

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ZAMAN SERİLERİNDE BİRİM KÖKLERİN İNCELENMESİ

Yeliz YALÇIN

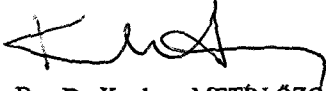
10.4502

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

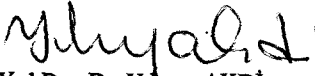
ANKARA
2001

Her hakkı saklıdır

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz AKDİ danışmanlığında, Yeliz YALÇIN tarafından hazırlanan bu çalışma/...../..... tarihinde aşığıdaki jüri tarafından İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Başkan : Doç. Dr. Kırılıım METİN ÖZCAN



Yrd. Doç. Dr. Yılmaz AKDİ



Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Esmâ KILIÇ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMAN SERİLERİNDE BİRİM KÖKLERİN İNCELENMESİ

Yeliz YALÇIN

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Yılmaz AKDİ

İktisadi zaman serilerinin çoğunun durağan olmayan birim köklü zaman serileri olduğu bilinmektedir. Bu serilerin durağanlığını sınamak için ADF (Augmented Dickey- Fuller) testleri uygulanmaktadır. Fakat bazı iktisadi seriler iki veya daha fazla birim kök de içermektedir. Bu durumda seriyi durağan hale getirebilmek için farkı alınmış seriye tekrar ADF testi uygulanmaktadır. ADF test metodu sadece bir birim kökün varlığı durumunda geliştirilmiş olduğundan, farkı alınmış serilere tekrar ADF testinin uygulanması bazı istatistiki problemlere sebep olmaktadır. Bunun için Dickey ve Pantula (1987), seride birden fazla birim kökün varlığını sınamak için ardışık bir test metodu önermişlerdir. Bu çalışmada birden fazla birim kök içeren durağan olmayan zaman serileri gözden geçirilmiş ve ardışık test metodu 1950- 1999 yılları arasındaki yıllık para arzı verilerine uygulanmış ve para arzının iki birim köke sahip olduğu gözlenmiştir.

2001 , 95 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Zaman serileri, birim kökler, birden fazla birim kökler

ABSTRACT
Master Thesis
A STUDY OF UNIT ROOTS IN TIME SERIES

Yeliz YALÇIN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistic

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Yılmaz AKDİ

It is known that many economic series are nonstationary unit root time series. ADF (Augmented Dickey- Fuller) test methods are applied to check whether a unit root is present in data or not. In some economic time series may include a second unit root (or more). In order to get the stationarity, ADF test is applied to the differenced series. But ADF test is obtained under the assumption of a single unit root. Thus, applying the ADF test to the differenced series may cause some statistical problems. Dickey and Pantula (1987) propose a sequential unit root test method to check whether the series may include more than one unit root . In this study, the multiple unit roots have been reviewed and the test method is applied to the annually observed Turkish Money Supply data beginning from 1950 to 1999 and a second unit root is observed in the data.

2001 , 95 pages

Key words: Time series, unit root, multiple unit roots

TEŞEKKÜR

Bu tezin başlangıcından sonuna kadar, yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Yrd.Doç.Dr.Yılmaz Akdi' ye çok teşekkür ederim. Birlikte çalışma olanağı bulduğum için çok şanslıyım. Ayrıca Gazi Üniversitesi İ.İ.B.F. Öğretim Üyelerinden Yrd. Doç.Dr. Nezir Köse 'ye değerli katkılarından dolayı çok teşekkür ederim.

Gazi Üniversitesi Ekonometri Bölümü Öğretim Üyelerine göstermiş oldukları anlayış için ve yine hep yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Yeliz YALÇIN

Ankara, Temmuz 2001

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vi
GİRİŞ	1
1. ZAMAN SERİLERİ ve TEMEL KAVRAMLAR.....	5
1.1. Zaman Serisi.....	5
1.2. Durağanlık.....	6
1.3. Otokorelasyon Fonksiyonu.....	10
1.4. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu	12
2. BAZI DURAĞAN ZAMAN SERİLERİ.....	19
2.1. Hareketli Ortalama Serileri.....	19
2.1.1. Birinci dereceden hareketli ortalama serisi, MA(1).....	20
2.1.2. İkinci dereceden hareketli ortalama serisi, MA(2).....	23
2.1.3. q- uncu dereceden hareketli ortalama serisi, MA(q).....	26
2.2. Otoregresif Zaman Serileri	30
2.2.1. Birinci dereceden otoregresif zaman serisi, AR(1).....	31
2.2.2. İkinci dereceden otoregresif zaman serisi, AR(2).....	35
2.2.3. p- inci dereceden otoregresif zaman serisi, AR(p).....	38
2.3. Otoregresif Hareketli Ortalama Zaman Serileri, ARMA (p,q).....	42
2.3.1. ARMA (1,1) serisi.....	44
3. DURAĞAN OLMAYAN ZAMAN SERİLERİ.....	49
3.1. Dickey- Fuller Birim Kök Testi.....	56
3.2. Genişletilmiş Dickey- Fuller Birim Kök Testi.....	69

3.3. Birden Çok Birim Köklü Seriler.....	70
4. PARA ARZI SERİSİNE ARDIŞIK TESTİN UYGULANMASI...	83
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	91
KAYNAKLAR.....	93

SİMGELER DİZİNİ

ADF	Augmented (Genişletilmiş) Dickey- Fuller
AR	Otoregresif Zaman Serisi(Autoregressive Series)
ARMA	Hareketli Ortalama – Otoregresif Zaman Serileri (Autoregressive- Moving Average Series)
DF	Dickey- Fuller
MA	Hareketli Ortalama Serisi (Moving Average Series)
WN	Beyaz Gürültü Süreci (White Noise)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2. 1. Durağan zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu grafiği

Şekil 2. 2. AR (2) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 3. AR(2) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 1. MA(1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 2. MA(1) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 3. MA(2) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 4. MA(2) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 5. AR(1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 6. AR(1) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 7. ARMA (1,1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 8. ARMA (1,1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2. 9. ARMA (2,1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 3. 1. Bir birim köklü AR(2) modeline uygun farkı alınmamış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 3.2. Bir birim köklü AR(3) modeline uygun birinci dereceden farkı alınmış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 3. 3. İki birim köklü AR(3) modeline uygun farkı alınmamış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 3. 4. İki birim köklü AR(3) modeline uygun birinci dereceden farkı alınmış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 3. 5. İki birim köklü AR(3) modeline uygun ikinci dereceden farkı alınmış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 4. 1. Logaritması alınmış para arzı verilerinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları grafiği

Şekil 4. 2. Birinci dereceden farkı alınmış para arzı verilerinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları grafiği

Şekil 4. 3. İkinci dereceden farkı alınmış para arzı verilerinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları grafiği

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Y_t serisi için çeşitli modeller ve AIC, SBC istatistiklerinin aldığı değerler

Çizelge 4. 2. ∇Y_t serisi için çeşitli modeller ve AIC, SBC istatistiklerinin aldığı değerler

Çizelge 4. 3. $\hat{\theta}_3$ en küçük kareler tahmin edicisi, standart hatası ve pseudo t değeri

Çizelge 4. 4. $\hat{\theta}_2$ ve $\hat{\theta}_3$ en küçük kareler tahmin edicileri , standart hataları ve $\hat{\theta}_2$ için pseudo t değeri

GİRİŞ

1980 'li yılların ortalarından itibaren zaman serisi ekonometrisinde geniş bir uygulama alanı bulan eş- bütünleşme analizi ve standart Granger nedensellik testi için ilgili değişkenlerin zaman serisi özellikleri incelenmelidir. Bunun nedeni, ortak bütünleşme analizinde sistemde yer alan değişkenlerin durağan olmayıp aynı derecede bütünleşmiş olması koşulu, Granger nedensellik için durağan olması zorunluluğudur. Bu bağlamda, gerek ortak bütünleşme analizi gerek Granger nedensellik anlamında değişkenler arasındaki karşılıklı ilişkileri inceleyen çalışmalarda, birim kök testleri bir "ön test" olarak önemli bir role sahiptir.

Ekonometride modellemenin ilk aşaması, üzerinde çalışılacak verileri yakından tanımadır. Bu veriler tarihsel veriler ise onların zaman serisi özelliklerini incelemek ve bu bulgular çerçevesinde model kurmak gerekir. Ekonometrik araştırmalar göstermiştir ki, iktisadi serilerin büyük bir çoğunluğunda birim kök mevcuttur (Metin 1995).

Zaman serisi modellerinin kestirimini yaparken modeldeki değişkenlerin birim kök içermesi birtakım problemleri de beraberinde getirmektedir. Birim kökün varlığını gözardı etmek yani durağan olmayan değişkenleri içeren regresyon modelini kestirmek istatistiksel olarak güvenilir olmayan sonuçları ortaya çıkaracaktır. Buna karşın, fark alma yoluyla yapılan durağanlık dönüşümleri değişkenler arasındaki uzun dönemli ilişkileri yok etmesi nedeniyle bilgi kaybına yol açacaktır.

Ayrıca, son yıllarda ekonometrik çalışmalarda birim kök testlerinin oldukça popüler hale gelmesinin en önemli nedeni, bu testler vasıtasıyla bazı ekonomik

gıkarımlara ulaşılmasıdır. Örneğin, araştırma kapsamındaki makro ekonomik değişkenlerin birim kök içermesi, belirli dışsal şokların (exogenous shocks) ekonomi üzerinde sürekli bir etki meydana getireceğine ilişkin bir kanıt olarak değerlendirilir (Köse 1998).

Birim kök üzerine asimptotik teoriler ilk kez Fuller (1976) tarafından ortaya konulmuş ve bu çalışmayı Dickey - Fuller (1979), Phillips (1987), Phillips - Perron (1988) ve diğer çalışmalar izlemiştir.

Uygulamalı ekonometrik çalışmalarda, Dickey - Fuller veya Genişletilmiş Dickey - Fuller birim kök testi tercih edilmektedir. Bunun nedeni testin uygulamadaki kolaylığı ve birçok ekonometrik paket programında yer almasıdır.

İktisadi zaman serileri genellikle bir birim kök içermesine karşın nadiren de olsa bazı zaman serileri iki birim kök içerebilmektedir. Böyle bir durumda izlenen birim kök testi sürecinde farkı almış seriler için tekrar ADF birim kök araştırmasına gidilmektedir. Ancak ADF birim kök testi sadece bir birim kök içeren zaman serileri için geçerlidir. Duragan olmayan herhangi bir zaman serisinin farkı alındıktan sonra hala duragan değilse ikinci sıra farkı alınarak duragan hale getirilmektedir. Fakat fazla fark almak DF değeri negeatif veya pozitif yönde çok büyüttüğü için serinin bütünlüşme derecesi hakkında yanlış kararlar verilebilir. Ayrıca, mevcut birim köklerin, sıfır hipotezi altında ifade edildikten daha fazla olduğu durumlarda, testin önem düzeyi seçilen α önem düzeyinden büyük olacaktır (Dickey and Pantula 1987).

Zaman serisinin doğru bütünlüşme derecesini belirlemek için ardışık bir test Dickey ve Pantula (1987) tarafından önerilmiştir. Dickey ve Pantula

yaklaşımında ilgili zaman serisindeki birim kökler ardışık bir istatistiksel test prosedürü ile araştırılmaktadır.

Bu çalışmada bir çok ekonometrik yöntemde önemli bir role sahip olan, birim kök testleri incelenmiştir. Ayrıca, birden fazla birim köke sahip zaman serisi için ADF testinde ortaya çıkacak sorunlara değinilmiş ve bu durum için daha güvenilir olan Dickey ve Pantula (1987) birim kök testi teorik ve uygulamalı olarak ele alınmıştır. İki birim köke sahip bir zaman serisi Monte Carlo yolu ile üretilmiş ve bu seriye ADF uygulandığında durağan bulunabileceği gösterilmiştir. Uygulama aşamasında bütünleşme derecesi, birim kök testi ile araştırılan değişken, bankalar dışındaki para, vadesiz mevduat ve vadeli mevduatlardan oluşan geniş para arzı (M2) olarak seçilmiştir. Bunun nedeni Türkiye ekonomisi üzerine yapılan birçok ekonometrik araştırmada ADF testi vasıtasıyla gerçekleştirilen birim kök testinde para arzı değişkeninin iki birim köke sahip olduğunun belirlenmesidir. Ancak, iki birim köke sahip değişkenler için geçerli olmayan ADF testinin uygulaması bu araştırmaların bulgularını güvenilir olmaktan uzaklaştırmaktadır. Bu durum nedeniyle, tezin uygulama aşamasında para arzı değişkeni için birim kökün varlığı Dickey ve Pantula yaklaşımı ile tekrar ele alınmıştır.

Bu çalışmanın giriş bölümünden sonra ele alınan birinci bölümde, zaman serisi analizlerinde karşılaşılan bazı temel kavramlar hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, durağan zaman serileri ve bu serilerin özellikleri ile zaman serisi için durağanlık şartları ve birim kök kavramı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise, durağanlık için birim kök testleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Bu bölümde, iki birim köklü zaman serileri için daha güvenilir bir test olan Dickey ve Pantula yaklaşımı teorik olarak açıklanmış ve SAS paket programında üretilen bir veri üzerine bir uygulama yapılmıştır.

Çalışmanın son bölümünde ise, Dickey ve Pantula (1987) tarafından geliştirilen
ardışık test metodu ile para arzının bütünleşme derecesi belirlenmiştir.

1. ZAMAN SERİLERİ ve TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Zaman Serisi

Olasılık uzayı $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ve T de bir indeks kümesi olmak üzere bir zaman serisi $\Omega \times T$ çarpım uzayından $\mathcal{R}$, reel sayılara giden

$$X(.,.): \Omega \times T \rightarrow \mathcal{R}$$

$$(w, t) \rightarrow X(w, t) = X_t(w) \equiv X_t$$

bir fonksiyondur öyle ki, herbir sabit t için $X_t(w)$ zaman serisi bir rasgele değişken ve her bir sabit w için $X_t(w)$, t nin reel değerli bir fonksiyonudur. Bu fonksiyona bir realizasyon denir. Gerçek hayatta görülen zaman serilerine ilişkin grafikler aslında ilgili zaman serisinin bir realizasyonudur (Fuller 1976).

Bir zarın atılması deneyi gözönüne alınsın. X rasgele değişkeni zarın üzerindeki noktaların sayısını göstermek üzere örnek uzay $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şeklinde olacaktır. Örnek uzay üzerindeki σ -cebir ise Ω 'nin bütün alt kümelerinin sınıfı $\mathcal{G}$ (kuvvet kümesi) olsun. P olasılık ölçüsü ise $A \in \mathcal{G}$ için $P(A) = \text{"A'nın eleman sayısı"} / 6$ olarak tanımlansın. Burada $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ üçlüsü bir olasılık uzayı oluşturur. T indeks kümesi doğal sayılar kümesi, $T = \{1, 2, 3, \dots\}$, olarak alındığında $X_t(w)$ zaman serisini $X_t(w) = w + t$ olarak tanımlayalım. Eğer $t = 4$ olarak sabit alınırsa $X_t(w)$ 5, 6, 7, 8, 9, 10 değerlerini aynı 1/6 olasılıkla alan rasgele bir değişken olur. Yani $t = 4$ için $X_t(w)$ bir rasgele değişkendir. Fakat $w_0 = 3$ olarak sabit tutulursa, $X_t(w_0) = 3 + t$ şeklinde t nin reel değerli bir fonksiyonudur.

1. 2. Durağanlık

Zaman serilerinde en önemli kavramlardan biri durağanlıktır. Durağanlık, süreçte hakim olan olasılık konumlarının zaman ile değişmemesi temel fiktive dayalı istatistiksel bir dengeyi ifade eder. Zaman serileri ile ilgili analizleri yaparken en önemli varsayimlardan biri serinin durağanlığıdır. Birçok istatistiksel sonuç çıkarımlarda serinin durağan olduğu varsayılır. Eğer seri durağan değil ise çeşitli teknikler kullanılarak durağan hale getirilir (fark alma gibi). Genel olarak zayıf ve güçlü durağanlık gibi iki çeşit durağanlıktan bahsedilebilir.

Herhangi bir rasgele değişkenler dizisinin ortak olasılık dağılımı rasgele değişkenlerin yapıldığı zamanların ileriye veya geriye doğru kaydırılması ile herhangi bir değişikliğe uğramıyorsa bu seriye güçlü durağandır denir. Yani kısaca X_t ile X_{t+h} nin ortak dağılımı t ye değil h ye bağlıdır. Başka bir ifade ile bir zaman serisinin $t_1, t_2, \dots, t_n$ anlarındaki $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılımı ile $t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h$ zamanlarındaki $X_{1+h}, X_{2+h}, \dots, X_{n+h}$ $\forall n, h, n+h \in T$, rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılımı şeekli değişmiyorsa bu seriye güçlü durağan seri bu duruma da güçlü durağanlık denir. Yani, her $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathcal{H}^n$ ve her $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h \in T$ için

$$(1.1) \quad F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}}(X_1, X_2, \dots, X_n) = F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ise $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisine güçlü durağandır denir. Burada $F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılım fonksiyonudur. Eğer $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi güçlü durağan ise bu $\forall t_i \in T, \forall n$ için $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \in \bar{D}$ şeklinde gösterilmektedir.

Ayrıca, $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenlerinin ortalaması $E(X_t) = \mu$, olmak üzere, $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi için t nin tüm değerleri için

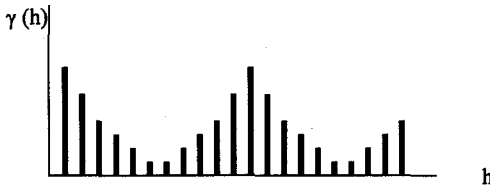
$$i) E(X_t) = \mu \text{ (sonlu ve } t \text{ den bağımsız)}$$

$$ii) \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)] \quad h = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

koşulları sağlanırsa $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisine zayıf durağan, ikinci dereceden durağan, kovaryans durağan veya kısaca durağandır denir. Ayrıca, (1.2.) de verilen X_t ile X_{t+h} arasındaki kovaryans $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu olarak bilinir ve $\gamma(h)$ ile gösterilir. Örneğin, e_1, e_2 ler bağımsız ve ortalaması sıfır ve varyansı σ^2 olan aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olmak üzere, $X_t = e_1 \cos(\lambda t) + e_2 \sin(\lambda t)$ zaman serisini ele alınsın. Ortalaması $E(X_t) = 0$ ve varyansı $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ olup her ikisi de t den bağımsızdır. Bu serinin otokovaryans fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(e_1 \cos(\lambda t) + e_2 \sin(\lambda t), e_1 \cos(\lambda(t+h)) + e_2 \sin(\lambda(t+h))) \\ &= \sigma^2 (\cos(\lambda t) \cos(\lambda(t+h)) + \sin(\lambda t) \sin(\lambda(t+h))) \\ &= \sigma^2 (\cos(\lambda(t+h-t))) = \sigma^2 \cos(\lambda h) \end{aligned}$$

şeklinde olup X_t zaman serisi durağandır. Örneğin $\lambda = 2\pi$ değerinde serinin otokovaryans fonksiyonun grafiği Şekil 2.1. deki gibi $\cos(\lambda h) = \cos(2\pi h)$ grafiği ile aynı olacaktır.



Şekil 2.1. Durağan zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu grafiği

Fakat bu serinin güçlü durğan olup olmadığını bilmiyoruz. Çünkü e_1 , e_2 rasgele değişkenlerinin ortalamasının ve varyansının bilinmesine rağmen hangi dağılımdan geldikleri hakkında veya ortak dağılım fonksiyonları hakkında bir bilginiz yoktur. Dolayısıyla serinin güçlü durğan olup olmadığını söylemek güçtür. Ayrıca serinin ikinci dereceden momentleri dağılım hakkında bir bilgi vermez. Eğer e_1 , e_2 rasgele değişkenlerinin normal dağılıma sahip olduğu kabul edilirse, X_t ve X_{t+h} rasgele değişkenlerinin ortalaması, varyans ve kovaryansları yukarıda görüldüğü gibi t ye bağlı değildir ve dolayısıyla dağılımları da t den bağımsız olacaktır. X_t zaman serisi güçlü durğan olacaktır.

Yani, $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin zayıf durğan olması için ortalamasının, varyansının ve kovaryansının zamana bağlı olmayan sabit değerler alması gerekiyor. Bir serinin durğan olması güçlü durğan olmasını ve güçlü durğan bir serinin durğan olmasını gerektirmez. Fakat,

- i) $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi durğan ve aynı zamanda normal dağılımlılık varsayımı sağlanıyorsa bu seri aynı zamanda güçlü durğanıdır.
- ii) $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi güçlü durğan ve $E(X_t^2) < \infty$ sağlanıyorsa bu seri aynı zamanda durğanıdır (Brockwell and Davis 1987).

Zaman serilerindeki önemli kavramlardan biri de serinin otokovaryans fonksiyonudur. Otokovaryans fonksiyonu yardımı ile tanımlanan otokorelasyon fonksiyonu ve buna bağlı olarak elde edilebilen kısmi otokorelasyon fonksiyonu serilerin modellenmesinde önemli olduğu gibi bu fonksiyon yardımı ile serinin durğan olup olmadığına karar verilmesinde kullanılmaktadır. Daha ileride anlatacağı üzere, durğan zaman serilerinde otokorelasyonlar hızla (üstel olarak) azalmasına rağmen, durğan olmayan zaman serilerinde bu azalma yavaş olabilmektedir. Yani, serinin durğan olup olmadığına sezgisel olarak karar vermek için otokorelasyonların azalma hızlarına bakılmaktadır.

Herhangi bir $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu, yani X_t ile X_{t+h} arasındaki kovaryans

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Kolayca gösterilebilir ki bu fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $\gamma(h)$ simetriktir.

$$\gamma(h) = \gamma(-h)$$

Çünkü $t+h = s$ denilirse

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \\ &= \text{Cov}(X_{s-h}, X_s) \\ &= \text{Cov}(X_s, X_{s-h}) \\ &= \gamma(-h) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür

ii) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

Cauchy-Schward eşitsizliği kullanılırsa,

$$|\gamma(h)| = |\text{Cov}(X_t, X_{t+h})| \leq \sqrt{\text{Var}(X_t) \text{Var}(X_{t+h})} = \sqrt{\gamma(0)\gamma(0)} = \gamma(0)$$

elde edilir.

iii) $\gamma(h)$ negatif olmayan tanımlıdır. Bunun için

$$\forall n, \forall a_i \in \mathcal{R} \quad \forall h_i \in T, i=1,2,3,\dots,n \quad \text{olmak üzere} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(h_i - h_j) a_i a_j \geq 0$$

olmalıdır. Bu da kolayca görüleceği gibi

$$\gamma(h_j - h_i) = E(Y_{h_i} Y_{h_j})$$

olacağından

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(h_i - h_j) a_i a_j$$

Yukarıda (1.4) de verilen $p(h)$ serinin teorik otokorelasyonları olup, verilen herhangi bir örneklem için, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $\bar{X}$ serinin örneklem ortalamasını göstermek üzere, örneklem otokovaryansları

$$(1.4) \quad p(h) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_{i+h})}{\sqrt{\text{Var}(X_i) \text{Var}(X_{i+h})}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Otokorelasyon fonksiyonu, muhtemel uygun modellerin belirlenmesinde kullanılan ve otokovaryans fonksiyonu yardımı ile tanımlanan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon aynı değişkenin değerleriyle geçitli gecikme değerleri arasındaki ilişkileri inceler ve değeri ± 1 değerleri arasındadır. Serinin otokovaryans fonksiyonu $\gamma(h)$ olmak üzere X_i ile X_{i+h} arasındaki korelasyon serinin otokorelasyonunu olarak biliniyor ve genel olarak $p(h)$ ile gösterilmektedir.

1. 3. Otokorelasyon Fonksiyonu

Eğer seri duran ise gözlenen değerler sabit bir ortalama etrafında değişecektir. Bu serinin varyansı da sabit olacaktır. Fakat durğanlığı ortaya çıkarmak için serinin otokorelasyon fonksiyonunu incelemesi gerekir.

$$\begin{aligned} &= E \left\{ \sum_{j=1}^n a_j Y_{h_j} \right\}^2 \geq 0 \\ &= E \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i Y_{h_i} Y_{h_j} a_j \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n E(Y_{h_i} Y_{h_j}) a_i a_j \end{aligned}$$

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{i=1}^{n-h} (X_i - \bar{X})(X_{i+h} - \bar{X}) \quad (1.5)$$

şeklinde hesaplanır. Örneklem otokovaryansları, Yule- Walker, en çok olabilirlik ve en küçük kareler yöntemleri ile değişik olarak hesaplanabilir. Fakat örneklem hacmi büyük olduğunda bu tahmin ediciler birbirlerine çok yakın olmaktadır. Yani, bu üç tahmin edici de asimptotik olarak aynıdır denilebilir. Ayrıca, bu üç tahmin edicide $\gamma(h)$ için tutarlı tahmin edicilerdir yani, $n \rightarrow \infty$ için $\hat{\gamma}_n(h) \xrightarrow{P} \gamma(h)$ dir. $\hat{\gamma}_n(h)$ örneklem otokovaryansları yardımı ile örneklem otokorelasyonları

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \quad (1.6)$$

olarak hesaplanır ve burada $\hat{\gamma}_n(0)$ serisinin örneklem varyansıdır.

Bu istatistiklerinin aldıkları değerler hesaplanarak $\hat{\rho}(h)$ lerin grafikleri çizilir. Ayrıca $\hat{\rho}(h)$ ler ile hesaplanabilen $\hat{\phi}(h)$ kısmi otokorelasyonların grafikleri çizilerek serinin modeli hakkında sezgisel olarak bir fikir edinilebilir. Herhangi bir $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ veya $\{X_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ zaman serisi verildiğinde bu serinin hangi zaman serisi modeline uygun olduğunu söyleyebilmek için sezgisel olarak elde edilen modele göre analizler yapılır. Kesin olarak karar verilemiyorsa bazı istatistikler kullanılarak en uygun model bulunmaya çalışılır. Burada da serisinin durağan olup olmaması önemlidir. Çünkü parametreler üzerinde testler yapılırken serinin durağan olduğu varsayılır. Serilerin modellenmesinde örneğin AIC (Akaike Information Critter) ve SBC (Schwartz Bayesian Critter) gibi başka kriterler de kullanılmaktadır. Ayrıca $\hat{\gamma}(h)$ ve $\hat{\rho}(h)$ istatistiklerinin bazı asimptotik özellikleri Fuller (1976) ve Borockwell ve Davis (1987) de incelenmiştir.

Zaman serisi analizlerinde özellikle otoregresif zaman serilerinde serinin model derecesinin belirlenmesinde otokorelasyon fonksiyonu pek aydınlatıcı değildir. Bu nedenle kısmi otokorelasyonlar otoregresif zaman serilerinin model derecelerinin belirlenmesinde önemli bir araç olarak kullanılır. Herhangi bir X_t zaman serisi için kısmi otokorelasyonlar X_t nin $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h}$ üzerine regresyonu yapıldığında X_{t-h} nin regresyon katsayısı h -inci kısmi otokorelasyondur ve $\phi(h)$ ile gösterilir. Yani, h tane kısmi otokorelasyon

1. 4. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu

gibidir.

Herhangi bir $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri için örneklem otokovaryans fonksiyonu (1.5) de verildiği gibi hesaplanır. Buradan da örneklem otokovaryans fonksiyonu yardımıyla örneklem otokorelasyon fonksiyonu da (1.6.) da verildiği

Zaman serisi süreçlerinin teorik otokorelasyon fonksiyonu, h gecikmelerine karşılık gelen $p(h)$ lerin grafiksel veya listelenmesi ile elde edilebilir.

1990).

- iii) $p(h)$ Fonksiyonu negatif olmayan tanımlı olduğu kolayca görülür (Wei
- ii) $|p(h)| \leq 1$
- i) $p(h) = p(-h)$

otokorelasyon fonksiyonu $p(h)$ olmak üzere

$|p(h)| \leq 1$ dir. Yani, herhangi bir $\{X_t: t \in T\}$ durağan zaman serisinin fonksiyonu simetrik ve negatif olmayan tanımlı olmakla birlikte her h için otokorelasyon fonksiyonu için de geçerli olduğu kolayca görülebilir. Yani, $p(h)$ Yukarıda $\gamma(h)$ otokovaryans fonksiyonu için gerekli olan özellikler,

bulabilmek için h defa regresyon modeli oluşturmak gerekir. Eğer kısmi otokorelasyonlar belli bir noktadan sonra sıfır oluyorsa (veya anlamlı olarak sıfıra yakınsa) bu tür seriler otoregresif serilerdir. Verilen herhangi bir serinin kısmi otokorelasyonlarını hesaplamak için regresyon tekniklerinin kullanılması uzun işlem gerektirmektedir. Ayrıca kısmi otokorelasyonların bazılarının sıfır olup olmadığının sınanması gerekebilir. Dolayısıyla regresyon parametrelerinin tahmin edicilerinin asimptotik dağılımlarına ihtiyaç duyulur. Fakat aynı kısmi otokorelasyonlar daha önce elde ettiğimiz otokorelasyonlar yardımı ile de bulunabilir. Kısmi otokorelasyonlar, P_h matrisi

$$P_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & & & & \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

şeklinde olmak üzere P_h matrisinin son kolonu olan $\underline{c}' = (\rho_{h-1}, \rho_{h-2}, \dots, 1)$ vektörü yerine $\underline{a} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h)$ yazılarak P_h^* matrisi elde edilir.

$$P_h^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_h \end{bmatrix}$$

Buradan da verilen bir zaman serisinin h -inci kısmi otokorelasyonu

$$\phi(h) = \frac{\det(P_h)}{\det(P_h)}$$

formülü ile de hesaplanabilir (Wei 1990). Burada, $\det(P_h)$, P_h matrisinin determinantıdır. Şimdi bunu bir örnek ile açıklayalım. Aşağıda verilen ikinci dereceden otoregresif zaman serisinin birinci otokorelasyon ve ikinci otokorelasyon da X_{t-2} nin katsayısı, α_2 olacaktır ve diğer kısmi otokorelasyonlar sıfır olacaktır.

Herhangi bir X_t zaman serisi, e_t ortalaması 0 ve varyansı σ^2 olan beyaz gürültü süreci olmak üzere ikinci dereceden bir otoregresif zaman serisi

$$(X_t - \mu) = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + e_t$$

veya

$$X_t = \mu(1 - \alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + e_t$$

veya

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + e_t$$

şeklinde verilir. Kısmi otokorelasyon tanımından dolayı, ikinci kısmi otokorelasyon, $\phi(2) = \alpha_2$ değerine eşit olmakta ve $|h| > 2$ durumları için $\phi(h) = 0$ olmaktadır. Şimdi regresyon teknikleri kullanmadan yukarıdaki P_h ve P_h^* matrislerini kullanarak bunları göstermeye çalışalım.

Bu modelde göre otokovaryanslar aşağıdaki gibi hesaplanır. İlk iki otokovaryans

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2(1 - \alpha_2)}{\sigma^2(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_2) - \alpha_2^2}$$

$$\gamma(1) = \frac{\alpha_1}{\sigma^2} \gamma(0) = \frac{\alpha_1}{\sigma^2} \frac{\sigma^2(1 - \alpha_2)}{\sigma^2(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_2) - \alpha_2^2}$$

$$\gamma(2) = \left[\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 \right] \gamma(0) = \frac{[(\alpha_1^2 + \alpha_2(1-\alpha_2))] \sigma^2}{(1+\alpha_2)[(1-\alpha_2)^2 - \alpha_1^2]}$$

olarak elde edilir ve buradan da diğer otokovaryanslar

$$\gamma(h) = \alpha_1 \gamma(h-1) + \alpha_2 \gamma(h-2)$$

eşitliğinden faydalanarak ardışık olarak bulunur. Buradan da $\gamma(h) = \gamma(-h)$ ve

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \text{ özelliklerinden yararlanarak}$$

$$\gamma(1) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \gamma(0) \Rightarrow \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \rho(1) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$$

ve benzer şekilde

$$\gamma(2) = \alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(0) \Rightarrow \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \rho(2) = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2$$

elde edilir. Buradan da ilk iki kısmi otokorelasyon

$$P_1 = [1]$$

$$P_1^* = [\rho_1]$$

$$\phi_{11} = \frac{\det P_1^*}{\det P_1} = \frac{\rho_1}{1} = \rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{22} = \frac{\det P_2^*}{\det P_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \alpha_2$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde üçüncü kısmi otokorelasyon da

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1 & \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{33} = \frac{\det P_3^*}{\det P_3}$$

$$\det P_3^* = \det \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1 & \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\phi_{33} = \frac{\det P_3^*}{\det P_3} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\phi_{kk} = \frac{\det P_k^*}{\det P_k} = 0 \quad k \geq 3$$

olarak bulunur. İkinci dereceden otoregresif zaman serisi için ilk iki kısmi otokorelasyon parametrelerine bağlı olarak hesaplanır ve diğer ($h > 2$) kısmi otokorelasyonlar ise sıfır olacaktır. Fakat otokorelasyonlar durğan bir zaman

serisi için üstel olarak azalacaktır. Bunun için e_t bir beyaz gürültü süreci olmak üzere

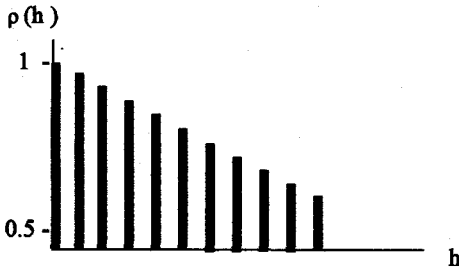
$$(X_t - \mu) = \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \alpha_2 (X_{t-2} - \mu) + e_t$$

şeklinde verilen ikinci dereceden bir otoregresif zaman serisi için otokorelasyonlar ve kısmi otokorelasyonlar aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 2.1. İkinci dereceden bir otoregresif zaman serisi için $\alpha_1 = 1.7$ $\alpha_2 = -0.72$ olarak alınırsa otokorelasyon değerleri

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho(h)$	1	0.988	0.960	0.921	0.875	0.824	0.770	0.716	0.663	0.620	0.57

olarak hesaplanmıştır ve otokorelasyon fonksiyonu grafiği Şekil 2.2. de verilmiştir.

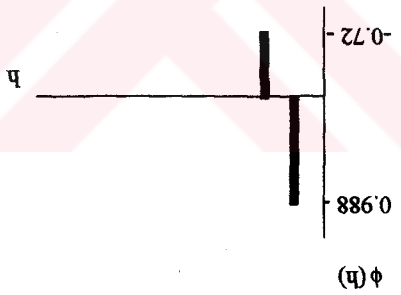


Şekil 2. 2. AR (2) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Benzet şekilde kısmi otokorelasyon değlerleri

h	$\phi(h)$
1	0.988
2	-0.72
3	0
4	0
5	0

olarak bulunmuş ve grafiği Şekil 2.3. de verilmiştir.



Şekil 2. 3. AR(2) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Yukarıda görüldüğü gibi otokorelasyonlar hızlı (üstel olarak) azalmakta ve kısmi otokorelasyonlarda ikinci gecikmeden sonra sıfır olmaktadır. Benzet özellik yüksek dereceden otoregresif zaman serileri modelleri için de genelleştirilebilir.

2 . BAZI DURAĞAN ZAMAN SERİLERİ

Bu kısımda bazı durağan zaman serileri üzerinde durulacaktır. Bunlardan bazıları: hareketli ortalama (Moving Average, MA(q)), otoregresif (Autoregressive, AR(p)) ve ikisinin birleşimi olan otoregresif- hareketli ortalama (Autoregressive- Moving Average ARMA(p,q)) zaman serileri modelleri olarak adlandırılan serilerin bazı özellikleri incelenecektir.

2.1. Hareketli Ortalama Serileri (Moving Average Series)

Durağan zaman serilerine en basit örnek hareketli ortalama serileridir. İleride görüleceği gibi bu seriler her zaman durağandır. Bu kısımda pratikte en çok kullanılan hareketli ortalama serilerinden bahsedilecek ve özellikleri incelenecektir. Bunlar serinin otokorelasyonları ve kısmi otokorelasyonları ile serinin “tersinirlik” özellikleridir. Herhangi bir X_t serisinin ortalaması μ olmak üzere, q - uncu dereceden bir hareketli ortalama serisi

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j} + e_t \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada e_t ortalaması sıfır varyansı σ^2 olan bir beyaz gürültü serisidir.

Bu seride değişkenin t dönemindeki değeri aynı döneme ait e_t hata terimi ve q sayıda t geri dönem e_{t-q} hata teriminin doğrusal bir bileşeni olarak ifade edilir.

Eğer bir $\{e_t : t \in T\}$ zaman serisi eğer $E(e_t)=0$ ve otokovaryans fonksiyonu

$$\gamma_e(h) = \begin{cases} \sigma^2 & , h = 0 \\ 0 & , d.d. \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde ise $\{e_t : t \in T\}$ serisine beyaz gürültü süreci (white noise) denir (Fuller 1976). Pratikte, bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi beyaz gürültü serisi olarak alınmaktadır. Fakat bazı istatistikî sonuç çıkarımlar arasından normallik varsayımı da yapılmaktadır.

Tanımdan da görüleceği gibi beyaz gürültü süreci $\{e_t\}$ durağan bir süreçtir. Bu sürecin otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho^*(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise

$$\phi(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde dir. Bundan sonra aksi söylenmedikçe e_t ler beyaz gürültü serisi olarak kabul edilecek ve $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.1.1. Birinci dereceden hareketli ortalama serisi, MA(1)

Birinci dereceden bir X_t hareketli ortalama zaman serisi, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$X_t = \mu + e_t + \beta e_{t-1} \quad (2.5)$$

biçiminde verilir. Bu serinin ortalaması μ ve varyansı

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2(1 + \beta^2) \quad (2.6)$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca, $X_t \sim MA(1)$ serisinin otokovaryans fonksiyonu

$$\gamma_x(h) = \begin{cases} (1 + \beta^2)\sigma^2 & , h = 0 \\ \beta\sigma^2 & , h = \pm 1 \\ 0 & , |h| > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

ve otokorelasyon fonksiyonunun

$$\rho_x(h) = \begin{cases} 1 & , h = 0 \\ \frac{\beta}{1 + \beta^2} & , h = \pm 1 \\ 0 & , |h| > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

olduğu kolayca görülür.

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu da $|\beta| < 1$ için

$$\phi(h) = \frac{(-1)^{h+1} \beta^h (1 - \beta^2)}{1 - \beta^{2(h+1)}} \quad (2.9)$$

formülü ile hesaplanır (Box and Jenkins 1976). Buradan da

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \frac{\beta(1 - \beta^2)}{1 - \beta^4} = \frac{\cancel{\beta(1 - \beta^2)}}{\cancel{(1 - \beta^2)}(1 + \beta^2)} \\ &= \frac{\beta}{1 + \beta^2} = \rho(1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

olduğundan birinci kısmi otokorelasyon değeri, birinci otokorelasyon değerine eşit olacaktır.

MA(1) modelinin otokorelasyon fonksiyonu $h = 2$ ve daha fazla gecikmeler için sıfır olmaktadır. Örnek olarak Şekil 2.1 de olduğu gibidir. Kısmi otokorelasyon

Fonksiyonu ise β parametresinin işaretine bağlı olarak üstel azalma gösterir ve gecikme değerleri arttıkça sıfıra yaklaşır. MA(1) sürecinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu ya pozitif bir değerle başlayıp işareti negatif- pozitif-negatif şeklinde devam eden ya da daima negatif değerler alan bir eğilimle üstel olarak azalma gösterecektir. Bu değişimler örnek olarak Şekil 2.2. de olduğu gibidir.

Birinci dereceden bir MA serisi $X_t = \mu + e_t + \beta e_{t-1}$ $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ $\sigma^2=1$ $\beta = 0.8$ olacak şekilde otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların değerleri

$$p(0) = 1$$

$$p(1) = \frac{0,8}{1+0,8^2} = 0,4878$$

$$p(2) = 0$$

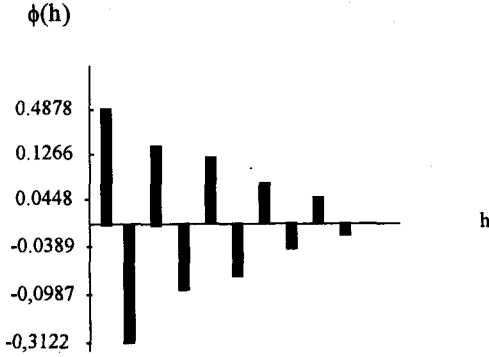
şeklinde olacaktır. Bunların grafikleri Şekil 2.1 de verilmiştir.



Şekil 2.1. MA(1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Kısmi otokorelasyon değerleri ve grafiği ise,

h	$\phi(h)$
1	0,4878
2	-0,3122
3	0,2214
4	-0,1651
5	0,1266
6	-0,0987
7	0,0776
8	-0,0615
9	0,0448
10	-0,0389



Şekil 2.2. MA(1) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

şeklinde.

2.1.2. İkinci dereceden hareketli ortalama serisi, MA(2)

İkinci dereceden bir X_t hareketli ortalama zaman serisi, e_t ortalaması 0, varyansı σ^2 olan beyaz gürültü süreci olmak üzere

$$X_t = \mu + e_t + \beta_1 e_{t-1} + \beta_2 e_{t-2} \quad (2.11)$$

biçimindedir. Bu serinin ortalaması μ , otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları sırasıyla

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \beta_1^2 + \beta_2^2) & , h = 0 \\ \sigma^2(1 + \beta_1 + \beta_1\beta_2) & , h = \pm 1 \\ \sigma^2\beta_2 & , h = \pm 2 \\ 0 & , |h| > 2 \end{cases} \quad (2.12)$$

formülü ile hesaplanır (Wei 1990).

$$\phi(h) = \frac{1 - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho_j}{\rho_h - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho_{h-j}} \quad (2.14)$$

olmak üzere

verildiği gibi hesaplanırsa diğer kısmi otokorelasyonlar $\phi_{sj} = \phi_{s-1,j} - \phi_{ss} \phi_{s-1,s-j}$ serisi için olduğu gibi ardışık olarak hesaplanır. Ayrıca $\phi(1)$ ve $\phi(2)$ yukarıda otokorelasyonlar hesaplandıktan sonra kısmi otokorelasyonlar da herhangi bir otokorelasyon fonksiyonlarının doğrudan elde etmek kolay değildir. Fakat Hareketli ortalama ve ileride anlatılacak olan ARMA serileri için kısmi

$$\begin{aligned} \phi(3) &= \frac{\rho^3(1) - \rho(1)\rho(2)(2 - \rho(2))}{1 - \rho^2(2) - 2\rho^2(1)(1 - \rho(2))} \\ \phi(2) &= \frac{1 - \rho^2(1)}{\rho(2) - \rho^2(1)} \\ \phi(1) &= \rho(1) \end{aligned}$$

gibi bulunacaktır (Fuller 1976).

olacaktır. Kısmi otokorelasyon fonksiyonları ise Yule-Walker denklemini kullanarak ve $|h| > 2$ olduğunda $\rho_x(h) = 0$ bilgisi de dikkate alınarak, aşağıdaki

$$\rho_x(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\beta_1 + \beta_1 \beta_2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} & h = \pm 1 \\ \frac{\beta_2}{1 + \beta_1^2 + \beta_2^2} & h = \pm 2 \\ 0 & |h| > 2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Örnek 2.2.

İkinci dereceden bir MA serisi $X_t = \mu + e_t + \beta_1 e_{t-1} + \beta_2 e_{t-2}$ $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$
 $\mu=0$ $\sigma^2=1$ $\beta_1 = -1.7$ ve $\beta_2 = 0.72$ olacak şekilde, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlarının değerleri

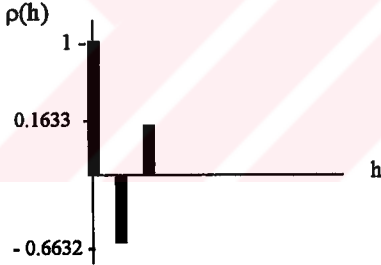
$$\rho(0) = 1$$

$$\rho(1) = \frac{(-1.7) + (-1.7)(0.72)}{1 + (-1.7)^2 + (0.72)^2} = -0.6632$$

$$\rho(2) = \frac{0.72}{1 + (-1.7)^2 + (0.72)^2} = 0.1633$$

$$\rho(3) = 0$$

olarak bulunur ve bunların grafikleri Şekil 2.3 de verilmiştir.

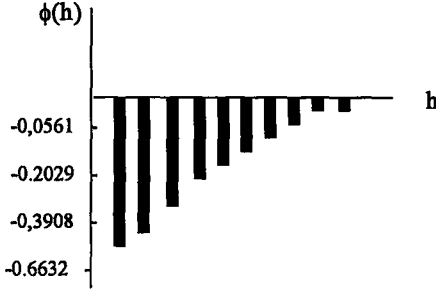


Şekil 2.3. MA(2) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Kısmi otokorelasyon değerleri

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\phi(h)$	-0,663	-0,493	-0,390	-0,293	-0,203	-0,135	-0,088	-0,056	-0,036	-0,024

olarak hesaplanmış ve bunların grafikleri ise Şekil 2.4 de verilmiştir.



Şekil 2.4. MA(2) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

2.1.3. q-uncu dereceden hareketli ortalama serisi, MA(q)

Daha yüksek dereceden hareketli ortalama serileri için q- uncu derecede hareketli ortalama serisi MA(q), $\beta_q \neq 0$ ve $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j} \quad (2.15)$$

şeklinde verilir ve ortalaması μ ve varyansı

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \beta_j^2 \quad (2.16)$$

olduğu görülür. Ayrıca MA(q) serisinin otokovaryans fonksiyonu, $h > 0$ için

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-h} \beta_j \beta_{j+h} & , 0 < h \leq q \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.17)$$

olarak hesaplanır. Çünkü,

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}\left(\mu + \sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j}, \mu + \sum_{i=0}^q \beta_i e_{t+h-i}\right)$$

$$= \text{Cov}\left(\sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j}, \sum_{i=0}^q \beta_i e_{t+h-i}\right) = \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^q \beta_i \beta_j \text{Cov}(e_{t-j}, e_{t+h-i})$$

olduğundan ve e_t sersinin bir beyaz gürültü serisi olduğundan

$$\text{Cov}(e_{t-j}, e_{t+h-i}) = \begin{cases} \sigma^2 & , i = j + h \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases}$$

olup

$$\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \beta_i \beta_j \text{Cov}(e_{t-j}, e_{t+h-i}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-h} \beta_j \beta_{j+h}$$

toplam üzerindeki üst sınır $q-h$ dir. Çünkü $j+h$ ancak q ya kadar gider.

MA(q) modelinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise MA(1) ve MA(2) süreçlerine benzer bir eğilime sahiptir.

Buradan da otokorelasyon fonksiyonu, $\gamma(h)$ otokorelasyon fonksiyonu yardımı ile

$$\rho_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} 1 & , h = 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \beta_j \beta_{j+h}}{\sum_{j=0}^{q-h} \beta_j^2} & , 0 < h \leq q \\ 0 & , |h| > q \end{cases} \quad (2.18)$$

ile hesaplanır (Wei 1990).

Herhangi bir hareketli ortalama $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin varyansı, otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonu t den bağımsızdır. Dolayısıyla hareketli ortalama serileri her sonlu q için durağandır.

Herhangi bir X_t zaman serisi eğer $e_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j (X_{t-j} - \mu)$ şeklinde yazılabilirse X_t tersine tersinirdir denir (Box and Jenkins 1976).

Ayrıca, $X_t - \mu = \sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j}$ zaman serisi,

$$(X_t - \mu) = \beta_0 e_t + \beta_1 e_{t-1} + \dots + \beta_q e_{t-q}$$

şeklinde de yazılabilir. B gerileme operatörü kullanarak $B^h X_t = X_{t-h}$ olmak üzere

$$(X_t - \mu) = (1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \dots + \beta_q B^q) e_t$$

şeklinde de yazabiliriz. Ayrıca $(X_t - \mu) = \theta(B) e_t$ gösterimi kullanılarak kısaltılabilir. Burada

$$\theta(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_q z^q$$

dir ve $\theta(z) = 0$ denkleminde q -uncu dereceden hareketli ortalama zaman serisinin karakteristik denklemi olarak bilinir. Eğer $\theta(z) = 0$ denkleminin bütün kökleri 1 den büyük ise seri “tersinir” dir.

Yukarıda her sonlu q için $X_t = \sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j}$ zaman serisinin durağan olduğunu

gördük. Fakat $q = \infty$ için $X_t = \sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j}$ şeklinde $MA(+\infty)$ serisini ele alalım. Bu

durumda $E(X_t)$ nin ve otokovaryans fonksiyonunun hesaplanabilmesi için sınırlı yakınsaklık teoreminin koşullarının sağlanması gerekir. Yani, $\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| < \infty$ için

sınırlı yakınsaklık teoreminin koşulları sağlanır ve beklenen değer operatörü ile sonsuz toplam yer değiştirebilir. Buradan da $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j}$$

şeklinde verilen zaman serisi için

$$E(X_t) = \mu$$

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \beta_j^2$$

ve

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \beta_j \beta_{j+h}$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi $|\rho| < 1$ olmak üzere $\beta_j = \rho^j$ olduğunu ve X_t sersinin $X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j e_{t-j}$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Yani

$$(X_t - \mu) = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \rho^4 e_{t-4} + \dots$$

Ayrıca,

$$(X_t - \mu) = e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + \rho^3 e_{t-4} + \rho^4 e_{t-5} + \dots$$

olacaktır. İkinci eşitliğin her iki tarafı ρ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkartılırsa

$$(X_t - \mu) = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \rho^4 e_{t-4} + \dots$$

$$\rho (X_t - \mu) = \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \rho^4 e_{t-4} + \dots$$

eşitliklerinden

$$(X_t - \mu) - \rho (X_{t-1} - \mu) = e_t$$

sonucuna ulaşılabacaktır. Yani,

$$(X_t - \mu) = \rho (X_{t-1} - \mu) + e_t \quad (2.19)$$

serisi veya $\alpha_0 = \mu(1 - \rho)$ ve $\alpha_1 = \rho$ olmak üzere

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + e_t$$

zaman serisi modeline ulaşılır. Bu seri aşağıda inceleneceği gibi birinci dereceden otoregersif zaman serisi modeli olarak bilinir. Bu serinin durağan

olduğu $|\rho| < 1$ için bilinmektedir. ($|\rho| < 1$ için $\beta_j = \rho^j$, $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j e_{t-j}$ şeklinde bir seriden yola çıkarak ulaştık). Buradan

$$\mu_x = E(X_t) = E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + e_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1})$$

$$\mu_x = \alpha_0 + \alpha_1 \mu_x \Rightarrow \mu_x(1 - \alpha_1) = \alpha_0$$

veya

$$\mu_x = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

bulunur. Oysa $\alpha_0 = \mu(1 - \alpha_1)$ kullanılırsa $\mu_x = \mu$ olduğu görülür. Ayrıca serinin varyansı ve otokovaryansları da benzer şekilde hesaplanır.

2.2. Otoregresif Zaman Serileri (Autoregressive Series)

Otoregresif modellerde değişkenin t dönemindeki değeri belirli sayıdaki geri dönem değerleri ile e_t hata değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu olarak ifade edilir. Birçok ekonomik veri otoregresif zaman serisi olarak modellenmektedir.

p - inci dereceden bir otoregresif zaman serisi, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ süreci ve $\alpha_p \neq 0$ olmak üzere

$$(X_t - \mu) = \sum_{j=1}^p \alpha_j (X_{t-j} - \mu) + e_t \quad (2.20)$$

veya

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{t-j} + e_t \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır ve $AR(p)$ kısaltması kullanılır.

2.2.1. Birinci dereceden otoregresif zaman serisi, $AR(1)$

Birinci dereceden otoregresif zaman serisi, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$(X_t - \mu) = \alpha(X_{t-1} - \mu) + e_t \quad t=1,2,3,\dots \quad (2.22)$$

biçiminde verilsin. Seri durağan olduğunda $|\alpha| < 1$ olduğundan $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j e_{t-j}$

şeklinde yazılır ve buradan

$$E(X_t) = \mu$$

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j}$$

$$\text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} \quad (2.23)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}$$

Ayrıca,

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(\alpha X_{t-1} + e_t, \alpha X_{t+h} + e_{t+h})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^j \alpha^i \text{Cov}(e_{t-j}, e_{t+h-i})$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \alpha^h \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} \\
&= \sigma^2 \frac{\alpha^h}{1-\alpha^2} = \alpha^h \gamma(0)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

yazılabilir. Burada dikkat edilirse α değeri mutlak değerce bire yaklaştıkça azalma çok yavaşlar ve bir olması durumunda seri artık durağan olmayacaktır. Bunu gösterecek olursak $\alpha=1$ iken

$$X_t = X_{t-1} + e_t$$

biçimindedir. Bu seri

$$X_t = X_{t-1} + e_t = X_{t-2} + e_{t-1} + e_t = \dots = X_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_t = X_0 + \sum_{i=1}^t e_i$$

olur ve $X_0 = \mu$ olduğu varsayılırsa

$$E(X_t) = \mu$$

ve

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \min(t, t+h) \sigma^2$$

dir. Buradan da

$$\text{Var}(X_t) = t \sigma^2$$

olur ki serinin varyansı ve kovaryansı zamana bağlı olarak değişmektedir ; seri durağan değildir. Dolayısıyla buradaki α değerinin mutlak değerce bire ne kadar yakın olduğu önemlidir. Yani serinin durağan olup olmamasının test edilmesi bir yerde α değerinin 1 olup olmamasının test edilmesidir. Daha ileride görüleceği gibi α parametresinin en küçük kareler tahmin edicisi olan

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sum X_t X_{t-1}}{\sum X_{t-1}^2}$$

istatistiği α parametresi için tutarlı bir istatistik olup, $|\alpha| < 1$ iken $\hat{\alpha}_n$ istatistiğinin asimptotik dağılımı normaldir. Fakat , $|\alpha|=1$ iken asimptotik dağılım normal değildir.

Yukarıdan da görüleceği gibi

$$\rho(h) = \alpha^h \quad (2.25)$$

şeklindedir. Otokorelasyon fonksiyonu α parametresinin işaretine bağlı olarak üstel azalarak sıfıra doğru yaklaşır. Bu azalmanın oranı önemli olmakla birlikte otoregresif zaman serilerinin derecelerinin belirlenmesinde otokorelasyonlar kullanılmaz. Bunun için otoregresif zaman serilerinin derecelerini belirlemek için kısmi otokorelasyon fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. Bu fonksiyona daha sonra değinilecektir. Birinci dereceden otoregresif zaman serisinin varyansı ve otokovaryans fonksiyonu

$$\begin{aligned} \gamma_x(0) &= \text{Var}(X_t) = \alpha^2 \gamma_x(0) + \sigma^2 \\ \gamma_x(h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \alpha \gamma_x(h-1) \end{aligned} \quad (2.26)$$

olarak kolayca elde edilebilir. Yukarıdaki (2.26) denklemleri birinci dereceden otoregresif zaman serisinin Yule-Walker denklemleri olarak bilinir. Kısmi otokorelasyonlar ise $|\alpha| < 1$ için

$$\phi(h) = \begin{cases} \phi(1) = \alpha & , h = 1 \\ 0 & , h \geq 2 \end{cases} \quad (2.27)$$

biçimindedir. AR(1) in kısmi otokorelasyon fonksiyonu $h=1$ için sıfırdan farklı negatif veya pozitif değerler alırken diğer gecikmeler sıfır olacaktır.

Örnek 2.3.

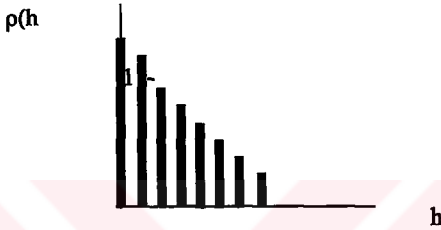
Birinci dereceden bir AR serisi $X_t = \alpha X_{t-1} + e_t$, $\alpha=0.8$ olacak şekilde

$$X_t = 0.8X_{t-1} + e_t$$

durağan zaman serisi için otokorelasyonlar

$$\begin{aligned}
\rho(0) &= 0.8^0 = 1 \\
\rho(1) &= 0.8^1 = 0.8 \\
\rho(2) &= 0.8^2 = 0.64 \\
&\vdots \\
\rho(h) &= \alpha^h
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve bunlara ait grafik Şekil 2.5 de verilmiştir.



Şekil 2.5. AR(1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Serinin otokorelasyonları üstel olarak azalmaktadır. Fakat α değeri bire yaklaştıkça bu azalma yavaş olmaktadır.

Kısmi otokorelasyon değerleri ve grafiği,

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= \alpha_1 = 0.8 \\
\phi(2) &= 0
\end{aligned}$$



Şekil 2.6. AR(1) serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu

şeklindedir. Buradan grafikler incelendiğinde otokorelasyonlar üstel olarak azalmakta ve kısmi otokorelasyonlar ise birinci gecikmeden sonra sıfır

olmaktadır. Böyle bir grafikten yola çıkarak verilen herhangi bir zaman serisinin birinci dereceden otoregresif modeline uygun olabileceğisöylenebilir.

2.2.2. İkinci dereceden otoregresif zaman serisi, AR(2)

İkinci dereceden bir otoregresif zaman serisi , $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$(X_t - \mu) = \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \alpha_2 (X_{t-2} - \mu) + e_t$$

veya

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + e_t \quad (2.28)$$

biçiminde verilsin. Bu modele ait Yule-Walker denklem sistemleri

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(2) + \sigma^2 \\ \gamma(h) &= \alpha_1 \gamma(h-1) + \alpha_2 \gamma(h-2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

şeklinededir. Bu denklem sisteminin çözümünden parametre değerleri

$$\alpha_1 = \frac{\gamma(0)\gamma(1) - \gamma(1)\gamma(2)}{\gamma^2(0) - \gamma^2(1)} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{\gamma(0)\gamma(2) - \gamma^2(1)}{\gamma^2(0) - \gamma^2(1)} \quad (2.30)$$

olarak bulunur. İkinci dereceden otoregresif bir zaman serisinin durağan olup olmadığını α_1 ve α_2 parametreleri üzerindeki koşullara bakılarak da söylenebilir. Yani

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + e_t$$

zaman serisinin durağan olması için gerek ve yeter koşul

- i) $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$
- ii) $\alpha_2 - \alpha_1 < 1$

$$\rho(1) = \left| \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1^2}{(1-\alpha_2)^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1^2 < (1-\alpha_2)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha_2)^2 - \alpha_1^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha_2 - \alpha_1)(1-\alpha_2 + \alpha_1) > 0$$

$$1-\alpha_2 - \alpha_1 > 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 < 1$$

$$1-\alpha_2 + \alpha_1 > 0 \Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 < 1$$

i) $|\alpha_2| < 1$

$$\left. \begin{array}{l} 1-\alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_2 < 1 \\ 1+\alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_2 > -1 \end{array} \right\} |\alpha_2| < 1$$

(Brockwell and Davis 1987). Burada (2.26) de verilen denklem sistemi tekrar ele alındığında $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ ve $\gamma(2)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2(1-\alpha_2)}{1-\alpha_2 - [\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_2^2(1-\alpha_2)]} \quad (2.31)$$

$$\gamma(1) = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \gamma(0) \quad (2.32)$$

$$\gamma(2) = \left[\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 \right] \gamma(0) \quad (2.33)$$

(Fuller 1976).

Duragan bir AR(2) modelinin otokorelasyon fonksiyonu

$$\rho(h) = \alpha_1 \rho(h-1) + \alpha_2 \rho(h-2) \quad (2.34)$$

şeklinde olup ilk iki otokorelasyon $\rho(1)$ ve $\rho(2)$ değerlere parametrelere bağlı olarak

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \quad (2.35)$$

$$\rho(2) = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2} + \alpha_2 \quad (2.36)$$

şeklinde hesaplanabilir. AR(2) modelinin otokorelasyon fonksiyonu α_1 ve α_2 parametrelerinin işaretine bağlı olarak üstel azalma veya sinüs dalgalanmaları gösterir. Kısmi korelasyon fonksiyonları ise

$$\phi(1) = \frac{\det P_1^*}{\det P_1} = \frac{\rho_1}{1} = \rho_1 \quad (2.37)$$

$$\phi(2) = \frac{\det P_2^*}{\det P_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \alpha_2 \quad (2.38)$$

$$\phi(3) = \frac{\det P_3^*}{\det P_3} = 0 \quad (2.39)$$

$$\phi(h) = \frac{\det P_h^*}{\det P_h^*} = 0 \quad h \geq 3 \quad (2.40)$$

olup $h = 1$ ve $h = 2$ gecikmeleri için yine α_1 ve α_2 parametrelerinin işaretine bağlı olarak sıfırdan farklı negatif veya pozitif değer alır ve $h \geq 3$ için de sıfır olur.

2.2.3. p- inci dereceden otoregresif zaman serisi, AR(p)

p- inci dereceden bir otoregresif zaman serisi, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ve $\alpha_p \neq 0$ olmak üzere

$$(X_t - \mu) = \sum_{j=1}^p \alpha_j (X_{t-j} - \mu) + e_t$$

veya $Y_t = X_t - \mu$ denirse

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{t-j} + e_t$$

olarak tanımlanır.

Otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları Yule Walker denklemlerinden

$$\gamma(h) = \alpha_1 \gamma(h-1) + \alpha_2 \gamma(h-2) + \dots + \alpha_p \gamma(h-p)$$

$$\rho(h) = \alpha_1 \rho(h-1) + \alpha_2 \rho(h-2) + \dots + \alpha_p \rho(h-p)$$

şeklinde elde edilir.

AR(p) sürecinin otokorelasyon değerleri

$$m^p - \sum_{j=1}^p \alpha_j m^{p-j} = 0 \quad (2.41)$$

denkleminin karakteristik köklerine göre üstel ya da sinüs dalgalanmaları veya ikisinin karışımı şeklinde azalan bir eğilime sahiptir.

Kısmi otokorelasyon değerleri $h \leq p$ gecikmelerinde sıfırdan farklı iken $h > p$ için sıfır olmaktadır.

Yukarıdaki (2.19) da görüldüğü gibi $MA(\infty)$ serisinden birinci derecede bir otoregresif zaman serisinin her zaman durağan olmadığını ve bazı koşullar altında durağan olduğunu görmüştük. Yani hareketli ortalama zaman serisinin

her zaman durağan olmasına karşılık otoregresif zaman serileri her zaman durağan değildir.

AR serilerinin durağanlığı (2.41) denkleminin karakteristik köklerine bağlıdır. Eğer (2.41) de verilen denklemin bütün kökleri mutlak değerce 1 den küçük ise seri durağandır. Aksi halde yani denklemin köklerinden en az bir tanesi mutlak değerce 1 e eşit veya 1 den büyük ise seri durağan değildir.

Burada serinin karakteristik denkleminin köklerinden en az bir tanesi mutlak değerce 1 olması pratikte çok karşılaşılan durumlardan biridir. Bu tür serilere “birim köklü” seriler adı verilmektedir. Bazen bu seriler literatürde “Rasgele Yürüyüş (Random Walk)” serileri olarak da karşımıza çıkmaktadır. Örneğin (2.41) denkleminin kökleri 1 ve 0.7 ise, $(X_t - \mu) = 1.40(X_{t-1} - \mu) - 0.48(X_{t-2} - \mu) + e_t$ zaman serisinin karakteristik denklemdir. Buradan (2.41) denklemi

$$m^2 - 1.40m + 0.48 = 0$$

şeklinde. Bu seri köklerden bir tanesi mutlak değerce 1 olduğunda durağan değildir. Ayrıca, bu seri

$$X_t = \mu(1 - 1.40 + 0.48) + X_{t-1} - 0.48X_{t-2} + e_t$$

yani

$$X_t = 1.40X_{t-1} - 0.48X_{t-2} + e_t$$

şeklinde yazılabileceğinden μ , serinin beklenen değeri, ortadan kaybolmaktadır.

Bu durum öngörülerde sorun yaratmaktadır. İleride öngörü problemi incelendiğinde gösterilecektir ki durağan zaman serileri için öngörüler serinin ortalamasına doğru yaklaşmaktadır. Birim köklü serilerde ise öngörüler sabitleşmekle birlikte öngörü hatalarının varyansları zaman bağlı olarak artan bir

eğilim göstermektedir. Bu seri $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j e_{t-j}$ şeklinde yazılabilmektedir.

Yukarıda, $\beta_j = \rho^j$ olarak birinci dereceden otoregresif serisine $MA(+\infty)$ serisini

kullanarak ulaşımtık. Şimdi X_t zaman serisi $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j e_{t-j}$ şeklinde

yazıldığını kabul edelim. Öyle ki $\sum_{j=0}^{\infty} |w_j| < \infty$ varsayımını da sınırlı yakınsaklık

teoreminin koşullarını sağlatabilmek için kullanalım. İkinci dereceden bir otoregresif zaman serisi için m_1 ve m_2 karakteristik denklemin köklerini göstermek üzere w_j katsayıları

$$w_j = (m_1 - m_2)^{-1} m_1^{j+1} + (m_2 - m_1)^{-1} m_2^{j+1}$$

olarak hesaplanabilir. Buradaki w_j değerleri ise

$$w_j = 4(0.8)^j - 3(0.6)^j$$

ardışık olarak hesaplanabilir. Ayrıca $\sum_{j=0}^{\infty} |w_j| < \infty$ olduğu da kolayca görülür.

Serinin $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j e_{t-j}$ şeklinde yazıldığı varsayıldığında ise (yani w_j ler yukarıdaki gibi verilmiş olsaydı)

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} [4(0.8)^j - 3(0.6)^j] e_{t-j}$$

olacaktır. Eşitliğin her iki tarafı 0.6 değeri ile çarpılıp kendisinden çıkartıldığında,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} [4(0.8)^j - 3(0.6)^j] e_{t-j}$$

$$0.6X_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} 0.6[4(0.8)^j - 3(0.6)^j] e_{t-j}$$

$$X_t - 0.6X_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (4(0.8)^j - 3(0.6)^j) e_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} (2.4(0.8)^j - 3(0.6)^{j+1}) e_{t-j-1}$$

elde edilir.

$Z_t = X_t - 0.6X_{t-1}$ ve $j+1=i$ denirse

$$\begin{aligned}
Z_t &= X_t - 0.6X_{t-1} = e_t + \sum_{i=1}^{\infty} (4(0.8)^i - 3(0.6)^i) e_{t-i} - \sum_{i=1}^{\infty} (2.4(0.8)^{i-1} - 3(0.6)^i) e_{t-i} \\
&= e_t + \sum_{i=1}^{\infty} 4(0.8)^i e_{t-i} - \sum_{i=1}^{\infty} 3(0.6)^i e_{t-i} - \sum_{i=1}^{\infty} 2.4(0.8)^{i-1} e_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} 3(0.6)^i e_{t-i} \\
&= e_t + \sum_{i=1}^{\infty} [4(0.8)^i - 2.4(0.8)^{i-1}] e_{t-i} \\
&= e_t + \sum_{i=1}^{\infty} [4(0.8)(0.8)^{i-1} - 2.4(0.8)^{i-1}] e_{t-i} \\
&= e_t + \sum_{i=1}^{\infty} [3.2(0.8)^{i-1} - 2.4(0.8)^{i-1}] e_{t-i} \\
&= e_t + \sum_{i=1}^{\infty} [0.8]^i e_{t-i} \\
Z_t &= \sum_{j=0}^{\infty} [0.8]^j e_{t-j}
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitlik

$$Z_t = 0.8Z_{t-1} + e_t$$

şeklinde yazılabilir. Z_t nin tanım gereği ifade

$$X_t - 0.6X_{t-1} = 0.8(X_{t-1} - 0.6X_{t-2}) + e_t$$

$$X_t = 1.40X_{t-1} - 0.48X_{t-2} + e_t$$

olur ki bu da ikinci dereceden otoregresif zaman serisidir. Bunun tersi de doğrudur. Yani,

$$X_t = 1.40X_{t-1} - 0.48X_{t-2} + e_t$$

serisi verildiğinde bu seri durağan olduğundan

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j e_{t-j}$$

şeklinde her zaman yazılır. Bu özellik bütün durağan zaman serileri için geçerlidir.

Eğer serinin karakteristik denkleminin köklerinden bir tanesi mutlak değerce 1 ise bu tür serilere “Birim köklü” zaman serileri adı verildiği daha önce

söylenmişti. Birim köklü zaman seriler durağan olmayan seriler olup pratikte sıkça rastlanmaktadır. İleriki bölümlerde birim köklü serileri detaylı olarak incelenecektir. Ayrıca, karakteristik denklemin köklerinden en az bir tanesi mutlak değerce 1 den büyük olması durumunda da seri durağan değildir. Fakat bu durumla pratikte pek karşılaşmadığından bu tür serilere burada değinilmeyecektir.

2.3. Otoregresif Hareketli Ortalama Zaman Serileri (Autoregressive Moving Average Series), ARMA (p,q)

Daha önceki kısımlarda hareketli ortalama MA(q) ve otoregresif AR(p) zaman serilerini ve bu serilerin bazı özelliklerini incelendi. Bu kısımda ise bu iki serinin karışımı olan otoregresif hareketli ortalama serilerine kısaca değinilecektir.

ARMA modeli, otoregresif ve hareketli ortalama modellerinin karışımı olup bir ARMA(p,q) serisini $\theta_q \neq 0$ ve $\phi_p \neq 0$. olmak üzere

$$(X_t - \mu) = \sum_{i=1}^p \phi_i (X_{t-i} - \mu) + e_t + \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} \quad (2.42)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Başka bir ifade ile

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + e_t + \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} \quad (2.43)$$

şeklinde de yazılabilmektedir. Aynı zamanda B gerileme operatörleri yardımı $(B^k X_t = X_{t-k})$ ile

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

ve

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

olacak şekilde

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)e_t \quad (2.44)$$

biçiminde yazılabilir. ARMA(p,q) serisinin durağan olması için AR(p) kısmının durağan olması yeterlidir ve tersinir olması için MA(q) kısmının tersinir olması yeterlidir.

ARMA modelinde (2.43) denkleminin her iki tarafı Y_{t-k} ile çarpılıp beklenen değeri alınırsa otokovaryans fonksiyonu

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) + \dots + \phi_p\gamma(h-p) \quad (2.45)$$

elde edilir.

Otokorelasyon fonksiyonu ise $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$ eşitliğinden yararlanarak

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) + \dots + \phi_p\rho(h-p) \quad (2.46)$$

bulunur.

ARMA(p,q) modelinin otokorelasyon fonksiyonu q gecikmesine kadar hem otoregresif hem de hareketli ortalama parametrelerine bağlı olarak değer alırken q gecikmesinden sonra sadece otoregresif serinin parametrelerine bağlı olarak sifıra yaklaşır.

Kısmi otokorelasyonlar ise otokorelasyonlar yardımı ile bulunur. Kısmi otokorelasyon fonksiyonu $\phi(B)=0$ ve $\theta(B)=0$ eşitliklerinin köklerine bağlı olarak üstel azalma ve sinüs dalgalanmaları şeklinde azalarak sifıra doğru yaklaşır (Wei 1990).

2.2.1 ARMA(1.1) Serisi

ARMA(1.1) modelini

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 e_{t-1} \quad (2.47)$$

şeklinde verilsin.

Bu eşitliğin her iki tarafı Y_{t-k} ile çarpılıp beklenen değeri alınursa otokovaryans fonksiyonu

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{1 + 2\theta_1^2 - 2\theta_1\phi_1}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 & , h = 0 \\ \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 & , h = 1 \\ 0 & , h \geq 2 \end{cases} \quad (2.48)$$

olarak hesaplanır (Box and Jenkins 1976). Otokorelasyon fonksiyonu ise

$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$ eşitliğinden yararlanarak

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & , h = 0 \\ \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1} & , h = 1 \\ \phi_1^{h-1} \rho(1) & , h \geq 2 \end{cases} \quad (2.49)$$

şeklinde olur (Box and Jenkins 1976). Bu modelin otokorelasyon fonksiyonu $h=1$ gecikmeden sonra ϕ_1 in işaretine bağlı olarak üstel azalma veya sinüs dalgalanmaları şeklinde sifra doğru yaklaşır.

Örnek 2.4.

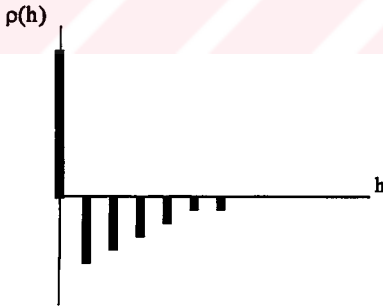
ARMA(1,1) in kısmi otokorelasyon fonksiyonu da ϕ_1 ve θ_1 parametrelerinin işaretlerine bağlı olarak üstel azalma veya sinüs dalgalanmaları şeklinde sıfıra yaklaşır. Özel olarak $\phi_1=0.5$ ve $\theta_1=0.9$ olduğunda

$$Y_t = 0.5Y_{t-1} + 0.9e_{t-1} + e_t$$

ARMA(1,1) sürecinin otokorelasyon değerleri

h	0	1	2	3	4	5	6
$\rho(h)$	1	-0,24	-0,12	-0,03	-0,007	-0,002	-0,0004

olarak hesaplanmış ve bunların grafikleri Şekil 2.7 de verilmiştir.



Şekil 2.7. ARMA (1,1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Örnek 2.5.

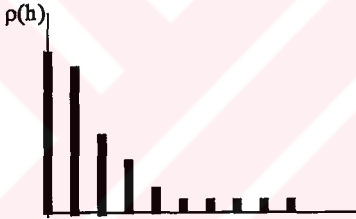
Aynı örnek θ_1 değerinin işareti değiştirildiğinde, yani model $\phi_1=0.5$ ve $\theta_1=-0.9$ için

$$Y_t = 0.5Y_{t-1} - 0.9e_{t-1} + e_t$$

verildiğinde ARMA(1,1) sürecinin otokorelasyon değerleri ve grafiği

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho(h)$	1	0,75	0,375	0,1875	0,093	0,046	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001

olarak bulunur ve bunların grafikleri Şekil 2.8 de verilmiştir.



Şekil 2.8. ARMA (1,1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

Şekil 2.7 ve Şekil 2.8 de görüldüğü gibi ARMA modellerinde serinin otokorelasyon değerleri ϕ_1 ve θ_1 parametrelerinin işaretlerine bağlı olarak üstel azalma şeklinde sıfıra yaklaşmaktadır.

Yukarıda ARMA(1,1) modeline ait otokorelasyonların grafikleri incelendi. Şimdi ARMA(2,1) modeli göz önüne alınsın ve $\phi_1 = 0.8$ $\phi_2 = 0.15$ ve $\theta_1 = 1$ olan ARMA(2,1) modeli

$$X_t = 0.8X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + e_t + e_{t-1} \quad (2.50)$$

olarak verilsin. Bu modelin AR kısmının karakteristik denklemi ve karakteristik kökleri

$$m^2 - 0.8m + 0.15 = 0$$

$$m_1 = 0.5 \quad m_2 = 0.3$$

olur ki kökler birden küçük olduğu için (2.50) durağan bir seridir. Bu serinin otokorelasyon değerlerini

$$\rho(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \quad (2.51)$$

formülü ile hesaplanır. Burada ψ_j değerlerinin bulunması gerekir. Bunun için

$$X_t = \psi_0 e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \psi_3 e_{t-3} + \dots$$

$$0.8X_{t-1} = 0.8\psi_0 e_{t-1} + 0.8\psi_1 e_{t-2} + 0.8\psi_2 e_{t-3} + 0.8\psi_3 e_{t-4} + \dots$$

$$0.15X_{t-2} = 0.15\psi_0 e_{t-2} + 0.15\psi_1 e_{t-3} + 0.15\psi_2 e_{t-4} + 0.15\psi_3 e_{t-5} + \dots$$

değerleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 = 1.8$$

elde edilir ve diğer ψ_j değerleri

$$\psi_j = \frac{15}{2}(0.5)^j - \frac{13}{2}(0.3)^j$$

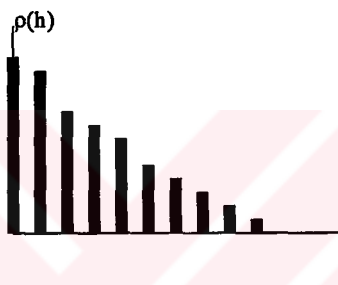
şeklinde dir. Buradan otokorelasyon fonksiyonu

$$\rho(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{15}{2}(0.5)^j - \frac{13}{2}(0.3)^j \right) \left(\frac{15}{2}(0.5)^{j+h} - \frac{13}{2}(0.3)^{j+h} \right)$$

olup otokorelasyon değerleri

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(h)/\sigma^2$	6.72	5.55	3.42	1.91	1.01	0.52	0.26	0.135	0.068	0.034	0.017
$\rho(h)$	1	0.825	0.51	0.284	0.151	0.078	0.039	0.02	0.01	0.005	0.002

olarak hesaplanmıştır. Bunların grafikleri ise Şekil 2.9 da verildiği gibidir.



Şekil 2.9. ARMA (2,1) serisinin otokorelasyon fonksiyonu

3. DURAĞAN OLMAYAN ZAMAN SERİLERİ

Özellikle gelişen ekonomide ve çalışma alanlarında durağan olmayan zaman serilerine çok rastlanılmaktadır. Daha önceki bölümlerde bahsedildiği gibi, hareketli ortalama (MA) serileri her zaman durağandır. Fakat otoregresif (AR) zaman serilerinde durağanlık serinin karakteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Benzer şekilde otoregresif hareketli ortalama (ARMA) serilerinin durağan olup olmaması ise serinin AR kısmının karakteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Dolayısıyla durağan olmayan zaman serileri incelenirken AR serileri üzerinde durulacaktır. Bölüm 2 de bahsedildiği gibi AR serilerinde karakteristik denklemin bütün kökleri mutlak değerce birden küçük ise seri durağan aksi taktirde seri durağan değildir. Durağan olmayan zaman serileri sınıfı içerisinde karakteristik denkleminin köklerinin mutlak değerce bir olması yani “Birim Köklü Zaman Serileri “ (Unit Root Time Series) oldukça geniş bir yer tutmaktadır. Bu bölümde de birim köklü zaman serileri incelenecektir. Uzun dönemde herhangi bir ekonomik zaman serisi bir trend ile deterministik sürecin lineer bileşimi olarak yazılabilir.

Deterministik trend, ilgili zaman serisinin zaman içinde sürekli artması (veya azalması) şeklindeki bir eğilim olarak düşünülür Durağan olmayan süreçlerin ortalama fonksiyonları zamanın bir deterministik trendi olabilir. Burada μ rasgele olmayan bir terim olmak üzere

$$X_t = X_0 + \mu t \quad (3.1)$$

modelindeki $\{\mu t\}$ serisine “ deterministik trend “ adı verilir.

Ayrıca $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$X_t = X_0 + \sum_{s=1}^t e_s \equiv X_0 + v_t \quad (3.2)$$

modelindeki $\{v_t\} \equiv \sum_{s=1}^t e_s$ serisine “ stokastik trend “ denir. Stokastik trend, serideki zamanla artan (veya azalan) eğilimin sürekli olmaması, genellikle artış (veya azalış) içerisinde olan bir seride düşüşlerinde (veya artışlarında) gözlemlendiği durumu ifade etmektedir. Deterministik trendin gözlemlendiği zaman serisi için veri üretim sürecinin zaman değişkenini içerdiği varsayılır. Buna karşın, stokastik trende sahip zaman serisi için uygun veri üretim süreci, zaman serisinin gecikmeli değerlerinin açıklayıcı değişken olarak kullanıldığı otoregressif model olarak düşünülmelidir. Ayrıca $\{v_t\}$ durağan olmayan bir süreçtir ve rasgele yürüyüş süreci (Random Walk Process) olarak bilinir (Hatanaka 1996) .

Yukarıdaki (3.1) ve (3.2) modelleri birleştirildiğinde

$$X_t = X_0 + \mu t + \sum_{s=1}^t e_s \equiv X_0 + \mu t + v_t \quad (3.3)$$

modeli elde edilir. Bu modeldeki $\{\mu t + v_t\}$ terimi ise deterministik ve stokastik trendlerin birleşimidir. Yine yukarıda (3.2) ve (3.3) deki X_0 stokastik bir rasgele değişken olarak göz önüne alınabildiği gibi stokastik olmayan bir sabit olarak da göz önüne alınabilir ve pratikte $X_0 = \alpha$ veya özellikle birim köklü zaman serileri incelenirken $X_0 = 0$ alınır. Yani, bu değer başlangıç koşulu olarak alınmaktadır.

Örneğin, P_t t zamanındaki fiyatlar, I_{t-1} , t-1 zamanındaki bilgiyi göstermek üzere, t-1 zamanında P_t nin koşullu beklenen değeri

$$P_{t-1} = E(P_t \mid I_{t-1}) \quad (3.4)$$

biçimindedir. I_{t-1} bilgisinin sadece $(P_{t-1}, P_{t-2}, \dots)$ olduğu kabul edildiğinde (3.4) ifadesi

$$P_{t-1} = E(P_t \mid P_{t-1}, P_{t-2}, \dots)$$

biçiminde olmaktadır

Burada $\{P_t\}$ serisi Martingale Süreci olduğundan $\forall P_t$ nin hiçbir kısmı $(P_{t-1}, P_{t-2}, \dots)$ bilgisi ile öngörülemez (Hatanaka 1996).

Yukarıdaki (3.2) eşitliğinde başlangıç noktası $X_0 = 0$ olarak alındığında

$X_n = \sum_{i=1}^n e_i$ ve $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | \mathfrak{I}_n) &= E(X_n + e_{n+1} | \mathfrak{I}_n) \\ &= E(X_n | \mathfrak{I}_n) + E(e_{n+1} | \mathfrak{I}_n) \end{aligned}$$

burada e_{n+1} değerleri $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ değerlerinden bağımsız olduğundan $E(e_{n+1})=0$ olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | \mathfrak{I}_n) &= E(X_n | \mathfrak{I}_n) \\ &= X_n \end{aligned}$$

bulunur ki $(X_n, \mathfrak{I}_n)$ ikilisine Martingale Süreci adı verilmektedir (Billingsley 1986).

Bir serinin beklenen değeri ve otokovaryansları zamana bağlı değil ise bu tür seriler durağan zaman serileri olarak adlandırılmıştı. Eğer otokovaryanslar zamana bağlı değil, fakat beklenen değeri zamana bağlı ise serisinin deterministik bir trend içerdiğini söyleyebiliriz. (3.3) de verilen seride eğer v_t durağan ise $\{\mu_t\}$ deterministik bir trenddir. Fakat, (3.3) de verilen seride v_t nin otokovaryansları zamana bağlıdır. Bu tür seriler için ise (yani, seri (3.3) deki gibi v_t gibi durağan olmayan bir bileşen içeriyorsa) stokastik bir trend içeriyor denir. Kısaca, sadece beklenen değer zamana bağlı ise deterministik bir trend, sadece otokovaryanslar(dolayısıyla varyans) zamana bağlı ise seri stokastik trend

içeriyor denir. Bazı seriler hem deterministik, hem de stokastik bir trend içerebilir. Analizlerin yapılabilmesi için serinin durağanlaştırılması gerektiğinden , eğer seri sadece deterministik bir trend içeriyorsa ((3.3) deki gibi) serinin ortalamasının çıkartılması ile durağan hale getirilebilir ($Y_t = X_t - \bar{X}$ gibi). Burada fark almak gerekmez. Fakat seri stokastik bir trend içeriyorsa, serinin durağan hale getirilmesi için mutlaka fark almak gerekir.

Durağan olmayan zaman serilerinde parametrelerin tahmin edicilerine ait asimptotik özellikler durağan zaman serilerinin asimptotik özelliklerinden farklıdır. Dolayısıyla durağan olmayan zaman serisi üzerinden zaman serileri analizleri yapılırken serinin durağan olup olmadığı kontrol edilmeli ve seri durağan değil ise durağanlaştırıldıktan sonra analizler yapılmalıdır. Durağanlaştırma denildiğinde ise ilk akla gelen serinin farkının alınmasıdır. Durağan olmayan herhangi bir zaman serisinde d, serisinin durağanlık için kaç kez fark alma işlemine tutulduğunu gösterir ve bütünleşme derecesi (integrated order) olarak bilinir. Gerileme operatörü “B” olmak üzere $Z_t = (1-B)^d X_t$ serisi durağan ise X_t serisine d- inci dereceden bütünleşme serisi denir ve $X_t \sim I(d)$ notasyonu kullanılır. Eğer X_t zaman serisi, $Z_t \sim \text{ARMA}(p,q)$ serisine dönüşüyorsa bütünleşme derecesi d olan ARIMA serisi olarak adlandırılır ve $X_t \sim \text{ARIMA}(p,d,q)$ gösterimi kullanılır.

Örneğin, $e_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ olmak üzere birinci dereceden durağan bir otoregresif zaman serisi

$$(Y_t - \mu) = \alpha (Y_{t-1} - \mu) + e_t \quad (3.5)$$

veya

$$Y_t = \mu(1 - \alpha) + \alpha Y_{t-1} + e_t$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + e_t \quad (3.6)$$

verilmiş olsun. Buradaki Y_t serisi durağan değildir. Çünkü sabit bir trend içermektedir. Fakat böyle bir durumda fark almak gerekmez. Çünkü serinin ortalaması (3.5) de verildiği gibi her iki taraftan çıkartıldığında durağan olmaktadır. Yani (3.6) da verilen seri deterministik bir trend içermekte fakat (3.5) de verilen seri deterministik bir trend içermemektedir. Bu serinin ortalaması μ ve otokovaryans fonksiyonu ve otokorelasyon fonksiyonu daha önceki bölümde bahsedildiği gibi

$$\gamma(h) = \alpha^h \gamma(0)$$

$$\rho(h) = \alpha^h$$

şeklinde. Yukarıdaki (3.6) serisinde $\alpha < 1$ için otokorelasyonlar sıfıra doğru üstel olarak azalmaktadır. Bu azalma bütün durağan zaman serileri için geçerli olmaktadır. Fakat $\alpha = 1$ ise otokorelasyonlar sabit kalmaktadır. Dolayısıyla serinin durağanlığının sınanması için $H_0 : \alpha = 1$ yokluk hipotezinin $H_A : |\alpha| < 1$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi gerekmektedir. Otoregresif zaman serileri gerçekte doğru olmasa bile regresyon modeline benzemektedir. Onun için α parametresinin en küçük kareler tahmin edicisi Y_t nin Y_{t-1} üzerine regresyonu yapılarak veya her iki taraftan Y_{t-1} çıkartılarak model

$$Y_t - Y_{t-1} = \alpha Y_{t-1} - Y_{t-1} + e_t \quad (3.7)$$

veya

$$\nabla Y_t = (\alpha - 1) Y_{t-1} + e_t \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır. Eğer $(\alpha - 1) = \alpha^*$ olarak alınırsa model

$$\nabla Y_t = \alpha^* Y_{t-1} + e_t$$

şekline döndürür. Burada yine ∇Y_t nin Y_{t-1} üzerine regresyonun yapılması ile $H_0 : \alpha^* = 0$ yokluk hipotezi $H_A : \alpha^* < 0$ hipotezine karşı test edilebilir.

Eğer $\alpha = 1$ ise aşağıda (3.9) da verilen

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$

(3.9) zaman serisi durağan değildir ve serinin birinci farkı, $\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ yani $\nabla Y_t = e_t$ birinci fark serisi durağandır. Bu Y_t serisinin durağan olmadığı da aşıkardır. Çünkü Y_t serisi

$$Y_t = Y_0 + \sum_{j=1}^t e_j$$

olarak elde edilir. Başlangıç koşulu $Y_0=0$ alınırsa

$$E(Y_t) = 0$$

$$\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = E(Y_t, Y_{t+h}) = \sigma^2 \min \{t, t+h\}$$

olmaktadır. Beklenen değer t den bağımsız olmasına rağmen $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h})$ fonksiyonu t ye bağlıdır. Ayrıca $\text{Var}(Y_t)$ ve $\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h})$ sabit kalmamakla birlikte bu değer $t \rightarrow \infty$ için sonsuza gitmektedir. Yani seri durağan değildir.

Durağan zaman serileri için yapılan istatistiki sonuçlar durağan olmayan zaman serileri için geçerli değildir. Bunlardan biri, durağan zaman serilerinde öngörüler serinin ortalamasına doğru yaklaşmakla birlikte durağan olmayan (birim köklü) serilerde serinin ortalaması ortadan kaybolmaktadır. Örneğin, (3.6) daki model göz önüne alınırsa $\alpha=1$ alınması durumunda serinin ortalaması olan μ modelden kaybolmaktadır. Öngörülerin ortalamaya yaklaşması mümkün değildir. Ayrıca gösterilebilir ki, (3.6) modeli için $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ gözlemlendiğinde s adım ilerideki öngörüler $E(Y_{n+s} | Y_1, \dots, Y_n)$ koşullu beklenen değeri ile hesaplayabiliriz. Birinci dereceden $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t$ otoregresif zaman serisi göz önüne alınırsa s adım ilerideki öngörüler hesaplamak isteyelim. Önce $X_t = Y_t - \mu$ olsun. Serinin durağan ve durağan olmaması durumunda öngörülerini ayrı ayrı inceleyelim.

- i) Seri durağan olsun. Yani $|\alpha| < 1$ olduğunu kabul edelim. Bir adım ilerideki

öngörü

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= E(X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n) = E(\alpha X_n + e_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n) \\ &= \alpha X_n + E(e_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Fakat e_{n+1} ile $X_1, \dots, X_n$ ler korelasyonsuz(uncorrelated) olduğundan

$$E(e_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n) = E(e_{n+1}) = 0$$

olacaktır. Yani, bir adım ilerisi için öngörü

$$\hat{X}_{n+1} = \alpha X_n$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde devam edilirse s adım ilerisi için öngörü

$$\hat{X}_{n+s} = \alpha^s X_n$$

şeklinde olacaktır. Burada görüldüğü gibi $s \rightarrow \infty$ için $\hat{X}_{n+s} \rightarrow 0$ olmaktadır ve bu da X_t serisinin ortalamasıdır. Ayrıca

$$X_{n+s} - \hat{X}_{n+s} = \sum_{j=0}^{s-1} \alpha^j e_{n+s-j}$$

şeklinde yazılabildiğinden öngörü hatalarının varyansı, $\sigma^2 \sum_{i=0}^{s-1} \alpha^{2i}$ olacaktır ve

$s \rightarrow \infty$ için öngörü hatalarının varyansı da serinin varyansı olan $\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$ ye yakınsar.

- ii) $\alpha=1$ alınması durumunda öngörüler yine yukarıda verilen koşullu beklenen değer ile hesaplanır ve kolayca görüldüğü gibi öngörüler sabit kalmaktadır. Ayrıca, öngörü hatalarının varyansı da sonsuza gitmektedir.

Yukarıdaki durumlar modele bağlı olarak daha yüksek dereceden seriler için de geçerlidir.

Başka bir özellik ise durağan zaman serilerinde parametrelerin en küçük kareler tahmin edicileri asimptotik olarak Normal Dağılıma yakınsamaktadır. Bu durum durağan zaman serilerinin modellenmesinde kullanılmaktadır. Örneğin herhangi bir zaman serisi verildiğinde (örneğin AR(3))

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \alpha_3 X_{t-3} + e_t \quad (3.10)$$

şeklinde verildiğinde bu serinin üçüncü dereceden mi yoksa ikinci dereceden bir otoregresif zaman serisi olduğuna karar verebilmek için $H_0 : \alpha_3 = 0$ yokluk hipotezinin $H_A : \alpha_3 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi gerekmektedir. Eğer (3.10) serisi durağan ise $H_0 : \alpha_3 = 0$ yokluk hipotezini test etmek için

$$t = \frac{\hat{\alpha}_3}{S_{\hat{\alpha}_3}} \quad (3.11)$$

istatistiği kullanılmaktadır. Burada $S_{\hat{\alpha}_3}$, $\hat{\alpha}_3$ tahmin edicisinin standart hatasının tahmin edicisidir. Bu istatistik $H_0 : \alpha_3 = 0$ yokluk hipotezi altında asimptotik olarak bilinen t dağılımına sahiptir. Dolayısıyla istatistiğin aldığı değer tablo değeri ile karşılaştırılarak modelin AR(2) ya da AR(3) olduğuna karar verilebilmektedir. Fakat seri durağan değil ise yine (3.11) istatistiğinin değerinin standart tablo değerleri ile karşılaştırılması hatalı olmaktadır. Çünkü (3.11) istatistiğinin durağan olmayan zaman serileri için asimptotik dağılımı bilinen t dağılımı değildir. Bunun için testler türetilmiştir. Burada pratikte en çok kullanılan Dickey- Fuller test metoduna kısaca değinilecektir.

3.1. Dickey – Fuller Birim Kök Testi

Zaman serilerinde birim kökü veya durağanlığı test etmekte değişik metotlar vardır. Bunlardan pratikte en çok kullanılanı parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisinin birim kök varsayımı altındaki dağılımına dayanan Dickey – Fuller yöntemidir. Dickey – Fuller birim kök testleri zaman serilerinin birim kök

içerip içermediğini sınamak için geliştirilen ilk biçimsel testtir. Dickey – Fuller testleri, süreç birim köke sahipse ve bu durum fark alma işlemi ile ortadan kaldırılabiliyorsa uygulanır.

Birinci dereceden bir otoregresif zaman serisi modeli, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \quad (3.12)$$

şeklinde verilsin. Bu denklemin birinci dereceden farkını almak için eşitliğin her iki tarafından bir dönem önceki değer çıkarıldığında

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + e_t \\ \nabla Y_t &= (\rho - 1)Y_{t-1} + e_t \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilmektedir. Eğer $\alpha = \rho - 1$ olarak tanımlandığında (3.13) eşitliği

$$\nabla Y_t = \alpha Y_{t-1} + e_t$$

olmaktadır. Yukarıdaki (3.12) modeline göre $H_0 : \rho = 1$ hipotezinin test edilmesi yerine $H_0 : \alpha = 0$ hipotezinin test edilmesi yeterlidir. Burada (3.12) de verilen zaman serisi $\rho = 1$ yokluk hipotezi altında durağan değildir. Çünkü $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = \sigma^2 \min(t, t+h)$ olmakta ve kovaryans zamanın bir fonksiyonu olmaktadır. Eğer (3.12.) modeline uygun olarak $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ rasgele değişkenleri gözlemlendiğinde ρ nun en küçük kareler tahmin edicisi

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} \quad (3.14)$$

şeklinde dir. Burada $Y_0 = 0$ başlangıç koşulu altında (3.12) denklemini (3.14.) de yerine yazılırsa

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n (\rho Y_{t-1} + e_t) Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \frac{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} + \frac{\sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} \\
&= \rho + \frac{\sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}
\end{aligned}$$

$$(\hat{\rho} - \rho) = \frac{\sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} \quad (3.15)$$

olmaktadır. ρ nun en küçük kareler tahmin edicisi $\hat{\rho}$ nun tutarlı bir tahmin edici olduğu bilinmektedir. Yani $n \rightarrow \infty$ için $\hat{\rho}_n \xrightarrow{P} \rho$ olmaktadır (Box *et al* 1994).

Eğer (3.12) serisi durağan ise yani $|\rho| < 1$ ise $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho)$ nin limit dağılımı normaldir (Dickey and Fuller 1979). Çünkü

$$\sum_{t=2}^n e_t Y_{t-1} = O_p(\sqrt{n})$$

ve

$$\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2 = O_p(n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t \xrightarrow{D} N(0, 1 - \rho^2)$$

olmaktadır. Yukarıdaki (3.15) değerinin pay ve paydası $\frac{1}{n}$ ile çarpılır ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$\hat{\rho}_n - \rho = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}$$

elde edilmektedir. Buradan da

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}$$

ifadesi sınırlıdır. Yani bu ifade $O_p(1)$ dir. Dolayısıyla,

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} = O_p(1) \quad (3.16)$$

olup $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho)$ istatistiğinin asimptotik dağılımı ortalaması sıfır, varyansı $1-\rho^2$ olan normal dağılımdır. Yani asimptotik dağılım

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{D} N(0, 1-\rho^2), \quad n \rightarrow \infty$$

şeklinde dir.

Eğer (3.12) serisi durağan değil ise ($\rho=1$) (3.15) deki istatistiğin pay ve paydası

$$\sum_{t=2}^n e_t Y_{t-1} = O_p(n) \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{t=2}^n e_t Y_{t-1} = O_p(1)$$

ve

$$\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2 = O_p(n^2) \Rightarrow \frac{1}{n^2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2 = O_p(1)$$

şeklinde olmaktadır. Yine (3.15) değerinin pay ve paydası bu defa $\frac{1}{n^2}$ ile çarpılır

ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_n - \rho &= \frac{\frac{1}{n^2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} \\ &= \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}\end{aligned}$$

haline dönüşmektedir ve

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}$$

ifadesi sınırlıdır. Dolayısıyla,

$$n(\hat{\rho} - 1) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n e_t Y_{t-1}}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2} = O_p(1) \quad (3.17)$$

istatistiği elde edilmektedir. Dickey ve Fuller (1979) da yukarıdaki istatistiğin limit dağılımını

$$n(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{D} \frac{0,5(T^2 - 1)}{\Gamma}$$

şeklinde vermişlerdir. Ayrıca bu dağılım için tablolar oluşturulmuş ve bu tablolar serinin birim köklü olup olmadığının test edilmesinde kullanılmaktadır.

Eğer $|\rho| > 1$ ise $|\rho|^n (\rho^2 - 1)^{-1} (\hat{\rho} - \rho)$ nin limit dağılımı Cauchy'dir (Dickey and Fuller 1979).

Durağan olmayan zaman serileri için $H_0 : \rho = 1$ hipotezinin testinde kullanılan t istatistiğinin dağılımı negatif olarak sola çarpıktır. Bunun sonucu olarak sol

uçtaki kritik değerler, geleneksel Student t dağılımından daha küçük olabilmektedir Bunun dağılımı standart t dağılımı olmadığında limit dağılımı aşağıdaki üç ayrı model için

$$\nabla Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \quad (3.18)$$

$$\nabla Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + e_t \quad (3.19)$$

$$\nabla Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \beta t + e_t \quad (3.20)$$

sırasıyla τ , τ_μ , τ_τ olmaktadır (Enders 1995). Bu istatistikler için kritik değerler birçok zaman serisi kitaplarında verilmektedir (Örneğin bkz. Fuller 1976).

Ortalaması sıfır olarak alınan (3.18) modelinde kullanılan τ istatistiği

$$\hat{\tau} = \frac{(\hat{\rho} - 1) \left(\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2 \right)^{1/2}}{S_e} \quad (3.21)$$

$$S_e^2 = \frac{\sum_{t=2}^n (Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1})^2}{(n-2)}$$

olarak verilmektedir (Dickey and Fuller 1979).

Serinin ortalamasının sıfırdan farklı olduğu durumda yani seri sabit terim içeriyorsa (3.19) modeline göre ρ nun en küçük kareler tahmin edicisi

$$\hat{\rho}_\mu = \frac{\sum_{t=2}^n (Y_{t-1} - \bar{Y}_{(1)}) (Y_t - \bar{Y}_{(0)})}{\sum_{t=2}^n (Y_{t-1} - \bar{Y}_{(1)})^2}$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada $i=0,1$ için

$$\bar{Y}_{(i)} = (n-1)^{-1} \sum_{t=1}^n Y_t$$

şeklindedir. Benzer şekilde $\hat{\tau}_\mu$ istatistiği

$$\hat{\tau}_{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^n (Y_{t-1} - \bar{Y}_{(1)})^2 (\hat{\rho} - 1)}{S_e} \quad (3.22)$$

olmaktadır (Fuller and Dickey 1979). Bunların da limit dağılımları sırasıyla ρ_{μ} ve τ_{μ} olmak üzere tablolar Fuller (1976) da verilmektedir. Benzer tablolar ortalamanın $\alpha + t\beta$ gibi bir trendte sahip olması durumunda yani (3.20) da $\hat{\rho}_{\tau}$, $n(\hat{\rho}_{\tau} - 1)$ ve $\hat{\tau}_{\tau}$ istatistikleri elde edilmiş ve bu istatistiklerin limit dağılımları da ρ_{τ} ve τ_{τ} olarak verilmektedir (Fuller and Dickey 1979). Bu dağılımlara ilişkin tablolar da yine Fuller (1976) da bulunmaktadır.

Tablolar incelendiğinde $\tau_{\tau} < \tau_{\mu} < \tau$ ilişkisi görülmektedir. Burada “<” daha güçlü anlamında kullanılmaktadır. Yani τ , τ_{μ} ye göre ve τ_{μ} de τ_{τ} ye göre daha güçlüdür (Dickey, Bell, Miller 1986).

Serinin durağan olup olmadığını test etmek için yani $H_0 : \rho = 1$ veya $H_0 : \alpha = 0$ hipotezinin test edilmesi istendiğinde hesaplanan $\hat{\tau}$ veya $n(\hat{\rho}_{\tau} - 1)$ istatistiğinin değeri kritik değerlerden küçük ise yokluk hipotezi red edilmektedir. Yani Y_t serisi durağan olmaktadır.

Dickey ve Fuller, katsayıların ortak hipotezlerinin testinde ϕ_1 , ϕ_2 ve ϕ_3 adını verdikleri F istatistiğini geliştirmişlerdir. Bunlara olabilirlik oran testi de denilmektedir. Eğer modeller

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + e_t \quad (3.23)$$

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \beta t + e_t \quad (3.24)$$

şeklinde verilmiş ise (3.23) modelinde $H_0 : \alpha = 0, \rho = 1$ hipotezinin testi için kullanılacak istatistik ϕ_1 istatistiğinin değeri

$$\phi_1 = (2S_{\epsilon\mu}^2)^{-1} [(n-1)\hat{\sigma}_0^2 - (n-3)S_{\epsilon\mu}^2] \quad (3.25)$$

şeklinde hesaplanır. Burada

$$S_{\epsilon\mu}^2 = (n-3)^{-1} \sum_{t=2}^n (Y_t - \hat{\alpha}_\mu - \hat{\rho}_\mu Y_{t-1})^2$$

$$\hat{\rho}_\mu = \left[\sum_{t=2}^n (Y_{t-1} - \bar{y}_{(-1)})^2 \right]^{-1} \sum_{t=2}^n (Y_t - \bar{y}_{(0)}) (Y_{t-1} - \bar{y}_{(-1)})$$

$$\hat{\alpha}_\mu = \bar{y}_{(0)} - \hat{\rho}_\mu \bar{y}_{(-1)}$$

Yukarıdaki (3.24) modeli için $H_0 : \alpha = 0, \beta = 0, \rho = 1$ hipotezinin testi için kullanılacak istatistik ϕ_2 istatistiği

$$\phi_2 = (3S_{\epsilon\tau}^2)^{-1} [(n-1)\hat{\sigma}_0^2 - (n-4)S_{\epsilon\tau}^2] \quad (3.26)$$

ve

$$S_{\epsilon}^2 = (n-4)^{-1} \mathbf{Y}' [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}')]\mathbf{Y}$$

burada $\mathbf{Y}' = (Y_2, Y_3, \dots, Y_n)$ ve $\mathbf{X}$ $(n-1) \times 3$ matrisinin i -inci satırıdır. Yine (3.24) modelinde $H_0: \beta = 0, \rho = 1$ hipotezinin testi için kullanılacak istatistik ϕ_3 istatistiği

$$\phi_3 = (S_{\epsilon\tau}^2)^{-1} [(n-1)\{\hat{\sigma}_0^2 - (\bar{y}_{(0)} - \bar{y}_{(-1)})^2\} - (n-4)S_{\epsilon\tau}^2] \quad (3.27)$$

şeklinde (Dickey ve Fuller 1981).

Ayrıca $\rho = 0$ hipotezi altında (3.23) modelindeki $H_0 : \alpha = 0$ hipotezi için

$$\tau_{\epsilon\mu} = S_{\epsilon\mu}^{-1} \hat{\alpha}_\mu \quad (3.28)$$

istatistiği kullanılır. $\rho = 0$ hipotezi altında (3.24) modelindeki $\alpha = 0$ hipotezinin testinde, $C_{ij} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ nin (i,j) -inci elementi olmak üzere

$$\tau_{\alpha} = (C_{11}S_{\alpha}^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{\alpha}_t \quad (3.29)$$

istatistiği ve yine $\rho = 0$ hipotezi altında (3.24) modelindeki $H_0 : \beta = 0$ hipotezinin testi için de

$$\tau_{\beta} = (C_{22}S_{\beta}^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{\beta}_t \quad (3.30)$$

istatistikleri kullanılmaktadır (Dickey ve Fuller 1981, Enders 1995). Ayrıca $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \tau_{\alpha}, \tau_{\beta}, \tau_{\rho}$ istatistikleri için kritik değerler yine birçok zaman serisi kaynaklarında bulunmaktadır.

Birinci dereceden otoregresif zaman serisi için bulunan τ , τ_{μ} , τ_{ϵ} dağılımları p-inci dereceden otoregresif zaman serileri için de geliştirilmiştir. p-inci dereceden bir otoregresif zaman serisi modeli, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + e_t \quad (3.31)$$

biçiminde verilsin. Bu modele ilk önce $\alpha_p Y_{t-p+1}$ ekleyip çıkarılırsa model

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_{p-2} Y_{t-p+2} + (\alpha_p + \alpha_{p-1}) Y_{t-p+1} - \alpha_p \nabla Y_{t-p+1} + e_t$$

şekline dönüşür. Daha sonra $(\alpha_{p-1} + \alpha_p) Y_{t-p+2}$ ekleyip çıkarılırsa Y_t ,

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_{p-3} Y_{t-p+3} + (\alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} + \alpha_p) Y_{t-p+2} - (\alpha_{p-1} + \alpha_p) \nabla Y_{t-p+2} - \alpha_p \nabla Y_{t-p+1} + e_t$$

olarak elde edilir. Bu modele de $(\alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} + \alpha_p) Y_{t-p+3}$ ekleyip çıkarılırsa

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_{p-4} Y_{t-p+4} + (\alpha_{p-3} + \alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} + \alpha_p) Y_{t-p+3} - (\alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} + \alpha_p) \nabla Y_{t-p+3} - (\alpha_{p-1} + \alpha_p) \nabla Y_{t-p+2} - \alpha_p \nabla Y_{t-p+1} + e_t$$

olmaktadır. Bu işleme (p-1) 'e kadar devam edilirse

$$Y_t = \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \right) Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^p \alpha_j (Y_{t-i+1} - Y_{t-i}) + e_t$$

elde edilmektedir. Burada

$$\gamma = \sum_{i=1}^p \alpha_i \text{ ve } \beta_i = -\sum_{j=1}^p \alpha_j \text{ } i=1,2,\dots,p$$

olarak tanımlanırsa (3.31) denklemi

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \nabla Y_{t-i+1} + e_t \quad (3.32)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Benzer şekilde, ortalamanın sıfırdan farklı olmadığı bir AR(p) süreci ve buna ilaveten zaman trendinin de olduğu bir AR(p) süreci için

$$Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i \nabla Y_{t-i+1} + e_t \quad (3.33)$$

$$Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \theta t + \sum_{i=2}^p \beta_i \nabla Y_{t-i+1} + e_t \quad (3.34)$$

elde edilmektedir (Enders 1995). Modelin (3.34) deki gibi yazılması testlerin yapılması açısından kolaylık sağlamaktadır. AR(p) modeli $\gamma = \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ olduğunda durağan olmayıp birim köke sahiptir. Ayrıca AR(p) modelinin karakteristik denkleminin

$$m^p - \alpha_1 m^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0 \quad (3.33)$$

köklerinden de durağanlık görülebilmektedir. Kökler $|m_i| < 1$ ($i= 1,2,\dots,p$) olduğunda seri durağan olmaktadır. Köklerden bir tanesi bire eşit olduğunda (örneğin, $m_1=1$) , $\gamma = \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ eşittir ve Y_t serisinin birinci dereceden farkı durağandır. Çünkü,

$$\nabla Y_t = \sum_{i=2}^p \beta_i \nabla Y_{t-i+1} + e_t \quad (3.34)$$

olacağından ∇Y_t nin karakteristik denkleminin

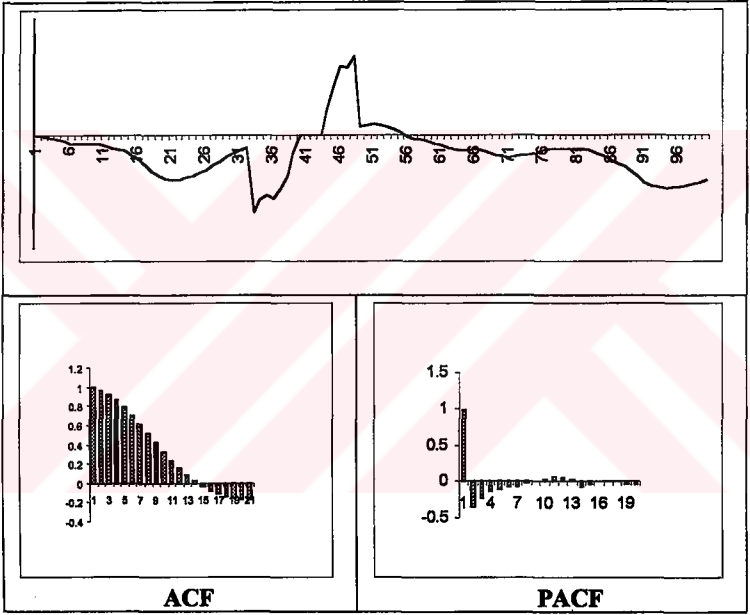
$$m^{p-1} - \sum_{i=2}^p \beta_i m^{p-i} = 0$$

kökleri $|m_i| < 1$ $i=2,3,\dots,p$ olup birinci sıra farkı alınmış ∇Y_t serisi durağandır.

Sadece bir birim kökün varlığı incelenirken, Y_t nin $Y_{t-1}, \nabla Y_{t-1}, \dots, \nabla Y_{t-p+1}$ üzerine regresyonu yapılmakta ve Y_{t-1} in katsayısının bir olup olmadığı yani $H_0 = \gamma = \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ (seri durağan değildir) hipotezi test edilmektedir. Eğer H_0 hipotezi red edilirse seri durağandır fakat red edilemez ise seri birim kök içermektedir.

Örnek 3.1.

İkinci dereceden bir birim köke sahip $Y_t = 1.8Y_{t-1} - 0.8Y_{t-2} + e_t$ modeline uygun olarak üretilen 100 birimlik bir seri ve bu seriye ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların grafikleri Şekil 3.1. de verilmiştir. Bilinmektedir ki, seri durağan değil ise otokorelasyonlardaki azalma yavaştır.



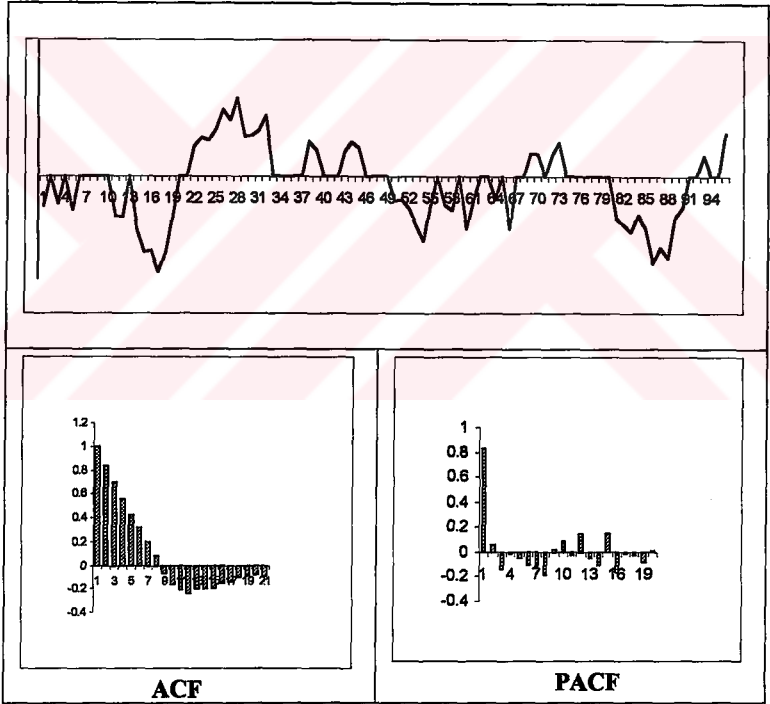
Şekil 3.1. Bir birim köklü AR(2) modeline uygun farkı alınmamış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Otokorelasyon değerlerindeki azalmalara bakıldığında bu serinin sezgisel olarak durağan olmadığı söylenebilir. Bunu test etmek için Y_t nin Y_{t-1} ve ∇Y_{t-1} üzerine regresyonu yapıldığında Y_{t-1} in katsayısı 0.998544 olarak hesaplanmaktadır. H_0 :

$\theta = 1$ hipotezini $H_a : |\theta| < 1$ hipotezine karşı test ederken $\hat{\tau}$ istatistiği, $S(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}$ in standart hatasını göstermek üzere

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\theta} - 1}{s(\hat{\theta})} = \frac{0.998544 - 1}{0.0034} = -0.588$$

şeklinde hesaplanmıştır. Tablo değerine bakıldığında $\alpha = 0.05$ ve $n=100$ için τ tablo değeri -1.95 dir. $-0.588 > -1.95$ olduğundan H_0 hipotezi red edilemez. Yani Y_t serisi birim köklüdür ve birinci dereceden farkı alınarak durağan hale getirilir. Farkı alınmış Y_t serisinin grafiği ile beraber otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlarının grafikleri Şekil 3.2 deki gibidir.



Şekil 3.2. Bir birim köklü AR(2) modeline uygun birinci dereceden farkı alınmış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Grafiklerden görüldüğü gibi otokorelasyondaki azalmalar daha hızlıdır ve buradan serinin durağan olduğu sezgisel olarak söylenebilir. Fakat bu serinin durağan olduğunu görebilmek için $H_0 : \rho = 1$ hipotezinin $H_a : |\rho| < 1$ hipotezine karşı test edilmesi gerekir. Grafiklerden birinci fark serisinin AR(1) olduğu göz önüne alınırsa $n(\hat{\rho} - 1)$ istatistiği değeri

$$n(\hat{\rho} - 1) \cong 100(0.84 - 1) = -16$$

olarak bulunmuştur. Yine $\alpha = 0.05$ ve $n=100$ için $n(\hat{\rho} - 1)$ tablo değeri $-7,9$ dur. $-16 < -7,9$ olduğundan H_0 hipotezi red edilir yani seri durağandır. Sonuç olarak Y_t serisi tek birim köklüdür. Burada dikkat edilirse farkı alınmış seriye tekrar DF testi uygulanmıştır. Bu durum pratikte çok kullanılmaktadır. Fakat farkı alınmış seriye tekrar DF testi uygulandığında ne tür problemlerle karşılaşabileceğimize daha ilerde değineceğiz.

3.1. Genişletilmiş Dickey – Fuller Birim Kök Testi

Verilen herhangi bir AR(p) serisinin AR(1) olarak modellenmesinde hata terimlerinde otokorelasyonlara sebep olacaktır. Dolayısıyla, verilen herhangi bir serinin durağanlığını araştırmak için DF testinin kullanılması başlangıçta geçersiz olacaktır. Çünkü e_t lerin beyaz gürültü süreci olması varsayımı bozulmaktadır. Fakat verilen bir birim köklü herhangi bir $X_t \sim AR(p)$ (veya ARMA(p,q)) serisi için de DF testi uygulanmaktadır. Bu durumda da verilen bir Y_t serisinin

$$\nabla Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \nabla Y_{t-j} + e_t$$

şeklinde yazılması durumunda $H_0 : \{Y_t \text{ serisi birim köklüdür}\}$ yokluk hipotezi $H_0 : \alpha_1 = 0$ hipotezinin test edilmesi ile aynı olacaktır. Bunun için Y_t nin Y_{t-1} , $\nabla Y_{t-1}, \dots, \nabla Y_{t-p}$ üzerine regresyonunun yapılması durumunda Y_{t-1} in katsayısı hesaplanır ve

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{a}_1}{S_{\hat{a}_1}}$$

test istatistiği (veya τ_μ, τ_τ) kullanılır. Kritik değerler DF testinde kullanılan değerler ile aynı olacaktır.

3.3. Birden Çok Birim Köklü Seriler

Süreçteki hata teriminin otokorelasyon içerip içermemesine göre kullanılan DF ve ADF testlerinin uygulama kolaylığının yanında bazı dezavantajları da mevcuttur. Bunlardan birisi mevcut birim köklerin, sıfır hipotezi altında ifade edilenden daha fazla olduğu durumlarda, testin önem düzeyi, seçilen α önem düzeyinden büyük olacaktır (Dickey and Pantula 1987).

Bazı zaman serileri birden fazla birim kök içermektedir. Burada iki tane birim kök üzerinde durulacaktır. Bu durumda parametreler için hesaplanan asimptotik dağılımlar aynı olmayabilir.

$$(Y_t - \mu) = \alpha_1(Y_{t-1} - \mu) + \alpha_2(Y_{t-2} - \mu) + e_t$$

şeklinde verilen AR(2) modeli için trendin durumuna göre üç durum aşağıdaki gibi

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + e_t \quad (3.35)$$

$$Y_t = \mu_2 + \alpha_2 Y_{t-1} + \beta_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + e_t \quad (3.36)$$

$$Y_t = \mu_3 + \theta_3 t + \alpha_3 Y_{t-1} + \beta_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + e_t \quad (3.37)$$

biçiminde verilmiş olsun. Eğer karakteristik denkleminin kökleri $m_1=1$ ve $|m_2| < 1$ ve eğer $\mu_2 \neq 0$ ise (3.36) modeli doğrusal zaman trendi ve sabit terimi içerdiği daha önce belirtilmişti. Fakat $m_1 = m_2 = 1$ ve $\mu_2 \neq 0$ ise (3.37) modeli kareli trend içermektedir.

Durağan olmayan zaman serilerini durağan hale getirmenin yollarından birinin fark alma işlemi olduğu daha önce belirtilmişti ve serinin bir veya birkaç kez

farkı alınarak zaman serisi durağan hale getirilmekte idi. Eğer durağan bir zaman serisinin farkı alınırsa veya durağan olmayan zaman serisinin gerektiğinden fazla farkı alınırsa tekrar durağan bir zaman serisi elde edilmektedir. Fakat bu birçok istatistiksel problemlere neden olmaktadır. Örneğin durağan bir zaman serisinin farkının alınması varyansının büyümesine sebep olmaktadır. Gereğinden fazla fark alma işlemi yapılan regresyonun katsayısı olarak hesaplanan DF test istatistiğinin değerini pozitif veya negatif yönde çok büyütecektir (Charemza and Deadman 1997). Dolayısıyla serinin kaç kez farkının alınmasının bilinmesi gerekmektedir. Durağan olmayan zaman serisinin fark alma derecesine ilgili zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonuna bakılarak sezgisel olarak karar verilebilmektedir. Durağan olmayan zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonu yavaş bir şekilde üstel olarak azalacaktır. Bu serinin farkı alındıktan sonraki otokorelasyon fonksiyonu hala yavaş bir şekilde azalıyorsa bu seri de bir birim kök daha vardır diye düşünülebilir. Ayrıca Dickey ve Pantula (1987) doğru fark alma derecesini geliştirdikleri test istatistikleri ile belirlemektedirler. Elde ettikleri test istatistiklerini daha iyi anlayabilmek için üçüncü dereceden bir AR serisi üzerinde açıklamaya çalışalım. Bu serinin karakteristik denkleminin doğal olarak 3 tane kökü olacaktır.

Üçüncü dereceden bir AR zaman serisi, $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olmak üzere

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + e_t \quad (3.38)$$

biçiminde verilsin. Bu serinin karakteristik denklemi $m^3 - \alpha_1 m^2 - \alpha_2 m - \alpha_3 = 0$ şeklindedir ve bu denklemin karakteristik köklerinin $1 \geq |m_1| \geq |m_2| \geq |m_3|$ olduğu varsayımı altında aşağıdaki dört hipotez kurulabilir.

i) $H_0: |m_1| < 1$

AR(3) serisi durağandır.

ii) $H_1: m_1 = 1, |m_2| < 1$

AR(3) serisi bir birim köke sahiptir.

$$\text{iii)} \quad H_2 : m_1 = m_2 = 1, |m_3| < 1$$

AR(3) serisi iki birim köke sahiptir.

$$\text{iv)} \quad H_3 : m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

AR(3) serisi üç birim köke sahiptir.

Bu hipotezler p- inci dereceden bir $\{Y_t\}$ serisi için genelleştirildiğinde H_d hipotezinin doğruluğu altında $\{Y_t\}$ sersisi d-kez fark alındığında durağan olacaktır. Z_t , W_t ve X_t sırasıyla Y_t serisinin birinci, ikinci ve üçüncü farkları olmak üzere,

$$(1-B) = \nabla Y_t = Z_t = Y_t - Y_{t-1} \quad (3.39)$$

$$(1-B)^2 = \nabla^2 Y_t = W_t = Z_t - Z_{t-1} \quad (3.40)$$

$$(1-B)^3 = \nabla^3 Y_t = X_t = W_t - W_{t-1} \quad (3.41)$$

dönüşümü yapılırsa

$$X_t = \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Z_{t-1} + \theta_3 W_{t-1} + e_t \quad (3.42)$$

elde edilir. Burada

$$\theta_1 = -(1-m_1)(1-m_2)(1-m_3)$$

$$\theta_2 = -2\theta_1 - (1-m_1)(1-m_2) - (1-m_2)(1-m_3) - (1-m_3)(1-m_1)$$

$$\theta_3 = m_1 m_2 m_3 - 1$$

olmak üzere

$$\alpha_1 = 3 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$\alpha_2 = -(3 + \theta_2 + 2\theta_3)$$

ve

$$\alpha_3 = 1 + \theta_3$$

bulunmaktadır. Yukarıda verilen dört hipotez θ lar cinsinden yazıldığında

$$H_3 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$$

$$H_2 : \theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 < 0$$

$$H_1 : \theta_1 = 0, \theta_2 < 0, \theta_3 < 0$$

$$H_0 : \theta_1 < 0, \theta_2 < 0, \theta_3 < 0$$

olmaktadır.

Burada X_t nin Y_{t-1} , Z_{t-1} ve W_{t-1} üzerine regresyonu yapıldığında $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ ve $\hat{\theta}_3$ en küçük kareler tahmin edicileri elde edilmektedir. Tek birim kökün varlığının H_1 hipotez testinde hesaplanan t istatistiğinin değeri daha önce bahsedildiği gibi standart Dickey ve Fuller tabloları ile karşılaştırılır. Burada eğer t istatistiğinin değeri τ_α kritik değerinden küçük ise H_1 hipotezi H_0 hipotezine karşı red edilir. Eğer seride iki birim kök varsa, yani H_2 hipotezi (iki birim kökün varsayımı) H_1 alternatif hipotezine karşı test edilmesi gerekir. Bu hipotezin test edilmesi için Hazsa ve Fuller (1979) önerdiği F istatistiği kullanılabilir. Eğer F istatistiğinin değeri tablo değerinden büyük ise H_2 hipotezi red edilir. Bunu için tablolar Hazsa ve Fuller (1979) da bulunmaktadır. Fakat aynı hipotez, yine Dickey – Fuller metoduna benzer şekilde Dickey ve Pantula (1987) nin önerdiği ardışık (sequential) birim kök test metodu da kullanılabilir.

İki birim köklü seride Dickey – Fuller kriteri H_1 hipotezini α dan daha büyük bir olasılıkla red edecektir. Yani, gerçekte iki birim kök mevcut iken, serinin durağan olduğuna bir birim köklü olmasından daha büyük bir olasılıkla karar verilir. Böylece birden fazla birim kök için test yapmadan önce bir birim kök testinin yapılması gereksizdir. Yani birden fazla birim kökün varlığının olasılığı azaltılmadan tek birim kök için test yapılması gerekmektedir. Buna benzer bir sonucu H_3 hipotezi altında t ve F istatistiklerinin sonuçlarında gözlemlemiştir (Dickey and Pantula 1987). Bunun üzerine her bir $H_i : \theta_1 = \dots = \theta_i = 0$ ($i=0,1,2,3$) hipotezinde kullanılacak F istatistikleri için asimptotik dağılımlar türetmiştir (Dickey and Pantula 1987). Üçüncü dereceden bir otoregresif zaman serisinde $H_i : \theta_1 = \dots = \theta_i = 0$ testi için F istatistiği $F_{i,n}(3)$ şeklinde gösterilirse

$$i) \quad F_{3,n}(3) > F_{3,n}(3, \alpha)$$

ise $H_3 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ hipotezi red edilir ve ikinci adıma geçilir. Aksi takdirde hipotez red edilemez yani seri üç birim köke sahiptir denir. Eğer H_3 red edilir ise,

ii) $F_{3,n}(3) > F_{3,n}(3, \alpha)$ ve $F_{2,n}(3) > F_{2,n}(2, \alpha)$

ise $H_2 : \theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 < 0$ hipotezi red edilir ve üçüncü adıma geçilir. Aksi takdirde hipotez red edilemez yani seri iki birim köke sahiptir denir ve H_2 red edilir ise,

iii) $F_{i,n}(3) > F_{i,n}(i, \alpha) \quad i = 1, 2, 3$

ise $H_1 : \theta_1 = 0, \theta_2 < 0, \theta_3 < 0$ hipotezi $H_0 : \theta_1 < 0, \theta_2 < 0, \theta_3 < 0$ hipotezine karşı red edilir yani seri durağandır. Aksi takdirde hipotez red edilemez yani seri bir birim köke sahiptir sonucuna varılır (Pantula and Dickey 1987).

Bu testler için $F_{i,n}(i, \alpha) \quad i = 1, 2, 3$ tablo değerleri bulunmaktadır (Dickey and Pantula 1987). Burada F istatistikleri, X_t nin Y_{t-1}, Z_{t-1} ve W_{t-1} üzerine yapılan regresyonunda ardışık kareler toplamı kullanılarak hesaplanmaktadır. H_3 hipotezinin H_2 hipotezine karşı, H_2 nin H_1 hipotezine karşı ve H_1 in H_0 hipotezine karşı testinde F istatistiğinin hesabı alternatif hipotezlerin çift yönlü olmasına dayanmaktadır. Fakat tek yönlü alternatif hipotezler kullanılarak testi gücü artırılabilir. X_t nin Y_{t-1}, Z_{t-1} ve W_{t-1} üzerine regresyonunda standart t istatistiği kullanılması uygun olmamaktadır. Dolayısıyla pseudo t istatistiğine dayanan ardışık test prosedürü önerilmektedir. Pseudo t istatistiği adı verilen $t_{i,n}(p)$ değeri $(1-B)^p Y_t$ nin $(1-B)^{i-1} Y_{t-1}, (1-B)^i Y_{t-1}, \dots, (1-B)^{p-1} Y_{t-1}$ üzerine regresyonu yapıldığında $(1-B)^{i-1} Y_{t-1}$ nin katsayısından elde edilmektedir. H_i hipotezinin H_{i-1} hipotezine karşı testinde $\theta_1 = \dots = \theta_{i-1} = 0$ sınırlandırması yapıldığından t istatistiğinin kullanımı uygun hale gelmektedir (Dickey and Pantula 1987).

Model (3.42) da e_i ortalaması 0, varyansı σ^2 olan rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere $\theta_i=0$ hipotezinin testinde $t_{i,n}(3)$ $i=1,2,3$ kullanılmaktadır. H_d hipotezi altında

$$t_{i,n}(3) \xrightarrow{D} t_i(d) \quad i \leq d$$

ve c pozitif sabit olmak üzere

$$n^{-1/2} t_{i,n}(d) \xrightarrow{P} c \theta_i \quad i > d$$

Dolayısıyla $t_{i,n}(3)$ $i=1,2,3$ asimptotik dağılımları birim kök sayısına bağlı olarak farklılık göstermektedir (Dickey and Pantula 1987).

İlk önce H_3 hipotezi daha sonra H_2 hipotezi ve son olarak H_1 hipotezi testi için ardışık test yöntemine dayanan t kritik değerlerinin kullanılamayacağını ve bunun yerine DF deki τ istatistiklerinin kullanılabileceği Dickey and Pantula (1987) de gösterilmiştir.

H_d hipotezi altında θ_{d+1} katsayısı negatif ise t istatistiği eksi sonsuza yaklaşmaktadır.

$$t_{d+1,n}(3) \longrightarrow -\infty$$

Karakteristik denklemin köklerinin sayısı “ i ”, birim kök sayısı “ d ” olmak üzere, bazı $i > d$ için $\theta_i=0$ olmasına rağmen $t_{i,n}(3)$ istatistiği standart normal dağılıma yaklaşmaktadır (Dickey and Pantula 1987).

$$t_{i,n}(3) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Eğer süreç durağan ise t istatistiği artı sonsuza yaklaşmaktadır.

$$t_{2,n}(3) \longrightarrow \infty$$

Yukarıda verilen üç hipotez için ardışık test metodunun ilk adımında X_t nin W_{t-1} üzerine regresyonu sonucu $t_{3,n}(3)$ istatistiği elde edilir ve

$$i) \quad t_{3,n}(3) \leq \hat{\tau}_{n,\alpha}$$

ise üç birim kök iddiası olan H_3 hipotezi red edilir ve ikinci adıma geçilir.

İkinci adımda X_t nin Z_{t-1} ve W_{t-1} üzerine regresyonu sonucunda sırasıyla $t_{2,n}(3)$ ve $t_{3,n}(3)$ elde edilir ve

$$\text{ii)} \quad t_{3,n}(3) \leq \hat{\tau}_{n,\alpha} \text{ ve } t_{2,n}(3) \leq \hat{\tau}_{n,\alpha}$$

ise iki birim kök iddiası olan H_2 hipotezi red edilir ve üçüncü adıma geçilir.

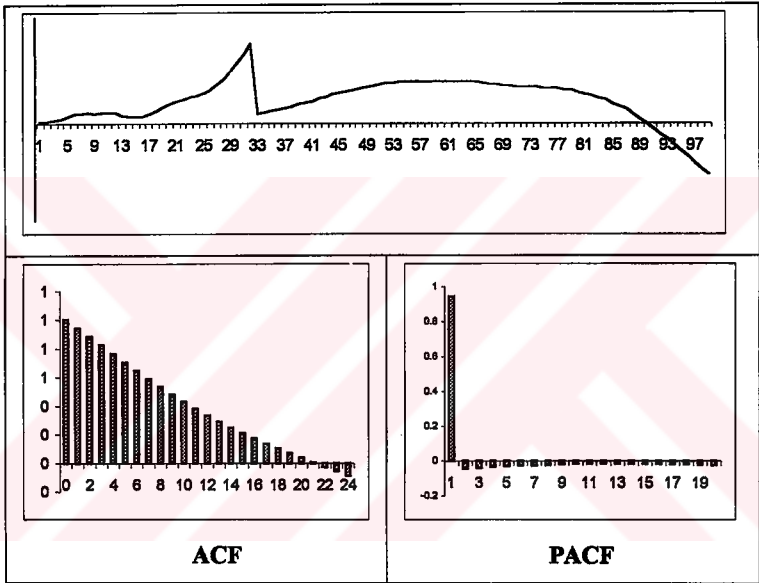
Üçüncü adımda X_t nin Y_{t-1} , Z_{t-1} ve W_{t-1} üzerine regresyonu sonucu $t_{i,n}(3)$ $i=1,2,3$ elde edilir ve

$$\text{iii)} \quad t_{i,n}(3) \leq \hat{\tau}_{n,\alpha} \quad i=1,2,3$$

ise birim kök yoktur hipotezine karşı kurulan bir birim kök H_1 hipotezi red edilir (Dickey and Pantula 1987).

Örnek 3.2.

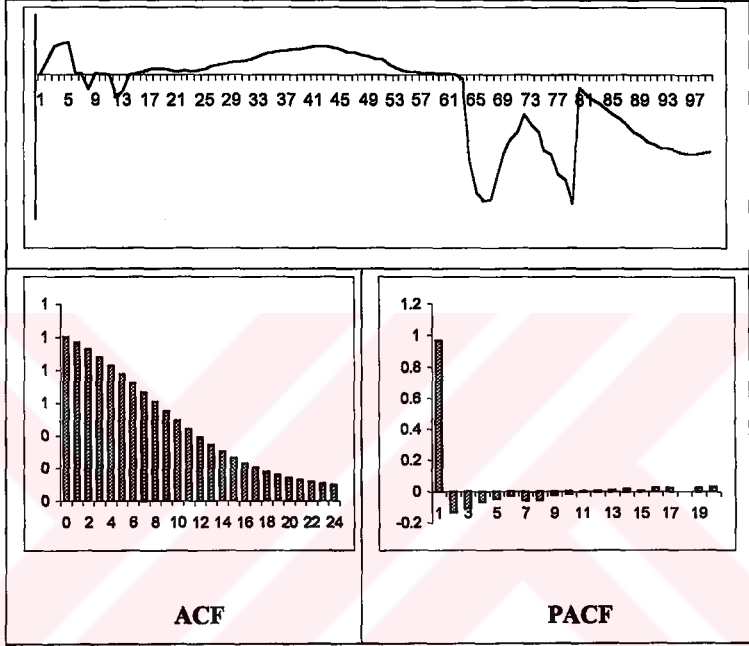
Üçüncü dereceden iki birim köke sahip $Y_t = 2.8Y_{t-1} - 2.6Y_{t-2} + 0.8Y_{t-3} + e_t$ modeline uygun olarak üretilen 100 birimlik bir seri ve bu seriye ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların grafikleri Şekil 3.3. de verilmiştir.



Şekil 3.3. İki birim köklü AR(3) modeline uygun farkı alınmamış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

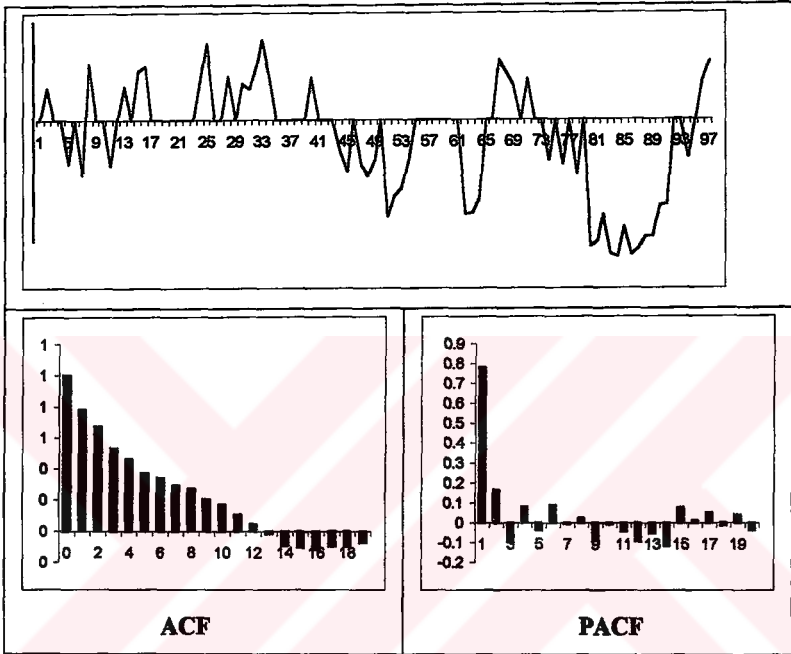
Serinin otokorelasyonlarındaki azalmalar oldukça yavaş olduğundan serinin sezgisel olarak durağan olmadığı söylenebilir. Kısmi otokorelasyonların grafiğine bakıldığında birinci gecikmeden sonra hızla sifıra yaklaşmaktadır. Bu da ilk bakışta modelin birinci derceden otoregresif zaman serisi düşünülebilir. Fakat seri birim köklü AR(1) ise birinci farkı beyaz gürültü süreci olması

gerekmektedir. Yalnız Şekil 3.4. de verilen farkı alınmış serinin grafiklerine bakıldığında serinin AR(1) olmadığı söylenebilir.



Şekil 3.4. İki birim köklü AR(3) modeline uygun birinci dereceden farkı alınmış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Birinci dereceden farkı alınan Y_t serisinin otokorelasyonlarındaki azalma oranları yine yavaş olduğundan bu serinin de sezgisel olarak durağan olmadığına karar verilerek bir derece daha farkı alındığında, ikinci dereceden farkı alınan Y_t serisinin Şekil 3.5 den de görüleceği gibi durağan olabileceği kararına varılabilir.



Şekil 3.5. İki birim köklü AR(3) modeline uygun ikinci dereceden farkı alınmış seri ve bu serinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu

İkinci dereceden farkı alınan bu serinin otokorelasyonlarındaki azalmalar hızlanmakta ve sinüs dalgalanması göstermektedir. Dikkat edilirse bu serinin $m^3 - 2.8m^2 + 2.6m - 0.8 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ ve $m_3 = 0.8$ olmaktadır.

Bu seriye ADF uygulandığında yani ∇Y_t nin Y_{t-1} , ∇Y_{t-1} ve ∇Y_{t-2} üzerine regresyonu yapıldığında (gecikme uzunluğu AIC ile belirlenmiştir) elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

$$\nabla Y_t = -0.001054 Y_{t-1} + 1.739852 \nabla Y_{t-1} - 0.734878 \nabla Y_{t-2}$$

test istatistiği : -2.246 22.707 -9.119

Burada Y_{t-1} 'in katsayısından elde edilen $\hat{\tau}$ istatistiği -2.246 , Dickey- Fuller tablosundaki $\tau_{100,0.05} = -1.95$ değerinden küçüktür. Dolayısıyla bir birim kökün varlığını iddia eden H_1 hipotezi, serinin durağan olduğunu iddia eden H_0 alternatif hipotezine karşı red edilmektedir. Yani serinin durağan olduğu sonucuna varılmaktadır ki aslında Y_t serisi iki birim köklü durağan olmayan bir zaman serisidir. Dolayısıyla bu seriye Dickey ve Pantula' nın önermiş oldukları ardışık test yöntemi aşağıdaki gibi uygulanmaktadır.

1.Adım:

H_3 : Üç birim kök vardır. Yani $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$

H_2 : İki birim kök vardır. Yani $\theta_1=\theta_2=0, \theta_3<0$

Burada $p = 3$ karakteristik kök vardır ve H_3 hipotezi altında $i = 3$ birim kök vardır. $(1-B)^p Y_t$ nin $(1-B)^{i-1} Y_{t-1}$ üzerine , yani

$$X_t = (1-B)^3 Y_t = Y_t - 3Y_{t-1} + 3Y_{t-2} - Y_{t-3}$$

$$W_{t-1} = (1-B)^{3-1} Y_{t-1} = Y_{t-1} - 2Y_{t-2} + Y_{t-3}$$

olmak üzere , X_t nin W_{t-1} üzerine regresyonu yapıldığında $\hat{\theta}_3$ en küçük kareler tahmin edicisi $\hat{\theta}_3 = -0.18$ ve standart hatası $S_{\hat{\theta}_3} = 0.059$ olarak elde edilmektedir.

Buradan

$$t_{3,100}^*(3) = \frac{-0.18 - 0}{0.059} = -3.049$$

hesaplanmaktadır. $\alpha = 0.05$ ve $n=100$ iken τ tablo değeri -1.95 dir. $-3.049 < -1.95$ olduğundan H_3 hipotezi H_2 alternatifine karşı red edilir ve ikinci adıma geçilir. (Yani üç birim kök, iki birim kök alternatifine göre red edilir.)

2.Adım:

Yukarıda serinin üç birim köklü olmadığını (iki birim kök alternatifine karşı) söylemiştik. Şimdi iki birim kök içerip içermediğini test edelim. Bunu için

H_2 : İki birim kök vardır. Yani $\theta_1=\theta_2=0, \theta_3<0$

H_1 : Bir birim kök vardır. Yani $\theta_1=0, \theta_2<0, \theta_3<0$

hipotezlerini yazalım. Burada $p = 3$ karakteristik kök vardır ve H_2 hipotezi altında $i = 2$ birim kök vardır. $(1-B)^p Y_t$ nin $(1-B)^{i-1}$ ve $Y_{t-1} (1-B)^i Y_{t-1}$ üzerine , yani

$$Z_{t-1} = (1-B) Y_{t-1} = Y_{t-1} - Y_{t-2}$$

$$W_{t-1} = (1-B)^{3-1} Y_{t-1} = Y_{t-1} - 2Y_{t-2} + Y_{t-3}$$

$$X_t = (1-B)^3 Y_t = Y_t - 3Y_{t-1} + 3Y_{t-2} - Y_{t-3}$$

olmak üzere X_t nin Z_{t-1} ve W_{t-1} üzerine regresyonu yapıldığında $\hat{\theta}_2$ ve $\hat{\theta}_3$ en küçük kareler tahmin edicisi $\hat{\theta}_2 = -0.002$ ve $\hat{\theta}_3 = -0.168$ standart hataları $S_{\hat{\theta}_2} = 0.006$ ve $S_{\hat{\theta}_3} = 0.069$ olarak elde dilmektedir. Buradan $\hat{\theta}_2$ için t istatistiği

$$t_{2,100}^*(3) = \frac{-0.002 - 0}{0.006} = -0.38$$

hesaplanmaktadır. $\alpha = 0.05$ ve $n=100$ iken τ tablo değeri -1.95 dir. $-0.38 > -1.95$ olduğundan H_2 hipotezi H_1 alternatifine karşı red edilemez yani Y_t serisi iki birim köke sahiptir .

Eğer üçüncü adıma devam edilirse hipotezler

H_1 : Bir birim kök vardır. Yani $\theta_1=0, \theta_2<0, \theta_3<0$

H_0 : Seri durağandır. Yani $\theta_1<0, \theta_2<0, \theta_3<0$

şeklinde olacaktır. Bu sınama için X_t nin Y_{t-1} , Z_{t-1} ve W_{t-1} üzerine regresyonu yapıldığında $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ ve $\hat{\theta}_3$ en küçük kareler tahmin edicileri $\hat{\theta}_1 = -0.001$, $\hat{\theta}_2 = 0.0049$, $\hat{\theta}_3 = -0.265$ ve standart hataları $S_{\hat{\theta}_1} = 0.0004$, $S_{\hat{\theta}_2} = 0.0064$, $S_{\hat{\theta}_3} = 0.080$ olarak hesaplanmaktadır. Buradan $\hat{\theta}_1$ için t istatistiği

$$t^* = \frac{-0.001 - 0}{0.0004} = -2.246$$

hesaplanmaktadır. $\alpha = 0.05$ ve $n=100$ iken τ tablo değeri -1.95 dir. $-2.246 < -1.95$ olduğundan H_1 hipotezi H_0 alternatifine karşı red edilmektedir. Yani Y_t serisinin durağan olduğu kabul edilmektedir. Herhangi bir zaman serisinin iki birim köklü olma ihtimali azaltılmadan bir birim kök testi yapılmamalıdır. Aksi takdirde iki birim köklü bir zaman serisi durağan bulunabilmektedir.

4. PARA ARZI SERİSİNE ARDIŞIK TESTİN UYGULANMASI

Bu bölümde, Merkez Bankası verilerinden derlenen 1950 - 1999 dönemleri arası yıllık para arzı verilerinin durağan olup olmadığı, durağan değil ise nasıl durağan hale getirileceği incelenecektir.

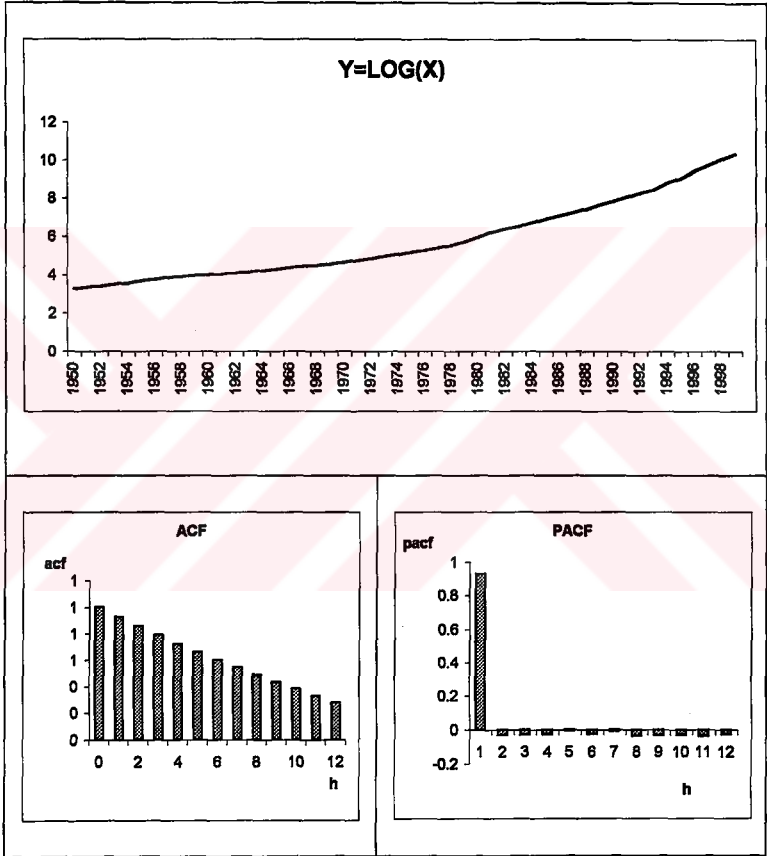
Analizler yapılırken, bazı istatistiki ve iktisadi varsayımların sağlanabilmesi için verilerin logaritmaları alınmıştır. Yorumlar yapılırken bunun göz önüne alınması gerekir.

Para arzının modellenmesi için çeşitli modeller denenmiş ve kriter olarak Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ile Schwartz Bayesian Kriteri (SBC) istatistiklerinin aldıkları değerler göz önüne alınmıştır. En küçük AIC ve/veya SBC kriterine sahip olan modelin en uygun model olması bilgisine dayanarak para arzı için üçüncü dereceden otoregresif modelin uygun olduğu görülmüştür. Aşağıda Çizelge 4.1. de çeşitli modeller ve bunlara karşılık gelen AIC ve SBC istatistiklerinin aldıkları değerler verilmiştir.

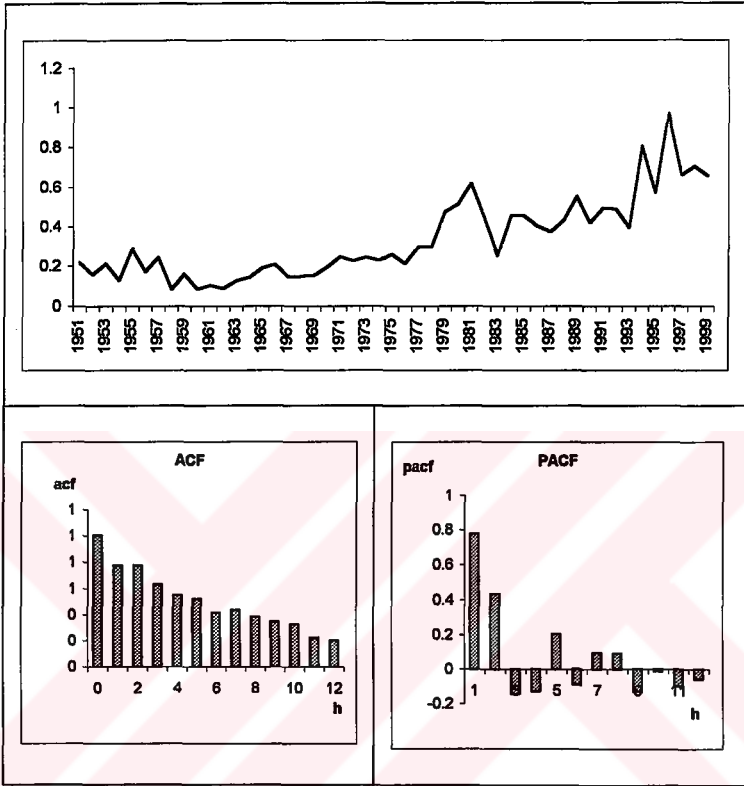
Çizelge 4.1. Y_t serisi için çeşitli modeller ve AIC, SBC istatistiklerinin aldığı değerler

Model	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(3,1)	ARMA(3,2)	ARMA(3,3)
AIC	91.27	92.32	68.18	89.85	113.57	114.66
SBC	95.09	88.06	75.82	99.41	125.04	128.04

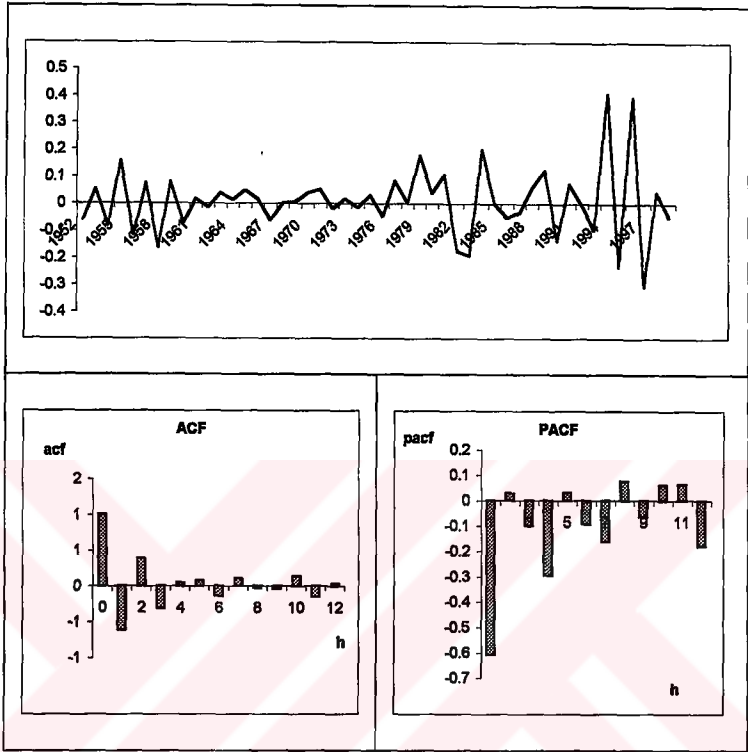
Para arzına ait serinin grafiği ile otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlarının grafikleri Şekil 4.1 de, birinci farklar ile bunlara ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonların grafikleri Şekil 4.2. de ve ikinci farklarına ait grafikler de Şekil 4.3. de verilmiştir.



Şekil 4.1. Logaritması alınmış M2 para arzı ve bu verilerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları grafiği



Şekil 4.2. Birinci dereceden farkı alınmış M2 para arzı ve bu verilerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları grafiği



Şekil 4.3. İkinci dereceden farkı alınmış M2 para arzı ve bu verilerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonları grafiği

Para arzı için μ serinin ortalaması olmak üzere üçüncü dereceden otoregresif zaman serisi modeli

$$(Y_t - \mu) = \alpha_1(Y_{t-1} - \mu) + \alpha_2(Y_{t-2} - \mu) + \alpha_3(Y_{t-3} - \mu) + e_t$$

şeklinde verilmiş olsun. Buna göre parametrelerin tahmin değerleri $\hat{\alpha}_1 = 1.1296 \approx 1.13$, $\hat{\alpha}_2 = 0.012634 \approx 0.01$ ve $\hat{\alpha}_3 = -0.14225 \approx -0.14$ olarak elde edilmiştir. Para arzının ortalaması ise $\hat{\mu} = 9.73$ olarak tahmin edilmiştir. Bu değerlere göre para arzı için bir model

$$(Y_t - 9.73) \cong 1.13(Y_{t-1} - 9.73) + 0.01(Y_{t-2} - 9.73) - 0.14(Y_{t-3} - 9.73) \quad (4.1)$$

olarak verilebilir. Bu modele karşılık gelen $m^3 - 1.13m^2 - 0.01m + 0.14 = 0$ denklemi için karakteristik denklemi köklerinden bir tanesi birdir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1.13 + 0.01 - 0.14 = 1$$

olduğundan serinin birim köklü olduğu söylenebilir. Dolayısıyla (4.1) modelindeki ortalamalar birbirini götürmekte ve para arzı modeli

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} - \alpha_3 Y_{t-3} + e_t$$

şeklinde olmaktadır.

Bu serinin birinci dereceden farkı alındığında elde edilen ∇Y_t serisi ikinci dereceden otoregresif model olarak seçilmiştir. Farkı alınmış ∇Y_t için uygun modeller ve AIC, SBC kriterleri aşağıdaki Çizelge 4.2 de verilmiştir.

Çizelge 4.2. ∇Y_t serisi için çeşitli modeller ve AIC, SBC istatistiklerinin aldığı değerler

Model	AR(1)	AR(2)	AR(3)	ARMA(1,1)	ARMA(1,2)	ARMA(2,1)
AIC	-61.74	-78.21	-76.35	-73.61	-72.81	-76.38
SBC	-57.96	-72.53	-68.78	-67.94	-65.24	-68.82

Birinci farkı alınmış seri olan ∇Y_t modelinin katsayılar $\hat{\alpha}_1 = 0.40159 \approx 0.40$ ve $\hat{\alpha}_2 = 0.59841 \approx 0.60$ olarak tahmin edilmiştir ve

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = 0.40 + 0.60 = 1$$

olduğundan ∇Y_t serisi de birim köklüdür. Y_t serisinin ikinci sıra farkı alındığında elde edilen $\nabla^2 Y_t$ serisinin yine AIC ve SBC istatistiklerinin aldığı değerlere göre birinci dereceden otoregresif modeline uygun olduğu görülmüştür.

İkinci farkı olan $\nabla^2 Y_t$ modelinin katsayısı $\hat{\alpha}_1 = 0.60952 \approx 0.61$ olarak elde edilmiştir. Bu da birden farklı olduğu için ikinci sıra farkı alınan serinin birim kökü yoktur.

Para arzının iki birim köklü olduğu söylenebilir. Bu sezgisel kararı ardışık test metodunu uygulayarak doğrulamak gerekmektedir. Bunun için, üçüncü bölümde bahsedildiği gibi Z_t , W_t ve X_t sırasıyla Y_t serisinin birinci, ikinci ve üçüncü farkları olarak

$$Z_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$W_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

$$X_t = Y_t - 3Y_{t-1} + 3Y_{t-2} - Y_{t-3}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ardışık test ikinci adımda durmuş dolayısıyla test iki adımda gerçekleştirilmiştir. Bu adımlar aşağıda özetlenmiştir.

1.Adım:

H_3 : Üç birim kök vardır. Yani $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$

H_2 : İki birim kök vardır. Yani $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\theta_3 \neq 0$