

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

REKTİFİYAN EĞRİLER VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Beyhan YILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2016

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Beyhan YILMAZ tarafından hazırlanan " **Rektifiyan Eğriler ve Geometrik Uygulamaları**" adlı tez çalışması 13/05/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ayşe ALTIN
Hacettepe Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

13/05/2016

Beyhan YILMAZ

ÖZET

Doktora Tezi

REKTİFİYAN EĞRİLER VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Beyhan YILMAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmuştur.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ön bilgiler ile diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle, 3-boyutlu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında bir eğrinin genel ortonormal çatısı kullanılarak bu eğrinin rektifiyan eğri olma koşulları karakterize edilmiştir. Daha sonra taban eğrisi rektifiyan olan regle yüzeyler ele alınmıştır. Son olarak, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Serret-Frenet çatısı kullanılarak üçüncü dereceden polinom katsayılı diferensiyel denklemlerin seri çözümleri yardımıyla, rektifiyan Salkowski eğrilerinin denklemi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, n -boyutlu Öklid uzayında harmonik eğrilik fonksiyonları kullanılarak rektifiyan eğriler için yeni bir karakterizasyon elde edilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise rektifiyan eğriler ve fokal eğriler arasındaki ilişki ele alınmıştır.

Son bölümde ise tezden elde edilen sonuçlara ve çeşitli önerilere yer verilmiştir.

Mayıs 2016, 73 sayfa

Anahtar Kelimeler: Rektifiyan eğri, modifiye darboux vektör, regle yüzey, Salkowski eğri, harmonik eğrilik, fokal eğri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

RECTIFYING CURVES AND ITS GEOMETRIC APPLICATIONS

Beyhan YILMAZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, concepts and definitions which are needed in the further chapters are given.

In the third chapter, firstly, rectifying curves were characterized using any orthonormal space in 3-dimensional Euclidean space and Lorentz-Minkowski space. Later, ruled surfaces which is the base curve is rectifying curve were examine. Finally, the equation of the rectifying Salkowski curve were obtained via serial solutions of third-order polynomial coefficients differential equations using Serret-Frenet frame 3-dimensional Lorentz-Minkowski space.

In the fourth chapter, a new characterization were given for rectifying curve using harmonic curvature functions in the n -dimensional Euclidean space. In the last part of this chapter, some relations were investigated between rectifying curves and focal curves.

In the last chapter, the results which are obtained from thesis and some proposals are discussed.

May 2016, 73 pages

Key Words: Rectifying curve, modified darboux vector, ruled surface, Salkowski curve, harmonic curvature, focal curve.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu vererek, bana araştırma olanağı sağlayan ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' ya, her konuda bilgi, görüş ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer tez izleme kurulu üyesi hocalarım Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' e, ayrıca beni kendi öğrencilerinden ayırt etmeyen hocam Sayın Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' ye en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca yanımda olan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen çok kıymetli mesai arkadaşlarım Araş. Gör. Çağla RAMİS, Araş. Gör. Fatma ATEŞ ve Araş. Gör. Zehra ÖZDEMİR'e ve her zaman yanımda olan çok değerli dostlarım Duygu ÇANDARLI, Gizem CANSU ve Derya KAHVECİ' ye çok teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca yanımda olan, bugünlere gelmemdeki emeklerini hiçbir zaman ödeyemeyeceğim annem Gülşen UZUNOĞLU, babam Yaşar UZUNOĞLU ve kardeşim Ahmet UZUNOĞLU' na ve çalışmalarım süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen eşim Ufuk YILMAZ' a en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Beyhan YILMAZ
Ankara, Mayıs 2016

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar	3
2.2 Lorentz-Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar.....	6
3. 3-BOYUTLU UZAYDA REKTİFİYAN EĞRİLERİN GENELLEŞ- TİRİLMESİ	9
3.1 Öklid Uzayında Rektifiyan Eğriler.....	9
3.2 Lorentz-Minkowski Uzayında Rektifiyan Eğriler.....	27
3.3 Öklid Uzayında Taban Eğrisi Rektifiyan Olan Regle Yüzeyler ..	40
3.4 Lorentz-Minkowski Uzayında Rektifiyan Salkowski Eğrileri.....	45
4. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİ- LER VE FOKAL EĞRİLER	53
4.1 Harmonik Eğrilik Fonksiyonları ile Rektifiyan Eğriler	55
4.2 Fokal Eğriler ve Rektifiyan Eğriler.....	63
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	69
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{E}_1^3$	Lorentz-Minkowski 3-uzayı
$\langle, \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\wedge$	Lorentz vektörel çarpımı
$\ .\ $	Norm
$\mathbb{E}_1^n$	n –boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı
$\mathbb{E}^n$	n –boyutlu Öklid uzayı
$\langle, \rangle$	Öklid iç çarpımı
$\times$	Öklid vektörel çarpımı
$\mathbb{E}^3$	Öklid 3-uzay
$\mathbb{R}$	Reel uzay
$\sum$	Toplam
V	Vektör uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	$\alpha(s)$ eğrisi	26
Şekil 3.2	$\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $Y(s)$ küresel eğrisi	26
Şekil 3.3	$\beta(s)$ eğrisi	27
Şekil 3.4	$\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $Y(s)$ küresel eğrisi	27
Şekil 3.5	$\alpha(s)$ eğrisi	38
Şekil 3.6	$\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi	38
Şekil 3.7	$Y(s)$ küresel eğrisi	38
Şekil 3.8	$\beta(s)$ eğrisi	39
Şekil 3.9	$\tilde{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi	39
Şekil 3.10	$Y(s)$ küresel eğrisi	39
Şekil 3.11	$\alpha(t)$ timelike rektifiyan Salkowski eğrisi	51
Şekil 3.12	$\gamma(t)$ spacelike rektifiyan Salkowski eğrisi	52

1. GİRİŞ

Temel diferensiyel geometri teorisinden bilindiği gibi eğrinin teğet T , asli normal N ve binormal B vektörleri göz önüne alındığında, bir düzlem eğrinin $\{T, N\}$ vektörleri tarafından geriliyorsa oskülatör düzlem, $\{T, B\}$ vektörleri tarafından geriliyorsa rektifiyan düzlem ve $\{N, B\}$ vektörleri tarafından geriliyorsa da normal düzlem adını alır. Rektifiyan eğriler, pozisyon vektörleri kendisinin rektifiyan düzleminde yatan eğrilerdir. 3–boyutlu Öklid uzayında bir rektifiyan α eğrisinin pozisyon vektörü herhangi diferensiyellenebilir $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ fonksiyonları için,

$$\alpha(s) = \lambda(s) T(s) + \mu(s) B(s) \quad (1.1)$$

şeklindedir.

Rektifiyan eğriler ilk olarak B. Y. Chen tarafından 2003 yılında tanımlanmıştır. Chen, bir eğrinin rektifiyan olması için gerek ve yeter şartın, eğrinin eğrilikleri oranı olan $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$ nın kendi yay parametresine göre sabit olmayan lineer fonksiyon olması gerektiğini ispatlamıştır (Chen 2003). Ayrıca, rektifiyan eğrilerin, küresel eğriler yardımıyla elde edilebileceğini göstermiştir. Daha sonra ise B. Y. Chen ve F. Dillen 3–boyutlu Öklid uzayında, sıfırdan farklı sabit eğrilikli (veya sabit olmayan eğrilikli) ve sabit olmayan torsiyonlu (veya sıfırdan farklı sabit torsiyonlu) birim hızlı bir eğrinin Darboux eğrisinin rektifiyan olduğunu göstermişlerdir (Chen ve Dillen 2005).

3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında da rektifiyan eğriler ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu uzayda yatan rektifiyan eğriler de 3–boyutlu Öklid uzayındakine benzer bir karakterizasyona sahiptir (İlarslan vd. 2003, 2007). $\mathbb{E}_1^3$ de bir regüler eğrinin rektifiyan olması için gerek ve yeter şart torsiyon ve eğrilikleri oranının pseudo yay parametresine göre sabit olmayan lineer bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir. Yani; bu özelliğin eğrinin causal karakterine göre invariant olduğu ifade edilmiştir. (Özbey ve Oral 2009) çalışmasında ise dual Lorentzian uzayda rektifiyan eğriler tanıtılmış ve bu eğrilerin birim dual küresel eğriler yardımıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir. (Lucas ve Ortega 2015) çalışmasında yazarlar rektifiyan eğrileri,

3–boyutlu kürede inceleyerek bu eğrilerle ilgili küresel yapıya has bazı karakterizasyonlar ortaya koymuşlardır. Bunlara ek olarak (Oh ve Seo 2015) çalışmasında $\kappa > 0$ eğrilikli, eğrilikleri oranı sabit olan rektifiyan eğriler için 3–boyutlu Öklid uzayında bir yaklaşım yapılmıştır. Son yıllarda rektifiyan eğriler n –boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş ve bu eğrilerle ilgili yeni karakterizasyonlar elde edilmeye çalışılmıştır (Cambie vd. 2016).

Bu tez çalışmasında, 3–boyutlu Öklid uzayında ve Lorentz-Minkowski uzayında eğri boyunca genel ortonormal çatı kullanılarak rektifiyan eğriler ve onların Darboux eğrileri arasındaki ilişki ele alınmıştır. Bir eğrinin modifiye Darboux eğrisi tanımlanarak bu eğrinin hangi şartlar altında rektifiyan olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, küresel eğriler yardımıyla da rektifiyan eğriler elde edilmiştir. Daha sonra 3–boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriler ve bu eğriler yardımıyla oluşturulan regle yüzeyler arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha önce Chen ve Dillen tarafından tanımlanmış olan co-centrode eğrilerinin aslında tanımlanmış olduğumuz taban eğrisi rektifiyan olan regle yüzeyin özel bir hali olduğu ispatlanmış ve tanımlanan yüzeyin taban eğrisinin rektifiyan olma şartı elde edilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise, 3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Serret-Frenet çatısı kullanılarak birinci eğriligi sabit olan Salkowski eğrileri için üçüncü dereceden polinom katsayılı diferensiyel denklemlerin seri çözümleri yardımıyla rektifiyan eğrilerin denklemi elde edilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise rektifiyan eğriler, harmonik eğrilik fonksiyonu adı verilen fonksiyonlar yardımıyla n –boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmeye çalışılmış ve bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. İkinci kısmında ise rektifiyan eğriler ile fokal eğriler arasında ne tür ilişkiler olduğu araştırılmıştır. Sonuç olarak herhangi bir eğrinin fokalının rektifiyan olması için gerek ve yeter koşulun $\lambda_{n-1} = -c_{n-2}$ olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca bütün bu durumlar $n = 3$ özel durumunda Serret-Frenet çatısı için de incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlardan söz edilecektir.

2.1 Öklid Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve V de bir vektör uzayı olmak üzere, V de bir,

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall v, w \in V$ için, aşağıdaki iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse,

$$(v, w) \rightarrow \langle, \rangle (v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$$

V vektör uzayına *iç çarpım uzayı* denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.2 n boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere, V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına, Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.3 n boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^n$ için,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpımı* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.4 n boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün *normu* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.5 3 boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $\forall x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$ için Öklid vektörel çarpımı,

$$x \times y = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.6 I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ biçiminde C^∞ sınıftan bir dönüşüme, $\mathbb{E}^{n+1}$ uzayı içinde bir *eğri* denir (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 2.7 $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, nin Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$, $\alpha(t) \in M$ eğrisinin diferensiyeli aşağıdaki gibidir,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t} \right)$$

$\alpha'(t)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.8 $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre *birim hızlı eğridir* denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.9 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.10 $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için,

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{T, N_1, \dots, N_{r-1}\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{T(m), N_1(m), \dots, N_{r-1}(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Herbir T ve $N_i, 1 \leq i \leq r-1$, vektörlerine de *Serret-Frenet vektör alanı* adı verilir.

Özel Hal: $n = 3$ özel halinde, $\mathbb{E}^3, 3$ -boyutlu Öklid uzayında Serret-Frenet 3-ayaklısı elde edilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere,

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \alpha'(s) \\ \vec{N}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ \vec{B}(s) &= \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece, $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ sistemi, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin Serret-Frenet 3-ayaklısıdır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.11 (Hacısalıhoğlu 2000) $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı,

$$\{T = N_0, N_1, \dots, N_{r-1}\}$$

olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}k_i &: I \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle N'_{i-1}(s), N_i(s) \rangle\end{aligned}\tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir.

2.2 Lorentz-Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.12 $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde herhangi vektörler,

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \text{ ve } \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_L &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Lorentz iç çarpımı alınır, $\mathbb{R}^3$ afin uzayı, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı olarak adlandırılır ve $\mathbb{E}_1^3$ ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.13 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında herhangi bir vektör olmak üzere,

- i. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise $\vec{x}$ spacelike vektör,
- ii. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L < 0$ ise $\vec{x}$ timelike vektör,
- iii. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = 0$ veya $\vec{x} \neq 0$ ise $\vec{x}$ lightlike (veya null) vektör olarak adlandırılır (Craig 1883).

Tanım 2.14 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında herhangi bir vektör olmak üzere,

- i. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = 1$ ise $\vec{x}$ birim hızlı spacelike vektör,
- ii. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = -1$ ise $\vec{x}$ birim hızlı timelike vektör olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.15 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere,

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

vektörüne $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ nin vektörel çarpımı denir (O'Neill 1983).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere,

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = -e_1, e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

Tanım 2.16 I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir dönüşüm ise α ya 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında bir eğri denir (Lopez 2008).

Tanım 2.17 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi için $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) = T(s)$ eşitliğiyle belirlenmiş $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir (Wang ve Liu 2007).

Tanım 2.18 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere,

- i. T vektörü spacelike ise α eğrisine spacelike eğri,
 - ii. T vektörü timelike ise α eğrisine timelike eğri,
 - iii. T vektörü lightlike ise α eğrisine lightlike veya null eğri,
- denir (Lopez 2008).

Tanım 2.19 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi verilsin.

i. α eğrisi timelike ise, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ve $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ şeklinde tanımlanmak üzere $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Serret-Frenet çatısı için değişim formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{pmatrix}$$

ii. α eğrisi spacelike ise, $T'(s)$ vektörünün causal karakterine bağlı olarak üç durum vardır.

- $T'(s)$ vektörü spacelike olsun. $\kappa(s) = \|T'(s)\|$, $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s) \rangle$ şeklinde tanımlanmak üzere $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Serret-Frenet çatısı için değişim formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{pmatrix}$$

- $T'(s)$ vektörü timelike olsun. $\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$, $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ şeklinde tanımlanmak üzere $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Serret-Frenet çatısı için değişim formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{pmatrix}$$

- $T'(s)$ vektörü lightlike olsun. $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s) \rangle$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}'(s) \\ \vec{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ 1 & 0 & -\tau(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{pmatrix}$$

$\{T(s), N(s), B(s)\}$ Serret-Frenet çatısı için değişim formülleri de yukarıdaki gibi tanımlıdır (Lopez 2008).

3. 3–BOYUTLU UZAYDA REKTİFİYAN EĞRİLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölüm başlığı altında öncelikle 3–boyutlu Öklid uzayında, sonrasında ise 3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında rektifiyan eğriler genel $\{\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3\}$ ortonormal çatısı ile incelenmiştir. Bu genel çatıya göre, modifiye Darboux eğrisi tanımlanarak bu eğrinin rektifiyan olması için gerek ve yeter şart ifade edilmiştir. Daha sonra küresel eğriler yardımıyla rektifiyan eğri elde etme durumu incelenmiştir. Özel durumda Serret-Frenet çatısı için de bazı sonuçlar bulunmuştur.

Sonraki kısımda ise, rektifiyan eğriler için bir geometrik uygulama olarak 3–boyutlu Öklid uzayında herhangi ortonormal çatı kullanılarak taban eğrisi rektifiyan olan bir regle yüzey tanımlanarak özel durumlarda ikisi arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında ise, 3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Serret-Frenet çatısı üzerinde κ eğrilik fonksiyonu sabit olan rektifiyan eğriler için, seri çözümleri yardımıyla bir yaklaşım yapılarak rektifiyan eğrilerin denklemi elde edilmeye çalışılmıştır.

3.1 Öklid Uzayında Rektifiyan Eğriler

Bu kısımda, öncelikle rektifiyan eğrilerle ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilecek ve (Yaylı vd. 2014) çalışmasında ifade edilen 3–boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğrilerin yeni yaklaşımı ele alınacaktır. Herhangi bir dik çatı üzerinde daha önce tanımlanan genel Darboux vektör alanlarının özel durumları için bazı modifiye Darboux eğrileri tanımlanarak bu eğrilerin hangi şartlarda rektifiyan olması gerektiği ifade edilmiştir.

Tanım 3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3–boyutlu Öklid uzayında $\kappa(s) \neq 0$ olan bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğet doğrusu sabit bir doğrul-

tuyla sabit bir açı yapıyorsa eğri genel helis olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle α eğrisi genel helistir ancak ve ancak $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ oranı sabittir (Lancret 1806).

Tanım 3.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa(s) \neq 0$ olan bir eğri olsun. $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)$ ifadesi sabit bir fonksiyon ise α eğrisi konikal geodezik eğri olarak adlandırılır (İzumiya ve Takeuchi 2004).

Tanım 3.3 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olan regüler bir α eğrisi için $d = \tau T + \kappa B$ Darboux vektörü ile verilen eğri α eğrisinin centrodesi ve $C_{\pm} = \alpha \pm d$ eğrileri de α eğrisinin co-centrodesi adını alır (Chen 2003).

Teorem 3.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısına göre s yay parametresiyle parametrelendirilmiş $\kappa(s) > 0$ olan bir rektifiyan eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler mevcuttur.

- i. $\rho = |\alpha|$ uzaklık fonksiyonu c_1 ve c_2 sabitleri için $\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ şeklindedir.
- ii. Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni, b sabit olmak üzere $\langle \alpha, T \rangle = s + b$ şeklindedir.
- iii. Eğrinin yer vektörünün α^N normal bileşeni sabit uzunluktadır ve ρ fonksiyonu sabit değildir.
- iv. $\tau(s)$ torsiyonu sıfırdan farklıdır ve yer vektörünün binormal bileşeni sabittir. Yani $\langle \alpha, B \rangle$ sabittir.

Tersine eğer $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\kappa(s) > 0$ olan bir eğri ve eğer (i), (ii), (iii) veya (iv) yargıları sağlanıyorsa, bu durumda α eğrisi rektifiyandır (Chen 2003).

İspat. Kabul edelim ki $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi s yay parametresiyle parametrelendirilmiş $\kappa(s) > 0$ olan rektifiyan eğri olsun. Tanımdan biliniyor ki,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \quad (3.1)$$

şeklinde bir eğridir. (3.1) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır ve Serret-Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\lambda'(s) = 1, \lambda(s)\kappa(s) = \mu(s)\tau(s), \mu'(s) = 0 \quad (3.2)$$

eşitlikleri bulunur. (3.2) denklemindeki birinci ve üçüncü eşitliklerden biliniyor ki $\lambda = s + b$ ve μ sabittir. $\kappa \neq 0$ olduğundan μ sabiti de sıfırdan farklıdır. Böylece (3.1) denkleminden $\langle \alpha, T \rangle = s + b$ olur ki (ii) sağlar. $(\rho^2)' = \langle \alpha, \alpha \rangle' = 2 \langle \alpha, \alpha' \rangle$ olduğundan (i) ve (ii) ifadeleri denktir ve böylece (i) eşitliği de sağlanmış olur. (3.1) denklemi, eğrinin yer vektörünün α^N normal bileşeninin μB ile verildiğini gösterir. $\mu = \langle \alpha, B \rangle$, (3.2) denklemindeki üçüncü eşitlikten dolayı sabit olduğundan, α^N sabit uzunluktadır. Bu ise (iii) ifadesini sağlar. (iv) denklemi ise μ nın sabitliği, $\kappa > 0$, $\lambda = s + b$ ve (3.2) nin ikinci denkleminden sağlanır.

Tersine, kabul edelim ki (i) veya (ii) ifadelerinden birisi sağlansın. b sabiti için $\langle \alpha, T \rangle = s + b$ olduğu biliniyor. Buradan bu eşitliğin s yay parametresine göre türevi alınır $\kappa \langle \alpha, N \rangle = 0$ olur. $\kappa > 0$ olduğundan $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olur. Bu ise eğrinin rektifiyan olması demektir. Eğer (iii) ifadesi sağlamıyorsa,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, T \rangle^2 + c$$

olduğu açıktır. Bu eşitliğin s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\langle \alpha, T \rangle = \langle \alpha, T \rangle (1 + \kappa \langle \alpha, N \rangle) \quad (3.3)$$

olur. ρ uzaklık fonksiyonu sabit olmadığından $\langle \alpha, T \rangle \neq 0$ dır. Böylece (3.3) denklemi ve $\kappa > 0$ olduğundan $\langle \alpha, N \rangle = 0$ dır. O halde α rektifiyandır. Son olarak (iv) ifadesinden eğrinin rektifiyan olduğu Serret-Frenet denklemleri kullanılarak basitçe gösterilebilir.

■

Teorem 3.2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa(s) > 0$ olan bir eğri olsun. α eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak eğrinin torsiyon ve eğrilik oranı s yay parametresine göre sabit olmayan lineer fonksiyondur. Yani, $c_1 \neq 0$ olan c_1 ve c_2 sabitleri için, $\frac{\tau}{\kappa} = c_1 s + c_2$ şeklindedir (Chen 2003).

İspat. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa(s) > 0$ olan bir eğri olsun. α eğrisi rektifiyan ise, (3.2) denklemleri sağlanır. Bu ise a ve b sabitleri için,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(s+b)}{a}$$

şeklindedir. Böylece eğrinin torsiyon ve eğrilik oranı s yay parametresine göre sabit olmayan lineer fonksiyondur.

Tersine kabul edelim ki $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa(s) > 0$ olan bir eğri olsun öyle ki $c_1 \neq 0$ olan c_1 ve c_2 sabitleri için $\frac{\tau}{\kappa} = c_1 s + c_2$ şeklindedir. Eğer $a = \frac{1}{c_1}$ ve $b = a c_2$ olarak kullanılırsa $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{(s+b)}{a}$ olur. Serret-Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds} [\alpha(s) - (s+b)T(s) - aB(s)] = 0$$

olur ki bu ise α eğrisinin rektifiyan olması demektir.

■

Teorem 3.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa > 0$ olan bir eğri olsun. α rektifiyandır ancak ve ancak α eğrisi,

$$\alpha(t) = (a \sec t)y(t)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada a pozitif sayı ve $y = y(t)$ eğrisi $\mathbb{S}^2$ küresinde birim hızlı bir eğridir (Chen 2003).

İspat. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa > 0$ olan rektifiyan eğri olsun. Genelliği kaybetmeksizin kabul edelim ki $0, I$ aralığında ve $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. Yukarıdaki teoremden uzaklık fonksiyonu $\rho = |\alpha|$, $\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ şeklindedir. s için uygun öteleme yaptıktan sonra c sabiti için $\rho^2 = s^2 + c$ şeklindedir. $0, I$ aralığında olduğundan $c > 0$ olmak zorundadır. Böylece a pozitif sayısı için $c = a^2$ kullanabiliriz. $\mathbb{S}^2$ de $y = \alpha/\rho$ eğrisini tanımlayalım. Böylece,

$$\alpha(s) = \sqrt{s^2 + a^2}y(s) \quad (3.4)$$

şeklindedir. (3.4) denkleminin s parametresine göre türevi alınır,

$$\alpha'(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}}y(s) + \sqrt{s^2 + a^2}y'(s) \quad (3.5)$$

şeklinde bulunur. $\langle y, y \rangle = 1$ ve $y'(s)$, I aralığındaki herbir s parametresi için $y(s)$ eğrisine diktir. Böylece, (3.5) denklemi gösterir ki

$$v = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

şeklindedir. Burada $v = |y'(s)|$, $y = y(s)$ küresel eğrisinin hızıdır.

$$t = \int_0^s \frac{adu}{u^2 + a^2} = \arctan\left(\frac{s}{a}\right)$$

olmak üzere $s = a \tan t$ olur. Bu eşitlik (3.4) denkleminde yerine yazılırsa ifade ispatlanır.

Tersine eğer $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi a pozitif sayısı ve S^2 küresindeki $y = y(t)$ birim hızlı eğrisi için,

$$\alpha(t) = (a \sec t)y(t) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\alpha'(t) = (a \sec t) \{(\tan t)y(t) + y'(t)\} \quad (3.7)$$

şeklindedir. $y(t)$ ve $y'(t)$ vektör alanları dik olduğundan (3.7) denklemi aşağıdaki eşitliği sağlar

$$|\alpha'(t)| = a \sec^2 t. \quad (3.8)$$

(3.6), (3.7) ve (3.8) denklemlerinden,

$$\langle \alpha^N, \alpha^N \rangle = \rho^2(t) - \frac{\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle^2}{|\alpha'(t)|^2} = a^2 \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) denklemi gösterir ki yer vektörünün α^N normal bileşeni sabit uzunluktur. $\rho = a \sec t$ ile verilen α eğrisinin uzaklık fonksiyonu sabit olmadığından önceki teorem gereğince α eğrisi rektifiyandır.

■

Teorem 3.4 3–boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı sabit κ eğrilikli (veya sabit olmayan eğrilikli) ve sabit olmayan τ torsiyonlu (veya sıfırdan farklı sabit torsiyonlu) birim hızlı bir eğrinin centredesi rektifiyandır. Tersine 3–boyutlu Öklid uzayında

her rektifiyan eğri, sıfırdan farklı sabit κ eğrilikli ve sabit olmayan τ torsiyonlu (veya sabit olmayan eğrilikli ve sıfırdan farklı sabit torsiyonlu) birim hızlı bir eğrinin centrodесidir (Chen ve Dillen 2005).

İspat. Kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi sıfırdan farklı sabit eğrilikli ve sabit olmayan torsiyonlu birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin centrodesi,

$$d(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s) \quad (3.10)$$

olmak üzere (3.10) denkleminin s parametresine göre türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa, $d' = \tau'T$ elde edilir. Bu ise d ve α eğrisinin birim teğet vektörlerinin karşılık gelen noktalarda paralel olması demektir. Ayrıca Serret-Frenet formüllerinden d ve α eğrisinin asli normal vektörünün karşılık gelen noktalarda paralel olduğu da kolaylıkla görülebilir. Böylece benzer düşünceyle d nin binormal vektör alanı ve α eğrisi de paraleldir. (3.10) denkleminden α eğrisinin centrodesinin yer vektörünün kendi rektifiyan düzleminde yattığı biliniyor. O halde tamımdan d centrodesi rektifiyandır.

Tersine kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi I açık aralığı üzerinde tanımlı $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı rektifiyan bir eğri olsun. (Chen 2003) çalışmasındaki Teorem 3.2 den biliyoruz ki α eğrisinin torsiyon ve eğrilikleri oranı $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}$ kendi yay parametresine göre sabit olmayan lineer fonksiyondur. Böylece genelliği kaybetmeksizin kabul edelim ki pozitif c sayısı için,

$$\kappa_\alpha = \frac{c\tau_\alpha}{s} \quad (3.11)$$

ve $f(s) = \frac{1}{c} \int_{s_0}^s \kappa_\alpha(u) du$ olsun. Açık bir şekilde $g = f^{-1}$ fonksiyonu mevcuttur. Uzun eğrileri için temel teorem uygulanarak, eğrilik ve torsiyon fonksiyonları $\kappa_\beta(t) = c$ ve $\tau_\beta(t) = g(t)$ olan $\beta = \beta(t)$ birim hızlı eğrisi mevcuttur.

$$d_\beta(t) = g(t)T_\beta(t) + cB_\beta(t)$$

ile verilen β eğrisinin centrodesini ve yeni parametrelemesiyle $\gamma(s) = d_\beta(f(s))$ eğrisini gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\gamma(s) = sT_\beta(f(s)) + cB_\beta(f(s))$$

şeklindedir. $\gamma'(s) = T_\beta(f(s))$ olur ki böylece γ eğrisi birim hızlıdır ve $T_\gamma(s) = T_\beta(f(s))$ şeklindedir. γ eğrisinin eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarının iki kez türevi alınırsa, $\kappa_\gamma(s) = cf'(s) = \kappa_\alpha(s)$ ve $\tau_\gamma(s) = sf'(s)$ olarak elde edilir. (3.11) denkleminde $\tau_\gamma = \tau_\alpha$ olur. Böylece α ve γ birim hızlı eğrileri aynı eğrilik ve torsiyona sahiptirler. Böylece uzay eğrileri için temel teoremden α eğrisi, γ eğrisine eşittir. Sonuç olarak α rektifiyan eğrisi sıfırdan farklı sabit eğrilikli ve sabit olmayan torsiyonlu uzay eğrisinin centrodesidir.

Teoremin ispatı sıfırdan farklı torsiyon ve sabit olmayan eğrilikli α eğrisi için de benzer şekilde yapılabilir.

■

Daha önce rektifiyan eğriler ile ilgili yapılmış en temel tanım ve teoremler ispatlarıyla birlikte verildikten sonra genel ortonormal çatı üzerinde rektifiyan eğriler için yeni yaklaşımı ifade edelim.

3-boyutlu Öklid uzayında s -yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisini ve bu eğri üzerinde tanımlı genel $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s), \vec{N}_3(s)\}$ ortonormal çatısını gözönüne alalım. Burada $\vec{N}_2(s)$ birim normal vektör ve $\vec{N}_3(s)$, $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ vektörlerine dik bir vektördür. $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ fonksiyonları, eğrinin eğrilikleri olmak üzere bu ortonormal çatı ile türevleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} \vec{N}_1'(s) \\ \vec{N}_2'(s) \\ \vec{N}_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1(s) & k_2(s) \\ -k_1(s) & 0 & k_3(s) \\ -k_2(s) & -k_3(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{N}_1(s) \\ \vec{N}_2(s) \\ \vec{N}_3(s) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Bu genel ortonormal çatı, içerisinde pek çok çatıyı barındırmaktadır. Örneğin,

$$N_1 = T, \quad N_2 = B_1, \quad N_3 = B_2 \text{ ve } k_3 = 0$$

olması durumunda Bishop çatısına (Bishop 1975),

$$N_1 = T, \quad N_2 = Y, \quad N_3 = Z, \quad k_1 = k_g, \quad k_2 = k_n \text{ ve } k_3 = t_r$$

olması durumunda Darboux çatısına eşit olacaktır. Bu kısımda dikkat edilecek olan en önemli noktalardan birisi $k_2(s) = 0$ koşullu ortonormal çatı, Serret-Frenet çatısından farklıdır. Ancak,

$$N_1 = T, \quad N_2 = N, \quad N_3 = B, \quad k_1 = \kappa \text{ ve } k_3 = \tau$$

olması durumunda ortonormal çatı Serret-Frenet çatısı ile çakışır. Çalışma boyunca $k_2(s) = 0$ koşulu altında çatı gözönüne alınacaktır. Ancak karakterizasyonlar $k_1(s) = 0$ veya $k_3(s) = 0$ durumunda da benzer olarak ifade edilebilir.

Tanım 3.4 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Eğri üzerinde $\{N_1(s), N_2(s), N_3(s); k_1(s), k_3(s)\}$ herhangi ortonormal çatı elemanlarını gözönüne alalım ve $\alpha(s)$ eğrisi boyunca,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{s}) \times \vec{N}_1(s) &= \vec{N}_1'(s) \\ \mathbf{D}(\mathbf{s}) \times \vec{N}_2(s) &= \vec{N}_2'(s) \\ \mathbf{D}(\mathbf{s}) \times \vec{N}_3(s) &= \vec{N}_3'(s) \end{aligned} \tag{3.13}$$

şartlarını sağlayan,

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = k_3(s) N_1(s) - k_2(s) N_2(s) + k_1(s) N_3(s)$$

Darboux eğrisini tanımlayalım. $k_2(s) = 0$ koşulu altında,

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = k_3(s) N_1(s) + k_1(s) N_3(s) \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada, $k_1(s) \neq 0$ olmak koşuluyla,

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) N_1(s) + N_3(s) \tag{3.15}$$

ve $k_3(s) \neq 0$ olmak şartıyla,

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = N_1(s) + \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s) N_3(s) \tag{3.16}$$

modifiye Darboux eğrilerini tanımlayabiliriz.

Teorem 3.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. $\beta(s_\beta) = N_1(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği, $(k_g)_\beta = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)$, $k_1(s) \neq 0$ şeklindedir. Burada s_β , β eğrisinin yay parametresidir.
- ii. $\gamma(s_\gamma) = N_3(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği, $(k_g)_\gamma = \left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s)$, $k_3(s) \neq 0$ şeklindedir. Burada s_γ , γ eğrisinin yay parametresidir.

İspat. i. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisi s_β yay parametresi ve $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta, \kappa_\beta, \tau_\beta\}$ çatısı ile birlikte,

$$\beta(s_\beta) = N_1(s) \quad (3.17)$$

şeklindedir. Bu eğrinin geodezik eğriliğinin hesabı için, öncelikle (3.17) denkleminin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_\beta(s_\beta) \frac{ds_\beta}{ds} = k_1(s) N_2(s) \quad (3.18)$$

elde edilir. Bu eşitlikte her tarafın normu alınırsa, $\frac{ds_\beta}{ds} = k_1(s)$ elde edilir ki eşitliğin (3.18) denkleminde kullanılmasıyla,

$$T_\beta(s_\beta) = N_2(s) \quad (3.19)$$

olur. (3.19) eşitliğinin bir kez daha türevi alınarak,

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s_\beta) N_\beta(s_\beta) &= (-k_1(s) N_1(s) + k_3(s) N_3(s)) \frac{ds}{ds_\beta} \\ &= -N_1(s) + \left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) N_3(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Her tarafın normu alınırsa,

$$\kappa_\beta = \sqrt{1 + \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^2(s)} \quad (3.20)$$

olur. Diğer taraftan, $k_n = 1$ olduğundan ve $(\kappa_\beta)^2 = (k_n)^2 + (k_g)^2$ eşitliğini sağlaması gerektiğinden $(k_g)_\beta = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)$, $k_1(s) \neq 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

ii. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisi s_γ yay parametresi ve $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma, \kappa_\gamma, \tau_\gamma\}$ çatısı ile birlikte,

$$\gamma(s_\gamma) = N_3(s) \quad (3.21)$$

şeklindedir. Bu eğrinin geodezik eğriliği için, öncelikle (3.21) denkleminin her iki tarafının s yay parametresine göre türevinin alınmasıyla,

$$T_\gamma(s_\gamma) \frac{ds_\gamma}{ds} = -k_3(s) N_2(s) \quad (3.22)$$

elde edilir. Bu eşitlikte her tarafın normu alınırsa, $\frac{ds_\gamma}{ds} = -k_3(s)$ elde edilir ki bu eşitliğin (3.22) denkleminde kullanılmasıyla,

$$T_\gamma(s_\gamma) = N_2(s) \quad (3.23)$$

olur. (3.23) eşitliğinin bir kez daha türevi alınarak,

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(s_\gamma) N_\gamma(s_\gamma) &= (-k_1(s) N_1(s) + k_3(s) N_3(s)) \frac{ds}{ds_\gamma} \\ &= \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s) N_1(s) - N_3(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Her tarafın normu alınırsa,

$$\kappa_\gamma = \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_3} \right)^2 (s) + 1} \quad (3.24)$$

olur. Diğer taraftan, $k_n = 1$ olduğundan ve $(\kappa_\beta)^2 = (k_n)^2 + (k_g)^2$ eşitliğini sağlaması gerektiğinden $(k_g)_\gamma = \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s)$, $k_3(s) \neq 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

■

Sonuç 3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $T(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği, $(k_g) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (s)$, $\kappa(s) \neq 0$ şeklindedir.

ii. $B(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği $(k_g) = \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) (s)$, $\tau(s) \neq 0$ şeklindedir.

Tanım 3.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere eğer $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyon ise $\bar{\beta}(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi konikal geodezik eğri olarak adlandırılır.

Benzer şekilde, $k_3(s) \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{k_1}{k_3}\right)'(s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyon ise $\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrisi diğer bir konikal geodezik eğri olarak adlandırılır.

Teorem 3.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin sabit olmayan $(k_g)_\beta$ geodezik eğrilikli $\tilde{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak her rektifiyan eğri, sabit olmayan geodezik eğrilikli herhangi birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

Benzer şekilde, γ eğrisinin sabit olmayan $(k_g)_\gamma$ geodezik eğrilikli $\bar{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak her rektifiyan eğri, sabit olmayan geodezik eğrilikli herhangi birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Sabit olmayan $(k_g)_\beta$ eğriligi koşulu altında modifiye Darboux eğrisi $\{\mathbf{T}_{\tilde{\mathbf{D}}}, \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{D}}}, \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{D}}}, \boldsymbol{\kappa}_{\tilde{\mathbf{D}}}, \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{D}}}\}$ Serret-Frenet çatı elemanlarıyla birlikte,

$$\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s) N_1(s) + N_3(s)$$

şeklindedir. $\tilde{\mathbf{D}}$ nin her iki tarafının s ye göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{D}}}{ds} \frac{ds}{ds} &= \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s) N_1(s) \\ T_{\tilde{\mathbf{D}}} &= \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s) N_1(s) \frac{ds}{ds} \end{aligned}$$

elde edilir ve son eşitlikte her tarafın normu alınır,

$$T_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) = N_1(s) \tag{3.25}$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\tilde{s} = \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

eşitliği kolaylıkla bulunabilir. (3.25) numaralı eşitliğin her iki tarafının diferensiyeli alınırsa,

$$\kappa_{\tilde{\mathbf{D}}} N_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) \left(\frac{k_3}{k_1} \right)' (s) = k_1(s) N_2(s)$$

şeklindedir ve bu eşitlik normlandırılırsa,

$$N_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) = N_2(s) \quad (3.27)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$B_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) = N_3(s) \quad (3.28)$$

Buradan $\tilde{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisinin eğrilik ve torsiyonu,

$$\kappa_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{k_1}{\left(\frac{k_3}{k_1} \right)'}, \text{ ve } \tau_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{k_3}{\left(\frac{k_3}{k_1} \right)'}, \quad (3.29)$$

olarak hesaplanır. Eğrilik ve torsiyon fonksiyonları birarada düştürülürse,

$$\frac{\tau_{\tilde{\mathbf{D}}}}{\kappa_{\tilde{\mathbf{D}}}} = \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) = \tilde{s} - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Böylece $\beta(s_\beta) = N_1(s)$ eğrisinin sabit olmayan $(k_g)_\beta$ geodezik eğrilikli $\tilde{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır.

Tersine, kabul edelim ki α eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Yukarıda da ispatı verilen Teorem 3.4 in ispat methoduna benzer bir method yardımıyla her rektifiyan eğrinin, sabit olmayan geodezik eğrilikli herhangi birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisi olduğu gösterilebilir (Chen ve Dillen 2005).

Benzer ispat $k_3(s) \neq 0$ olması koşuluyla $\overline{\mathbf{D}}(s) = N_1(s) + \left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) N_3(s)$ modifiye Darboux eğrisi için de yapılabilir. Sabit olmayan $(k_g)_\gamma$ eğriliği koşulu altında modifiye Darboux eğrisi $\{\mathbf{T}_{\overline{\mathbf{D}}}, \mathbf{N}_{\overline{\mathbf{D}}}, \mathbf{B}_{\overline{\mathbf{D}}}, \kappa_{\overline{\mathbf{D}}}, \tau_{\overline{\mathbf{D}}}\}$ Serret-Frenet çatı elemanlarıyla birlikte,

$$\overline{\mathbf{D}}(s) = N_1(s) + \left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) N_3(s)$$

şeklindedir. $\overline{\mathbf{D}}$ nin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\mathbf{D}}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} &= \left(\frac{k_1}{k_3}\right)'(s) N_3(s) \\ T_{\overline{\mathbf{D}}} &= \left(\frac{k_1}{k_3}\right)'(s) N_3(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \end{aligned}$$

elde edilir ve son eşitlikte her tarafın normu alınırsa,

$$T_{\overline{\mathbf{D}}}(\bar{s}) = N_3(s) \quad (3.30)$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{s} = \left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

eşitliği kolaylıkla görülebilir. (3.30) numaralı eşitliğin her iki tarafının diferensiyeli alınırsa,

$$\kappa_{\overline{\mathbf{D}}} N_{\overline{\mathbf{D}}}(\bar{s}) \left(\frac{k_1}{k_3}\right)'(s) = -k_3(s) N_2(s)$$

şeklindedir ve normlandırılırsa,

$$N_{\overline{\mathbf{D}}}(\bar{s}) = N_2(s)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$B_{\overline{\mathbf{D}}}(\bar{s}) = N_1(s)$$

Buradan $\overline{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisinin eğrilik ve torsiyonu,

$$\kappa_{\overline{\mathbf{D}}} = -\frac{k_3}{\left(\frac{k_1}{k_3}\right)'}, \text{ ve } \tau_{\overline{\mathbf{D}}} = -\frac{k_1}{\left(\frac{k_1}{k_3}\right)'}$$

olarak hesaplanır. Eğrilik ve torsiyon fonksiyonları bir arada düştürülürse,

$$\frac{\tau_{\overline{D}}}{\kappa_{\overline{D}}} = \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s) = \bar{s} - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Böylece $\gamma(s_\gamma) = N_3(s)$ eğrisinin sabit olmayan $(k_g)_\gamma$ geodezik eğrilikli $\overline{D}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır.

Tersine, kabul edelim ki α eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Yukarıda Teorem 3.4 de ispatı verilen teoremin ispat methoduna benzer bir method yardımıyla her rektifiyan eğrinin sabit olmayan geodezik eğrilikli herhangi birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisi olduğu gösterilebilir (Chen ve Dillen 2005).

■

Sonuç 3.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı helis olmayan bir eğri olsun. Bu durumda modifiye Darboux eğrisi $\tilde{D}$ rektifiyandır ancak ve ancak her rektifiyan eğri, herhangi birim hızlı helis olmayan bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

Benzer şekilde, $\overline{D}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak her rektifiyan eğri, herhangi helis olmayan birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

Teorem 3.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\bar{\beta}(s) = \int N_1(s) ds$ ve $\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrileri rektifiyandır ancak ve ancak $\bar{\beta}$ ve $\bar{\gamma}$ eğrileri konikal geodezik eğrilerdir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri ve kabul edelim ki $\bar{\beta}(s)$ eğrisi rektifiyan olsun. Bu durumda $\left(\frac{\tau_{\bar{\beta}}}{\kappa_{\bar{\beta}}} \right)$ oranı lineer bir fonksiyondur. Yani λ ve μ sabitler olmak üzere, $\left(\frac{\tau_{\bar{\beta}}}{\kappa_{\bar{\beta}}} \right) = \lambda s + \mu$ şeklindedir. Eğer $\bar{\beta}(s)$ eğrisinin eğrilikleri

hesaplanır ve bu eğriliklerin oranına bakılırsa,

$$\left(\frac{\tau_{\bar{\beta}}}{\kappa_{\bar{\beta}}}\right) = \left(\frac{k_3}{k_1}\right) = \lambda s + \mu, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir ki $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyondur ve böylece $\bar{\beta}$ eğrisi konikal geodezik eğridir.

Tersine kabul edelim ki $\bar{\beta}$ eğrisi konikal geodezik eğri olsun. Böylece $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyondur. $\bar{\beta}$ ve α eğrisinin eğrilikleri arasındaki ilişkiden,

$$\left(\frac{k_3}{k_1}\right) = \left(\frac{\tau_{\bar{\beta}}}{\kappa_{\bar{\beta}}}\right) = \lambda s + \mu, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } \mu \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. Sonuç olarak, $\bar{\beta}$ eğrisi rektifiyandır.

$\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrisi için de ispat benzer şekilde yapılabilir.

■

Sonuç 3.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\hat{\beta}(s) = \int T(s) ds$ ve $\hat{\gamma}(s) = \int B(s) ds$ eğrileri rektifiyandır ancak ve ancak $\hat{\beta}$ ve $\hat{\gamma}$ eğrileri konikal geodezik eğridir.

Sonuç 3.4 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\bar{\beta}(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $k_1(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\tilde{\mathbf{C}}_{\pm} = \bar{\beta}(s) \pm \tilde{\mathbf{D}}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

Benzer düşünceyle, $\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrisi $\left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $k_3(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\overline{\mathbf{C}}_{\pm} = \bar{\gamma}(s) \pm \overline{\mathbf{D}}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

Sonuç 3.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı helis olmayan birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\hat{\beta}(s) = \int T(s) ds$ eğrisi $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $\kappa(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\tilde{C}_{\pm} = \hat{\beta}(s) \pm \tilde{D}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

Benzer düşünceyle, $\hat{\gamma}(s) = \int B(s) ds$ eğrisi $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $\tau(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\overline{C}_{\pm} = \hat{\gamma}(s) \pm \overline{D}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

Teorem 3.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) = \tan s$, $k_1(s) \neq 0$ ve $\mathbf{Y}(s) = \sin s N_1(s) + \cos s N_3(s)$ eğrisi $\mathbb{S}^2$ de küresel bir eğri ise, bu durumda $\tilde{\mathbf{D}}$ rektifiyan eğrisi $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \sec s \mathbf{Y}(s)$ şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde, eğer $\left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) = \tan s$, $k_3(s) \neq 0$ ve $\mathbf{Y}(s) = \cos s N_1(s) + \sin s N_3(s)$ eğrisi $\mathbb{S}^2$ de küresel bir eğri ise, bu durumda $\overline{\mathbf{D}}$ rektifiyan eğrisi $\overline{\mathbf{D}}(s) = \sec s \mathbf{Y}(s)$ şeklinde ifade edilebilir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun.

$$\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) N_1(s) + N_3(s)$$

modifiye Darboux eğrisini gözönüne alalım. Hipotez altında,

$$\tilde{\mathbf{D}}(s) = \tan s N_1(s) + N_3(s)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(s) = \sec s (\sin s N_1(s) + \cos s N_3(s))$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(s) = \sec s \mathbf{Y}(s)$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde diğer durumun ispatı da kolaylıkla yapılabilir.

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = N_1(s) + \left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) N_3(s)$$

modifiye Darboux eğrisini gözönüne alalım. Hipotez altında,

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = N_1(s) + \tan s N_3(s)$$

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = \sec s (\cos s N_1(s) + \sin s N_3(s))$$

$$\overline{\mathbf{D}}(s) = \sec s \mathbf{Y}(\mathbf{s})$$

şeklinde bulunur.

■

Sonuç 3.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = \tan s$, $\kappa(s) \neq 0$ ve $Y(s) = \sin s T(s) + \cos s B(s)$ eğrisi $\mathbb{S}^2$ de küresel bir eğri ise, bu durumda $\tilde{D}$ rektifiyan eğrisi $\tilde{D}(s) = \sec s Y(s)$ şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde, eğer $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(s) = \tan s$, $\tau(s) \neq 0$ ve $Y(s) = \cos s T(s) + \sin s B(s)$ eğrisi $\mathbb{S}^2$ de küresel bir eğri ise, bu durumda $\overline{D}$ rektifiyan eğrisi $\overline{D}(s) = \sec s Y(s)$ şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç 3.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında herhangi ortonormal çatı elemanları $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olmak üzere, (Uzunoğlu vd. 2016) çalışmasında tanımlanmış olan,

$$\left\{ N(s), C(s) = \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|}, W(s) = N(s) \times C(s), f(s), g(s) \right\}$$

çatı elemanları kullanılarak,

$$N_1(s) = N(s), N_2(s) = C(s), N_3(s) = W(s)$$

ve

$$k_1(s) = f(s), k_3(s) = g(s)$$

seçimleriyle birlikte bütün bu teorem ve sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir.

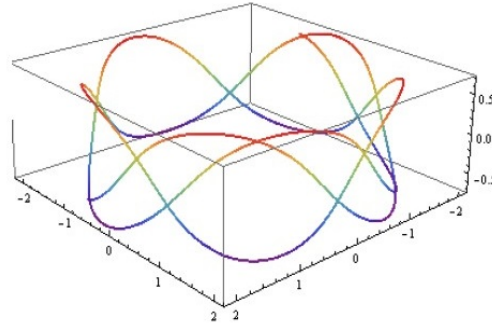
Örnek 3.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında aşağıdaki gibi bir eğri olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}+1)s - \frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}-1)s, \right. \\ & -\frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}+1)s + \frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}-1)s, \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) \end{aligned}$$

$\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları yerine özel olarak,

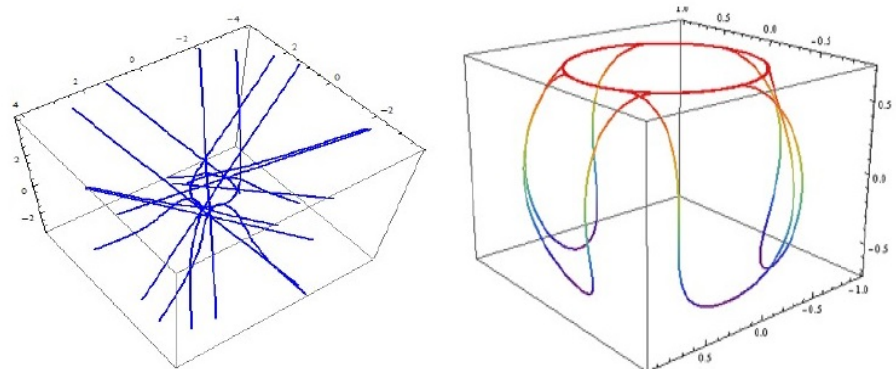
$$N_1(s) = T(s), \quad N_2(s) = N(s), \quad N_3(s) = B(s), \quad k_1 = \kappa \text{ ve } k_3 = \tau$$

alınıp Serret-Frenet çatı elemanları hesaplanarak Mathematica yardımıyla çizdirilirse, α eğrisinin görüntümü Şekil 3.1' deki gibi elde edilir.



Şekil 3.1 $\alpha(s)$ eğrisi

Ayrıca $\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $Y(s)$ küresel eğrileri Şekil 3.2' deki gibidir.

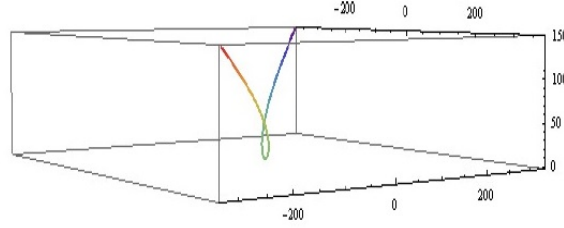


Şekil 3.2 $\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $Y(s)$ küresel eğrisi

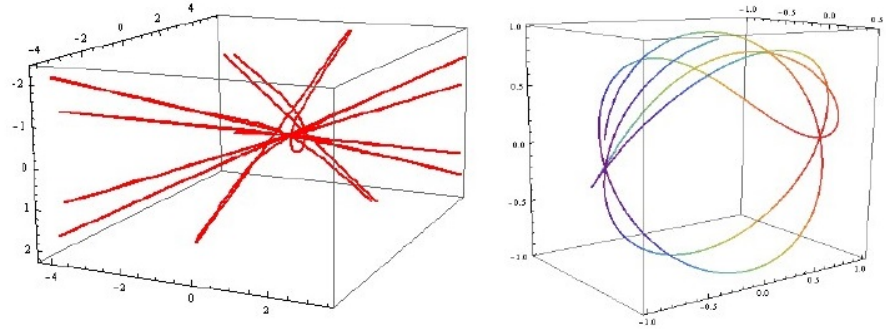
Örnek 3.2 $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında aşağıdaki gibi bir eğri olmak üzere,

$$\beta(s) = (3s - s^3, 3s^2, 3s + 3s^3)$$

benzer düşünceyle β eğrisinin, $\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisinin ve $Y(s)$ küresel eğrisinin çizimleri Şekil 3.3 ve Şekil 3.4’ deki gibidir.



Şekil 3.3 $\beta(s)$ eğrisi



Şekil 3.4 $\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $Y(s)$ küresel eğrisi

3.2 Lorentz-Minkowski Uzayında Rektifiyan Eğriler

Bu kısımda 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında yatan rektifiyan eğrilerin bazı karakterizasyonları verilecektir. $\mathbb{E}_1^3$ de herhangi bir regüler rektifiyan eğrinin torsiyon ve eğrilik oranının sabit olmayan lineer bir fonksiyon olduğu belirtilmiştir. Yani bu

özelliğın, eğrinin causal karakterine ve rektifiyan düzlemine göre invariant olduğu ifade edilmiştir.

3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında s –yay parametresiyle parametrelendirilmiş ve timelike veya spacelike (null olmayan) herhangi bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisini ve bu eğri üzerinde tanımlı herhangi $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s), \vec{N}_3(s)\}$ ortonormal çatısını gözönüne alalım. $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_L &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 \end{aligned}$$

Lorentz iç çarpımı kullanılmak üzere bu ortonormal çatının türev değışimi aşğıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} \vec{N}_1'(s) \\ \vec{N}_2'(s) \\ \vec{N}_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1(s) & \varepsilon_3 k_2(s) \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_3 k_1(s) & 0 & -\varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3(s) \\ k_2(s) & k_3(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{N}_1(s) \\ \vec{N}_2(s) \\ \vec{N}_3(s) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Burada $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ fonksiyonları α eğrisinin eğrilikleridir. $\mathbb{E}_1^3$ de vektörel çarpım $\wedge$ işlemiyle tanımlanmak üzere çatı elemanları arasındaki ilişki ise şu şekilde verilmektedir.

$$\begin{aligned} \vec{N}_1(s) \wedge \vec{N}_2(s) &= \vec{N}_3(s) \\ \vec{N}_1(s) \wedge \vec{N}_3(s) &= \varepsilon_1 \vec{N}_2(s) \\ \vec{N}_3(s) \wedge \vec{N}_2(s) &= \varepsilon_3 \vec{N}_1(s) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ayrıca Lorentz-Minkowski metriğine göre,

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle_L &= \varepsilon_1, \quad \langle \vec{N}_2, \vec{N}_2 \rangle_L = \varepsilon_2, \quad \langle \vec{N}_3, \vec{N}_3 \rangle_L = \varepsilon_3, \\ \langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle_L &= 0, \quad \langle \vec{N}_1, \vec{N}_3 \rangle_L = 0, \quad \langle \vec{N}_2, \vec{N}_3 \rangle_L = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde eşitlikler mevcuttur. 3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında açısıl hız vektörü olan Darboux vektörü $\mathbf{D}$ olmak üzere,

$$\mathbf{D}(s) = \varepsilon_1 k_3(s) \vec{N}_1(s) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_2(s) \vec{N}_2(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_1(s) \vec{N}_3(s) \quad (3.34)$$

şeklindedir ve bu vektör,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{s}) \wedge \overrightarrow{N_1}(s) &= \overrightarrow{N_1'}(s) \\ \mathbf{D}(\mathbf{s}) \wedge \overrightarrow{N_2}(s) &= \overrightarrow{N_2'}(s) \\ \mathbf{D}(\mathbf{s}) \wedge \overrightarrow{N_3}(s) &= \overrightarrow{N_3'}(s)\end{aligned}\tag{3.35}$$

şartlarını sağlar. Bir önceki kısımdakine benzer olarak bu bölümün de tamamında $k_2(s) = 0$ alarak teoriyi kuracağız.

Teorem 3.9 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında spacelike veya timelike rektifiyan düzlemde yatan ve $\kappa(s) > 0$ olan birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. α eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak eğrilikleri oranı $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = c_1s + c_2$, $c_1 \in R_0$, $c_2 \in R$ şeklinde lineer fonksiyondur (İlarslan vd. 2003)

Tanım 3.6 $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz-Minkowski uzayında $k_1(s) \neq 0$ olan regüler bir α eğrisi için $\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 k_3(s) \overrightarrow{N_1}(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_1(s) \overrightarrow{N_3}(s)$ Darboux vektörüyle verilen eğri α eğrisinin centrodesi olarak, $C_{\pm} = \alpha(s) \pm \mathbf{D}(\mathbf{s})$ eğrileri ise α eğrisinin co-centrodesi olarak adlandırılır.

Teorem 3.10 $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz-Minkowski uzayında sıfırdan farklı sabit k_1 eğrilikli (veya sabit olmayan k_1 eğrilikli) ve sabit olmayan k_3 torsiyonlu (veya sıfırdan farklı sabit k_3 torsiyonlu) birim hızlı bir eğrinin centrodesi rektifiyan eğridir.

Tersine $\mathbb{E}_1^3$ uzayında her rektifiyan eğri, sıfırdan farklı sabit k_1 eğrilikli ve sabit olmayan k_3 torsiyonlu (veya sabit olmayan k_1 eğrilikli ve sıfırdan farklı sabit k_3 torsiyonlu) herhangi bir birim hızlı eğrinin centrodesidir (İlarslan ve Nesovic 2007).

Tanım 3.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Eğri üzerinde $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi orto-

normal çatı elemanları gözönüne alınırsa, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 k_3(s) \overrightarrow{N_1}(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_1(s) \overrightarrow{N_3}(s) \quad (3.36)$$

Darboux eğrisi yukarıdaki gibi tanımlanır. Aynı zamanda $k_1(s) \neq 0$ olmak koşuluyla,

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 N_3(s) \quad (3.37)$$

ve $k_3(s) \neq 0$ olmak koşuluyla,

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s) N_3(s) \quad (3.38)$$

modifiye Darboux eğrileri de tanımlanabilir.

Teorem 3.11 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. $\beta(s_\beta) = N_1(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği, $(k_g)_\beta = \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s)$, $k_1(s) \neq 0$ şeklindedir. Burada s_β , β eğrisinin yay parametresidir.
- ii. $\gamma(s_\gamma) = N_3(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği, $(k_g)_\gamma = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s)$, $k_3(s) \neq 0$ şeklindedir. Burada s_γ , γ eğrisinin yay parametresidir.

İspat. i. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. β eğrisi s_β yay parametresi ve $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta; \kappa_\beta, \tau_\beta\}$ çatısı ile birlikte,

$$\beta(s_\beta) = N_1(s) \quad (3.39)$$

şeklindedir. Bu eğrinin geodezik eğriliğinin hesabı aşağıdaki gibidir. (3.39) denkleminin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_\beta(s_\beta) \frac{ds_\beta}{ds} = k_1(s) N_2(s)$$

şeklinde bulunur. Buradan iki tarafın normu alınırsa $\frac{ds_\beta}{ds} = k_1(s)$ elde edilir ki bu ifade yukarıdaki denklemde kullanılırsa,

$$T_\beta(s_\beta) = N_2(s) \quad (3.40)$$

olur. (3.40) eşitliğinin bir kez daha türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(s_\beta) N_\beta(s_\beta) &= (-\varepsilon_1 \varepsilon_3 k_1(s) N_1(s) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3(s) N_3(s)) \frac{ds}{ds_\beta} \\ &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 N_1(s) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) N_3(s)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$(k_n)_\beta = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 \text{ ve } (k_g)_\beta = \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s), \quad k_1(s) \neq 0$$

olduğu kolaylıkla görülür.

ii. $\gamma(s_\gamma) = N_3(s)$ eğrisi $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma; \kappa_\gamma, \tau_\gamma\}$ kendi Serret-Frenet çatı elemanları ile birlikte benzer düşünceyle incelenirse, $(k_g)_\gamma = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s), k_3(s) \neq 0$ olarak elde edilir.

■

Sonuç 3.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Serret-Frenet çatı elemanları $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $T(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği $(k_g) = \varepsilon_1 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (s), \kappa(s) \neq 0$ şeklindedir.

ii. $B(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği $(k_g) = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) (s), \tau(s) \neq 0$ şeklindedir.

Tanım 3.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında herhangi ortonormal çatı elemanları $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere, eğer $\varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)' (s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyon ise $\bar{\beta}(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi konikal geodezik eğri olarak adlandırılır. Benzer şekilde, $k_3(s) \neq 0$ olmak üzere eğer, $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_3} \right)' (s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyon ise $\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrisi diğer bir konikal geodezik eğri olarak adlandırılır.

Teorem 3.12 α eğrisi 3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. β eğrisinin sabit olmayan $(k_g)_\beta$ geodezik eğrilikli $\tilde{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak her rektifiyan eğri, sabit olmayan geodezik eğrilikli herhangi birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

Benzer şekilde, γ eğrisinin sabit olmayan $(k_g)_\gamma$ geodezik eğrilikli $\overline{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak her rektifiyan eğri, sabit olmayan geodezik eğrilikli herhangi birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında herhangi ortonormal çatı elemanları $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Sabit olmayan $(k_g)_\beta$ eğriligi koşulu altında modifiye Darboux eğrisi, $\{\mathbf{T}_{\tilde{\mathbf{D}}}, \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{D}}}, \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{D}}}; \kappa_{\tilde{\mathbf{D}}}, \tau_{\tilde{\mathbf{D}}}\}$ Serret-Frenet çatı elemanlarıyla birlikte

$$\tilde{\mathbf{D}}(s) = \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 N_3(s), \quad k_1(s) \neq 0$$

şeklindeir. $\tilde{\mathbf{D}}$ nin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{D}}}{ds} \frac{ds}{ds} &= \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)' (s) N_1(s) + \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) k_1(s) N_2(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 k_3(s) N_2(s) \\ T_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) &= \left(\varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)' (s) N_1(s) \right) \frac{ds}{d\tilde{s}} \end{aligned}$$

elde edilir ve son eşitlikte her iki tarafın normu alınır,

$$T_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) = N_1(s) \quad (3.41)$$

olur. Buradan kolaylıkla,

$$\tilde{s} = \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

olduğu görülür. (3.41) eşitliğinin her iki tarafının diferensiyeli alınır,

$$\kappa_{\tilde{\mathbf{D}}} N_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)' (s) = k_1(s) N_2(s)$$

olur ve aynı düşünceyle normlandırılırsa,

$$N_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) = N_2(s) \quad (3.42)$$

şeklinde elde edilir. Benzer işlemler yapılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$B_{\tilde{\mathbf{D}}}(\tilde{s}) = N_3(s) \quad (3.43)$$

Buradan $\tilde{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisinin eğrilik ve torsiyonu,

$$\kappa_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{k_1}{\varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)}, \text{ ve } \tau_{\tilde{\mathbf{D}}} = \frac{k_3}{\varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)} \quad (3.44)$$

şeklinde bulunur. Eğrilik ve torsiyon fonksiyonları bir arada düşünülecek olursa,

$$\frac{\tau_{\tilde{\mathbf{D}}}}{\kappa_{\tilde{\mathbf{D}}}} = \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) = \tilde{s} - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır.

Tersine, kabul edelim ki $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin sabit olmayan $(k_g)_\beta$ geodezik eğrilikli $\tilde{\mathbf{D}}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyan olmak üzere 3.4 in ispat methoduna benzer bir method yardımıyla her rektifiyan eğrinin, sabit olmayan geodezik eğrilikli herhangi birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisi olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz.

Benzer ispat $k_3(s) \neq 0$ olması koşuluyla $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s) N_3(s)$ modifiye Darboux eğrisi için de yapılabilir.

■

Sonuç 3.9 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Serret-Frenet çatı elemanları $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ ile tanımlı birim hızlı helis olmayan bir eğri olsun. Bu durumda modifiye Darboux eğrisi $\tilde{\mathbf{D}}$ rektifiyandır ancak ve ancak her

rektifiyan eğri, herhangi birim hızlı helis olmayan bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

Benzer şekilde, $\overline{D}$ modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır ancak ve ancak her rektifiyan eğri, herhangi helis olmayan birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisidir.

Teorem 3.13 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Bu durumda $\bar{\beta}(s) = \int N_1(s) ds$ ve $\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrileri rektifiyandır ancak ve ancak $\bar{\beta}$ ve $\bar{\gamma}$ eğrileri konikal geodezik eğridir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Kabul edelim ki $\bar{\beta}(s)$ eğrisi rektifiyan olsun. Bu durumda bu eğrinin torsiyon ve eğrilik oranı $\left(\frac{\tau_{\bar{\beta}}}{\kappa_{\bar{\beta}}}\right)$ lineer bir fonksiyondur. Yani λ ve μ sabitler olmak üzere $\left(\frac{\tau_{\bar{\beta}}}{\kappa_{\bar{\beta}}}\right) = \lambda s + \mu$ şeklindedir. Eğer $\bar{\beta}(s)$ eğrisinin eğrilikleri hesaplanır ve bu eğriliklerin oranına bakılırsa,

$$\left(\frac{\tau_{\bar{\beta}}}{\kappa_{\bar{\beta}}}\right) = -\varepsilon_2 \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s) = \lambda s + \mu, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ve} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

elde edilir ki $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyondur ve böylece $\bar{\beta}$ eğrisi konikal geodezik eğridir.

Tersine kabul edelim ki $\bar{\beta}$ eğrisi konikal geodezik eğri olsun. Böylece $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyondur. $\bar{\beta}$ ve α eğrisinin eğrilikleri arasındaki ilişkiden,

$$-\varepsilon_2 \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) = \lambda s + \mu, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ve} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

olduğu açıktır. Böylece $\bar{\beta}$ eğrisi rektifiyandır.

$\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrisi için de ispat benzer şekilde yapılabilir.

■

Sonuç 3.10 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Serret-Frenet çatı elemanları $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Bu durumda $\hat{\beta}(s) = \int T(s) ds$ ve $\hat{\gamma}(s) = \int B(s) ds$ eğrileri rektifiyandır ancak ve ancak $\hat{\beta}$ ve $\hat{\gamma}$ eğrileri konikal geodezik eğridir.

Sonuç 3.11 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında herhangi ortonormal çatı elemanları $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Bu durumda $\bar{\beta}(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $k_1(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\tilde{C}_{\pm} = \bar{\beta}(s) \pm \tilde{D}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

$\bar{\gamma}(s) = \int N_3(s) ds$ eğrisi de benzer düşünceyle $\left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $k_3(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\overline{C}_{\pm} = \bar{\gamma}(s) \pm \overline{D}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

Sonuç 3.12 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Serret-Frenet çatı elemanları $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ ile tanımlı helis olmayan birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\hat{\beta}(s) = \int T(s) ds$ eğrisi $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $\kappa(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\tilde{C}_{\pm} = \hat{\beta}(s) \pm \tilde{D}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

Benzer düşünceyle, $\hat{\gamma}(s) = \int B(s) ds$ eğrisi $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(s)$ oranı sabit olmayan ve $\tau(s) \neq 0$ olan rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\overline{C}_{\pm} = \hat{\gamma}(s) \pm \overline{D}(s)$ eğrilerinden biri rektifiyandır.

Teorem 3.14 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Eğer $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) = \tan s$, $k_1(s) \neq 0$ ve $\mathbf{Y}(s) = \varepsilon_1 \sin s N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cos s N_3(s)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ de küresel bir eğri ise, bu durumda $\tilde{D}$ rektifiyan eğrisi $\tilde{D}(s) = \sec s \mathbf{Y}(s)$ şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde, eğer $\left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) = \tan s$, $k_3(s) \neq 0$ ve $\mathbf{Y}(s) = \varepsilon_1 \cos s N_1(s) +$

$\varepsilon_2 \varepsilon_3 \sin s N_3(s)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ de küresel bir eğri ise, bu durumda $\overline{\mathbf{D}}$ rektifiyan eğrisi $\overline{\mathbf{D}}(s) = \sec s \mathbf{Y}(\mathbf{s})$ şeklinde ifade edilebilir.

İspat. α eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun.

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 N_3(s)$$

modifiye Darboux eğrisini gözönüne alalım. Hipotez altında,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) &= \varepsilon_1 \tan s N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 N_3(s) \\ \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) &= \sec s (\varepsilon_1 \sin s N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cos s N_3(s)) \\ \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) &= \sec s \mathbf{Y}(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde diğer durumun ispatı da kolaylıkla yapılabilir.

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(\frac{k_1}{k_3} \right) (s) N_3(s)$$

modifiye Darboux eğrisini gözönüne alalım. Hipotez altında,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) &= \varepsilon_1 N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \tan s N_3(s) \\ \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) &= \sec s (\varepsilon_1 \cos s N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sin s N_3(s)) \\ \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{s}) &= \sec s \mathbf{Y}(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

■

Teorem 3.15 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Eğer $\left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) = \tanh s$, $k_1(s) \neq 0$ ve $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \varepsilon_1 \sinh s N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cosh s N_3(s)$ eğrisi $\mathbb{H}_0^2$ de bir eğri ise, $\tilde{\mathbf{D}}$ rektifiyan eğrisi $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \frac{1}{\sinh s} \mathbf{Y}(\mathbf{s})$ şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde, eğer $\left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) = \tanh s$, $k_3(s) \neq 0$ ve $\mathbf{Y}(s) = \varepsilon_1 \cosh s N_1(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sinh s N_3(s)$ eğrisi $\mathbb{H}_0^2$ de bir eğri ise, $\overline{\mathbf{D}}$ rektifiyan eğrisi $\overline{\mathbf{D}}(s) = \frac{1}{\cosh s} \mathbf{Y}(s)$ şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç 3.13 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Serret-Frenet çatı elemanları $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Eğer $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = \tan s$, $\kappa(s) \neq 0$ ve $Y(s) = \varepsilon_1 \sin s T(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cos s B(s)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ de küresel bir eğri ise, $\tilde{D}$ rektifiyan eğrisi $\tilde{D} = \sec s Y(s)$ şeklinde ifade edilebilir. Benzer şekilde, eğer $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)(s) = \tan s$, $\tau(s) \neq 0$ ve $Y(s) = \varepsilon_1 \cos s T(s) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sin s B(s)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2$ de küresel bir eğri ise, $\overline{D}$ rektifiyan eğrisi $\overline{D} = \sec s Y(s)$ şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç 3.14 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında herhangi ortonormal çatı elemanları $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olmak üzere, (Uzunoglu vd. 2016) çalışmasında tanımlanmış olan,

$$\left\{ N(s), C(s) = \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|}, W(s) = N(s) \times C(s), f(s), g(s) \right\}$$

çatı elemanları kullanılarak,

$$N_1(s) = N(s), N_2(s) = C(s), N_3(s) = W(s)$$

ve

$$k_1(s) = f(s), k_3(s) = g(s)$$

seçimleriyle birlikte bütün bu teorem ve sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir.

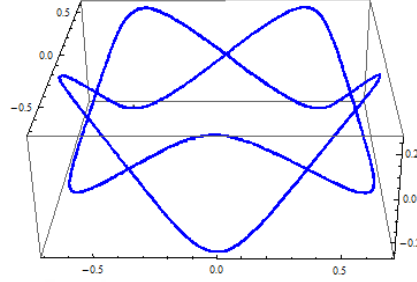
Örnek 3.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere spacelike $\alpha(s)$ eğrisi aşağıdaki gibi gözönüne alınırsa,

$$\alpha(s) = \left(\frac{9}{10} \sin s - \frac{1}{90} \sin 9s, -\frac{9}{10} \cos s + \frac{1}{90} \cos 9s, \frac{3}{20} \sin 4s \right)$$

$\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları yerine özel olarak,

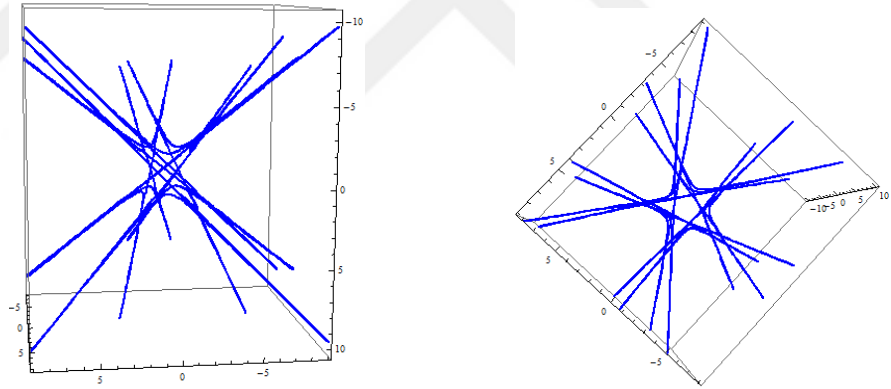
$$N_1(s) = T(s), \quad N_2(s) = N(s), \quad N_3(s) = B(s), \quad k_1 = \kappa \text{ ve } k_3 = \tau$$

alıp Serret-Frenet çatı elemanları hesaplanarak Mathematica yardımıyla çizdirilirse, α eğrisi Şekil 3.5' deki gibi elde edilir.

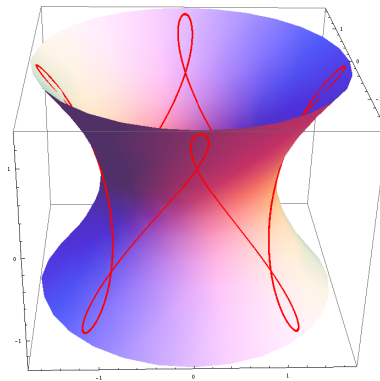


Şekil 3.5 $\alpha(s)$ eğrisi

Ayrıca $\alpha(s)$ eğrisinin modifiye Darboux eğrisi ve $Y(s)$ küresel eğrisi Şekil 3.6 ve Şekil 3.7' deki gibidir.



Şekil 3.6 $\overline{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi

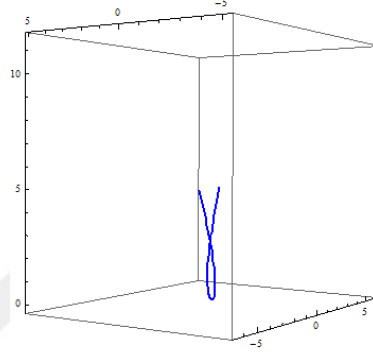


Şekil 3.7 $Y(s)$ küresel eğrisi

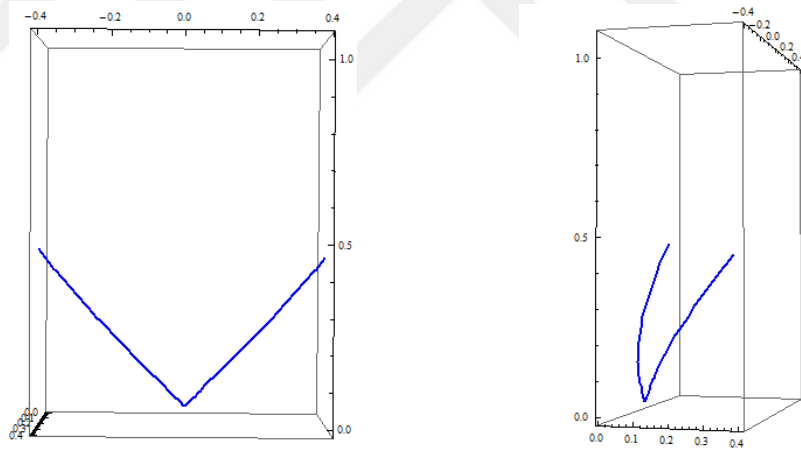
Örnek 3.4 $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere timelike $\beta(s)$ eğrisi

$$\beta(s) = \left(\frac{15}{136} \sinh 17s, \frac{9}{400} \cosh 25s - \frac{25}{144} \cosh 9s, \frac{9}{400} \sinh 25s + \frac{25}{144} \sinh 9s \right)$$

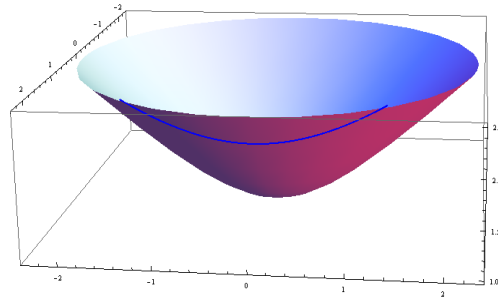
olarak gözönüne alınırsa, β eğrisinin, modifiye Darboux eğrisinin ve küresel eğrisinin çizimleri Şekil 3.8, Şekil 3.9 ve Şekil 3.10' daki gibi elde edilir.



Şekil 3.8 $\beta(s)$ eğrisi



Şekil 3.9 $\tilde{D}(s)$ modifiye Darboux eğrisi



Şekil 3.10 $Y(s)$ küresel eğrisi

3.3 Öklid Uzayında Taban Eğrisi Rektifiyan Olan Regle Yüzeyler

Çalışmanın bu kısmında, rektifiyan eğriler için geometrik bir uygulama niteliğinde, 3–boyutlu Öklid uzayındaki modifiye Darboux eğrisi kullanılarak, taban eğrisi rektifiyan olan regle yüzey tanımlanacak ve bu sayede rektifiyan eğriler ve regle yüzeyler arasındaki ilişki ele alınacaktır.

Tanım 3.9 $\mathbb{E}^3$ de bir regle yüzey $\Phi(s, u) = \alpha(s) + u\vec{X}(s)$ dönüşümü ile tanımlanır. $\alpha(s)$ eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi ve $X : I \rightarrow \mathbb{E}^3$, $X = x_1T + x_2N + x_3B$ şeklinde ve $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ olacak şekilde bir fonksiyon olmak üzere $\vec{X}(s)$ regle yüzeyin doğrultmanı adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 3.16 $\alpha(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi 3–boyutlu Öklid uzayında herhangi orto-normal çatı elemanları $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\Phi(s, u) = \alpha(s) + u\tilde{\mathbf{D}}(s)$ yüzeyinin u sabit parametre eğrileri rektifiyandır. Ayrıca burada $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)N_1(s) + N_3(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $u \neq -\frac{1}{a}$ dır.

İspat. $\alpha(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ çatı elemanlarına göre birim hızlı ve rektifiyan bir eğri olsun. Eğer $\Phi(s, u)$ yüzeyindeki u parametresi sabit ise,

$$\beta(s) = \int N_1(s) ds + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)N_1(s) + N_3(s) \right) \quad (3.45)$$

şeklinde bir eğri elde edilir. β eğrisinin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\int N_1(s) ds + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)N_1(s) + N_3(s) \right) \right) \\ \overline{N}_1 \frac{ds}{ds} &= N_1 + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s)N_1(s) + \left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s)k_1(s)N_2(s) - k_3(s)N_2(s) \right) \\ \overline{N}_1 &= \left(1 + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right)' \right) N_1 \frac{ds}{ds} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $\{\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3; \bar{k}_1, \bar{k}_3\}$, β eğrisinin çatı elemanlarıdır. Her iki tarafın normu alınır,

$$d\bar{s} = \left(1 + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'\right) ds$$

olur ki bu son denklem integre edilince,

$$\bar{s} = s + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right) + c, \quad c \text{ sabit} \quad (3.46)$$

bulunur. Bunlar göz önüne alındığında,

$$\bar{N}_1 = N_1 \quad (3.47)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Benzer şekilde (3.47) denkleminin her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_1}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} &= k_1(s) N_2(s) \\ \bar{k}_1(\bar{s}) \bar{N}_2(\bar{s}) &= k_1(s) N_2(s) \frac{1}{1 + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s)} \end{aligned}$$

olur. Burada $\left(\frac{k_3}{k_1}\right)'(s) \neq -\frac{1}{u}$ dır. Son eşitliğin her iki tarafının normu alınır,

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1}{1 + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'} \quad (3.48)$$

olarak elde edilir ve buradan kolaylıkla,

$$\bar{N}_2 = N_2$$

olduğu görülebilir. Ortonormal çatı olduğundan $\bar{N}_3 = N_3$ olur. Bu eşitliğin de türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{k}_3 = \frac{k_3}{1 + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'} \quad (3.49)$$

elde edilir. (3.48) ve (3.49) eğriliklerinin oranlanmasıyla,

$$\frac{k_3}{k_1} = \frac{\bar{k}_3}{\bar{k}_1} \quad (3.50)$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir.

$\alpha(s)$ eğrisi rektifiyan olduğundan, a ve b herhangi sabitler olmak üzere,

$$\left(\frac{k_3}{k_1}\right) = as + b \quad (3.51)$$

şeklinde s yay parametresine göre sabit olmayan lineer fonksiyon olduğu biliniyor. Dikkat edilecek olunursa burada $a \neq 0$ ve $a \neq -\frac{1}{u}$ dır. Bu eşitlik (3.46) bağıntısında kullanılırsa, $d \neq 0$ olmak üzere d ve e herhangi sabitleri için,

$$\begin{aligned} \bar{s} &= s + u(as + b) + c \\ \bar{s} &= (1 + au)s + buc \\ \bar{s} &= ds + e \end{aligned} \quad (3.52)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\alpha(s)$ eğrisinin yay parametresi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$s = \frac{\bar{s} + e}{d} \quad (3.53)$$

Bu eşitlik (3.50) ve (3.51) denklemleri kullanılarak yerine yazılırsa,

$$\frac{k_3}{k_1} = \frac{\bar{k}_3}{\bar{k}_1} = a \left(\frac{\bar{s} + e}{d} \right) + b$$

olur ki gerekli düzenlemeler yapılnca, $\lambda \neq 0$ olmak üzere λ ve μ herhangi sabit sayıları için,

$$\frac{\bar{k}_3}{\bar{k}_1} = \lambda \bar{s} + \mu \quad (3.54)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Sonuç olarak, $\alpha(s)$ eğrisi rektifiyan ise, u sabit parametre eğrileri rektifiyandır.

Tersine kabul edelim ki, $\Phi(s, u)$ yüzeyinin u sabit parametre eğrileri

$$\beta(s) = \int N_1(s) ds + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1} \right) (s) N_1(s) + N_3(s) \right)$$

rektifiyan olsun. β eğrisinin eğrilikleri oranı $\bar{s}$ yay parametresine göre lineer bir fonksiyondur. Yani $\lambda \neq 0$ olmak üzere λ ve μ herhangi sabit sayıları için,

$$\frac{\bar{k}_3}{\bar{k}_1} = \lambda \bar{s} + \mu$$

şeklindedir. Daha önce elde edilen (3.46) ve (3.50) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{\bar{k}_3}{\bar{k}_1} = \frac{k_3}{k_1} = \lambda \left(s + u \left(\frac{k_3}{k_1} \right) + c \right) + \mu$$

olur ki gerekli düzenlemeler yapılnca, $a \neq 0$ olmak üzere a ve b herhangi sabit sayıları için,

$$\frac{k_3}{k_1} = as + b$$

elde edilir. Bu ise $\alpha(s)$ eğrisinin rektifiyan olması demektir.

■

Teorem 3.17 $\gamma(s) = \int N_3(s) ds$ eğrisi Öklid uzayında $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ herhangi ortonormal çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda, $\gamma(s)$ eğrisi rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\Phi(s, u) = \gamma(s) + v\overline{\mathbf{D}}(s)$ yüzeyinin v sabit parametre eğrileri rektifiyandır. Burada $\overline{\mathbf{D}}(s) = N_1(s) + \left(\frac{k_1}{k_3}\right)(s) N_3(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $v \neq -\frac{1}{a}$ dır.

Sonuç 3.15 $\sigma(s) = \int T(s) ds$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda, $\sigma(s)$ eğrisi rektifiyan eğridir ancak ve ancak $\Phi(s, u) = \sigma(s) + u\tilde{D}(s)$ yüzeyinin u sabit parametre eğrileri rektifiyandır. Burada $\tilde{D}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) T(s) + B(s)$ modifiye Darboux vektör ve $u \neq -\frac{1}{a}$ dır.

Uyarı 3.1 3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa \neq 0$ olan regüler bir α eğrisi için, α nın centrodesinin $D = \tau T + \kappa B$ şeklinde olduğu ve $C_{\pm} = \alpha + D$ eğrilerinin α nın co-centrodesi olduğu daha önceki kısımda söylenmişti. Chen ve Dillen sıfırdan farklı sabit eğrilikli ve sabit olmayan torsiyonlu bir α eğrisinin rektifiyan olması için gerek ve yeter şartın eğrinin co-centrodelerinden bir tanesinin rektifiyan eğri olması gerektiğini göstermişlerdir. Yukarıda tanımladığımız u sabit parametre eğrileri için eğer $u = 1$ seçilirse, tanımlamış olduğumuz u sabit parametre eğrileri Chen ve Dillen tarafından tanımlanan co-centrode eğrilerine karşılık gelir.

Teorem 3.18 $\alpha(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında herhangi orto-normal çatı elemanları $\{N_1, N_2, N_3; k_1, k_3\}$ ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\alpha(s)$ eğrisi rektifiyan eğri ise, $\Phi(s, u) = \alpha(s) + u\tilde{\mathbf{D}}(s)$ yüzeyinin parametre eğrileri geodeziktir. Burada $\tilde{\mathbf{D}}(s) = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) N_1(s) + N_3(s)$ modifiye Darboux eğrisi ve $u \neq -\frac{1}{a}$ dır.

İspat. $\alpha(s)$ eğrisi $\Phi(s, u) = \alpha(s) + u\tilde{\mathbf{D}}(s)$ yüzeyinin her zaman geodeziğidir. Ancak yüzeyin parametre eğrileri $\alpha(s)$ eğrisinin rektifiyan eğri olması durumunda geodeziktir. Yüzeyin normal vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\Phi_s &= \left(1 + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'\right) N_1 \text{ ve } \Phi_u = \left(\frac{k_3}{k_1}\right) N_1 + N_3 \\ N_\Phi &= -\left(1 + u \left(\frac{k_3}{k_1}\right)'\right) N_2\end{aligned}$$

Kabul edelim ki $\alpha(s) = \int N_1(s) ds$ eğrisi birim hızlı rektifiyan bir eğri olsun. $\Phi(s, u) = \int N_1(s) ds + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) N_1(s) + N_3(s)\right)$ yüzeyinin u sabit parametre eğrilerini gözönüne alalım.

$$\beta(s) = \int N_1(s) ds + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) N_1(s) + N_3(s)\right) \quad (3.55)$$

eğrisi için a ve b herhangi sabitler olmak üzere her iki tarafın türevi alınır,

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{ds} &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{ds} = a N_1 \frac{ds}{ds} \\ \frac{d^2\beta}{ds^2} &= \frac{d^2\beta}{ds^2} \frac{ds^2}{ds^2} = b k_1 N_2\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla yüzeyin u sabit parametre eğrileri geodeziktir.

Benzer şekilde, $\Phi(s, u) = \int N_1(s) ds + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1}\right)(s) N_1(s) + N_3(s)\right)$ yüzeyinin s sabit parametre eğrileri incelenecek olursa,

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \int N_1(s) ds + u \left(\left(\frac{k_3}{k_1}\right) N_1 + N_3\right) \\ \frac{d^2\beta}{du^2} &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yüzeyin s sabit parametre eğrileri de geodeziktir. O halde, eğer α eğrisi rektifiyan ise $\Phi(s, u)$ yüzeyinin parametre eğrileri geodeziktir.

■

Sonuç 3.16 $\sigma(s) = \int T(s) ds$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\sigma(s)$ eğrisi rektifiyan ise, $\Phi(s, u) = \sigma(s) + u\tilde{D}(s)$ yüzeyinin parametre eğrileri geodeziktir. Burada $\tilde{D}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)T(s) + B(s)$ modifiye Darboux vektör ve $u \neq -\frac{1}{a}$ dır.

3.4 Lorentz-Minkowski Uzayında Rektifiyan Salkowski Eğrileri

Bu kısımda 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanlarına göre eğriliği sabit olan ve torsiyonu lineer fonksiyon olan uzay eğrilerini inceleyeceğiz. Burada amaç eğrilik fonksiyonu sabit olarak verildiğinde, torsiyon ve eğrilik oranı lineer olan bu uzay eğrisinin açık bir formülünü bulmaktır. Başka bir deyişle 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında eğriliği sabit olan rektifiyan eğrilerin denklemini elde etmektir. Bunu elde edebilmek için üçüncü dereceden polinom katsayılı diferensiyel denklemin seri çözümleri kullanılmıştır.

Teorem 3.19 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanları ile tanımlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Sabit $\kappa > 0$ eğrilikli ve $\tau = \kappa s$ torsiyona sahip birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisinin ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\alpha(t) = (f_1(t) - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{2} f_3(t), -\varepsilon_1 \varepsilon_3 f_2(t) + 1, -\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2\kappa} f_3(t))$$

Burada,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{t^2}{2} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{240\kappa^2} t^6 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{13440\kappa^2} t^8 + \left(\frac{1}{34560\kappa^4} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{1209600\kappa^2} \right) t^{10} + \dots \\ f_2(t) &= \frac{t^3}{3} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{120} t^5 + \left(\frac{1}{5040} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{630\kappa^2} \right) t^7 + \left(-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{362880} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{11340\kappa^2} \right) t^9 + \dots \\ f_3(t) &= \frac{t^4}{12} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{360} t^6 + \left(-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{1344\kappa^2} + \frac{1}{20160} \right) t^8 + \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{36288\kappa^2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{1814400} \right) t^{10} + \dots \end{aligned}$$

şeklinde dir.

İspat. Kabul edelim ki $\kappa(s) = |T'(s)| > 0$ sabit ve harmonik eğrilik fonksiyonu $H = \frac{\tau}{\kappa} = s$ sıfırdan farklı lineer olsun. α eğrisini t parametresine göre yeniden parametrelendirmek için aşağıda tanımlanan dönüşümü uygulayalım.

$$t(s) = \int_0^s \kappa ds = \kappa s \quad (3.56)$$

Serret-Frenet formülleri bu yeni parametreye göre yeniden elde edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa N \frac{1}{\kappa} = N \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{dN}{ds} \frac{ds}{dt} = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 T - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t}{\kappa} B \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{dB}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{t}{\kappa} N \end{aligned} \quad (3.57)$$

olur. N nin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dt^2} &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{dT}{dt} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} B - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t}{\kappa} \frac{dB}{dt} \\ &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 N - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} B - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t^2}{\kappa^2} N \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^3 N}{dt^3} &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{dN}{dt} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} \frac{dB}{dt} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{2t}{\kappa^2} N - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t^2}{\kappa^2} \frac{dN}{dt} \\ &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{dN}{dt} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t}{\kappa^2} N - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{2t}{\kappa^2} N - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t^2}{\kappa^2} \frac{dN}{dt} \\ &= -\left(\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t^2}{\kappa^2} \right) \frac{dN}{dt} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{3t}{\kappa^2} N \end{aligned}$$

olur ki son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa, $N = N(t)$ ye bağlı 3. dereceden diferensiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^3 N}{dt^3} + \left(\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t^2}{\kappa^2} \right) \frac{dN}{dt} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{3t}{\kappa^2} N = 0 \quad (3.58)$$

$t = 0$ noktası bu lineer diferensiyel denklem için adi nokta olduğundan bu komşulukta diferensiyel denklemin seri çözümü mevcuttur. Böylece diferensiyel denklemde,

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (3.59)$$

yazarak a_n katsayılarını elde edelim.

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n t^{n-3} + (\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t^2}{\kappa^2}) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{3t}{\kappa^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \quad (3.60)$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_1 \varepsilon_3 (n+1)a_{n+1}t^n \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa^2} (n-1)a_{n-1}t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{3}{\kappa^2} a_{n-1}t^n = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $n = 0$ ve $n = 1$ değerlerini kullanıp denklemi yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 \varepsilon_3 a_1 + 6a_3) + \left(\frac{3\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\kappa^2} a_0 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 a_2 + 24a_4 \right) t \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (n+1)a_{n+1} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\kappa^2} (n-1)a_{n-1} + \frac{3\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\kappa^2} a_{n-1} \right) t^n = 0 \end{aligned}$$

Buradan kolayca,

$$a_3 = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{6} a_1 \text{ ve } a_4 = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{12} a_2 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{8\kappa^2} a_0$$

olduğu görülebilir. $n = 2$ için,

$$60a_5 + 3\varepsilon_1 \varepsilon_3 a_3 + \frac{4\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\kappa^2} a_1 = 0$$

olup bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılınc a_5 katsayısı,

$$a_5 = \left(\frac{1}{120} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{15\kappa^2} \right) a_1$$

olarak elde edilir. $n = 3$ için,

$$120a_6 + 4\varepsilon_1 \varepsilon_3 a_4 + \frac{5\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\kappa^2} a_2 = 0$$

denkleminde gerekli düzenlemeler yapılınc a_6 katsayısı,

$$a_6 = \left(-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{24\kappa^2} + \frac{1}{360} \right) a_2 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{240\kappa^2} a_0$$

şeklindedir. Bu şekilde işlemlere devam edilirse,

$$N(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

seri çözümü için katsayılar belirlenebilir.

$$\begin{aligned} N(t) = & a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \left(-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{6} a_1\right) t^3 + \left(-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{12} a_2 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{8 \kappa^2} a_0\right) t^4 \\ & + \left(\frac{1}{120} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{15 \kappa^2}\right) a_1 t^5 + \left[\left(\frac{1}{360} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{24 \kappa^2}\right) a_2 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{240 \kappa^2} a_0\right] t^6 + \dots \end{aligned}$$

Katsayılar göre düzenlenecek olursa,

$$\begin{aligned} N(t) = & a_0 \left[1 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{8 \kappa^2} t^4 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{240 \kappa^2} t^6 + \left(\frac{1}{384 \kappa^4} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{13440 \kappa^2}\right) t^8 + \dots\right] \\ & + a_1 \left[t - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{6} t^3 + \left(\frac{1}{120} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{15 \kappa^2}\right) t^5 + \left(-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{5040} + \frac{2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{315 \kappa^2}\right) t^7 + \dots\right] \\ & + a_2 \left[t^2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{12} t^4 + \left(-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{24 \kappa^2} + \frac{1}{360}\right) t^6 + \left(\frac{5 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{2016 \kappa^2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{20160}\right) t^8 + \dots\right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Buradan T yi bulmak için $\int N$ değeri hesaplanmalıdır. Gerekli işlemler yapılırsa T teğet vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} T(t) = & a_0 \left[t - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{40 \kappa^2} t^5 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1680 \kappa^2} t^7 + \left(\frac{1}{3456 \kappa^4} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{120960 \kappa^2}\right) t^9 + \dots\right] \\ & + a_1 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{24} t^4 + \left(\frac{1}{720} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{90 \kappa^2}\right) t^6 + \left(-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{40320} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1260 \kappa^2}\right) t^8 + \dots\right] \\ & + a_2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{60} t^5 + \left(-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{168 \kappa^2} + \frac{1}{2520}\right) t^7 + \left(\frac{5 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{18144 \kappa^2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{181440}\right) t^9 + \dots\right] \\ & + b \end{aligned}$$

Burada a_0, a_1, a_2 ve b sabit vektörlerdir.

$\alpha'(t) = T$ olduğundan α eğrisinin denklemini bulmak için T vektörü bir kez daha integre edilirse $\alpha(t)$ eğrisi,

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & a_0 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{240 \kappa^2} t^6 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{13440 \kappa^2} t^8 + \left(\frac{1}{34560 \kappa^4} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{1209600 \kappa^2}\right) t^{10} + \dots\right] \\ & + a_1 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{120} t^5 + \left(\frac{1}{5040} - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{630 \kappa^2}\right) t^7 + \left(-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{362880} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{11340 \kappa^2}\right) t^9 + \dots\right] \\ & + a_2 \left[\frac{t^4}{12} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{360} t^6 + \left(-\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{1344 \kappa^2} + \frac{1}{20160}\right) t^8 + \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{36288 \kappa^2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{1814400}\right) t^{10} + \dots\right] \\ & + bt + c \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada a_0, a_1, a_2, b ve c sabit vektörlerdir.

■

Dolayısıyla, 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında, eğrilik fonksiyonu sabit olan ve torsiyon-eğrilik oranı lineer fonksiyon olan bir uzay eğrisinin denklemi elde edilmiş olur.

Başlangıç Değerleriyle Eğrinin İncelenmesi

Bu kısımda a_0, a_1, a_2, b ve c bilinmeyen sabit vektörleri belirlenerek $\alpha(t)$ eğrisi tam olarak elde edilebilir. Kabul edelim ki $\alpha(0) = c = (0, 0, 0)$ ve $T(0) = b = (0, 1, 0)$ olsun. Yani $c = 0$ ve $b = j$ olsun. Ayrıca dikkat edilecek olunursa $N(0) = a_0$ dir. $\forall t$ elemanı için T ve N vektörleri birbirine dik olduğundan $N(0) = a_0, b = (0, 1, 0)$ vektörüne dik birim vektör olacağından $a_0 = i = (1, 0, 0)$ olsun.

$N'(0) = a_1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Buna ek olarak (3.57) denklemindeki türev formüllerinden,

$$N'(t) = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 T(t) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t}{\kappa} B(t)$$

türevi $t = 0$ için,

$$N'(0) = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 T(0)$$

olacağından,

$$a_1 = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 j$$

şeklinde elde edilir.

$N(t)$ nin ikinci türevinde $t = 0$ değeri kullanılırsa,

$$N''(0) = 2a_2 \tag{3.61}$$

olduğu açıktır. Ayrıca yine (3.57) türev formülünden,

$$N''(t) = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 N(t) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} B(t) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{t^2}{\kappa^2} N(t)$$

olup $t = 0$ için,

$$N''(0) = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 N(0) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} B(0) \quad (3.62)$$

şeklindedir. Burada $B(0) = T(0) \times N(0) = j \times i = k$ eşitliği de (3.62) denkleminde kullanılırsa,

$$N''(0) = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 i - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} k \quad (3.63)$$

elde edilir. (3.61) ve (3.63) denklemleri birlikte düşünülürse,

$$2a_2 = \left(-\varepsilon_1 \varepsilon_3, 0, -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} \right)$$

olur. Böylece katsayı vektörleri,

$$a_0 = (1, 0, 0), a_1 = (0, -\varepsilon_1 \varepsilon_3, 0), a_2 = \left(-\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{2}, 0, -\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2\kappa} \right), b = (0, 1, 0), c = (0, 0, 0) \quad (3.64)$$

şeklinde elde edilir.

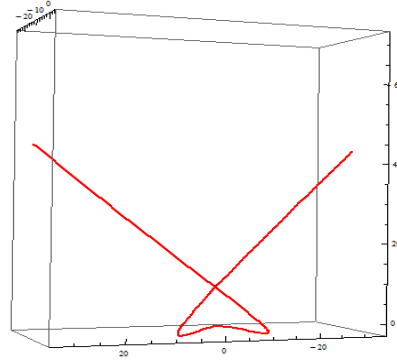
Örnek 3.5 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\alpha(t)$ eğrisi timelike bir eğri olsun. Ayrıca başlangıç şartları $T(0) = b = (0, 0, 1) = k$ ve $c = (0, 0, 0)$ olsun. Böylece $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$ ve $\varepsilon_3 = 1$ olduğu açıktır. $N(0) = a_0$ değeri $T(0)$ a dik olacağından $N(0) = a_0 = (1, 0, 0) = i$ olsun. Önceki kısımda yaptığımız işlemlere benzer işlemler yapılırsa, $N'(0) = a_1 = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 T(0)$ olduğundan $a_1 = (0, 0, 1) = k$ olur. Son olarak $N''(0) = 2a_2 = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 N(0) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{1}{\kappa} B(0)$ ve $B(0) = T(0) \times N(0) = (0, 1, 0) = j$ olduğu kullanılırsa $a_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\kappa}, 0 \right)$ olarak bulunur. Böylece bütün katsayı vektörleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$a_0 = (1, 0, 0), a_1 = (0, 0, 1), a_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\kappa}, 0 \right), b = (0, 0, 1), c = (0, 0, 0)$$

Bu katsayı vektörleriyle $\alpha(t)$ eğrisi,

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^6}{240\kappa^2} - \frac{t^8}{13440\kappa^2} + \left(\frac{1}{34560\kappa^4} - \frac{1}{1209600\kappa^2} \right) t^{10} + \dots \right. \\ & \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} + \left(-\frac{1}{2688\kappa^2} + \frac{1}{40320} \right) t^8 + \left(-\frac{1}{72576\kappa^2} + \frac{1}{3628800} \right) t^{10} + \dots, \\ & -\frac{t^4}{24\kappa} + \frac{t^6}{720\kappa} + \left(\frac{1}{2688\kappa^3} - \frac{1}{40320\kappa} \right) t^8 + \left(\frac{1}{72576\kappa^3} - \frac{1}{3628800\kappa} \right) t^{10} + \dots, \\ & \left. \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{120} + \left(\frac{1}{5040} - \frac{1}{630\kappa^2} \right) t^7 + \left(\frac{1}{362880} - \frac{1}{11340\kappa^2} \right) t^9 + t + \dots \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\alpha(t)$ eğrisi sabit $\kappa > 0$ eğrilikli olduğundan $\kappa = 1$ olarak seçip eğriyi Mathematica yardımıyla Şekil 3.11' deki gibi çizdirelim.



Şekil 3.11 $\alpha(t)$ timelike rektifiyan Salkowski eğrisi

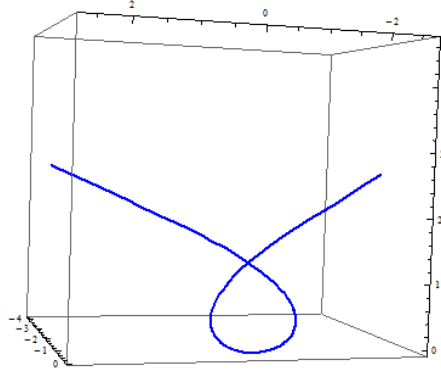
Örnek 3.6 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında $\gamma(t)$ eğrisi spacelike bir eğri olsun. Ayrıca başlangıç şartları $T(0) = b = (1, 0, 0) = i$ ve $c = (0, 0, 0)$ olsun. Böylece $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$ ve $\varepsilon_3 = 1$ olduğu açıktır. $N(0) = a_0$ değeri $T(0)$ a dik olacağından $N(0) = a_0 = (0, 0, 1) = k$ olsun. Benzer işlemler yapılırsa, $N'(0) = a_1 = (-\varepsilon_1\varepsilon_3, 0, 0)$ olur. Son olarak $N''(0) = 2a_2 = -\varepsilon_1\varepsilon_3N(0) - \varepsilon_2\varepsilon_3\frac{1}{\kappa}B(0)$ ve $B(0) = -j$ olduğu kullanılırsa $a_2 = \left(0, \varepsilon_2\varepsilon_3\frac{1}{2\kappa}, -\varepsilon_1\varepsilon_3\frac{1}{2}\right)$ olarak bulunur. Böylece bütün katsayı vektörleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$a_0 = (0, 0, 1), a_1 = (-1, 0, 0), a_2 = \left(0, -\frac{1}{2\kappa}, -\frac{1}{2}\right), b = (1, 0, 0), c = (0, 0, 0).$$

Bu katsayı vektörleriyle $\gamma(t)$ eğrisi,

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{120} - \left(\frac{1}{5040} + \frac{1}{630\kappa^2}\right)t^7 + \left(\frac{1}{362880} + \frac{1}{11340\kappa^2}\right)t^9 + t + \dots, \right. \\ & -\frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} - \left(\frac{1}{2688\kappa^2} + \frac{1}{40320}\right)t^8 + \left(-\frac{1}{72576\kappa^2} + \frac{1}{3628800}\right)t^{10} + \dots, \\ & \frac{t^2}{2} + \frac{t^6}{240\kappa^2} - \frac{t^8}{13440\kappa^2} + \left(\frac{1}{34560\kappa^4} + \frac{1}{1209600\kappa^2}\right)t^{10} + \dots \\ & \left. -\frac{t^4}{24\kappa} + \frac{t^6}{720\kappa} - \left(\frac{1}{2688\kappa^3} + \frac{1}{40320\kappa}\right)t^8 + \left(\frac{1}{72576\kappa^3} - \frac{1}{3628800\kappa}\right)t^{10} + \dots\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\gamma(t)$ eğrisi sabit $\kappa > 0$ eğrilikli olduğundan $\kappa = 1$ olarak seçip eğriyi Mathematica yardımıyla Şekil 3.12' deki gibi çizdirelim.



Şekil 3.12 $\gamma(t)$ spacelike rektifiyan Salkowski eğrisi

4. YÜKSEK BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER VE FOKAL EĞRİLER

Bu bölümde öncelikle, harmonik eğrilik fonksiyonları kullanılarak n -boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğrilerin yeni bir karakterizasyonu verilecektir. Daha sonra ise rektifiyan eğriler ile fokal eğriler arasındaki ilişki ele alınacaktır. Herhangi bir uzay eğrisinin fokal eğrisinin, rektifiyan olması için gerek ve yeter koşul ifade edilmiştir. Son olarak da bu koşulu sağlayan eğri örneği araştırılmıştır.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere Serret-Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2, \dots, B_{n-2}\}$ şeklinde olsun. Serret-Frenet çatısının türev değişimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B'_1 \\ \vdots \\ B'_{n-4} \\ B'_{n-3} \\ B'_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{n-4} \\ B_{n-3} \\ B_{n-2} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

burada k_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), eğrinin i -yinci eğrilik fonksiyonu olup bütün k_i fonksiyonları pozitifdir.

Tanım 4.1 Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için, bütün $s \in I$ noktalarında $N(s)$ vektörünün ortogonal bileşenleri sabit nokta içeriyorsa α eğrisi rektifiyandır denir (Cambie vd. 2016).

Tanım 4.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonları,

$$H_i(s) = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0 \\ \frac{k_1(s)}{k_2(s)} & , \quad i = 1 \\ \frac{1}{k_{i+1}(s)} \{H'_{i-1}(s) + H_{i-2}(s)k_i(s)\} & , \quad i = 2, 3, \dots, n-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır (Özdamar ve Hacısalihoğlu 1975).

Tanım 4.3 Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin oskütatör hiperkürelerinin merkezleri α eğrisinin $C_\alpha(s)$ fokal eğrisini oluşturur. n -boyutlu Öklid uzayında α eğrisinin fokal eğrisi,

$$C_\alpha = \alpha(s) + c_1(s)N(s) + c_2(s)B_1(s) + c_3(s)B_2(s) + \dots + c_{n-1}(s)B_{n-2}(s) \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ fonksiyonları α nın parametresinde sürekli fonksiyonlardır ve c_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), i -yinci fokal eğrilik fonksiyonu şeklinde adlandırılır. Bunlardan birinci fokal eğrilik olan $c_1(s) = \frac{1}{k_1(s)}$ sıfır olamaz ve genel olarak şu şekilde tanımlıdır (Uribe-Vargas 2005).

$$c_i(s) = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0 \\ \frac{1}{k_1(s)} & , \quad i = 1 \\ \frac{1}{k_i(s)} \{c'_{i-1}(s) + c_{i-2}(s)k_{i-1}(s)\} & , \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Teorem 4.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi $\{T, N, B_1, \dots, B_{n-2}\}$ çatısında birim hızlı bir eğri, C_α ise $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \dots, \bar{B}_{n-2}\}$ çatısıyla α eğrisinin fokal eğrisi olsun. k_i , $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ α eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve c_i , $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ de i -yinci fokal eğrilik fonksiyonu olsun. Bu durumda α eğrisinin ve onun fokal eğrisinin Serret-Frenet çatısı arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur (Uribe-Vargas 2005).

$$\bar{T} = B_{n-2}, \quad \bar{N} = B_{n-3}, \quad \bar{B}_1 = B_{n-4}, \dots, \bar{B}_{n-3} = N, \quad \bar{B}_{n-2} = T \quad (4.4)$$

4.1 Harmonik Eğrilik Fonksiyonları ile Rektifiyan Eğriler

Bu kesimde n -boyutlu Öklid uzayında harmonik eğrilik fonksiyonları kullanılarak rektifiyan eğri karakterizasyonuna yeni bir yaklaşım yapılmıştır.

n -boyutlu Öklid uzayında yay parametresiyle parametrelendirilmiş rektifiyan eğri,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu_1(s)B_1(s) + \dots + \mu_{n-2}(s)B_{n-2}(s) \quad (4.5)$$

şeklindedir. Burada $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_{n-2}$ reel fonksiyonlardır. α eğrisinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = & \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)k_1(s)N(s) + \mu_1'(s)B_1(s) \\ & + \mu_1(s)(-k_2(s)N(s) + k_3(s)B_2(s)) + \dots \\ & + \mu_{n-2}'(s)B_{n-2}(s) + \mu_{n-2}(s)(-k_{n-1}(s)B_{n-3}(s)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılmca,

$$\begin{aligned} T(s) = & \lambda'(s)T(s) + (\lambda(s)k_1(s) - \mu_1(s)k_2(s))N(s) \\ & + (\mu_1'(s) - \mu_2(s)k_3(s))B_1(s) \\ & + (\mu_1(s)k_3(s) + \mu_2'(s) - \mu_3(s)k_4(s))B_2(s) \\ & + (\mu_2(s)k_4(s) + \mu_3'(s) - \mu_4(s)k_5(s))B_3(s) + \dots \\ & + (\mu_{n-2}'(s) + \mu_{n-3}(s)k_{n-1}(s))B_{n-2}(s) \end{aligned}$$

olur. Karşılıklı eşitliklerden aşağıdaki denklemler elde edilir (Cambie vd. 2016).

- i) $\lambda'(s) = 1$
- ii) $\lambda(s)k_1(s) - \mu_1(s)k_2(s) = 0$
- iii) $\mu_1'(s) - \mu_2(s)k_3(s) = 0$
- iv) $\mu_{i-1}(s)k_{i+1}(s) + \mu_i'(s) - \mu_{i+1}(s)k_{i+2}(s) = 0, i \in \{2, 3, \dots, n-3\}$
- v) $\mu_{n-2}'(s) + \mu_{n-3}(s)k_{n-1}(s) = 0$

Bundan sonra harmonik eğrilik fonksiyonları kullanılarak, yukarıdaki beş denklem yardımıyla λ ve μ_i fonksiyonları belirlenmeye çalışılacaktır.

Tanım 4.4 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonları,

$$H_i(s) = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0 \\ \lambda(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} & , \quad i = 1 \\ \frac{1}{k_{i+1}(s)} \{H'_{i-1}(s) + H_{i-2}(s)k_i(s)\} & , \quad i = 2, 3, \dots, n-2 \end{cases} \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Bu durumda (4.7) numaralı denklemde tanımlanan harmonik eğrilik fonksiyonlarına göre, λ ve μ_i fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lambda(s) = s + c \\ \text{ii)} \quad & \mu_1(s) = \lambda(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = H_1(s) \\ \text{iii)} \quad & \mu_2(s) = \frac{\mu'_1(s)}{k_3(s)} = \frac{1}{k_3(s)} H'_1(s) = H_2(s) \\ \text{iv)} \quad & \mu_i(s) = \frac{1}{k_{i+1}(s)} \{ \mu'_{i-1}(s) + \mu_{i-2}(s)k_i(s) \} \\ & \mu_i(s) = \frac{1}{k_{i+1}(s)} \{ H'_{i-1}(s) + H_{i-2}(s)k_i(s) \} = H_i(s) \end{aligned}$$

Teorem 4.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. α rektifiyandır ancak ve ancak,

$$H'_{n-2}(s) + H_{n-3}(s)k_{n-1}(s) = 0 \quad (4.8)$$

eşitliği mevcuttur. Burada $H_i, i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ harmonik eğrilik fonksiyonlarıdır.

İspat. Kabul edelim ki α eğrisi rektifiyan olsun. Bu durumda (i-iv) denklemleri sağlanır. Bu eşitlikler (v) denkleminde kullanılırsa (4.8) denklemi sağlanır.

Tersine kabul edelim ki,

$$H'_{n-2}(s) + H_{n-3}(s)k_{n-1}(s) = 0$$

eşitliği mevcut olsun. $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_{n-2}$ reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$\beta(s) = \alpha(s) - \lambda(s)T(s) - \mu_1(s)B_1(s) - \dots - \mu_{n-2}(s)B_{n-2}(s)$$

eğrisini tanımlayalım. (i-v) denklemleri kullanılırsa $\beta'(s) = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Bu ise α eğrisinin rektifiyan olması demektir.

■

Sonuç 4.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı rektifiyan bir eğri olsun. $H_i, i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ diferensiyellenebilir harmonik eğrilik fonksiyonları olmak üzere α eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = (s+c)T(s) + H_1(s)B_1(s) + \dots + H_{n-2}(s)B_{n-2}(s) \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi (Cambie vd. 2016) çalışmasında yer alan Teorem 4.1 ve yukarıda ispatlanmış olduğumuz Teorem 4.2 arasındaki ilişkiyi ele alalım.

Teorem 4.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. α eğrisi rektifiyandır.
2. $H'_{n-2}(s) + H_{n-3}(s)k_{n-1}(s) = 0$.
3. $k_{n-1}(s) \sum_{m=0}^{n-4} \mu_{n-3,m}(s) \frac{\partial^m}{\partial s^m} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right) + \sum_{m=0}^{n-3} (\mu_{n-2,m}(s) \frac{\partial^m}{\partial s^m} \left(\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \right))' = 0$.

(Şenol vd. 2013) çalışmasındaki yazarlar harmonik eğrilik fonksiyonları yardımıyla n -boyutlu Öklid uzayında helisler için yeni bir yaklaşım öne sürmüşlerdir. Şimdiki teoremden ise buna benzer bir düşünceyle rektifiyan eğriler için bir karakterizasyon verilmeye çalışılmıştır.

Teorem 4.4 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğri-likli birim hızlı bir eğri olsun. $H_{n-2}(s) \neq 0$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^{n-2} H_i^2(s)$ toplamı sıfırdan farklı sabittir ancak ve ancak α rektifiyan eğridir.

İspat. $H_1^2(s) + H_2^2(s) + \dots + H_{n-2}^2(s)$ toplamı sıfırdan farklı sabit olsun. (4.7) denkleminde biliniyor ki,

$$k_{i+1}(s)H_i(s) = H'_{i-1}(s) + k_i(s)H_{i-2}(s), \quad 3 \leq i \leq n-2 \quad (4.10)$$

şeklinde bir eşitlik mevcuttur. (4.10) denkleminde i gördüğümüz yere $i+1$ yazarsak,

$$H'_i(s) = k_{i+2}(s)H_{i+1}(s) - k_{i+1}(s)H_{i-1}(s), \quad 2 \leq i \leq n-3 \quad (4.11)$$

elde edilir. $i = 1$ için,

$$H'_1(s) = k_3(s)H_2(s) \quad (4.12)$$

olur. Ayrıca hipotezden $H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_{n-2}^2$ toplamının sabit olduğu biliniyor. İfadenin her iki tarafının türevi alınır,

$$H_1(s)H'_1(s) + H_2(s)H'_2(s) + \dots + H_{n-2}(s)H'_{n-2}(s) = 0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir ve aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$H_{n-2}(s)H'_{n-2}(s) = -H_1(s)H'_1(s) - H_2(s)H'_2(s) - \dots - H_{n-3}(s)H'_{n-3}(s) \quad (4.13)$$

(4.11) ve (4.12) denklemlerinin her iki tarafı sırasıyla $H_i(s)$ ve $H_1(s)$ ile çarpılırsa,

$$H_i(s)H'_i(s) = k_{i+2}(s)H_i(s)H_{i+1}(s) - k_{i+1}(s)H_{i-1}(s)H_i(s) \quad (4.14)$$

ve

$$H_1(s)H'_1(s) = k_3(s)H_1(s)H_2(s) \quad (4.15)$$

elde edilir. Böylece (4.13), (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden kolaylıkla aşağıdaki denklem elde edilir.

$$H_{n-2}(s)H'_{n-2}(s) = -k_{n-1}(s)H_{n-3}(s)H_{n-2}(s).$$

$H_{n-2}(s) \neq 0$ olduğundan eşitliğin her iki tarafı $H_{n-2}(s)$ ifadesine bölünürse,

$$H'_{n-2}(s) + k_{n-1}(s)H_{n-3}(s) = 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.2 den kolaylıkla α eğrisinin rektifiyan olduğu söylenebilir.

Tersine kabul edelim ki α eğrisi rektifiyan olsun. Teorem 4.2 den,

$$H'_{n-2}(s) + H_{n-3}(s)k_{n-1}(s) = 0$$

eşitliği mevcuttur. Ayrıca $H_{n-2} \neq 0$ olduğundan,

$$H_{n-2}(s)H'_{n-2}(s) = -k_{n-1}(s)H_{n-2}(s)H_{n-3}(s)$$

yazılabilir. Bunun yanı sıra (4.14) ve (4.15) denklemlerinden,

$$H_1(s)H'_1(s) = k_3(s)H_1(s)H_2(s)$$

ve

$$\begin{aligned} i &= n-3 \text{ için, } H_{n-3}H'_{n-3} = k_{n-1}H_{n-3}H_{n-2} - k_{n-2}H_{n-4}H_{n-3}, \\ i &= n-4 \text{ için, } H_{n-4}H'_{n-4} = k_{n-2}H_{n-4}H_{n-3} - k_{n-3}H_{n-5}H_{n-4}, \\ i &= n-5 \text{ için, } H_{n-5}H'_{n-5} = k_{n-3}H_{n-5}H_{n-4} - k_{n-4}H_{n-6}H_{n-5}, \\ &\vdots \\ i &= 2 \text{ için, } H_2H'_2 = k_4H_2H_3 - k_3H_1H_2. \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$H_1(s)H'_1(s) + H_2(s)H'_2(s) + \dots H_{n-3}(s)H'_{n-3}(s) + H_{n-2}(s)H'_{n-2}(s) = 0 \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.16) denklemi integre edilir ve gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$H_1^2(s) + H_2^2(s) + \dots + H_{n-2}^2(s)$$

denkleminin sıfırdan farklı sabit olduğu kolayca görülür. Bu da ispatı tamamlar.

■

$n = 3$ için Özel Durum

Bu alt kesimde 3-boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriler karakterize edilecektir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ çatısına göre birim hızlı rektifiyan bir eğri olsun. λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere α eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \quad (4.17)$$

şeklindedir. Yer vektörünün türevi alınırsa,

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)k_1(s)N(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)(-k_2(s)N(s))$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + (\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s))N(s) + \mu'(s)B(s) \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) denklemindeki eşitliklerden,

- i) $\lambda'(s) = 1$
- ii) $\lambda(s)k_1(s) - \mu(s)k_2(s) = 0$
- iii) $\mu'(s) = 0$

ifadeleri mevcuttur. Burada λ ve μ fonksiyonları, harmonik eğrilik fonksiyonlarını kullanarak yeniden aşağıdaki gibi elde edilir.

- i) $\lambda(s) = s + c$
- ii) $\mu(s) = \lambda(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = H_1(s)$

Teorem 4.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. α rektifiyandır ancak ve ancak,

$$H'_1(s) = 0 \quad (4.19)$$

eşitliği mevcuttur. Burada H_1 , 1-inci harmonik eğrilik fonksiyonudur.

İspat. α eğrisi rektifiyan ise bu durumda (i-ii) denklemleri sağlanır. Bu eşitlikler (iii) denkleminde kullanılırsa (4.19) denklemini sağlanır.

Tersine kabul edelim ki $H'_1(s) = 0$ eşitliği mevcut olsun. λ, μ reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$\beta(s) = \alpha(s) - \lambda(s)T(s) - \mu(s)B(s)$$

eğrisini tanımlayalım. (i-iii) denklemleri kullanılırsa, $\beta'(s) = 0$ olduğu kolayca görülür. Bu ise α eğrisinin rektifiyan olması demektir.

■

Sonuç 4.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı rektifiyan bir eğri olsun. α eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = (s + c)T(s) + H_1(s)B(s) \quad (4.20)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada H_1 , 1–inci harmonik eğrilik fonksiyonudur.

Teorem 4.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. α eğrisi rektifiyandır.
2. $H_1'(s) = 0$.
3. $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $\left(\mu_{1,0}(s) \left(\frac{k_1}{k_2}\right)(s)\right)' = 0$.

$n = 4$ için Özel Durum

Bu alt kesimde 4-boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriler karakterize edilecektir. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi $\{T, N, B_1, B_2; k_1, k_2, k_3\}$ çatısına göre birim hızlı rektifiyan bir eğri olsun. λ , μ_1 ve μ_2 diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere α eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu_1(s)B_1(s) + \mu_2(s)B_2(s)$$

şeklindedir. Yer vektörünün türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)k_1(s)N(s) + \mu_1'(s)B_1(s) \\ &\quad + \mu_1(s)(-k_2(s)N(s) + k_3(s)B_2(s)) \\ &\quad + \mu_2'(s)B_2(s) + \mu_2(s)(-k_3(s)B_1(s)) \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} T(s) = & \lambda'(s)T(s) + (\lambda(s)k_1(s) - \mu_1(s)k_2(s))N(s) \\ & + (\mu_1'(s) - \mu_2(s)k_3(s))B_1(s) + (\mu_1(s)k_3(s) + \mu_2'(s))B_2(s) \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) denklemindeki eşitliklerden,

- i) $\lambda'(s) = 1$
- ii) $\lambda(s)k_1(s) - \mu_1(s)k_2(s) = 0$
- iii) $\mu_1'(s) - \mu_2(s)k_3(s)$
- iv) $\mu_1(s)k_3(s) + \mu_2'(s) = 0$

ifadeleri mevcuttur. Burada λ , μ_1 ve μ_2 fonksiyonları, harmonik eğrilik fonksiyonlarını kullanarak yeniden aşağıdaki gibi elde edilir.

- i) $\lambda(s) = s + c$
- ii) $\mu_1(s) = \lambda(s) \frac{k_1(s)}{k_2(s)} = H_1(s)$
- iii) $\mu_2(s) = \frac{\mu_1'(s)}{k_3(s)} = \frac{1}{k_3(s)} H_1'(s) = H_2(s)$

Teorem 4.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi 4-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. α rektifiyandır ancak ve ancak,

$$H_2'(s) + H_1(s)k_3(s) = 0 \quad (4.22)$$

eşitliği mevcuttur.

İspat. α eğrisi rektifiyan ise bu durumda (i-iii) denklemleri sağlanır. Bu eşitlikler (iv) denkleminde kullanılırsa (4.22) denklemi sağlanır.

Tersine kabul edelim ki $H_2'(s) + H_1(s)k_3(s) = 0$ eşitliği mevcut olsun. λ, μ_1 ve μ_2 reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$\beta(s) = \alpha(s) - \lambda(s)T(s) - \mu_1(s)B_1(s) - \mu_2(s)B_2(s)$$

eğrisini tanımlayalım. (i-iv) denklemleri kullanılırsa, $\beta'(s) = 0$ olduğu kolayca görülür. Bu ise α eğrisinin rektifiyan olması demektir.

■

Sonuç 4.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi 4-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı rektifiyan bir eğri olsun. α eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha(s) = (s + c)T(s) + H_1(s)B_1(s) + H_2(s)B_2(s) \quad (4.23)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 4.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi 4-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. α eğrisi rektifiyandır.
2. $H_2'(s) + H_1(s)k_3(s) = 0$.
3. $\mu_{1,0}(s) \left(\frac{k_1 k_3}{k_2} \right) (s) + \left(\mu_{2,0}(s) \left(\frac{k_1}{k_2} \right) (s) + \mu_{2,1}(s) \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' (s) \right)' = 0$.

Sonuç 4.4 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi 4-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. $H_2(s) \neq 0$ olmak üzere $H_1^2(s) + H_2^2(s)$ toplamı sıfırdan farklı sabittir ancak ve ancak α eğrisi rektifiyandır.

4.2 Fokal Eğriler ve Rektifiyan Eğriler

Bu kesimde n -boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriler ve fokal eğriler arasındaki ilişki kurulmaya çalışılacaktır. Herhangi bir eğrinin fokal eğrisinin ne zaman rektifiyan olduğu araştırılacaktır.

Teorem 4.9 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi $\{T, N, B_1, \dots, B_{n-2}\}$ Serret-Frenet çatısıyla birim hızlı bir eğri ve C_α eğrisi $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \dots, \bar{B}_{n-2}\}$ çatısıyla α eğrisinin fokali olsun. Ayrıca $\lambda_i, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, α eğrisinin yer vektörünün i -yinci fonksiyonu ve $c_i, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, (4.3) denkleminde tanımlandığı şekliyle i -yinci fokal eğrilik olsun. C_α eğrisi n -boyutlu Öklid uzayında rektifiyandır ancak ve ancak

$$\lambda_{n-1} = -c_{n-2} \quad (4.24)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ herhangi bir eğri ve C_α , α eğrisinin fokali olsun. Bu durumda C_α ,

$$C_\alpha = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B_1 + \dots + \lambda_n B_{n-2} + c_1 N + c_2 B_1 + c_3 B_2 + \dots + c_{n-1} B_{n-2}$$

şeklinde yazılabilir. C_α fokal eğrisi, (4.4) denklemindeki eşitlikteki gibi kendi Serret-Frenet çatısına göre yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \lambda_1 \bar{B}_{n-2} + \lambda_2 \bar{B}_{n-3} + \dots + \lambda_n \bar{T} + c_1 \bar{B}_{n-3} + c_2 \bar{B}_{n-4} + \dots + c_{n-1} \bar{T}, \\ C_\alpha &= (\lambda_n + c_{n-1}) \bar{T} + (\lambda_{n-1} + c_{n-2}) \bar{N} + \dots + (\lambda_2 + c_1) \bar{B}_{n-3} + \lambda_1 \bar{B}_{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. C_α eğrisi rektifiyan ise,

$$\lambda_{n-1} + c_{n-2} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Tersine kabul edelim ki (4.24) denklemi sağlansın. Bu durumda kolaylıkla görebiliriz ki C_α eğrisi rektifiyandır.

■

$n = 3$ için Özel Durum

Teorem 4.10 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\{T, N, B; \kappa, \tau\}$ Serret-Frenet çatı elemanlarıyla birim hızlı bir eğri ve C_α eğrisi $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, \bar{\kappa}, \bar{\tau}\}$ çatı elemanlarıyla α eğrisinin fokali olsun. Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, α eğrisinin yer vektörünün fonksiyonları ve c_1, c_2 de

fokal eğrilikler olsun. C_α eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında rektifiyandır ancak ve ancak

$$\lambda_2 = -c_1 \quad (4.25)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ herhangi bir eğri ve C_α , α eğrisinin fokali olsun. Bu durumda C_α ,

$$C_\alpha = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B + c_1 N + c_2 B$$

şeklinde yazılabilir. C_α fokal eğrisini kendi Serret-Frenet çatısına $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ göre yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \lambda_1 \bar{B} + \lambda_2 \bar{N} + \lambda_3 \bar{T} + c_1 \bar{N} + c_2 \bar{T} \\ C_\alpha &= (\lambda_3 + c_2) \bar{T} + (\lambda_2 + c_1) \bar{N} + \lambda_1 \bar{B} \end{aligned}$$

elde edilir. C_α eğrisi rektifiyan ise,

$$\lambda_2 + c_1 = 0$$

eşitliği sağlanır.

Tersine kabul edelim ki (4.25) denklemi sağlansın. Bu durumda kolaylıkla görebiliriz ki C_α eğrisi rektifiyandır.

■

Sonuç 4.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısına göre birim hızlı bir eğri ve C_α eğrisi $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ çatı elemanlarıyla α eğrisinin fokali olsun. Eğer α eğrisi rektifiyan ise, C_α fokal eğrisi rektifiyan olamaz.

İspat. α eğrisi $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısına göre birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisi,

$$\alpha = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

şeklinde yazılabilir. α eğrisi rektifiyan ise $\lambda_2 = 0$ dır. Fakat yukarıdaki teoremden biliyoruz ki C_α fokal eğrisinin rektifiyan olması için gerek ve yeter şart,

$$\lambda_2 = -c_1 = -\frac{1}{k_1}$$

olmasıdır. Dolayısıyla C_α eğrisi rektifiyan olamaz.

■

$n = 4$ için Özel Durum

Teorem 4.11 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisi $\{T, N, B_1, B_2; k_1, k_2, k_3\}$ Serret-Frenet çatı elemanlarıyla birim hızlı bir eğri ve C_α eğrisi $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2; \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ çatı elemanlarıyla α eğrisinin fokali olsun. Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, α eğrisinin yer vektörünün fonksiyonları ve c_1, c_2, c_3 de fokal eğrilikler olsun. C_α eğrisi 4-boyutlu Öklid uzayında rektifiyandır ancak ve ancak

$$\lambda_3 = -c_2 \tag{4.26}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ herhangi bir eğri ve C_α , α eğrisinin fokali olsun. Bu durumda C_α ,

$$C_\alpha = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B_1 + \lambda_4 B_2 + c_1 N + c_2 B_1 + c_3 B_2$$

şeklinde yazılabilir. C_α fokal eğrisini kendi Serret-Frenet çatısına $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2\}$ göre yeniden düzenlenirse,

$$C_\alpha = \lambda_1 \bar{B}_2 + \lambda_2 \bar{B}_1 + \lambda_3 \bar{N} + \lambda_4 \bar{T} + c_1 \bar{B}_1 + c_2 \bar{N} + c_3 \bar{T}$$

$$C_\alpha = (\lambda_4 + c_3) \bar{T} + (\lambda_3 + c_2) \bar{N} + (\lambda_2 + c_1) \bar{B}_1 + \lambda_1 \bar{B}_2$$

elde edilir. C_α eğrisi rektifiyan ise,

$$\lambda_3 + c_2 = 0$$

eşitliği sağlanır.

Tersine kabul edelim ki (4.26) denklemi sağlansın. Bu durumda kolaylıkla görebiliriz ki C_α eğrisi rektifiyandır.

■

Son olarak 3–boyutlu Öklid uzayında fokali rektifiyan olan uzay eğrisi bulunmaya çalışılacaktır. Bunun için $k_1 = 1$ sabit olan Salkowski eğrilerini göz önüne alarak, bu eğrinin ikinci eğriliği elde edilmeye çalışılacaktır.

Örnek 4.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\{T, N, B\}$ Serret-Frenet çatısına göre birim hızlı bir eğri olsun. Teorem 4.10 den biliyoruz ki 3–boyutlu Öklid uzayında C_α eğrisinin rektifiyan olması için gerek ve yeter şart, $\lambda_2 = -c_1 = -\frac{1}{k_1}$ olmasıdır. α eğrisinin yer vektörü,

$$\alpha = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B \quad (4.27)$$

olmak üzere (4.27) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır ve

$$\lambda_2 = -c_1 = -\frac{1}{k_1}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$T = (\lambda_1' + 1)T + (\lambda_1 k_1 - \lambda_3 k_2 - (\frac{1}{k_1})')N + (\lambda_3' - \frac{k_2}{k_1})B$$

elde edilir. Buradan kolaylıkla,

- a) $\lambda_1 = a = \text{sabit}$,
- b) $\lambda_1 k_1 - \lambda_3 k_2 - (\frac{1}{k_1})' = 0$,
- c) $\lambda_3' - \frac{k_2}{k_1} = 0$,

olduğu görülebilir. $\lambda_1 = 1$ ve $k_1 = 1$ sabitleri yukarıdaki denklemlerde kullanılırsa,

- a) $\lambda_1 = 1$,
- b) $\lambda_3 = \frac{1}{k_2}$,
- c) $\lambda_3' = k_2$,

olur ki böylece α eğrisinin ikinci eğriliği (b) ve (c) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{k_2}\right)' &= k_2, \\ k_2' + k_2^3 &= 0,\end{aligned}$$

diferensiyel denklemlerinin çözülmesiyle,

$$k_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2s + c_1}} \quad (4.28)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece $k_1 = 1$ =sabit ve $k_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2s + c_1}}$ olan Salkowski eğrilerinin fokal eğrisi 3–boyutlu Öklid uzayında rektifiyandır.

Sonuç 4.6 Örnekteki veriler kullanılmak üzere,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \pm\sqrt{2s + c_1}, c_1 = 1, c_2 = 0 \quad (4.29)$$

3–boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir α eğrisinin C_α fokal eğrisi aşağıdaki formdadır.

$$C_\alpha = T \pm \sqrt{2s + c_1}B \quad (4.30)$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Diferensiyel geometride regüler bir eğrinin karakterizasyonu oldukça önemli bir problemdir. Eğrileri karakterize etmede eğrilikler oldukça önemli rol oynar. Eğer $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ eğriliklerinin her ikisi de sıfırdan farklı sabit ise eğri dairesel helis olarak, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ oranı sabit ise eğri genel helis olarak adlandırılır. Eğer $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)$ sıfırdan farklı sabit ise eğri konikal geodezik olarak adlandırılır. Bunun gibi daha pek çok karakterizasyon mevcuttur. Bunlardan bir tanesi de bu tez çalışmasında incelemiş olduğumuz rektifiyan eğriler içindir. $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ eğrilikleri oranı kendi yay parametresine göre lineer olan eğriler rektifiyan eğri olarak isimlendirilmiştir. Rektifiyan eğriler için başka bir karakterizasyon ise centrode adı verilen modifiye Darboux eğrileri ile verilmiştir. Sıfırdan farklı sabit κ eğrilikli ve sabit olmayan τ torsiyonlu (veya sabit olmayan κ eğrilikli ve sıfırdan farklı sabit τ torsiyonlu) birim hızlı bir eğrinin modifiye Darboux eğrisi rektifiyandır.

Bu tez çalışmasında rektifiyan eğriler için, herhangi ortonormal çatı kullanılarak 3–boyutlu Öklid ve Lorentz-Minkowski uzaylarında ve herhangi boyutlu Öklid uzayında yeni karakterizasyonlar elde edilmeye çalışılmıştır. Öncelikli olarak, herhangi dik $\{N_1, N_2, N_3\}$ çatısı yardımıyla yeni bir karakterizasyon verilmiştir. Sabit olmayan geodezik eğriliğe sahip eğrilerin modifiye Darboux eğrilerinin rektifiyan olduğu gösterilmiştir. Rektifiyan eğrileri eğriliklere göre sınıflandırmaya ek olarak, harmonik eğrilik adı verilen fonksiyonlar kullanılarak çok daha basit ve kullanışlı bir şekilde n –boyutlu Öklid uzayında yeni karakterizasyonlar ispatlanmıştır.

Rektifiyan eğriyi karakterize etmenin yanı sıra eğrinin açık bir denklemini elde etmenin yöntemi de ifade edilmiştir. 3–boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında üçüncü dereceden diferensiyel denklem için seri çözümleri yapılarak eğrinin açık bir denklemi elde edilmiş ve başlangıç şartlarıyla birlikte eğri analiz edilerek eğrinin denklemi ve şekli kolayca görülmüştür.

Bütün bunlara ek olarak yalnızca rektifiyan düzlemde yatan rektifiyan eğriler için değil farklı düzlemlerde yatan başka eğriler için de çok farklı karakterizasyonlar elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- Bishop, L. R. 1975. *There is more than one way to frame a curve*. Amer. Math. Monthly, Volume 82, Issue 3, 246-251.
- Cambie, S., Goemans, W. and Van Den Bussche, I. 2016. *Rectifying curves in the n -dimensional Euclidean space*. Turk J Math 40: 210-223.
- Camcı, Ç., İlarslan, K., Kula, L. and Hacısalihoğlu, H. H. 2007. *Harmonic curvatures and generalized helices in E^n* . Chaos, Solitons and Fractals 40, 1-7.
- Chen, B. Y. 2003. *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?*. Amer. Math. Monthly 110, no. 2, 147-152.
- Chen, B. Y. and Dillen, F. 2005. *Rectifying curves as centrodes and extremal curves*. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 33, no. 2, 77-90.
- Craig, T. 1883. *Note on Parallel Surfaces*. Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik, 94, 162-170.
- Do Carmo, M. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Upper Saddle Riv. N.J.
- Gök, İ., Camcı, Ç., and Hacısalihoğlu, H. H. 2009. *V_n -slant helices in Euclidean n -space E^n* . Math. Commun., 14, 2, 317-329.
- Hacısalihoğlu, H. H. 1980. *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Elazığ.
- Hacısalihoğlu, H. H. 2000. *Diferensiyel Geometri*. Ertem Matbaası, Ankara.
- İlarslan, K., Nesovic, E., Miroslava, P. T. 2003. *Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space*. Novi. Sad. J. Math., 33, 2, 23-32.
- İlarslan, K. and Nesovic, E. 2007. *On rectifying curves as centrodes and extremal curves in the Minkowski 3-space*. Novi. Sad. J. Math., 37, 1, 53-64.
- İzumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. *New special curves and Developable surfaces*. Turk. J. Math., 28, 153-163.
- Kula, L. and Yaylı, Y. 2005. *On slant helix and its spherical indicatrix*. Applied Mathematics and Computation, 169, 600-607.
- Kühnel, W. 2005. *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds*. American Mathematical Society, USA.
- Lancret, M.A. 1806. *Mémoire sur les courbes à double courbure*. Mémoires présentés à l'Institut. 1, 416-454.
- Lopez, R. 2008. *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*. 67, Brazil.

- Lucas, P. and Ortega Yagües, J. A. 2015. *Rectifying curves in the three-dimensional sphere*. J. Math. Anal. Appl. 421, 1855–1868.
- Oh, Y. M. and Seo, Y. L. 2015. *A curve satisfying $\tau/\kappa = s$ with constant $\kappa > 0$* . American Journal of Undergraduate Research, 2-12.
- O'Neill, B. 1983. *Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, Inc, New York, London.
- Özbey, E. and Oral, M. 2009. *A study on rectifying curves in the dual lorentzian space*. Bull. Korean Math. Soc. 46, No. 5, pp. 967-978.
- Özdamar, E. and Hacisalihoğlu, H. H. 1975. *A characterization of inclined curves in Euclidean n -space*. Communication de la faculté des sciences de L'Université d'Ankara 24, 15–22.
- Sabuncuoğlu, A. 2001. *Diferensiyel Geometri*. Nobel Yayınevi, Ankara.
- Scofield, P. D. 1995. *Curves of constant precession*. The American Mathematical Monthly, Vol.102, No. 6 Jun.-Jul., pp. 531-537.
- Şahin, T. and Yılmaz, M. 2015. *The rectifying developable and rectifying gaussian surface of curve in pseudo-galilean geometry*. Analele Ştiinţifice ale Universităţii "A.I.Cuza" din Iaşi, Matematica, LXI(1), 217-234.
- Şenol, A., Zıplar, E., Yaylı, Y. and Gök, İ. 2013. *A new approach on Helices in Euclidean n -space*. Mathematical Communications, 18, 241-256.
- Uribe-Vargas, R. 2005. *On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves*. Bull. Brazilian Math. Soc. 36, 285-307.
- Uzunoglu, B., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2016. *A new approach on curves of constant precession*. Appl. Math. Comput. 275, 317-323.
- Yaylı, Y., Gök, İ. and Hacisalihoğlu, H. H. 2014. *Extended rectifying curves as new kind of modified darboux vectors*. Submitted.
- Yılmaz, B., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2016. *Extended rectifying curves in minkowski 3-space*. 26, 2, 861-872.
- Wang, F., Liu, H. 2007. *Mannheim partner curves in 3-Euclidean space*. Mathematics in Practice and Theory, 37 (1), 141-143.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Beyhan YILMAZ

Doğum Yeri : Kayseri

Doğum Tarihi : 29/04/1987

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Talas (Y.D.A) Lisesi (2005)

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü (2010)

Yüksek Lisans : Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Ankara Üniversitesi

Yayınları:

• **Uzunoğlu, B., Gök, İ., Yaylı, Y.** Extended Rectifying Curves in Minkowski 3-Space. Advances in Applied Clifford Algebras, 26, 2, 861-872 (2016), (Yayın No: 2004460) (**SCI-Exp.**)

• **Uzunoğlu, B., Gök, İ., Yaylı, Y.** A new approach on curves of constant precession. Applied Mathematics and Computation, 275, 317-323 (2016), (Yayın No: 2003560) (**SCI-Exp.**)

• **Uzunoğlu, B., Yaylı, Y., Gök, İ.** Locus of the Centers of Meusnier Spheres in Euclidean 3-Space. Universal Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 7(1), 51-66 (2015), (Yayın No: 2004054)

• **Uzunoğlu, B., Ramis Ç., Yaylı, Y.** On Curves of Nk-Slant Helix and Nk-Constant Precession in Minkowski 3-Space. Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 12(2), 175-189 (2014), (Yayın No: 2004331)