(X, Y) &= \frac{1}{4} ((1+y^2)x_1 y_1 - yx_1 y_3 + x_2 y_2 - yx_3 y_1 + x_3 y_3), \\ &= \frac{1}{4} (x_2 y_2 + x_1 y_1) + \frac{1}{4} (x_3 y_3 - yx_3 y_1 - yx_1 y_3 + y^2 x_1 y_1) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{R}^3)$ için

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olduğundan $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisi hemen hemen kontak metrik manifold olur (Yano ve Kon 1976).

Teorem 2.4.1 $(2n+1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.19)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima tanımlanabilir (Yano ve Kon 1976).

Sonuç 2.4.2 $(2n + 1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \quad (2.20)$$

dir. Bu da, φ dönüşümünün g metriğine göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir.

Özel olarak (2.20) denkleminde $Y = X$ alınırsa $g(X, \varphi X) = 0$ sonucuna ulaşılır (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.7 $(2n + 1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı vardır (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.8 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi(Y)) = d\eta(X, Y)$$

şeklinde tanımlı Φ 2-formuna (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısının *Temel 2-formu* adı verilir. Burada $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ koşulu $\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$ biçimini alır (Yano ve Kon 1976).

Örnek 2.4.5 Örnek 2.4.4 deki $(\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun Temel 2-formunu bulalım.

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$$

kontak formu için

$$d\eta = \frac{1}{2}[d(dz) - dy \wedge dx - yd(dx)]$$

olup $d(dz) = 0$ ve $d(dx) = 0$ olduğundan

$$\Phi = \frac{1}{2}dx \wedge dy$$

ifadesi $(\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun Temel 2-formu olur (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.9 (Kontak Metrik Yapı) M , $(2n + 1)$ boyutlu manifold (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin. Şayet $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi(Y))$ oluyorsa $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ye *kontak metrik manifold*, (φ, ξ, η, g) yapısına da M manifoldunda *kontak metrik yapı* denir (Yano ve Kon 1976).

Sonuç 2.4.3 Her kontak metrik manifold, kontak manifolddur (Yano ve Kon 1976).

Teorem 2.4.2 $(2n + 1)$ -boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2} [g(D_X \xi, Y) - g(D_Y \xi, X)]$$

dir (Yano ve Kon 1976).

Teorem 2.4.3 $(2n + 1)$ -boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} d\eta(X, \xi) &= 0, \\ d\eta(\varphi(X), Y) &= -d\eta(X, \varphi(Y)) \end{aligned}$$

dir (Yano ve Kon 1976).

Teorem 2.4.4 $(2n + 1)$ -boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2} \{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\}$$

dir (Yano ve Kon 1976).

Sonuç 2.4.4 $(2n+1)$ -boyutlu $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi \nabla_X \xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi \nabla_X \xi \quad (2.21)$$

dir. Burada ∇ , M manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonudur (Blair 2003).

Sonuç 2.4.5 $(2n+1)$ -boyutlu bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} i) \quad & g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 0 \\ ii) \quad & \nabla_X \xi = -\varphi X \end{aligned} \quad (2.22)$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.10 (Riemann Eğrilik Tensörü) Sürekli bir M manifoldu üzerinde afin koneksiyon ∇ olsun.

$$\begin{aligned} R : \quad \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $(1,3)$ tipindeki tensöre *Riemann eğrilik tensörü* denir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.4.11 (Kesitsel Eğrilik) Sürekli bir M manifoldu üzerinde afin koneksiyon ∇ olsun.

$$\begin{aligned} K : \quad \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)Z, W)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \end{aligned}$$

değerine M manifoldunun *kesitsel eğriliği* denir (Hacısalıhoğlu 2003).

Teorem 2.4.5 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifoldunda $\{e, \varphi(e), \xi\}$ bazı için

$$\begin{aligned}\nabla_e \varphi(e) &= \xi = -\nabla_{\varphi(e)} e \\ \nabla_\xi e &= -\varphi(e) = \nabla_e \xi \\ \nabla_\xi \varphi(e) &= e = \nabla_{\varphi(e)} \xi \\ \nabla_e e &= \nabla_{\varphi(e)} \varphi(e) = \nabla_\xi \xi = 0\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 2.4.6 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifoldunda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $X = x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi$ ve $Y = y_1 e + y_2 \varphi(e) + y_3 \xi$ olmak üzere kovaryant türev operatörü

$$\begin{aligned}\nabla &: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ \nabla_X Y &= X[Y_1]e + X[Y_2]\varphi(e) + X[Y_3]\xi \\ &\quad - \eta(Y)\varphi(X) - \eta(X)\varphi(Y) - g(X, \varphi(Y))\xi\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{R}^3(-3)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunda

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

ise

$$g^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 + y^2 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Burada

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kh} (g_{ih, j} + g_{hj, i} + g_{ij, h})$$

Christoffel sembolleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_e \varphi(e) &= \xi = -\nabla_{\varphi(e)} e \\ \nabla_\xi e &= -\varphi(e) = \nabla_e \xi \\ \nabla_\xi \varphi(e) &= e = \nabla_{\varphi(e)} \xi \\ \nabla_e e &= \nabla_{\varphi(e)} \varphi(e) = \nabla_\xi \xi = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $X = x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi$ ve $Y = y_1 e + y_2 \varphi(e) + y_3 \xi$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (y_1 e + y_2 \varphi(e) + y_3 \xi) \\ &= \nabla_X (y_1 e) + \nabla_X (y_2 \varphi(e)) + \nabla_X (y_3 \xi) \\ &= X[y_1] e + y_1 \nabla_X e + X[y_2] \varphi(e) + y_2 \nabla_X \varphi(e) \\ &\quad + X[y_3] \xi + y_3 \nabla_X \xi \\ &= X[y_1] e + X[y_2] \varphi(e) + X[y_3] \xi \\ &\quad + y_1 \nabla_{x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi} e + y_2 \nabla_{x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi} \varphi(e) \\ &\quad + y_3 \nabla_{x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi} \xi \\ &= X[y_1] e + X[y_2] \varphi(e) + X[y_3] \xi \\ &\quad + y_1 (x_1 \nabla_e e + x_2 \nabla_{\varphi(e)} e + x_3 \nabla_\xi e) \\ &\quad + y_2 (x_1 \nabla_e \varphi(e) + x_2 \nabla_{\varphi(e)} \varphi(e) + x_3 \nabla_\xi \varphi(e)) \\ &\quad + y_3 (x_1 \nabla_e \xi + x_2 \nabla_{\varphi(e)} \xi + x_3 \nabla_\xi \xi) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= D_X Y + x_1 y_2 \xi - x_1 y_3 \varphi(e) + x_2 y_1 \xi + x_2 y_3 e - x_3 y_1 \varphi(e) + x_3 y_2 e \\
&= D_X Y - y_3(x_1 \varphi(e) - x_2 e) - x_3(y_1 \varphi(e) - y_2 e) + \xi(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
&= D_X Y - \eta(Y)\varphi(X) - \eta(X)\varphi(Y) - \xi(x_2 y_1 - x_1 y_2) \\
&= D_X Y - \eta(Y)\varphi(X) - \eta(X)\varphi(Y) - g(X, \varphi(Y))\xi \\
&= D_X Y - \eta(Y)\varphi(X) - \eta(X)\varphi(Y) - d\eta(X, Y)\xi
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $D_X Y = X[y_1]e + X[y_2]\varphi(e) + X[y_3]\xi$ dir.

Önerme 2.4.1 $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun kesitsel eğriliği -3 olur. Bu yüzden $\mathbb{R}^3$ reel uzayının hemen hemen kontak manifold yapısını $\mathbb{R}^3(-3)$ ile gösterilecektir (Camcı 2007).

İspat. $\mathbb{R}^3$ reel uzayında koordinat sistemi $\{x, y, z\}$,

$$\xi = \frac{2\partial}{\partial z}, \eta = \frac{1}{2}(dz - ydx) \text{ ve } \varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ dörtlüsü hemen hemen kontak manifoldur.

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

metriği ile birlikte $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine hemen hemen kontak metrik manifold denir. Ayrıca

$$g^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 + y^2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. $\{e, \varphi e, \xi\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ bazları arasındaki

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2}(\varphi e - y\xi), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{2}e, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\xi\end{aligned}$$

ilişkisi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_e \varphi e &= \xi = -\nabla_{\varphi(e)} e, \\ \nabla_\xi e &= -\varphi(e) = \nabla_e \xi, \\ \nabla_\xi \varphi e &= e = \nabla_{\varphi e} \xi, \\ \nabla_e e &= \nabla_{\varphi e} \varphi e = \nabla_\xi \xi = 0,\end{aligned}$$

sağlanır. Burada ∇ , $\mathbb{R}^3$ uzayının Riemann koneksiyonu olup

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= -\eta(Y)\varphi(X) - \eta(X)\varphi(Y) \\ &\quad + (X\eta(Y) + g(Y, \varphi(X))\xi\end{aligned}$$

şeklindedir. $\eta(X) = 0$ olduğundan $X \in D$ olur. (2.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\nabla_{\varphi X} \varphi X &= g(\varphi X, \varphi^2 X)\xi, \\ &= g(\varphi X, -X + \eta(X)\xi)\xi, \\ &= g(X, \varphi X)\xi\end{aligned}$$

elde edilir. X , birim vektör alanı olması durumunda ise

$$\nabla_{\varphi X} \varphi X = \xi$$

olduğu görülür. Böylece

$$\nabla_X \nabla_{\varphi X} \varphi X = \nabla_X \xi = -\varphi X$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\nabla_X \varphi X &= -\eta(X)\varphi^2(X) + g(\varphi X, \varphi X), \\
&= g(\varphi X, \varphi X)\xi, \\
&= \xi
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi X} \nabla_X \varphi X &= \nabla_{\varphi X} \xi \\
&= X
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
[X, \varphi X] &= \nabla_X \varphi X - \nabla_{\varphi X} X \\
&= 2\xi
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X, \varphi X]} \varphi X &= \nabla_{2\xi} \varphi X, \\
&= 2\nabla_\xi \varphi X, \\
&= -2\varphi^2 X
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
R(X, \varphi X)\varphi X &= \nabla_X \nabla_{\varphi X} \varphi X - \nabla_{\varphi X} \nabla_X \varphi X - \nabla_{[X, \varphi X]} \varphi X, \\
&= -\varphi X - X + 2\varphi^2 X, \\
&= -\varphi X - X + 2(-X + \eta(X)\xi)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\eta(X) = 0$ olduğundan son eşitlikten

$$R(X, \varphi X)\varphi X = -3X - \varphi X$$

dir. Son olarak

$$\begin{aligned}
K(X, \varphi X) &= g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) \\
&= g(-3X - \varphi X, X) \\
&= -3g(X, X) + g(X, \varphi X)
\end{aligned}$$

bulunur. $g(X, X) = 1$ ve $g(X, \varphi X) = 0$ olduğundan

$$K(X, \varphi X) = -3$$

değerine ulaşılır.

Bundan sonra tez boyunca $\mathbb{R}^3$ yerine $\mathbb{R}^3(-3)$ notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 2.4.12 (Hemen Hemen Kompleks Yapı) M , $(2n + 1)$ -boyutlu manifoldu (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ile birlikte verilsin. Biliyoruz ki, $\mathbb{R}$ reel ekseninde bir manifolddur. Dolayısıyla $M \times \mathbb{R}$ Kartezyen çarpım uzayı da $(2n + 2)$ -boyutlu bir çarpım manifoldu olacaktır. Burada vektör alanları

$$\chi(\mathbb{R}) = \left\{ f \frac{d}{dt} : f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \right\}$$

$$\chi(M \times \mathbb{R}) = \left\{ (X, f \frac{d}{dt}) : X \in \chi(M) \right\}$$

şeklindedir. Şimdi J kompleks dönüşümü

$$\begin{aligned}
J &: \chi(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \chi(M \times \mathbb{R}) \\
&: (X, f \frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f \frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\varphi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada J ye $M \times \mathbb{R}$ üzerinde *hemen hemen kompleks yapı* denir (Yano ve Kon 1976).

Teorem 2.4.7 J kompleks dönüşümü aşağıda verilen özellikleri sağlar:

i) J dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

ii) $J^2 = -I$

özellikleri vardır (Yano ve Kon 1976).

Örnek 2.4.6 S^3 , 3-boyutlu bir reel hiperküre olsun. S^3 hiperküresinin birim normal C olmak üzere $\mathbb{R}^4$ ün hemen hemen kompleks tensör alanı J ve

$$J : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, JC = -\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ , S^3 hiperküresi üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi \in \chi(S^3)$ olur. S^3 hiperküresine teğet bir X vektör alanı için $\eta(X) = g(X, \xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi) = 1$ sağlanır. Diğer taraftan;

$$JX = \varphi X + \eta(X)C$$

eşitliği ile φ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre

$\forall P = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımıyla

$$J(C(P)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_3, -p_4, p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir. Burada

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

$$g(X, \xi)\xi = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$g(X, \xi)\xi = (x_1p_3 + x_2p_4 - x_3p_2 - x_4p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$\lambda = (x_1p_3 + x_2p_4 - x_3p_2 - x_4p_2)$ alınırsa

$$g(X, \xi)\xi = \lambda\xi$$

olur.

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi X) &= J(\varphi X) - \eta(\varphi X)C, \\ &= J(JX - \eta(X)C - \eta(JX - \eta(X)C)C, \\ &\quad J \left(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - g(JX - \eta(X)C, \xi)C \right), \\ &= \begin{bmatrix} -x_3 + \lambda p_3 \\ -x_4 + \lambda p_4 \\ x_1 - \lambda p_1 \\ x_2 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ x_1 - \lambda p_3 \\ x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\varphi(\varphi X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\varphi\xi = J\xi - \eta(X)C$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi\xi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}, \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. O halde

$$\begin{aligned} \eta(\varphi X) &= g(\varphi X, \xi) \\ &= g(JX - \eta(X)C, \xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (φ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı oluşturur (Yıldız 1995).

Tanım 2.4.13 (Nijenhuis Tensör Alanı) F , M manifoldu üzerine $(1,1)$ tipinde tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} N_F : \chi(M) \times X(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow N_F(X, Y) \end{aligned}$$

dönüştürümü

$$\begin{aligned} N_F(X, Y) = & F^2([X, Y]) + [F(X), F(Y)] \\ & - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)]) \end{aligned}$$

olacak şekilde $(1, 2)$ tensör alanıdır. N_F tensör alanına *Nijenhuis tensör alanı* denir.

Burada

$F = \varphi$ alınarak φ nin

$$N_\varphi(X, Y) = -[X, Y] + \eta[X, Y]\xi + [\varphi(X), \varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X), Y] - \varphi[X, \varphi(Y)] \quad (2.23)$$

Nijenhuis torsiyon tensörü,

$F = J$ alınarak J hemen hemen kompleks yapısının

$$N_J(X, Y) = -[X, Y] + [J(X), J(Y)] + J[J(X), Y] - J[X, J(Y)] \quad (2.24)$$

Nijenhuis torsiyon tensörü tanımlanır (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.14 (İntegrallenebilir Manifold) Nijenhuis torsiyon tensörü $N_J = 0$ ise J hemen hemen kompleks yapısına *integrallenebilirdir* denir (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.15 (Sasaki Yapı) J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısına *normal yapı* veya *Sasaki yapı* denir (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.16 (Sasaki Manifoldu) $(2n + 1)$ -boyutlu bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldu verilsin. Eğer M nin kontak metrik yapısı normal ise (φ, ξ, η, g) yapısına *Sasaki yapı* ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de *Sasaki manifoldu* denir (Yano ve Kon 1976).

Teorem 2.4.8 $(2n + 1)$ -boyutlu M manifoldu (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda M manifoldu Sasaki manifoldu olur ancak ve ancak $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (2.25)$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.4.17 ($\chi(M \times \mathbb{R})$ de Braket Operatörü) $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu, (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. $M \times \mathbb{E}$ nin de bir manifold olduğunu belirtmiştik. $M \times \mathbb{R}$ de $[\cdot, \cdot]$ operatörü

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] &: \chi(M \times \mathbb{R}) \times \chi(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \chi(M \times \mathbb{R}) \\ &: ((X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt})) \longrightarrow \left[(X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt}) \right] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\left[(X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt}) \right] = \left([X, Y], (X(g) - Y(f)) \frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlı ise $[\cdot, \cdot]$ operatörüne $\chi(M \times \mathbb{R})$ de *Braket Operatörü* adı verilir (Blair 2002).

Teorem 2.4.9 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu, (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. $\chi(M \times \mathbb{R})$ de tanımlı $[\cdot, \cdot]$ Braket operatörü

i) Antisimetrik,

ii) Jacobi özdeşliği

özelliklerini sağlar. Böylece tanımladığımız bu operatör bir Lie braket operatörüdür (Blair 2002).

Tanım 2.4.18 (Lie Türevi) M üzerinde tanımlı bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş lokal dönüşümlü 1-parametrel grup φ_t olsun. X vektör alanına göre F tensör alanının $L_X F$ ile gösterilen Lie türevi;

$$L_X F = [X, F]$$

eşitliği ile tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.4.19 (Killing Vektör Alanı) M bir Riemann manifoldu, g Riemann metriği ile verilsin. Ayrıca M üzerinde bir X vektör alanını ele alalım. M manifoldunun her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametrel grubu lokal izometrilere oluşuyor ise X vektör alanına *Killing vektör alanı* denir.

Böylece;

$$X \text{ Killing vektör alanı} \Leftrightarrow L_X g = 0$$

dir. Yani; g metrik tensörünün X vektör alanı yönündeki Lie türevi sıfırdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.4.10 $(2n + 1)$ -boyutlu M manifoldu (φ, ξ, η, g) kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda $N^2 = N^4 = 0$ dır. Ayrıca,

$$N^3 = 0 \Leftrightarrow \xi \text{ killing vektörü}$$

olur. Burada

$$N^3 = [\xi, \varphi X] - \varphi [X, \xi]$$

şeklinde tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

2.5 Kontak Geometride Vektörel Çarpım

Tanım 2.5.1 (Vektörel Çarpım) $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için M üzerinde

$$\wedge : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü

$$X \wedge Y = -g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y \quad (2.26)$$

eşitliği ile tanımlansın. Burada $X \wedge Y$ vektörüne, X ile Y nin *vektörel çarpımı* adı verilir (Camcı 2011).

Örnek 2.5.1 $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının bir alt vektör uzayı $V = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ olsun. V alt vektör uzayı üzerinde $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ bir izdüşüm ve $J(x, y, 0) = (-y, x, 0)$ bir hemen hemen kompleks harita vardır. Eğer $\varphi = J \circ \pi$ olacak şekilde bir harita tanımlanırsa $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifold olur. Burada $\eta = dz$, $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ ve g standart Riemann metriğidir.

Sonuç olarak;

$$X \wedge Y = -g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y$$

dir. Bu durumda $X \wedge Y = X \times Y$ olur. Burada $\times$, $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayındaki vektörel çarpımdır (Camcı 2011).

Teorem 2.5.1 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için X ile Y vektörlerinin her ikisi de $X \wedge Y$ vektörüne ortogonaldır (Camcı 2011).

Teorem 2.5.2 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde vektörel çarpım *anti-simetrik* bir dönüşümdür (Camcı 2011).

Teorem 2.5.3 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde vektörel çarpım *alterne* bir döntüşümdür (Camcı 2011).

Teorem 2.5.4 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$Y \wedge \varphi(X) = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (2.27)$$

ve

$$\varphi(X) = \xi \wedge X \quad (2.28)$$

olur (Camcı 2011).

Tanım 2.5.2 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $g(X \wedge Y, Z)$ sayısına X, Y, Z vektörlerinin karma çarpımı denir ve bazen (X, Y, Z) ifadesi ile de gösterilir. $\{X, Y, X \wedge Y\}$ üçlüsü pozitif yönlü bir çatı oluşturur (Camcı 2011).

Teorem 2.5.5 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(X, Y, Z) = g(X \wedge Y, Z) = \det(X, Y, Z) \quad (2.29)$$

veya

$$(X, Y, Z) = -[g(X, \varphi(Y))\eta(Z) + g(Y, \varphi(Z))\eta(X) + g(Z, \varphi(X))\eta(Y)]$$

dir (Camcı 2011).

Teorem 2.5.6 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

$$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y) \quad (2.30)$$

dir (Camcı 2011).

Teorem 2.5.7 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$g(X, \varphi(Y))Z + g(Y, \varphi(Z))X + g(Z, \varphi(X))Y = -\det(X, Y, Z)\xi \quad (2.31)$$

dir. Burada ξ, η kontak yapısının karakteristik vektör alanıdır (Camcı 2011).

Teorem 2.5.8 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(X \wedge Y) \wedge Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X \quad (2.32)$$

dir (Camcı 2011).

Teorem 2.5.9 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(X \wedge Y) \wedge Z + (Y \wedge Z) \wedge X + (Z \wedge X) \wedge Y = 0 \quad (2.33)$$

dir. Bu eşitliğe “*Jacobi özdeşliği*” adı verilir (Camcı 2011).

Teorem 2.5.10 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$g(X \wedge Y, Z \wedge W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W) \quad (2.34)$$

dir. Bu eşitliğe “*Lagrange özdeşliği*” adı verilir (Camcı 2011).

Teorem 2.5.11 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X \wedge Y, X \wedge Y) = g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y) \quad (2.35)$$

dir (Camcı 2011).

İspat. Lagrange özdeşliğinden yararlanarak (2.34) denkleminde Z yerine X, W yerine Y yazılırsa

$$\begin{aligned}
g(X \wedge Y, X \wedge Y) &= g((X \wedge Y) \wedge X, Y), \\
&= g(g(X, X)Y - g(Y, X)X, Y), \\
&= g(X, X)g(Y, Y) - g(Y, X)g(X, Y), \\
&= g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)
\end{aligned}$$

olur. Bu ispat için ikinci bir yol daha verelim. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
X &= x_1e + x_2\varphi(e) + x_3\xi, \\
Y &= y_1e + y_2\varphi(e) + y_3\xi, \\
Z &= z_1e + z_2\varphi(e) + z_3\xi
\end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= -x_2e + x_1\varphi(e), \\
\varphi(Y) &= -y_2e + y_1\varphi(e), \\
\varphi(Z) &= -z_2e + z_1\varphi(e)
\end{aligned}$$

ve

$$X \wedge Y = (x_2y_3 - x_3y_2)e + (x_3y_1 - x_1y_3)\varphi(e) + (x_2y_1 - x_1y_2)\xi$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g(X \wedge Y, X \wedge Y) &= (x_2y_3 - x_3y_2)(x_2y_3 - x_3y_2) \\
&\quad + (x_3y_1 - x_1y_3)(x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_1 - x_1y_2)(x_2y_1 - x_1y_2),
\end{aligned}$$

$$g(X, X)g(Y, Y) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

$$\begin{aligned}
g^2(X, Y) &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\
&= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + 2x_1y_1x_3y_3 + 2x_2y_2x_3y_3
\end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y) &= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 \\
&\quad - 2x_1y_1x_2y_2 - 2x_1y_1x_3y_3 - 2x_2y_2x_3y_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(X \wedge Y, X \wedge Y) &= x_2^2y_3^2 - 2x_2y_3x_3y_2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 - 2x_3y_1x_1y_3 + x_1^2y_3^2 \\
&\quad + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. O halde son iki eşitliği kullanarak

$$g(X \wedge Y, X \wedge Y) = \|X \wedge Y\|^2 = g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)$$

olur.

Teorem 2.5.12 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla_Z(X \wedge Y) = (\nabla_Z X) \wedge Y + X \wedge (\nabla_Z Y) \quad (2.36)$$

dir. ∇ ile burada M nin Levi-Civita koneksiyonu gösterilmektedir (Camcı 2011).

İspat. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (2.26) denkleminde

$$\begin{aligned}
\nabla_Z(X \wedge Y) &= -g(\nabla_Z X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(\nabla_Z X) + \eta(\nabla_Z X)\varphi(Y) \\
&\quad -g(X, \varphi(\nabla_Z Y))\xi - \eta(\nabla_Z Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(\nabla_Z Y) \\
&\quad -\eta(Y)(\nabla_Z \varphi(X) - \varphi(\nabla_Z X)) - g(X, \nabla_Z \varphi(Y)) - \varphi(\nabla_Z Y))\xi \\
&\quad +\eta(X)(\nabla_Z \varphi(Y) - \varphi(\nabla_Z Y)) + \eta(X)\nabla_Z \varphi(Y) \\
&\quad +(g(\nabla_Z X, \xi) + g(X, \nabla_Z \xi))\varphi(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_Z(X \wedge Y) &= (\nabla_Z X) \wedge Y + X \wedge (\nabla_Z Y) - g(X, \nabla_Z \varphi(Y))\xi \\
&\quad - \eta(Y) (\nabla_Z \varphi) X + \eta(X) (\nabla_Z \varphi) Y - g(X, \varphi(Y)) \nabla_Z \xi \\
&\quad - g(Y, \nabla_Z \xi) \varphi(X) + g(X, \nabla_Z \xi) \varphi(Y)
\end{aligned}$$

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde Z. Olszak (Olszaks 1986) tarafından ispatlanan

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = g(\varphi(\nabla_X \xi), Y)\xi - \eta(Y)\varphi(\nabla_X \xi)$$

eşitliği yardımıyla

$$-g(X, \nabla_Z \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\nabla_Z \varphi(X) + \eta(X) (\nabla_Z \varphi) Y = 0$$

dır. $\{\varphi Z, \varphi^2 Z, \xi\}$ üçlüsü M nin ortogonal bazı olmak üzere $\nabla_Z \xi$ ile ξ dik olduğundan

$$\nabla_Z \xi = a\varphi Z + b\varphi^2 Z$$

eşitliği Teorem 2.5.7 ile birlikte kullanılırsa

$$-g(X, \varphi(Y))\nabla_Z \xi - g(Y, \nabla_Z \xi)\varphi(X) + g(X, \nabla_Z \xi)\varphi(Y) = 0$$

ve (2.29) denklemi ile

$$\nabla_Z(X \wedge Y) = (\nabla_Z X) \wedge Y + X \wedge (\nabla_Z Y)$$

olur.

Önerme 2.5.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu,

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan ve $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarıyla verilmiş birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler

$$\begin{aligned}
\varphi(T) &= \eta(B)N - \eta(N)B \\
\varphi(N) &= \eta(T)B - \eta(B)T \\
\varphi(B) &= \eta(N)T - \eta(T)N
\end{aligned}$$

sağlanır (Camcı 2011).

İspat. İspatı Camcı (2011)'nın çalışmasındaki yöntemden farklı bir yolla yapalım. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere $g(\varphi T, T) = 0$ olduğundan $\varphi T = \lambda N + \mu B$ yazılabilir.

$$g(\varphi T, \xi) = \lambda \eta(N) + \mu \eta(B) = 0$$

eşitliğinden $\lambda = f \eta(B)$ ve $\mu = -f \eta(N)$ veya $\varphi(T) = f(\eta(B)N - \eta(N)B)$ elde edilir. Son eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\varphi(T), \varphi(T)) &= -g(\varphi^2(T), T) \\
f^2(\eta^2(N) + \eta^2(B)) &= g(T - \eta(T)\xi, T) \\
f^2(\eta^2(N) + \eta^2(B)) &= 1 - \eta^2(T)
\end{aligned}$$

elde edilir. ξ birim Reeb vektör alanı olduğundan $f = \pm 1$ dir. γ eğrisi boyunca benzer yönlendirme kullanılması gerektiğinden dolayı $f = 1$ olmalıdır. Sonuç olarak $\varphi(T) = \eta(B)N - \eta(N)B$ eşitliği sağlanır. Benzer metodlar kullanılarak diğerleri de kolay biçimde gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

3. KONTAK GEOMETRİDE SLANT ve N-SLANT HELİSLER

3.1 Slant Helisler

Tanım 3.1.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu olsun.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde s yay parametrelili bir eğri ve $T(s) = \gamma'(s)$, γ eğrisinin teğet vektör alanı olsun.

$$\cos \theta(s) = g(T(s), \xi)$$

şeklinde verilen $\theta(s)$ fonksiyonuna γ eğrisinin *kontak açısı* denir. Kontak açısı sabit olan eğriye bir *slant eğri* denir. Özel olarak bu sabit kontak açısı $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise, bu durumda eğriye bir *Legendre helis* denir (Cho vd. 2006).

Önerme 3.1.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin bir slant eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart $\eta(N) = 0$ olmasıdır. Burada N , γ eğrisinin asli normal vektör alanıdır (Cho vd. 2006).

İspat. Kabul edelim ki γ bir slant eğri olsun. Bu durumda γ eğrisi boyunca Frenet çatı alanı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve γ eğrisinin teğet vektör alanı T ile Reeb vektör alanı ξ arasındaki kontak açısı $\theta(s)$ olmak üzere Tanım 3.1.1 gereğince

$$\cos \theta(s) = g(T(s), \xi) \quad (3.1)$$

dir. (3.1) denkleminde her iki tarafın Levi-Civita koneksiyonuna göre türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$-\theta' \sin \theta(s) = \kappa g(N, \xi) + g(T, \nabla_T \xi) \quad (3.2)$$

olur. (3.2) denkleminde $g(N, \xi) = \eta(N)$ ve $\nabla_T \xi = -\varphi T$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$-\theta' \sin \theta(s) = \kappa g(N, \xi) - g(T, \varphi T)$$

denkleminde ulaşılır. Ayrıca Sonuç 2.4.2 yardımıyla $g(T, \varphi T) = 0$ olduğundan

$$-\theta' \sin \theta(s) = \kappa \eta(N) \quad (3.3)$$

elde edilir. γ eğrisi bir slant eğri olduğundan Tanım 3.1.1 gereğince θ kontak açısı sabittir. O halde $\theta' = 0$ dir. Bu durumda $\kappa \neq 0$ olduğundan (3.3) eşitliğinde $\eta(N) = 0$ olmak zorundadır.

Tersine kabul edelim ki; $\eta(N) = 0$ olsun. (3.3) eşitliğinden $-\theta' \sin \theta(s) = 0$ elde edilir. $\theta \in (0, \pi)$ olduğundan $\sin \theta(s) \neq 0$ dir. Böylece $\theta' = 0$ bulunur. Yani $\theta(s)$ kontak açısı sabittir. Tanım 3.1.1 gereğince γ eğrisi bir slant eğridir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin T, N ve ξ vektör alanları, bazı $\beta(s)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} T &= \sin \theta \{ \cos \beta(s) X + \sin \beta(s) \varphi X \} + \cos \theta \xi \\ N &= -\sin \beta(s) X + \cos \beta(s) \varphi X \\ \xi &= \cos \theta T \pm \sin \theta B \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır (Cho vd. 2006).

İspat. $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu olsun. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan ve $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarıyla verilmiş birim hızlı bir slant eğri olsun. Karakteristik vektör alanı

$$\xi = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1 = \eta(T)$, $\lambda_2 = \eta(N)$ ve $\lambda_3 = \eta(B)$ dir. $\eta(T) = g(T, \xi)$ eşitliği ve Tanım 3.1.1 birlikte göz önüne alınırsa

$$\lambda_1 = g(T, \xi) = \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit}$$

olur. Ayrıca γ slant eğri olduğundan Önerme 3.1.1 gereğince

$$\lambda_2 = g(N, \xi) = 0$$

olur. $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = 1$ olduğundan

$$\lambda_3 = g(B, \xi) = \pm \sin \theta$$

elde edilir. Böylece ξ Reeb vektör alanı;

$$\xi = \cos \theta T \pm \sin \theta B$$

şeklindedir. γ eğrisinin N asli normal vektör alanının $(X, \varphi X, \xi)$ ortonormal çatısına göre yazılışı

$$N = \mu_1 X + \mu_2 \varphi X + \mu_3 \xi$$

dir. $\mu_3 = g(N, \xi) = 0$ olduğundan aslında

$$N = \mu_1 X + \mu_2 \varphi X$$

biçiminde yazılır. $\mu_2 = g(N, \varphi X) = \cos \beta(s)$ olacak şekildeki $\beta(s)$ fonksiyonları için

$$\mu_1 = g(N, X) = \pm \sin \beta(s)$$

elde edilir. Benzer şekilde γ eğrisinin T teğet vektör alanının $(X, \varphi X, \xi)$ ortonormal çatısına göre yazılışı

$$T = \vartheta_1 X + \vartheta_2 \varphi X + \vartheta_3 \xi$$

dir. Tanım 3.1.1 kullanılarak

$$\vartheta_3 = g(T, \xi) = \cos \theta$$

olur. (2.17) ve (2.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g(\varphi T, \varphi X) &= g(T, X) - \eta(T)\eta(X) \\ &= g(T, X) - g(T, \xi)g(X, \xi) \end{aligned}$$

olup X ve ξ vektör alanları ortonormal olduğundan

$$\eta(X) = g(X, \xi) = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\vartheta_1 = g(T, X) = g(\varphi T, \varphi X)$$

olur. Burada $\eta(B) = \pm \sin \theta$, $\eta(N) = 0$, $g(N, \varphi X) = \cos \beta(s)$ eşitlikleri ve Önerme 2.5.1 birlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= g(\eta(B)N - \eta(N)B, \varphi X) \\ &= \eta(B)g(N, \varphi X) - \eta(N)g(B, \varphi X) \\ &= \pm \sin \theta \cos \beta(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $g(N, X) = \pm \sin \beta(s)$ olduğundan yine Önerme 2.5.1 yardımıyla

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= g(\varphi T, X) \\ &= g(\eta(B)N - \eta(N)B, X) \\ &= \eta(B)g(N, X) - \eta(N)g(B, X) \\ &= \sin \theta \sin \beta(s) \end{aligned}$$

şeklindedir. $g(T, N) = 0$ olduğundan T teğet vektör alanı ve N asli normal vektör

alanı;

$$T = \sin \theta \{ \cos \beta(s)X + \sin \beta(s)\varphi X \} + \cos \theta \xi$$

$$N = -\sin \beta(s)X + \cos \beta(s)\varphi X$$

olarak hesaplanır.

Önerme 3.1.3 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir Legendre eğri olsun bu durumda γ eğrisinin torsiyonu τ olmak üzere $\tau = 1$ dir (Baikoussis ve Blair 1994).

Teorem 3.1.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan bir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin torsiyonu $\tau = 1$ ve γ eğrisi üzerinde bir noktada $\eta(T) = \eta'(T) = 0$ ise γ eğrisi bir Legendre eğridir (Baikoussis ve Blair 1994).

Teorem 3.1.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir kontak metrik manifoldu üzerinde bir Legendre eğrisinin torsiyonu $\tau = 1$ ise M^3 manifoldu 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu olur (Baikoussis ve Blair 1994).

Teorem 3.1.3 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin bir slant eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart $\frac{\tau \pm 1}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır (Cho vd. 2006).

Camcı (2011) çalışmasında Teorem 3.1.3 ün gerek şartının doğru olmadığını göstermiştir ve Teorem 3.1.3 ün gerek şartı için karşıt örnek vermiştir.

Örnek 3.1.1 $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi

$$\begin{aligned}x'(s) &= -2\sqrt{1-\sigma^2}\sin\theta, \\y'(s) &= 2\sqrt{1-\sigma^2}\cos\theta, \\z'(s) &= 2\sigma + y(s)x'(s)\end{aligned}\tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned}\theta'(s) &= -2\sigma + \frac{2}{1+\sigma}, \\ \sigma(s) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\sqrt{2}s))\end{aligned}$$

Ayrıca γ eğrisinin teğet vektör alanı

$$T = (\sqrt{1-\sigma^2}\cos\theta)e + (-\sqrt{1-\sigma^2}\sin\theta)\varphi(e) + \sigma\xi$$

ve

$$\begin{aligned}T' &= \left(-\frac{\sigma\sigma'}{\sqrt{1-\sigma^2}}\cos\theta - (\theta' + 2\sigma)\sqrt{1-\sigma^2}\sin\theta\right)e \\ &\quad + \left(-\frac{\sigma\sigma'}{\sqrt{1-\sigma^2}}\sin\theta - (\theta' + 2\sigma)\sqrt{1-\sigma^2}\cos\theta\right)\varphi(e) + \sigma'\xi\end{aligned}$$

$\kappa^2 = \|\nabla_T T\|$ olduğundan

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \left(-\frac{\sigma\sigma'}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right)^2 - ((\theta' + 2\sigma)\sqrt{1-\sigma^2})^2 + (\sigma')^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

böylece $\kappa = 2$ ve $N = \frac{1}{2}\nabla_T T$ elde edilir.

$$X \wedge Y = -g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi X + \eta(X)\varphi Y$$

vektörel çarpım tanımından dolayı

$$\begin{aligned} B &= T \wedge N \\ &= -g(T, \varphi(N))\xi - \eta(N)\varphi T + \eta(T)\varphi N \end{aligned}$$

olduğundan

$$\eta(B) = -\sqrt{1 - \sigma^2 - \left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2}$$

olarak hesaplanır. $\eta(T)' = \kappa\eta(N)$ ve $\eta(N)' = -\kappa\eta(T) + (\tau - 1)\eta(B)$ eşitlikleri birlikte göz önüne alınırsa

$$\left(\frac{\sigma'}{2}\right)' + 2\sigma = -(\tau - 1)\sqrt{1 - \sigma^2 - \left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte

$$\left(\frac{\sigma'}{2}\right)' + 2\sigma = 1 - \sin \alpha$$

olarak alınırsa $\alpha = 2\sqrt{2}s - \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$1 - \sigma^2 - \left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2 = \frac{(1 - \sin \alpha)^2}{4}$$

şeklindedir. Son olarak

$$1 - \sin \alpha = -\frac{(\tau - 1)}{2}(1 - \sin \alpha)$$

yani $\tau = -1$ hesaplanır. $\frac{\tau - 1}{\kappa} = -1$ sabit olmasına rağmen γ eğrisi bir slant eğri değildir (Camcı 2011).

Teorem 3.1.4 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan bir eğri olmak üzere $\frac{\tau - 1}{\kappa} = c$ ve γ eğrisi üzerinde bir noktada $\eta(T) = \eta'(T) = 0$ olsun.

Bu durumda γ eğrisinin torsiyonu $\tau = -1$ dir ancak ve ancak $\pm c\sigma + 1 \geq 0$ olmak üzere

$$\sigma(s) = \pm \left(\frac{c}{1+c^2} - \frac{c}{1+c^2} \cos\left(\frac{2\sqrt{1+c^2}}{c}s\right) \right)$$

sağlanmalıdır (Camcı 2011).

Sonuç 3.1.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. Bu durumda $\tau = 1$ dir ancak ve ancak γ eğrisi bir Legendre helistir (Cho vd. 2006).

İspat. γ bir Legendre eğrisi olduğu için $\theta = \frac{\pi}{2}$ den dolayı ispat açıktır.

Teorem 3.1.5 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere γ eğrisi aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar.

$$\Delta H + \lambda_1 \nabla H + \lambda_2 H + \lambda_3 T = 0 \quad (3.6)$$

Burada

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2\kappa'}{\kappa} + \frac{c\kappa'}{1+c\kappa'} \\ \lambda_2 &= \frac{1+c\kappa}{\kappa} \left(\frac{\kappa'}{1+c\kappa} \right)' - 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - \kappa^2 - (1+c\kappa)^2 \\ \lambda_3 &= -\frac{\kappa\kappa'}{1+c\kappa}, \end{aligned}$$

$c = \frac{\tau - 1}{\kappa} \in \mathbb{R} - \{0\}$ şeklinde tanımlıdır (Gök vd. 2014).

İspat. $\nabla_T T = \kappa N$ eşitliğinde her iki tarafının Levi-Civita koneksiyonuna göre türevini alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$\Delta H = -2\kappa\kappa'T - \kappa^2 H + \kappa''N + \kappa'\nabla_T N + (\kappa\tau)'B + \kappa\tau\nabla_T B$$

elde edilir. (2.1) den

$$B = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}H + \frac{1}{\kappa\tau}\nabla H + \frac{\kappa}{\tau}T$$

ve son eşitliğin türevinden;

$$\nabla_TB = -\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'H - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\nabla H + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)'\nabla H + \frac{1}{\kappa\tau}\Delta H + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'T + \frac{\kappa}{\tau}H$$

dir. Serret-Frenet formüllerinden elde edilen $\nabla_TB = -\frac{\tau}{\kappa}\nabla_T T$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta H - \left(\frac{2\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right)\nabla H \\ &+ \left\{-\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 + \tau^2\right\}H + \kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'T \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. γ geodezik olmayan bir slant eğri olduğundan Teorem 3.1.1 den

$$\tau = 1 + c\kappa, \quad \tau' = c\kappa' \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = \frac{\kappa}{(1 + c\kappa)^2}$$

eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak son eşitlikleri (3.7) de kullanarak (3.6) denklemini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere γ eğrisi aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar.

$$\Delta H + \mu_1 \nabla H + \mu_2 H + \mu_3 T = 0 \quad (3.8)$$

Burada

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{2\tau'}{\tau-1} + \frac{\tau'}{\tau} \\ \mu_2 &= (\tau^2 - \tau) \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)' - 2\left(\frac{\tau'}{\tau-1}\right)^2 - \left(\frac{\tau-1}{c}\right)^2 - \tau^2 \\ \mu_3 &= -\frac{\tau'(\tau-1)}{c^2\tau} \end{aligned}$$

$c = \frac{\tau - 1}{\kappa} \in \mathbb{R} - \{0\}$ şeklinde tanımlıdır (Gök vd. 2014).

İspat. γ eğrisi geodezik olmayan bir slant eğri olduğundan Teorem 3.1.1 den elde edilen $\kappa = \frac{\tau - 1}{c}$ eşitliğini (3.7) denkleminde yerine koyulursa (3.8) denkleminde ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere γ eğrisi normal demette aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar.

$$\Delta^\perp H + \lambda \nabla_T^\perp H + \mu H^\perp = 0 \quad (3.9)$$

Burada

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\kappa'}{\kappa} + \frac{c\kappa'}{1 + c\kappa} \\ \mu &= \frac{1 + c\kappa}{\kappa} \left(\frac{\kappa'}{1 + c\kappa} \right)' - 2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 - (1 + c\kappa)^2 \end{aligned}$$

$c = \frac{\tau - 1}{\kappa} \in \mathbb{R} - \{0\}$ şeklinde tanımlıdır (Gök vd. 2014).

İspat. Serret-Frenet formüllerini kullanarak

$$\nabla_T^\perp T = \kappa N \quad (3.10)$$

$$\nabla_T^\perp N = \tau B$$

$$\nabla_T^\perp B = -\tau N$$

yazılabilir. $\nabla_T^\perp T = \kappa N$ eşitliği

$$N = \frac{1}{\kappa} H^\perp \quad (3.11)$$

olduğunu gösterir. Son eşitliği $\nabla_T^\perp N = \tau B$ eşitliğinde yazarak

$$\nabla_T^\perp \left(\frac{1}{\kappa} H^\perp \right) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} H^\perp + \frac{1}{\kappa} \nabla_T^\perp H = \tau B$$

$\tau \neq 0$ olduğundan

$$B = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}H^\perp + \frac{1}{\kappa\tau}\nabla_T^\perp H \quad (3.12)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.11) ve (3.12) denklemleri $\nabla_T^\perp B = -\tau N$ eşitliğinde yerine yazılırsa (3.9) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.8 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere γ eğrisi normal demette aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar.

$$\Delta^\perp H + \vartheta \nabla_T^\perp H + \nu H^\perp = 0 \quad (3.13)$$

Burada

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{2\tau'}{\tau-1} + \frac{\tau'}{\tau} \\ \nu &= (\tau^2 - \tau)\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)' - 2\left(\frac{\tau'}{\tau-1}\right)^2 - \tau^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Gök vd. 2014).

İspat. γ eğrisi geodezik olmayan bir slant eğri olduğundan Teorem 3.1.1 den elde edilen $\kappa = \frac{\tau-1}{c}$ eşitliğini (3.12) denkleminde yerine koyulursa (3.13) denkleminde ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 N-slant Helisler

Tanım 3.2.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan bir eğri ve $N(s)$, γ eğrisinin normal vektör alanı olsun.

$$\cos \theta(s) = g(N(s), \xi) \quad (3.14)$$

şeklinde verilen $\theta(s)$ fonksiyonuna γ eğrisinin normal vektör alanı $N(s)$ ile Reeb

vektör alanı ξ arasındaki kontak açısı denir. Eğer bu *kontak açısı* sabit ise γ eğrisine bir *N-slant* helis denir.

Sonuç 3.2.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir *N-slant* helis olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere özel olarak eğrinin kontak açısı $\frac{\pi}{2}$ ye eşit ise $g(N(s), \xi) = \eta(N) = 0$ olduğundan $\eta'(N) = 0$ dır. Ayrıca $\tau - 1$ ve κ oranı sabit olduğundan Teorem 3.1.1 den dolayı γ eğrisi bir slant eğridir. Sonuç olarak *N-slant* helisler, slant eğrilerin genelleştirilmiş halidir.

Tanım 3.2.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir *N-slant* helis olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\mathcal{H} = \frac{\tau - 1}{\kappa}$$

Burada κ ve τ , sırasıyla, γ eğrisinin asli eğriliği ve torsiyonudur.

Teorem 3.2.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir *N-slant* helis olsun. γ eğrisinin ξ Reeb vektör alanı

$$\xi = \left\{ \frac{\kappa \mathcal{H} (1 + \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} T + N + \frac{\kappa (1 + \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} B \right\} \cos \theta \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\mathcal{H} = \frac{\tau - 1}{\kappa}$, γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ kontak açıdır.

İspat. $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan, $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarıyla verilmiş birim hızlı bir *N-slant* helis olsun. Karakteristik vektör alanı ξ

$$\xi = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1 = \eta(T)$, $\lambda_2 = \eta(N)$ ve $\lambda_3 = \eta(B)$ dir. (2.17) ve Tanım 3.2.1 den $\lambda_2 = \eta(N) = g(N, \xi) = \cos \theta$

dır. Eşitliğin her iki tarafının Levi-Civita koneksiyonuna göre türevini alınırsa

$$g(\nabla_T N, \xi) + g(N, \nabla_T \xi) = 0$$

elde edilir. Ayrıca (2.22) ve Frenet formüllerini kullanarak

$$-\kappa g(T, \xi) + \tau g(B, \xi) - g(N, \varphi(T)) = 0,$$

dir. Önerme 2.5.1 yardımıyla

$$-\kappa g(T, \xi) + (\tau - 1) g(B, \xi) = 0$$

yazılabilir. Tanım 3.2.2 den

$$g(T, \xi) = \mathcal{H} g(B, \xi), \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) eşitliğini her iki tarafının Levi-Civita koneksiyonuna göre türevini alınırsa

$$g(\nabla_T T, \xi) + g(T, \nabla_T \xi) = \mathcal{H}' g(B, \xi) + \mathcal{H} \{g(\nabla_T B, \xi) + g(B, \nabla_T \xi)\}$$

yazılabilir. Serret Frenet formülleri ve Önerme 2.5.1 den

$$\kappa g(N, \xi) = \mathcal{H}' g(B, \xi) - \mathcal{H}(\tau - 1) g(N, \xi)$$

veya

$$g(B, \xi) = \frac{\kappa(1 + \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} g(N, \xi) \quad (3.17)$$

elde edilir. Eğer (3.17) eşitliğini (3.16) da yerine yazılırsa

$$g(T, \xi) = \frac{\kappa \mathcal{H}}{\mathcal{H}'} (1 + \mathcal{H}^2) g(N, \xi)$$

bulunur. Son olarak (3.14), (3.16) ve (3.17) den N -slant helisin eksenini

$$\xi = \left\{ \frac{\kappa \mathcal{H} (1 + \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} T + N + \frac{\kappa (1 + \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} B \right\} \cos \theta,$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin N -slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa(1 + \mathcal{H}^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{H}'} = \tan \theta \quad (3.18)$$

nın sabit olmasıdır. Burada $\mathcal{H} = \frac{\tau - 1}{\kappa}$ γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ kontak açıdır.

İspat. ξ, γ eğrisinin birim Reeb vektör alanı ve

$$\xi = \left\{ \frac{\kappa \mathcal{H} (1 + \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} T + N + \frac{\kappa (1 + \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} B \right\} \cos \theta.$$

için $g(\xi, \xi) = 1$ olduğundan

$$\frac{\kappa(1 + \mathcal{H}^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{H}'} = \tan \theta$$

sabit bir fonksiyon olduğu kolayca görülebilir.

Diğer taraftan, $\frac{\kappa(1 + \mathcal{H}^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{H}'} = \tan \theta$ sabit bir fonksiyon olması durumunda kolayca görülebilir ki γ bir N -slant helistir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç. 3.2.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin ξ Reeb vektör alanı

$$\xi = \cos \epsilon(s) \sin \theta T + \cos \theta N + \sin \epsilon(s) \sin \theta B \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\mathcal{H} = \frac{\tau - 1}{\kappa}$ γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu, $\cos \epsilon(s) = \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}}$, $\sin \epsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}}$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ kontak açıdır.

Teorem 3.2.3 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin T, N ve B vektör alanları aşağıdaki formdadır

$$\begin{aligned} T &= (\sin \epsilon(s) \sin \psi(s) - \cos \epsilon(s) \cos \theta \cos \psi(s))X \\ &\quad - (\cos \epsilon(s) \cos \theta \sin \psi(s) + \sin \epsilon(s) \cos \psi(s))\varphi X + \cos \epsilon(s) \cos \theta \xi, \\ N &= \sin \theta \cos \psi(s) X + \sin \theta \sin \psi(s) \varphi X + \cos \theta \xi, \\ B &= (-\cos \epsilon(s) \sin \psi(s) - \sin \epsilon(s) \cos \theta \cos \psi(s))X \\ &\quad - (\sin \epsilon(s) \cos \theta \sin \psi(s) - \cos \epsilon(s) \cos \psi(s))\varphi X + \sin \epsilon(s) \sin \theta \xi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

İspat. $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan, $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarıyla verilmiş birim hızlı bir N -slant helis olsun. N , γ eğrisinin normal vektör alanı olmak üzere

$$N = \lambda_1 X + \lambda_2 \varphi X + \lambda_3 \xi$$

şeklinde olsun. (2.17) denklemi ve Tanım 3.2.1 den $\lambda_3 = \eta(N) = g(N, \xi) = \cos \theta$ ve

$$N = \lambda_1 X + \lambda_2 \varphi X + \cos \theta \xi$$

birim vektör alanı olduğundan $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \sin^2 \theta$ dır.

Ayrıca $\lambda_1 = g(N, X) = \sin \theta \cos \psi(s)$ olacak şekildeki $\psi(s)$ fonksiyonları için

$\lambda_2 = g(N, \varphi X) = \sin \theta \sin \psi(s)$ elde edilir.

Dolayısıyla N asli vektör alanı

$$N = \sin \theta \cos \psi(s) X + \sin \theta \sin \psi(s) \varphi X + \cos \theta \xi \quad (3.21)$$

şeklindedir.

T , γ eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere

$$T = \vartheta_1 X + \vartheta_2 \varphi X + \vartheta_3 \xi$$

olsun. (3.19) dan

$$\vartheta_3 = \cos \epsilon(s) \sin \theta$$

dır. Ayrıca X ve ξ vektör alanları ortonormal olduğundan (2.19) eşitliği

$$\vartheta_1 = g(T, X) = g(\varphi T, \varphi X)$$

şeklinde yazılabilir. $\eta(B) = \sin \epsilon(s)$, $\eta(N) = \cos \theta$, $g(N, \varphi X) = \sin \psi(s)$ eşitlikleri ve Önerme 2.5.1 birlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g(T, X) &= g(\eta(B)N - \eta(N)B, \varphi X), \\ &= g(B, \xi)g(N, \varphi X) - g(N, \xi)g(B, \varphi X), \\ &= \sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \sin \psi(s) - \cos \theta g(B, \varphi X), \\ &= \sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \sin \psi(s) + \cos \theta (g(N, \xi)g(T, X) - g(T, \xi)g(N, X)), \\ &= \sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \sin \psi(s) + \cos^2 \theta g(T, X) - \cos \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \theta \cos \psi(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta)g(T, X) &= \sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \sin \psi(s) - \cos \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \theta \cos \psi(s) \\ \vartheta_1 &= g(T, X) = \sin \epsilon(s) \sin \psi(s) - \cos \epsilon(s) \cos \theta \cos \psi(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\vartheta_2 = g(T, \varphi X) = -g(\varphi T, X)$$

olduğu dikkate alınırsa Önerme 2.5.1 ve (2.17) den

$$\begin{aligned}
g(T, \varphi X) &= -g(B, \xi)g(N, X) + g(N, \xi)g(B, X) \\
&= -\sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \psi(s) - \cos \theta g(\varphi B, \varphi X), \\
&= -\sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \psi(s) + \cos \theta (g(N, \xi)g(T, \varphi X) - g(T, \xi)g(N, \varphi X)), \\
&= -\sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \psi(s) + \cos^2 \theta g(T, \varphi X) - \cos \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \theta \sin \psi(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta)g(T, \varphi X) &= -\sin \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \psi(s) - \cos \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \theta \sin \psi(s), \\
g(T, \varphi X) &= -\sin \epsilon(s) \cos \psi(s) - \cos \epsilon(s) \cos \theta \sin \psi(s)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla T , teğet vektör alanı

$$\begin{aligned}
T &= (\sin \epsilon(s) \sin \psi(s) - \cos \epsilon(s) \cos \theta \cos \psi(s))X \\
&\quad - (\sin \epsilon(s) \cos \theta \sin \psi(s) + \sin \epsilon(s) \cos \psi(s))\varphi X + \cos \epsilon(s) \cos \theta \xi,
\end{aligned}$$

şeklindedir.

B , γ eğrisinin binormal vektör alanı olmak üzere

$$B = \mu_1 X + \mu_2 \varphi X + \mu_3 \xi$$

olsun. (3.19) dan dolayı

$$\mu_3 = \sin \epsilon(s) \sin \theta$$

dır. Ayrıca Sonuç 2.4.2 den

$$\mu_2 = g(B, \varphi X) = -g(\varphi B, X)$$

şeklindedir. Önerme 2.5.1 ve (2.17) den

$$\begin{aligned}
g(B, \varphi X) &= -g(N, \xi)g(T, X) + g(T, \xi)g(N, X), \\
&= -\sin \epsilon(s) \cos \theta \sin \psi(s) + \cos \epsilon(s) \cos^2 \theta \cos \psi(s) + (\cos \epsilon(s) \sin^2 \theta \cos \psi(s)), \\
&= -\sin \epsilon(s) \cos \theta \sin \psi(s) + \cos \epsilon(s) \cos \psi(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\mu_1 = g(B, X) = g(\varphi B, \varphi X)$$

şeklindedir. Önerme 2.5.1 ve (2.17) den

$$\begin{aligned}
g(B, X) &= g(N, \xi)g(T, \varphi X) - g(T, \xi)g(N, \varphi X), \\
&= -\cos \epsilon(s) \cos^2 \theta \sin \psi(s) \sin \epsilon(s) \cos \theta \cos \psi(s) - \cos \epsilon(s) \sin^2 \theta \sin \psi(s), \\
&= -\cos \epsilon(s) \sin \psi(s) - \sin \epsilon(s) \cos \theta \cos \psi(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla B, Binormal vektör alanı

$$\begin{aligned}
B &= (-\cos \epsilon(s) \sin \psi(s) - \sin \epsilon(s) \cos \theta \cos \psi(s))X \\
&\quad -(\sin \epsilon(s) \cos \theta \sin \psi(s) - \cos \epsilon(s) \cos \psi(s))\varphi X + \sin \epsilon(s) \sin \theta \xi
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.3 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N-slant helis olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere γ eğrisinin κ geodezik eğriligi ve τ torsiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
\kappa &= \psi' \sin \theta \sin \epsilon(s) - 2\mathcal{H} \sin^2 \theta \sin^2 \epsilon(s), \\
\tau &= \psi' \sin \theta \cos \epsilon(s) - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \epsilon(s) + 1
\end{aligned} \tag{3.22}$$

İspat. $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan, $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ Frenet elemanlarıyla verilmiş birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin N asli vektör alanı

$$N = \sin \theta \cos \psi(s) X + \sin \theta \cos \psi(s) \varphi X + \cos \theta \xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} N' = & [-\psi'(s) \sin \theta \sin \psi - \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}(H \cos^2 \theta \sin \psi(s) + \cos \theta \cos \psi(s) \\ & - H \sin^2 \theta \sin \psi(s))X] + [-\psi'(s) \sin \theta \cos \psi \\ & - \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}(H \sin^2 \theta \cos \psi(s) + \cos \theta \sin \psi(s) - H \cos^2 \theta \cos \psi(s))\varphi X] \\ & + \left[\frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}} \sin \theta \right] \xi \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$\langle N', T \rangle = -\kappa$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} -\kappa = & -\frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s) \sin \theta \sin^2 \psi - \frac{1}{1+\mathcal{H}^2}(H \cos^2 \theta \sin^2 \psi(s) + \cos \theta \cos \psi(s) \sin \psi(s) \\ & - H \sin^2 \theta \sin^2 \psi(s)) + \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s) \cos \theta \cos \psi(s) \sin \theta \sin \psi \\ & - \frac{H}{1+\mathcal{H}^2}(H \cos^3 \theta \sin \psi(s) \cos \psi(s) + \cos^2 \theta \cos^2 \psi(s) \\ & - H \cos \theta \sin^2 \theta \cos \psi(s) \sin \psi(s)) - \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s) \cos \theta \cos \psi(s) \sin \theta \sin \psi \\ & + \frac{H}{1+\mathcal{H}^2}(H \cos \theta \sin^2 \theta \cos \psi(s) \sin \psi(s) + \cos^2 \theta \sin^2 \psi(s) \\ & - H \cos^3 \theta \sin \psi(s) \cos \psi(s)) - \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s) \sin \theta \cos^2 \psi \\ & + \frac{1}{1+\mathcal{H}^2}(H \sin^2 \theta \cos^2 \psi(s) + \cos \theta \cos \psi(s) \sin \psi(s) \\ & - H \cos^2 \theta \cos^2 \psi(s)) + \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\kappa &= -\frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta + \frac{H}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta - \frac{H}{1+\mathcal{H}^2}\cos^2\theta \\
&\quad + \frac{H}{1+\mathcal{H}^2}\cos^2\theta + \frac{H}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

$$-\kappa = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta + \frac{2H}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta$$

sonuç olarak $\frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}} = \sin\epsilon(s)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa = \psi'\sin\theta\sin\epsilon(s) - 2\mathcal{H}\sin^2\theta\sin^2\epsilon(s)$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde $\langle N', B \rangle = \tau$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta\sin^2\psi(s) - \frac{H}{1+\mathcal{H}^2}(H\cos^2\theta\sin^2\psi(s) + \cos\theta\cos\psi(s)\sin\psi(s) \\
&\quad - H\sin^2\theta\sin^2\psi(s)) + \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta\sin\psi(s)\cos\theta\cos\psi(s) \\
&\quad + \frac{1}{1+\mathcal{H}^2}(H\cos^3\theta\cos\psi(s)\sin\psi(s) + \cos^2\theta\cos^2\psi(s) - H\sin^2\theta\cos\theta\cos\psi(s)\sin\psi(s)) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta\sin\psi(s)\cos\theta\cos\psi(s) + \frac{1}{1+\mathcal{H}^2}(H\sin^2\theta\cos\theta\cos\psi(s)\sin\psi(s) \\
&\quad + \cos^2\theta\sin^2\psi(s) - H\cos^3\theta\cos\psi(s)\sin\psi(s)) + \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta\cos^2\psi(s) \\
&\quad - \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}(H\sin^2\theta\cos^2\psi(s) + \cos\theta\cos\psi(s)\sin\psi(s) - H\cos^2\theta\cos^2\psi(s)) \\
&\quad + \frac{1}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta \\
&= \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta + \frac{H^2}{1+\mathcal{H}^2}\cos^2\theta - \frac{H^2}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta + \frac{1}{1+\mathcal{H}^2}\cos^2\theta + \frac{1}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta \\
&= \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta + \frac{1-H^2}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta + \cos^2\theta \\
&\quad + \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta + \frac{1-H^2}{1+\mathcal{H}^2}\sin^2\theta + 1 - \sin^2\theta \\
&= \frac{H}{\sqrt{1+\mathcal{H}^2}}\psi'(s)\sin\theta + \frac{\sin^2\theta - H^2\sin^2\theta - \sin^2\theta - H^2\sin^2\theta}{1+\mathcal{H}^2} + 1
\end{aligned}$$

ve sonuç olarak $\cos \epsilon(s) = \frac{H}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{H}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \psi'(s) \sin \theta + \frac{-2H^2 \sin^2 \theta}{1 + \mathcal{H}^2} + 1, \\ \tau &= \psi' \sin \theta \cos \epsilon(s) - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \epsilon(s) + 1\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere γ eğrisinin torsiyonu

$$\tau = \frac{\kappa \mu(s)}{\sqrt{1 - \mu^2(s)}} + 1 \quad (3.23)$$

biçimindedir. Burada $\mu(s) = \cot \theta \int \kappa ds$.

İspat. $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. Teorem 3.2.2 den

$$\frac{\kappa(1 + \mathcal{H}^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{H}'} = \tan \theta \quad (3.24)$$

dır. (3.24) eşitliği düzenlenirse

$$\kappa \cot \theta = \frac{\mathcal{H}'}{(1 + \mathcal{H}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$\cot \theta \int \kappa ds = \frac{H}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \quad (3.26)$$

olur. (3.26) eşitliğini düzenlenirse

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{H}^2}{1 + \mathcal{H}^2} &= \cot^2 \theta \left(\int \kappa ds \right)^2 \\ \mathcal{H} &= \frac{\cot \theta \int \kappa ds}{\sqrt{1 - \cot^2 \theta \left(\int \kappa ds \right)^2}} \\ \kappa &= \frac{\cot \theta \int \kappa ds}{\sqrt{1 - \cot^2 \theta \left(\int \kappa ds \right)^2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$\mu(s) = \cot \theta \int \kappa ds$$

alınırsa (3.23) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3 C-paralel Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

Tanım 3.3.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı eğri olsun.

$$\nabla H = \lambda \xi$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ eğrisine *C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri* denir (Lee vd. 2012).

Lemma 3.3.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı eğri olsun. γ eğrisi için

$$\nabla_T \nabla_T T = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B \quad (3.27)$$

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T = -3\kappa \kappa' T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa \tau^2) N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') B \quad (3.28)$$

diferensiyel denklemleri sağlar.

Sonuç 3.3.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. (3.4) ve (3.27) denklemlerinden dolayı $\nabla_T H = \lambda \xi$ olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa^2 = -\lambda \cos \theta$$

$$\kappa' = 0$$

$$\kappa \tau = \lambda \sin \theta$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Lee vd. 2012).

Teorem 3.3.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir geodezik eğri ($\lambda = 0$) olması veya λ sıfırdan farklı bir sabit sayı olmak üzere

$$\kappa = \sqrt{-\lambda \cos \theta}, \quad \tau = \frac{\lambda}{\kappa} \sin \theta$$

eşitliğine sahip bir slant helis olmasıdır (Lee vd. 2012).

İspat. γ , C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir slant helis olsun. Sonuç 3.3.1 deki ilk ve üçüncü eşitlikler gereğince γ eğrisinin eğrilikleri $\kappa = \sqrt{-\lambda \cos \theta}$ ve $\tau = \frac{\lambda}{\kappa} \sin \theta$ şeklindedir.

Sonuç 3.3.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. (3.27) ve (3.19) dan dolayı $\nabla_T H = \lambda \xi$ olması için gerek ve yeter şart

$$-\kappa^2 = \frac{\lambda \mathcal{H}}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \sin \theta, \quad (3.29)$$

$$\kappa' = \lambda \cos \theta, \quad (3.30)$$

$$\kappa \tau = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \sin \theta. \quad (3.31)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Gök vd. 2014).

Teorem 3.3.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin κ geodezik eğriliği ve τ torsiyonu

$$\begin{aligned}\kappa &= (\lambda \cos \theta) s + a \\ \tau &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - ((\lambda \cos \theta) s + a)^2}\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada a ve λ sıfırdan farklı sabitlerdir (Gök vd. 2014).

İspat. γ , C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir N -slant helis olsun (3.30) eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa $\kappa = (\lambda \cos \theta) s + a$ elde edilir. (3.39) ve (3.31) taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{-\kappa}{\tau} = \frac{\tau - 1}{\kappa}$$

bu eşitlikten de

$$\tau^2 - \tau + \kappa^2 = 0$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu diferensiyel denklemin çözümünden

$$\tau = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa^2}$$

elde edilir. $\kappa = (\lambda \cos \theta) s + a$ değeri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\tau = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - ((\lambda \cos \theta) s + a)^2}$$

şeklinde hesaplanır.

Diğer taraftan γ eğrisinin asli eğriliği $\kappa = (\lambda \cos \theta) s + a$ ve torsiyonu

$\tau = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - ((\lambda \cos \theta) s + a)^2}$ olması durumunda kolayca görülebilir ki γ eğrisi C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bir Legendre eğri olsun. Bu durumda $\nabla_T H = \lambda \xi$ olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin $\nabla_T H = 0$ eşitliğini sağlamasıdır (Özgür ve Tripathi 2008).

3.4. C-proper Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

Tanım 3.4.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ geodezik olmayan birim hızlı eğri olsun.

$$\Delta H = \lambda \xi$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ eğrisine *C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri* denir (Lee vd. 2012).

Sonuç 3.4.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. (3.4) ve (3.28) denklemlerinden dolayı $\Delta_T H = \lambda \xi$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} 3\kappa\kappa' &= \lambda \cos \theta \\ -\kappa'' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 &= 0 \\ -(2\kappa'\tau + \kappa\tau') &= \lambda \sin \theta \end{aligned} \tag{3.32}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Lee vd. 2012).

Teorem 3.4.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu Sasaki manifoldunda Levi-Civita koneksiyonuna göre geodezik olmayan ve C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir slant helis yoktur (Lee vd. 2012).

İspat. Kabul edelim ki $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ ve λ_0 sabit olsun. (3.32) deki ilk eşitlikten $\kappa^2 = \frac{2}{3}(\lambda_0 \cos \theta)s + a$, $a = sbt$ elde edilir. Bu sonuç (3.32) deki ikinci eşitlikte yerine yazılırsa eşitliğin sağlanmadığını görülür. Bu bir çelişkidir. O halde C-proper

ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir slant helis yoktur.

Sonuç 3.4.2. $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\int \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} ds = \frac{3}{2\lambda \sin \theta} \kappa^2 \quad (3.33)$$

$$-\kappa'' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 = \lambda \cos \theta \quad (3.34)$$

$$-2\kappa'\tau - \kappa\tau' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \sin \theta \quad (3.35)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Gök vd. 2014).

İspat. (3.28) ve (3.19) eşitlikleri kullanılırsa γ eğrisinin (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitliklerini sağladığı kolayca görülebilir.

Teorem 3.4.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin $\lambda = \kappa^3 + \kappa\tau^2$ eşitliğini sağlayan bir dairesel helis olmasıdır. Burada κ ve $\tau \neq 1$ sabit sayılardır (Gök vd. 2014).

İspat. γ , C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir N -slant helis olsun. (3.33), ve (3.35) eşitliklerinden κ ve τ nun sabit sayılar ve ξ , Reeb vektör alanı ile N , asli normal vektör arasındaki kontak açısı $\theta = 0$ olduğu elde edilir. Bu sonuçlar (3.35) de kullanılırsa $\lambda = \kappa^3 + \kappa\tau^2$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4.3 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bir slant eğri olsun. Bu durumda $\Delta_T H = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin geodezik olmasıdır (Özgür ve Tripathi 2008).

Özgür ve Tripathi gösterdi ki 3-boyutlu Sasaki uzayında $\nabla_T H = 0$ veya $\Delta_T H = 0$ eşitliğini sağlayan Legendre eğrileri geodeziklerdir.

3.5 Normal Demette C-paralel Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

Tanım 3.5.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı eğri olsun.

$$\nabla_T^\perp H = \lambda \xi$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ eğrisine *normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri* denir (Lee vd. 2012).

Lemma 3.5.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı eğri olsun. γ eğrisi için

$$\nabla_T^\perp \nabla_T^\perp T = \kappa' N + \kappa \tau B \quad (3.36)$$

$$\nabla_T^\perp \nabla_T^\perp \nabla_T^\perp T = (\kappa'' - \kappa \tau^2) N + (2\kappa' \tau + \kappa \tau') B \quad (3.37)$$

diferensiyel denklemleri sağlanır.

Sonuç 3.5.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. (3.4) ve (3.36) denklemlerinden dolayı $\nabla_T^\perp H = \lambda \xi$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda \cos \theta = 0 \quad (3.38)$$

$$\kappa' = 0$$

$$\kappa \tau = \lambda \sin \theta$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Lee vd. 2012).

Teorem 3.5.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin Normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir çember olması veya $\kappa = \lambda$ eşitliğini sağlayan bir Legendre helis olmasıdır (Lee vd. 2012).

İspat. (3.38) deki ikinci eşitlikten κ nın sabit ve (3.38) deki ilk eşitlikten $\lambda = 0$ veya γ nın Legendre helis olduğu elde edilir. Eğer $\lambda = 0$ ise κ sabit olduğundan bir çemberdir. Diğer taraftan $\lambda \neq 0$ ise γ eğrisi Legendre helistir ve $\kappa = \lambda$ dır.

Sonuç 3.5.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. (3.36) ve (3.19) denklemlerinden dolayı $\nabla_T^\perp \mathbb{H} = \lambda \xi$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\lambda \mathcal{H}}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \sin \theta = 0 \quad (3.39)$$

$$\lambda \cos \theta = \kappa' \quad (3.40)$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \sin \theta = \kappa \tau \quad (3.41)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Gök vd. 2014).

Teorem 3.5.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin Normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin bir çember olmasıdır ($\lambda = 0$) veya $\kappa = \lambda s + c$, $c \in \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0$) ve $\tau = 0$ eğriliklerine sahip bir eğri olmasıdır (Gök vd. 2014).

İspat. γ , Normal demette C-paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir N -slant helis olsun.

(i) $\lambda = 0$ olması durumunda; (3.40) dan κ nın sabit bir sayı olduğu görülür. (3.41) den dolayı $\kappa \tau = 0$ olacağından $\tau = 0$ hesaplanır.

(ii) $\lambda \neq 0$ olması durumunda; (3.39) ve (3.40) eşitlikleri oranlanırsa $\tau(\tau - 1) = 0$ hesaplanır. $\tau = 0$ alınırsa (3.41) eşitliğinden $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ elde edilir. $\kappa' = 0$ olacağından $\kappa = \lambda s + c$, $c \in \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0$) şeklindedir. $\tau = 1$ alınırsa yani γ bir Legendre eğrisi ise (3.40) ve (3.41) eşitliklerinden $\lambda \cos \theta = 0$ elde edilir. λ sıfırdan farklı ve θ kontakt açısında $\frac{\pi}{2}$ den farklı olduğundan bu durum çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

3.6 Normal Demette C-proper Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

Tanım 3.6.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı eğri olsun.

$$\Delta_T^\perp H = \lambda \xi$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ eğrisine *normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri* denir (Lee vd. 2012).

Sonuç 3.6.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. (3.4) ve (3.28) denklemlerinden dolayı $\Delta_T^\perp H = \lambda \xi$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \lambda \cos \theta &= 0 \\ -\kappa'' + \kappa \tau^2 &= 0 \\ -(2\kappa' \tau + \kappa \tau') &= \lambda \sin \theta \end{aligned} \tag{3.42}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Lee vd. 2012).

Teorem 3.6.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin Normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olabilmesi için gerek

ve yeter şart γ eğrisinin bir çember olması veya $\kappa = ae^s + be^{-s}$ ve $\lambda = -2(ae^s - be^{-s})$ eşitliğini sağlayan bir Legendre helis olmasıdır. Burada a ve b birer sabittir (Lee vd. 2012).

İspat. (i) $\lambda = 0$ olması durumunda

$$\begin{aligned}\kappa'' - \kappa\tau^2 &= 0 \\ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' &= 0\end{aligned}\tag{3.43}$$

γ geodezik olmayan bir slant helis olduğundan Teorem 3.1.1 den dolayı $\tau = a\kappa + 1$ olacak şekilde bir a sabiti mevcuttur.

$\tau = a\kappa + 1$ ve $\tau' = a\kappa'$ eşitlikleri, (3.43) deki ikinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$\kappa'(3a\kappa + 2) = 0$$

elde edilir. Bu durumda $\kappa' = 0$ veya $3a\kappa + 2 = 0$ olmalıdır.

$\kappa' = 0$ olması durumunda $\kappa = sbt \neq 0$ ve $\tau = 0$ olur.

Diğer taraftan $3a\kappa + 2 = 0$ olması durumunda ise (3.43) deki ilk eşitlikten $\tau = 0$ elde edilir. Bu ise $\tau = a\kappa + 1$ yani γ eğrisinin slant eğri olma şartıyla çelişir. 3-boyutlu bir Sasaki manifoldunda geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğrinin $\nabla_T^\perp H = \lambda\xi$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart $\kappa = sbt \neq 0$ ve $\tau = 0$ eşitliğini sağlayan bir çember olmasıdır.

(ii) $\lambda \neq 0$ olması durumunda γ eğrisi

$$\begin{aligned}\kappa'' - \kappa &= 0, \\ 2\kappa' &= -\lambda\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan bir Legendre eğrisidir. 3-boyutlu bir Sasaki manifoldunda geo-

dezik olmayan birim hızlı bir slant eğrinin $\nabla_T^\perp H = \lambda \xi$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart γ nın $\kappa = ae^s + be^{-s}$ ve $\lambda = -2(ae^s - be^{-s})$ eşitliğini sağlayan bir Legendre helis olmasıdır. Burada a ve b birer sabittir.

Sonuç 3.6.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. (3.37) ve (3.19) denklemlerinden dolayı $\nabla_T^\perp \mathbb{H} = \lambda \xi$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\lambda \mathcal{H}}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \sin \theta = 0, \quad (3.44)$$

$$\lambda \cos \theta = -\kappa'' + \kappa \tau^2, \quad (3.45)$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \mathcal{H}^2}} \sin \theta = -\left(2\kappa' \tau + \kappa \tau'\right). \quad (3.46)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Gök vd. 2014).

Teorem 3.6.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin Normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart

(i) $\lambda = 0$ durumunda γ eğrisinin $\kappa = \left(\frac{1}{d_1} (d_1 s + d_2)^2 + \mu^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ve $\tau = \frac{\mu}{\kappa^2}$ eğriliklerine sahip olmasıdır. Burada $d_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $d_2 \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lambda \neq 0$ durumunda γ eğrisi $\kappa = \lambda \cos \theta$ asli eğrilğine sahip bir Legendre eğrisidir veya γ eğrisi κ geodezik eğriliği $\kappa' = \pm (2\lambda \kappa + c_1 \kappa^{-2} + c_2)^{\frac{1}{2}}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ diferensiyel denklemini sağlayan ve $\tau = \frac{\mu}{\kappa^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$ torsiyonuna sahip bir eğridir (Gök vd. 2014).

İspat. γ , Normal demette C-proper ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir N -slant helis olsun.

(i) $\lambda = 0$ olması durumunda; (3.46) eşitliğinden $2\kappa' \tau + \kappa \tau' = 0$ bulunur. Bu diferensiyel denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{(\kappa\tau)'}{\kappa\tau} &= \frac{-\kappa'}{\kappa} \\
\ln(\kappa\tau) &= -\ln(\kappa) + \ln(\mu) \\
\kappa^2\tau &= \mu
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten de $\tau = \frac{\mu}{\kappa^2}$ şeklinde hesaplanır.

(3.45) eşitliğinden $-\kappa'' + \kappa\tau^2 = 0$ ve $\tau = \frac{\mu}{\kappa^2}$ olduğundan dolayı

$$\kappa'' - \frac{\mu}{\kappa^3} = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümünden de $\kappa = \left(\frac{1}{d_1} (d_1 s + d_2)^2 + \mu^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde hesaplanır.

(ii) $\lambda \neq 0$ olması durumunda; (3.44) ve (3.46) eşitlikleri yardımıyla $(2\kappa'\tau + \kappa\tau')(\tau - 1) = 0$ bulunur. $\tau = 1$ alınırsa (3.45) ve (3.46) den $\kappa = \lambda \cos \theta$ hesaplanır. Benzer şekilde $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ alınırsa $\kappa' = \pm (2\lambda\kappa + c_1\kappa^{-2} + c_2)^{\frac{1}{2}}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $\tau = \frac{\mu}{\kappa^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.7 Kontak Geometride $AW(k)$ -tipinden Eğriler

Önerme 3.7.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ ve γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu

$$\mathcal{H} = \frac{\tau - 1}{\kappa}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= T(s), \\
\gamma''(s) &= \nabla_T T(s) = \kappa(s)N(s), \\
\gamma'''(s) &= \nabla_T \nabla_T T(s) = -\kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + (\kappa^2(s)\mathcal{H}(s) + \kappa(s))B(s), \\
\gamma^{vv}(s) &= \nabla_T \nabla_T \nabla_T T(s) \\
&= -3\kappa(s)\kappa'(s)T(s) + \{\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa^3(s)\mathcal{H}^2(s) - 2\kappa^2(s)\mathcal{H}(s) - \kappa(s)\}N(s) \\
&\quad + \{3\kappa(s)\kappa'(s)\mathcal{H}(s) + \kappa^2(s)\mathcal{H}'(s) + 2\kappa(s)\kappa'(s)\}B(s)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

dir.

İspat. γ eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu $\mathcal{H} = \frac{\tau - 1}{\kappa}$ olmak üzere (2.2) eşitliğinde τ yerine

$$\tau = \kappa\mathcal{H} + 1$$

yazılırsa (3.47) eşitliği elde edilir.

Notasyon 3.7.1

$$\begin{aligned}
N_1(s) &= \kappa(s)N(s) = (\gamma''(s))^\perp = \kappa(s)N(s), \\
N_2(s) &= (\gamma'''(s))^\perp = \kappa'(s)N(s) + (\kappa^2(s)\mathcal{H}(s) + \kappa(s))B(s), \\
N_3(s) &= (\gamma^{vv}(s))^\perp = \{\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa^3(s)\mathcal{H}^2(s) - 2\kappa^2(s)\mathcal{H}(s) - \kappa(s)\}N(s) \\
&\quad + \{3\kappa(s)\kappa'(s)\mathcal{H}(s) + \kappa^2(s)\mathcal{H}'(s) + 2\kappa(s)\kappa'(s)\}B(s)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

ile gösterelim.

Teorem 3.7.1 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin $AW(1)$ -tipinden olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin

$$9\kappa'' - 13\kappa^3 + 12\kappa^2 - 9\kappa = 0$$

diferensiyel denklemini sağlayan ve $\mathcal{H} = -\frac{2}{3}$ sabit harmonik eğrilğine veya sabit eğriliklere sahip bir slant eğri olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin harmonik eğriliği $\mathcal{H}$ sabit olduğundan $\mathcal{H}' = 0$ dır. Ayrıca γ eğrisi $AW(1)$ -tipinden olduğundan $N_{\mathcal{J}}(s) = 0$ olur. Buradan (3.48) gereğince

$$\begin{aligned} \kappa'' - \kappa^3 - \kappa^3 \mathcal{H}^2 - 2\kappa^2 \mathcal{H} - \kappa &= 0, \\ (3\mathcal{H} + 2)\kappa\kappa' &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

eşitlikleri sağlanır. γ slant eğrisi geodezik olmadığından (3.49) un ikinci eşitliğinden

$$\mathcal{H} = -\frac{2}{3} \text{ veya } \kappa' = 0$$

olur. $\mathcal{H} = -\frac{2}{3}$ olması durumunda (3.49) un ilk eşitliğinde $\mathcal{H}$ yerine $-\frac{2}{3}$ yazılırsa

$$9\kappa'' - 13\kappa^3 + 12\kappa^2 - 9\kappa = 0$$

diferensiyel denklemini elde edilir.

Diğer taraftan $\kappa' = 0$ olması durumunda $\tau = \kappa\mathcal{H}+1$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa $\tau' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla γ slant eğrisi sabit eğriliklere sahiptir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.2 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin $AW(2)$ -tipinden olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin κ geodezik eğriliği ve $\mathcal{H}$ harmonik eğriliği

$$\begin{aligned} -\kappa''\kappa^2\mathcal{H} - \kappa''\kappa - 3(\kappa')^2\kappa\mathcal{H} + 2(\kappa')^2\kappa + \kappa^5\mathcal{H}^3 \\ + 3\kappa^4\mathcal{H}^2 + \kappa^5\mathcal{H} + 3\kappa^3\mathcal{H} + \kappa^4 + \kappa^2 = 0 \end{aligned}$$

diferensiyel denklemini sağlamalıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisi $AW(2)$ -tipinden olduğundan (2.5) gereğince $N_2(s)$ ile $N_3(s)$ lineer bağımlı değildir. Yani katsayılar determinantının değeri 0 olmalıdır. γ eğrisi bir slant eğri olduğundan $\mathcal{H}' = 0$ eşitliği de göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{vmatrix} \kappa' & \kappa^2\mathcal{H} + \kappa \\ \kappa'' - \kappa^3 - \kappa^3\mathcal{H}^2 - 2\kappa^2\mathcal{H} - \kappa & 3\kappa\kappa'\mathcal{H} + 2\kappa\kappa' \end{vmatrix} = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & -\kappa''\kappa^2\mathcal{H} - \kappa''\kappa - 3(\kappa')^2\kappa\mathcal{H} + 2(\kappa')^2\kappa + \kappa^5\mathcal{H}^3 \\ & + 3\kappa^4\mathcal{H}^2 + \kappa^5\mathcal{H} + 3\kappa^3\mathcal{H} + \kappa^4 + \kappa^2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.3 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin $AW(3)$ -tipinden olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin $\mathcal{H} = \frac{2}{3}$ sabit harmonik eğrilğine veya sabit eğriliklere sahip olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisi $AW(3)$ -tipinden olduğundan (2.4) gereğince $N_1(s)$ ile $N_3(s)$ lineer bağımlı değildir. Yani katsayılar determinantının değeri 0 olmalıdır. γ eğrisi bir slant eğri olduğundan $\mathcal{H}' = 0$ eşitliği de göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{vmatrix} \kappa' & 0 \\ \kappa'' - \kappa^3 - \kappa^3\mathcal{H}^2 - 2\kappa^2\mathcal{H} - \kappa & 3\kappa\kappa'\mathcal{H} + 2\kappa\kappa' \end{vmatrix} = 0$$

olur. Buradan

$$3(\kappa')^2\kappa\mathcal{H} = 2(\kappa')^2\kappa \quad (3.50)$$

elde edilir. $\kappa' \neq 0$ olduğu durumda (3.50) eşitliğinin her iki tarafını $(\kappa')^2$ ile sadeleştirilirse $\mathcal{H} = \frac{2}{3}$ olur.

Diğer taraftan $\kappa' = 0$ olması durumunda $\tau = \kappa\mathcal{H}+1$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa $\tau' = 0$ elde edilir. Dolayısıyla γ slant eğrisi sabit eğriliklere sahiptir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.4 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin $AW(1)$ -tipinden olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\kappa' \left(\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2} \right) - \kappa \left(\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2} \right)' = c \left(\kappa^2 + \left(\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2} \right)^2 \right)$$

olmasıdır. Burada c ve c_1 birer sabittir.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. (3.18) gereğince

$$\frac{\kappa(1 + \mathcal{H}^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{H}'} = \tan \theta = c \quad (3.51)$$

dir. Aynı zamanda γ eğrisi $AW(1)$ -tipinden olduğundan (2.8) eşitliğinden

$$\tau = \frac{c_1}{\kappa^2} \quad (3.52)$$

olur. (3.52) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\tau' = \frac{-2c_1\kappa'}{\kappa^3} \quad (3.53)$$

elde edilir. (3.51) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$\kappa'(\tau - 1) - \kappa(\tau - 1)' = c(\kappa^2 + (\tau - 1)^2)^{\frac{3}{2}} \quad (3.54)$$

elde edilir. Son olarak (3.52) ve (3.53) eşitliklerini (3.54) eşitliğinde kullanılırsa

$$\kappa' \left(\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2} \right) - \kappa \left(\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2} \right)' = c \left(\kappa^2 + \left(\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.5 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin $AW(2)$ -tipinden olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$3(\kappa')^2\tau - (\kappa')^2 - c\kappa'(\kappa^2 + (\tau - 1)^2)^{\frac{3}{2}} = \kappa\kappa''\tau - \kappa^4\tau - \kappa^2\tau^3$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. Bu durumda (3.54) denkleminde

$$\tau' = \frac{\kappa'(\tau - 1) - c(\kappa^2 + (\tau - 1)^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} \quad (3.55)$$

γ eğrisi $AW(2)$ -tipinden olduğundan (2.9) ve (3.55) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$2(\kappa')^2\tau + (\kappa')^2(\tau - 1) - c\kappa'(\kappa^2 + (\tau - 1)^2)^{\frac{3}{2}} = \kappa\kappa''\tau - \kappa^4\tau - \kappa^2\tau^3$$

olur. Son eşitlik düzenlenirse

$$3(\kappa')^2\tau - (\kappa')^2 - c\kappa'(\kappa^2 + (\tau - 1)^2)^{\frac{3}{2}} = \kappa\kappa''\tau - \kappa^4\tau - \kappa^2\tau^3$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.6 $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant helis olsun. γ eğrisinin $AW(3)$ -tipinden olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\kappa' - \frac{3c_1\kappa'}{\kappa} = c(\kappa^2 + (\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2})^2)^{\frac{3}{2}}$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ geodezik olmayan birim hızlı bir N -slant eğri olsun. γ eğrisi $AW(3)$ -tipinden olduğundan Önerme 2.1.2 gereğince

$$2\kappa'^2\tau + \kappa\tau' = 0 \quad (3.56)$$

dır. Ayrıca (2.10) eşitliğinden

$$\tau = \frac{c_1}{\kappa^2} \quad (3.57)$$

dir. Son olarak (3.56) ve (3.57) eşitliklerini (3.54) eşitliğinde kullanılırsa

$$\kappa' - \frac{3c_1\kappa'}{\kappa} = c(\kappa^2 + (\frac{c_1 - \kappa^2}{\kappa^2})^2)^{\frac{3}{2}}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

4. $\mathbb{R}^3(-3)$ HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDUNDA YÜZEYLER

4.1 $\mathbb{R}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldunda Herhangi Bir Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanının Bulunuşu

M , $\mathbb{R}^3(-3)$ de bir yüzey olsun. M yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3(-3) \\ &: (u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{aligned}$$

olsun. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$X_u = f_{1,u} \frac{\partial}{\partial x} + f_{2,u} \frac{\partial}{\partial y} + f_{3,u} \frac{\partial}{\partial z}$$

dır. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(\varphi(e) - y\xi), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}e, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\xi$$

olduğundan

$$X_u = \frac{1}{2}f_{2,u}e + \frac{1}{2}f_{1,u}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,u} - f_2f_{1,u})\xi \quad (4.1)$$

ve benzer mantıkla

$$X_v = \frac{1}{2}f_{2,v}e + \frac{1}{2}f_{1,v}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2f_{1,v})\xi \quad (4.2)$$

olarak bulunur.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için $X = x_1e + x_2\varphi(e) + x_3\xi$ ve $Y = y_1e + y_2\varphi(e) + y_3\xi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= -x_2e + x_1\varphi(e), \\ \varphi(Y) &= -y_2e + y_1\varphi(e), \\ g(X, \varphi(Y)) &= x_2y_1 - x_1y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= x_3, \\
\varphi(\xi) &= 0, \\
\eta \circ \varphi &= 0, \\
\eta(\xi) &= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(X, \varphi(Y)) &= -g(\varphi(X), Y), \\
g(X, \varphi(X)) &= 0
\end{aligned}$$

değerleri yardımıyla

$$\varphi(X_u) = -\frac{1}{2}f_{1,u}e + \frac{1}{2}f_{2,u}\varphi(e) \quad , \quad \varphi(X_v) = -\frac{1}{2}f_{1,v}e + \frac{1}{2}f_{2,v}\varphi(e) \quad (4.3)$$

ve

$$\left. \begin{aligned}
\eta(X_u) &= \frac{1}{2}(f_{3,u} - f_2f_{1,u}), \\
\eta(X_v) &= \frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2f_{1,v})
\end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= -g(X_u, \varphi(X_v))\xi - \eta(X_v)\varphi(X_u) + \eta(X_u)\varphi(X_v) \\
&= -\left[\frac{1}{2}f_{1,u}\frac{1}{2}f_{2,v} - \frac{1}{2}f_{2,u}\frac{1}{2}f_{1,v}\right]\xi - \frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2f_{1,v})\left(-\frac{1}{2}f_{1,u}e + \frac{1}{2}f_{2,u}\varphi(e)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(f_{3,u} - f_2f_{1,u})\left(-\frac{1}{2}f_{1,v}e + \frac{1}{2}f_{2,v}\varphi(e)\right)
\end{aligned}$$

$X_u \wedge X_v$ çarpımı $\{e, \varphi(e), \xi\}$ ortonormal baz vektörlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \frac{1}{4}[f_{1,u}(f_{3,v} - f_2f_{1,v}) - f_{1,v}(f_{3,u} - f_2f_{1,u})]e \\
&\quad + \frac{1}{4}[f_{2,v}(f_{3,u} - f_2f_{1,u}) - f_{2,u}(f_{3,v} - f_2f_{1,v})]\varphi(e) \\
&\quad + \frac{1}{4}(f_{1,v}f_{2,u} - f_{1,u}f_{2,v})\xi
\end{aligned} \quad (4.5)$$

olur ve

$$\begin{aligned} E &= g(X_u, X_u) = \frac{1}{4}f_{2,u}^2 + \frac{1}{4}f_{1,u}^2 + \frac{1}{4}(f_{3,u} - f_2f_{1,u})^2, \\ F &= g(X_u, X_v) = \frac{1}{4}f_{2,u}f_{2,v} + \frac{1}{4}f_{1,u}f_{1,v} + \frac{1}{4}(f_{3,u} - f_2f_{1,u})(f_{3,v} - f_2f_{1,v}), \\ G &= g(X_v, X_v) = \frac{1}{4}f_{2,v}^2 + \frac{1}{4}f_{1,v}^2 + \frac{1}{4}(f_{3,v} - f_2f_{1,v})^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

olduğundan M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

ifadesi Teorem 2.5.11 de ispatlanan

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = g(X_u, X_u)g(X_v, X_v) - g^2(X_u, X_v)$$

denklemini yardımıyla

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (4.7)$$

veya

$$N = \frac{1}{4\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} [f_{1,u}(f_{3,v} - f_2f_{1,v}) - f_{1,v}(f_{3,u} - f_2f_{1,u})] e \\ + [f_{2,v}(f_{3,u} - f_2f_{1,u}) - f_{2,u}(f_{3,v} - f_2f_{1,v})] \varphi(e) \\ + (f_{1,v}f_{2,u} - f_{1,u}f_{2,v})\xi \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir.

4.2 $\mathbb{R}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldunda Normal Vektörü Kontak Distribüsyonda Yatan Yüzeyler

Tanım 4.2.1 $M, \mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda bir yüzey olsun. M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3(-3) \\ &: (u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{aligned}$$

olsun. Eğer M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

olup $X_u \wedge X_v \neq 0$ yüzey olma şartıdır.

$X_u \wedge X_v = 0$ olacak biçimde $(u, v) \in M$ noktalarına yüzeyin singüler noktaları denir.

Tanım 4.2.2 $M, \mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda bir yüzey olsun. M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3(-3) \\ &: (u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{aligned}$$

olsun. Eğer M yüzeyinin birim normal vektör alanı N , kontak distribüsyonda yatıyorsa M yüzeyine kontak distribüsyonda yatan yüzey adı verilir (Gök ve Camcı 2014). Kontak distribüsyonda yatan yüzey *D-yüzey* şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2.3 $M, \mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda bir yüzey ve $N(s)$, M yüzeyinin normal vektör alanı olsun.

$$\cos \theta(s) = g(N(s), \xi) \tag{4.9}$$

şeklinde verilen $\theta(s)$ fonksiyonuna M yüzeyinin normal vektör alanı $N(s)$ ile Reeb

vektör alanı ξ arasındaki kontak açısı denir. Eğer bu kontak açısı sabit ise M yüzeyine bir sabit açılı yüzey denir (Gök ve Camcı 2014).

Kontak distribüsyonda yatan yüzey, sabit açılı yüzeyin özel bir durumudur. Tanım 4.3.3 de M yüzeyinin normal vektör alanı $N(s)$ ile Reeb vektör alanı ξ arasındaki θ sabit kontak açısı özel olarak $\frac{\pi}{2}$ alınırsa M yüzeyinin kontak distribüsyonda yatan bir yüzey olduğu kolayca elde edilir.

Teorem 4.2.1 $U, \mathbb{R}^2$ düzleminde açık bir küme ve $M, \mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda bir yüzey olsun. M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X &: U \longrightarrow \mathbb{R}^3(-3) \\ &: (u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{aligned}$$

olsun. M yüzeyinin kontak distribüsyonda yatan bir yüzey olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$f_{1,v}f_{2,u} - f_{1,u}f_{2,v} = 0 \quad (4.10)$$

olmasıdır. Burada $f_{i,u}$ ve $f_{i,v}$ ($1 \leq i \leq 2$), $f_i(u, v)$ nin, sırasıyla, u ve v parametrelerine göre birinci mertebeden türevleridir (Gök ve Camcı 2014).

İspat. Kabul edelim ki; $M, \mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda kontak distribüsyonda yatan bir yüzey olsun. M yüzeyinin normal vektör alanı $N(s)$

$$\eta(N) = g(N, \xi) = 0$$

veya (4.5) gereğince

$$f_{1,v}f_{2,u} - f_{1,u}f_{2,v} = 0$$

şeklindedir.

Tersine, kabul edelim ki $f_{1,v}f_{2,u} - f_{1,u}f_{2,v} = 0$ olsun. (4.5) eşitliğinden $\eta(N) = 0$

sağlanır. Dolayısıyla M yüzeyinin kontak distribüsyonda yatan bir yüzey olduğu kolayca görülebilir.

Bu bölümde (4.10) eşitliğinde tanımlanan

$$f_{1,v}f_{2,u} - f_{1,u}f_{2,v} = 0$$

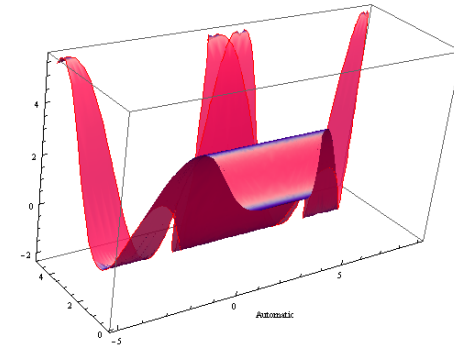
denkleminin bazı özel çözümleri ve bu çözümler yardımıyla $\mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda kontak distribüsyonda yatan yüzey şekilleri verilmiştir.

Çözüm 1 Kabul edelim ki $f_1(u, v) = u^2 + v^2$ olsun. Bu durumda $f_2(u, v) = g(u^2 + v^2)$ şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.1 S_1 yüzeyi, $\mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda

$$S_1 := X(u, v) = (u^2 + v^2, 1 - \cos(2u^2 + 2v^2)(u^2 + v^2), 2 - 2v + u^3)$$

şeklinde tanımlanan sabit açılı bir yüzey olsun. Burada $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ve $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



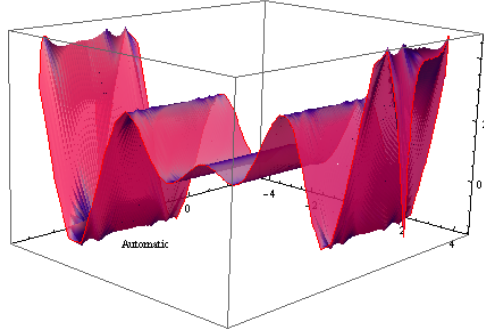
Şekil 4.1: S_1 yüzeyi

Çözüm 2 Kabul edelim ki $f_1(u, v) = u^3 - v^3$ olsun. Bu durumda $f_2(u, v) = g(u^3 - v^3)$ şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.2 S_2 yüzeyi, $\mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda

$$S_2 := X(u, v) = (u^3 - v^3, 1 - \sin(3u^3 - 3v^3)(u^3 - v^3), 2 - 2v - u^3)$$

şeklinde tanımlanan sabit açılı bir yüzey olsun. Burada $u \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ve $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



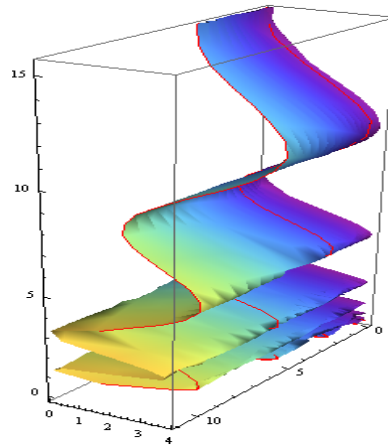
Şekil 4.2: S_2 yüzeyi

Çözüm 3 Kabul edelim ki $f_2(u, v) = e^{u-v}$ olsun. Bu durumda $f_1(u, v) = g(u - v)$ şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.3 S_3 yüzeyi, $\mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda

$$S_3 := X(u, v) = (4 \cos^2(4u - 4v), e^{u-v}, (u + v)^2)$$

şeklinde tanımlanan sabit açılı bir yüzey olsun. Burada $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ve $v \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$



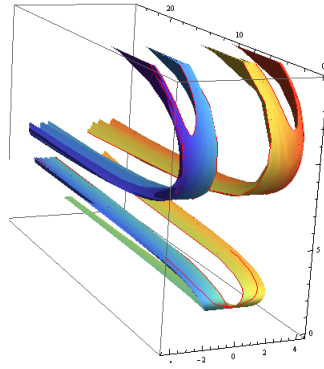
Şekil 4.3: S_3 yüzeyi

Çözüm 4 Kabul edelim ki $f_2(u, v) = e^{u^2+v^2}$ olsun. Bu durumda $f_1(u, v) = g(u^2+v^2)$ şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.4 S_4 yüzeyi, $\mathbb{R}^3(-3) = (\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda

$$S_4 := X(u, v) = \left(\frac{2(u^2 + v^2)}{\tan^2(u^2 + v^2)}, e^{u^2+v^2} \frac{uv}{2\sqrt{u^2 - v^2}}, uv - 2v \right)$$

şeklinde tanımlanan sabit açılı bir yüzey olsun. Burada $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $v \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$



Şekil 4.4: S_4 yüzeyi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezin 3. bölümünde $M^3 = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir kontak metrik manifoldu üzerinde geodezik olmayan bir özel eğri (*N-slant* helis) tanımlanmıştır. Bu eğri Sasaki uzayında tanımlı slant eğrilerin bir genellemesidir. Özellikle slant eğrilerin sağlaması gereken diferensiyel denklemler ((3.6), (3.8), (3.9) ve (3.13)) elde edildiği gibi *N-slant* helisler için de karakterizasyonlar verilmiştir.

N-slant helislerin eğri boyunca C-paralel ve C-proper eğrilik vektör alanına sahip olma şartları, *AW(k)-tip* şartları tezin orjinal kısımlarını oluşturmuştur.

Ayrıca tezde Gök ve Camcı (2014) tarafından tanımlanan özel tip bazı yüzeyler ele alınmış ve örneklendirilmiştir. Bu kısımda açıkça görülmektedir ki yüzeyler teorisi adına doldurabilecek daha çok boşluk mevcuttur.

KAYNAKLAR

- Arslan, K. and Özgür, C. 1999. “Curves and surfaces of AW(k) type”, Geometry and Topology of Submanifolds, IX (Valenciennes/Lyon/Leuven, 1997), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 21-26.
- Arroyo, J., Barros, M. and Garay, O.J. 1997 “A characterisation of Helices and Cornu spirals in real space forms”, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 56, 37-49.
- Baikoussis, C. and Blair, D.E. 1994. On Legendre curves in contact 3-manifolds, Geom. Dedicata, 49, 135-142.
- Blair, D.E. 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Math. Vol. 509, Springer-Verlag.
- Blair, D.E. 2002. Riemannian Geometry of Contact ve Symplectic Manifolds. Birkhauser. Boston.
- Camcı, Ç. 2007. Kontak Geometride Eğriler Teorisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Camcı, Ç. 2011. Extend cross product in a 3-dimensional almost contact metric manifold with Applications to curve theory Turk. J. Math., 35, 1-14.
- Cho, J.T. and Lee, J.E. 2008. “Slant curves in contact pseudo-Hermitian 3-manifolds”, Bull. Aust. Math. Soc. 78, no. 3, 383-396.
- Gezgin, F. 2005 AW(k)-tipinden eğriler. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Gök, İ. 2005. Kontak Manifoldlarda Esas Formlar ve Yönlendirme. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Gök, İ. 2010. Kontak Geometride Yüzeyler Teorisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Gök, İ., Ateş, O. and Yaylı, Y. 2014. New approaches to slant helices in sasakian 3-manifolds, Submitted to publish.
- Gök, İ. and Camcı, Ç. 2014. Distribution surfaces in almost contact metric manifold $\mathbb{R}^3(-3)$, Submitted to publish.

- Gray, A. 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc.
- Güvenç, Ş. 2011. Değme yarı-hermitsel 3-manifoldlarda eğriler. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Hacısalihoglu, H.H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Elazığ.
- Hacısalihoglu, H.H. 2003. Tensör Geometri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Ankara.
- Lee, J.E., Suh, Y.J. and Lee, H. 2012. C-parallel mean curvature vector fields along slant curves Sasakian 3-manifolds, Kyungpook Math. J. 52, 49-59.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Rimannian Geometry with applications to relativity. Academic press, Inc.
- Olszak, Z. 1986. Normal almost contact metric manifolds on contact metric manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 314, 349-379.
- Özgür, C. and Tripathi, M.M. 2008. On Legendre curves in α -Sasakian manifolds, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 31(1) (2008), 91-96.
- Sabuncuoğlu, A. 2001. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, Ankara.
- Yano, K. and Kon, M. 1976. Anti-invariant submanifolds, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, no. 21. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, (1976).
- Yano, K. and Kon, M. 1984. Structures on Manifolds. Series in Pure Mathematics, vol: 3, Singapore.
- Yıldız, A. 1995. Sasakian Manifolds. Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Osman ATEŞ
Doğum Yeri : Ordu
Doğum Tarihi : 20.01.1989
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ordu Anadolu Lisesi (2006)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Şubat 2013 – Ağustos 2014)

Uluslararası Sempozyumlar

1. KMD 2014, International Mathematics Symposium, Çankırı, Turkey, June 11-13, 2014, “Curves of Constant Slope and Constant Precession in Sasakian 3-manifolds” adlı çalışma sunulmuştur.

Ulusal Sempozyumlar

1. VIII. Ankara Matematik Günleri, Çankaya Üniversitesi, 13-14 Haziran 2013.
2. XI. Geometri Sempozyumu, Ordu Üniversitesi, 1-5 Temmuz 2013.
3. IX. Ankara Matematik Günleri, Atılım Üniversitesi, 12-13 Haziran 2014.

Yayımları (SCI ve diğer)

1. Gök, İ., Ateş, O. and Yaylı, Y. 2014. New approaches to slant helices in sasakian 3-manifolds, Submitted to publish.