ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SIRALI CECH KAPANIŞ UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

İrem EROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

İrem EROĞLU tarafından hazırlanan **"Sıralı Cech Kapanış Uzaylarının Bazı Özellikleri"** adlı tez çalışması 25.09.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atilla YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

25.09.2017

İrem EROĞLU

ÖZET

Doktora Tezi

SIRALI CECH KAPANIŞ UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

İrem EROĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışmanı: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde; kapanış uzayları ve sıralı kümeler ile ilgili bazı temel kavramlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; sıralı kapanış uzayı tanımı yapılarak, sıralı topolojik uzaylardaki bazı kavramlar sıralı kapanış uzaylarına taşınmıştır. Sıralı kapanış uzaylarında ayırma aksiyomları ve bağlantılılık kavramları çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde; sıralı kapanış uzayları arasında tanımlı fonksiyonlar kümesi üzerinde bazı topolojiler tanımlanmış ve sıralı yarı düzgünleştirme kavramı tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde; i-sürekli, d-sürekli fonksiyon kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca i-sürekli, d-sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlanabilecek kapanış operatörleri için bir sınıflandırma yapılmıştır.

Altıncı bölümde; sıralı kapanış uzaylarına ilişkin bazı sıralı hiperuzay topolojileri inşa edilmiştir ve hiperuzay topolojilerinden en bilinenlerinden biri olan Vietoris topolojisi incelenmiştir.

Son bölümde ise tez ile ilgili genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Eylül 2017, 87 sayfa
Anahtar Kelimeler : Kapanış uzayı, sıralı topolojik uzay, sıralı hiperuzay, Čech kapanış operatörü, i-sürekli fonksiyon, d-sürekli fonksiyon, uygun kapanış operatörü, kabul edilebilir kapanış operatörü

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME PROPERTIES OF ORDERED CECH CLOSURE SPACES

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Superviser : Prof. Dr. Erdal GÜNER

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter; some basic concepts about closure spaces and ordered sets are recalled.

In chapter three; by defining the ordered closure space, some concepts in topological ordered spaces are carried to the concepts of ordered closure space. Separation axioms and the notion of connectedness in ordered closure spaces are studied.

In chapter four; some topologies on the set of functions which are defined between the ordered closure spaces are defined and the concept of ordered semi uniformizability is introduced.

In chapter five; the notions of i–continuous and d-continuous function are defined. Also, a characterization for some possible closure operators on the set of i-continuous, d-continuous functions is made.

In chapter six; some ordered hyperspace topologies of ordered closure spaces are constructed and Vietoris topology which is the most familiar hyperspace topology is investigated.

The last chapter conducts a general assessment.

September 2017, 87 pages

Key Words : Closure space, ordered topological space, ordered hyperspace**,** Čech closure operator, i-continuous function, d-continuous function, admissible closure operator, proper closure

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada benden yardımlarını esirgemeyen ve bana yol gösteren danışmanım Sayın Prof. Dr. Erdal GÜNER (Ankara Üniversitesi Matemetik Anabilim Dalı)'e, araştırmalarım aşamasında bana her zaman yardımcı olan ve zaman ayıran değerli hocam Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, değerli hocam Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, doktora eğitimim boyunca 2211-A Yurt içi Genel Doktora Bursu ile sağladığı maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK' a, hayatımın her aşamasında her zaman yanımda olan ve maddi manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

İrem EROĞLU
Ankara, Eylül 2017

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK……..……..……i

ÖZET…….……ii

ABSTRACT……..……iii

TEŞEKKÜR…….……iv

SİMGELER DİZİNİ……...……vi

1. GİRİŞ……...……...……....1

2. TEMEL KAVRAMLAR…….……..4

3. SIRALI KAPANIŞ UZAYLARI…….……...……10

3.1 Sıralı Kapanış Uzaylarının Temel Özellikleri…….……..…….11

3.2 Sıralı Kapanış Uzaylarında Ayırma Aksiyomları……..14

3.3 Sıralı Kapanış Uzaylarında Bağlantılılık……..…….…....26

4. SIRALI KAPANIŞ UZAYLARI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN SIRALI FONKSİYON UZAYI TOPOLOJİLERİ…….....32

4.1 Bazı Sıralı Fonksiyon Uzayı Topolojileri……33

4.2 Yarı Düzgünlük Yapısı ve Sıralı Yarı Düzgünleştirme……..……...38

5. İ-C(X,Y) VE D-C(X,Y) ÜZERİNDEKİ KAPANIŞ OPERATÖRLERİ İÇİN BİR SINIFLANDIRMA YÖNTEMİ …….....……. .52

5.1 İ-Sürekli ve D-Sürekli Fonksiyonlar……...……..……..53

5.2 İ(D)-Uygun ve İ(D)-Kabul Edilebilir Kapanış Operatörleri……...…..61

6. SIRALI KAPANIŞ UZAYLARI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN HİPERUZAY TOPOLOJİLERİ……...…….71

7. TARTIŞMA VE SONUÇ……..…….……82

KAYNAKLAR…….……...…83

ÖZGEÇMİŞ……..……...87

SİMGELER DİZİNİ

$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
$2^{(X)}$	X kümesinin sonlu alt kümelerinin ailesi
$D(X)$	X kümesinin kapalı ve azalan alt kümelerinin ailesi
$I(X)$	X kümesinin kapalı ve artan alt kümelerinin ailesi
$(X,c, \preccurlyeq)$	Sıralı kapanış uzayı
$G_{\preccurlyeq}$	$\preccurlyeq$ bağıntısının grafiği
$\uparrow A$	A kümesini kapsayan en dar artan küme
$\downarrow A$	A kümesini kapsayan en dar azalan küme
Y^X	X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi
$C(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$C^{\uparrow}(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm sürekli ve artan fonksiyonların kümesi
$i\text{-}C(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı i-sürekli fonksiyonların kümesi
$d\text{-}C(X,Y)$	X kümesinden Y kümesine tanımlı d-sürekli fonksiyonların kümesi
A^c	A kümesinin tümleyeni
pr_i	i-inci izdüşüm fonksiyonu
$\tau_{CO}\,(\tau_{CI})$	Kompakt açık (iç) topoloji
$\tau_{PO}\,(\tau_{PI})$	Nokta açık (iç) topoloji

1. GİRİŞ

Genelleştirilmiş topolojik uzaylar matematiğin birçok dalında ve özellikle bilgisayar bilimlerinde önemli bir yere sahiptir. Bu genelleştirmelerden biri kapanış operatörleri yardımıyla yapılır. X boştan farklı bir küme olsun. $c : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu
(i) $A \subseteq c(A)$,
(ii) $A \subseteq B \Rightarrow c(A) \subseteq c(B)$
(iii) $cc(A) = c(A)$
şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona kapanış operatörü adı verilir. Eğer c operatörü

$$iv)\ c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$$

şartını da sağlıyorsa Kuratowski kapanış operatörü olarak adlandırılır. Kapanış operatörlerinin en bilinenlerinden biri Čech kapanış operatörleridir. İlk olarak, Čech (1966) tarafından çalışılmış olup önemli uygulama alanlarına sahiptir. Čech kapanış operatörleri, Slapal (2004) tarafından dijital görüntüleme süreçleri ile ilgili problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Rao vd. (2009), proteinlerin yapısal konfigürasyonları ile Čech kapanış uzayları arasında ilişkiler kurmuştur. Čech kapanış operatörü,

$$c(\underset{i\in I}{\cup} A_i) = \underset{i\in I}{\cup} c(A_i)$$

şartını sağlıyorsa tam (total) Čech kapanış operatörü adını alır. Calude ve Căzănescu (1979) tam Čech kapanış operatörleri ile yansımalı bağıntılar arasında birebir ve örten bir eşleme olduğunu göstermiştir.

Fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı topolojiler için bir sınıflandırma yöntemi Arens ve Dugundji (1951) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaya göre Z ve Y topolojik uzaylar, $C(Y, Z)$ ise, Y kümesinden Z kümesine tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi olmak üzere, $C(Y, Z)$ üzerinde tanımlanabilecek topolojiler için bir sınıflandırma yöntemi "sürekli yakınsaklık" kavramı kullanılarak verilmiştir. M ve Λ yönlendirilmiş kümeler, $(f_\mu)_{\mu\in M}$ $C(Y, Z)$ üzerinde bir ağ olmak üzere, $(f_\mu)_{\mu\in M}$ ağının bir $f \in C(Y, Z)$ fonksiyonuna sürekli yakınsaması için gerek ve yeter koşul Y kümesi

üzerindeki herhangi bir $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için $y_\lambda \to y$ ise $f_\mu(y_\lambda) \to f(y)$ olmasıdır biçiminde verilmiştir. Bu durumda, $C(Y,Z)$ üzerinde verilen herhangi bir τ topolojisi, aşağıda verilen (i) ve (ii) şartlarının sağlanma durumuna göre karekterize edilebilir:
(i) τ topolojisine göre yakınsama, sürekli yakınsaklığı ifade eder
(ii) Sürekli yakınsaklık, τ topolojisine göre yakınsaklığı ifade eder
$C(Y,Z)$ üzerindeki τ topolojisi (i) şartını sağlıyorsa kabul edilebilir (admissible) topoloji, (ii) şartını sağlıyorsa uygun (proper) topoloji olarak adlandırılmıştır. Georgiou ve Papadopoulos (1996), $\upsilon - süreklilik$, zayıf süreklilik, zayıf $\upsilon - süreklilik$ gibi süreklilik çeşitleri tanımlamışlar ve elde edilen fonksiyon uzayları üzerindeki topolojilerin kabul edilebilir olma ve uygun olma durumunu incelemiş ayrıca Arens ve Dugundji (1951) tarafından elde edilen kavramları bu uzaylara taşımışlardır. Mršević (2005) ise, Čech kapanış uzayları arasında tanımlı sürekli fonksiyon uzayları üzerinde tanımlanabilecek kapanış operatörleri için bir sınıflandırma yöntemi vermiş olup uygun kapanış operatörü ve kabul edilebilir kapanış operatörü kavramlarını incelemiş, Arens ve Dugundji (1951) tarafından elde edilen sonuçların bu uzaylarda da geçerli olduğunu göstermiştir. Andrijević vd. (2010) Čech kapanış uzayları yardımıyla elde edilen bazı hiperuzay topolojilerini incelemiş ayrıca genelleştirilmiş Vietoris topolojisini tanımlamışlar ve bazı önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Andrijević vd. (2011) Čech kapanış uzayları arasında tanımlı fonksiyonlar kümesi üzerinde çeşitli topolojiler tanımlayarak bu uzayların temel özelliklerini incelemiştir. Kompakt açık topoloji, nokta açık topoloji gibi bazı önemli fonksiyon uzayı topolojileri ile ilgili genelleştirmeler yapmışlardır.

Sıralı topolojik uzay kavramı Nachbin (1965) tarafından verilmiştir. Sıralı topolojik uzaylar özellikle matematiksel ekonomide önemli role sahiptir. Evren ve Ok tarafından 2011 de yapılan çalışma sıralı topolojik uzayların ekonomide uygulamasına örnek olarak verilebilir. McCartan (1968a) sıralı topolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarını tanıtmıştır. McCartan (1968b) sıralı bölüm uzayı kavramını vermiştir. Choe ve Park (1979) sıralı hiperuzay kavramını ilk defa tanımlamışlardır. Park ve Park (1982) ise sıralı topolojik uzay ile bu uzayın sıralı hiperuzayı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Sıralı topolojik uzaylar ile ilgili bir diğer önemli çalışma Nailana (2000) tarafından

yapılmıştır. Nailana (2000), quasi-düzgünleştirilebilir sıralı uzay tanımını vermiştir. Bu çalışmaya göre $(X, \tau, \leq)$ sıralı topolojik uzay olmak üzere X üzerinde tanımlı bir $\mathcal{U}$ quasi-düzgünlük yapısı için $\tau(\mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}) = \tau$ ve $\cap\mathcal{U} = \leq$ sağlanıyorsa, $(X, \tau, \leq)$ topolojik uzayı quasi-düzgünleştirilebilir sıralı uzay olarak adlandırılmıştır. Sıralı topolojik uzaylar arasındaki sürekli ve artan fonksiyonlar kümesi üzerinde nokta-açık topoloji ve kompakt-açık topoloji kavramları verilmiş olup elde edilen sıralı fonksiyon uzaylarında sözde düzgünleştirme ile ilgili bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Literatürde sıralı topolojik uzaylar ile ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır fakat sıralı kapanış uzay tanımı henüz yapılmamıştır. Bu çalışmada sıralı topolojik uzay kavramından yola çıkarak sıralı kapanış uzayı tanımı yapılacak ve Nachbin (1965) tarafından verilen sıralı topolojik uzaylara ilişkin bazı temel özellikler sıralı kapanış uzaylarına taşınacaktır. Sıralı kapanış uzaylarında ayırma aksiyomları ve bağlantılılık kavramları tanıtılarak bazı sonuçlar elde edilecektir. Ayrıca sıralı kapanış uzayları yardımıyla kompakt-açık (iç) ve nokta-açık (iç) sıralı topolojik uzaylar tanımlanacak ve sıralı yarı-düzgünleştirme kavramı verilerek, elde edilen bu yeni fonksiyon uzaylarının hangi şartlar altında sıralı yarı-düzgünleştirilebilir olduğu incelenecektir. Kapanış uzaylarındaki süreklilik kavramından daha genel olan $i-$süreklilik, d-süreklilik kavramları verilerek, i-sürekli ve $d-$sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlanabilecek kapanış operatörleri için bir sınıflandırma yöntemi verilecektir. Son olarak sıralı kapanış uzayları yardımıyla sıralı hiperuzay topolojileri elde edilecek ve Andrijević vd. (2010) tarafından elde edilen bazı sonuçların sıralı kapanış uzaylarında da geçerli olduğu gösterilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kapanış uzayı ve sıralı kümeler ile ilgili temel tanım ve bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 2.1 $X \neq \emptyset$ olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının alt kümelerinden oluşan "$\preceq$" bağıntısı,
(**i**) $\forall x \in X$ için $x \preceq x$ (yansıma)
(**ii**) $\forall x, y, z \in X$ için $x \preceq y$ ve $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (geçişme)

şartlarını sağlıyorsa, ön sıralama bağıntısı olarak adlandırılır. $(X, \preceq)$ kümesine ise ön sıralı küme denir. Eğer (**i**) ve (**ii**) şartlarına ilaveten
(**iii**) $\forall x, y \in X$ için $x \preceq y$ ve $y \preceq x \Rightarrow x = y$ (antisimetri)
özelliği de sağlanıyorsa "$\preceq$" bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır denir.

$$G_{\preceq} = \{(x, y) \mid x \preceq y\}$$

kümesine "$\preceq$" bağıntısının grafiği denir.

Herhangi bir X kümesi üzerindeki "$\preceq$" bağıntısı $\forall a, b \in X$ için

$$a \preceq b \Leftrightarrow a = b$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda "$\preceq$" bağıntısı ayrık sıralama bağıntısı olarak adlandırılır.

$\{(X_i, \preceq_i)\}_{i \in I}$ ön sıralı kümeler ailesi olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere, "$\preceq$" bağıntılarının kartezyen çarpımı,

$$\preceq_p = \prod_{i \in I} \preceq_i = \{(x, y) \in X \times X \mid (pr_i x, pr_i y) \in \preceq_i\}$$

biçiminde tanımlıdır (Čech 1966).

Tanım 2.2 $(X, \preceq)$ önsıralı küme ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi,

(**i**) $\forall a, b \in X$ için $a \in A$ ve $b \preceq a \Rightarrow b \in A$ oluyorsa, azalan küme

(**ii**) $\forall a, b \in X$ için $a \in A$ ve $a \preceq b \Rightarrow b \in A$ oluyorsa, artan küme

(**iii**) $\forall a, b, c \in X$ için $a, c \in A$ ve $a \preceq b \preceq c \Rightarrow b \in A$ oluyorsa, konveks küme olarak adlandırılır (Nachbin 1965).

Uyarı 2.1 $(X, \preceq)$ önsıralı küme ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

(**i**) A kümesini kapsayan artan kümelerin kesişimi de artan kümedir. A kümesini kapsayan en dar artan küme $\uparrow A$ ile gösterilir.

(**ii**) A kümesini kapsayan azalan kümelerin kesişimi de azalan kümedir. A kümesini kapsayan en dar azalan küme $\downarrow A$ ile gösterilir (Nachbin 1965).

Önerme 2.1 $(X, \preceq)$ önsıralı küme ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

(**i**) A kümesi azalandır $\Leftrightarrow A = \downarrow A$

(**ii**) A kümesi artandır $\Leftrightarrow A = \uparrow A$

(Nachbin 1965).

Tanım 2.3 $(X, \preceq_X)$ ve $(Y, \preceq_Y)$ önsıralı iki küme olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda,

(**i**) $\forall a, b \in X$ için $a \preceq_X b \Rightarrow f(a) \preceq_Y f(b)$ oluyorsa, f artandır denir.

(**ii**) $\forall a, b \in X$ için $a \preceq_X b \Rightarrow f(b) \preceq_Y f(a)$ oluyorsa, f azalandır denir.

X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi Y^X ile gösterilmek üzere, $f, g \in Y^X$ için

$$f \preceq_s g \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) \preceq_Y g(x)$$

şeklinde tanımlı "$\preceq_s$" bağıntısı bir ön sıralama bağıntısıdır ve bu bağıntı noktasal sıralama olarak adlandırılır (Davey ve Priestly 1990).

Tanım 2.4 $(X, \preceq_X)$ ve $(Y, \preceq_Y)$ önsıralı iki küme olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in X$ için $x \preceq_X y \Leftrightarrow f(x) \preceq_Y f(y)$ önermesi sağlanıyorsa f fonksiyonuna

sıralı gömme (order-embedding) dönüşümü denir (Davey ve Priestly 1990).

Tanım 2.5 $X \neq \emptyset$ olsun. $c : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,
(**i**) $c(\emptyset) = \emptyset$
(**ii**) $A \subseteq c(A)$
(**iii**) $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$

şartlarını sağlıyor ise, c fonksiyonuna Čech kapanış operatörü denir ve (X, c) ikilisi Čech kapanış uzayı olarak adlandırılır. $\forall A \subseteq X$ için $cc(A) = c(A)$ şartını sağlayan c kapanış operatörüne topolojik kapanış operatörü denir.

$$\begin{aligned} c: \ P(X) &\to P(X) \\ A &\to c(A) = A \end{aligned}$$

fonksiyonu X üzerindeki en ince topolojik kapanış operatörüdür. Bu operatöre ayrık kapanış operatörü denir. Eğer (**i**), (**ii**) ve (**iii**) şartlarını sağlayan c kapanış operatörü

$$(\mathbf{iv}) \forall \{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ için } c(\underset{i \in I}{\cup} A_i) = \underset{i \in I}{\cup} c(A_i)$$

şartını da sağlanıyorsa c operatörü tam kapanış operatörü olarak adlandırılır. $A \subseteq X$ olmak üzere $c(A) = A$ oluyor ise, A kümesi kapalı küme olarak adlandırılır. Eğer A^c kapalı küme ise, A kümesi açık kümedir. c ve c', X kümesi üzerinde iki kapanış operatörü olmak üzere,

$$\forall A \subseteq X \text{ için } c'(A) \subseteq c(A)$$

oluyorsa c operatörü c' operatöründen daha kabadır denir (Čech 1966).

Tanım 2.6 (X, c) bir kapanış uzayı olsun. X kümesi üzerinde c ile ilişkili iç operatörü int_c ile gösterilir ve

$$\forall A \subseteq X \text{ için } int_c(A) = (c(A^c))^c$$

şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca int_c operatörü aşağıdaki şartları sağlar:

(**i**) $\text{int}_c(X) = X$

(**ii**) $\text{int}_c(A) \subseteq A$

(**iii**) $\text{int}_c(A \cap B) = \text{int}_c(A) \cap \text{int}_c(B)$ (Čech 1966).

Tanım 2.7 (X, c) kapanış uzayı olsun. $\tau(\widehat{c}) = \{A^c \mid c(A) = A\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji c ile ilişkili topoloji olarak adlandırılır. $\tau(\widehat{c})$ topolojisinin Kuratowski kapanış operatörü, c operatörünün topolojik modifikasyonu olarak adlandırılır ve $\widehat{c}$ ile gösterilir. X kümesi üzerinde $\mathcal{B} = \{\ int_c(B) \mid B \subseteq X\}$ ailesini taban kabul eden topoloji $\tau(\widetilde{c})$ ile gösterilir. $\tau(\widetilde{c})$ topolojisinin Kuratowski kapanış operatörü $\widetilde{c}$ ile gösterilir (Andrijević vd. 2011).

Tanım 2.8 (X, c) kapanış uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq int_c(U)$ şartını sağlayan U kümesine A kümesinin komşuluğu denir. A kümesinin tüm komşuluklarının ailesi $\mathcal{V}_c(A)$ ile gösterilir. $x \in X$ için $x \in int_c(U)$ oluyorsa, U kümesine x noktasının komşuluğu denir. x noktasının tüm komşuluklarının ailesini $\mathcal{V}_c(x)$ ile gösterilir (Čech 1966).

Tanım 2.9 $\Lambda \neq \emptyset$ olsun. Λ kümesi üzerinde bir "$\preceq$" bağıntısı var ve

(**i**) $\forall \lambda \in \Lambda$ için $\lambda \preceq \lambda$

(**ii**) $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$ ise $\lambda_1 \preceq \lambda_3$

(**iii**) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $\exists \lambda_3 \in \Lambda \ni \lambda_1 \preceq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$

şartları sağlanıyorsa Λ kümesi yönlendirilmiş küme olarak adlandırılır. Yönlendirilmiş bir kümeden herhangi bir X kümesine tanımlı fonksiyona ise, X üzerinde bir ağ denir (Willard 1970).

Tanım 2.10 $X \neq \emptyset$ olsun. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesi

(**i**) $\forall F_{1,} F_2 \in \mathcal{F}$ için $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(**ii**) $F \in \mathcal{F}$ ve $F \subseteq F'$ ise $F' \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlıyorsa, $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde bir süzgeçtir denir. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere, $\mathcal{F}$ sügecinin herbir elemanı $\mathcal{B}$ ailesine ait en az bir elemanı kapsıyorsa, $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{F}$ sügecinin bir tabanıdır denir. Herhangi bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ ailesinin sonlu sayıdaki öğelerinin

kesişimlerinden oluşan aile $\mathcal{F}$ süzgeci için bir taban ise, $\mathcal{S}$ ailesine $\mathcal{F}$ sügecinin bir alt tabanıdır denir (Joshi 1984).

Teorem 2.1 (X, c) kapanış uzayı ve $x \in X$ olsun. $\mathcal{V}_c(x)$ komşuluk ailesi X üzerinde bir süzgeçtir (Čech 1966).

Tanım 2.11 (X, c) kapanış uzayı olsun. $A \subseteq X$ alt kümesi için $\mathcal{V}_c(A)$ komşuluk ailesi bir süzgeçtir. Bu süzgecin tabanı veya alt tabanı A kümesinin komşuluk ailesinin tabanı veya alt tabanı olarak adlandırılır. Dolayısıyla, X kümesinin herhangi bir alt kümeler ailesi $\mathcal{B}$ olmak üzere, $\mathcal{B}$ ailesinin $x \in X$ noktasının komşuluk ailesinin bir tabanı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:
(**i**) $\forall U \in \mathcal{B}$ için $U \in \mathcal{V}_c(x)$
(**ii**) $\forall V \in \mathcal{V}_c(x)$ için $\exists U \in \mathcal{B} \ni U \subseteq V$ (Čech 1966).

Teorem 2.2 (X, c) kapanış uzayı, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in c(A)$ olması için gerek ve yeter koşul x noktasının her U komşuluğu için $U \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır (Čech 1966).

Tanım 2.12 (X, c_X) ve (Y, c_Y) kapanış uzayları ve $x \in X$ olsun.

$$f : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$$

fonksiyonu verilsin. $\forall A \subseteq X$ için $x \in c_X(A)$ olduğunda $f(x) \in c_Y(f(A))$ oluyorsa, f fonksiyonu x noktasında süreklidir denir (Čech 1966).

Teorem 2.3 (X, c_X) ve (Y, c_Y) kapanış uzayları olsun ve

$$f : (X, c_X) \to (Y, c_Y)$$

fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall V \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x))$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{c_X}(x)$ olmasıdır (Čech 1966).

Tanım 2.13 (X, c) kapanış uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun. Her $A \subseteq Y$ için $c'(A) = Y \cap c(A)$ şeklinde tanımlanan c' fonksiyonu, Y kümesi üzerinde bir kapanış operatörüdür ve Y kümesine indirgenen kapanış operatörü olarak adlandırılır. (Y, c') uzayına (X, c) kapanış uzayının bir alt uzayı denir.

(X, c) kapanış uzayının bir alt uzayı Y olmak üzere,
(**i**) A kümesi X üzerinde kapalı (açık) küme ise, $Y \cap A$ kümesi Y üzerinde kapalı (açık) kümedir.
(**ii**) Y kümesi X üzerinde kapalı (açık) ve A kümesi Y üzerinde kapalı (açık) ise, A kümesi X üzerinde kapalı (açık) kümedir (Čech 1966).

Tanım 2.14 $\{(X_i, c_i)\}_{i \in I}$ kapanış uzaylarının bir ailesi olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere, $\forall i \in I$ için $pr_i : X \to X_i$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan X üzerindeki en kaba kapanış operatörüne çarpım kapanış operatörü denir ve $\prod c_i$ veya c_p ile gösterilir. Ayrıca, $(\prod c_i)(\prod A_i) = \prod c_i(A_i)$ eşitliği gerçeklenir (Čech 1966).

Kapanış uzaylarında örtü ve kompaktlık ile ilgili tanımlar aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.15 (X, c) bir kapanış uzayı olsun. $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesi için

$$X = \bigcup_{i \in I} int_c(G_i)$$

oluyorsa, $\mathcal{G}$ ailesine X için bir iç örtü denir. Eğer, X kümesinin her iç örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunabiliyorsa, X kompakttır denir. X in her iç örtüsünün sonlu bir iç alt örtüsü var ise, X güçlü kompakttır denir. Topolojik uzaylarda verilen kompaktlık ile ilgili bazı temel özellikler kapanış uzaylarında da geçerlidir. (X, c) kapanış uzayı için aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) Bir kompakt kapanış uzayının sürekli fonksiyon altında görüntüsü de kompakttır.
(**ii**) Kompakt bir uzayın kapalı her alt uzayı da kompakttır (Sunitha 1994).

3. SIRALI KAPANIŞ UZAYLARI

Kapanış uzaylarında ayırma aksiyomları topolojik uzaylardaki ayırma aksiyomlarından farklılıklar göstermektedir. Kapanış uzaylarında ayırma aksiyomları ilk olarak Čech (1966) tarafından verilmiş ve Roth (1979), Thron (1981), Chattopadhyay ve Thron (1977), Mashhour ve Ghanim (1983) tarafından çalışılmıştır. Sunitha tarafından 1994 yılında yapılan çalışmaya göre, (X, c) bir kapanış uzayı olmak üzere,
(i) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $x \notin c(y)$ ve $y \notin c(x)$ oluyorsa, (X, c) T_1-uzayıdır,
(ii) $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $\exists U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}(y)$ ve $U \cap V = \emptyset$ oluyorsa, (X, c) T_2-uzayıdır,
(iii) $\forall A, B \subseteq X$ ayrık kapalıları için $\exists U \in \mathcal{V}(A)$, $\exists V \in \mathcal{V}(B)$ ve $U \cap V = \emptyset$ oluyorsa, (X, c) normal uzaydır,
(iv) $\forall x \in X$, $\forall A \subseteq X$ ve $x \notin c(A)$ için $\exists U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}(A)$ ve $U \cap V = \emptyset$ oluyorsa, (X, c) regüler uzaydır denir.

(X, c) bir kapanış uzayı, $x \in X$ ve $V \in \mathcal{V}(x)$ olsun. Eğer sürekli bir $f : (X, c) \to [0, 1]$ (Burada $[0, 1]$ üzerindeki kapanış operatörü [0,1] üzerindeki alışılmış topolojinin Kuratowski kapanış operatörüdür) fonksiyonu var ve

$$f(x) \subseteq \{0\}, f(V^c) \subseteq \{1\}$$

oluyorsa, (X, c) uzayı tamamen regüler uzay olarak adlandırılmıştır. Ayrıca Čech (1966) tarafından gösterilmiştir ki tamamen regüler kapanış uzayları topolojik kapanış uzaylarıdır.

McCartan (1968) ise sıralı topolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarını incelemiştir. Kapanış uzaylarında bağlantılılık kavramı ilk olarak Čech (1966) tarafından yapılmıştır. Čech (1966) e göre, (X, c) bir kapanış uzayı ve $A_1, A_2 \subseteq X$ olsun. Eğer,

$$\exists U \in \mathcal{V}(A_1), \exists V \in \mathcal{V}(A_2) \ni U \cap A_2 = \emptyset = V \cap A_1$$

oluyorsa, A_1 ve A_2 yarı-ayrılmış küme olarak adlandırılır. Eğer X kümesi boştan farklı iki yarı-ayrılmış kümenin birleşimi olarak yazılamıyor ise X bağlantılı uzay-

dır denir. Bağlantılılık kavramı sıralı topolojik uzaylara Birsan (1976) tarafından taşınmıştır. Birsan tarafından yapılan çalışmaya göre, $(X, \tau, \preceq)$ bir sıralı topolojik uzay ve X kümesi biri artan diğeri azalan ayrık açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, X sıralı bağlantılıdır denir.

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda ilk olarak sıralı kapanış uzayı tanımlanarak, Nachbin (1965) tarafından tanımlanan sıralı topolojik uzaylara ait bazı temel kavramlar sıralı kapanış uzaylarına taşınacaktır. İkinci kısımda ise, Mc Cartan (1968) tarafından yapılan çalışma göz önüne alınarak, sıralı kapanış uzaylarında ayırma aksiyomları verilecektir. Son kısımda ise sıralı kapanış uzaylarında bağlantılılık kavramı çalışılarak, kapanış uzaylarında yapılan çalışmaların genel bir hali elde edilecektir.

3.1 Sıralı kapanış uzaylarının temel özellikleri

Bu kısımda sıralı kapanış uzayı tanımı yapılarak, sıralı kapanış uzaylarının bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1 $X \neq \emptyset$ olsun. c, X üzerinde bir kapanış operatörü ve "$\preceq$" ön sıralama bağıntısı olmak üzere, $(X, c, \preceq)$ üçlüsüne sıralı kapanış uzayı denir. $(X, c, \preceq)$ bir sıralı kapanış uzayı olmak üzere, "$\preceq$" ön sıralama bağıntısı $X \times X$ çarpım kapanış uzayında kapalı grafiğe sahipse "$\preceq$" bağıntısı kapalıdır denir.

Uyarı 3.1.1 X üzerinde ön sıralama bağıntısı olarak ayrık sıralama bağıntısı göz önüne alınırsa, her sıralı kapanış uzayı bir kapanış uzayıdır.

Önerme 3.1.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. "$\preceq$" ön sıralama bağıntısının kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in X \ni a \not\preceq b$ olmak üzere,

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \ni V \text{ artan}, \exists W \in \mathcal{V}(b) \ni W \text{ azalan ve } V \cap W = \emptyset$$

olmasıdır. Ayrıca, "$\preceq$" ön sıralama bağıntısı kapalı ise, her $a \in X$ için $\downarrow \{a\}$ ve $\uparrow \{a\}$ kümeleri kapalıdır.

İspat: "$\preceq$" ön sıralama bağıntısı kapalı, $a, b \in X$ ve $a \not\preceq b$ olsun. Bu durumda $(a,b) \notin G_{\preceq}$ dir. $G_{\preceq}$ kapalı olduğundan $(a,b) \notin c_p(G_{\preceq})$ elde edilir. O halde, $(a,b) \notin c_p(G_{\preceq})$ ise, $\exists V' \in V(a)$ ve $\exists W' \in V(b)$ için $V' \times W' \cap G_{\preceq} = \emptyset$ olacaktır. $V = \uparrow V'$ ve $W = \downarrow W'$ biçiminde tanımlansın. O halde, $V' \subseteq V$ ve $W' \subseteq W$ olduğundan V ve W sırasıyla a ve b noktalarının artan ve azalan komşuluklarıdır. Ayrıca $V \cap W = \emptyset$ dir. Biran için, $V \cap W \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\exists z \in V \cap W$ ve böylece $z \in V$ ve $z \in W$ elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} z &\in V \Rightarrow \exists x \in V' \ni x \preceq z \\ z &\in W \Rightarrow \exists y \in W' \ni z \preceq y \end{aligned}$$

olacaktır. "$\preceq$" bağıntısının geçişme özelliğinden, $(x,y) \in G_{\preceq} \cap (V' \times W')$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde, $V \cap W = \emptyset$ dir. Tersine, varsayalım ki $G_{\preceq}$ kapalı olmasın yani, $c_p(G_{\preceq}) \neq G_{\preceq}$ olsun. O halde, $\exists (a,b) \in c_p(G_{\preceq})$ vardır öyle ki $(a,b) \notin G_{\preceq}$ dir. Buradan, $a \not\preceq b$ elde edilir. Hipotezden, a noktasının artan V komşuluğu, b noktasının azalan W komşuluğu için $V \cap W = \emptyset$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (a,b) \in c_p(G_{\preceq}) &\Rightarrow (V \times W) \cap G_{\preceq} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists (x,y) \in V \times W \text{ ve } (x,y) \in G_{\preceq} \\ &\Rightarrow x \in V,\ y \in W \text{ ve } x \preceq y \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, V artan komşuluk olduğundan $y \in V$ olacaktır. Bu ise $V \cap W = \emptyset$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $G_{\preceq}$ kapalıdır. Şimdi önermenin ikinci kısmını ispatlayacağız. "$\preceq$" bağıntısı kapalı olsun. Herhangi bir $a \in X$ noktasını göz önüne alalım. $\downarrow \{a\}$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek için $(\downarrow \{a\})^c$ kümesinin açık olduğunu gösterelim. $x \in (\downarrow \{a\})^c$ olsun. O halde, $x \notin \downarrow \{a\}$ ve $x \not\preceq a$ elde edilir. Önermenin birinci kısmından x noktasının artan bir U komşuluğu, a noktasının

azalan bir V komşuluğu var ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} V \text{ azalan} &\Rightarrow \downarrow \{a\} \subseteq V \\ &\Rightarrow V^c \subseteq (\downarrow \{a\})^c \\ &\Rightarrow U \subseteq V^c \subseteq (\downarrow \{a\})^c \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $(\downarrow \{a\})^c \in \mathcal{V}(x)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $(\downarrow \{a\})^c$ açık ve $\downarrow \{a\}$ kapalıdır. $\uparrow \{a\}$ kümesinin kapalı olduğu benzer şekilde gösterilir.

X kümesi üzerindeki "$\preceq$" bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı olduğunda aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.1.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Eğer, "$\preceq$" bağıntısı kapalı ise, (X, c) T_2-uzayıdır.

İspat: $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. "$\preceq$" antisimetrik olduğundan, $x \not\preceq y$ veya $y \not\preceq x$ olacaktır. Varsayalım ki $x \not\preceq y$ olsun. Önerme 3.1.1 den, $\exists U \in \mathcal{V}(x)$ artan ve $\exists V \in \mathcal{V}(y)$ azalan komşuluğu için $U \cap V = \emptyset$ elde edilir. Sonuç olarak, (X, c) T_2-uzayıdır.

Aşağıda verilen tanım, herhangi bir X kümesi üzerinde verilen kapanış operatörü ve sıralamadan yararlanarak yeni kapanış operatörlerinin tanımlanabileceğini göstermektedir.

Tanım 3.1.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olmak üzere, $d-$kapanış noktası, $i-$kapanış noktası, $i-$iç noktası ve $d-$iç noktası aşağıdaki gibi tanımlanır:
(**i**) $c^d(A) = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x)$ azalan komşuluğu için $V \cap A \neq \emptyset\}$.
(**ii**) $c^i(A) = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x)$ artan komşuluğu için $V \cap A \neq \emptyset\}$.
(**iii**) $i - int_c(A) = \{x \in X \mid \exists V \in \mathcal{V}(x)$ artan komşuluk var ve $V \subseteq A\}$.
(**iv**) $d - int_c(A) = \{x \in X \mid \exists V \in \mathcal{V}(x)$ azalan komşuluk var ve $V \subseteq A\}$.

Teorem 3.1.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler vardır:
(i) $i - int_c(A) = (c^i(A^c))^c$
(ii) $d - int_c(A) = (c^d(A^c))^c$

İspat (i) $x \in i - int_c(x) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \ni V$ artan $\ni V \subseteq A$
$\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \ni A^c \subseteq V^c$
$\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \ni A^c \cap V = \emptyset$
$\Leftrightarrow x \notin c^i(A^c)$
$\Leftrightarrow x \in (c^i(A^c))^c$

elde edilir. Sonuç olarak, $i - int_c(A) = (c^i(A^c))^c$ dir.
(ii) İlk eşitliğe benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 3.1.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:
(i) $A \subseteq c(A) \subseteq c^d(A)$
(ii) $A \subseteq c(A) \subseteq c^i(A)$.

3.2 Sıralı Kapanış Uzaylarında Ayırma Aksiyomları

Bu kısımda, sıralı kapanış uzaylarında ayırma aksiyomlarını tanımlayarak bazı sonuçlar elde edeceğiz.

Tanım 3.2.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Bu durumda,
(i) $\forall a, b \in X \ni a \not\preceq b$ için $\exists W \in \mathcal{V}(a) : W$ artan ve $b \notin W$ oluyorsa, $(X, c, \preceq)$ alt T_1-sıralıdır,
(ii) $\forall a, b \in X \ni a \not\preceq b$ için $\exists W \in \mathcal{V}(b) : W$ azalan ve $a \notin W$ oluyorsa, $(X, c, \preceq)$ üst T_1-sıralıdır denir.

$(X, c, \preceq)$ hem üst hem de alt T_1-sıralı ise, T_1-sıralı uzaydır denir.

Örnek 3.2.1 $X = \{a, b, c\}$ ve $\preceq = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$ olsun. c kapanış operatörü,

$c(\{a\}) = \{a, b\}$, $c(\{b\}) = \{b\}$, $c(\{c\}) = \{c\}$, $c(\{a, b\}) = \{a, b\}$,

$c(\{a, c\}) = X$, $c(\{b, c\}) = \{b, c\}$, $c(\emptyset) = \emptyset$, $c(X) = X$

biçiminde tanımlansın. $(X, c, \preceq)$ T_1_sıralıdır.

Teorem 3.2.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:
(i) $(X, c, \preceq)$ alt (üst) T_1-sıralıdır.
(ii) $\forall\ a, b \in X \ni a \not\preceq b$ için $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ $(V \in \mathcal{V}(b))$ ve $\forall x \in U$ için $x \not\preceq b$ $(a \not\preceq x)$.
(iii) $\forall x \in X$ için $(\leftarrow, x]$ $([x, \rightarrow))$ kapalıdır.

İspat: **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** $(X, c, \preceq)$ alt T_1-sıralı ve $a, b \in X$ için $a \not\preceq b$ olsun. Bu durumda, $\exists U \in \mathcal{V}(a) : U$ artan ve $b \notin U$ elde edilir. Buradan, $\forall x \in U$ için $x \not\preceq b$ dir. Gerçekten, $\exists x \in U, x \preceq b$ olsaydı, $b \in U$ olurdu ve $b \notin U$ olması nedeniyle çelişki elde edilirdi. Dolayısıyla, $\forall x \in U$ için $x \not\preceq b$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Hipotezimiz doğru olsun ve bir $x \in X$ için $(\leftarrow, x]$ kapalı olmasın. Diğer bir deyişle, $c((\leftarrow, x]) \neq (\leftarrow, x]$ olsun. Bu durumda,

$$\exists z \in c((\leftarrow, x]) \ni z \notin (\leftarrow, x]$$

dir. $z \notin (\leftarrow, x]$ ise $z \not\preceq x$ ve **(ii)** kullanılırsa, $\exists U \in \mathcal{V}(z)$ ve her $y \in U$ için $y \not\preceq x$ dir. Bu ise $z \in c(\leftarrow, x]$ olması ile çelişir. O halde, $(\leftarrow, x]$ kapalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** $\forall x \in X$ için $(\leftarrow, x]$ kapalı olsun. $(X, c, \preceq)$ uzayının alt T_1-sıralı olduğunu gösterelim. $a, b \in X$ ve $a \not\preceq b$ olsun. Bu durumda, hipotezden $(\leftarrow, b]$ kapalı ve $(\leftarrow, b]^c$ açık ve artan kümedir. Sonuç olarak, $(\leftarrow, b]^c \in \mathcal{V}(a)$ ve $b \notin [\leftarrow, b]^c$ elde edilir. Üst sıralı uzay olma durumu da benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 3.2.1 $(X, c, \preceq)$ T_1-sıralı kapanış uzayı olsun. X kümesi üzerinde tanımlı

c operatöründen ince olan her kapanış operatörü de T_1-sıralıdır.

İspat: v, c operatöründen ince bir kapanış operatörü ve $(X, c, \preceq)$ T_1-sıralı olsun. Bu durumda, $\forall A \subseteq X$ için $v(A) \subseteq c(A)$ dır.

$\forall x \in X$ için $c((\leftarrow, x]) = (\leftarrow, x]$ ve $c([x, \rightarrow)) = [x, \rightarrow)$ olduğundan, $v((\leftarrow, x]) = (\leftarrow, x]$ ve $v([x, \rightarrow)) = [x, \rightarrow)$ elde edilir. Sonuç olarak, $(X, v, \preceq)$ T_1-sıralıdır.

Tanım 3.2.2 $(X, c, \preceq)$ bir sıralı kapanış uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. c_A, A kümesine indirgenen kapanış operatörü ve $\preceq_A$, A kümesine indirgenen ön sıralama bağıntısı olmak üzere, $(A, c_A, \preceq_A)$ üçlüsüne sıralı alt uzay denir.

Önerme 3.2.2 T_1-sıralı uzayın her sıralı alt uzayı da T_1-sıralıdır.

İspat: $(X, c, \preceq)$ T_1-sıralı ve $(A, c_A, \preceq_A)$ sıralı alt uzay olsun. $[a,\rightarrow)_A = [a,\rightarrow) \cap A$ olduğu açıktır. Ayrıca, $(X, c, \preceq)$ T_1-sıralı olduğundan $[a,\rightarrow)$ kapalıdır. Dolayısıyla, $[a,\rightarrow)_A$ kümesi alt uzayda kapalıdır. Benzer şekilde, $(\leftarrow, a]_A$ kümesinin de alt uzayda kapalı olduğu görülür. Sonuç olarak, $(A, c_A, \preceq_A)$ T_1-sıralıdır.

Önerme 3.2.3 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Bu durumda, $f : (X, c_X, \preceq_X) \rightarrow (Y, c_Y, \preceq_Y)$ sürekli ve sıralı gömme (order-embedding) dönüşümü olmak üzere, $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_1-sıralı ise $(X, c_X, \preceq_X)$ T_1-sıralıdır.

İspat: $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_1-sıralı olsun. Herhangi bir $a, b \in X$ ve $a \npreceq_X b$ olsun. f sıralı gömme dönüşümü olduğundan, $f(a) \npreceq_Y f(b)$ elde edilir. $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_1-sıralı olduğundan,

$$\exists U' \in \mathcal{V}(f(a)) \ni U' \text{artan ve } f(b) \notin U' \text{ ve } \exists V' \in \mathcal{V}(f(b)) \ni V' \text{azalan ve } f(a) \notin V'$$

elde edilir. f fonksiyonunun sürekliliğinden,

$$f^{-1}(U') \in \mathcal{V}(a) \ni b \notin f^{-1}(U') \text{ ve } f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(b) \ni a \notin f^{-1}(V')$$

olacaktır. Dolayısıyla, $(X, c_X, \preceq_X)$ T_1-sıralıdır.

Önerme 3.2.4 $\{(X_i, c_i, \preceq_i)\}_{i\in I}$ sıralı kapanış uzaylarının ailesi olsun. $X = \prod_{i\in I} X_i$ olmak üzere, $(X, c_p, \preceq_p)$ uzayının T_1-sıralı olması için gerek ve yeter koşul $\forall i \in I$ için $(X_i, c_i, \preceq_i)$ uzayının T_1-sıralı olmasıdır.

İspat: $x, y \in X$ ve $x \not\preceq y$ olsun. Bu durumda,

$$\exists i_0 \in I \ni x_{i_0} \not\preceq_{i_0} y_{i_0}$$

dır. $(X_{i_0}, c_{i_0}, \preceq_{i_0})$ T_1-sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}(x_{i_0}), U \text{ artan ve } y_{i_0} \notin U$$

ve

$$\exists V \in \mathcal{V}(y_{i_0}), V \text{ azalan ve } x_{i_0} \notin V$$

elde edilir. Buradan, $pr_{i_0}^{-1}(U)$ kümesi x noktasının artan komşuluğudur ve $y \notin pr_{i_0}^{-1}(U)$ olduğu görülür. Ayrıca, $pr_{i_0}^{-1}(V)$ kümesi y noktasının azalan komşuluğu ve $x \notin pr_{i_0}^{-1}(V)$ dir. Sonuç olarak, $(X, c_p, \preceq_p)$ T_1-sıralıdır.

Tersine, $(X, c_p, \preceq_p)$ T_1-sıralı olsun ve $\exists i_0 \in I$ için $(X_{i_0}, c_{i_0}, \preceq_{i_0})$ T_1-sıralı olmasın. Bu durumda, X alt T_1-sıralı veya üst T_1-sıralı değildir. Biran için,

$$\exists x_{i_0}, y_{i_0} \in X_{i_0} \ni x_{i_0} \not\preceq_{i_0} y_{i_0} \text{ için } \forall U \in \mathcal{V}(x_{i_0}) \ni U \text{ artan ve } y_{i_0} \in U$$

olsun. $x = (x_i) \in X$, $y = (y_i) \in X$ olmak üzere, $\forall i \neq i_0$ için $x_i = y_i$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $x \not\preceq y$ ve

$$\forall W \in \mathcal{V}(x) \ni W \text{ artan için } y \in W$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde, $(X, c_p, \preceq_p)$ T_1-sıralıdır.

Tanım 3.2.3 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Eğer, $\forall a, b \in X \ni a \not\preceq b$ için

$\exists U \in \mathcal{V}(a), U$ artan, $\exists V \in \mathcal{V}(b), V$ azalan ve $U \cap V = \emptyset$ oluyorsa, X T_2-uzayıdır denir.

Açıkça görülür ki $(X, c, \preceq)$ T_2- sıralı uzay ise $(X, c, \preceq)$ T_1- sıralı uzaydır.

Teorem 3.2.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.
(i) $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralıdır.
(ii) $\forall a, b \in X \ni a \not\preceq b$ için $\exists U \in \mathcal{V}(a), \exists V \in \mathcal{V}(b) \ni x \in U$ ve $y \in V$ ise, $x \not\preceq y$ dir.
(iii) "$\preceq$" bağıntısının grafiği $X \times X$ üzerindeki çarpım kapanış uzayında kapalıdır.

İspat: **(i)**⇒**(ii)** ve **(ii)**⇒ **(iii)** açıktır. Şimdi, **(iii)**⇒**(i)** ifadesini ispatlayalım. Herhangi bir $a, b \in X$ ve $a \not\preceq b$ olsun. "$\preceq$" bağıntısının grafiği $G_{\preceq} = \{(a, b) : a \preceq b\}$ olmak üzere,

$$(a, b) \notin G_{\preceq} \Rightarrow (a, b) \notin c(G_{\preceq}) \Rightarrow \exists U \times V \in \mathcal{V}((a, b)) : (U \times V) \cap G_{\preceq} = \emptyset$$

elde edilir. $U' = \uparrow (U)$ ve $V' = \downarrow (V)$ biçiminde tanımlanırsa, U' ve V' sırasıyla a ve b noktalarının artan ve azalan komşuluklarıdır. Ayrıca, $\uparrow U \cap \downarrow V = \emptyset$ dir. Gerçekten de $U' \cap V' \neq \emptyset$ olsaydı,

$$\begin{aligned} \exists x' \in U' \cap V' &\Rightarrow x' \in U' \text{ ve } x' \in V' \\ &\Rightarrow \exists x \in U \ni x \preceq x' \text{ ve } \exists y \in V \ni x' \preceq y \\ &\Rightarrow x \preceq x' \preceq y \end{aligned}$$

ve böylece $x \preceq y$ elde edilirdi. Bu ise, $(U \times V) \cap G_{\preceq} = \emptyset$ eşitliği ile çelişir. Sonuç olarak, $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralıdır.

Önerme 3.2.5 T_2-sıralı her uzayın sıralı alt uzayı T_2-sıralıdır.

İspat: $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralı, $A \subseteq X$ ve $(A, c_A, \preceq_A)$ sıralı alt uzay olsun. Herhangi bir $a, b \in A$ için $a \not\preceq_A b$ olsun. O halde, $a \not\preceq b$ elde edilir. $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralı olduğundan, $\exists U \in \mathcal{V}(a), U$ artan, $\exists V \in \mathcal{V}(b), V$ azalan ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Bu

durumda, $U \cap A \in \mathcal{V}_A(a)$ ve $V \cap A \in \mathcal{V}_A(b)$, $U \cap A$ artan ve $V \cap A$ azalan kümeleri için $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ eşitliği gerçeklenir. Sonuç olarak, $(A, c_A, \preceq_A)$ T_2-sıralıdır.

Önerme 3.2.6 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Bu durumda, $f : (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ sürekli, sıralı gömme (order-embedding) dönüşümü olmak üzere, $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralı ise, $(X, c_X, \preceq_X)$ T_2-sıralıdır.

İspat: $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralı uzay olsun. Herhangi bir $a, b \in X$ ve $a \not\preceq_X b$ olsun. f sıralı gömme dönüşümü olduğundan, $f(a) \not\preceq_Y f(b)$ elde edilir. Ayrıca $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralı olduğundan, $\exists U \in \mathcal{V}(f(a)), U$ artan, $\exists V \in \mathcal{V}(f(b)), V$ azalan ve $U \cap V = \emptyset$ olacaktır. Buradan, $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(a)$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(b)$ ve $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ elde edilir. Sonuç olarak, $(X, c_X, \preceq_X)$ T_2-sıralıdır.

Önerme 3.2.7 $\{(X_i, c_i, \preceq_i)\}_{i \in I}$ sıralı kapanış uzayların ailesi olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere, $(X, c_p, \preceq_p)$ uzayının T_2-sıralı olması için gerek ve yeter koşul $\forall i \in I$ için $(X_i, c_i, \preceq_i)$ uzayının T_2-sıralı olmasıdır.

İspat: İspat kolaylıkla elde edilir.

Tanım 3.2.4 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun.
(i) $\forall A \subseteq X$, A azalan ve $x \notin c(A)$ için $\exists U \in \mathcal{V}(x), U$ artan, $\exists V \in \mathcal{V}(A), V$ azalan ve $U \cap V = \emptyset$ oluyorsa X alt regüler sıralıdır
(ii) $\forall A \subseteq X$, A artan ve $x \notin c(A)$ için $\exists U \in \mathcal{V}(x), U$ azalan, $\exists V \in \mathcal{V}(A), V$ artan ve $U \cap V = \emptyset$ oluyorsa üst regüler sıralıdır denir.

$(X, c, \preceq)$ hem alt regüler sıralı hem de üst regüler sıralı ise, regüler sıralı uzay olarak adlandırılır.

X hem regüler sıralı hem de T_1-sıralı ise, T_3-sıralıdır denir..

Teorem 3.2.3 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $(X, c, \preceq)$ alt (üst) regüler sıralıdır.
(ii) $\forall x \in X$ ve $\forall U \in \mathcal{V}(x) \ni U$ artan (azalan) için $\exists V \in \mathcal{V}(x) \ni V$ artan (azalan) ve $c(V) \subseteq U$ kapsaması vardır.

ispat: (i)⇒(ii) $(X, c, \preceq)$ alt regüler sıralı olsun. $x \in X$ ve $U \in \mathcal{V}(x)$ artan komşuluğunu göz önüne alalım. U artan ise, U^c azalan kümedir ve $x \notin U^c$ ise $x \notin c(U^c)$ elde edilir. Gerçekten,

$$U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in int_c U \Rightarrow x \in (c(U^c))^c \Rightarrow x \notin c(U^c)$$

olduğu görülür. $(X, c, \preceq)$ alt regüler sıralı olduğundan,

$$\exists V_1 \in \mathcal{V}(x) \ni V_1 \text{ artan ve } \exists V_2 \in \mathcal{V}(U^c) \ni V_2 \text{ azalan ve } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$V_2 \in \mathcal{V}(U^c) \Rightarrow U^c \subseteq int_c(V_2) = (c(V_2^c))^c \Rightarrow c(V_2^c) \subseteq U$$

elde edilir.

(ii)⇒(i) Herhangi bir $A \subseteq X$ azalan ve $x \notin c(A)$ olsun. $x \notin c(A)$ ise $\exists U \in \mathcal{V}(x)$ için $U \cap A = \emptyset$ dir. $U \in \mathcal{V}(x)$ ve $U \subseteq \uparrow U$ olduğundan, $\uparrow U \in \mathcal{V}(x)$ dir. **(ii)** den, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, V artan ve $c(V) \subseteq \uparrow U$ dır. Böylece

$$(\uparrow U)^c \subseteq (c(V))^c = int_c(V^c)$$

elde edilir. Buradan $A \subseteq (\uparrow U)^c \subseteq int_c(V^c)$ dir. O halde $V^c \in \mathcal{V}(A)$ elde edilir. Sonuç olarak, $(X, c, \preceq)$ alt regüler sıralıdır.

Önerme 3.2.8 $(X, c, \preceq)$ T_3-sıralı ise, $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralıdır.

İspat: $(X, c, \preceq)$ T_3-sıralı, $a, b \in X$ ve $a \not\preceq b$ olsun. $(X, c, \preceq)$ T_1-sıralı olduğundan, $(\leftarrow, b]$ kapalıdır. Ayrıca, $c((\leftarrow, b]) = (\leftarrow, b]$ ise $a \notin c((\leftarrow, b])$ ve $(X, c, \preceq)$ regüler

sıralı olduğundan, a noktasının artan bir U komşuluğu, $(\leftarrow, b]$ kümesinin azalan bir V komşuluğu var ve $U \cap V = \emptyset$ elde edilir. Diğer yandan,

$$V \in \mathcal{V}((\leftarrow, b]) \Rightarrow b \in (\leftarrow, b] \subseteq int_c V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(b)$$

olacaktır. Sonuç olarak, $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralıdır.

Önerme 3.2.9 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları,

$$f : (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$$

sürekli, açık, örten ve sıralı gömme (order-embedding) dönüşümü olsun. Bu durumda $(X, c_X, \preceq_X)$ regüler sıralı ise, $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ regüler sıralıdır.

İspat: $(X, c_X, \preceq_X)$ regüler sıralı, $A \subseteq Y$ azalan ve $f(x) \notin c_Y(A)$ olsun. Bu durumda $x \notin f^{-1}(c_Y(A))$ elde edilir. Ayrıca f sürekli ve örten olduğundan,

$$f(c_X(f^{-1}(A))) \subseteq c_Y(A) \Rightarrow c_X(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(c_Y(A)) \Rightarrow x \notin c_X(f^{-1}(A))$$

ve $(X, c_X, \preceq_X)$ regüler sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni U \text{ artan}, \exists V \in \mathcal{V}(f^{-1}(A)) \ni V \text{ azalan ve } U \cap V = \emptyset$$

dir. Dolayısıyla $f(U) \in \mathcal{V}(f(x))$, $f(V) \in \mathcal{V}(A)$ ve $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ elde edilir. Böylece, Y uzayının alt regüler sıralı olduğu gösterilmiş olur. Üst regüler sıralı olma durumu da benzer şekilde gösterilir. Sonuç olarak, Y regüler sıralıdır.

Uyarı 3.2.1 Regüler sıralı uzayın alt uzayı regüler sıralı olmayabilir.

Örnek 3.2.2 $X = \{a, b, c, d\}$ ve $\preceq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c), (d, a)\}$ olsun. c kapanış operatörü,
$c(\{a\}) = \{a\}, c(\{b\}) = \{a, b, c\}, c(\{c\}) = \{c\}, c(\{d\}) = \{d\}, c(\{a, b\}) = \{a, b, c\},$
$c(\{a, c\}) = \{a, c\}, c(\{a, d\}) = \{a, d\}, c(\{b, c\}) = \{a, b, c\},$

$c(\{b,d\}) = X, c(\{c,d\}) = \{c,d\}, c(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\}, c(\{a,c,d\}) = \{a,c,d\},$
$c(\{a,b,d\}) = X, c(\{b,c,d\}) = X, c(X) = X, c(\emptyset) = \emptyset.$

biçiminde tanımlansın. $(X, c, \preceq)$ regüler sıralı uzaydır. Fakat, $A = \{a,b,c\}$ ve $\preceq_A = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$ olmak üzere, $(A, c_A, \preceq_A)$ regüler sıralı değildir.

Tanım 3.2.5 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı, $A \subseteq X$ olmak üzere $(A, c_A, \preceq_A)$ sıralı alt uzay olsun. Eğer, her $x \in A$ ve her $V \in \mathcal{V}_A(x)$ artan(azalan) komşuluğu için $\exists V' \in \mathcal{V}(x)$ artan (azalan) komşuluğu var ve $V = V' \cap A$ oluyorsa, $(A, c_A, \preceq_A)$ uzayına $(X, c, \preceq)$ ile bağdaşan alt uzay denir.

Teorem 3.2.4 Regüler sıralı uzayın bağdaşan alt uzayı regüler sıralıdır.

İspat: $(X, c, \preceq)$ regüler sıralı, $A \subseteq X$ ve $(A, c_A, \preceq_A)$ bağdaşan alt uzay olsun. $x \in A$ ve $V \in \mathcal{V}_A(x)$ artan(azalan) komşuluğunu alalım. Bu durumda, $\exists V' \in \mathcal{V}(x)$ artan (azalan) ve $V = V' \cap A$ dır. X regüler sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni U \text{ artan(azalan)} \ni c(U) \subseteq V'$$

elde edilir. Buradan,

$$c_A(U) = A \cap c(U) \subseteq V' \cap A = V$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(A, c_A, \preceq_A)$ regüler sıralıdır.

Teorem 3.2.5 Regüler sıralı uzayların kartezyen çarpımı da regüler sıralıdır.

İspat: $\{(X_i, c_i, \preceq_i)\}_{i \in I}$ regüler sıralı kapanış uzayların bir ailesi olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere, $(X, c_p, \preceq_p)$ uzayının regüler sıralı olduğunu gösterelim. $x \in X$ ve $W \in \mathcal{V}(x)$ artan olsun. O halde, $\forall i \in I$ için $U_i \in \mathcal{V}(pr_i(x))$ ve sonlu sayıda i noktasının haricinde $U_i = X_i$ olmak üzere, $\prod_{i \in I} U_i \subseteq W$ olacaktır. Buradan, $\prod_{i \in I} U_i \subseteq \prod_{i \in I} \uparrow U_i \subseteq W$ elde edilir. O halde, $\forall i \in I$ için $(X_i, c_i, \preceq_i)$ regüler sıralı olduğundan, $\exists V_i \in \mathcal{V}(pr_i(x))$,

V_i artan ve

$$c_i(V_i) \subseteq\uparrow U_i \Rightarrow \prod_{i\in I} c_i(V_i) = c_p(\prod_{i\in I} V_i) \subseteq \prod_{i\in I} \uparrow U_i \subseteq W$$

olacaktır. Dolayısıyla, $(X, c_p, \preceq_p)$ alt regüler sıralıdır. Üst regüler sıralı olma durumu da benzer şekilde gösterilir. Sonuç olarak çarpım uzayı regüler sıralıdır.

Tanım 3.2.6 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Eğer, her F_1, $F_2 \subseteq X$, ayrık kapalı, F_1 artan, F_2 azalan için $\exists U_1 \in \mathcal{V}(F_1)$ artan, $\exists U_2 \in \mathcal{V}(F_2)$ azalan komşulukları mevcut ve $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ eşitliği sağlanıyorsa, X normal sıralıdır denir.
X hem normal sıralı hem de T_1-sıralı ise T_4-sıralıdır denir.

Örnek 3.2.3 $X = \{a, b, c\}$, $\preceq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$ olsun. c operatörü,

$$\begin{aligned} c(\{a\}) &= \{a\}, c(\{b\}) = \{a, b\}, c(\{c\}) = \{c\} \\ c(\{a, b\}) &= \{a, b\}, c(\{a, c\}) = \{a, c\}, c(\{b, c\}) = X, c(\emptyset) = \emptyset \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. $(X, c, \preceq)$ normal sıralıdır.

Teorem 3.2.6 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:
(i) $(X, c, \preceq)$ normal sıralıdır,
(ii) Her artan (azalan) $F \subseteq X$ kapalı kümesi ve her $F \subseteq U$ olacak şekildeki U artan (azalan) açığı için $F \subseteq V$ olacak şekilde V artan (azalan) komşuluğu var ve $c(V) \subseteq U$ dur.

İspat: (i)⇒(ii) $(X, c, \preceq)$ normal sıralı olsun. $F \subseteq X$ artan kapalı, U artan açık ve $F \subseteq U$ olsun. O halde, $F \subseteq U$ ise, $F \cap U^c = \emptyset$ elde edilir. $(X, c, \preceq)$ normal sıralı olduğundan,

$$\exists V_1 \in \mathcal{V}(F) \ni V_1 \text{ artan}, \exists V_2 \in \mathcal{V}(U^c) \ni V_2 \text{ azalan ve } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

dir. Ayrıca,

$$V_2 \in \mathcal{V}(U^c) \Rightarrow U^c \subseteq int_c V_2 \Rightarrow c(V_2^c) \subseteq U$$

ve $V_2^c \in \mathcal{V}(F)$ elde edilir.

(ii)⇒(i) $F_1, F_2 \subseteq X$ ayrık kapalılar, F_1 artan ve F_2 azalan olsun. Bu durumda, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olduğundan, $F_1 \subseteq F_2^c$ dir. F_2^c artan olduğundan

$$\exists U \in \mathcal{V}(F_1) \ni U \text{ artan ve } F_1 \subseteq c(U) \subseteq F_2^c$$

elde edilir. Ayrıca, $c(U) \subseteq F_2^c$ ise $F_2 \subseteq (c(U))^c = int_c(U^c)$ ve böylece $U^c \in \mathcal{V}(F_2)$ olacaktır. Sonuç olarak, $(X, c, \preceq)$ normal sıralıdır.

Önerme 3.2.10 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları ve

$$f : (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$$

sürekli, kapalı ve sıralı gömme (order-embedding) dönüşümü olsun. Bu durumda, $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ normal sıralı ise, $(X, c_X, \preceq_X)$ normal sıralıdır.

İspat: $F_1, F_2 \subseteq X$ ayrık kapalılar, F_1 artan ve F_2 azalan olsun. $f(F_1)$, $f(F_2) \subseteq Y$ ayrık kapalılar ve $f(F_1)$ artan, $f(F_2)$ azalandır. $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ normal sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}(f(F_1)), \exists V \in \mathcal{V}(f(F_2)) \ni U \cap V = \emptyset$$

olacaktır. Buradan, $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(F_1)$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(F_2) \ni f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ elde edilir. Sonuç olarak, $(X, c_X, \preceq_X)$ normal sıralıdır.

Önerme 3.2.11 $(X, c, \preceq)$ normal sıralı uzay olsun. $Y \subseteq X$ kapalı ve $\uparrow Y = \downarrow Y = Y$ ise, $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ normal sıralıdır.

İspat: $F_1, F_2 \subseteq Y$ ayrık kapalılar, F_1 artan ve F_2 azalan olsun. $(X, c, \preceq)$ normal sıralı uzay olduğundan,

$$\exists U_1 \in \mathcal{V}(F_1) \ni U_1 \text{ artan}, \exists U_2 \in \mathcal{V}(F_2) \ni U_2 \text{ azalan ve } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

elde edilir. Buradan, $U_1 \cap Y \in \mathcal{V}_Y(F_1)$ ve $U_2 \cap Y \in \mathcal{V}_Y(F_2)$ ve $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \emptyset$ olduğu görülür.

Tanım 3.2.7 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Eğer, (X, c) kompakt (güçlü kompakt) ve "$\preceq$" bağıntısı kapalı grafiğe sahip ise, X kompakt (güçlü kompakt) sıralı uzaydır denir.

Önerme 3.2.12 $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralı uzay ve $K \subseteq X$ kompakt bir alt küme olsun. Bu durumda $\downarrow K$ ve $\uparrow K$ kümeleri X uzayının kapalı alt kümeleridir.

İspat: $\uparrow K$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $a \in (\uparrow K)^c$ olsun. Bu durumda, $\forall x \in K$ için $x \not\preceq a$ olacaktır. $(X, c, \preceq)$ T_2-sıralı olduğundan,

$$\exists U_x \in \mathcal{V}(x) \ni U_x \text{ artan}, \exists V_a^x \in \mathcal{V}(a) \ni V_a^x \text{ azalan ve } U_x \cap V_a^x = \emptyset$$

dir. K kompakt olduğundan, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} int_c U_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = U$ olacaktır. $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_a^{x_i}$ alınırsa, $K \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$ ise $K \cap V = \emptyset$ dir. Böylece,

$$K \subseteq V^c \Rightarrow \uparrow K \subseteq V^c \Rightarrow V \subseteq (\uparrow K)^c$$

elde edilir. O halde, $(\uparrow K)^c$ açık ve $\uparrow K$ kapalıdır. $\downarrow K$ kümesinin kapalı olduğu da benzer şekilde gösterilir.

Önerme 3.2.13 $(X, c, \preceq)$ kompakt sıralı uzay olsun. Bu durumda, $F \subseteq X$ azalan ve $V \in \mathcal{V}(F)$ açık komşuluğu için $\exists W \in \mathcal{V}(F)$ açık azalan komşuluğu var ve $W \subseteq V$ dir.

İspat: $F \subseteq X$ azalan ve $V \in \mathcal{V}(F)$ açık komşuluğu verilsin. $W = (\uparrow (V^c))^c$ olarak alınırsa, W kümesi F kümesinin açık ve azalan bir komşuluğudur. Buradan,

$$V^c \subseteq \uparrow (V^c) \Rightarrow (\uparrow (V^c))^c \subseteq V \Rightarrow W \subseteq V$$

elde edilir.

Önerme 3.2.14 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve (X, c) güçlü kompakt kapanış uzayı olsun. Bu durumda, $(X, c, \preceq)$ regüler sıralı ise normal sıralıdır.

İspat: $(X, c, \preceq)$ regüler sıralı, $F_1, F_2 \subseteq X$ ayrık kapalılar, F_1 artan ve F_2 azalan olsun. $\forall y \in F_1$ için $y \notin F_2$ dir. Buradan, $y \notin c(F_2)$ elde edilir. $(X, c, \preceq)$ regüler sıralı olduğundan,

$$\exists U_y \in \mathcal{V}(y) \ni U_y \text{ artan ve } \exists V_y \in \mathcal{V}(F_2) \ni V_y \text{ azalan ve } U_y \cap V_y = \emptyset$$

elde edilir. F_1, kompakt kapanış uzayının kapalı alt kümesi olduğundan kompakttır. Dolayısıyla,

$$F_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} int_c U_{y_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

yazılabilir. $\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} = U$ denilirse, U kümesi F_1 kümesinin artan komşuluğudur. Ayruca, $\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} = V$ olmak üzere, $V \in \mathcal{V}(F_2), V$ azalan ve $U \cap V = \emptyset$ elde edilir. O halde, $(X, c, \preceq)$ normal sıralıdır.

3.3 Sıralı Kapanış Uzaylarında Bağlantılılık

Bu kısımda, sıralı kapanış uzaylarında sıralı bağlantılılık kavramını vereceğiz.

Tanım 3.3.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer, $\exists U \in \mathcal{V}(A), U$ azalan, $\exists V \in \mathcal{V}(B), V$ artan komşulukları var ve $U \cap B = \emptyset = V \cap A$ oluyorsa, A ve B sıralı yarı-ayrık kümelerdir denir.

Teorem 3.3.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $A_1, A_2 \subseteq X$ sıralı yarı-ayrık kümeler olsun. Bu durumda, $(A_1 \cap c^d(A_2)) \cup (A_2 \cap c^i(A_1)) = \emptyset$ dır.

İspat: A_1 ve A_2 sıralı yarı-ayrık kümeler olsun. Biran için

$$(A_1 \cap c^d(A_2)) \cup (A_2 \cap c^i(A_1)) \neq \emptyset$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$A_1 \cap c^d(A_2) \neq \emptyset \text{ veya } A_2 \cap c^i(A_1) \neq \emptyset$$

olacaktır. $A_1 \cap c^d(A_2) \neq \emptyset$ olsun. O halde, $\exists a \in A_1 \cap c^d(A_2)$ olup $a \in A_1$ ve $a \in c^d(A_2)$ elde edilir. Ayrıca, $a \in c^d(A_2)$ ise $\forall U \in \mathcal{V}(a)$ azalan komşuluğu için $U \cap A_2 \neq \emptyset$ olacaktır. O halde, $\forall U' \in \mathcal{V}(A_1)$ azalan komşuluğu için $U' \cap A_2 \neq \emptyset$ olduğu görülür. Bu ise A_1 ve A_2 kümelerinin sıralı yarı-ayrık kümeler olması ile çelişir. Benzer şekilde, $A_2 \cap c^i(A_1) \neq \emptyset$ olduğu kabul edilerek benzer sonuç elde edilir. Dolayısıyla, $(A_1 \cap c^d(A_2)) \cup (A_2 \cap c^i(A_1)) = \emptyset$ olur.

Teorem 3.3.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda, $(A \cap c(\uparrow B)) \cup (B \cap c(\downarrow A)) = \emptyset$ ise, A ve B sıralı-yarı ayrılmış kümelerdir.

İspat: $(A \cap c(\uparrow B)) \cup (B \cap c(\downarrow A)) = \emptyset$ olsun. Bu durumda,

$$A \cap c(\uparrow B) = \emptyset \text{ ve } B \cap c(\downarrow A) = \emptyset$$

elde edilir. Buradan, $A \subseteq (c(\uparrow B))^c$ ve $B \subseteq (c(\downarrow A))^c$ dir. Dolayısıyla,

$$A \subseteq int_c(\uparrow B)^c \text{ ve } B \subseteq int_c(\downarrow A)^c$$

olur. O halde, $(\uparrow B)^c \in \mathcal{V}(A)$ azalan komşuluk ve $(\downarrow A)^c \in \mathcal{V}(B)$ artan komşulukları vardır ve $(\uparrow B)^c \cap B = \emptyset = (\downarrow A)^c \cap A$ dir. Sonuç olarak, A ve B sıralı-yarı ayrılmış kümelerdir.

Tanım 3.3.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A boş kümeden farklı biri artan biri azalan ayrık iki sıralı yarı-ayrılmış kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, A ya sıralı bağlantılı küme denir.

Teorem 3.3.3 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:
(i) $(X, c, \preceq)$ sıralı bağlantılıdır

(ii) X biri artan biri azalan ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

(iii) X biri artan biri azalan ayrık iki kapalı kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

(iv) X in azalan açık ve kapalı alt kümesi yoktur.

(v) X in artan açık ve kapalı alt kümesi yoktur.

İspat: **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** $(X, c, \preceq)$ sıralı bağlantılı, $X = A \cup B$, A açık azalan, B açık artan ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu kabul X kümesinin sıralı bağlantılı olması ile çelişir. O halde, X biri artan biri azalan ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** $(X, c, \preceq)$ sıralı bağlantılı olmasın. Bu durumda, X biri artan biri azalan iki ayrık sıralı yarı-ayrılmış kümenin birleşimi olarak yazılır. Bu kümeler sırası ile A ve B olsun. A ve B sıralı yarı-ayrılmış kümeler olduğundan, $(A \cap c^d(B)) \cup (B \cap c^i(A)) = \emptyset$ elde edilir. Buradan, $(A \cap c^d(B)) = \emptyset$ ve $(B \cap c^i(A)) = \emptyset$ olacaktır. Ayrıca,

$$(A \cap c^d(B)) = \emptyset \Rightarrow B^c \cap c(B) = \emptyset \Rightarrow c(B) \subseteq B$$

ise B kapalı ve azalan kümedir.

$$(B \cap c^i(A)) = \emptyset \Rightarrow A^c \cap c(A) = \emptyset \Rightarrow c(A) \subseteq A$$

ise A kapalı ve artan kümedir.Dolayısıyla, A hem açık hem kapalı artan küme, B hem açık hem kapalı azalan kümedir. Bu ise **(ii)** ile çelişir. Sonuç olarak, $(X, c, \preceq)$ sıralı bağlantılıdır.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** $X = K \cup H$, K azalan kapalı, H artan kapalı ve $K \cap H = \emptyset$ olsun. Bu durumda, $X = K^c \cup H^c$, K^c artan açık, H^c azalan açık ve $K^c \cap H^c = \emptyset$ olur. Bu ise **(ii)** ile çelişir. Dolayısıyla, X biri artan biri azalan ayrık iki kapalı kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** $A \subseteq X$ ve A azalan açık ve kapalı olsun. O halde, A^c artan açık ve kapalıdır. $X = A \cup A^c$ olduğundan, **(iii)** ile çelişki elde edilir. X in azalan açık ve kapalı alt kümesi yoktur.

(iv) $\Rightarrow$ **(v)** Benzer şekilde gösterilir.

$(\mathbf{v}) \Rightarrow (\mathbf{i})$ Varsayalım ki X sıralı bağlantılı olmasın. $X = A \cup B$ ve A ile B sıralı-yarı ayrılmış ayrık kümeler ve sırasıyla artan ve azalan olsun. A ile B sıralı-yarı ayrılmış olduğundan, $(A \cap c^d(B)) \cup (B \cap c^i(A)) = \emptyset$ olacaktır. Buradan,

$$(A \cap c(B)) \cup (B \cap c(A)) = \emptyset$$

elde edilir. O halde, $A = B^c$ olduğundan, $B^c \cap c(B) = \emptyset$ ve $A^c \cap c(A) = \emptyset$ yazılır. Buradan, $c(B) \subseteq B$ ve $c(A) \subseteq A$ elde edilir. Dolayısıyla, A artan açık ve kapalı alt kümedir. Bu ise **(v)** ile çelişir. O halde, X sıralı bağlantılıdır.

Teorem 3.3.4 $(X, c, \preceq)$ sıralı bağlantılı kapanış uzayı olsun. Her $A \subseteq X$ artan veya azalan için $b(A) \neq \emptyset$ dir. (Burada $b(A)$ ile A kümesinin sınırı gösterilmektedir.)

İspat: $A \subseteq X$ artan ve $b(A) = \emptyset$ olsun. O halde, $b(A) = c(A) - int_c(A) = \emptyset$ olacaktır. Buradan, $A \subseteq c(A) \subseteq int_c A \subseteq A$ elde edilir. Bu durumda, A hem açık hem kapalı artan bir alt kümedir. Bu ise çelişkidir. O halde, $b(A) \neq \emptyset$.

Teorem 3.3.5 $(X, c_1, \preceq_1)$ ve $(Y, c_2, \preceq_2)$ sıralı kapanış uzayları,

$$f : (X, c_1, \preceq_1) \to (Y, c_2, \preceq_2)$$

sürekli ve artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $A, B \subseteq Y$ sıralı yarı-ayrılmış kümeler olmak üzere, $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri X üzerinde sıralı yarı-ayrılmış kümelerdir.

İspat: $A, B \subseteq Y$ sıralı yarı-ayrılmış kümeler olsun. Bu durumda, $\exists U \in \mathcal{V}(A)$ azalan ve $\exists V \in \mathcal{V}(B)$ artan komşuluğu var ve $U \cap B = \emptyset = V \cap A$ elde edilir. Ayrıca, $U \in \mathcal{V}(A)$ azalan ve f artan sürekli bir fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(f^{-1}(A))$ azalan komşuluktur. Benzer şekilde,

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(f^{-1}(B)) \text{ artan } \ni f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = \emptyset = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(A)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ X üzerinde sıralı yarı-ayrılmış kümelerdir.

Teorem 3.3.6 $(X, c_1, \preceq_1)$ ve $(Y, c_2, \preceq_2)$ sıralı kapanış uzayları,

$$f : (X, c_1, \preceq_1) \to (Y, c_2, \preceq_2)$$

bire-bir, sürekli ve artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $A \subseteq X$ sıralı-bağlantılı ise, $f(A) \subseteq Y$ sıralı-bağlantılıdır.

İspat: $A \subseteq X$ sıralı-bağlantılı ve $f(A) \subseteq Y$ sıralı-bağlantılı olmasın. Bu durumda, $f(A) = U \cup V$ olacak biçimde U artan, V azalan sıralı yarı-ayrılmış iki ayrık küme vardır. Dolayısıyla, $A = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \ni f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ sıralı yarı-ayrılmış iki kümedir. Bu ise A kümesinin sıralı bağlantılı olması ile çelişir. O halde, $f(A) \subseteq Y$ sıralı-bağlantılıdır.

Lemma 3.3.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı bağlantılı kapanış uzayı, $A, B \subseteq X$ sıralı yarı-ayrılmış kümeler ve $E \subseteq A \cup B$ olsun. Bu durumda, $E \cap A$ ve $E \cap B$ kümeleri de sıralı yarı-ayrılmış kümelerdir.

İspat: A ve B sıralı yarı-ayrılmış kümeler olsun. Bu durumda, $\exists U \in \mathcal{V}(A)$ azalan ve $\exists V \in \mathcal{V}(B)$ artan komşuluğu için $U \cap B = \emptyset = V \cap A$ elde edilir. Buradan,

$$E \cap A \subseteq A \subseteq int_c U \subseteq U \text{ ve } E \cap B \subseteq B \subseteq int_c V \subseteq V$$

olacaktır. Ayrıca, U kümesi, $E \cap A$ kümesinin azalan komşuluğu ve V kümesi, $E \cap B$ kümesinin artan komşuluğudur. Burada,

$$U \cap (E \cap B) = \emptyset = V \cap (E \cap A)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, $E \cap A$ ve $E \cap B$ kümeleri de sıralı yarı-ayrılmış kümelerdir.

Teorem 3.3.7 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $E \subseteq X$ olsun. E kümesinin sıralı bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul $E \subseteq G \cup H$ olacak şekildeki her G artan, her H azalan sıralı yarı-ayrılmış kümeleri için $E \subseteq G$ veya $E \subseteq H$ olmasıdır.

İspat: $E \subseteq X$ sıralı bağlantılı ve $E \subseteq G \cup H$, G artan ve H azalan sıralı yarı-ayrılmış kümeler olsun. $E = (E \cap G) \cup (E \cap H)$ ve Lemma 3.3.1 den $E \cap G$ ve $E \cap H$ sıralı yarı-ayrılmış kümelerdir. Bu ise E kümesinin sıralı bağlantılı olması ile çelişir. Bu durumda, $E \cap G = \emptyset$ veya $E \cap H = \emptyset$ elde edilir. Buradan, $E \subseteq G$ veya $E \subseteq H$ dır. Tersine, $E \subseteq X$ sıralı bağlantılı olmasın. Bu durumda, $E = G \cup H$ olacak şekilde G artan, H azalan sıralı yarı-ayrılmış kümeleri vardır. Hipotezden, $E \subseteq G$ veya $E \subseteq H$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde, $E \subseteq X$ sıralı bağlantılıdır.

4. SIRALI KAPANIŞ UZAYLARI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN SIRALI FONKSİYON UZAYI TOPOLOJİLERİ

Analizde bir uzaydan diğerine tanımlı fonksiyonlar ailesi ve bu aile üzerinde tanımlı fonksiyonlarla sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bu fonksiyonlar operatör olarak adlandırılmaktadır. Örneğin integral operatörü reel değerli bir fonksiyona bu fonksiyonun integralini karşılık getirmekte, diferensiyel operatörü bu fonksiyonun türevini bize vermektedir. Bu operatörlerin sürekli olup olmadığı sorusu topolojik bir sorudur. Ve bizi fonksiyon uzayı kavramına götürmektedir. Fonksiyon uzayları üzerinde bir çok topoloji tanımlanmıştır. Nokta-açık topoloji, kompakt-açık topoloji fonksiyon uzayı topolojilerinden en çok bilinenleridir. X ve Y topolojik uzaylar ve X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar $C(X,Y)$ ile gösterilsin. $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ olmak üzere,

$$[A,B] = \{f \in C(X,Y) | f(A) \subseteq B\}$$

biçiminde tanımlıdır. $\{[\{x\},V] : V \subseteq Y$ açık, $x \in X\}$ ailesi tarafından üretilen topoloji nokta-açık topoloji, $\{[C,V] : C \subseteq X$ kompakt, $V \subseteq Y$ açık$\}$ ailesi tarafından üretilen topoloji ise kompakt-açık topoloji olarak adlandırılmaktadır (Joshi 1984).

Literatürde fonksiyon uzayları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Arens ve Dugundji (1951), Georgiou vd. (1996), Georgiou ve Papadopoulos (2001), tarafından yapılan çalışmalar referans olarak verilebilir. Nailana (2000) ise, sıralı topolojik uzaylar arasında tanımlı sürekli ve artan fonksiyonlar kümesi üzerinde nokta-açık topoloji ve kompakt-açık topoloji tanımlarını vermiştir. Andrijević vd. (2011) ise kapanış uzayları arasında tanımlı fonksiyon kümesi üzerindeki topolojileri incelemiştir.

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, sıralı fonksiyon uzayları arasında tanımlı artan fonksiyonlar kümesi üzerinde bazı sıralı fonksiyon uzaylarını tanıtacağız. İkinci kısımda ise yarı sıralı düzgünleştirme kavramını vererek, birinci kısımda tanımlayacağımız sıralı fonksiyon uzayı topolojilerinde sıralı yarı düzgünleştirme kavramını inceleyecek ve bazı önemli sonuçlar elde edeceğiz.

4.1 Bazı Sıralı fonksiyon Uzayı Topolojileri

Bu kısımda kompakt açık(iç) sıralı ve nokta açık (iç) sıralı topoloji tanımlarını vereceğiz. Fonksiyon uzaylarında sıralı ayırma aksiyomları ile ilgili bazı sonuçlar elde edeceğiz.

Tanım 4.1.1 (X, c_X) ve (Y, c_Y) kapanış uzayları ve $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olmak üzere, $[A, B] = \{f \in \mathcal{F} \mid f(A) \subseteq B\}$ biçiminde tanımlansın.

$$\{[C, V] \mid C \subseteq X \text{ kompakt ve } V \subseteq Y \text{ açık}\}$$

ailesi $\mathcal{F}$ üzerinde bir topoloji için alt tabandır. Bu ailenin ürettiği topolojiye kompakt-açık topoloji denir ve τ_{CO} ile gösterilir.

$$\{[C, int_{c_Y} V] \mid C \subseteq X \text{ kompakt}, V \subseteq Y\}$$

ailesi de $\mathcal{F}$ üzerinde bir topoloji alt tabanıdır. Bu topoloji ise kompakt-iç topoloji olarak adlandırılır ve τ_{CI} ile gösterilir (Andrijević vd. 2011).

Aşağıda kompakt-açık ve kompakt-iç topoloji kavramları sıralı kapanış uzaylarında verilerek, kompat-açık ve kompakt-iç sıralı uzay tanımları yapılacaktır.

Tanım 4.1.2 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $\mathcal{F}^{\uparrow}$ ile X kümesinden Y kümesine tanımlı artan fonksiyonların bir alt ailesi gösterilsin. $\mathcal{F}^{\uparrow}$ üzerinde τ_{CO} ve "$\preceq_s$" noktasal sıralama göz önüne alınarak elde edilen $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{CO}, \preceq_s)$ üçlüsüne kompakt-açık sıralı uzay, $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{\mathcal{C}I}, \preceq_s)$ üçlüsüne ise kompakt-iç sıralı uzay denir.

Lemma 4.1.1 $(X, \tau_X, \preceq_X)$ ve $(Y, \tau_Y, \preceq_Y)$ sıralı topolojik uzaylar, $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olsun. $\uparrow [A, B] = [A, \uparrow B]$ ve $\downarrow [A, B] = [A, \downarrow B]$ eşitlikleri gerçeklenir (Nailana, 2000).

Nailana tarafından verilen yukarıdaki Lemma sıralı kapanış uzaylarında da geçerlidir.

Lemma 4.1.2 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları, $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olsun. $\uparrow [A, B] = [A, \uparrow B]$ ve $\downarrow [A, B] = [A, \downarrow B]$ eşitlikleri gerçeklenir.

İspat: İkinci eşitlik birinci eşitlik ile benzer şekilde yapılacağından sadece ilk eşitliği göstereceğiz. $f \in \uparrow [A, B]$ ve herhangi bir $a \in A$ olsun. O halde

$$\exists g \in [A, B] \ni g \preceq_s f$$

olacaktır. Noktasal sıralama tanımından, $g(a) \preceq_Y f(a)$ dır. $g(a) \in B$ olduğundan $f(a) \in \uparrow B$ elde edilir. Dolayısıyla, $f \in [A, \uparrow B]$ dir. Diğer yandan, $f \in [A, \uparrow B]$ olsun. Buradan, $f(A) \subseteq \uparrow B$ elde edilir ve her $a \in A$ için $f(a) \in \uparrow B$ dir. Buradan,

$$\exists b_a \in B \ni b_a \preceq_Y f(a)$$

elde edilir. Her $a \in A$ için $g(a) = b_a$ biçiminde tanımlı g fonksiyonunu göz önüne alırsak, $g \preceq_s f$ eşitsizliği aşikardır. Buradan $g \in [A, B]$ ve $g \preceq_s f$ elde edilir. Sonuç olarak $f \in \uparrow [A, B]$ ve $\uparrow [A, B] = [A, \uparrow B]$ dir.

Teorem 4.1.1 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralı ise, $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{\mathcal{CI}}, \preceq_s)$ T_2-sıralıdır.

İspat: $f, g \in \mathcal{F}^{\uparrow}$ ve $f \not\preceq_s g$ olsun. O halde

$$\exists x \in X \ni f(x) \not\preceq_Y g(x)$$

dir. $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x)) \ni U \text{ artan ve } \exists V \in \mathcal{V}_{c_Y}(g(x)) \ni V \text{ azalan ve } U \cap V = \emptyset$$

dir. Buradan,

$$[x, int_{c_Y} U] \in \mathcal{V}(f) \text{ ve } [x, int_{c_Y} V] \in \mathcal{V}(g)$$

elde edilir. Bu durumda, $[x, U]$ ve $[x, V]$ sırasıyla f ve g fonksiyonlarının artan ve

azalan komşuluklarıdır. Ayrıca, $[x,U] \cap [x,V] = \emptyset$ dir. Sonuç olarak, $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{\mathcal{C}I}, \preceq_s)$ T_2-sıralıdır.

Teorem 4.1.2 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $C^{\uparrow}(X,Y)$ ile X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm artan ve sürekli fonksiyonların kümesi gösterilsin. $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralı ise, $(C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{CO}, \preceq_s)$ T_2-sıralıdır.

İspat: $f, g \in \mathcal{F}^{\uparrow}$ ve $f \not\preceq_s g$ olsun. O halde

$$\exists x \in X \ni f(x) \not\preceq_Y g(x)$$

dir. $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x)) \ni U \text{ artan açık, } \exists V \in \mathcal{V}_{c_Y}(g(x)) \ni V \text{ azalan açık ve } U \cap V = \emptyset$$

dir. Buradan, $[x,U]$ ve $[x,V]$ sırasıyla f ve g nin artan ve azalan komşuluklarıdır. Ayrıca, $[x,U] \cap [x,V] = \emptyset$ dir. Sonuç olarak $(\mathcal{C}^{\uparrow}(X,Y), \tau_{\mathcal{C}O}, \preceq_s)$ T_2-sıralıdır.

Teorem 4.1.3 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları verilsin. $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ regüler sıralı ise $(C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{\mathcal{C}O}, \preceq_s)$ regüler sıralıdır.

İspat: $f \in C^{\uparrow}(X,Y)$ ve $[C,V]$, f fonksiyonunun temel açık artan komşuluğu olsun. Bu durumda, $V \subseteq Y$ artandır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f \in [C,V] &\Rightarrow f(C) \subseteq V \\ &\Rightarrow \forall\ x \in C : f(x) \in V \end{aligned}$$

dir. $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ regüler sıralı olduğundan, $f(x)$ noktasının $\widehat{c}_Y(W_x) \subseteq V$ olacak şekilde artan açık bir W_x komşuluğu vardır. Buradan, $\{W_x \mid x \in C\}$ ailesi $f(C)$ görüntü kümesinin açık örtüsüdür. $f(C)$ kompakt olduğundan, $f(C)$ kümesinin

$$\{W_{x_i} \mid i \in \{1,2,...,m\}\}$$

sonlu alt örtüsü vardır. Burada $W = \bigcup_{i=1}^{m} W_{x_i}$ şeklinde tanımlanırsa, W açık ve artandır. Ayrıca,

$$f(C) \subseteq W \subseteq \widehat{c_Y}(W) \subseteq V$$

dir. Buradan,

$$[C, W] \subseteq cl_{\mathcal{CO}}[C, W] \subseteq [C, \widehat{c}_Y(W)] \subseteq [C, V]$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(C^{\uparrow}(X, Y), \tau_{\mathcal{CO}}, \preceq_s)$ regüler sıralıdır.

Tanım 4.1.3 (X, c_X) ve (Y, c_Y) kapanış uzayları ve $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ olsun.

$$\{[\{x\}, V] \mid V \subseteq Y \text{ açık}\}$$

ailesi $\mathcal{F}$ üzerinde bir topoloji alt tabanıdır. Bu ailenin ürettiği topoloji nokta-açık topoloji olarak adlandırılır ve τ_{PO} ile gösterilir. $\{[\{x\}, int_{c_Y} V] \mid V \subseteq Y \text{ açık}\}$ ailesi de $\mathcal{F}$ üzerinde bir topoloji alt tabanıdır. Bu ailenin ürettiği topolojiye ise nokta-iç topoloji denir ve τ_{PI} ile gösterilir (Andrijević vd. 2011).

Tanım 4.1.4 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $\mathcal{F}^{\uparrow}$ üzerinde τ_{PO} ve "$\preceq_s$" noktasal sıralaması göz önüne alınarak elde edilen $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ üçlüsüne nokta-açık sıralı uzay, $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PI}, \preceq_s)$ üçlüsüne ise nokta-iç sıralı uzay denir.

Teorem 4.1.4 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:
(**i**) $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ T_0-sıralıdır $\Leftrightarrow$ $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_0-sıralıdır.
(**ii**) $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_0-sıralıdır $\Rightarrow$ $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PI}, \preceq_s)$ T_0-sıralıdır.

İspat: (**i**) $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ T_0-sıralı, $y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \not\preceq_Y y_2$ olsun. f ve g fonksiyonları her $x \in X$ için $f(x) = y_1$, $g(x) = y_2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $f \not\preceq_s g$ dir. $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ T_0-sıralı olduğundan f fonksiyonunun artan bir $[x, V]$ temel açık komşuluğu vardır ve $g \notin [x, V]$ dir veya g fonksiyonunun azalan bir $[x', V']$ temel açık

komşuluğu vardır ve $f \notin [x', V']$ dir. Buradan, açıkça görülür ki

$$V \in \mathcal{V}(y_1) \ni V \text{ artan ve } y_2 \notin V$$

veya

$$V' \in \mathcal{V}(y_2) \ni V' \text{ azalan ve } y_1 \notin V'$$

olacaktır. Sonuç olarak, $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_0-sıralıdır. Tersine, $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_0-sıralı olsun. $f \not\preceq_s g$ olacak şekilde herhangi bir $f, g \in \mathcal{F}^{\uparrow}$ alalım. Buradan,

$$\exists x \in X \ni f(x) \not\preceq_Y g(x)$$

dir. $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_0-sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}(f(x)) \ \ni U \text{ artan ve açık } \ni \ g(x) \notin U$$

veya

$$\exists V \in \mathcal{V}(g(x)) \ \ni V \text{ azalan ve açık } \ni \ f(x) \notin V$$

elde edilir. Bu durumda, $[x, U]$ kümesi f fonksiyonunun artan komşuluğu ve $g \notin [x, U]$ veya $[x, V]$ kümesi g fonksiyonunun azalan komşuluğu ve $f \notin [x, V]$ elde edilir. Sonuç olarak, $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ T_0-sıralıdır.

(**ii**) $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_0-sıralı olsun. $f, g \in \mathcal{F}^{\uparrow}$ ve $f \not\preceq_s g$ alalım. Buradan,

$$\exists x \in X \ni f(x) \not\preceq_Y g(x)$$

dir. $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ T_0-sıralı olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{V}(f(x)) \ \ni U \text{ artan ve } g(x) \notin U$$

veya

$$\exists V \in \mathcal{V}(g(x)) \ \ni V \text{ azalan ve } f(x) \notin V$$

elde edilir. Buradan, $[x, int_{c_Y} U] \in \mathcal{V}(f)$ ve $[x, int_{c_Y} V] \in \mathcal{V}(g)$ elde edilir. Ayrıca,

$[x, U]$ kümesi f fonksiyonunun artan komşuluğu, $[x, V]$ ise g fonksiyounun azalan komşuluğudur ve $[x, U] \cap [x, V] = \emptyset$ dir. Sonuç olarak, $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PI}, \preceq_s)$ T_0-sıralıdır.

Teorem 4.1.5 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:
(**i**) $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ T_1-sıralıdır$\Leftrightarrow$ $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_1-sıralıdır
(**ii**) $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ T_2-sıralıdır$\Leftrightarrow$ $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ T_2-sıralıdır
(**iii**) $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ regüler sıralı$\Rightarrow$ $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ regüler sıralıdır.

İspat: (**i**) ve (**ii**) daha önce ispatladığımız önermelere benzer şekilde gösterilir.
(**iii**) $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ regüler sıralı olsun. $f \in \mathcal{F}^{\uparrow}$, $[x, U] \in \mathcal{V}(f)$ ve $[x, U]$ artan olsun. Bu durumda, $U \in \mathcal{V}_{\widehat{c}_Y}(f(x))$ elde edilir. $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ regüler sıralı olduğundan,

$$\exists V \in \mathcal{V}_{\widehat{c}_Y}(f(x)) \ni \widehat{c}_Y(V) \subseteq U$$

elde edilir. Buradan,

$$f \in cl_{\tau_{PO}}[x, V] \subseteq [x, U]$$

ve dolayısıyla $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ alt regüler-sıralıdır. Üst regüler-sıralı olma durumu da benzer şekilde gösterilir. Sonuç olarak, $(\mathcal{F}^{\uparrow}, \tau_{PO}, \preceq_s)$ regüler sıralıdır.

4.2 Yarı Düzgünlük Yapısı ve Sıralı Yarı Düzgünleştirme

Bu kısımda öncelikle yarı düzgün uzay kavramı ile ilgili temel bilgileri vereceğiz. Sıralı yarı düzgünleştirme kavramını tanıtacağız ve bazı sıralı fonksiyon uzaylarında sıralı yarı düzgünleştirme kavramını çalışacağız.

$X \neq \emptyset$ olsun. $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ biçiminde tanımlı kümeye, X kümesinin köşegeni denir. $A \subseteq X \times X$ olmak üzere, $A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$ kümesi A kümesinin tersi olarak adlandırılır ve $A = A^{-1}$ oluyorsa, A kümesine simetriktir

denir. $A, B \subseteq X \times X$ olmak üzere,

$$A \circ B = \{(x, y) : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in A \text{ ve } (z, y) \in B\}$$

biçiminde tanımlıdır. $A \circ A$ kümesi için A^2 gösterimi kullanılacaktır (Page 1989).

Tanım 4.2.1 X kümesi üzerinde bir $\mathcal{U}$ yarı-düzgünlük yapısı $X \times X$ kartezyen çarpım kümesinin alt kümelerinden oluşan ve aşağıdaki u_1) ve u_2) şartlarını sağlayan bir süzgeç yapısıdır.
u_1) $\Delta_X \subseteq \cap\mathcal{U}$
u_2) $U \in \mathcal{U}$ ise $U^{-1} \in \mathcal{U}$

Bu durumda, $(X,\mathcal{U})$ yarı-düzgün uzay olarak adlandırılır. $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere, $U[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $\mathcal{C} = \{U[x] \mid U \in \mathcal{U}\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeçtir. X kümesi üzerinde $\mathcal{C}$ ailesini x noktasında komşuluk tabanı kabul eden bir tek Čech kapanış operatörü vardır. Bu kapanış operatörü $\mathcal{U}$ yarı-düzgünlük yapısı tarafından indirgenen kapanış operatörü olarak adlandırılır ve $c_{\mathcal{U}}$ ile gösterilir. Yani, her yarı-düzgünlük yapısı bir Čech kapanış operatörü indirger. X kümesi üzerindeki herhangi bir c Čech kapanış operatörü bir $\mathcal{U}$ yarı-düzgünlük yapısı tarafından indirgeniyorsa, c yarı düzgünleştirilebilirdir denir. (Čech 1966).

Tanım 4.2.2 $(X,\mathcal{U})$ yarı-düzgün uzay olsun. $\mathcal{U}$ yarı düzgünlük yapısının bir alt ailesi $\mathcal{V}$ olsun.

$$\forall U \in \mathcal{U} \text{ için } \exists V \in \mathcal{V} \ni V \subseteq U$$

oluyorsa, $\mathcal{V}$ ailesine $\mathcal{U}$ yarı düzgünlük yapısının tabanı denir (Čech 1966).

Uyarı 4.2.1 Bir X kümesinin sonlu alt kümeler ailesi $2^{(X)}$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.2.3 $\{(X_i, \mathcal{U}_i)\}_{i \in I}$ yarı düzgünlük yapılarının bir ailesi olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere, $\mathcal{U}_i$ yarı düzgünlük yapılarının çarpım yarı düzgünlük yapısı olan $\mathcal{U}_p$,

$$(\mathcal{B}_J)_{J\in 2^{(I)}} = \{(x,,y) \in X \times X \mid i \in J \Rightarrow (pr_i x, pr_i y) \in U_i\}$$

yarı düzgünlük alt tabanı tarafından üretilen yarı düzgünlük yapısıdır. Ayrıca, $(\mathcal{B}_J)_{J\in 2^{(I)}}$ ailesinin elemanları $\prod_{i\in I} V_i$ biçiminde ifade edilebilir. Burada, sonlu sayıdaki i noktaları için $V_i = U_i \in \mathcal{U}_i$ ve diğer noktalar için $V_i = X_i \times X_i$ şeklindedir. Čech (1966) göstermiştir ki herbir $\mathcal{U}_i$ tarafından indirgenen kapanış operatörü $c_{\mathcal{U}_i}$ olmak üzere, $\mathcal{U}_p$ tarafından indirgenen kapanış operatörü, $\prod_{i\in I} c_{\mathcal{U}_i}$ çarpım kapanış operatörü ile çakışır. Diğer bir deyimle, yarı düzgünleştirilebilen kapanış uzaylarının çarpımı da yarı düzgünleştirilebilirdir.

Yarı-düzgünlük yapıları yardımıyla topolojik uzaylar elde etmek de mümkündür. Page (1989) göstermiştir ki, $(X,\mathcal{U})$ bir yarı-düzgünlük yapısı olmak üzere, X üzerinde $\mathcal{U}$ tarafından indirgenen bir tek $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisi vardır öyleki $\mathcal{U}_x = \{U[x] \mid U \in \mathcal{U}\}$ ailesi x noktasında $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisinin komşulukları için bir tabandır. Diğer bir ifadeyle,

$$G \in \tau_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \forall x \in G \text{ için } \exists U \in \mathcal{U} \ni U[x] \subseteq G$$

dır. Burada dikkat edilmelidir ki $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ uzayında $x \in X$ noktasındaki her komşuluk $\mathcal{U}_x$ ailesinin elemanıdır. Fakat, bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani, $\mathcal{U}_x$ ailesinin elemanları x noktasının komşuluğu olmak zorunda değildir. Bu duruma aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 4.2.1 $X = \{a, b, c\}$ olsun. $B = \Delta \cup \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$ şeklinde tanımlansın. $\mathcal{B} = \{B\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir $\mathcal{U}$ yarı düzgünlük yapısı için bazdır. $\tau_{\mathcal{U}} = \{\emptyset, X\}$ biçimindedir. Burada, $B[a] = \{a, b\}$ olup, a noktasının bir komşuluğu değildir.

Yukarıda ifade edilen ve Örnek 5.2.1 ile de gösterilen durum büyük bir sıkıntı doğurmaktadır. Bu sorunu gidermek için topolojik yarı düzgünlük yapısı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.4 $\mathcal{U}$, X kümesi üzerinde bir yarı-düzgünlük yapısı ve $\mathcal{U}$ tarafından indirgenen topoloji $\tau_{\mathcal{U}}$ olsun. $\mathcal{U}$ tarafından indirgenen kapanış operatörü $c_{\mathcal{U}}$ ile $\tau_{\mathcal{U}}$

topolojisinin Kuratowski kapanış operatörü birbirine eşit oluyorsa, $\mathcal{U}$ yarı-düzgünlük yapısına topolojik yarı-düzgünlük yapısı denir. Eğer herhangi bir (X, τ) topolojik uzayı bir topolojik yarı-düzgünlük yapısı tarafından indirgeniyorsa, τ topolojisine topolojik yarı düzgünleştirilebilirdir denir. Açıkça görülür ki, topolojik yarı-düzgünlük yapısı tarafından indirgenen kapanış operatörü topolojik kapanış operatörüdür (Page 1989).

Yarı-düzgünlük yapılarını daha kullanışlı hale getirmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Williams (1972) lokal yarı düzgünlük yapısını tanımlamıştır. Bu çalışmaya göre, $(X, \mathcal{U})$ yarı-düzgün uzay olsun. Eğer

$$\forall U \in \mathcal{U} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \exists V \in \mathcal{U} \ni V^2[x] \subseteq U[x]$$

oluyorsa, $\mathcal{U}$ lokal yarı düzgünlük yapısı olarak adlandırılır. Ayrıca, lokal yarı düzgünlük yapısı topolojik bir yarı-düzgünlük yapısıdır.

Lemma 4.2.1 $(X,\mathcal{U})$ yarı düzgün uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için,

$$x \preceq_{\mathcal{U}} y \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \text{ için } U[y] \subseteq U[x]$$

şeklinde tanımlı "$\preceq_{\mathcal{U}}$" bağıntısı bir ön sıralama bağıntısıdır.

İspat: (**i**) $x \preceq_{\mathcal{U}} x$ olduğu açıkça görülmektedir.
(**ii**) $x \preceq_{\mathcal{U}} y$ ve $y \preceq_{\mathcal{U}} z$ olsun. Herhangi bir $U \in \mathcal{U}$ alalım. "$\preceq_{\mathcal{U}}$" bağıntısının tanımından,

$$U[y] \subseteq U[x] \text{ ve } U[z] \subseteq U[y]$$

elde edilir. Dolayısıyla, $U[z] \subseteq U[x]$ ve $x \preceq_{\mathcal{U}} z$ dir.

Tanım 4.2.5 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ yarı-düzgünlük yapısı için $c = c_{\mathcal{U}}$ ve $\preceq = \preceq_{\mathcal{U}}$ oluyorsa, X yarı-düzgünleştirilebilir sıralı kapanış uzayı olarak adlandırılır.

Bu tanım sıralı topolojik uzaylarda da benzer şekilde verilebilir. $(X, \tau, \preceq)$ sıralı topolojik uzay olsun, $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$ ve $\preceq = \preceq_{\mathcal{U}}$ oluyorsa, X yarı düzgünleştirilebilir sıralı uzay olarak adlandırılır. Burada eğer $\mathcal{U}$ topolojik bir yarı düzgünlük yapısı ise X topolojik yarı düzgünleştirilebilir sıralı topolojik uzay olarak adlandırılır.

Lemma 4.2.2 (X, c) bir Čech kapanış uzayı ve c ile ilişkili topoloji τ_c olsun. Eğer c kapanış operatörü $\mathcal{U}$ yarı düzgünlük yapısı tarafından indirgeniyor ise, $\tau_c = \tau_{\mathcal{U}}$ eşitliği vardır.

İspat: $\mathcal{U}$, X üzerinde yarı düzgünlük yapısı ve $c_{\mathcal{U}} = c$ olsun. $\tau_c = \tau_{\mathcal{U}}$ olduğunu göstereceğiz. $G \in \tau_c$ ve $x \in G \Rightarrow x \notin G^c$

$$\Rightarrow x \notin c(G^c)$$
$$\Rightarrow \exists U[x] \ni U[x] \cap G^c = \emptyset$$
$$\Rightarrow \exists U[x] \text{ ve } U[x] \subseteq G$$

dir. Dolayısıyla, $G \in \tau_{\mathcal{U}}$ dır. Tersine, $G \in \tau_{\mathcal{U}}$ olsun. $G \in \tau_c$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $c(G^c) = G^c$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x \in c(G^c)$ olsun. O halde,

$$\forall U \in \mathcal{U} \text{ için } U[x] \cap G^c \neq \emptyset$$

dir. Buradan, $x \notin G$ elde edilir. Gerçekten, $x \in G$ olsaydı,

$$\exists U' \in \mathcal{U} \ni U'[x] \subseteq G \text{ ve } U'[x] \cap G^c = \emptyset$$

olurdu. Bu ise

$$\forall U \in \mathcal{U} \text{ için } U[x] \cap G^c \neq \emptyset$$

ifadesi ile çelişir. Sonuç olarak, $\tau_c = \tau_{\mathcal{U}}$ elde edilir.

Lemma 4.2.3 Topolojik yarı düzgünleştirilebilir sıralı topolojik uzayın sıralı alt uzayı da topolojik yarı düzgünleştirilebilir sıralı uzaydır.

İspat: $(X, \tau, \preceq)$ topolojik yarı düzgünleştirilebilir sıralı topolojik uzay ve $A \subseteq X$

olsun. X uzayı $\mathcal{U}$ topolojik yarı düzgünlük yapısı tarafından indirgensin.

$$\mathcal{U}_A = (A \times A) \cap \mathcal{U}$$

yarı düzgünlük yapısının $(A, \tau_A, \preceq_A)$ uzayını indirgediğini göstereceğiz. Öncelikle $\preceq_A = \preceq_{\mathcal{U}_A}$ olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x \preceq_A y &\Leftrightarrow x \preceq y \\ &\Leftrightarrow x \preceq_{\mathcal{U}} y \\ &\Leftrightarrow x \preceq_{\mathcal{U}_A} y \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ise $\tau_A = \tau_{\mathcal{U}_A}$ olduğunu gösterelim. $G \in \tau_A$ olsun. Bu durumda,

$$\exists H \in \tau \ni G = H \cap A$$

yazılabilir. Ayrıca, $x \in G \Rightarrow x \in H$ ve $x \in A$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U} \ni U[x] \subseteq H \text{ ve } x \in A \\ &\Rightarrow ((A \times A) \cap U)[x] \subseteq G \end{aligned}$$

dir. Tersine, $G \in \tau_{\mathcal{U}_A}$ ve $x \in G$ olsun. $\tau_{\mathcal{U}_A}$ topolojisinin tanımından,

$$\exists U \in \mathcal{U} \ni ((A \times A) \cap U)[x] \subseteq G$$

yazabiliriz. $U[x]$ kümesi $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisine göre x noktasının komşuluğu olduğundan,

$$\exists H \in \tau \ni x \in H \subseteq U[x]$$

dır. Dolayısıyla, $x \in (A \times A) \cap H \subseteq G$ elde edilir. Sonuç olarak, $\tau_A = \tau_{\mathcal{U}_A}$ eşitliği gösterilmiş olur.

Önerme 4.2.1 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:
(**i**) $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ yarı-düzgünleştirilebilir sıralı uzay ise $(C^{\uparrow}(X, Y), \tau_{PO}, \preceq_s)$ yarı düzgünleştirilebilir sıralı topolojik uzaydır.

(**ii**) $(Y, \widetilde{c}_Y, \preceq_Y)$ yarı-düzgünleştirilebilir sıralı uzay ise $(C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{PI}, \preceq_s)$ yarı düzgünleştirilebilir sıralı topolojik uzaydır.

İspat: (i) $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)$ yarı-düzgünleştirilebilir sıralı uzay olsun. Čech (1966), yarı-düzgünleştirilebilir kapanış uzaylarının çarpımının da yarı düzgünleştirilebilir olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla, $\prod \widehat{c}_Y$ yarı düzgünleştirilebilirdir. Andrijević vd. (2011), τ_{PO} ile $\tau(\prod \widehat{c}_Y)$ topolojilerinin birbirine eşit olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla, Lemma 5.2.2 kullanılırsa, τ_{PO} topolojisinin yarı düzgünleştirilebilir olduğu açıktır. $\widehat{c}_Y$ operatörü, $\mathcal{U}$ yarı-düzgünlük yapısı tarafından indirgensin ve $\forall x \in X$ için $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}$ olmak üzere, $\prod\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_p$ olsun. τ_{PO} topolojisi $\mathcal{U}_p$ tarafından indirgenir. Burada $\mathcal{U}_p$ nin topolojik bir yarı düzgünlük yapısı olduğu açıktır. Şimdi ise her $x \in X$ için $(\preceq_Y)_x = \preceq_Y$ ve $Y_x = Y$ olmak üzere, $\preceq_{\mathcal{U}_p} = \prod\limits_{x\in X} (\preceq_Y)_x$ olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $a, b \in \prod\limits_{x\in X} Y_x$ ve $(a,b) \in \prod\limits_{x\in X} (\preceq_Y)_x$ olsun. $a \preceq_{\mathcal{U}_p} b$ olduğunu gösterelim. Açıkça görülür ki,

$$(a,b) \in \prod_{x\in X} (\preceq_Y)_x \Rightarrow \forall x \in X \text{ için } a_x \preceq_Y b_x$$

dir. Keyfi bir $U \in \mathcal{U}_p$ için $U[b] \subseteq U[a]$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $z \in U[b]$ noktasını göz önüne alalım. Bu durumda, $(b,z) \in U$ dur. Çarpım yarı düzgünlük yapısı tanımı kullanılırsa, sonlu sayıdaki x için $U_x \in \mathcal{U}$ ve sonsuz sayıdaki x noktaları için ise $U_x = Y \times Y$ olmak üzere,

$$(b,z) \in \prod_{x\in X} U_x \subseteq U$$

dur. Ayrıca,

$$(b,z) \in \prod_{x\in X} U_x \Rightarrow \forall x \in X \text{ için } (pr_x b, pr_x z) \in U_x$$

(Burada $pr_x b = b_x, pr_x z = z_x$ biçimindedir) dır. Dolayısıyla, her x için

$$U_x[b_x] \subseteq U_x[a_x] \Rightarrow z_x \in U_x[a_x]$$

elde edilir. Diğer bir deyişle, $(a_x, z_x) \in U_x$ dir. Buradan,

$$(a, z) \in U \text{ ve } z \in U[a]$$

dir. Böylece $U[b] \subseteq U[a]$ kapsaması gösterilmiş olur. Şimdi ise herhangi bir $a, b \in \prod_{x\in X} Y_x$ için $a \preceq_{\mathcal{U}_p} b$ olsun. $\forall x \in X$ için $a_x \preceq_Y b_x$ olduğunu göstereceğiz. $\preceq_Y = \preceq_{\mathcal{U}}$ olduğundan, $\forall x \in X$ için $a_x \preceq_{\mathcal{U}} b_x$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Herhangi bir $z \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ alalım. $U' = \prod_{x\in X} U_x$ biçiminde tanımlansın. Burada,

$$U_x = \begin{cases} U_z = U, z = x \text{ ise} \\ U_x = Y \times Y, z \neq x \text{ ise} \end{cases}$$

biçimindedir. $a \preceq_{\mathcal{U}_p} b$ olduğundan, $U'[b] \subseteq U'[a]$ dir. Ayrıca $U[b_z] \subseteq U[a_z]$ olduğu açıktır. Gerçekten, $t \in U[b_z]$ olsun. $t' = (t, t, t, ...t, ..)$ olmak üzere, $(b, t') \in U'$ elde edilir. O halde $t' \in U'[b]$ ve dolayısıyla $t' \in U'[a]$ dır. Buradan $t \in U[a_z]$ dır.
Buraya kadar yaptıklarımız ile $(\prod_{x\in X} Y_x, \tau(\prod_{x\in X}(\widehat{c}_Y)_x), \prod_{x\in X}(\preceq_Y)_{x\in X})$ uzayının $\mathcal{U}_p$ tarafından indirgendiğini gösterdik. Ayrıca lemma 5.2.3 den biliyoruz ki, topolojik yarı düzgünleştirilebilir sıralı uzayların sıralı alt uzayları da yarı düzgünleştirilebilir sıralı uzaylardır. Dolayısıyla,

$$(\prod_{x\in X} Y_x, \tau(\prod_{x\in X}(\widehat{c}_Y)_x), \prod_{x\in X}(\preceq_Y)_{x\in X})$$

uzayının, $C^{\uparrow}(X, Y)$ alt kümesine indirgenen sıralı alt uzayı $(C^{\uparrow}(X, Y), \tau_{PO}, \preceq_s)$ yarı düzgünleştirilebilir sıralı topolojik uzaydır.
(ii) Andrijević, Jelíc ve Mršević (2011), τ_{PI} ile $\tau(\prod \widetilde{c}_Y)$ topolojilerinin birbirine eşit olduğunu göstermişlerdir. İspatın kalan kısmı ilk ifade ile benzer şekilde gösterilir.

Lemma 4.2.3 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $\mathcal{U}$, $C^{\uparrow}(X, Y)$ üzerinde bir yarı düzgünlük yapısı olsun. $\forall U \in \mathcal{U}$ için

$$U^c[g] = \{f \in C^{\uparrow}(X, Y) \mid f \text{ sabit fonksiyon ve } (f, g) \in U\}$$

şeklinde tanımlansın. $f, g \in C^{\uparrow}(X,Y)$ olmak üzere,

$$f \preceq^{c}_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U} \text{ için } U^{c}[g] \subseteq U^{c}[f]$$

şeklinde tanımlı "$\preceq^{c}_{\mathcal{U}}$" bağıntısı bir ön sıralama bağıntısıdır.

İspat: (**i**) $f \preceq^{c}_{\mathcal{U}} f$ olduğu açıktır.
(**ii**) $f \preceq^{c}_{\mathcal{U}} g$ ve $g \preceq^{c}_{\mathcal{U}} h$ olsun. Herhangi bir $U \in \mathcal{U}$ alalım. O halde, $U^{c}[g] \subseteq U^{c}[f]$ ve $U^{c}[h] \subseteq U^{c}[g]$ eşitsizlikleri vardır. Buradan, $U^{c}[h] \subseteq U^{c}[f]$ ve dolayısıyla, $f \preceq^{c}_{\mathcal{U}} h$ elde edilir.

Önerme 4.2.2 $(C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{PO}, \preceq_s)$ $((C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{PI}, \preceq_s))$ sıralı topolojik uzayı verilsin. Eğer, $\mathcal{U}$ topolojik yarı düzgünlük yapısı $\tau_{PO}(\tau_{PI})$ topolojisini indirgiyor ve $\preceq_s = \preceq^{c}_{\mathcal{U}}$ oluyor ise $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)((Y, \widetilde{c}_Y, \preceq_Y))$ uzayı yarı-düzgünleştirilebilir sıralı kapanış uzayıdır.

İspat: $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_{PO}$ ve $\preceq_s = \preceq^{c}_{\mathcal{U}}$ olsun. f_a ve f_b fonksiyonları

$$\forall x \in X \text{ için } f_a(x) = a \text{ ve } f_b(x) = b$$

biçiminde tanımlansın. O halde,

$$\forall U \in \mathcal{U} \text{ için } \widehat{U} = \{(a,b) \mid (f_a, f_b) \in U\}$$

olmak üzere, $\mathcal{B} = \{\widehat{U} \mid U \in \mathcal{U}\}$ ailesi $C^{\uparrow}(X,Y)$ üzerinde bir yarı-düzgünlük yapısı için tabandır. Bu ailenin ürettiği yarı düzgünlük yapısı $\widehat{\mathcal{U}}$ olsun. İlk olarak, $\widehat{c}_Y = c_{\widehat{\mathcal{U}}}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için herhangi bir $x \in X$ noktasında $\{\widehat{U}[x] \mid U \in \mathcal{U}\}$ ailesinin $\widehat{c}_Y$ kapanış operatörü için komşuluk tabanı olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla,
i) $\forall \widehat{U}[x] \in \mathcal{V}_{\widehat{c}_Y}(x)$
ii) $\forall V \in \mathcal{V}_{\widehat{c}_Y}(x)$ için $\exists U \in \mathcal{U} \ni \widehat{U}[x] \subseteq V$

şartlarının sağlandığını göstereceğiz. Herhangi bir $U \in \mathcal{U}$ için $\widehat{U}[x]$ kümesini göz

önüne alalım. Bu durumda, $U[f_x] \in \mathcal{V}_{\tau_{PO}}(f_x)$ dir. O halde nokta-açık topoloji tanımından,

$$\exists [z, O] \in \tau_{PO} : f_x \in [z, O] \subseteq U[f_x]$$

dir. Buradan, $x \in O \subseteq \widehat{U}[x]$ elde edilir. Sonuç olarak, $\widehat{U}[x] \in \mathcal{V}_{\widehat{c}_Y}(x)$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi ise herhangi bir $V \in \mathcal{V}_{\widehat{c}_Y}(x)$ alalım. Burada V açık komşuluk olarak ele alınabilir. O halde,

$$[x, V] \in \tau_{PO} \text{ ve } f_x \in [x, V]$$

dir. $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_{PO}$ olduğundan,

$$\exists U \in \mathcal{U} \ni U[f_x] \subseteq [x, V]$$

dir. Buradan açıkça görülür ki $\widehat{U}[x] \subseteq V$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} z \in \widehat{U}[x] &\Rightarrow (x, z) \in \widehat{U} \\ &\Rightarrow (f_x, f_z) \in U \\ &\Rightarrow f_z \in U[f_x] \\ &\Rightarrow z \in V \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $\widehat{c}_Y = c_{\widehat{\mathcal{U}}}$ elde edilir. Şimdi, $\preceq_Y = \preceq_{\widehat{\mathcal{U}}}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Herhangi bir $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \preceq_Y y_2$ ve $\widehat{U} \in \widehat{\mathcal{U}}$ olsun. f_{y_1} ve f_{y_2} fonksiyonları

$$\forall x \in X \text{ için } f_{y_1}(x) = y_1,\ f_{y_2}(x) = y_2$$

biçiminde tanımlansın. Buradan, $f_{y_1} \preceq_s f_{y_2}$ olduğu görülür ve $\preceq_s = \preceq_{\mathcal{U}}^c$ olduğundan, $f_{y_1} \preceq_{\mathcal{U}}^c f_{y_2}$ dir. O halde,

$$\forall U \in \mathcal{U} \text{ için } U^c[f_{y_2}] \subseteq U^c[f_{y_1}]$$

dir. Ayrıca, $\widehat{U}[y_2] \subseteq \widehat{U}[y_1]$ olduğu açıktır. Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
z \in \widehat{U}[y_2] &\Rightarrow (y_2, z) \in \widehat{U} \\
&\Rightarrow (f_{y_2}, f_z) \in U \\
&\Rightarrow f_z \in U^c[f_{y_2}] \\
&\Rightarrow f_z \in U^c[f_{y_1}] \\
&\Rightarrow (f_{y_1}, f_z) \in U \\
&\Rightarrow z \in \widehat{U}[y_1]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Tersine, $y_1, y_2 \in Y$ ve $y_1 \preceq_{\widehat{\mathcal{U}}} y_2$ olsun. $y_1 \preceq_{\widehat{\mathcal{U}}} y_2$ olduğundan, açıkça görülürki $U^c[f_{y_2}] \subseteq U^c[f_{y_1}]$ dir. Dolayısıyla, $f_{y_1} \preceq^c_{\mathcal{U}} f_{y_2}$ dir. Ayrıca, $\preceq^c_{\mathcal{U}} = \preceq_s$ olduğundan, $f_{y_1} \preceq_s f_{y_2}$ ve $y_1 \preceq_Y y_2$ elde edilir.

Sonuç 5.2.1 $(X, c_X, \preceq_X)$ ayrık kapanış uzayı ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ herhangi bir sıralı kapanış uzayı olsun. Eğer $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)((Y, \widetilde{c}_Y, \preceq_Y))$ yarı düzgünleştirilebilir sıralı kapanış uzayı ise $(C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{CO}, \preceq_s)$ $((C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{CI}, \preceq_s))$ yarı düzgünleştirilebilir sıralı topolojik uzaydır.

İspat: (X, c_X) ayrık kapanış uzayı olduğundan, $\tau_{PO}(\tau_{PI})$ ile $\tau_{CO}(\tau_{CI})$ topolojileri birbirine eşittir. Dolayısıyla, Önerme 5.2.2 den ispat yapılır.

Tanım 4.2.6 $(X, c_X, \preceq_X)$ sıralı kapanış uzayı ve $\mathcal{U}$, Y üzerinde bir lokal yarı-düzgünlük yapısı olsun. Bu durumda, $K \subseteq X$ kompakt ve $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$$(K, U) = \{(f, g) \in C^{\uparrow}(X,Y) \times C^{\uparrow}(X,Y) \mid (f(x), g(x)) \in U, \forall x \in K\}$$

biçiminde tanımlansın. (K, U) kümelerinin oluşturduğu aile $C^{\uparrow}(X,Y)$ üzerinde bir lokal yarı-düzgünlük yapısı için tabandır. Bu ailenin ürettiği lokal yarı-düzgünlük yapısını $\mathcal{U}_k$ ile gösterelim. $\mathcal{U}_k$ kompakt kümeler üzerindeki $\mathcal{U}-$lokal yarı düzgünlük yakınsaklığının lokal yarı düzgünlük yapısı olarak adlandırılır. Burada,
$(C^{\uparrow}(X,Y), \tau_{\mathcal{U}_k}, \preceq_{\mathcal{U}_k})$ üçlüsüne kompakt kümeler üzerindeki $\mathcal{U}-$lokal yarı düzgünlük yakınsaklığının sıralı topolojisi denir.

Lemma 4.2.4 $(X,\mathcal{U})$ lokal yarı düzgünlük uzayı olsun. Bu durumda $\forall U \in \mathcal{U}$ ve $\forall x \in X$ için $V[x] \subseteq U[x]$ olacak şekilde simetrik ve kapalı $V \in \mathcal{U}$ vardır.

İspat: $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ olsun. Williams (1972) göstermiştir ki,

$$\exists V \in \mathcal{U} \ni V^3[x] \subseteq U[x]$$

dir. Burada V kümesini simetrik alabiliriz. Ayrıca Page (1989)

$$\overline{V} = \bigcap_{\mathcal{U}} W \circ V \circ W^{-1} \subseteq V \circ V \circ V^{-1} \subseteq V^3$$

olduğunu ispatlamıştır. Buradan, her x noktası için

$$\overline{V}[x] \subseteq V^3[x] \subseteq U[x]$$

elde edilir. Ayrıca, V simetrik iken $\overline{V}$ kümesinin de simetrik olduğu açıktır. Sonuç olarak, $\overline{V}$ kapalı ve simetrik bir küme olup $\forall x \in X$ için $V[x] \subseteq U[x]$ kapsaması gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.1 $(X, c_X, \preceq_X)$ sıralı kapanış uzayı ve $(Y, \widehat{c}_Y, \preceq_Y)((Y, \widetilde{c}_Y, \preceq_Y))$ lokal yarı düzgünlük yapısı tarafından indirgenen sıralı kapanış uzayı olsun. Y uzayını indirgeyen lokal yarı düzgünlük yapısı $\mathcal{U}$ olmak üzere, kompakt açık (iç) sıralı uzay ile $\mathcal{U}-$lokal yarı düzgünlük yakınsaklığının sıralı topolojisi çakışır.

İspat: $[K,U]$ kompakt açık topolojinin temel açığı ve $g \in [K,U]$ olsun. Bu durumda

$$\exists E \in \mathcal{U} \ni E[g(K)] \subseteq U$$

dır. Gerçekten, $x \in g(K) \Rightarrow x \in U$

$$\Rightarrow \exists D_x \in \mathcal{U} \ni D_x[x] \subseteq U$$
$$\Rightarrow \exists E_x \in \mathcal{U} \ni E_x^2[x] \subseteq D_x[x] \subseteq U$$

dır. $g(K)$ kompakt olduğundan, $g(K) \subseteq E_{x_1}[x_1] \cup E_{x_2}[x_2] \cup ... \cup E_{x_n}[x_n]$ dir.

$$E = E_{x_1} \cap ... \cap E_{x_n}$$

olmak üzere, $E[g(K)] \subseteq U$ dur.

$$D = \{(f,h) \mid (f(x), h(x)) \in E, \forall x \in K\}$$

biçiminde tanımlansın. $D \in \mathcal{U}_k$ olduğu açıktır. Ayrıca $g \in D[g] \subseteq [K,U]$ dır. Gerçekten, $h \in D[g] \Rightarrow \forall x \in K$ için $(g(x), h(x)) \in E$

$$\Rightarrow \forall x \in K \text{ için } h(x) \in E[g(x)]$$
$$\Rightarrow h(x) \in E[g(K)] \subseteq U$$
$$\Rightarrow h \in [K,U]$$

elde edilir. Şimdi ise $G \in \tau_{\mathcal{U}_k}$ ve $f \in G$ olsun. Bu durumda $(K,U)[f] \subseteq G$ olacak şekilde $K \subseteq X$ kompakt ve $U \in \mathcal{U}$ vardır. Lemma 5.2.5 kullanılırsa,

$$\forall x \in K \text{ için } T_x^3[f(x)] \subseteq U[f(x)]$$

olacak şekilde simetrik ve kapalı T kümesi vardır. $T = \bigcap\limits_{x \in K} T_x$ biçiminde tanımlanırsa, T kümesi simetrik ve kapalıdır. $f(K)$ kompakt olduğundan,

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T[f(x_i)]$$

dır. Her $i \in \{1,2,...,n\}$ için,

$$K_i = K \cap f^{-1}(T[f(x_i)]) \text{ ve } G_i = int_{\widehat{c}_Y}(T^2[f(x_i)])$$

olmak üzere, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [K_i, G_i]$ biçiminde tanımlansın. O halde $f \in A \subseteq E_{K,D}[f]$ elde

edilir. Gerçekten, $g \in A$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned} g(K_i) \subseteq G_i &\Rightarrow \forall a \in K_i \text{ için } g(a) \in G_i \\ &\Rightarrow \forall a \in K_i \; g(a) \in int_{\widehat{C}_Y}(T^2[f(x_i)]) \\ &\Rightarrow \forall a \in K_i \; g(a) \in T^2[f(x_i)] \\ &\Rightarrow \forall a \in K_i \; (f(x_i), g(a)) \in T^2 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $\forall a \in K_i$ için $f(a) \in T[f(x_i)]$ olur. Dolayısıyla, $(f(a), g(a)) \in T^3$ elde edilir. Buradan,

$$g(a) \in T^3[f(a)] \text{ ve } g(a) \in U[f(a)]$$

olacaktır. Şimdi ise $\preceq_{\mathcal{U}_k} = \preceq_s$ olduğunu göstereceğiz. $f, g \in C^{\uparrow}(X, Y)$ ve $f \preceq_s g$ olsun.

$$\begin{aligned} f \preceq_s g &\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) \preceq_Y g(x) \\ &\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U} \text{ için } U[g(x)] \subseteq U[f(x)] \end{aligned}$$

dır. Herhangi bir $(K, U) \in \mathcal{U}_k$ alalım. Açıkça görülürki $(K, U)[g] \subseteq (K, U)[f]$ dir. Dolayısıyla, $f \preceq_{\mathcal{U}_k} g$ elde edilir. Tersine, $f, g \in C^{\uparrow}(X, Y)$ ve $f \preceq_{\mathcal{U}_k} g$ olsun. Herhangi bir $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ alalım. O halde $(x, U) \in \mathcal{U}_k$ dır. $f \preceq_{\mathcal{U}_k} g$ olduğundan, $U[g(x)] \subseteq U[f(x)]$ elde edilir. Şöyleki, $t \in U[g(x)]$ olsun. $\forall x \in X$ için $h(x) = t$ biçiminde tanımlı h fonksiyonunu göz önüne alalım. O halde $h \in (x, U)[g]$ dir. Buradan, $h \in (x, U)[f]$ elde edilir. O halde,

$$(f(x), h(x)) \in U \text{ ve } h(x) = t \in U[f(x)]$$

dir. Sonuç olarak, $f \preceq_s g$ elde edilir.

5. İ-C(X,Y) VE D-C(X,Y) ÜZERİNDEKİ KAPANIŞ OPERATÖRLERİ İÇİN BİR SINIFLANDIRMA YÖNTEMİ

Fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı topolojiler için bir sınıflandırma yöntemi Arens ve Dugundji (1951) tarafından verilmiş ve $C(X,Y)$ üzerinde tanımlı topolojiler için kabul edilebilir olma ve uygun olma tanımları yapılmıştır. Di Concilio (1984) v-sürekli fonksiyon tanımını vermiştir. Bu çalışmaya göre, X ve Y topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer,

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \text{ için } \exists U \in \mathcal{V}(x) \ni f(\overline{U}) \subseteq \overline{V}$$

oluyorsa, f fonksiyonu x noktsında v-süreklidir denir. f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında v-sürekli ise f fonksiyonu v-süreklidir denir ve v-sürekli fonksiyonların kümesi $\Theta(X,Y)$ ile gösterilir. Di Concilio (1984), $\Theta(X,Y)$ üzerinde, $v-$kabul edilebilir ve $v-$uygun topoloji tanımlarını vermiştir. Georgiou ve Papadopoulos (1996) güçlü $v-$sürekli fonksiyon tanımını vermişlerdir. Bu çalışmaya göre, X ve Y topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer,

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \text{ için } \exists U \in \mathcal{V}(x) \ni f(\overline{U}) \subseteq V$$

oluyorsa, f fonksiyonu x noktasında güçlü v-süreklidir denir. f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında güçlü v-sürekli ise f fonksiyonu güçlü v-süreklidir denir ve güçlü v-sürekli fonksiyonların kümesi $S\Theta(X,Y)$ ile gösterilmiştir. Ayrıca, $S\Theta(X,Y)$ üzerindeki topolojiler için güçlü $v-$kabul edilebilir ve güçlü $v-$uygun topoloji tanımları verilmiştir.

Mršević (2005) kapanış uzayları yardımıyla elde edilen fonksiyon uzayları üzerinde tanımlanabilecek kapanış operatörleri ve topolojiler için kabul edilebilir olma ve uygun olma kavramlarını çalışmıştır.

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda $i-$sürekli ve $d-$sürekli fonksiyon tanımlarını vereceğiz ve $i-$sürekli fonksiyonlar kümesini $i - C(X,Y)$ ile $d-$sürekli

fonksiyonlar kümesini $d-C(X,Y)$ ile göstereceğiz. İkinci kısımda $i-C(X,Y)$ $(d-C(X,Y))$ üzerindeki kapanış operatörleri için $i(d)-$kabul edilebilir olma, $i(d)-$uygun olma tanımlarını vererek bazı sonuçlar elde edeceğiz.

5.1 İ-Sürekli ve D-Sürekli Fonksiyonlar

Bu kısımda öncelikle sıralı kapanış uzayları arasında tanımlı fonksiyon uzayları için $i-sureklilik$, d-$sureklilik$ kavramlarını tanımlayacağız ve $i-sürekli$, $d-sürekli$ fonksiyonların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 5.1.1 $(X,c_X,\preceq_X)$ ve $(Y,c_Y,\preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları ve $x\in X$ olsun. $f{:}X\to Y$ bir fonksiyon olmak üzere:
(**i**) Her $V\in\mathcal{V}(f(x))$ için x noktasının artan bir U komşuluğu var ve $f(U)\subseteq V$ oluyorsa, f fonksiyonu $x\in X$ noktasında $i-sureklidir$ denir.
(**ii**) Her $V\in\mathcal{V}(f(x))$ için x noktasının azalan bir U komşuluğu var ve $f(U)\subseteq V$ oluyorsa, f fonksiyonuna $x\in X$ noktasında $d-sureklidir$ denir.

X kümesinden Y kümesine giden tüm $i-sürekli$ $(d-sürekli)$ fonksiyonlar $i-C(X,Y)(d-C(X,Y))$ ile göstereceğiz.

$i-sürekli$ her fonksiyon süreklidir. Aşağıdaki örnek bu önermenin tersinin her zaman doğru olamayacağını göstermek için verilebilir.

Örnek 5.1.1 $\mathbb{Z}^+$ üzerinde her $A\subseteq X$ için $c(A)=A\cup\{x+1\mid x\in A\}$ biçiminde tanımlansın. $\mathbb{Z}^+$ bilinen sıralaması ile ele alınırsa, $(\mathbb{Z}^+,c,\leq)$ sıralı kapanış uzayıdır.

$$id_{\mathbb{Z}^+}:\mathbb{Z}^+\underset{x}{\underset{\to}{\to}}\underset{id_{\mathbb{Z}^+}(x)=x}{\mathbb{Z}^+}$$

süreklidir. Fakat $id_{\mathbb{Z}^+}$ fonksiyonu $i-sürekli$ değildir. Gerçekten; $A=\{1,2\}\in\mathcal{V}(1)$ olmasına rağmen $f(U)\subseteq A$ olacak şekilde 1 noktasının bir U artan komşuluğu yoktur.

$d-sürekli$ her fonksiyon süreklidir. Benzer şekilde; bu önermenin tersi de her zaman doğru değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 5.1.2 $\mathbb{Z}^-$ üzerinde her $A \subseteq X$ için $c(A) = A \cup \{x-1 \mid x \in A\}$ biçiminde tanımlansın. $\mathbb{Z}^-$ bilinen sıralaması ile ele alınırsa, $(\mathbb{Z}^-, c, \leq)$ bir sıralı kapanış uzayıdır.

$$id_{\mathbb{Z}^-} : \underset{x}{\mathbb{Z}^-} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{id_{\mathbb{Z}^-}(x)=x}{\mathbb{Z}^-}$$

süreklidir. Fakat $d-sürekli$ değildir. Gerçekten; $\{-1,-2\} \in \mathcal{V}(-1)$ dir. Fakat, $f(U) \subseteq \{-1,-2\}$ olacak şekilde -1 noktasının bir U azalan komşuluğu yoktur. Dolayısıyla, $id_{\mathbb{Z}^-}$ fonkiyonu $d-sürekli$ değildir.

Önerme 5.1.1 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Bu durumda, herhangi bir $f : (X, c_X, \preceq_X) \rightarrow (Y, c_Y, \preceq_Y)$ fonksiyonu $i-sürekli$ ise her $A \subseteq X$ için $f(c_X^i(A)) \subseteq c_Y(f(A))$ dır.

İspat: f $i-sürekli$ bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $A \subseteq X$ ve $x \in c_X^i(A)$ noktası verilsin. $V \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x))$ olsun. f fonksiyonu $i-sürekli$ olduğundan

$$\exists U \in \mathcal{V}_{c_X}(x) \ni U \text{ artan ve } f(U) \subseteq V$$

dir. $x \in c_X^i(A)$ olduğundan $U \cap A \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ dir. Sonuç olarak, $f(x) \in c_Y(f(A))$ dır.

Önerme 5.1.2 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Bu durumda, herhangi bir $f : (X, c_X, \preceq_X) \rightarrow (Y, c_Y, \preceq_Y)$ fonksiyonu $d-sürekli$ ise her $A \subseteq X$ için $f(c_X^d(A)) \subseteq c_Y(f(A))$ dır.

İspat: İspat benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.1.1 $(X, c_X, \preceq_X)$ artan (azalan) komşuluklar tabanına sahip bir kapanış uzayı ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ bir sıralı kapanış uzayı olsun. Bu durumda, X kümesinden Y kümesine tanımlı sürekli her fonksiyon $i-süreklidir$ $(d-süreklidir)$.

İspat: $f : (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ sürekli bir fonksiyon ve $(X, c_X, \preceq_X)$ artan komşuluklar tabanına sahip bir sıralı kapanış uzayı olsun. $x \in X$ ve $V \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x))$ olmak üzere, f sürekli olduğundan

$$\exists U \in \mathcal{V}_{c_X}(x) \ni f(U) \subseteq V$$

dir. Ayrıca X artan komşuluklar tabanına sahip olduğundan x noktasının artan bir U' komşuluğu vardır ve $f(U') \subseteq f(U) \subseteq V$ dir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $i - sürekli dir$.

Önerme 5.1.3 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $x \in X$ noktası ve $f : (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Eğer herhangi bir $V \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x))$ için $f^{-1}(V)$, x noktasının artan (azalan) komşuluğu oluyorsa f fonksiyonu x noktasında $i - sürekli dir (d - sürekli dir)$.

İspat: $V \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x))$ olsun. Hipotezden, $f^{-1}(V)$, x noktasının artan komşuluğudur. Ve $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ olduğundan $f\ i - sürekli$ fonksiyondur.

Yukarıdaki önermenin tersi her zaman doğru değildir. Bunun için aşağıdaki iki örneği vereceğiz.

Örnek 5.1.1 $X = \{1, 2, 3\}$ ve $\preceq = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$ olsun. X üzerinde c kapanış operatörü

$$\begin{aligned} c(\{1\}) &= \{1\}, c(\{2\}) = \{1, 2\}, c(\{3\}) = \{1, 3\}, c(\emptyset) = \emptyset \\ c(\{1, 2\}) &= \{1, 2\}, c(\{1, 3\}) = \{1, 3\}, c(\{2, 3\}) = X = c(X) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu $x = 3$ noktasında $i - sürekli dir$. Fakat, $\{1, 2\} \in \mathcal{V}(2)$ için $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 3\}$ olup 3 noktasının artan bir komşuluğu değildir.

Örnek 5.1.2 $X = \{1, 2, 3\}$ ve $\preceq = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1)\}$ olsun. X üzerinde

c kapanış operatörü ve f fonksiyonu bir önceki örnekte verildiği gibi alınsın. Bu durumda f fonksiyonu $x = 3$ noktasında $d - sureklidir$. Fakat, $\{1, 2\} \in \mathcal{V}(2)$ için $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 3\}$ olup 3 noktasının azalan bir komşuluğu değildir.

Lemma 5.1.1 $(X, \preceq)$ ön sıralı bir küme olsun. $A \subseteq X$ verilsin. A kümesinin "$\preceq$" ön sıralama bağıntısına göre artan (azalan) olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin "$\preceq^{-1}$" ön sıralamasına göre azalan (artandır) olmasıdır.

İspat: A kümesi "$\preceq$" bağıntısına göre artan olsun. $\downarrow_{\preceq^{-1}} A = A$ olduğunu göstereceğiz. $x \in \downarrow_{\preceq^{-1}} A$ olsun. O halde $\exists a \in A \ni x \preceq^{-1} a$ dır. Buradan $a \preceq x$ elde edilir. A kümesi "$\preceq$" bağıntısına göre artan olduğundan $x \in A$ dır. $\downarrow_{\preceq^{-1}} A \subseteq A$ ve $\downarrow_{\preceq^{-1}} A = A$ elde edilir.

Tersine, A kümesi "$\preceq^{-1}$" bağıntısına göre azalan ve $x \in \uparrow_{\preceq} A$ olsun. O halde

$$\exists a' \in A \ni a' \preceq x$$

dir. Buradan $x \preceq^{-1} a$ yazabiliriz. A kümesi azalan olduğundan $x \in A$ dır. Sonuç olarak, A kümesi "$\preceq$" bağıntısına göre artandır.

Aşağıdaki teorem $i - sureklilik$ ile $d - sureklilik$ arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 5.1.2 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Bu durumda, $f : (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$fonksiyonunun $i - sureklidir$ $(d - sureklidir)$ olması için gerek ve yeter koşul $f : (X, c_X, \preceq_X^{-1}) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ fonksiyonunun $d - sureklidir$ $(i - sureklidir)$ olmasıdır.

İspat: f fonksiyonu $i - sureklidir$ olsun. $f : (X, c_X, \preceq_X^{-1}) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ fonksiyonunun $d - sureklidir$ olduğunu göstereceğiz. $x \in X$ ve $V \in \mathcal{V}_{c_Y}(f(x))$ olsun. f, $i - sureklidir$ olduğundan x noktasının artan bir U komşuluğu var ve $f(U) \subseteq V$ dir. Lemma 6.1.1 kullanılarak, U kümesinin $(X, c_X, \preceq_X^{-1})$ uzayında x noktasının azalan bir komşuluğu olduğu görülür. Sonuç olarak, $f : (X, c_X, \preceq_X^{-1}) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$

$d-sürekli$ fonksiyondur. Tersine, $f:(X,c_X,\preceq_X^{-1})\to(Y,c_Y,\preceq_Y)$ $d-sürekli$, $x\in X$ ve $V\in\mathcal{V}_{c_Y}(f(x))$ olsun. f, $d-sürekli$ olduğundan x noktasının azalan bir U komşuluğu var ve $f(U)\subseteq V$ dir. O halde açıkça görülür ki, U kümesi $(X,c_X,\preceq_X)$ uzayında x noktasının artan bir komşuluğudur. Sonuç olarak; $f:(X,c_X,\preceq_X)\to(Y,c_Y,\preceq_Y)$ $i-süreklidir.$

Tanım 5.1.2 $(X,c,\preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ X üzerinde bir ağ olsun. Eğer, x noktasının her artan U komşuluğu için $\exists\lambda_0\in\Lambda$ ve $\forall\lambda\geq\lambda_0$ için $x_\lambda\in U$ oluyorsa x_λ ağı x noktasına $i-$yakınsıyor denir ve $x_\lambda\overset{i-c}{\to}x$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma dual olarak, $d-yakınsaklık$ tanımını vereceğiz.

Tanım 5.1.3 $(X,c,\preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ X üzerinde bir ağ olsun. Eğer, x noktasının her azalan U komşuluğu için $\exists\lambda_0\in\Lambda$ ve $\forall\lambda\geq\lambda_0$ için $x_\lambda\in U$ oluyorsa, x_λ ağı x noktasına $d-$yakınsıyor denir ve $x_\lambda\overset{d-c}{\to}x$ ile gösterilir.

Sıralı kapanış uzaylarında yakınsaklık $i-yakınsaklığı$ ve $d-yakınsaklığı$ gerektirir. Fakat, bu önermenin tersi doğru değildir. Bunun için aşağıdaki iki örneği vereceğiz.

Örnek 5.1.3 $X=\{a,b,c\}$ ve $\preceq=\{(a,a),(b,b),(c,c),(c,a),(c,b),(b,a)\}$ olsun. X üzerinde c kapanış operatörü,

$$\begin{aligned} c(\{a\}) &= \{a\}, c(\{b\})=\{b,c\}, c(\{c\})=\{a,c\} \\ c(X) &= X=c(\{a,b\})=c(\{b,c\}), c(\{a,c\})=\{a,c\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}=(a,a,...,a,...)$ ağını göz önüne alalım. $y_\lambda\overset{i-c}{\to}b$ dir. Fakat, $y_\lambda\nrightarrow b$ dir.

Örnek 5.1.4 $X=\{a,b,c\}$ ve $\preceq=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,b)\}$ olsun. X üzerinde

c kapanış operatörü,

$$\begin{aligned} c(\{a\}) &= \{a\}, c(\{b\}) = \{b,c\}, c(\{c\}) = \{a,c\} \\ c(X) &= X = c(\{a,b\}) = c(\{b,c\}), c(\{a,c\}) = \{a,c\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (a, a, ..., a, ...)$ ağını göz önüne alalım. $y_\lambda \overset{d-c}{\to} b$ dir. Fakat, $y_\lambda \nrightarrow b$ dir.

Teorem 5.1.3 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları, $f{:}X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktirler:
(**i**) f fonksiyonu x noktasında $i-sürekli dir.$
(**ii**) x noktasına $i-yakınsayan$ her $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsar.

İspat: f fonksiyonu $x \in X$ noktasında $i-sürekli$ ve $x_\lambda \overset{i-c}{\to} x$ olsun. $V \in \mathcal{V}(f(x))$ olmak üzere, f $i-sürekli$ olduğundan

$$\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni U \text{ artan ve } f(U) \subseteq V$$

dir. $x_\lambda \overset{i-c}{\to} x$ olduğundan

$$\exists \lambda_0 \in \Lambda \ni \forall \lambda \geq \lambda_0 \text{ için } x_\lambda \in U$$

dur. Buradan, $f(x_\lambda) \in V$ elde edilir. Dolayısıyla, $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsar. Tersine, $x \in X$ noktasına $i-yakınsayan$ her $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsak olsun. Biran için f fonksiyonu $x \in X$ noktasında $i-sürekli$ olmasın. Bu durumda,

$$\exists V \in \mathcal{V}_{(f(x))} : \forall U \in \mathcal{V}(x) \text{ artan için } f(U) \nsubseteq V$$

dir. Açıkça görülür ki, $\{x_U \mid U \in \mathcal{V}(x) \text{ artan}\}$ ağı x noktasına $i-yakınsar$. Bu durum

$$\{f(x_U) \mid U \in \mathcal{V}(x) \text{ artan}\}$$

ağının $f(x)$ noktasına yakınsaması ile çelişir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $i-süreklidir$.

Teorem 5.1.4 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları, $f{:}X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktirler:
(**i**) f fonksiyonu x noktasında $d-süreklidir$.
(**ii**) $x \in X$ noktasına $d-yakınsayan$ her $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsar.

İspat: İspat benzer şekilde yapılır.

Lemma 5.1.2 $(X, \preceq_X)$ ve $(Y, \preceq_Y)$ önsıralı iki küme olsun. $A \subseteq X, B \subseteq Y$ olmak üzere, $\uparrow (A \times B) = \uparrow A \times \uparrow B$ dir.

İspat: $(x, y) \in \uparrow (A \times B) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in A \times B \ni (a, b) \preceq_X \times \preceq_Y (x, y)$
$\Leftrightarrow \exists a \in A, \exists b \in B \ni a \preceq_X x$ ve $b \preceq_Y y$
$\Leftrightarrow x \in \uparrow A$ ve $y \in \uparrow B$
$\Leftrightarrow (x, y) \in \uparrow A \times \uparrow B$

elde edilir. $\uparrow (A \times B) = \uparrow A \times \uparrow B$ dir.

Önerme 5.1.4 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(y_\mu)_{\mu\in M}$ sırasıyla X ve Y üzerinde birer ağ, $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda,

$$(x_\lambda, y_\mu) \overset{i-c}{\to} (x, y) \Leftrightarrow x_\lambda \overset{i-c}{\to} x \text{ ve } y_\mu \overset{i-c}{\to} y$$

dır.

İspat: $(x_\lambda, y_\mu) \overset{i-c}{\to} (x, y)$ olsun. U kümesi x noktasının artan bir komşuluğu ve V kümesi de y noktasının artan bir komşuluğu olsun. O halde $U \times V$ kartezyen çarpım kümesi çarpım kapanış uzayında (x, y) noktasının artan bir komşuluğudur. Bu durumda,

$$\exists (\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times M \ni \forall (\lambda, \mu) \geq (\lambda_0, \mu_0) \text{ için } (x_\lambda, y_\mu) \in U \times V$$

dir. Sonuç olarak, $x_\lambda \in U$ ve $y_\mu \in V$ elde edilir. Tersine, $x_\lambda \overset{i-c}{\to} x$ ve $y_\mu \overset{i-c}{\to} y$ olsun. W kümesi (x, y) noktasının artan bir komşuluğu olsun. Bu durumda,

$$\exists U \in \mathcal{V}_{c_X}(x), \exists V \in \mathcal{V}_{c_Y}(y) \ni U \times V \subseteq W$$

dır. Açıkça görülürki $\uparrow (U \times V) \subseteq W$ dır. Lemma 6.1.2 den, $\uparrow U \times \uparrow V \subseteq W$ elde edilir. $x_\lambda \overset{i-c}{\to} x$ ve $y_\mu \overset{i-c}{\to} y$ olduğundan,

$$\exists \lambda_0 \in \Lambda, \exists \mu_0 \in M \ni \forall \lambda \geq \lambda_0, \mu \geq \mu_0 \text{ için } x_\lambda \in \uparrow U \text{ ve } y_\mu \in \uparrow V$$

dir. Buradan,

$$\exists (\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times M \ni \forall (\lambda, \mu) \geq (\lambda_0, \mu_0) \text{ için } (x_\lambda, y_\mu) \in W$$

ve dolayısıyla, $(x_\lambda, y_\mu) \overset{i-c}{\to} (x, y)$ elde edilir.

Önerme 5.1.5 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $(y_\mu)_{\mu \in M}$ sırasıyla X ve Y üzerinde birer ağ, $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda,

$$(x_\lambda, y_\mu) \overset{d-c}{\to} (x, y) \Leftrightarrow x_\lambda \overset{d-c}{\to} x \text{ ve } y_\mu \overset{d-c}{\to} y$$

dır.

İspat: Benzer şekilde gösterilir.

Tanım 5.1.4 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları, $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $i-C(X, Y)$ üzerinde bir ağ ve $f \in i-C(X, Y)$ olsun. Eğer, X üzerindeki bir $(x_\mu)_{\mu \in M}$ ağı $x \in X$ noktasına $i-yakınsıyor$ iken $\{f_\lambda(x_\mu) : (\lambda, \mu) \in \Lambda \times M\}$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsıyor ise f_λ f fonksiyonuna $i-sürekli$ yakınsar denir ve $f_\lambda \overset{icc}{\to} f$ ile gösterilir.

Dual olarak, $d-sürekli$ yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 5.1.5 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $d-C(X,Y)$ üzerinde bir ağ ve $f \in d-C(X,Y)$ olsun. Eğer, X üzerindeki bir $(x_\mu)_{\mu\in M}$ ağı $x \in X$ noktasına $d-yakınsıyor$ iken $\{f_\lambda(x_\mu) : (\lambda,\mu) \in \Lambda\times M\}$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsıyor ise f_λ f fonksiyonuna $d-sürekli$ yakınsar denir ve $f_\lambda \overset{dcc}{\to} f$ ile gösterilir.

5.2 İ(D)-Uygun ve İ(D)-Kabul Edilebilir Kapanış Operatörleri

Bu kısımda, i-uygun (d-uygun) ve i-kabul edilebilir (d-kabul edilebilir) kapanış operatörleri tanımlanarak, bunlar ile ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 5.2.1 X, Y, Z boş kümeden farklı üç küme olsun. $Z \times X$ kümesinden Y kümesine tanımlı her g fonksiyonu için Z kümesinden Y^X kümesine, her $z \in Z$ için

$$(g^*)(z)(x) = g(z,x)$$

biçiminde tanımlı bir g^* fonksiyonu vardır. $Y^{Z\times X}$ kümesinden $(Y^X)^Z$ kümesine giden ve her $g \in Y^{Z\times X}$ için $E(g) = g^*$ biçiminde tanımlı E fonksiyonuna üstel (exponential) fonksiyon denir. $Y^X \times X$ kümesinden Y kümesine giden, her $(f,x) \in Y^X \times X$ için $\varepsilon(f,x) = f(x)$ biçiminde tanımlı ε fonksiyonuna ise ölçüm (evaluation) fonksiyonu denir (Arens ve Dugundji. 1951).

Tanım 5.2.2 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları ve c, $i-C(X,Y)$ üzerinde bir kapanış operatörü olsun. Bu durumda, her $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ uzayı için
(i) $g : (Z, c_Z, \preceq_Z) \times (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ $i-sürekli$ bir fonksiyon iken

$$E(g) = g^* : (Z, c_Z, \preceq_Z) \to (i-C(X,Y), c, \preceq_s)$$

$i-sürekli$ oluyorsa c operatörüne $i-uygun$ (proper) kapanış operatörü denir.
(ii) $E(g) = g^* : (Z, c_Z, \preceq_Z) \to (i-C(X,Y), c, \preceq_s)$ $i-sürekli$ bir fonksiyon iken

$$g : (Z, c_Z, \preceq_Z) \times (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$$

$i-sürekli$ oluyorsa c operatörüne $i-kabul\ edilebilir$ $(admissible)$ kapanış operatörü denir.

Bu tanıma dual olarak $d-C(X,Y)$ üzerindeki kapanış operatörlerinin bir karekterizasyonunu veren aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 5.2.3 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları ve c, $d-C(X,Y)$ üzerinde bir kapanış operatörü olsun. Bu durumda, her $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ uzayı için
(i) $g : (Z, c_Z, \preceq_Z) \times (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ fonksiyonu $d-sürekli$ bir fonksiyon iken

$$E(g) = g^* : (Z, c_Z, \preceq_Z) \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$$

$d-sürekli$ oluyorsa c operatörüne $d-uygun$ (proper) kapanış operatörü denir.
(ii) $E(g) = g^* : (Z, c_Z, \preceq_Z) \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$ fonksiyonu $d-sürekli$ bir fonksiyon iken

$$g : (Z, c_Z, \preceq_Z) \times (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$$

$d-sürekli$ oluyorsa c operatörüne $d-kabul\ edilebilir$ $(admissible)$ kapanış operatörü denir.

Teorem 5.2.1 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları, c ve c' $i-C(X,Y)$ üzerinde iki kapanış operatörü olsun. Aşağıdakiler doğrudur:
(i) c', c den ince ve c' $i-$uygun ise c $i-$uygundur.
(ii) c', c den kaba ve c' $i-kabul\ edilebilir$ ise c $i-kabul\ edilebilirdir$.

İspat: **(i)** c', c den ince ve c' $i-$uygun olsun. Herhangi bir $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ sıralı kapanış uzayı için $g : (Z, c_Z, \preceq_Z) \times (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$ $i-sürekli$ olsun. c' $i-$uygun olduğundan

$$E(g) = g^* : (Z, c_Z, \preceq_Z) \to (i - C(X,Y), c', \preceq_s)$$

$i-süreklidir$. Ayrıca, c' kapanış operatörü c kapanış operatöründen ince olduğundan,

$$E(g) = g^* : (Z, c_Z, \preceq_Z) \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$$

fonksiyonu $i-sürekli dir.$

(**ii**) c', c den kaba ve c' $i-kabul\ edilebilir$ olsun. Herhangi bir $(Z,c_Z,\preceq_Z)$ sıralı kapanış uzayı için $E(g)=g^*:(Z,c_Z,\preceq_Z)\to(i-C(X,Y),c,\preceq_s)$ $i-sürekli$ olsun. O halde,

$$g^*:(Z,c_Z,\preceq_Z)\to(i-C(X,Y),c',\preceq_s)$$

$i-sürekli dir.$ c' $i-kabul\ edilebilir$ olduğundan,

$$g:(Z,c_Z,\preceq_Z)\times(X,c_X,\preceq_X)\to(Y,c_Y,\preceq_Y)$$

$i-sürekli dir.$ Sonuç olarak, c $i-kabul\ edilebilirdir.$

Teorem 5.2.2 $(X,c_X,\preceq_X)$ ve $(Y,c_Y,\preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları, c ve c' $d-C(X,Y)$ üzerinde iki kapanış operatörü olsun. Aşağıdakiler doğrudur:
(**i**) c', c den ince ve c' $d-$uygun ise c $d-$uygundur.
(**ii**) c', c den kaba ve c' $d-kabul\ edilebilir$ ise c $d-kabul\ edilebilirdir.$

İspat: Benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.2.3 $(X,c_X,\preceq_X)$ ve $(Y,c_Y,\preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $i-C(X,Y)$ üzerindeki c kapanış operatörü,
(**i**) $i-uygun$ olması için gerek ve yeter koşul $(i-C(X,Y),c,\preceq_s)$ uzayındaki bir ağın $i-sürekli$ yakınsaklığının yakınsaklığını gerektirmesidir.
(**ii**) $i-kabul\ edilebilir$ olması için gerek ve yeter koşul $(i-C(X,Y),c,\preceq_s)$ uzayındaki bir ağın yakınsaklığının $i-sürekli\ yakınsaklığını$ gerektirmesidir.

İspat: (**i**) c $i-C(X,Y)$ üzerinde $i-$uygun kapanış operatörü, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $i-C(X,Y)$ üzerinde bir ağ ve $f\in i-C(X,Y)$ fonksiyonuna $i-sürekli\ yakınsak$ olsun. İspata başlamadan önce yönlendirilmiş uzay tanımını hatırlatacağız.

$\widetilde{\Lambda}=\Lambda\cup\{\infty\}$, $\infty\notin\Lambda$ ve $\forall\lambda\in\Lambda$ için $\infty\geq\lambda$ olsun. $\widetilde{\Lambda}$ üzerinde τ topolojisinin

açıkları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$U \in \tau \Leftrightarrow \infty \notin U \text{ veya bir } \lambda_0 \in \Lambda \text{ için } \{\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq U$$

$(\widetilde{\Lambda}, \tau)$ uzayına yönlendirilmiş uzay denir (Arens ve Dugundji. 1951). Bu uzay üzerinde "$\preceq$" ile gösterilen ve $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\Lambda}$ için $\lambda_1 \preceq \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \in \overline{\lambda_2}$ biçiminde tanımlı sıralamayı göz önüne alalım. Bu durumda, $(\widetilde{\Lambda}, \tau, \preceq)$ bir sıralı topolojik uzaydır.

$$F : \widetilde{\Lambda} \times X \to Y, F(\lambda, x) = \begin{cases} f_\lambda(x), \lambda \neq \infty \\ f(x), \lambda = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. F fonksiyonu $i - sürekli dir$. c, $i-$uygun olduğundan

$$\widehat{F} : \widetilde{\Lambda} \to i - C(X, Y), \widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} f_\lambda, \lambda \neq \infty \\ f, \lambda = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $\widehat{F}$ fonksiyonu $i - sürekli dir$. U kümesi $i - C(X, Y)$ de f fonksiyonunun bir komşuluğu olsun. $\widehat{F}$ nin $i - sürekliliğinden$, ∞ noktasının artan bir V komşuluğu var ve $\widehat{F}(V) \subseteq U$ dur. Yönlendirilmiş uzayın tanımı gereğince,

$$\exists \lambda_0 \in \Lambda \ni \forall \lambda \geq \lambda_0 \text{ için } \lambda \in V$$

dir. Dolayısıyla, $f_\lambda \in U$ elde edilir.

Tersine, $(i-C(X, Y), c, \preceq_s)$ uzayındaki bir ağın $i-sürekli$ yakınsaklığı yakınsaklığını gerektirsin. c operatörünün $i-$uygun olduğunu göstereceğiz. $(Z, c_Z, \preceq_z)$ bir sıralı kapanış uzayı olmak üzere, $F : Z \times X \to Y$ fonksiyonu $i - sürekli$ bir fonksiyon olsun. Burada,

$$\widehat{F} : Z \to i - C(X, Y), \widehat{F}(z)(x) = F(z, x)$$

biçimindeki $\widehat{F}$ fonksiyonunun $i - sürekli$ olduğunu göstereceğiz. $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, Z üzerinde bir ağ ve $x \in Z$ noktasına $i - yakınsak$, $\{y_\mu \mid \mu \in M\}$ X üzerinde bir ağ

ve $y \in X$ noktasına $i-yakınsak$ olsun. Bu durumda,

$$\{(x_\lambda, y_\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \Lambda \times M\}$$

ağı (x, y) noktasına $i-yakınsar$. F $i-sürekli$ olduğundan, $F((x_\lambda, y_\mu)) \to F((x, y))$ dir. Buradan,

$$\widehat{F}(x_\lambda)(y_\mu) \to \widehat{F}(x)(y)$$

elde edilir. O halde $\widehat{F}(x_\lambda) \overset{icc}{\to} \widehat{F}(x)$ dir. Hipotezden, $\widehat{F}(x_\lambda) \to \widehat{F}(x)$ olduğu görülür.

(**ii**) c $i-kabul\ edilebilir$ bir kapanış operatörü olsun. $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ $i-C(X,Y)$ üzerinde bir ağ ve $f \in i-C(X,Y)$ fonksiyonuna yakınsak olsun. $\{x_\mu \mid \mu \in M\}$, X üzerinde bir $x \in X$ noktasına $i-yakınsayan$ ağ olsun ve (**i**) de tanımlanan $(\widetilde{\Lambda}, \tau, \preceq)$ yönlendirilmiş sıralı uzayını göz önüne alalım.

$$G : \widetilde{\Lambda} \to i-C(X,Y), G(\lambda) = \begin{cases} f_\lambda, \lambda \neq \infty \\ f, \lambda = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlı G fonksiyonu $i-süreklidir$. c operatörü $i-kabul\ edilebilir$ olduğundan,

$$\widehat{G} : \widetilde{\Lambda} \times X \to Y$$

$i-süreklidir$. O halde,

$$\{(\lambda, x_\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \Lambda \times M\}$$

ağı (∞, x) noktasına $i-yakınsar$ ve $\widehat{G}$ fonksiyonu $i-sürekli$ olduğundan

$$\widehat{G}((\lambda, x_\mu)) \to \widehat{G}((\infty, x))$$

dir. Buradan, $f_\lambda(x_\mu) \to f(x)$ elde edilir. Tersine, $(i-C(X,Y), c, \preceq_s)$ uzayındaki bir ağın yakınsaklığı $i-sürekli\ yakınsaklığını$ gerektirsin. c operatörünün $i-kabul\ edilebilir$ olduğunu gösterelim.

$(Z, c_Z, \preceq_z)$ herhangi bir sıralı kapanış uzayı ve $G : Z \to i-C(X,Y)$ $i-sürekli$ bir

fonksiyon olsun. $\widehat{G} : Z \times X \to Y$ fonksiyonunun $i - sürekli$ olduğunu göstereceğiz.

$$\{(z_\mu, x_\lambda) \mid (\mu, \lambda) \in M \times \Lambda\}$$

$Z \times X$ üzerinde bir ağ ve (z, x) noktasına $i - yakınsak$ olsun. Buradan,

$$x_\lambda \overset{i-c}{\to} x \text{ ve } z_\mu \overset{i-c}{\to} z$$

dir. G fonksiyonu $i-sürekli$ olduğundan $G(z_\mu) \to G(z)$ olduğu açıktır. Hipotezden, $G(z_\mu) \overset{icc}{\to} G(z)$ elde edilir. Ayrıca $x_\lambda \overset{i-c}{\to} x$ olduğundan, $i - sürekli\ yakınsaklık$ tanımını kullanırsak, $G(z_\mu)(x_\lambda) \to G(z)(x)$ elde edilir. Sonuç olarak, $\widehat{G}\ i-süreklidir.$

Teorem 5.2.4 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. $d-C(X,Y)$ üzerindeki c kapanış operatörü,
(**i**) $d - uygun$ olması için gerek ve yeter koşul $(d - C(X,Y), c, \preceq_s)$ uzayındaki bir ağın $d - sürekli$ yakınsaklığının yakınsaklığını gerektirmesidir.
(**ii**) $d-kabul\ edilebilir$ olması için gerek ve yeter koşul $(d-C(X,Y), c, \preceq_s)$ uzayındaki bir ağın yakınsaklığının $d - sürekli\ yakınsaklığını$ gerektirmesidir.

İspat: Benzer şekilde yapılır.

Tanım 5.2.4 $i - C(X,Y)$ üzerinde bir c kapanış operatörü verilsin. Bu durumda c kapanış operatörü,
(**i**) Her $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ sıralı kapanış uzayı için $g : Z \times X \to Y$ fonksiyonunun $i - sürekliliği$,

$$E(g) = g^* : Z \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$$

fonksiyonunun sürekliliğini gerektiriyorsa, $i^* - uygun$ kapanış operatörü olarak adlandırılır.
(**ii**) Her $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ sıralı kapanış uzayı için

$$E(g) = g^* : Z \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$$

fonksiyonunun sürekliliği, $g : Z \times X \to Y$ fonksiyonunun $i-sürekliliğini$ gerektiriyorsa, $i^* - kabul\ edilebilir$ kapanış operatörü olarak adlandırılır.

Bu tanıma dual olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 5.2.5 $d - C(X,Y)$ üzerinde bir c kapanış operatörü verilsin. Bu durumda c kapanış operatörü,
(**i**) Her $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ sıralı kapanış uzayı için $g : Z \times X \to Y$ fonksiyonunun $d-sürekliliği$,

$$E(g) = g^* : Z \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$$

fonksiyonunun sürekliliğini gerektiriyorsa, d^*-uygun kapanış operatörü olarak adlandırılır.
(**ii**) Her $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ sıralı kapanış uzayı için

$$E(g) = g^* : Z \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$$

fonksiyonunun sürekliliği, $g : Z \times X \to Y$ fonksiyonunun $d - sürekliliğini$ gerektiriyorsa, $d^* - kabul\ edilebilir$ kapanış operatörü olarak adlandırılır.

Teorem 5.2.5 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) c, $i - C(X,Y)$ üzerinde $i - uygun \Rightarrow c$, $i^* - uygundur$.
(**ii**) c, $i - C(X,Y)$ üzerinde $i^* - kabul\ edilebilir \Rightarrow c$, $i - kabul\ edilebilirdir$.

İspat: (**i**) c, $i - C(X,Y)$ üzerinde $i - uygun$ olsun. Herhangi bir $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ uzayı için $g : Z \times X \to Y$ $i-sürekli$ bir fonksiyon olsun. c $i-$uygun olduğundan $E(g) = g^*$ fonksiyonu $i - süreklidir$. Dolayısıyla, g^* sürekli bir fonksiyondur. Sonuç olarak, c i^*-uygundur.

(**ii**) c, $i-C(X,Y)$ üzerinde $i^*-kabul\ edilebilir$ olsun. Herhangi bir $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ uzayı için

$$g^* : Z \to i - C(X,Y)$$

$i-sürekli$ olsun. Dolayısıyla, g^* *süreklidir.* c $i^*-kabul\ edilebilir$ olduğundan, $g: Z \times X \to Y$ fonksiyonu $i-süreklidir$. Sonuç olarak, c $i-kabul\ edilebilirdir$.

Teorem 5.2.6 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) c, $d-C(X,Y)$ üzerinde $d-uygun \Rightarrow c$, $d^*-uygundur$.
(**ii**) c, $d-C(X,Y)$ üzerinde $d^*-kabul\ edilebilir \Rightarrow c$, $d-kabul\ edilebilirdir$.

İspat: Benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.2.7 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) $i-C(X,Y)$ kümesi üzerinde verilen c kapanış operatörü $i^*-kabul\ edilebilir$ ise,

$$\varepsilon : i-C(X,Y) \times X \to Y$$

ölçüm fonksiyonu $i-süreklidir$.
(**ii**) $d-C(X,Y)$ üzerinde kümesi üzerinde verilen c kapanış operatörü $d^*-kabul\ edilebilir$ ise,

$$\varepsilon : i-C(X,Y) \times X \to Y$$

ölçüm fonksiyonu $d-süreklidir$.

İspat: (**i**) c, $i-C(X,Y)$ üzerinde $i^*-kabul\ edilebilir$ bir kapanış operatörü olsun.

$$id_{i-C(X,Y)} : i-C(X,Y) \underset{f}{\to} \underset{id_{i-C(X,Y)}(f)=f}{i-C(X,Y)}$$

sürekli bir fonksiyondur. c $i^*-kabul\ edilebilir$ olduğundan,

$$\varepsilon : i-C(X,Y) \times X \to Y$$

fonksiyonu $i-süreklidir$.
(**ii**) İlk önerme ile benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.2.8 $(X, c_X, \preceq_X)$ artan (azalan) komşuluklar tabanına sahip sıralı kapanış uzayı olsun.

$$\varepsilon : i - C(X,Y) \times X \to Y$$

ölçüm fonksiyonu $i - sürekli$ $(d - sürekli)$ ise, c $i - kabul$ edilebilir $(d - kabul\ edilebilir)$ bir kapanış operatörüdür.

İspat: Herhangi bir $(Z, c_Z, \preceq_Z)$ sıralı kapanış uzayını göz önüne alalım. Ayrıca,

$$E(g) = g^* : (Z, c_Z, \preceq_Z) \to (i - C(X,Y), c, \preceq_s)$$

fonksiyonu $i - sürekli$ bir fonksiyon olsun.

$$g : (Z, c_Z, \preceq_Z) \times (X, c_X, \preceq_X) \to (Y, c_Y, \preceq_Y)$$

fonksiyonunun $i-sürekli$ olduğunu göstereceğiz. X kümesi artan kümelerden oluşan komşuluk tabanına sahip olduğundan,

$$id_X : X \to X$$

fonksiyonu $i - süreklidir$. O halde,

$$g^* \times 1_X : Z \times X \to i - C(X,Y) \times X$$

$i - süreklidir$. $i - sürekli$ fonksiyonların bileşkesi $i - sürekli$ olduğundan,

$$\varepsilon \circ (g^* \times 1_X) = g$$

fonksiyonu $i - süreklidir$.

Teorem 5.2.9 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. c ve $c^{'}$ $i - C(X,Y)$ üzerinde tanımlı iki kapanış operatörü olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:
(**i**) c i^*-uygun ve $c^{'}$ $i^* - kabul\ edilebilir$ ise $c^{'}$, c operatöründen daha incedir.
(**ii**) $i^* - kabul\ edilebilir$ ve i^*-uygun olan c operatörü tektir.

İspat: (**i**) $c^{'}$ $i^{*}-$*kabul edilebilir* olduğundan,

$$\varepsilon : (i - C(X,Y), c^{'}) \times X \to Y$$

$i-$*süreklidir*. Ayrıca c kapanış operatörü $i^{*}-$uygun olduğundan,

$$E(\varepsilon) = \varepsilon^{*} : (i - C(X,Y), c^{'}) \to (i - C(X,Y), c)$$

süreklidir. ε^{*} birim fonksiyonu sürekli olduğundan, $c^{'}$ c den daha incedir.
(**ii**) Varsayalım ki c tek olmasın. $i - C(X,Y)$ üzerinde $i^{*}-$*kabul edilebilir* ve $i^{*}-$*uygun* olan bir diğer kapanış operatörü $c^{'}$ olsun. Bu durumda (**i**) den c, $c^{'}$ operatöründen daha ince ve $c^{'}$, c operatöründen daha incedir. Dolayısıyla $c = c^{'}$ elde edilir.

Teorem 5.2.10 $(X, c_X, \preceq_X)$ ve $(Y, c_Y, \preceq_Y)$ sıralı kapanış uzayları olsun. c ve $c^{'}$ $d - C(X,Y)$ üzerinde tanımlı iki kapanış operatörü olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:
(**i**) c $d^{*}-$uygun ve $c^{'}$ $d^{*}-$*kabul edilebilir* ise $c^{'}$, c operatöründen daha incedir.
(**ii**) $d^{*}-$*kabul edilebilir* ve $d^{*}-$uygun olan c operatörü tektir.

İspat: Benzer şekilde gösterilir.

6. SIRALI ČECH KAPANIŞ UZAYI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN HİPERUZAY TOPOLOJİLERİ

Topolojik uzayların veya metrik uzayların kapalı alt kümeler ailesi üzerinde birçok topoloji tanımlanabilmektedir. Bu topolojiler hiperuzay topolojileri olarak adlandırılır. Vietoris topolojisi en çok bilinen hiperuzay topolojilerindendir.

(X, τ) bir Hausdorff uzay olsun. X uzayının kapalı alt kümeler ailesi $CL(X)$ ile gösterilsin. Herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$A^+ = \{B \in CL(X) : B \subseteq A\} \text{ ve } A^- = \{B \in CL(X) : B \cap A \neq \emptyset\}$$

biçiminde tanımlansın. $V, W \in \tau$ olmak üzere, V^- ve W^+ kümelerinin oluşturduğu aile $CL(X)$ üzerinde bir topoloji için alt tabandır. Bu aile tarafından üretilen topoloji Vietoris topolojisi olarak adlandırılır ve τ_V ile gösterilir (Beer 1993).

Andrijević vd. (2010) tarafından kapanış uzayları yardımıyla hiperuzay topolojileri elde edilmiş ve genelleştirilmiş Vietoris topolojisi tanımı verilmiştir. (X, c) bir kapanış uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{c(A) \mid A \subseteq X\} \backslash \{\emptyset\} \\ \mathcal{J} &= \{int_c(A) \mid A \subseteq X\} \end{aligned}$$

olsun. Herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$A^+ = \{H \in \mathcal{H} : H \subseteq A\} \text{ ve } A^- = \{H \in \mathcal{H} : H \cap A \neq \emptyset\}$$

biçiminde tanımlansın. $G, G_1, ..., G_n \in \mathcal{J}$ ve her $i \in \{1, ..., n\}$ için $G_i \subseteq G$ olmak üzere,

$$G^+ \cap (\bigcap_{i=1}^{n} G_i^-) = \langle G; G_1, ..., G_n \rangle = \{H \in \mathcal{H} : (\forall i)(1 \leq i \leq n), H \subseteq G \text{ ve } H \cap G_i \neq \emptyset\}$$

biçiminde tanımlı kümeler ailesi $\mathcal{H}$ üzerinde Vietoris topolojisinin taban eleman-

larıdır (Andrijević vd. 2010). Sıralı hiperuzay kavramı Choe ve Park (1979) tarafından yapılmış ve sıralı topolojik uzayların sıralı hiperuzayları elde edilmiştir. Michael (1951) tarafından elde edilen sonuçların daha genel bir hali elde verilmiştir.

Bu bölümde Park ve Park (1982) tarafından yapılan çalışma temel alınarak, sıralı kapanış uzaylarının sıralı hiperuzaylarını elde ederek bazı sonuçlar elde edeceğiz.

Tanım 6.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olmak üzere, $\mathcal{H}^{\downarrow} = \{c(A) \mid A =\downarrow A\}\backslash\{\emptyset\}$ üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-} &= \{int_c(A) \mid A =\downarrow A\} \\ \mathcal{J}^{+} &= \{int_c(A) \mid A =\uparrow A\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı $\mathcal{J}^{-}$ ve $\mathcal{J}^{+}$ ailelerini kullanarak bir hipertopoloji inşa edeceğiz. Her $G \in \mathcal{J}^{-}$, $G_1, ..., G_n \in \mathcal{J}^{+}$ ve $i \in \{1, 2,..., n\}$ için $G_i \subseteq G$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle G; G_1, ..., G_n\rangle &= G^{+} \cap (\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} G_i^{-}) \\ &= \{H \in \mathcal{H}^{\downarrow} \mid H \subseteq G \text{ ve } \forall i \in \{1, ..., n\} \text{ için } H \cap G_i \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın.

$$\mathcal{S} = \{\langle G; G_1, ..., G_n\rangle\}_{\substack{G\in\mathcal{J}^{-} \\ G_1,...,G_n\in\mathcal{J}^{+}}}$$

koleksiyonu $\mathcal{H}^{\downarrow}$ üzerinde bir topoloji için tabandır. Bu topolojiye genelleştirilmiş Vietoris topolojisi denir ve $\mathcal{W}^{\downarrow}$ ile gösterilir. Ayrıca, bilinen "$\subseteq$" kapsama bağıntısı ile $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ üçlüsü sıralı hiperuzaydır. Benzer şekilde, $\mathcal{J}^{-}$ ve $\mathcal{J}^{+}$ aileleri yerine sırasıyla $(X, c, \preceq)$ uzayının artan açıklar ve azalan açıklar ailesi alınarak, $\mathcal{H}^{\downarrow}$ üzerinde $\mathcal{W}^{\downarrow}$ dan daha kaba bir topoloji elde edilir. Bu topolojiyi ise $\mathcal{W}$ ile göstereceğiz.

Dual olarak, $\mathcal{H}^{\uparrow} = \{c(A) \mid A =\uparrow A\}\backslash\{\emptyset\}$ olmak üzere,

$$\mathcal{S}' = \{\langle G; G_1, ..., G_n\rangle\}_{\substack{G\in\mathcal{J}^{+} \\ G_1,...,G_n\in\mathcal{J}^{-}}}$$

ailesi $\mathcal{H}^{\uparrow}$ üzerinde bir topoloji için tabandır. $\mathcal{S}'$ ailesinin ürettiği topoloji ise $\mathcal{W}^{\uparrow}$ ile

gösterilir. Dolayısıyla, $(\mathcal{H}^{\uparrow}, \mathcal{W}^{\uparrow}, \subseteq)$ bir sıralı hiperuzaydır.

Örnek 6.1 $X = \{a, b, c\}$ ve $\preceq = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b)\}$ olsun. X üzerindeki kapanış operatörü,

$$c(\emptyset) = \emptyset, c(\{a\}) = \{a, b\},$$
$$c(\{b\}) = \{b, c\}, c(\{c\}) = \{a, c\},$$
$$c(\{a, b\}) = c(\{a, c\}) = c(\{b, c\}) = c(X) = X$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda,

$$int_c\{\emptyset\} = int_c\{a\} = int_c\{b\} = int_c\{c\} = \emptyset$$
$$int_c\{a, b\} = \{b\}, int_c\{b, c\} = \{c\}$$
$$int_c\{a, c\} = \{a\}, int_c\{X\} = X$$

elde edilir. $\mathcal{H}^{\downarrow} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ ve $\mathcal{H}^{\downarrow}$ üzerindeki $\mathcal{W}^{\downarrow}$ genelleştirilmiş Vietoris topolojisi için taban elemanları,

$$\langle X; \{b\}\rangle = \{X, \{a, b\}\}, \langle X; \{c\}\rangle = \{X, \{a, c\}\}, \langle X; \{b\}, \{c\}\rangle = \{X\}$$

biçimindedir. $\mathcal{W}^{\downarrow} = \{\mathcal{H}^{\downarrow}, \emptyset, \{X\}, \{X, \{a, b\}\}, \{X, \{a, c\}\}\}$ olur ve $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ sıralı hiperuzaydır. Ayrıca $\mathcal{W}$ hipertopolojisi için taban elemanları $\langle X; \emptyset\rangle = \langle \emptyset; X\rangle = \emptyset$ ve $\langle X; X\rangle = \mathcal{H}^{\downarrow}$ dir. Dolayısıyla, $\mathcal{W}$ hiperuzay topolojisi $\mathcal{H}^{\downarrow}$ üzerindeki ayrık olmayan topolojidir.

Örnek 6.2 Örnek 4.1 ile verilen $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayını göz önüne alalım. Bu durumda, $\mathcal{H}^{\uparrow} = \{\{c, b\}, \{a, c\}, X\}$ olur. $\mathcal{W}^{\uparrow}$ topolojisinin taban elemanları ise,

$$\langle X; \{b\}\rangle = \{\{b, c\}, X\}, \langle X; \{a\}\rangle = \{\{a, c\}, X\},$$
$$\langle X; \{b\}, \{a\}\rangle = \{X\}, \langle \{b\}; \{b\}\rangle = \emptyset$$

biçiminde olup $\mathcal{W}^{\uparrow} = \{\mathcal{H}^{\downarrow}, \emptyset, \{X\}, \{\{a, c\}, X\}, \{\{b, c\}, X\}\}$ dir.

Lemma 6.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) $\forall A \in \mathcal{H}^{\downarrow}$ için A^{+} kümesi kapalı ve azalandır.
(**ii**) $\forall A \subseteq X \ni A =\uparrow A : (c(A))^{-}$ kapalı ve artandır.
(**iii**) $\forall G \subseteq X$, $\forall (G_i)_{1 \leq i \leq n} \subseteq X : cl^{\mathcal{H}^{\downarrow}}_{\mathcal{W}^{\downarrow}}\langle G; G_1, ..., G_n\rangle \subseteq \langle c(\downarrow G); c(\uparrow G_1), ..., c(\uparrow G_n)\rangle$.

İspat (i) $A \in \mathcal{H}^{\downarrow}$ olsun. İlk olarak, $(A^{+})^{c} = (A^{c})^{-}$ eşitliğinin sağlandığını göstereceğiz. $K \in (A^{+})^{c}$ olsun. Buradan, $K \notin A^{+}$ ve $K \nsubseteq A$ elde edilir. O halde, $K \cap (A^{c}) \neq \emptyset$ dir. Bu durumda, $K \in (A^{c})^{-}$ ve $(A^{+})^{c} = (A^{c})^{-}$ eşitliği vardır. $A \in \mathcal{H}^{\downarrow}$ olduğundan,

$$\exists K \subseteq X \ni K \text{ azalan için } A = c(K)$$

olur. Bu durumda, $A^{c} = (c(K))^{c} = int_{c}(K^{c})$, K^{c} artan ve

$$(A^{+})^{c} = (A^{c})^{-} = (int_{c}(K^{c}))^{-} = \langle X; int_{c}(K^{c})\rangle \in W$$

elde edilir. Dolayısıyla, A^{+} kapalı bir kümedir. Şimdi ise, A^{+} kümesinin $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ uzayında azalan bir küme olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $\downarrow A^{+} \subseteq A^{+}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $K \in \downarrow A^{+}$ olsun. Bu durumda,

$$\exists H \in A^{+} \ni K \subseteq H$$

dır. Ayrıca $H \in A^{+}$ olduğundan, $H \subseteq A$ ve böylece $K \in A^{+}$ elde edilir. Dolayısıyla, A^{+} azalan bir kümedir.

(ii) $A \subseteq X$ olsun. $(c(A)^{-})^{c} = (c(A)^{c})^{+} = (int_{c}(A))^{+}$ eşitliği vardır. Burada, $A^{c} \subseteq X$ azalan ve $(int_{c}(A))^{+} = \langle int_{c}(A); X\rangle \in W$ olacaktır. Dolayısıyla, $(c(A))^{-}$ kapalıdır. Şimdi ise her A artan alt kümesi için $\uparrow (c(A))^{-} = (c(A))^{-}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $K \in \uparrow (c(A))^{-}$ olsun. O halde,

$$\exists H \in (c(A))^{-} \ni H \subseteq K$$

yazılabilir. $H \in (c(A))^{-}$ olduğundan, $H \cap c(A) \neq \emptyset$ olur. Ayrıca, $K \cap c(A) \neq \emptyset$ olduğundan $K \in (c(A))^{-}$ elde edilir. Sonuç olarak, $(c(A))^{-}$ artan ve kapalıdır.

(iii) $G \subseteq X$ ve $G_1, ..., G_n \subseteq X$ olsun.

$$\langle c(\downarrow G); c(\uparrow G_1), ..., c(\uparrow G_n)\rangle = c(\downarrow G)^{+} \cap c(\uparrow G_1)^{-} \cap ... \cap c(\uparrow G_n)^{-}$$

biçiminde yazılabilir. $c(\downarrow G)^{+}$ ve $\forall i \in \{1, ..., n\}$ için $c(\uparrow G_i)^{-}$ kümeleri kapalı

olduğundan, $\langle c(\downarrow G); c(\uparrow G_1), ..., c(\uparrow G_n)\rangle$ kapalıdır. Bu durumda,

$$cl^{\mathcal{H}^{\downarrow}}_{\mathcal{W}^{\downarrow}}\langle G; G_1, ..., G_n\rangle \subseteq \langle c(\downarrow G); c(\uparrow G_1), ..., c(\uparrow G_n)\rangle$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 6.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) $\forall A \in \mathcal{H}^{\uparrow}$ için A^{+} kümesi kapalı ve azalandır.
(**ii**) $\forall A \subseteq X \ni A =\downarrow A : (c(A))^{-}$ kapalı ve artandır.
(**iii**)$\forall G \subseteq X, \forall (G_i)_{1\leq i\leq n} \subseteq X : cl^{\mathcal{H}^{\uparrow}}_{\mathcal{W}^{\uparrow}}\langle G; G_1, ..., G_n\rangle \subseteq \langle c(\uparrow G); c(\downarrow G_1), ..., c(\downarrow G_n)\rangle$.

İspat: Lemma 4.1 in ispatına benzer şekilde kolaylıkla gösterilir.

Teorem 6.1 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) Eğer X alt T_1-sıralı ise $\forall G \subseteq X$ ve $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : G_i \subseteq G$ olacak biçimdeki $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ koleksiyonu için $\langle c(G); c(G_1), ..., c(G_n)\rangle \subseteq cl^{\mathcal{H}^{\downarrow}}_{\mathcal{W}} \langle G; G_1, ..., G_n\rangle$ dir.
(**ii**) Eğer X üst T_1-sıralı ise $\forall G \subseteq X$ ve $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : G_i \subseteq G$ olacak biçimdeki $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ koleksiyonu için $\langle c(G); c(G_1), ..., c(G_n)\rangle \subseteq cl^{\mathcal{H}^{\uparrow}}_{\mathcal{W}} \langle G; G_1, ..., G_n\rangle$ dir.

İspat: (**i**) X alt T_1-sıralı, $G \subseteq X$, $G_1, ..., G_n \subseteq X$ ve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $G_i \subseteq G$ olsun. Kapsamayı göstermek için, $H \in \langle c(G); c(G_1), ..., c(G_n)\rangle$ alalım. Bu durumda, $H \subseteq c(G)$ ve $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $H \cap c(G_i) \neq \emptyset$ dir. O halde,

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : \exists x_i \in H \cap c(G_i)$$

elde edilir. H kümesinin $\mathcal{W}$ topolojisine göre her açık $\mathcal{V}$ komşuluğu için

$$H \in \langle U; U_1, ..., U_m\rangle \subseteq \mathcal{V}$$

olacak biçimde $\exists U \subseteq X, U$ azalan ve açık, $\forall j \in \{1, 2, ..., m\}$ için U_j açık ve artan olacak biçimde $(U_j)_{1\leq j\leq m}$ koleksiyonu vardır. Buradan, her $j \in \{1, 2, ..., m\}$ için

$H \cap U_j \neq \emptyset$ ve $H \subseteq U$ elde edilir. Ayrıca,

$$\forall j \in \{1, 2, ..., m\} : \exists z_j \in H \cap U_j$$

dir. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_i \in U \cap c(G_i)$ olduğundan, $\exists x_i^{'} \in U \cap G_i$ dır. Benzer şekilde, $\forall j \in \{1, 2, ..., m\}$ için $z_j \in c(G) \cap U_j$ olduğundan, $\exists z_j^{'} \in G \cap U_j$ dir.

$$A = \{x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}, z_1^{'}, ..., z_m^{'}\}$$

olsun. İspatı tamamlamak için

$$\downarrow A \in \langle G; G_1, ..., G_n \rangle \cap \mathcal{V}$$

olduğunu göstermeliyiz. X alt T_1-sıralı olduğundan, $\downarrow A$ kapalı ve azalandır. Dolayısıyla, $\downarrow A \in \mathcal{H}^{\downarrow}$ elde edilir.

$$\downarrow A \subseteq \downarrow G = G \text{ ve } \downarrow A \subseteq \downarrow U = U \Rightarrow \downarrow A \subseteq G \cap U$$

yazabiliriz. Dolayısıyla,

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ için } A \cap G_i \neq \emptyset \text{ ve } \forall j \in \{1, 2, ..., m\} \text{ için } A \cap U_j \neq \emptyset$$

elde edilir. Buradan,

$$A \in \langle G; G_1, ..., G_n \rangle \cap \langle U; U_1, ..., U_m \rangle \subseteq \langle G; G_1, ..., G_n \rangle \cap \mathcal{V}$$

olacaktır. Sonuç olarak, $H \in cl_{\mathcal{W}}^{\mathcal{H}^{\downarrow}} \langle G; G_1, ..., G_n \rangle$ elde edilir.

(**ii**) İlk ifade ile benzer şekilde gösterilir.

$(X, c, \preceq)$ herhangi bir sıralı kapanış uzayı olmak üzere bu uzaydaki kapalı azalan (artan) kümeler $\mathcal{D}(X)$ $(\mathcal{I}(X))$ ile gösterilecektir.

Teorem 6.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:
(**i**) X alt T_1-sıralı ise $\{\downarrow F \mid F \in 2^{(X)}\}$ ailesi $(\mathcal{H}^{\uparrow}, \mathcal{W}, \subseteq)$ uzayında yoğundur.
(**ii**) X üst T_1-sıralı ise $\{\uparrow F \mid F \in 2^{(X)}\}$ ailesi $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}, \subseteq)$ uzayında yoğundur.

İspat: (**ii**) ile verilen önerme (**i**) ile benzer şekilde ispatlanacağından sadece ilk önermeyi ispatlayacağız. $\mathcal{P}$ kümesi $\mathcal{W}$ da boş kümeden farklı ve açık olsun. Bu durumda, her $A \in \mathcal{P}$ için

$$A \in \langle G; G_1, ..., G_n \rangle \subseteq \mathcal{P} \ni \exists G \subseteq X, G \text{ açık ve azalan}$$

ve $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için G_i açık ve artan olacak şekilde $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ koleksiyonu vardır. O halde, $A \subseteq G$ ve $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $A \cap G_i \neq \emptyset$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ için } \exists x_i \in A \cap G_i$$

dır. Buradan,

$$\downarrow \{x_1, ..., x_n\} \in \langle G; G_1, ..., G_n \rangle$$

elde edilir. X alt T_1-sıralı olduğundan, $\downarrow \{x_1, ..., x_n\}$ kapalı ve azalan bir kümedir. Sonuç olarak, $\langle G; G_1, ..., G_n \rangle \cap \{\downarrow F \mid F \in 2^{(X)}\} \neq \emptyset$ elde edilir.

Önerme 6.1 $(X, c, \preceq)$ regüler sıralı kapanış uzayı olsun. Bu durumda,
$(\mathcal{D}(X), \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ ve $(\mathcal{I}(X), \mathcal{W}^{\uparrow}, \subseteq)$ uzayları T_2-sıralıdır.

İspat: $A, B \in \mathcal{D}(X)$ ve $A \nsubseteq B$ olsun. Bu durumda,

$$\exists a \in A \ni a \notin B = c(B)$$

elde edilir. X uzayı regüler olduğundan, $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde a noktasının artan bir U komşuluğu ve B kümesinin azalan bir V komşuluğu vardır. Dolayısıyla,

$$a \in int_c U \text{ ve } B \subseteq int_c V$$

elde edilir. Açıkça görülür ki, $(\mathcal{D}(X), \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ uzayında $\langle X; int_c U \rangle$, A kümesinin

artan komşuluğu ve $\langle int_c V; X\rangle$ ise B kümesinin azalan komşuluğudur. Şimdi ise

$$\langle X; int_c U\rangle \cap \langle int_c V; X\rangle = \emptyset$$

olduğunu gösterelim. Biran için $\langle X; int_c U\rangle \cap \langle int_c V; X\rangle \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\exists K \in \langle X; int_c U\rangle \cap \langle int_c V; X\rangle$$

dır. Dolayısıyla,

$$K \cap int_c U \neq \emptyset \text{ ve } K \subseteq int_c V$$

olacaktır. Buradan, $U \cap V \neq \emptyset$ elde edilir ve bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak, $(\mathcal{D}(X), \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ T_2-uzayıdır. $(\mathcal{I}(X), \mathcal{W}^{\uparrow}, \subseteq)$ uzayının T_2-uzay olduğu benzer şekilde gösterilir.

Tanım 6.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. X kümesinin azalan (artan) kümelerden oluşan her iç örtüsü sonlu alt iç örtüye sahipse X güçlü aşağı (yukarı) kompakt kümedir denir. Eğer, X kümesinin azalan (artan) kümelerden oluşan her iç örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse X aşağı (yukarı) kompakt kümedir denir.

Uyarı 6.1 Eğer X uzayı ayrık sıralama ile göz önüne alınırsa, güçlü aşağı (yukarı) kompakt küme, aşağı (yukarı) kompakt küme kavramları güçlü kompakt ve kompakt küme kavramları ile çakışır.

Aşağıda verilen örnek güçlü kompakt ve kompakt olmayıp yukarı kompakt ve güçlü yukarı kompakt kümeler bulunabileceğini göstermektedir.

Örnek 6.3 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde,

$$\mathcal{B} = \{\{2m-1\} \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{2m-1, 2m, 2m+1\} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

tabanına sahip τ topolojisi dijital topoloji olarak adlandırılır. $A \subseteq \mathbb{Z}$ ve $c_\theta(A)$, A kümesi ile τ dijital topolojisine göre her kapalı komşuluğu kesişen noktaların kümesi olmak üzere $(\mathbb{Z}, c_\theta)$, τ digital topolojisinin $\theta-$kapanış uzayı olarak adlandırılır

(Mršević vd. 2002). Tam sayılar kümesi üzerindeki bilinen "$\leq$" bağıntısı ile $(\mathbb{Z}, c_\theta, \leq)$ bir sıralı kapanış uzayıdır. Açıkça görülür ki $\mathbb{Z}$ ne kompakt ne de güçlü kompakttır fakat, $\mathbb{Z}$ yukarı ve güçlü yukarı kompakt bir kümedir.

Önerme 6.2 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı olsun. Aşağıdakiler doğrudur:
(i) $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ kompakt uzay ise $(X, c, \preceq)$ güçlü yukarı kompakt uzaydır.
(ii) $(\mathcal{H}^{\uparrow}, \mathcal{W}^{\uparrow}, \subseteq)$ kompakt uzay ise, $(X, c, \preceq)$ güçlü aşağı kompakt uzaydır.

İspat: (i) $\{U_i\}_{i\in I}$ X kümesinin artan kümelerden oluşan iç örtüsü olsun.

$X = \underset{i\in I}{\cup} int_c U_i$ dir. Dolayısıyla, $\{\langle X; int_c U_i\rangle\}_{i\in I}$ ailesi $\mathcal{H}^{\downarrow}$ için açık örtüdür. $\mathcal{H}^{\downarrow}$ kompakt olduğundan, $J \subseteq I$ sonlu ve $\{\langle X; int_c U_i\rangle\}_{i\in J}$ ailesi $\mathcal{H}^{\downarrow}$ kümesinin sonlu örtüsüdür. Bu durumda, $\{U_i\}_{i\in J}$ ailesi X in sonlu iç örtüsüdür . Sonuç olarak, $(X, c, \preceq)$ güçlü yukarı kompakt uzaydır.

(ii) İlk ifade ile benzer şekilde gösterilir.

Önerme 6.3 $(X, c, \preceq)$ sıralı kapanış uzayı ve $\mathfrak{C} = (C_i)_{i\in I}$ X in alt kümelerinden oluşan bir koleksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur:
(i) Eğer her $i \in I$ için C_i güçlü aşağı kompakt küme ve $\mathfrak{C}$ ailesi $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ uzayında kompakt bir koleksiyon ise $\underset{i\in I}{\cup} C_i$ aşağı kompakt kümedir.
(ii) Eğer her $i \in I$ için C_i güçlü yukarı kompakt küme ve $\mathfrak{C}$ ailesi $(\mathcal{H}^{\uparrow}, \mathcal{W}^{\uparrow}, \subseteq)$ uzayında kompakt bir koleksiyon ise $\underset{i\in I}{\cup} C_i$ yukarı kompakt kümedir.

İspat (i) $\Gamma \neq \emptyset$ ve her $\lambda \in \Gamma$ için U_λ azalan olmak üzere, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ koleksiyonu $\underset{i\in I}{\cup} C_i$ kümesinin bir iç örtüsü olsun. Bu durumda, $\forall i \in I$ için sonlu bir $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ vardır ve

$$C_i \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Gamma_i} int_c(U_\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Gamma_i} U_\lambda = U_{\Gamma_i}$$

olduğu görülür. Buradan, her $i \in I$ için U_{Γ_i} azalan küme ve

$$\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I} = \left(\left\langle int_c U_{\Gamma_i}; \{int_c(\uparrow U_\lambda)\}_{\lambda\in\Gamma_i}\right\rangle\right)_{i\in I}$$

biçimindeki $\mathcal{S}$ koleksiyonu $\mathfrak{C}$ için $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ uzayında bir açık örtüdür. O halde sonlu bir $J \subset I$ var ve $\mathfrak{C} \subseteq \bigcup_{j\in J} S_j$ yazabiliriz. Buradan her $i \in I$ için, $j_i \in J$ öyleki $C_i \in S_{j_i}$ dir. Diğer bir deyimle, $C_i \subseteq int_c\left(U_{\Gamma_{j_i}}\right)$ biçimindedir. Dolayısıyla,

$$\bigcup_{i\in I} C_i \subseteq \bigcup_{j_i\in J} int_c\left(U_{\Gamma_{j_i}}\right) \subseteq \bigcup_{j_i\in J} U_{\Gamma_{j_i}} = \bigcup_{j_i\in J}\bigcup_{\lambda\in\Gamma_{j_i}} U_\lambda$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $\underset{i\in I}{\cup} C_i$ kümesi aşağı kompakt kümedir.

(ii) İlk ifade ile benzer şekilde gösterilir.

Önerme 6.4 $(X, c, \preceq)$ artan kümelerden oluşan komşuluk tabanına sahip regüler sıralı kapanış uzayı olsun. Eğer $\mathfrak{C}$ ailesi $(\mathcal{H}^{\downarrow}, \mathcal{W}^{\downarrow}, \subseteq)$ $((\mathcal{H}^{\uparrow}, \mathcal{W}^{\uparrow}, \subseteq))$ uzayında kapalı ve azalan (artan) kümelerden oluşan kompakt bir koleksiyon ise, $\underset{A\in\mathfrak{C}}{\cup} A$ kümesi kapalı ve azalan (artan) bir kümedir.

İspat: $x \in c(\underset{A\in\mathfrak{C}}{\cup} A)$ olsun. x noktasının her W komşuluğu için x noktasının artan bir U komşuluğu var ve $U \subseteq W$ dir. Ayrıca $(X, c, \preceq)$ regüler sıralı olduğundan, x noktasının artan bir V komşuluğu vardır ve $V \subseteq c(V) \subseteq U \subseteq W$ olur. $V \cap (\underset{A\in\mathfrak{C}}{\cup} A) \neq \emptyset$ olduğundan,

$$\exists A \in \mathfrak{C} \ni c(V) \cap A \neq \emptyset$$

dir. Buradan, $A \in (c(V))^{-}$ elde edilir.

$$\{\mathfrak{C} \cap (c(V))^{-} \mid V \text{ kümesi } x \text{ noktasının artan komşuluğu}\}$$

ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Gerçekten, $\{V_i\}_{1\leq i\leq n}$, x noktasının artan komşuluklar ailesi olmak üzere, $\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} V_i$ kümesi de x noktasının artan komşuluğudur. Ayrıca,

$$\mathfrak{C} \cap (c(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} V_i))^{-} \subseteq \mathfrak{C} \cap ((\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} (c(V_i))^{-})$$

olduğundan, $\mathfrak{C} \cap ((\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} (c(V_i))^{-}) \neq \emptyset$ elde edilir. $(\mathfrak{C}, \mathcal{W}_{\mathfrak{C}}^{\uparrow}, \subseteq)$ kompakt olduğundan, sonlu

bir $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ vardır ve her $A' \in \mathfrak{C}'$ için

$$A' \in \{\mathfrak{C} \cap (c(V))^- \mid V \text{ kümesi } x \text{ noktasının artan komşuluğu}\}$$

dır. Dolayısıyla, $A' \cap c(V) \neq \emptyset$ elde edilir ve $c(V) \subseteq U \subseteq W$ olduğundan $A' \cap W \neq \emptyset$ olacaktır. Buradan,

$$x \in c(A') = A' \subseteq \bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A \text{ ve } x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A$$

dır. Sonuç olarak, $\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A$ kümesi $(X, c, \preceq)$ uzayında kapalı ve azalan bir kümedir. Dual kısmın ispatıda benzer şekilde yapılır.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Topolojik uzayların bir genelleştirmesi olan Čech kapanış uzayları matematiğin birçok dalında ve bilgisayar bilimlerinde önemli uygulamalara sahiptir.

Nachbin (1965) tarafından tanımlanan sıralı topolojik uzayların matematikte ve matematiksel ekonomide uygulamaları bulunmaktadır.

Bu çalışmada literatürde daha önce tanımlanmamış olan sıralı kapanış uzayı kavramı verilerek, sıralı topolojik uzaylarda ve kapanış uzaylarında yapılan bazı çalışmalar sıralı kapanış uzaylarına taşınmıştır.

İlk olarak sıralı kapanış uzaylarında sıralı ayırma aksiyomları, sıralı bağlantılılık gibi temel kavramlar verilmiş, McCartan (1968) ve Birsan (1976) tarafından yapılan çalışmalar sıralı kapanış uzaylarına taşınmıştır.

Sıralı kapanış uzayları arasında tanımlı fonksiyon uzayları üzerinde nokta-açık sıralı topoloji, kompakt-açık sıralı topoloji kavramları verilmiştir. Ayrıca, sıralı yarı düzgünleştirme kavramı tanıtılarak, bazı sıralı fonksiyon uzayı topolojilerinde bu kavram çalışılmıştır.

Sıralı kapanış uzaylarında, $i-süreklilik$, $d-süreklilik$ gibi süreklilik çeşitleri tanımlanarak, elde edilen bu yeni fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlanabilecek kapanış operatörleri için bir sınıflandırma yöntemi verilmiştir.

Sıralı kapanış uzaylarının sıralı hiperuzayları elde edilmiştir. Sıralı Vietoris topolojisi çalışılmıştır. Sıralı kapanış uzayları ile bu uzayların hiperuzayları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Sonuç olarak, sıralı topolojik uzaylardan ve kapanış uzaylarından daha genel bir yapı olan sıralı kapanış uzayı kavramı tanımlanarak, literatürde yapılan çalışmaların daha genel bir hali elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Andrijević, D., Jelíc, M. and Mršević, M. 2010. Some properties of hyperspaces of Čech closure spaces with Vietoris-like topologies. Filomat, 24(4); 53-61.

Andrijević, D., Jelíc, M. and Mršević, M. 2011. On function spaces topologies in the setting of Čech closure spaces. Topology and its Applications, 158; 1390-1394.

Arens, R. and Dugundji, J.1951. Topologies for function spaces. Pasific Journal of Mathematics, **1**; 5-31.

Beer, G. 1993. Topologies on Closed and Convex Sets. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

Birsan, T. 1976. Connectedness in Ordered Topological spaces. Matematički Vesnik, 13(28); 35-40.

Chattopadhyay, K.C., Thron, W.J. 1977. Extensions of Closure Spaces. Can. J. Math., 29; 1277-1286.

Choe, T. H. and Park, Y. S. 1979. Embedding Ordered topological spaces into topological semilattices. Semigroup Forum, 17; 188-199.

Čech, E. 1966. Topological spaces, Czechoslovak Acedemy of Sciences, Prague.

Davey, B.A. and Priestley, H.A. 1990. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, Cambridge.

Di Concilio, A. 1984. On ϑ-continuous convergence in function spaces. Rend. Mat., 4(1); 85-94.

Engelking, R. 1977. General Topology. PWN, Warsawa.

Eroglu, I. and Guner, E. 2016. Separation axioms in Čech closure ordered spaces. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser A1 Math. Stat., 65(2); 1-10.

Evren, Ö., Ok, E.A. 2011. On the muti-utility representation of preference relations. Journal of Mathematical Economics, 47; 554-563.

Georgiou, D.N. and Papadopoulos, B.K. 1996. Strongly ϑ-continuous functions and topologies on function spaces. Paper in honour of Bernhard Banaschewski Kluwer Acad. Publ., Dordrecht ; 433-444.

Georgiou, D.N., Iliadis, S.D. and Papadopoulos, B.K. 1996. Topologies on function spaces. Journal of Mathematical Sciences, 81; 82-97.

Georgiou, D.N. and Papadopoulos, B.K. 2001. Weakly continuous, weakly ϑ-continuous functions and topologies on function spaces. Scientiae Mathematicae Japon icae online, **4;** 315-328.

Joshi, K. D. 1984. Introduction to General Topology. Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Mashhour, A.S. and Ghanim, M.H. 1983. On closure spaces. J.pure appl. Math., 14; 680-691.

McCartan, S. D. 1968a. Separation axioms for topological ordered spaces. Proc. Camb. Phill. Soc., 64; 965-973.

McCartan, S. D. 1968b. A quotient ordered spaces, Proc. Camb. Phill. Soc. 64; 317-322.

Michael, E. 1951. Topologies on spaces of subsets. Trans. Amer. Math.Soc., 71; 152-182.

Mršević, M. and Andrijević, D. 2002. On $\theta-$Connectedness and $\theta-$Closure. Topology and its Application, 123; 157-166.

Mršević, M. 2005. Proper and admissible topologies in closure spaces. Indian J.Pure Appl.Math., 36; 613-627.

Nachbin, L. 1965. Topology and Order. Van Nostrand Mathematical Studies 4, Princeton.

Nailana, K.R. 2000. Ordered spaces of continuous functions and bitopological spaces. PHd thesis. University of South Africa, Pretoria.

Nailana, K.R. 2000. Ordered spaces and Quasi-Uniformities on spaces of Continuous Order-Preserving Functions. Extracta Mathematicae, 15(3); 513-530.

Page, W. 1989. Topological Uniform Structures.Dover Publications, Inc., New York.

Park, Y. S. , Park, W.T. 1982. On Ordered Hyperspaces. J. Korean Math. Soc., 19(1); 11-17.

Peleg, B. 1970. Utility functions for partially ordered topological spaces. Econometrica, 38; 93-96.

Preuss, G. 2002. Foundations of topology. Kluwer Academic Publishers, The Nether lands.

Priestly, H. A., Davey, B. A. 1990. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, Cambridge.

Rao, K. C., Gowri, R. and Swaminathan, V. 2009. Čech Closure Space in Structural Configuration of Proteins. Advanced Studies in Biology, 1(2); 95-104.

Roth, D. N. 1979. Čech Closure Spaces. Master's thesis. Emporia State University, Emporia.

Slapal, J. 2004. A digital anologue of the Jordan curve theorem. Discrete Applied Mathematics, 139; 231-251.

Sunitha, T. A. 1994. A Study of Čech Closure Spaces. PHd Thesis. Cochin University of Science and Technollogy, India.

Thron, W. J. 1981. What results are Valid on Closure Spaces. Topology Proceedings, 6;135-158.

Williams, J. 1972. Locally Uniform Spaces. Transactions of the American Mathematical Society, 168; 435-469.

Willard, S. 1970. General Topology. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İrem EROĞLU

Doğum Yeri : Ordu

Doğum Tarihi : 19.02.1988

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise **:** Ordu Fen Lisesi (2005)

Lisans : Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2013)

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi (2009-2010)
Ordu Üniversitesi (2010-2011)
Ankara Üniversitesi (2011-….)

Hakemli Dergiler

Eroglu, I. and Guner, E. 2016. Separation Axioms in Čech closure Ordered Spaces. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 65 (2); 1-10.

Uluslararası Kongre Sunum

Connectedness in Monotone Ordered Space, International Conference On Pure and Applied Mathematics, Van, Turkey, 2015.

Separation Axioms in Čech Closure Ordered Spaces, 5th. International Conference on Mathematical Sciences and Applications, Belgrade/SERBIA, 2016.

i(d)-Proper and i(d)-Admissible Topologies in the setting of Čech Closure Preordered Spaces, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Şanlıurfa, Turkey, 2017.