

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYRIK SİSTEMLERDE ÇATALLANMA VE KAOS

Sezgi ESEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2026

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AYRIK SİSTEMLERDE ÇATALLANMA VE KAOS

Sezgi ESEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Gizem SEYHAN ÖZTEPE

Bu tezde ayrık sistemlerde çatallanma ve kaos incelenmiştir. İlk olarak ayrık sistemlerde kullanılan skaler fark denklemleri hakkında temel bilgiler verilerek bu bilgilerle beraber fark denklemlerinden elde edilen sabit noktalar ve periyodik sabit noktalar gösterilmiştir. Bu sabit noktaların ve periyodik sabit noktaların kararlılıkları hakkında tanımlar verilmiştir. Daha sonra skaler fark denklemleri ile fark denklem sistemleri arasında bağlantıyı kurmak için temel lineer cebir bilgileri kullanılmıştır. Fark denklem sistemlerindeki bazı sabit noktalar için Lyapunov üsteli tanımı verilmiş ve ardından lineer olmayan sistemler ele alınarak bu sistemler için lineerleştirme yöntemi anlatılmıştır.

Tezin ana kısmında öncelikle skaler fark denklemler ele alınarak çatallanma türleri verilmiş ve bunlar açıklanmıştır. Ardından fark denklem sistemlerine geçmeden önce merkez manifold teoremi açıklanmış ve çatallanma türleri fark denklem sistemleri için gösterilmiştir. Ek olarak bu kesimde yeni bir çatallanma türünden bahsedilmiş ve bu bir örnekle daha net açıklanmıştır. Ardından kaos temasına geçilmiştir. Devaney'in kaos tanımı kullanılmış ve kaos için gerekli koşullardan bahsedildikten sonra sistemin yorumlanabilmesi için kaosun kontrolü kavramı açıklanmıştır. Kaos kontrolü için Ott, Grebogi ve Yorke (OGY) yöntemi tanımlanmış ve bu yöntem için geri besleme kontrol tekniğinden ve kutup yerleştirmeden bahsedilmiştir. Tüm bu tanım ve teoremler neticesinde ayrık sistemlerde oluşan çatallanmalar ve kaos hakkında bir genelleme elde edilmiştir.

Ocak 2026, 69 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, Sabit noktalar, Kararlılık, Faz diyagramları, Lyapunov üsteli, Lineerleştirme yöntemi, Çatallanma, Kaos, Kaos kontrolü, OGY yöntemi, Geri besleme kontrol tekniği

ABSTRACT

Master Thesis

BIFURCATION AND CHAOS IN DISCRETE-TIME SYSTEMS

Sezgi ESEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Gizem SEYHAN ÖZTEPE

In this thesis, a generalization of bifurcation and chaos in discrete-time systems is examined. First, fundamental concepts for scalar difference equations are presented, then the fixed points and periodic fixed points are represented and definitions of the stability of these are given. After that, in order to establish the connection between scalar difference equations and systems of difference equations, concept of fundamental linear algebra are introduced. Using these concepts, the determination of fixed points and their stability are formulated. For some fixed points the definition of Lyapunov exponent is provided. Afterwards, non-linear systems are introduced and the procedure for linearization is explained. Then stability via linearization is given.

In the main part of the thesis, types of bifurcation are explained for scalar difference equations. Afterward, the center manifold theorem explained before proceeding to systems of difference equations and the types of bifurcations is given for systems. This section, introduces a new type of bifurcation, which is clarified through an illustrative example. Then, the thesis proceeds to the theme of chaos. Devaney's definition of chaos for future analysis is developed. After discussing the conditions for chaos, the chaos control is introduced in order to interpret the system's behavior. Then the OGY method is defined. The feedback control technique and the pole-placement technique is explained for this method. Based on all these definitions and theorems, a general perspective on the bifurcations and chaotic behavior for discrete-time systems is obtained.

January 2026, 69 pages

Key Words: Difference equations, Fixed points, Stability, Phases Diagrams, Lyapunov exponent, Stability via linearization, Bifurcations, Chaos, Chaos control, OGY method, Feedback control

TEŞEKKÜR

Lisans dönemimden beri bana her türlü desteğini veren, benden sabrımı esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Gizem SEYHAN ÖZTEPE'ye beni yetiştirdiği için teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Yüksek Lisans eğitiminde bana her türlü desteği veren Dr. Öğr. Üyesi Gültaç EROĞLU İNAN başta olmak üzere tüm hocalarıma teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca Hilal Nur CAN başta olmak üzere Fulya İrem ŞAHİN UYAN'a, İsmail Can ÜNSAL'a, Büşra KAPLAN'a, Kemal GÜLOĞLU'na, Handenur ÖZDEMİR'e ve diğer bütün arkadaşlarıma, meslektaşlarıma teşekkür ederim.

Son olarak, tüm hayatım boyunca her adımda yanımda duran ve benden hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen anneme, babama, ablama ve abime teşekkür ederim.

Sezgi ESEN
Ankara, Ocak 2026

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. SKALER FARK DENKLEMLERİ	4
2.1 Kararlılık Analizi	6
2.2 Periyodiklik Analizi	12
3. FARK DENKLEM SİSTEMLERİ	16
3.1 Lineer Sistemler	16
3.2 Faz Diyagramı	20
3.3 Kararlılık Analizi	28
3.3.1 Lyapunov yöntemi	33
3.3.2 Lineerleştirme yöntemi	38
4. ÇATALLANMA TEORİSİ	41
4.1 Çatallanma Türleri	42
5. KAOS	51
5.1 Kaos Kontrolü	58
6. SONUÇ	66
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGELER DİZİNİ

$\varphi(x)$	φ fonksiyonu
$\psi(x)$	ψ fonksiyonu
$\Phi(x)$	Φ fonksiyonu
$\Psi(x)$	Ψ fonksiyonu
$\vartheta(x)$	ϑ fonksiyonu
$O(x)$	x noktasının yörüngesi
φ^t	φ üzerinde t . iterasyon
$\sum$	Toplam
x^*	Sabit nokta
$\bar{x}$	Periyodik sabit nokta
$S\varphi(x)$	Schwarzian türevi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel uzay
Q^{-1}	Q Matrisinin tersi
$D(A)$	A Matrisinin determinanı
$T(A)$	A Matrisinin izi
$\ A\ $	A Matrisinin normu
$\rho(A)$	A Matrisinin spektral yarıçapı
A^t	A matrisi üzerinde t . iterasyon
ΔV	V fonksiyonunun değişimi
$B(x, \gamma)$	γ yarıçaplı açık yuvar
$\Omega(x_0)$	x_0 noktasının pozitif limit kümesi
β_{11}	B matrisinin minörü
$\lambda_{\min}$	En küçük özdeğer
$\lambda_{\max}$	En büyük özdeğer
$D\varphi(Q)$	Q anındaki Jakobiyen matrisi
$\phi(A)$	A matrisinin karakteristik denklemi
$\lambda(x_0)$	Lyapunov üsteli
C	Kontrol matrisi
$\text{rank}(C)$	C matrisinin boyutu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$\varphi(x) = x^3$ fonksiyonunun sabit noktalarının bulunması	6
Şekil 2.2	x^* sabit noktasının kararlılık durumları	8
Şekil 2.3	Asimptotik kararlı bir x^* sabit noktasının örümcek ağı diyagramı	9
Şekil 2.4	$C(x)$ in $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = \frac{2}{3}$ sabit noktaları için örümcek ağı diyagramı	10
Şekil 2.5	$\varphi'(x)$ ve $\varphi''(x)$ durumlarının kararlılık grafikleri	11
Şekil 2.6	$\varphi(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun sabit noktalarının ve döngülerinin grafikleri	14
Şekil 3.1	Kararlı düğüm noktası, $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$	21
Şekil 3.2	Kararsız düğüm noktası, $1 < \lambda_2 < \lambda_1$	21
Şekil 3.3	Kararsız semer noktası, $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$	22
Şekil 3.4	Asimptotik kararlı düğüm noktası, $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$	22
Şekil 3.5	Kararlı dejenere düğüm noktası, $ \lambda_1 = 1$ ve $ \lambda_2 < 1$	23
Şekil 3.6	Asimptotik kararlı düğüm noktası, $-1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$	24
Şekil 3.7	Kararsız dejenere nokta, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	24
Şekil 3.8	Kararsız düğüm noktası, $\lambda_1 = \lambda_2 > 1$	25
Şekil 3.9	Asimptotik kararlı odak noktası, $ \lambda_1 < 1$	26
Şekil 3.10	Kararsız odak noktası, $ \lambda_1 > 1$	26
Şekil 3.11	Merkez noktası, $ \lambda_1 = 1$	27
Şekil 3.12	Semer: $\lambda_1 > 1, 0 < \lambda_2 < 1$	27
Şekil 3.13	Seviye eğrileri	34
Şekil 4.1	Semer-Düğüm çatallanma	43
Şekil 4.2	Dirgen çatallanma	43
Şekil 4.3	Transkritik çatallanma	44
Şekil 4.4	Flip çatallanma	45
Şekil 5.1	μ değerleri için Lyapunov üsteli	55
Şekil 5.2	Topolojik geçişlilik diyagramı	56
Şekil 5.3	Neimark-Sacker çatallanması	64
Şekil 5.4	L_1, L_2 ve L_3 doğrularıyla oluşturulan üçgensel kararlılık bölgesi	65

1. GİRİŞ

Kaos teorisi, uzun vadede öngürülemez davranışları bir bütün olarak açıklamaya çalışan bir yöntemdir. Başta fizik olmak üzere birçok bilim dalında karşılaşılan bu yöntem, gezegenlerin hareketinden meteorolojiye, borsadan ekonomiye, iklim tahminlerinden ekosistemdeki bireylerin davranışını açıklamaya kadar oldukça geniş alanda uygulanır. Evrenin nasıl işlediğini anlayabilmek için kaos teorisini anlayabilmek büyük öneme sahiptir. Özellikle son yıllarda genetik, psikoloji, mühendislik, fizik, kimya ve sosyal bilimler gibi birçok farklı alanda kaos davranışını modelleyen matematiksel modeller kurulmuştur. Bu modellemeler sonucu oldukça karmaşık olabilir. Bu tür kaotik davranışlar ilk incelendiğinde oldukça düzensiz ve rastgele görülebilir fakat dikkatlice incelendiğinde aslında bu düzensizlik içinde büyük bir düzen olduğu görülür.

Kaotik sistemlerin davranışı öngörülemezdir. Sistemlerin davranışı parametreler değiştikçe değişebilir, sabit noktalar yaratılabilir veya yok edilebilir. Sistem üzerinde meydana gelen bu değişiklikler çatallanma olarak adlandırılır. Çatallanma olgusu ve kaos oldukça yakından ilişkili kavramlardır. Çatallanma, parametre değiştikçe ortaya çıkan geçişleri ve kararsızlıkların modellenmesini sağlar, bu yüzden sistemlerin oluşturduğu çatallanmalar büyük önem taşır (Strogatz 2014). Sistemler üzerinde yapılan en ufak etki, sistemin sonucunda oldukça büyük değişimler yaratacağından, sistemler sabit veya kendini tekrar eden davranışlar göstermezler (Gökmen 2009).

Fizikte akışkan hareketleri, kimyada tepkime dinamikleri, biyolojide popülasyon dinamikleri olmak üzere birçok olgu çatallanma analiziyle incelenir (Farris ve Hamdi 2023). Bu kavram, literatüre Henri Poincaré tarafından diferensiyel denklemlerdeki sabit noktaların ayrışmasını anlatmak için tanıtılmıştır (Homburg ve Knobloch 2025). Terminolojiye ait ilk bakış açısı parametrelerle birlikte denge çözümlerinin yapısındaki değişimlerdi. Modern kullanımda ise dinamik bir sistemin çatallanması demek parametrelerin değiştirilmesiyle ortaya çıkan değişim olarak adlandırılır.

Bununla birlikte çatallanma kavramına ait kararlılık durumu Aleksandr Andronov ve Lev Pontryagin ile başlar (Homburg ve Knobloch 2025). 1920’lerde Gaston Julia, dinamikler üzerinde çalışırken, parametreler üzerindeki değişikliğinin oluşturduğu farklı çözümleri grafikler üzerinde göstererek çatallanma diyagramı kavramını ortaya koymuştur (Farris ve Hamdi 2023). Biyolog olan Robert May (1976), kaosu biyolojideki yerini incelemiş, bir sistemdeki bir popülasyonun davranışlarında belirli koşullar altında kaosu ortaya çıktığını gözlemlemiştir ve bu gözlemleri dinamik sistemler ile açıklanmıştır. Bu tür dinamik sistemler diferensiyel denklemler ve fark denklemleri şeklinde iki farklı denklem türü ile kurulur. Bu iki sistem lineer olma durumları gibi birçok ortak paydada buluşurlar fakat en büyük farkları bir taraf sürekli sistemleri incelerden diğer taraf sadece ayrık sistemleri inceler.

Diferensiyel denklemler, bir veya birden daha fazla değişken ile oluşturulan fonksiyonun bu değişkenlere göre türevlerini gösteren denklemlerdir, öte yandan fark denklemleri ise bir veya birden fazla değişken ile oluşturulan fonksiyonun bu değişkenlerle arasındaki sonlu farkları gösterir. 20. yüzyılın başlarında doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceği gösterilmiştir (Tollu 2009). Bu şekilde diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılarak günümüzde birçok alanda matematiksel modelleme yapılırken fark denklemleri kullanılmaya başlanmıştır (Tollu 2009). Son yıllarda kaos konusu işlenirken fark denklemlerinin büyük ilgi görmesindeki bir diğer sebep matematiksel olarak basitlik sergilemesi ve hesaplanırken kullanışlı olmasıdır (Halanay ve Rasvan 2018). Ayrık zamanlı sistemler, ufak hesaplamalar ve grafiksel yöntemlerle açıklanabilir. Bu sistemler içerisinde var olan tekrarlı ilişkiler, fark denklemlerin yapısından dolayı açıklanması daha kolaydır (Halanay ve Rasvan 2018).

Bir fark denkleminde, bir sonraki durumu hesaplamak için sadece

$$x(t + 1) = \varphi(x(t))$$

tarzında bir fonksiyonu analiz etmek yeterliyken diferensiyel denklemlerde, sürekli zamanda çözüm elde etmek için birçok nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulur (May

1976). Sistemleri analiz ederken oluşan çatallanmalar fark denklemleri sayesinde herbir parametre için sistemin uzun vadeli davranışı analiz edilebilir (May ve Oster 1976).



2. SKALER FARK DENKLEMLERİ

Fark denklemleri genellikle belli aralıklarla gerçekleşen olayların değerlendirilmesinde kullanılır. Yani bir sonraki anda oluşacak durum, bir önceki andaki durumun belli bir kurala göre ifadesidir. Bu olay,

$$x(t+1) = \varphi(x(t)) \quad (2.1)$$

şeklinde bir bağıntı ile ifade edilir. Fark denklemleri hakkında yorum yapabilmek için başlıca gereksinimlerden biri de başlangıç koşuludur. Bu başlangıç koşulu veya başlangıç noktası kendisinden sonraki gelen terimleri belirlemek için belirlenen değerdir ve bu değerler x_0 başlangıç noktası olmak üzere,

$$x_0, \varphi(x_0), \varphi(\varphi(x_0)), \varphi(\varphi(\varphi(x_0))), \dots$$

kümesi şeklinde yazılır (Bubolo 2018). Burada $\varphi(x_0) = x_1$, x_0 başlangıç noktasının φ altındaki ilk iterasyonu olarak tanımlanır, $\varphi^2(x_0) = \varphi(\varphi(x_0)) = x_2$, x_0 başlangıç noktasının φ altındaki ikinci iterasyonu olarak tanımlanır. Bu şekilde devam edilirse bir diziyi tanımlayan $x_1, x_2, x_3, \dots$ şeklinde (2.1) denkleminin çözümleri olur ve x_0 başlangıç noktasının φ altındaki n . iterasyonu $x_n = \varphi^n(x_0)$ şeklindedir (Bubolo 2018).

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının $O(x_0)$ yörüngesi

$$O(x_0) = \{x_0, \varphi(x_0), \varphi^2(x_0), \dots\}$$

noktalar kümesi olarak adlandırılır, burada $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$, ... şeklindedir. $x(t) := \varphi^n(x_0)$ olarak alınırsa ve $x(0) = x_0$ olmak üzere birinci basamaktan,

$$x(t+1) = ax(t) \quad (2.2)$$

fark denklemi elde edilir. Bu basit denklem çeşitli modelleme problemlerinde kullanılır. Örneğin bir popülasyon problemi için $x(t)$, t . jenerasyondaki popülasyon büyüklüğü olmak üzere (2.2) denklemi nesilleri birbirleriyle örtüşmeyen, mevsimsel

üremeye sahip basit bir model olarak meyve sinekleri veya ılıman iklimlerde yaşayan herhangi bir böcek türünü ifade eder.

Örnek 2.1 (Lojistik Dönüşüm)

$x(t)$, t anında belli bir türe ait popülasyon büyüklüğü ve μ , bir nesilden bir sonrakine geçen büyüme oranı olsun. Bu durumda popülasyon büyüklüğünü gösteren matematiksel model

$$x(t+1) = \mu x(t), \quad \mu > 0 \quad (2.3)$$

dir. Başlangıç popülasyonu $x(0) = x_0$ olmak üzere basit bir iterasyon ile (2.3) denkleminin çözümü

$$x(t) = \mu^t x_0 \quad (2.4)$$

olur.

Burada, $\mu > 1$ ise, $x(t)$ artarak sonsuza gider. $\mu = 1$ ise, $x(t) = x_0$ olur yani popülasyon sonsuza kadar sabit kalır. $\mu < 1$ ise, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ olup tür zamanla tükenir.

(2.3) denkleminde ele alınan model bu durumda hiç gerçekçi değildir çünkü bu modelde türün karşısında hiçbir zorluk çıkmamaktadır. Daha gerçekçi bir model için sınırlı kaynaklar olmalıdır. Bireyler sınırlı kaynaklar için birbirleri ile savaşmaya ve yarışmaya zorlanırlar. Bu rekabet $x^2(t)$ ile orantılı olarak alınırsa daha makul bir model olan

$$x(t+1) = \mu x(t) - bx^2(t) \quad (2.5)$$

denklemini elde edilir, burada $b > 0$ türün üyeleri arasındaki etkileşimi gösteren orantı sabitidir. Bu denklemden $y(t) = \frac{b}{\mu} x(t)$ eşitliği yardımıyla

$$y(t+1) = \mu y(t)(1 - y(t)) \quad (2.6)$$

lojistik denklemini elde edilir, burada $\varphi(y) = \mu y(1 - y)$ fonksiyonuna lojistik dönüşüm denir (Hale ve Koçak 1996). Bu dönüşüm μ değerinin değişimine göre karmaşık davranışlar sergiler.

Dinamik sistemler teorisinin başlıca hedeflerinden biri de verilen dönüşümdeki yörüngelerin davranış biçimini incelemektir (Kuznetsov 2004). Fark denklemlerinde bu yörüngeler, denklemin çözümlerine karşılık gelir. (2.2) denkleminin çözümü

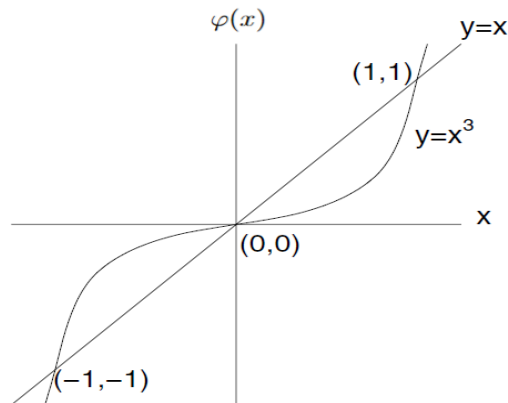
$x(t+1) = \varphi(x(t))$ ve $x(0) = x_0$ olmak üzere $n = 1, 2, \dots$ için bir $\{x(t)\}$ dizisi olarak bulunur.

2.1 Kararlılık Analizi

(2.2) denklemi birinci basamaktan lineer bir fark denklemi ise bu denklemin çözümlerini bulmak oldukça kolaydır fakat bu denklemdeki φ lineer olmadığı zaman işler tamamen değişir. Denklemin genel çözümü bulunamadığında, denklemin yörüngelelerinin davranışlarını belirlemek için kalitatif veya grafiksel yöntemlerin geliştirilmesi önemlidir. Özellikle bu yöntemlerde belli bir noktaya karşılık gelen yörüngeler ele alınır. Bu tür noktalara sabit veya denge noktaları adı verilir.

Tanım 2.1 (Bereketoğlu ve Kutay 2012) $\varphi(x^*) = x^*$ eşitliğini sağlayan x^* noktasına (2.2) denkleminin sabit noktası veya denge noktası adı verilir.

x^* sabit noktası için, yörünge tek elemanlı bir küme olup sadece x^* noktasını içerir. (2.2) fonksiyonunun tüm denge noktalarını bulmak için $\varphi(x) = x$ fonksiyonunu çözmek gerekir. Grafiksel olarak, φ fonksiyonunun sabit noktası, $y = \varphi(x)$ eğrisinin $y = x$ doğrusu ile kesiştiği noktadır. Örneğin, kübik bir fonksiyon olan $\varphi(x) = x^3$ ün sabit noktaları, $x^3 = x$ veya $x^3 - x = 0$ denkleminin çözülmesiyle bulunur. Dolayısıyla, bu fonksiyon için, $-1, 0$ ve 1 olmak üzere üç tane sabit nokta bulunur.



Şekil 2.1 $\varphi(x) = x^3$ fonksiyonunun sabit noktalarının bulunması

Sabit noktalar ile yakından ilişkili olan bir diğer kavram nihai (eventually) sabit noktalardır. Bunlar sonlu sayıda iterasyondan sonra sabit bir noktaya ulaşan noktalardır.

Tanım 2.2 (Elaydi 2005) $\varphi^r(x) = x^*$ eşitliğine sahip fakat $\varphi^{r-1}(x) \neq x^*$ eşitsizliğini sağlayan sabit bir x^* noktası ve pozitif bir r tamsayısı varsa, x noktasına φ dönüşümünün nihai sabit noktası denir.

Örnek 2.2 (Çadır Dönüşümü)

C çadır dönüşümü

$$C(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm farklı davranışlar sergilediğinden fark denklemleri teorisinde ilgi gören bir dönüşümdür. Bu dönüşümün $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = \frac{2}{3}$ şeklinde iki sabit noktası vardır. $C\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $C^2\left(\frac{1}{4}\right) = C\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $C^3\left(\frac{1}{4}\right) = C(1) = 0$ olduğundan $\frac{1}{4}$ noktası C dönüşümü için nihai bir denge noktasıdır.

Uyarı 2.1 Her dönüşüm sabit bir noktaya sahip olmak zorunda değildir. Örneğin $\varphi(x) = x + 1$ dönüşümünün sabit noktası yoktur çünkü $x + 1 = x$ denkleminin bir çözümü yoktur.

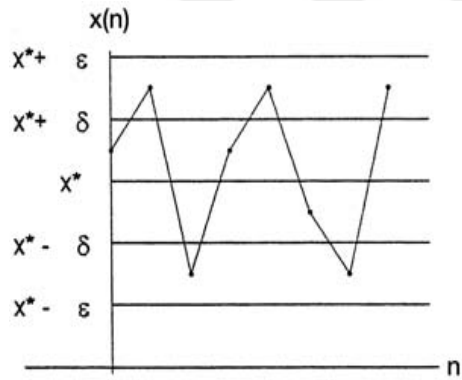
Teorem 2.1 (Elaydi 2007) $\varphi : I \rightarrow I$ sürekli bir dönüşüm olsun, burada $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ kapalı bir aralıktır. Bu durumda, φ sabit bir noktaya sahiptir.

İspat. $\psi(x) = \varphi(x) - x$ olsun. Bu durumda $\psi(x)$ sürekli bir dönüşümdür. Eğer $\varphi(a) = a$ veya $\varphi(b) = b$ olursa, ispat tamamlanır. $\varphi(a) \neq a$ ve $\varphi(b) \neq b$ olduğu kabul edilsin. O halde, $\varphi(a) > a$ ve $\varphi(b) < b$ olur. Buradan $\psi(a) > 0$ ve $\psi(b) < 0$ elde edilir. Ortalama değer teoreminden $\psi(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ noktası vardır. Bu da $\varphi(c) = c$ sonucunu verir yani c , φ nin bir sabit noktasıdır. ■

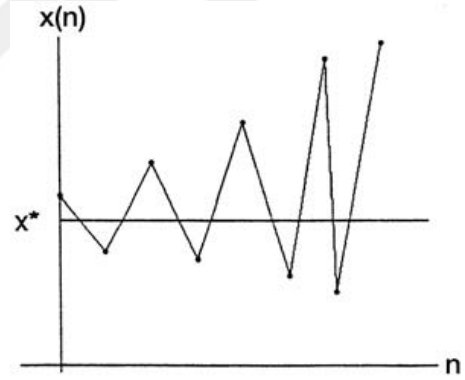
Yukarıdaki teorem $\varphi(I) \subset I$ için sürekli bir dönüşüm olan φ nin sabit bir noktaya sahip olduğunu söyler.

Tanım 2.3 (Danan vd 2002) $\mathbb{Z}^+$ negatif olmayan tam sayılar kümesi ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi : I \rightarrow I$ bir dönüşüm ve x^* , φ nin sabit noktası olsun. Bu durumda,

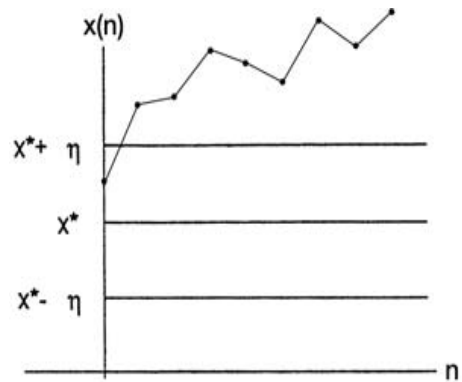
- (i) Herhangi bir $\varepsilon > 0$, her $x_0 \in I$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|\varphi^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ iken $|x_0 - x^*| < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa x^* kararlıdır denir (Şekil 2.2a). Aksi durumda x^* sabit noktası kararsız olur (Şekil 2.2b).
- (ii) Eğer $|x_0 - x^*| < \eta$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x_0) = x^*$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ varsa, x^* çekicidir denir.
- (iii) x^* hem kararlı hem de çekici ise bu durumda asimptotik kararlı olur. (ii) de bahsedilen $\eta = \infty$ oluyorsa bu durumda x^* , global asimptotik kararlıdır denir (Şekil 2.2d).



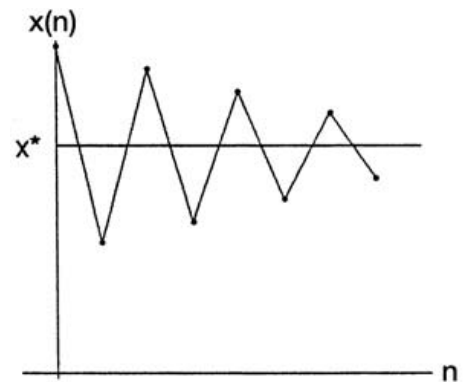
(a) Kararlı x^* sabit noktası



(b) Kararsız x^* sabit noktası



(c) Kararsız x^* sabit noktası



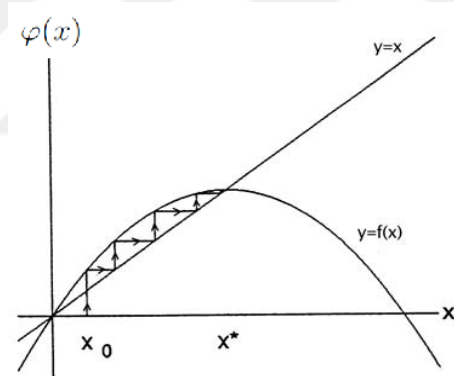
(d) Asimptotik kararlı x^* sabit noktası

Şekil 2.2 x^* sabit noktasının kararlılık durumları

Sabit noktalarının kararlılık analizi için bazen örümcek ağı diyagramı kullanılır. Bu diyagram aşağıdaki algoritma ile elde edilir.

1. xy düzleminde $y = \varphi(x)$ eğrisi ve $y = x$ doğrusu aynı anda çizilir.
2. $x(0) = x_0$ başlangıç noktasından başlayarak dikey bir çizgi çizilir ve bu çizgi $(x_0, x(1))$ noktasında φ ile kesiştirilir.
3. $(x_0, x(1))$ noktasından başlayıp $y = x$ doğrusu üzerinde $(x(1), x(1))$ noktası ile kesişecek yatay bir çizgi çekilir.
4. $(x(1), x(1))$ noktasından çizilen dikey çizgi φ grafiğiyle $(x(1), x(2))$ noktasında kesişir.

Bu algoritma bu şekilde devam ederek $n > 0$ için tüm $x(t)$ değerleri bulunabilir (Bereketoğlu 2021) (Şekil 2.3).



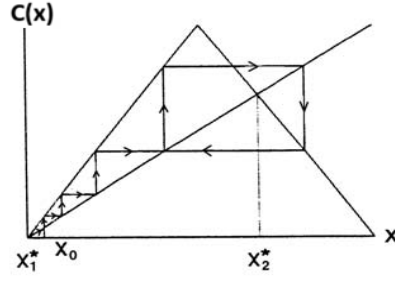
Şekil 2.3 Asimptotik kararlı bir x^* sabit noktasının örümcek ağı diyagramı

Örnek 2.3

$$C(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Çadır dönüşümü tekrar ele alındığında $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = \frac{2}{3}$ sabit noktaların kararlı olmadığı örümcek ağı diyagramı yardımıyla Şekil 2.4 de görülür.

Uyarı 2.2 Fark denklemlerinde örümcek ağı diyagramı kullanılırken x eksenini $x(t)$, y eksenini ise $x(t+1)$ olarak adlandırılır.



Şekil 2.4 $C(x)$ in $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = \frac{2}{3}$ sabit noktaları için örümcek ağı diyagramı

Sabit noktaların kararlılık incelemeleri yapılırken kararlılık tanımlarını veya örümcek ağı diyagramını kullanmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda kararlılık kriterleri daha kullanışlıdır. Aşağıda bu kriterler ele alınmaktadır.

Tanım 2.4 (Danan vd 2002) $|\varphi'(x^*)| \neq 1$ ise φ nin x^* sabit noktası hiperbolik aksi halde yani $|\varphi'(x^*)| = 1$ ise non-hiperboliktir denir.

Öncelikle hiperbolik denge noktaları ele alınsın.

Teorem 2.2 (Elaydi 2005) φ , x^* da sürekli türevlenebilen bir dönüşüm olmak üzere, x^* , φ nin bir hiperbolik sabit noktası olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

1. $|\varphi'(x^*)| < 1$ ise, x^* asimptotik kararlıdır.
2. $|\varphi'(x^*)| > 1$ ise, x^* kararsızdır.

Örnek 2.4 $[-2, 2]$ aralığında tanımlı $\varphi_\nu(x) = 2 - \nu x^2$ dönüşümünün sabit noktaları $\lambda \in (0, 2)$ olmak üzere

$$x_1^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8\nu}}{2\nu}, \quad x_2^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8\nu}}{2\nu}$$

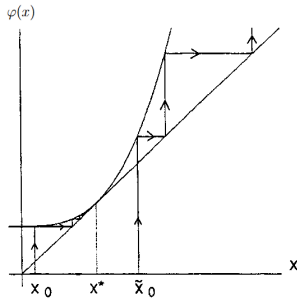
Buradan $\varphi'_\nu(x) = -2\nu x$ olup $|\varphi'_\nu(x_1^*)| = 1 + \sqrt{1+8\nu} > 1$ dir. Teorem 2.2 den x_1^* kararsızdır. Benzer şekilde $|\varphi'_\nu(x_2^*)| = \sqrt{1+8\nu} - 1$ olup Teorem 2.2 den $0 < \nu < \frac{3}{8}$ ise x_2^* sabit noktası asimptotik kararlı, $\nu > \frac{3}{8}$ ise x_2^* kararsızdır.

Non-hiperbolik sabit noktalar incelenirken $\varphi'(x^*) = 1$ ve $\varphi'(x^*) = -1$ durumları ayrı ayrı incelenmelidir. Fakat öncesinde yarı kararlılık tanımı verilsin.

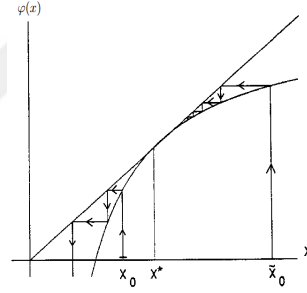
Tanım 2.5 (Bubolo 2018) Her $\varepsilon > 0$ için $0 < x_0 - x^* < \delta$ iken $|\varphi^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, bu durumda φ nin x^* sabit noktasına (sağdan) yarı kararlıdır denir. Ayrıca, bazı $\eta > 0$ için $0 < x_0 - x^* < \eta$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x_0) = x^*$ oluyorsa, bu durumda x^* (sağdan) yarı asimptotik kararlıdır denir. Benzer şekilde soldan kararlılık ve asimptotik kararlılık da tanımları da verilir.

Teorem 2.3 (Allen 2007) x^* , φ dönüşümünün $\varphi'(x^*) = 1$ olacak şekilde bir sabit noktası olsun. $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ ve $\varphi'''(x)$, x^* da sürekli ise, bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

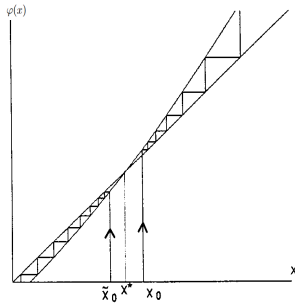
1. $\varphi''(x^*) \neq 0$ ise x^* kararsızdır (yarı kararlıdır) (Şekil 2.5a ve Şekil 2.5b).
2. $\varphi''(x^*) = 0$ ve $\varphi'''(x^*) > 0$ ise x^* kararsızdır (Şekil 2.5c).
3. $\varphi''(x^*) = 0$ ve $\varphi'''(x^*) < 0$ ise x^* asimptotik kararlıdır (Şekil 2.5d).



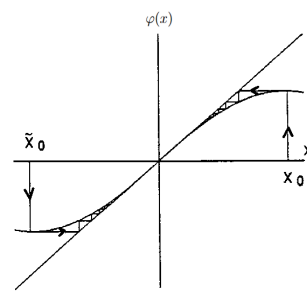
(a) $\varphi'(x) = 1$, $\varphi''(x) > 0$, için kararsız sabit nokta (sol taraftan yarı kararlı)



(b) $\varphi'(x) = 1$, $\varphi''(x) < 0$ için kararsız sabit nokta (sağ taraftan yarı kararlı)



(c) $\varphi'(x) = 1$, $\varphi''(x) = 0$ için kararsız sabit nokta



(d) $\varphi'(x) = 1$, $\varphi''(x) = 0$, $\varphi'''(x) < 0$ için asimptotik kararlı sabit nokta

Şekil 2.5 $\varphi'(x)$ ve $\varphi''(x)$ durumlarının kararlılık grafikleri

Örnek 2.5 $\varphi(x) = -x^3 + x$ olsun. Bu durumda $x^* = 0$ noktası φ nin tek sabit noktasıdır. $\varphi'(0) = 1$ ve $\varphi''(0) = 0$, $\varphi'''(0) < 0$ olup Teorem 2.2 den $x^* = 0$ noktası asimptotik kararlıdır.

Sıradaki teorem $\varphi'(x^*) = -1$ olduğunda kararlılığı belirlemek için kullanılır.

Teorem 2.4 (Bereketoğlu ve Kutay 2012) x^* sabit noktası için $\varphi(x^*) = -1$ olsun. Ayrıca φ nin Schwarzian türevi

$$S\varphi(x) = \frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \right]^2$$

ile gösterilsin. Eğer $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ ve $\varphi'''(x)$, x^* sabit noktasında sürekliyse aşağıdakiler doğrudur:

1. $S\varphi(x^*) < 0$ ise, x^* asimptotik kararlıdır,
2. $S\varphi(x^*) > 0$ ise, x^* kararsızdır.

Örnek 2.6 $\varphi(x) = x^2 + 2x$ dönüşümünü $[-2, 2]$ aralığında ele alınsın. Bu dönüşümün sabit noktaları $x^2 + 2x = x$ den,

$$x_1^* = 0 \text{ ve } x_2^* = -1$$

şeklinde bulunur. $\varphi'(x) = 2x + 1$ olup $\varphi'(x_1^*) = \varphi'(0) = 2 \neq 0$ olduğundan Teorem 2.3 den kararsızdır. Öte yandan, $\varphi'(x_2^*) = \varphi'(-1) = -1$ olduğundan Teorem 2.4 den

$$S\varphi(x) = \frac{0}{(2x+1)} - \frac{3}{2} \left[\frac{2}{2x+1} \right]^2 = -\frac{3}{2} \left[\frac{2}{2x+1} \right]^2$$

olup $S\varphi(-1) = -6 < 0$ dır. Böylece $x_2^* = -1$ asimptotik kararlı olur.

2.2 Periyodiklik Analizi

Periyodiklik kavramı, dinamik sistemlerin en önemli konularından biridir. Birçok fiziksel olgu kendini tekrarlayan bir örüntüye sahiptir. Bu örüntüler, döngüler veya periyodik çemberler (periodic cycles) üretir, burada çemberden kasıt periyodik bir noktanın yörüngesidir. Bu bölümde periyodik noktaların varlığı ve özellikleri ele alınmaktadır.

Tanım 2.6 (Elaydi 2005) $\bar{x}$, φ dönüşümünün tanım kümesinde olsun. Bu durumda,

- (i) Pozitif bir s tamsayısı için $\varphi^s(\bar{x}) = \bar{x}$ ise, bu durumda $\bar{x}$ noktasına periyodik bir nokta denir. $\bar{x}$ a aynı zamanda s -periyodik ismi verilir.
- (ii) Pozitif s ve m tamsayıları için $\varphi^{s+m}(\bar{x}) = \varphi^m(\bar{x})$ ise, bu durumda $\bar{x}$ noktasına s periyotlu nihai periyodik bir nokta denir.

$O(x_0)$ ın yörüngesine benzer şekilde s -periyodik bir $\bar{x}$ noktasının yörüngesi

$$O(\bar{x}) = \{\bar{x}, \varphi(\bar{x}), \varphi^2(\bar{x}), \dots, \varphi^{s-1}(\bar{x})\}$$

ile verilir ve genellikle s -periyodik döngü ismini alır.

Tanım 2.7 (Hale ve Koçak 1996) $\bar{x}$, φ nin s periyotlu periyodik bir noktası olsun. O zaman,

- (i) $\bar{x}$, φ^s nin kararlı sabit noktası ise, bu durumda $\bar{x}$ kararlıdır.
- (ii) $\bar{x}$, φ^s nin asimptotik kararlı sabit noktası ise, bu durumda $\bar{x}$ asimptotik kararlıdır.
- (iii) $\bar{x}$, φ^s nin kararsız bir sabit noktası ise, bu durumda $\bar{x}$ kararsızdır.

Sıradaki teorem, bir önceki bölümde yer alan Teorem 2.2 den yararlanarak, periyodik noktaların kararlılığı için bir kriter sunar.

Teorem 2.5 (Elaydi 2005) φ , sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$O(\bar{x}) = \{\bar{x}, \varphi(\bar{x}), \dots, \varphi^{s-1}(\bar{x})\}$ s -periyotlu $\bar{x}$ noktasının yörüngesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $|\varphi'(\bar{x}_*)\varphi'(\varphi(\bar{x}_*))\dots\varphi'(\varphi^{s-1}(\bar{x}_*))| < 1$ ise, $\bar{x}$ asimptotik kararlıdır.
- (ii) $|\varphi'(\bar{x}_*)\varphi'(\varphi(\bar{x}_*))\dots\varphi'(\varphi^{s-1}(\bar{x}_*))| > 1$ ise, $\bar{x}$ kararsızdır.

Örnek 2.7 $\varphi(x) = 1 - x^2$ olmak üzere $[-1, 1]$ aralığında $x(t+1) = \varphi(x(t))$ fark denklemini ele alalım. Bu denklemin bütün 2-periyotlu ve 3-periyotlu döngülerini ve bunların kararlılıklarını inceleyelim. Bunun için öncelikle φ nin sabit noktalarını bulunmalıdır.

$\varphi(x^*) = x^*$ den sabit noktalar

$$x_1^* = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ve } x_2^* = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

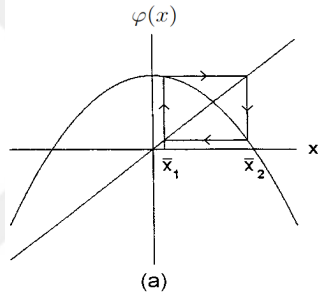
şeklindedir. Bu iki sabit noktadan sadece $x_2^* \in [-1, 1]$ dir ve Teorem 2.2 den $|\varphi'(x^*)| > 1$ olup x_2^* kararsızdır. Şimdi, 2-periyotlu döngüyü bulabilmek için $\varphi^2(x) = x$ eşitliğini kuralım:

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(1 - x^2) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$$

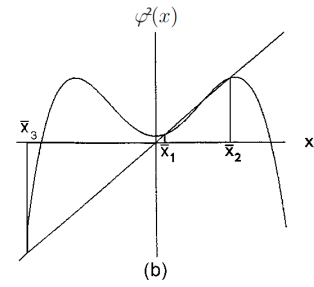
olmak üzere $\varphi^2(x) = x$ den

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

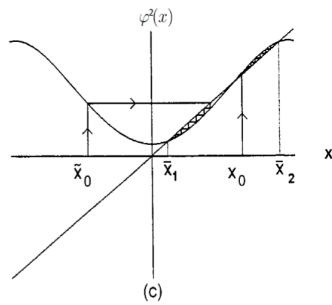
elde edilir. Burada φ nin 2-periyotlu döngüsü $\{0, 1\}$ olarak bulunur, diğer iki kök φ nin sabit noktalarıdır.



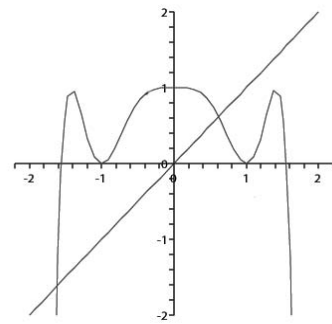
(a) x_1 ve x_2 noktalarının 2-periyot döngüsü



(b) φ nin periyodik noktaları: φ^2 nin x_1 ve x_2 sabit noktaları



(c) φ^2 nin asimptotik kararlı x_1 ve x_2 sabit noktaları



(d) φ^3 ün 3-periyot döngüsü

Şekil 2.6 $\varphi(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun sabit noktalarının ve döngülerinin grafikleri

Öte yandan, $|\varphi'(0)\varphi'(1)| = |0(-2)| = 0 < 1$ olup Teorem 2.5 den bu döngü asimptotik kararlı olur (Şekil 2.6c). Şimdi, 3-periyotlu döngüyü bulabilmek için $\varphi^3(x) = x$ eşitliğini kuralım:

$$\varphi^3(x) = \varphi(\varphi(\varphi(x))) = \varphi(1 - x^2) = 1 - (1 - (1 - x^2)^2)^2 = 1 - 4x^4 + 4x^6 - x^8$$

olmak üzere $\varphi^3(x) = x$ den

$$x^8 - 4x^6 + 4x^4 + x - 1 = 0$$

olup bu denklemin çözümü o kadar da kolay değildir. Bundan dolayı grafiksel olarak yorumlanması gerekir (Şekil 2.6d). φ nin nihai periyodik noktasını bulmak için

$$\varphi^{-1}(x) = \sqrt{1 - x}$$

eşitliğini ele alalım. $x_1^* \notin [-1, 1]$ olduğundan sadece x_2^* nin incelenmesi yeterlidir.

$$\varphi^{-1}(x_2^*) = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \in [-1, 1]$$

olup, nihai sabit noktadır. Öte yandan $\psi = \varphi^2$ olmak üzere $\psi^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$ den $\psi^{-1}(0) = \sqrt{2}$ olup $\sqrt{2} \notin [-1, 1]$ olduğundan φ nin nihai periyodik bir noktası yoktur.

3. FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

3.1 Lineer Sistemler

Bu bölüme başlanmadan önce bazı lineer cebir bilgilerini verelim.

Tanım 3.1 (Anton ve Rorres 2019) $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. L bir lineer dönüşüm olmak üzere

$$(i) \quad W_1, W_2 \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L(W_1 + W_2) = L(W_1) + L(W_2)$$

ve

$$(ii) \quad W \in \mathbb{R}^2 \text{ ve } \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } L(\alpha W) = \alpha L(W)$$

ifadeleri sağlanır.

Bu şartlar herhangi bir A matrisine uygulanabilir. $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ve $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$

olmak üzere L dönüşümü $L(W) = AW$ şeklinde yazılır.

L dönüşümü altında iterasyonlar $L, L^2(W), \dots$ olarak yazılarak daha genel bir ifadeyle $L^n(W) = A^n W$ olarak özetlenebilir ve

$$\{W, AW, A^2W, \dots, A^n W, \dots\} \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir. W yörüngelerini bulmak için $n \in \mathbb{Z}^+$ olacak şekilde $A^n W$ hesaplamak yeterlidir. İki boyutlu sistem

$$\begin{cases} X(t+1) = \alpha_{11}X(t) + \alpha_{12}Y(t) \\ Y(t+1) = \alpha_{21}X(t) + \alpha_{22}Y(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

ele alınsın.

$$W(t+1) = AW(t) \quad (3.3)$$

olarak yazıldığında bu sistem belli bir iterasyondan sonra

$$W(t) = A^n W(0) \quad (3.4)$$

olur ve $W_0 = W(0)$ ise $L^n(W_0) = W(t)$ dır.

İki boyutlu bir sistemde A^n hesaplamak için karakteristik denklemden yararlanılır.

Tanım 3.2 (Allen 2007) $\lambda^2 + a\lambda + b$ karakteristik polinom olarak adlandırılır ve $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ denkleminin çözümünden gelen λ_1 ve λ_2 kökleri özdeğerler olarak adlandırılır.

2×2 türünde bir $A = (a_{ij})$ matrisi ele alındığında $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ denklemi A matrisinin karakteristik denklemidir ve bu denklemi sıfır yapan değerler A matrisinin özdeğerleridir. Elde edilen her bir özdeğer ile ilişkili $AV = \lambda V$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı $V \in \mathbb{R}^2$ olacak şekilde özvektörü bulunur (Ortega 1987).

Örnek 3.1

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini bulmak için öncelikle $|A - \lambda I| = 0$ denklemi hesaplandığında

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10$$

karakteristik denklemi elde edilir ve özdeğerler $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 5$ olarak bulunur. λ_1 özdeğerine denk gelen özvektörü hesaplamak için $AV_1 = \lambda V_1$ denklemi yani,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hesaplandığında $-v_{11} + 2v_{21} = 0$ bulunur. Yani, $v_{21} = 1$ ve $v_{11} = 2$ dir. $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $V_1 = (2 \ 1)^T$ olur. Aynı işlemler $\lambda_2 = 5$ için uygulandığında bu özdeğere denk gelen özvektör $V_2 = (-1 \ 1)^T$ olur.

2×2 türünde bir matris için bile bazen A^n hesaplamak oldukça zorlu bir süreçtir fakat A matrisini daha kolay bir Γ matrisine dönüştürerek Γ^n hesaplamak daha kullanışlıdır.

Tanım 3.3 (Ortega 1987) Singüler olmayan bir Q matrisi için

$$Q^{-1}AQ = \Gamma$$

eşitliği yazılabiliyorsa A ve Γ matrislerine benzer matrislerdir denir.

Burada bahsedilen benzerlik bağıntısı matrisler arası denklik bağıntısıdır.

Tanım 3.4 (Anton ve Rorres 2019) A , B ve C matrisleri 2×2 türünde matrisler olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

- (i) A matrisi ile A matrisi benzerdir,
- (ii) A matrisi B matrisine benzerse, B matrisi A matrisine benzerdir,
- (iii) A matrisi B matrisine benzer olup B matrisi C matrisine benzerse, A matrisi C matrisine benzerdir.

Teorem 3.1 (Ortega 1987) A ve B benzer iki matris olsunlar. O halde A ve B matrisleri aynı karakteristik denkleme ve aynı özdeğerlere sahiptirler.

Matrisler arası benzerlikten bahsedilirken topolojik eşleniklik konusunun da açıklığa kavuşması gerekir. Öncesinde homeomorfizma verilsin.

Tanım 3.5 (Ercan 2020) Birebir, örten, kendisi ve tersi sürekli olan X ve Y uzayları arasında $\varphi : X \rightarrow Y$ dönüşümü homeomorfizma olarak adlandırılır ve homeomorfizma olan iki topolojik uzaya homeomorfik uzaylar denir.

Eğer $\psi : X \rightarrow Y$ ve $\varphi : Y \rightarrow Z$ iki homeomorfizma ise o halde $\psi \circ \varphi$ bir homeomorfizmadır. Homeomorfizma tanımını kullanarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.6 (Kuznetsov 2004) φ ve ψ dönüşümleri $\varphi = \vartheta^{-1} \circ \psi \circ \vartheta$ koşulunu sağlıyorsa, ϑ homomorfizması için φ ve ψ eşleniktir denir.

İki lineer dönüşüm matrisleri benzer olduğunda bu lineer dönüşümler eşleniktir. Yani, L_1 ve L_2 , $\mathbb{R}^2$ üzerinde lineer dönüşümler olmak üzere ϑ homomorfizma ise

$$L_1 \circ \vartheta = \vartheta \circ L_2$$

L_1 ve L_2 eşleniktir. 2×2 türünde matrisler için üç tane kanonik biçim mevcuttur ve bu biçimlerin kendine has çözümleri vardır.

2×2 türünde bir A matrisi için

$$X(t+1) = AX(t) \quad (3.5)$$

lineer sistemi tanımlansın. $X_1(t)$ ve $X_2(t)$ bu sistemin çözümleri olmak üzere $\wp_1 X_1(t) + \wp_2 X_2(t)$ lineer kombinasyonuna sahiptir (Strogatz 2014).

$X_1(t)$ ve $X_2(t)$ çözümleri özdeğerler yardımı ile oldukça kolay bir şekilde bulunabilir. λ_1 ve λ_2 , A matrisinin özdeğerleri olsunlar. V_1 ve V_2 de bu özdeğerlerden türetilen özvektörler olsunlar. Üç kanonik biçim için üç farklı durum oluşur.

1. Durum Birinci kanonik biçim $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere genel çözüm

$$X(t) = \wp_1 \lambda_1^n V_1 + \wp_2 \lambda_2^n V_2 \quad (3.6)$$

dir, burada $X_1(t) = \lambda_1^n V_1$ ve $X_2(n) = \lambda_2^n V_2$ dir. B matrisi ayrıca diyagonal biçimi olarak bilinir.

2. Durum İkinci kanonik biçim $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ olmak üzere genel çözüm,

$$X(t) = \wp_1 \lambda^n V_1 + \wp_2 (n \lambda^{n-1} V_1 + \lambda^n V_2) \quad (3.7)$$

dir, burada $X_1(t) = \lambda^n V_1$ ve $X_2(n) = n \lambda^{n-1} V_1$ dir. B matrisi ayrıca Jordan biçimi olarak bilinir.

3. Durum Üçüncü kanonik biçim $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ olmak üzere genel çözüm,

$$X(t) = |\lambda_1|^n [(\wp_1 \cos n\omega + \wp_2 \sin n\omega) V_1 + (-\wp_1 \sin n\omega + \wp_2 \cos n\omega) V_2] \quad (3.8)$$

dir, burada $\omega = \arctan(\beta/\alpha)$ olup

$$X_1(t) = |\lambda_1|^n [(\wp_1 \cos n\omega) V_1 - (\wp_1 \sin n\omega) V_2]$$

ve

$$X_2(t) = |\lambda_1|^n [(\wp_2 \sin n\omega) V_1 + (\wp_2 \cos n\omega) V_2]$$

dir.

3.2 Faz Diyagramı

Faz diyagramları, sabit noktaları, periyodik yörüngeleri ve çatallanma yapılarını açık bir şekilde gösterdiklerinden dolayı ayrık sistemler için oldukça önemli yapılarıdır. Sistemin uzun vadeli davranışını analiz etmek ve kararlılık hakkında yorum yapmak için faz diyagramlarından yararlanılır (Strogatz 2018).

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olacak şekilde bir dönüşüm ve $X_0 = (x_1(0) \ x_2(0))^T$ başlangıç noktası olsun. $X_0, \varphi(X_0), \varphi^2(X_0), \dots$ iterasyonlardan oluşan noktaların birleştirilmesiyle çizilen grafiğe faz portresi adı verilir (Bereketoğlu ve Kutay 2012). Benzer şekilde $X^* = (0, 0)$ noktası (3.5) sistemin tek sabit noktasıdır ve burada A , 2×2 türünde singüler olmayan sabit bir matristir.

$Q^{-1}AQ = B$ üç kanonik biçimden birine sahip olsun. $X(t) = QY(t)$ olarak alınırsa (3.5) sistemi

$$Y(t+1) = BY(t) \quad (3.9)$$

sistemine indirgenir. A ve B matrisleri benzer olduğundan sabit noktaları da aynı özellikleri taşır. $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ kanonik biçimi için (3.9) sisteminin gelen özdeğerlerin faz diyagramları

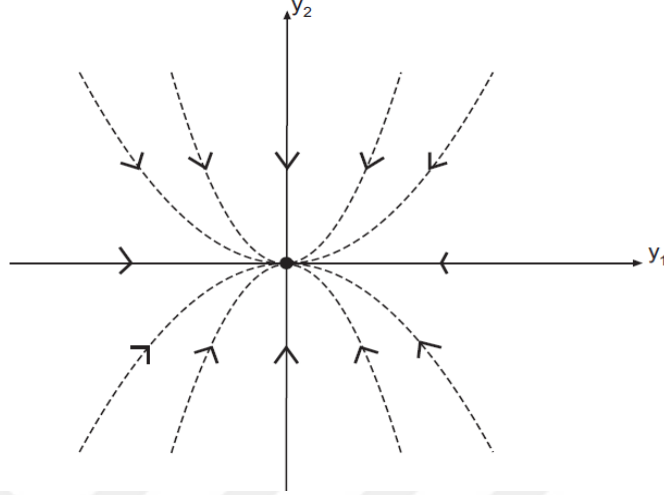
- (a) $-1 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$ ise $(0, 0)$ asimptotik kararlı düğüm noktası,
- (b) $1 < \lambda_2 < \lambda_1$ ise $(0, 0)$ kararsız düğüm noktası,
- (c) $0 < \lambda_1 < 1$ ve $\lambda_2 > 1$ ise $(0, 0)$ semer noktasıdır,
- (d) $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$ ise $(0, 0)$ asimptotik kararlı düğüm noktası,
- (e) $\lambda_1 = 1$ ve $-1 < \lambda_2 < 1$ ise $(0, 0)$ kararlı dejenere düğüm noktası

olarak oluşur (Bereketoğlu ve Kutay 2012). (3.9) sisteminin genel çözümü

$$Y(t) = y_1 \lambda_1^n (1 \ 0)^T + y_2 \lambda_2^n (0 \ 1)^T \quad (3.10)$$

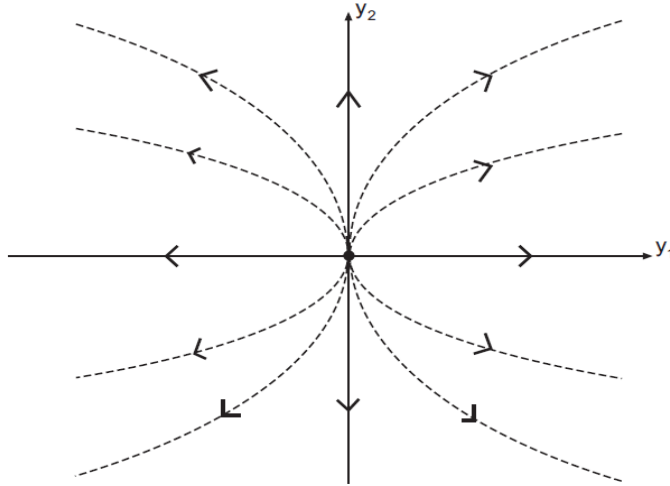
şeklinde yazılır, burada V_1 ve V_2 , sırasıyla λ_1 ve λ_2 özdeğerlerinden üretilen özvektörlerdir. $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = 0$ iken $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \infty$ olmak üzere

- (i) $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ ise $n \rightarrow \infty$ iken tüm çözümler orijine yönelir. Kritik nokta türü asimptotik kararlı olur (Şekil 3.1).



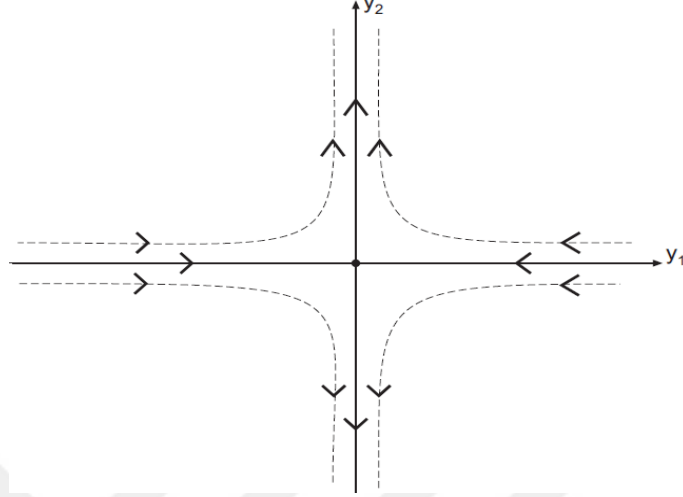
Şekil 3.1 Kararlı düğüm noktası, $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$

- (ii) $|\lambda_1| > 1$ ve $|\lambda_2| > 1$ ise $n \rightarrow \infty$ iken tüm çözümler orijinden uzaklaşır ve kararsız düğüm noktası olur (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 Kararsız düğüm noktası, $1 < \lambda_2 < \lambda_1$

- (iii) $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| > 1$ ise bir çözüm orijine yaklaşırken diğer çözüm orijinden uzaklaşır ve semer noktası oluşur (Şekil 3.3).

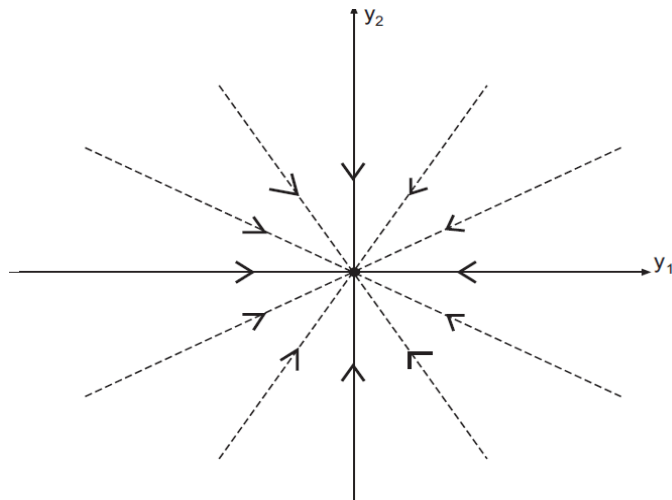


Şekil 3.3 Kararsız semer noktası, $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 > 1$

- (iv) $\lambda_1 = \lambda_2$ ise genel çözüm

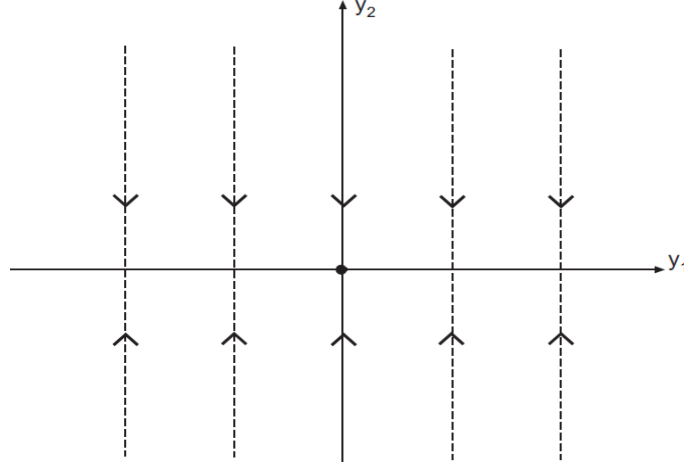
$$Y(t) = y_1 \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T + y_2 \lambda^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \lambda^n \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^T$$

olup tüm çözümler orijinden geçer ve $\frac{y_2}{y_1}$ eğrileri oluşurken asimptotik kararlı düğüm noktası oluşur (Şekil 3.4).



Şekil 3.4 Asimptotik kararlı düğüm noktası, $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$

(v) Son olarak $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ ise kararlı dejenere noktası oluşur (Şekil 3.5).



Şekil 3.5 Kararlı dejenere düğüm noktası, $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| < 1$

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ kanonik biçimi için (3.9) sisteminin özdeğerlerinin faz diyagramları

(a) $-1 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$ ise $(0, 0)$ asimptotik kararlı düğüm noktası,

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ise $(0, 0)$ kararsız dejenere nokta,

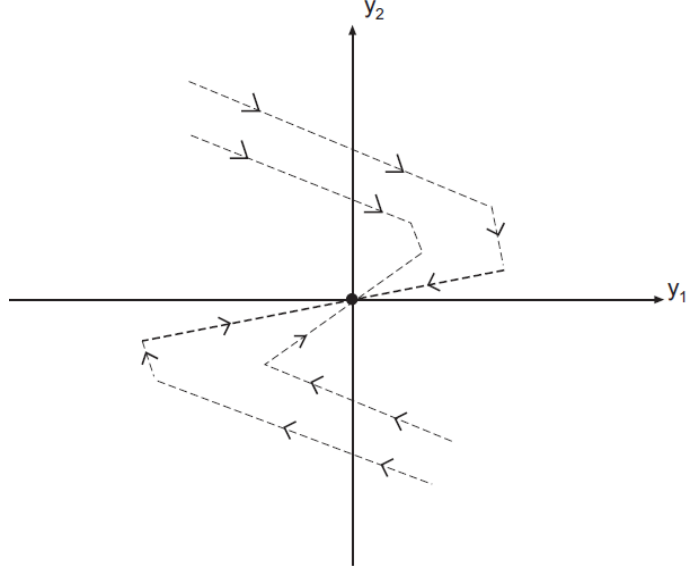
(c) $\lambda_1 = \lambda_2 > 1$ ise $(0, 0)$ kararsız düğüm noktası,

olarak oluşturulur (Bereketoğlu ve Kutay 2012). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = 0$ olup (3.9) un genel çözümü

$$Y(t) = (y_1 \lambda + y_2 n) \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T + y_2 \lambda^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

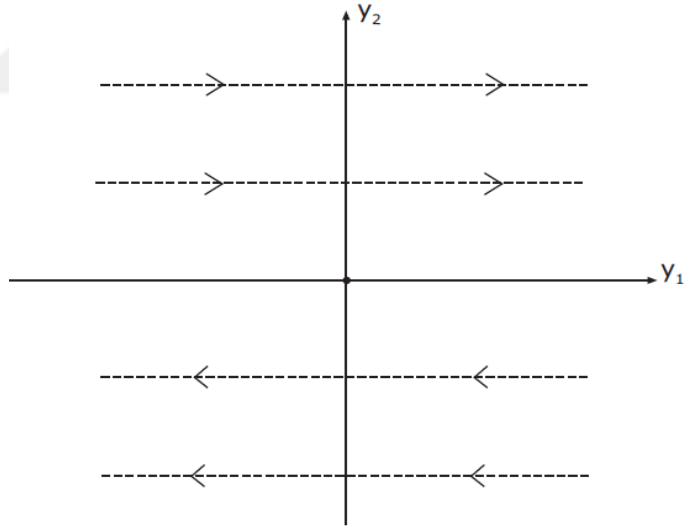
şeklindedir.

(i) $-1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$ ise $(0, 0)$ noktası asimptotik kararlı düğüm noktasıdır (Şekil 3.6).



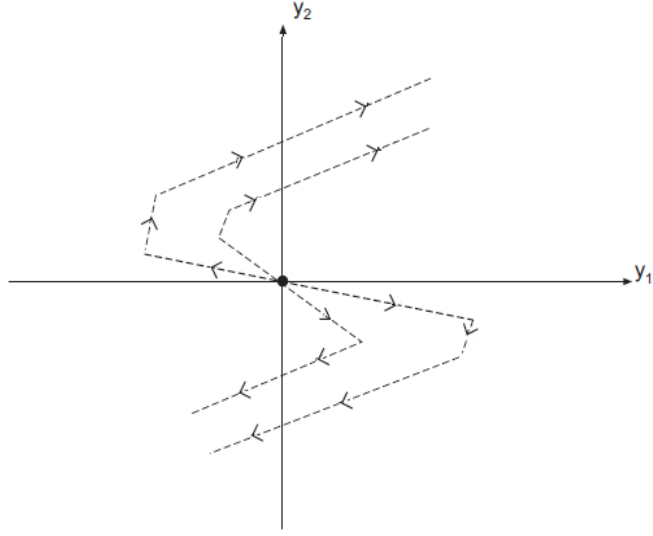
Şekil 3.6 Asimptotik kararlı düğüm noktası, $-1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$

- (ii) $\lambda_1 = \lambda_2 > 1$ ise yukarıdaki durumun tam tersi olacağı için $(0, 0)$ noktası kararsız düğüm noktasıdır (Şekil 3.7).



Şekil 3.7 Kararsız dejenere nokta, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

- (iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ise $(0, 0)$ noktası dejenere noktadır (Şekil 3.8).



Şekil 3.8 Kararsız düğüm noktası, $\lambda_1 = \lambda_2 > 1$

$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ kanonik biçimi için (3.9) sisteminin özdeğerlerinin faz diyagramları

- (a) $|\lambda_1| < 1$ ise $(0, 0)$ asimptotik kararlı odak noktası,
- (b) $|\lambda_1| > 1$ ise $(0, 0)$ kararsız odak noktası,
- (c) $|\lambda_1| = 1$ ise $(0, 0)$ merkez

olarak elde edilir (Bereketoğlu ve Kutay 2012). (3.9) sisteminin genel çözümü için olduğundan iki tane genel çözüm elde edilir ve bunlar eşlenik komplekstir. Çözümler içerisinde $\sin n\beta$ ve $\cos n\beta$ bulunduğundan dolayı polar koordinatlar ile faz portresi çizilir. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $V_1 = (1 \ i)^T$ ise (3.9) sisteminin bir çözümü

$$\begin{aligned} Y(t) &= (1 \ i)^T (\lambda_1)^n = (1 \ i)^T |\lambda_1|^n (\cos n\omega + i \sin n\omega) \\ &= |\lambda_1|^n (\cos n\omega \quad -\sin n\omega)^T + i|\lambda_1|^n (\sin n\omega \quad \cos n\omega)^T \end{aligned}$$

şeklinde olup $\omega = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ dır. Buradan genel çözüm

$$\begin{cases} y_1(t) = |\lambda_1|^n r_0 \cos(t\omega - \gamma) \\ y_2(t) = -|\lambda_1|^n r_0 \sin(t\omega - \gamma) \end{cases}$$

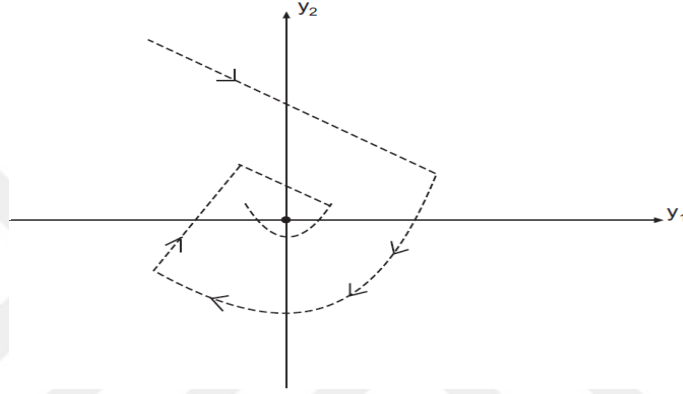
dır. Bu çözüm polar koordinatlarda

$$r(t) = r_0 |\lambda_1|^n \quad (3.11)$$

$$\theta(t) = -(t\omega - \gamma) \quad (3.12)$$

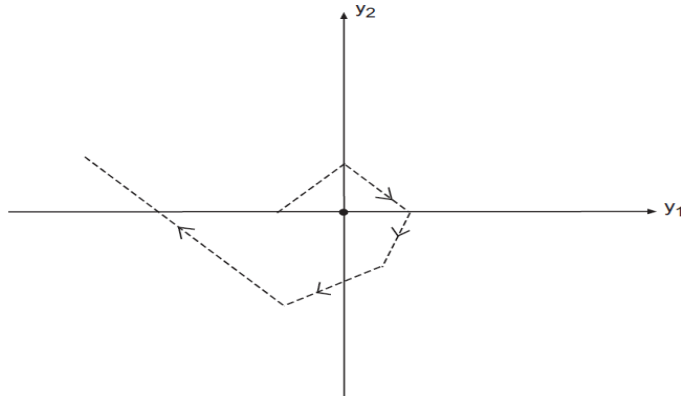
biçimindedir, burada $\cos \gamma = \frac{y_1(0)}{r_0}$, $\sin \gamma = \frac{y_2(0)}{r_0}$ ve $r_0 = (y_1^2(0) + y_2^2(0))^{1/2}$.

- (i) $|\lambda_1| < 1$ ise $(0, 0)$ noktası asimptotik kararlı odak noktasıdır ve spiral bir görüntü oluşturur (Şekil 3.9).



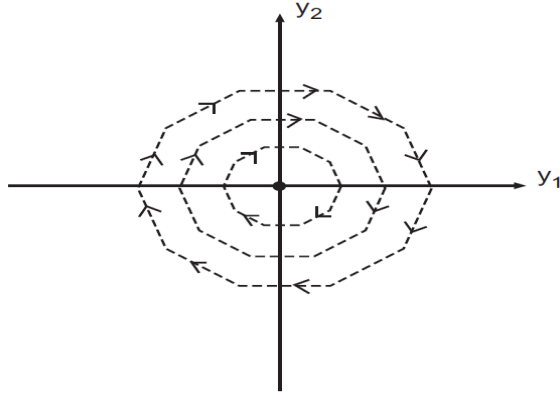
Şekil 3.9 Asimptotik kararlı odak noktası, $|\lambda_1| < 1$

- (ii) $|\lambda_1| > 1$ ise $(0, 0)$ noktası kararsız odak noktasıdır ve spiral bir görüntü oluşturur (Şekil 3.10).



Şekil 3.10 Kararsız odak noktası, $|\lambda_1| > 1$

(iii) $|\lambda_1| = 1$ ise $(0,0)$ noktası kararlı merkezdir (Şekil 3.11).



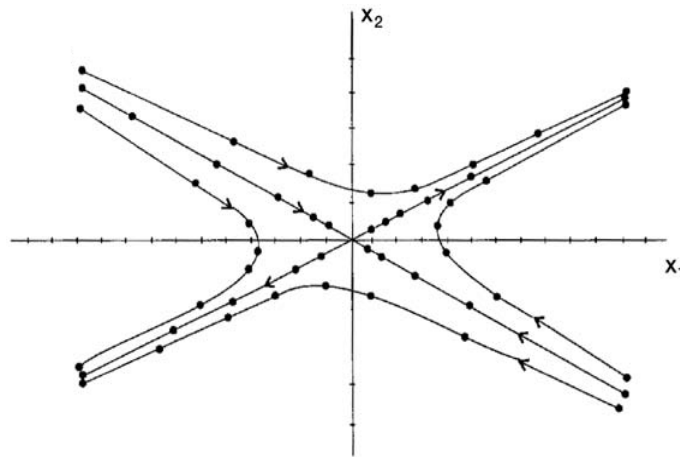
Şekil 3.11 Merkez noktası, $|\lambda_1| = 1$

Örnek 3.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere (3.5) sisteminin faz portresinin çizelim.

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla ise $V_1 = (2 \ 1)^T$ ve $V_2 = (2 \ -1)^T$ şeklindedir. Buradan, verilen sistemin genel çözümü

$$X(t) = (1.5)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0.5)^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dir ve kritik nokta semer olur. $X(t)$ çözümü Şekil 3.12 de görüldüğü gibi $V_1 = (2 \ 1)^T$ doğrusu boyunca asimptotiktir.



Şekil 3.12 Semer: $\lambda_1 > 1$, $0 < \lambda_2 < 1$

3.3 Kararlılık Analizi

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir dönüşüm olsun ve $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ bu dönüşümün sabit bir noktası olsun. Bu kesimin amacı önceki bölümde skaler denklemler için verilen tanımları sistemler için genişletmektir. Öncelikle bazı ön bilgiler verelim.

Tanım 3.7 (Ortega 1987) $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, gerçek değerli bir fonksiyon için aşağıdaki ifadeler doğruysa bu fonksiyon norm olarak adlandırılır ve $\| \cdot \|$ ile gösterilir.

(i) $\| x \| \geq 0$ ve $\| x \| = 0$ olması için $x = 0$ olmalıdır.

(ii) Bütün $x \in R$ ve α skaleri için $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$

(iii) Bütün $x, y \in R$ için $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Buradaki her bir vektör normuna karşılık olarak $\mathbb{R}^k$ üzerinde bir tane operatör normu tanımlanabilir. A , $n \times n$ türünde bir matris olup

$$\| A \| = \max \| Ax \|$$

normu kullanılır (Ortega 1987). Bu tez kapsamında matris 2×2 türünde bir matris olarak alınacaktır.

Tanım 3.8 (Ortega 1987) $n \times n$ türünde bir A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ olmak üzere spektral yarıçapı

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

dir.

O halde 2×2 türünde bir matris için spektral yarıçap

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

olarak yazılır. Şimdi iki boyutlu sistemler için kararlılık tanımı verelim:

Tanım 3.9 (Allen 2007) Tüm başlangıç koşulları x^* sabit noktası için $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ sağlanıyorsa x^* global çekicidir denir. x^* hem global çekici hem de lokal (yerel) kararlıysa aynı zamanda global asimptotik kararlıdır denir.

Yani, başlangıç koşulları sabit noktaya yakın olduğunda bu noktanın lokal asimptotik kararlı olması için çözümler bu sabit noktaya yaklaşmalıdır. Eğer çözümler tüm başlangıç koşulları için sabit noktaya yaklaşıyorsa bu sabit nokta global asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 3.10 (Elaydi 2005) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümünü ve X^* sabit noktası için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\|\varphi^n(X) - X^*\| < \varepsilon$ iken $\|X - X^*\| < C$ olacak şekilde $C > 0$ varsa X^* kararlıdır.
- (ii) $\|X - X^*\| < v$ iken $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^n(X) = X^*$ olacak şekilde bir $v > 0$ varsa, X^* çekicidir (düşümdür).
- (iii) X^* hem kararlı hem de çekici ise o zaman asimptotik kararlıdır. Hem kararlı hem de global çekici ise o zaman global asimptotik kararlıdır.
- (iv) X^* kararlı değilse, X^* kararsızdır.

Şimdi (3.5) denklemini tekrar göz önüne alalım. $(0, 0)$ kritik noktası için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.2 (Elaydi 2007) (3.5) sisteminin $X^* = (0, 0)$ kritik noktası için aşağıdakiler doğrudur.

- (i) $\rho(A) < 1$ ise, X^* asimptotik kararlıdır.
- (ii) $\rho(A) > 1$ ise, X^* kararsızdır.
- (iii) $\rho(A) = 1$ ise özdeğerlerin Jordan formuna sahip olup olmadığına bakılır. Eğer Jordan formuna sahipse kararsız, aksi halde kararlıdır.

Teorem 3.3 (Elaydi 2005) $A = (\alpha_{ij})$, 2×2 türünde bir matris olsun. $\rho(A) < 1$ olması için gerek ve yeter koşul

$$|T(A)| - 1 < D(A) < 1 \quad (3.13)$$

dir, burada $T(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22}$, A matrisinin izi ve $D(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$, A matrisinin determinantıdır.

İspat.

- (i) Öncelikle $\rho(A) < 1$ olsun. Bu durumda λ_1 ve λ_2 , A matrisinin özdeğerleri olmak üzere $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ dir. A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}\lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda - (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) &= 0 \\ \lambda^2 - (T(A))\lambda + D(A) &= 0\end{aligned}$$

olduğundan özdeğerler

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[T(A) \pm \sqrt{(T(A))^2 - 4D(A)} \right]$$

şeklinde elde edilir. Burada iki duruma bakılması gerekir.

- (1) $\lambda_{1,2}$ özdeğerleri reeldir. Yani $(T(A))^2 - 4D(A) \geq 0$ dir. olmalıdır. $|\lambda_{1,2}| < 1$ olduğundan $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ yazılır. Buradan

$$-2 < T(A) \pm \sqrt{(T(A))^2 - 4D(A)} < 2$$

olup

$$-2 - T(A) < \sqrt{(T(A))^2 - 4D(A)} < 2 - T(A) \quad (3.14)$$

ve

$$-2 - T(A) < -\sqrt{(T(A))^2 - 4D(A)} < 2 - T(A) \quad (3.15)$$

olarak yazılabilir. (3.14) ve (3.15) in her iki tarafının karesi alınırsa sırasıyla,

$$1 - T(A) + D(A) > 0 \quad (3.16)$$

ve

$$1 + T(A) + D(A) > 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.14) in sağ tarafından ve (3.15) ün sol tarafından $|T(A)| < 2$ elde edilir. $T(A)^2 - 4D(A) \geq 0$ olduğundan

$$D(A) \leq \frac{(T(A))^2}{4} < 1 \quad (3.18)$$

yazılır. Böylece (3.16), (3.17) ve (3.18) eşitsizlikleri birlikte göz önüne alınınca (3.13) bulunur.

(2) λ_1 ve λ_2 kompleks özdeğerler, yani,

$$(T(A))^2 - 4D(A) < 0 \quad (3.19)$$

olsun. Bu durumda $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[T(A) \pm i\sqrt{4D(A) - (T(A))^2} \right]$ olup

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \frac{(T(A))^2}{4} + \frac{4D(A)}{4} - \frac{(T(A))^2}{4} = D(A)$$

dir. $|\lambda_{1,2}| < 1$ olduğundan $0 < D(A) < 1$ olduğu açıktır. Şimdi de $T(A) > 0$ olsun. $D(A) > 1$ kabulünden $x \in (0, 1)$ dir ve (3.16) ifadesi doğrudur.

(3.19) den $T(A) < 2\sqrt{D(A)}$ olduğundan $D(A) = x$ kabul edilirse

$\varphi(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ fonksiyonu yazılır ve

$$1 + x - 2\sqrt{x} < 1 + D(A) - T(A)$$

burada $x \in (0, 1)$. Fonksiyonun grafiksel yorumunu yapabilmek için fonksiyonun sıfırını ve azalan olup olmadığına bakılması gerekir. Fonksiyonun sıfırını $\varphi(0) = 1$ dir ve $\varphi'(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ olduğundan dolayı bu fonksiyon $(0, 1)$ aralığında azalandır. Fonksiyonun $(0, 1)$ aralığında azalan olmasından dolayı $1 + D(A) - T(A) > \varphi(x) > 0$ yazılıp buradan da $1 > D(A) - T(A) + 1 > 0$ olduğu gösterilir ve ispat tamamlanır.

(ii) Tersine olarak (3.13) nin doğru olduğu kabul edilsin. Bu durumda yine iki durum vardır:

1. $(T(A))^2 - 4D(A) \geq 0$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &= \frac{1}{2} \left| T(A) \pm \sqrt{(T(A))^2 - 4D(A)} \right| \\ &< \frac{1}{2} \left| T(A) \pm \sqrt{(D(A) + 1)^2 - 4D(A)} \right| \\ &< \frac{1}{2} \left((D(A) + 1)^2 + \sqrt{(D(A) - 1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} ((D(A) + 1)^2 - (D(A) - 1)) \end{aligned}$$

olup, $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ elde edilir.

2. $(T(A))^2 - 4D(A) < 0$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &= \left| T(A) \pm i\sqrt{4D(A) - (T(A))^2} \right| \\ &= \sqrt{(T(A))^2 + 4D(A) - (T(A))^2} \\ &= \sqrt{D(A)} < 1 \end{aligned}$$

olup $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ elde edilir.

■

Sonuç 3.1 (3.5) sisteminin kararlılığı (3.13) eşitsizliğinin doğru olması ile eşdeğerdir.

Teorem 3.4 (Elaydi 2007) Aşağıda verilenler herhangi bir 2×2 türünde A matrisi için doğru olur.

(i) $|T(A)| - 1 = D(A)$ olsun. Bu durumda,

1. $T(A) > 0$ ise, bu durumda A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = D(A)$ dir.
2. $T(A) < 0$ ise, bu durumda A matrisinin özdeğerleri $\lambda_2 = -1$ ve $\lambda_1 = -D(A)$ dir.

(ii) $|T(A)| - 1 < D(A)$ ve $D(A) = 1$ ise A matrisinin özdeğerleri $e^{\pm i\theta}$ olur, burada $\theta = \arccos\left(\frac{T(A)}{2}\right)$ dir.

Örnek 3.3 (3.5) sistemini ele alalım, buradaki $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matris için $T(A) = 0$ ve $D(A) = 2a - 1$ dir. Dolayısıyla a nın değerine göre inceleme yapılmalıdır. a parametresi negatif veya pozitif herhangi bir değer olabileceği için (T, D) noktası $T = 0$ düzlemi boyunca yatay bir şekilde hareket eder. Eğer $D < -1$ ise $2a - 1 < -1$ yani $a < 0$ olur. $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1$ özdeğerlerinden dolayı dejenere durum ortaya çıkar. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla $(0 \ 1)^T$ ve $(1 \ 1)^T$ şeklindedir. Yani, y -eksenindeki bütün noktalar bu durumda sabit noktadır ve her nokta 2-periyodik durumdadır. Özdeğerlerin kritik nokta tanımından $0 < a < \frac{1}{2}$ ise özdeğerler $|\lambda| > 1$ olur ve bu durum kararsız odak noktası oluşturur. $\frac{1}{2} < a < 1$ ise $|\lambda| < 1$ oluşur ve bu durum asimptotik kararlı odak noktasıdır. $a = 1$ olduğu durumda özdeğerler eşlenik kompleks olur ve $|\lambda| = 1$ olduğundan bir merkez ortaya çıkar. Son olarak $a > 1$ ise $|\lambda| > 1$ olduğundan dejenere kaynak oluşur.

3.3.1 Lyapunov yöntemi

1892 yılında Rus matematikçi A.M Lyapunov'un lineer olmayan diferensiyel denklemlerin kararlılığını incelemek için geliştirdiği bu yöntem Lyapunov'un ikinci yöntemi olarak bilinir ve bir diferensiyel denklemin çözümlerinin kararlılığını, denklemin doğrudan çözmeden belirlemek için kullanılır (Bereketoğlu ve Kutay 2012). Bu kesimde Lyapunov ikinci yöntemi iki boyutlu fark denklemleri için incelenmiştir.

$$X(t+1) = \varphi(X(t)) \quad (3.20)$$

fark denklemi ele alınsın, burada $\varphi : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Psi \subset \mathbb{R}^2$ fonksiyonu sürekli ve X^* noktası φ nin sabit bir noktası olsun. $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere V fonksiyonunun değişimi yani,

$$\Delta V(X) = V(\varphi(x)) - V(X)$$

şeklinde tanımlanır (Bereketoğlu ve Kutay 2012). Bu denklem,

$$\Delta V(X(t)) = V(X(t+1)) - V(X(t))$$

şeklinde yazılabilir.

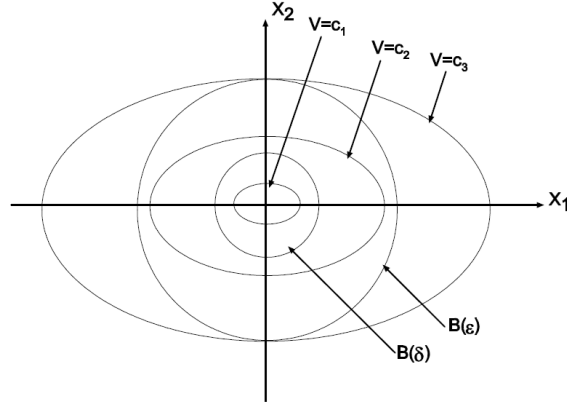
Tanım 3.11 (Kutay 2010) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $V : \Psi \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Ψ bölgesinde bir Lyapunov Fonksiyonu denir.

- (i) V, Ψ üzerinde sürekli.
- (ii) $\Delta V(X) \leq 0$, X ve $\varphi(x) \in \Psi$

Tanım 3.12 (Kutay 2010) $B(x, \gamma) = \{Y \in \mathbb{R}^2 : |Y - X| < \gamma\}$ bir açık yuvar olmak üzere reel değerli bir V fonksiyonuna, aşağıdaki koşulları sağlaması halinde X^* noktasında pozitif tanımlıdır denir:

- (i) $V(X^*) = 0$,
- (ii) $V(X) > 0, \forall X \in B(X^*, \gamma), x \neq X^*$

Teorem 3.5 (Kutay 2010) X^* sabit noktasının bir Ψ komşuluğunda (3.20) denklemi için bir V Lyapunov fonksiyonu olsun.



Şekil 3.13 Seviye eğrileri

- (i) V fonksiyonu X^* noktasında pozitif tanımlı ise, X^* sabit noktası karardlıdır.
- (ii) (i) ye ek olarak $X, \varphi(x) \in \Psi$ için $\Delta V(X) < 0$ ise, X^* noktası asimptotik karardlıdır.
- (iii) $\Psi = \mathbb{R}^2$ ve $\lim_{||X|| \rightarrow \infty} V(X) = \infty$ ise X^* sabit noktası global asimptotik karardlıdır.

Lyapunov fonksiyonlarında $\Delta V(X) = 0$ olduğu durumda sistemin karardlılığı için bir yorum yapılamaz. Bu durumlarda ek olarak LaSalle'nin İnvaryans İlkesi kullanılır (Elaydi 2007). Bu ilke, Lyapunov teoreminin daha genelleştirilmiş bir versiyonudur. V fonksiyonu $\Psi \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanmış Lyapunov fonksiyonu olsun ve

$$E = \{X \in \overline{\Psi} : \Delta V(X) = 0\}$$

tanımlansın. E içindeki maksimal invaryant alt küme M ve $c \in \mathbb{R}^+$ için $V^{-1}(c) = \{X : V(X) = c, X \in \mathbb{R}^2 \text{ olsun.}$

Teorem 3.6 (LaSalle İnvaryans İlkesi)(Elaydi 2007) $V, (3.20)$ sistemi için $\Psi \subset \mathbb{R}^2$ da tanımlı pozitif bir Lyapunov fonksiyonu olsun. O zaman sistemin tüm $t \in \mathbb{Z}^+$ için sınırlı herbir $X(t)$ çözümü için Ψ içinde öyle bir c sayısı vardır ki $t \rightarrow \infty$ iken $X(t) \rightarrow M \cap V^{-1}(c)$ olur.

Sınırlı olmayan bir $X(t)$ çözümü için $t_i \rightarrow \infty$ halinde $\{X(t_i)\} \rightarrow \infty$ olacak şekilde bir $\{X(t_i)\}$ alt dizinin varlığından söz edilebilir. Bu bilgi ışığında kararsızlık hakkında aşığıdaki teorem verilir.

Teorem 3.7 (Kutay 2010) ΔV orijinin bir komşuluğunda pozitif definit ve $a_i = X(t_i)$ iken $V(a_i) > 0$ olacak şekilde bir $\{a_i\} \rightarrow 0$ dizisi varsa sistemin sıfır çözümü kararsızdır.

Örnek 3.4

$$\begin{cases} x(t+1) = \frac{\alpha y(t)}{1+x^2(t)} \\ y(t+1) = \frac{\beta x(t)}{1+y^2(t)} \end{cases} \quad (3.21)$$

sistemini ele alalım. Burada

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{\alpha y(t)}{1+x^2(t)} \quad \frac{\beta x(t)}{1+y^2(t)} \right)^T$$

dır. $V(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $V(X^*) = 0$ ve $V(X) > 0$ olduğundan dolayı Lyapunov fonksiyonudur ve ek olarak tanımdan dolayı pozitif tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &= V(\Phi(x, y)) - V(x, y) \\ &= \frac{\alpha^2 y^2}{(1+x^2)^2} + \frac{\beta^2 x^2}{(1+y^2)^2} - x^2 - y^2 \\ &\leq (\beta^2 - 1)x^2 + (\alpha^2 - 1)y^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. Burada

1. $\alpha^2 < 1$ ve $\beta^2 < 1$ ise $\Delta V < 0$ dır. O halde Teorem 3.2 den orijin asimptotik kararlı olur. Hatta, $\|X\| \rightarrow \infty$ iken $V(X) \rightarrow \infty$ olduğundan orijin global asimptotik kararlıdır.

2. $\alpha^2 \leq 1$ ve $\beta^2 \leq 1$ ise $\Delta V \leq 0$ olup $\Delta V = 0$ olması söz konusudur. Bu durum da LaSalle İnvaryans İlkesi kullanılır.

2.a. $\alpha^2 \leq 1$, $\beta^2 \leq 1$ ve $\alpha^2 + \beta^2 < 2$ olup genelliği kaybetmemek adına $\alpha^2 < 1$ ve $\beta^2 = 1$ olsun. $\Delta V \leq (\alpha^2 - 1)y^2$ olur ve $y = 0$ iken $\Delta V = 0$ olur. $(x, 0) \in E$ için $\varphi(x, 0) = (0, \beta x)$ olur ve $M = \{(0, 0)\}$ dır. Yani orijin kararlıdır.

2.b. $\alpha^2 = 1$ ve $\beta^2 = 1$ olup (3.22) denkleminde $x = 0$ veya $y = 0$ ise $\Delta V = 0$ dır. $E = M$ olup iki eksenin birleşimine eşittir. İnvaryans İlkesi $c > 0$ olacak şekilde bir c sayısının varlığını söyler ve $O^+(u)$ yörüngelerinin herbiri $\{(\pm c, 0), (0, \pm c)\}$ kümesine yaklaşır. $c \neq 0$ için $\Psi^4(c, 0) = (c, 0)$ olup bu nokta $\{(c, 0), (0, \beta c), (\alpha \beta c, 0), (0, \alpha c)\}$ 4-periyot çemberini oluşturur. Benzer şekilde $F^4(c, 0) = \{(c, 0), (0, \beta c), (\alpha \beta c, 0), (0, \alpha c)\}$ 4-periyot çemberi de oluşur. Herbir yörünge bu 4-periyotlulardan sadece birine yaklaşır.

3. $\alpha^2 > 1$ ve $\beta^2 > 1$ olup $\beta^2 > (1 + \delta^2)^2$ ve $\alpha^2 > (1 + \delta^2)^2$ olacak şekilde yeterince küçük δ olsun. $V(x)$ fonksiyonu, $B(0, \delta)$ orijin merkezli, δ yarıçapına sahip olan bir açık yuvardır. Yani, V fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Hatta $(x, y) \in B(0, \delta)$ için $(x, y) \neq (0, 0)$ ise

$$\begin{aligned}\Delta V(x, y) &= \left(\frac{\beta^2}{(1 + y^2)^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{\alpha^2}{(1 + x^2)^2} - 1 \right) y^2 \\ &\geq \left(\frac{\beta^2}{(1 + \delta^2)^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{\alpha^2}{(1 + \delta^2)^2} - 1 \right) y^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

sağlanır ve orijin kararsızdır.

Önceki kesimde

$$X(t + 1) = AX(t) \quad (3.23)$$

sisteminin kararlılığı hakkında bir takım bilgiler verilmişti. Bir sonraki kesimde üzerinde tartışılacak,

$$Y(t + 1) = AY(t) + \psi(Y(t)) \quad (3.24)$$

lineer olmayan dönüşümünü inceleyebilmek için Lyapunov Fonksiyonunu oluşturmak oldukça önemli. Öncelikle Lyapunov fonksiyonu oluşturulması üzerinde durulacaktır.

Öncelikle matrisler hakkında bazı bilgiler verilsin.

$$V(X) = X^T B X = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} X_i X_j \quad (3.25)$$

olsun, burada $B = (b_{ij})$, $X \in \mathbb{R}^2$, ve X^T , X matrisinin transpozudur. (3.25) denkleminde tanımlanan $V(x)$, pozitif ise B matrisinin de pozitif olduğu söylenebilir. Aynı şekilde negatiflik durumu da belirtilebilir. Burada $0 \neq X \in \mathbb{R}^2$ şeklinde olmalıdır. Eğer $V(X) \geq 0$ ise pozitif yarı tanımlıdır. Benzer şekilde $V(X) \leq 0$ ise B matrisi negatif tanımlıdır (Kutay 2010).

Teorem 3.8 (Sylvester Kriteri) (Bereketoğlu ve Kutay 2012) Reel simetrik bir B matrisinin pozitif tanımlı olmasındaki gerek ve yeter koşul B matrisinin bütün esas asli minörlerinin determinantlarının pozitif olmasıdır.

Yani, $\beta_{11} > 0$ ve $\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0$ olmasını demek B matrisinin pozitif tanımlı olduğunu söyler.

Ek olarak $V(X) \leq 0$ ifadesinden dolayı eğer $\beta_{11} < 0$ ve $\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0$ ise V negatif tanımlıdır.

Teorem 3.9 (Bereketoğlu ve Kutay 2012) Reel simetrik bir B matrisi pozitif tanımlı ise bu durumda B matrisinden gelen bütün özdeğerler pozitifdir. B matrisinin özdeğerleri λ_1 ve λ_2 olmak üzere

$$\lambda_{\min} \|X\|^2 \leq V(X) \leq \lambda_{\max} \|X\|^2$$

dir, burada $\lambda_{\min}$ en küçük özdeğeri temsil ederken $\lambda_{\max}$ en büyük özdeğeri temsil eder.

Örnek 3.5 $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ olsun. Bu matrisin ana minörleri 3 ve $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ olmak üzere iki tanedir ve ikisi de pozitifdir yani B matrisi pozitif tanımlıdır. B matrisinin özdeğerleri de $\lambda_{1,2} = 4 \mp \sqrt{5}$ olup ikisi de pozitifdir. Ayrıca, eğer $V(X) = X^T B X$ olduğundan

$$\begin{aligned} V(X) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \end{aligned}$$

olur.

B pozitif tanımlı simetrik bir matris ise Lyapunov fonksiyonu olması için

$$V(X) = X^T B X$$

seçilebilir. (3.23) sistemin için (X) hesaplandığında

$$\begin{aligned} \Delta V(X(t)) &= X^T(t+1) B X(t+1) - X^T(t) B X(t) \\ &= X^T(t) (A^T B A - B) X(t) \end{aligned}$$

olup, $\Delta V(X(t)) < 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$A^T B A - B = -C \tag{3.26}$$

olmasıdır, burada C pozitif tanımlıdır. (3.23) sistemi için (3.26) denklemi Lyapunov denklemi olarak adlandırılır.

Teorem 3.10 (Kutay 2010) $\rho(A) < 1$ olması için gerek ve yeter koşulu pozitif tanımlı ve simetrik C matrisine karşılık (3.26) denkleminin bir tek pozitif tanımlı ve simetrik B matrisine sahip olmasıdır. Burada $\rho(A)$, A nın spektral yarıçapıdır.

Sonuç 3.2 Eğer $\rho(A) > 1$ ise pozitif tanımlı olmayan reel simetrik bir B matrisi bulunur öyle ki (3.23) sisteminden simetrik pozitif tanımlı C matrisi elde edilebilir.

3.3.2 Lineerleştirme yöntemi

Lineerleştirme, kararlılık teorisi açısından oldukça eskiye dayanan bir yöntemdir. Bu yöntem ilk kez Lyapunov ve Perron tarafından diferensiyel denklemlerin kararlılık karını çözümlmek için yapılan bazı çalışmalarda kullanılmıştır (Kutay 2010). Bu kısımda ise lineer olmayan fark denklem sistemlerine uygulaması gösterilecektir. lineer olmayan

$$X(t+1) = AX(t) + \psi(t, X(t)) \quad (3.27)$$

fark denklemi ele alınsın, burada A matrisi $k \times k$ türünde olup $\phi : \Psi \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sürekli bir fonksiyondur. (3.27) denkleminin lineer sistem

$$Y(t+1) = AY(t) \quad (3.28)$$

dir. (3.27) sistemi, X^* sabit noktası etrafında

$$X(t+1) = \varphi(t, X(t)) \quad (3.29)$$

şeklinde bir denklemin lineerleştirilmesi ile elde edilir, burada φ fonksiyonu X^* sabit noktasında sürekli türevlenebilen $\varphi : C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ şeklinde bi fonksiyondur (Kutay 2010). Yani, φ fonksiyonu için $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ mevcut ve X^* sabit noktasının açık bir komşuluğunda süreklidir. $\varphi = (\varphi_1 \ \varphi_2)^T$ nin Jakobiyesi

$$D\varphi(Q) = A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_Q$$

dir.

Kısalık için $X^* = 0$ ve her $t \in \mathbb{N}$ için $\varphi(t, 0) = 0$ olup lineerleştirme için (3.29) sistemi ele alınsın. Yine kısalık için $\frac{\partial \varphi(t, 0)}{\partial x} = A(t)$ ve $\psi(t, x) = \varphi(t, x) - A(t)X(t)$ olarak alınırsa (3.29) sistemi (3.27) sistemi biçiminde yazılabilir (Kutay 2010). (3.29) sisteminin özel bir durumu olan

$$X(t+1) = \varphi(X(t))$$

otonom sistemi,

$$X(t+1) = AX(t) + \psi(X(t))$$

şeklinde yazılabilir, burada $A = \varphi'(0)$ jakobiye matris olup $\psi(x) = \varphi(x) - x$ dir. $A = D\varphi(X^*)$ için Teorem 3.2 aynen tekrar yazılır.

Örnek 3.6

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + x_2^2(t) + x_1^2(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) \end{cases}$$

sistemi ele alınsın. Bu sistemin lineer kısmı

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

dir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup $(0, 0)$ sisteminin bir sabit noktasıdır ve $\rho(A) = 1$ dir. Lyapunov fonksiyonu $V(X) = x_1 + x_2$ olarak seçilsin. Bu fonksiyon için

$$\begin{aligned} \Delta V(X(t)) &= V(\Phi(x_1, x_2)) - V(x_1, x_2) \\ &= x_1 + x_1^2 + x_2^2 + x_2 - x_1 - x_2 \\ &= x_1^2(t) + x_2^2(t) > 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

olduğundan $V(X)$ pozitif tanımlıdır ve X^* sabit noktası kararsızdır.

Örnek 3.7 Şimdi,

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) - x_1^3(t) + x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) \end{cases}$$

sistemi ele alınsın. Buradaki lineer kısım bir önceki örnekle aynıdır ve yine $\rho(A) = 1$ dir.

Lyapunov fonksiyonu $V(X) = x_1^2 + x_2^2$ olarak alınsın. Bu fonksiyon için

$$\begin{aligned} \Delta V(X(t)) &= V(\Phi(x_1, x_2)) - V(x_1, x_2) \\ &= (x_1 - x_1^3 x_2^2)^2 + x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_1^4(t) x_2^2(t) [-2 + x_1^2(t) x_2^2(t)] > 0, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

olup $x_1^2 x_2^2 < 2$ ise $\Delta V \leq 0$ olur. Yani V fonksiyonu negatif tanımlıdır ve X^* sabit noktası kararlıdır.

4. ÇATALLANMA TEORİSİ

Çatallanma teorisi, dinamik sistemdeki parametreler üzerinde yapılan değişikliklerden meydana gelen davranış olarak betimlenir (Farris ve Hamdi 2023). Örneğin, öncesinde kararlı bir yapıda bulunan sabit nokta bir süre sonra kararlılığını yitirebilir. Bazı durumlarda bu değişim sonucunda oluşan çatallanmalar, sistemin kaotik davranışlar oluşturmaya sebep olur. Çatallanma teorisi, kaosu araştırılmasında önemli bir araçtır. Kaosu anlamak, öncelikle çatallanma diyagramlarını okuyabilmekten geçer.

Çatallanma teorisinin geçmişi çok önceye dayanmaktadır. David Hilbert ile Émile Picard, belirli diferansiyel denklemlerin çözümlerine ilişkin çalışmalar yaparak çatallanma teorisinin temellerine önemli katkılar sağlamıştır (Farris ve Hamdi 2023). Bu alanın en önemli isimlerden biri, dinamik sistemlerin davranışını inceleyen Henri Poincaré ve dinamik sistemlerde periyodik yörüngelerin çatallanmalarını araştıran Andrey Markov'dur (Farris ve Hamdi 2023). 1970'lerde bazı matematikçiler merkez manifold teoremi gibi yeni teknikler geliştirerek çatallanma teorisinin ilerlemesine önemli katkılarda bulunmuşlardır (Farris ve Hamdi 2023).

Günümüzde çatallanma teorisinin, fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi pek çok alanda uygulamaları bulunmaktadır. René Thom (1972) yaptığı bir çalışmayla, lineer olmayan sistemlerin parametre değişimiyle nasıl ani davranış değişiklikleri gösterebileceğini açıklamıştır. Bu çalışma çatallanma teorisinin gelişiminde son derece etkili olmuş, lineer olmayan sistem davranışının anlaşılması ve sınıflandırılması için yeni bir bakış açısı sağlamıştır (Farris ve Hamdi 2023).

4.1 Çatallanma Türleri

Çatallanma türleri, r parametresi değiştikçe

$$x(t+1) = \varphi(x(t), r) \quad (4.1)$$

sisteminin dinamiklerinin nasıl değiştiğine bağlı olarak ortaya çıkar. (4.1) sisteminin r parametresine olan bağımlılığı $x(r)$ olsun. Sistemin davranışı r parametresi değiştikçe farklılık gösterir ve bu farklılıklar ortaya çatallanmaları çıkarır (Allen 2007).

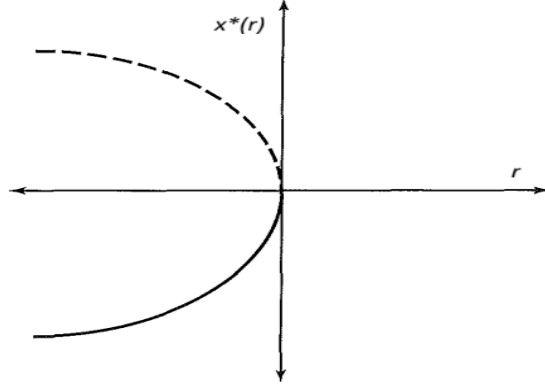
Çatallanma türleri r parametresine bağlı olduğundan $(r, x(r))$ noktası çatallanma noktası olarak adlandırılır. Bu çatallanmaların ortaya çıkmasında sabit noktanın non-hiperbolik olmasıyla bir ilgisi vardır. $\varphi'(x^*(r^*)) = \pm 1$ olduğunda (4.1) sistemi için dört farklı çatallanma türü, yani $\varphi'(x^*(r^*)) = 1$ ise Semer-Düğüm, Dirgen (Pitchfork) ve Transkritik çatallanmaları oluşurken, $\varphi'(x^*(r^*)) = -1$ ise Flip (Period-Doubling) çatallanması oluşur (Allen 2007).

Bu çatallanmalar, grafik üzerinde gösterilirken dikey eksen r parametresini, yatay eksen de sabit noktayı veya döngüleri temsil eder. Tüm grafiklerde $(0, x(0)) = (0, 0)$ başlangıç noktası çatallanma noktasıdır. Şimdi bu çatallanmaları ayrı ayrı ele alalım:

- (i) Semer-Düğüm çatallanmasında, çatallanma noktasından sonra biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki sabit nokta da kaybolur ve sonrasında sabit nokta bir anda tekrardan var olur (Şekil 4.1). Bundan dolayı bu çatallanma türü mavi gökyüzü çatallanması olarak da tasvir edilir (Strogatz 2014). Bu çatallanmanın kanonik formu

$$x(t+1) = r + x(t) + x^2(t)$$

şeklinde verilir (Allen 2007).



Şekil 4.1 Semer-Düğüm çatallanma

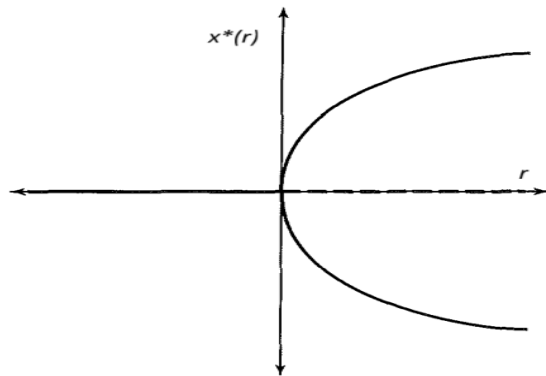
(ii) Dirgen çatallanmasında, çatallanma noktasından sonra üç tane sabit nokta ortaya çıkar (Şekil 4.2). Bu üç sabit noktanın durumuna göre bu çatallanmada iki farklı durumu vardır:

- (a) Bu üç sabit noktadan ikisi kararlı olup bir tanesi kararsız oluyorsa ve bu kararlı noktalar kararsız tarafından ayrılıyorsa süperkritik-dirgen çatallanma oluşur.
- (b) Bu üç sabit noktadan ikisi kararsız olup bir tanesi kararlı oluyorsa ve bu kararsız noktalar kararlı tarafından ayrılıyorsa subkritik-dirgen çatallanma oluşur.

Bu çatallanmanın kanonik formu

$$x(t+1) = (r+1)x(t) + x^3(t)$$

şeklinde verilir (Allen 2007).

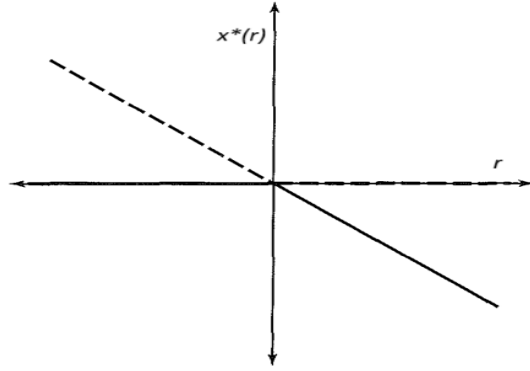


Şekil 4.2 Dirgen çatallanma

- (iii) Transkritik çatallanmada biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki tane sabit nokta bulunur. Çatallanma bu iki sabit noktanın kararlılıklarının birbiriyle değişirmesi sonucunda ortaya çıkar. Yani, kararlı nokta kararsız olurken kararsız nokta kararlı hale dönüşür (Şekil 4.3). Bu çatallanmanın kanonik formu

$$x(t+1) = (r+1)x(t) + x^2(t)$$

dir (Allen 2007).



Şekil 4.3 Transkritik çatallanma

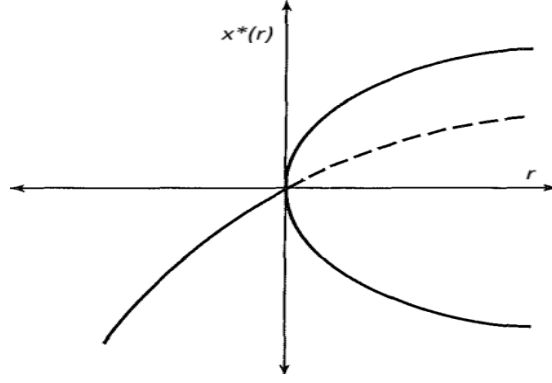
- (iv) Flip çatallanmasında, sabit nokta çatallanma noktasından sonra yerini 2-periyotlu yörüngeye bırakır (Şekil 4.4). Burada sabit noktanın kararlılık durumuna göre iki farklı durumu vardır:

- (a) Başlangıçta sabit nokta kararlı olup yerini kararsız 2-periyotlu noktaya bırakıyorsa süperkritik-flip çatallanması oluşur.
- (b) Başlangıçta sabit nokta kararsız olup yerini kararlı 2-periyotlu noktaya bırakıyorsa subkritik-flip çatallanması oluşur.

Bu çatallanmanın kanonik formu

$$x(t+1) = r - x(t) - x^2(t)$$

olarak verilir (Allen 2007).



Şekil 4.4 Flip çatallanma

Şimdi iki boyutlu

$$\begin{cases} x \mapsto Ax + \varphi(x, y) \\ y \mapsto Bx + \psi(x, y) \end{cases} \quad (4.2)$$

sistemini ele alalım. Jakobiye matris $J = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ olmak üzere A matrisinin tüm özdeğerleri birim çember üzerinde olup B matrisinin özdeğerleri birim çember dışındadır. (4.2) sistemi

$$\begin{cases} x(t+1) \mapsto Ax(t) + \varphi(x(t), y(t)) \\ y(t+1) \mapsto Bx(t) + \psi(x(t), y(t)) \end{cases}$$

fark denklem sistemine özdeşdir, burada $t+s = k$ olmak üzere A matrisi $t \times t$ türünde ve B matrisi de $s \times s$ türünde bir matris olarak kabul edilmiştir. (4.2) sisteminin kararlılık durumu Jakobiye matrisin özdeğerleri hiperbolik olduğunda yani $\lambda < 1$ iken sistem kararlı, $\lambda > 1$ iken sistem kararsız olur. Fakat $|\lambda| = 1$ ise kararlılık hakkında bir yorum yapılabilmesi için Merkez Manifold Teoremi'nin kullanılması gerekir (Elaydi 2007)

Teorem 4.1 (Carr 1981) (4.2) sisteminin merkez manifoldu yeterince küçük bir λ için

$$M_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \lambda, \vartheta(0) = 0, D\vartheta(0) = 0\} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu manifold yardımıyla (4.2) sistemi yerine bir boyutlu

$$x \longmapsto Ax + \varphi(x, \vartheta(x)), \quad x \in \mathbb{R}^t \quad (4.4)$$

sistemi incelenebilir. Aşağıdaki teoremden bu durum açıklanmıştır.

Teorem 4.2 (Carr 1981) Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) (4.4) denkleminin $(0, 0)$ sabit noktası kararlı ise, o zaman (4.2) sisteminin (x^*, y^*) sabit noktası da kararlıdır. Aynı durum asimptotik kararlılık ve kararsızlık için de geçerlidir.

(ii) (4.2) sisteminin orijin etrafındaki küçük bir komşuluğunda bulunan (x_0, y_0) başlangıç noktası ile birlikte herhangi $(x(t), y(t))$ çözümü olsun. (4.4) denkleminin bir çözümü $z(t)$ olup tüm $n \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki ifade sağlanır.

$$|x(t) - z(t)| \leq L\beta^n \text{ ve } |y(t) - \vartheta(z(t))| \leq L\beta^n$$

burada $L > 0$ ve $\beta > 1$ dir.

M_C merkez manifoldunu nasıl bulunacağı veya $y = \vartheta(x)$ eğrisini nasıl hesaplanacağı kolay bir problem değildir. Akla gelen ilk çözüm (4.2) sisteminden

$$x(t+1) = Ax(t) + \varphi(x(t), \vartheta(x(t)))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \vartheta(x(t+1)) \\ &= \vartheta[Ax(t) + \varphi(x(t), \vartheta(x(t)))] \\ &= B\vartheta(x(t)) + \psi(x(t), \vartheta(x(t))). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} x(t+1) \longmapsto Ax(t) + \varphi(x(t), \vartheta(x(t))) \\ y(t+1) \longmapsto B\vartheta(x(t)) + \psi(x(t), \vartheta(x(t))) \end{cases}$$

sistemi elde edilir. $y(t+1)$ için iki denklemi eşitlenirse,

$$\mathcal{F}(\vartheta(x)) = \vartheta[Ax + \varphi(x, \vartheta(x))] - B\vartheta(x) - \psi(x, \vartheta(x)) = 0 \quad (4.5)$$

fonksiyonel denklemi elde edilir.

Teorem 4.3 (Elaydi 2007) $\psi : \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^s$ ve $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ olsun ve bazı $r > 1$ için $x \rightarrow 0$ iken $\Phi(\psi(x)) = O(|x|^r)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\vartheta(x) = \psi(x) + O(|x|^r), \quad (x \rightarrow 0 \text{ iken})$$

dir.

Şimdi M_C merkez manifoldunun hesaplanması bir örnekle gösterilsin:

Örnek 4.1 $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ dönüşümü

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. Buradan merkez manifold,

$$M_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \vartheta(x), \vartheta(0) = h'(0) = 0\}$$

olarak yazılabilir. Buradaki ϑ fonksiyonu (4.5) den

$$\vartheta(Ax + \varphi(x, \vartheta(x))) - B\vartheta(x) - \psi(x, \vartheta(x)) = 0$$

olacak şekilde belirlenmelidir. Bu denklem

$$\vartheta(-x + x\vartheta(x)) + \frac{1}{2}\vartheta(x) - x^2 = 0 \quad (4.6)$$

dir. $\vartheta(x)$ fonksiyonunun,

$$\vartheta(x) = c_1x^2 + c_2x^3 + O(x^4) \quad (4.7)$$

olduğu kabul edilsin. (4.7) denklemi (4.6) denkleminden çıkarılırsa

$$c_1x^2 - c_2x^3 + O(x^4) + \frac{1}{2}(c_1x^2 + c_2x^3 + O(x_4)) - x^2 = 0$$

elde edilir. Buradan $c_1 = \frac{2}{3}$ ve $c_2 = 0$ bulunur. Sonuç olarak, $\vartheta(x) = \frac{2}{3}x^2 + O(x^4)$ denklemi ve φ dönüşümünün merkez manifoldu,

$$x \longmapsto -x + \frac{2}{3}x^3 + O(x^5) \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir. (4.8) denklemin 0 noktasındaki Schwarzian türevi

$$S(\varphi)(0) = \frac{\varphi'''(0)}{\varphi'(0)} - \frac{2}{3} \left(\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)} \right)^2 = -4 < 0$$

dir. O halde Teorem 2.4 den (4.8) in $x^* = 0$ noktası φ dönüşümü altında asimptotik karardır. Teorem 4.2 de orijinin $\Phi(\varphi, \psi)$ dönüşümü altında asimptotik kararlı olduğunu söyler.

Şimdi μ parametresinin olduğu sistemleri ele alalım. Bu durumda (4.2) sistemi $\mu \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + \varphi(\mu, x(t), y(t)) \\ y(t+1) = By(t) + \psi(\mu, x(t), y(t)) \end{cases} \quad (4.9)$$

şeklinde olur, φ ve ψ , $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ komşuluğunda olan C^r fonksiyonları ($r \leq 3$) olup

$$\varphi(0, 0, 0) = 0, \quad \psi(0, 0, 0) = 0$$

$$D\varphi(0, 0, 0) = 0, \quad D\psi(0, 0, 0) = 0$$

dır. C^r notasyonu, bir fonksiyonun türevlenebilirlik derecesini belirttiğinden dolayı (4.9) denklemi için parametre sayısı ile denklem sayısı birbiriyle uyumlu olmalıdır.

Yani denklem sayısının $k + m$ ye yükseltilmesi gerekir. Bunun için de,

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + \varphi(\mu(t), x(t), y(t)) \\ \mu(t+1) = \mu(t) \\ y(t+1) = By(t) + \psi(\mu(t), x(t), y(t)) \end{cases} \quad (4.10)$$

olsun. Buradan M_C merkez manifoldu

$$M_C = \{(\mu, x, y) : y = \vartheta(x, \mu), |x| < \lambda_1, |\mu| < \lambda_2, \vartheta(0, 0, 0) = 0, D\vartheta(0, 0) = 0\} \quad (4.11)$$

olarak yazılır, burada λ_1 ve λ_2 sistemin özdeğerleridir.

$$x(t+1) = Ax(t) + \varphi(\mu(t), x(t), \vartheta(x(t)))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \vartheta[Ax(t) + \varphi(\mu(t), x(t), \vartheta(x(t)))] \\ &= B\vartheta(\mu, x(t)) + \psi(\mu, x(t), \vartheta(\mu, x(t))). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} x(t+1) \mapsto Ax(t) + \varphi(x(t), \vartheta(x(t))) \\ y(t+1) \mapsto B\vartheta(\mu, x(t)) + \psi(\mu, x(t), \vartheta(\mu, x(t))) \end{cases}$$

sistemi elde edilir.

$$\mathcal{F}(\vartheta(\mu, x)) = \vartheta[Ax + \varphi(\mu, \vartheta(\mu, x), x)] - B\vartheta(\mu, x) - \psi(\mu, \vartheta(\mu, x), x) = 0$$

fonksiyonel sistemi elde edilir (Elaydi 2007). Merkez manifold teoremi ile elde edilmiş (4.4) denklemi hakkında yorum yapılabilmesi için Jakobiye matris incelenmelidir.

1) $\lambda = 1$, J nin bir özdeğeri olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir (Kuznetsov 2004).

- a) $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$ ve $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \mu}(0, 0) \neq 0$ ise o zaman Semer - Düğüm çatallanması elde edilir.
- b) $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(0, 0) = 0$ ve $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \mu}(0, 0) = 0$ ise o zaman Dirgen çatallanması elde edilir.
- c) $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(0, 0) = 0$ ve $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \mu}(0, 0) \neq 0$ ise o zaman Transkritik çatallanması elde edilir.

2) $\lambda = -1$, J nin bir özdeğeri olsun. Bu durumda Flip çatallanması (period-doubling) elde edilir (Kuznetsov 2004).

3) J nin özdeğeri modülleri 1 olacak şekilde eşlenik kompleks kökler ise, o zaman Neimark-Sacker çatallanması elde edilir (Kuznetsov 2004). Bu çatallanmanın normal formu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

dir, burada α sistemin parametresi olup; $\theta = \theta(\alpha)$, $a = a(\alpha)$ ve $b = b(\alpha)$ düzgün fonksiyonlardır ve $0 < \theta(0) < \pi$, $a(0) \neq 0$ dır (Kuznetsov 2004). Bu çatallanma subkritik ve süperkritik olmak üzere iki alt çatallanması vardır.

- (a) Çatallanma noktasında ortaya çıkan invaryans eğri kararsızsa subkritik Neimark-Sacker çatallanması oluşur.
- b) Çatallanma noktasında ortaya çıkan invaryans eğri kararlıysa süperkritik Neimark-Sacker çatallanması oluşur.

Şimdi bu çatallanmayı bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 4.2

$$\Phi_\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1 + \mu - x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

şeklindeki Φ dönüşümünü ele alalım, burada $\beta = \beta(\mu)$, μ parametresinin düzgün fonksiyonu ve $0 < \beta(0) < \pi$ dir. Orijin bu dönüşüm ailesinin sabit noktası olmak üzere, bu dönüşümün $(0, 0)$ daki Jakobiyen matrisi

$$J = (1 + \mu) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

J matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = (1 + \mu)e^{\pm i\beta}$ olup $|\lambda_{1,2}| = |1 + \mu|$ dir. Öyleyse, $\mu = 0$ olduğunda özdeğerler birim çember üzerinde olup Neimark-Sacker çatallanması oluşur. $-2 < \mu < 0$ için $(0, 0)$ asimptotik kararlıdır çünkü asimptotik kararlılık için λ değerinin 1 den küçük olması gerekir ve bu aralık için $|\lambda| < 1$ koşulu sağlanır. Neimark-Sacker çatallanmasının analizi için Φ_μ dönüşümünü polar koordinatlarda yazalım. Bunun için

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = (1 + \mu - x_1^2(t) + x_2^2(t)) \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

iki boyutlu fark denklem sistemini ele alalım. (4.14) denkleminde $x_1(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $x_2(t) = r(t) \sin \theta(t)$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} r(t+1) = (1 + \mu)r(t) - r^3(t) \\ \theta(t+1) = \theta(t) + \beta \end{cases} \quad (4.15)$$

sistemi elde edilir. (4.15) denkleminin formu $(1 + \mu)r - r^3$ ifadesiyle beraber invaryant bir yuvar oluşturur. Bu invaryant yuvarın yarıçapı $r^* = \sqrt{\mu}$ olup $\mu = 0$ olduğunda $r \mapsto r - r^3$ dönüşümü bir boyutlu hale gelir ve kararlılık bir boyutlu dönüşümlerde olduğu gibi ele alınır. $\mu = 0$ için orijin asimptotik kararlıdır. $\mu > 0$ olduğunda orijin kararlılığını kaybeder ve yarıçapı $r = \sqrt{\mu}$ olan (asimptotik kararlı) çekici bir yuvar ortaya çıkar. Bu yuvarın dinamikleri $\theta \mapsto \theta + \beta$ dönüşümü ile tanımlanır. Bu olgu Neimark-Sacker çatallanması olarak adlandırılır (Kuznetsov 2004).

5. KAOS

"Kaos" kelimesi, Antik Yunanca " $\chi\alpha\omicron\varsigma$ " (khaos) sözcüğünden türetilmiş olup kelimenin kök anlamı “boşluk”, “uçurum” veya “geniş açıklık” anlamına gelmektedir (Liddell ve Scott 1996). Yunanca khaos fiili olan " $\chi\alpha\iota\nu\omega$ " (khaino) “esnemek, açılmak, yarılmak” anlamlarını taşır ve bu fiilden türetilen kaos, başlangıçta fiziksel bir boşluğu veya açıklığı ifade etmiştir (Chantraine 1968). Türkçeye bu kelime, Fransızca üzerinden girmiş ve “düzensizlik, karmaşa, kargaşa” anlamlarında kullanılmaya başlanmıştır.

Kaos Teorisi kavramını eski Yunan ve Çin medeniyetleri zamanına kadar götürmek mümkün olsa da bu teoriyi etkilen önemli çalışmalar 19. yüzyılda Fransız matematikçi Henri Poincaré tarafından limit döngüsü ve denge noktası kavramlarını bulunarak yapılmıştır (Gökmen 2009). Sonrasında Robert May başta olmak üzere birçok matematikçi tarafından önemli çalışmalar yapılmış olup May (1976), karmaşık dinamiklerin basit denklemler ile temsil edilebildiğini ortaya koyarak kaos teorisinin önünü açmıştır.

Kaos teorisinin kelime anlamı, deterministik ve belirleyici, lineer olmayan, dinamik sistemlerdeki istikrarsız davranışların niteliksel çalışması olarak açıklanabilir. Lineer sistemlerin çevreleri ile ilişkileri ve davranışları öngörülebilir, bu öngörüler de modeller ile ifade edilebilir olsa da kaotik sistemlerde işler tamamen farklıdır. Kaotik sistemler içinde sistem davranışı ve çevre ile etkileşimi belirsizdir. Yani bir sonraki adımda ne olacağı öngörülemez. Periyodik süreçler aniden değişime uğrayabilir, belirli davranışları kaybolabilir ve öncekinden bağımsız başka davranışlar ortaya çıkarabilir (Gökmen 2009).

Kaotik sistemlerin temeli olan lineer olmayan sistemlerin ortak özellikleri başlangıç koşullarına olan hassasiyetleridir. Yani, başlangıç koşullarındaki en ufak değişiklik bu sistemler üzerinde çok büyük değişimlere yol açar ve başlangıçtaki sistem ile yeni

sistem arasında hiçbir benzerlik kalmaz. Bu konu hakkında birçok matematikçi görüş belirtmiş olsa da bu tez kapsamında Devaney (1986) tanımı ele alınacaktır.

Devaney'in kaos tanımı üç bileşenden oluşur; periyodik noktalar kümesinin yoğunluğu, geçişlilik ve başlangıç koşullarına olan duyarlılık. Aşağıda bunların her biri ayrıntılı olarak incelenmektedir: İlk olarak periyodik noktalar kümesinin yoğunluğunu ele alalım. Kaosun temel yapı taşlarından biri olan periyodik noktalar ve bunların oluşturduğu kümelerin yoğunluğu oldukça önemlidir.

Tanım 5.1 (Elaydi 2007) $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için x noktasını içeren herhangi bir açık aralık bir A kümesi ile kesişiyorsa o halde bu A kümesine I aralığında yoğundur denir. Yani her $\delta > 0$ için $J = (x - \delta, x + \delta)$ açık aralığı A kümesinden bir noktayı içerir.

Örneğin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ de yoğundur çünkü herhangi iki reel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır ve reel sayıya ne kadar yaklaşılsa yaklaşılsın başka rasyonel sayılar da bulunabilir.

Örnek 5.1

$$C(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Çadır dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümün $[0, 1]$ aralığında yoğun olduğunu göstermek için öncelikle sabit noktaları bulmak gerekir. $C(x)$ in sabit noktaları $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = \frac{2}{3}$ olmak üzere iki tanedir. $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$ rasyonel sayılarını ele alalım. Buradan

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{3} \text{ nihai sabit nokta}$$

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1 \rightarrow 0; \quad \frac{1}{4} \text{ nihai sabit nokta}$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1 \rightarrow 0; \quad \frac{3}{4} \text{ nihai sabit nokta}$$

$$\frac{1}{5} \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{2}{5}; \quad \frac{1}{5} \text{ nihai 2-periyodik}$$

$$\frac{2}{5} \rightarrow \frac{4}{5}; \quad \frac{2}{5} \text{ 2-periyot}$$

$$\frac{3}{5} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{2}{5}; \quad \frac{3}{5} \text{ nihai 2-periyodik}$$

$$\frac{4}{5} \rightarrow \frac{2}{5}; \quad \frac{4}{3} \text{ 2-periyot}$$

elde edilir. Bu örüntüye bakıldığında $\frac{r}{2^k}$ formunun nihai sabit noktalar olduğu açıkça görülmektedir. Bununla birlikte, s tek sayı olacak şekilde $\frac{r}{s}$ formu oluşturulduğunda r sayısı tekse nihai periyodiklik oluşurken, r sayısı çift olduğunda sadece periyodiklik oluşmaktadır.

Geçişlilik özelliğine bakacak olursak aşağıdaki topolojik geçişlilik tanımı ile başlayalım.

Tanım 5.2 (Devaney 1986) Eğer her bir $J_1, J_2 \subset I$ açık küme çiftleri için $\varphi^k(J_1) \cap J_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde $k > 0$ sayısı varsa $\varphi : I \rightarrow I$ ye topolojik geçişlidir denir.

Bu tanıma göre iki açık aralık arasındaki ilişki, bir dönüşümün iterasyonu ile belirlenebilir. J_1 ve J_2 aralıklarını I aralığının açık alt kümeleri olan U_1 ve U_2 ile değiştirmek mümkündür. Burada dikkat edilmesi gereken kısım ele alınan açık kümelerin, açık aralıkların birleşimi olduğudur.

Sezgisel olarak topolojik geçişli bir dönüşüm, keyfi olarak küçük bir komşuluktan diğerine belli bir iterasyon altında nihai olarak hareket eden noktalar içerir. Yani I aralığı içinde herhangi bir nokta I üzerinde her yere dağılır ve yörünge I aralığındaki başka bir noktaya yeterince yaklaşır. Bu nedenle, dinamik sistem dönüşümleri altında değişmeden kalan iki ayrık açık küme birbirinden ayrılamaz. Eğer bir dönüşüm yoğun bir yörüngeye sahipse, o zaman açıkça topolojik olarak geçişlidir (Devaney 1986).

Teorem 5.1 (Elaydi 2007) $\varphi : I \rightarrow I$ olacak şekilde eğer I aralığının içinde yoğun bir yörünge varsa o halde φ dönüşümü geçişlidir denir.

İspat. $a \in I$ noktasının yörüngesi yoğun olmak üzere U ve V kümeleri I aralığında herhangi iki boş olmayan açık küme olsun. $\varphi^r(a) \in U$ ve $\varphi^s(a) \in V$ koşullarını

sağlayan r ve s tam sayıları vardır. $b = \varphi^r(a)$ ve $c = \varphi^s(a)$ olacak şekilde $k = s - r \geq 0$ olarak kabul edilsin. O zaman $\varphi^k(b) = \varphi^{s-r}(\varphi^r(a)) = \varphi^s(a) = c$ olur. Sonuç olarak $\varphi^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olarak görülür. ■

Kaotik sistemlerin temel özelliklerinden birinin de başlangıç koşullarına duyarlı olması olduğundan söz edilmişti. Aşağıda duyarlılığın tanımı verilmiştir.

Tanım 5.3 (Devaney 1986) Herhangi bir $x_0 \in I$, $\delta > 0$ ve $y_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ için

$$|\varphi^k(x_0) - \varphi^k(y_0)| \geq v$$

olacak şekilde bir $v > 0$ varsa I aralığında tanımlı bir φ dönüşümüne başlangıç koşullarına duyarlıdır denir.

Sezgisel olarak, eğer φ dönüşümünün belli bir iterasyon altında x noktasına yeterince yakın noktalar mevcutsa ve bu noktaların x noktasından en az δ kadar uzaklaştığı bazı durumlar bulunabiliyorsa o dönüşüm başlangıç koşullarına karşı duyarlıdır. Burada x noktasının komşuluğundaki bütün noktaların yörüngesi x noktasının yörüngesinden ayrılmak zorunda değildir fakat x noktasının her bir komşuluğunda en az bir tane nokta vardır (Devaney 1986). Duyarlılığa sahip en basit fonksiyon, lineer dönüşüm olan $c > 1$ olacak şekilde $\varphi(x) = cx$ dönüşümüdür. Başlangıç noktaları x_0 ve $x_0 + \delta$ için,

$$\varphi^n(x_0 + \delta) - \varphi^n(x_0) = c^n(x_0 + \delta) - c^n x_0 = c^n \delta$$

$|\varphi^n(x_0 + \delta) - \varphi^n(x_0)|$ ifadesi $n \rightarrow \infty$ için δ ne kadar küçük olursa olsun sonsuza doğru artacaktır. Ancak bu lineer dönüşüm o kadar da ilginç bir örnek değildir. Çünkü kaos açısından geçişlilik ve periyodik noktaların yoğunluğu özelliklere sahip değildir. Sistem, başlangıç koşullarına duyarlıysa, bu dönüşüm nümerik hesaplamaya direnç gösterir ve yuvarlama hataları sebebiyle ortaya çıkan küçük hatalar zaman ilerledikçe büyür. Bu yüzden de nümerik hesaplamalar her ne kadar doğru gibi gözüксе de başlangıçta sistemle hiçbir alakalı kalmaz. Bu durumda Lyapunov üsteli sistem hakkında yorumlama yapılmasında olanak sağlar. Lyapunov üsteli, bir sistemdeki komşu yörüngelerin birbirinden ne kadar hızlı bir şekilde uzaklaştığını gösterir. Yani, sistem içerisinde başlangıçta birbirine çok yakın olan yörüngeler bir süre

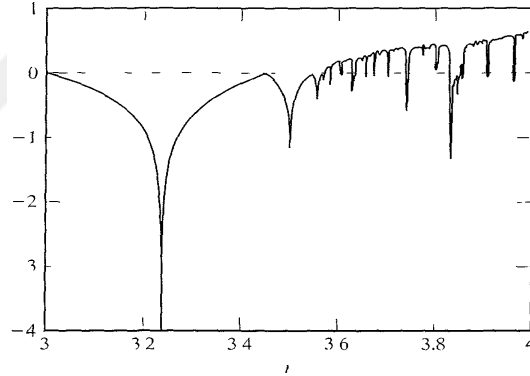
sonra birbirinden uzaklaşacaklardır. Lyapunov üstelinin 1 sayısından büyük olması da periyodiklikten uzaklaşan yörüngelerini söyler (Alligood vd 1996). x_0 noktası

$$x(t+1) = \varphi(x(t))$$

fark denkleminin başlangıç noktası olsun. Lyapunov üsteli

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |[\varphi^n(x_0)]'|. \quad (5.1)$$

olarak tanımlanır (Allen 2007). Logaritma değeri pozitifse, sistem başlangıç koşullarına karşı duyarlıdır denir ve bu değer ne kadar büyürse hata oranı da o kadar fazla olur. Lyapunov üstelinin bu kadar önemli olmasının başlıca sebebi periyodik olmayan yörüngelere de uygulanabilmesidir (Alligood vd 1996). Örnek 2.1 de verilen (2.6) Lojistik denklemi ele alınıp $x_0 = \frac{1}{2}$ başlangıç değeri için $\mu \in [3, 3.99]$ olsun. O halde, $\mu > 3.57$ değerleri için Lyapunov üsteli pozitif bir durum sergiler (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 μ değerleri için Lyapunov üsteli

Çok boyutlu fark denklem sistemleri için benzer bir tanım yapılır fakat bu tanım yapılırken (5.1) deki türev yerini Jakobiyen matrise bırakır. Sistem boyutu büyüdükçe Lyapunov üsteli sayısı artar. Jakobiyen matrisin en büyük özdeğerinin büyüklüğü yani, matrisin spektral yarıçapı, sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığını belirler (Allen 2007).

Örnek 5.2

$$C(x(k)) = \begin{cases} 2x(k) & , \quad 0 \leq x(k) \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - x(k)) & , \quad \frac{1}{2} < x(k) \leq 1 \end{cases}$$

Çadır dönüşümünü ele alalım. $x_0 \in (0, 1)$ olmak üzere $|C'(x(k))| = 2$ dir ve Lyapunov üsteli

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln 2 \approx 0.6931$$

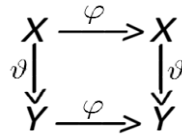
olarak bulunur. Bu durum da $\ln$ değeri pozitif geldiğinden çadır dönüşümü başlangıç koşullarına karşı duyarlıdır denir.

Şimdiye kadar üstünde durduğumuz kavramlar doğrultusunda kaotik bir sistem başlangıç koşullarına karşı duyarlılık gösterdiğinden sistem öngörülemez, topolojik geçişken olduğundan φ dönüşümü altında kesişmeyen iki sisteme (iki invaryant açık altküme) bölünemediğini söyleyebiliriz. Tüm bu rastgele davranışların içerisinde sistem bir düzene sahiptir çünkü periyodik noktaları yoğundur (Devaney 1986).

Tanım 5.4 (Devaney 1986) $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi : I \rightarrow I$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanırsa, φ dönüşümüne kaotiktir denir.

- (i) φ dönüşümü geçişlidir,
- (ii) Periyodik noktaları içeren P kümesi I aralığında yoğundur,
- (iii) φ dönüşümünün başlangıç koşullarına duyarlıdır.

Banks ve arkadaşları (1992), (i) ve (ii) koşullarından (iii) nin elde edildiğini göstermiştir. başlangıç koşullarına duyarlılığı sağladığını göstermiştir.



Şekil 5.2 Topolojik geçişlilik diyagramı

Geçişlilik ve periyodik noktaların yoğunluğu, topolojik koşullar olduğundan dolayı bunların varlığı φ dönüşümünde kesin olarak korunur. Ancak duyarlılık durumu metrik bir özellik olduğundan topolojik eşleniklik altında korunmaz. Duyarlılık, sadece

kompakt uzaylar ile sınırlıysa topolojik kavram olarak ele alınabilir ve φ dönüşümü üzerinde geçişlilik ve periyodik noktaların yoğunluğu birlikte duyarlılığın korunmasını garanti eder. φ dönüşümü başlangıç koşullarına duyarlı olup X açık kümesi üzerinde mesafesi en az δ olan (x_1, x_2) şeklindeki nokta çiftleri olsunlar. Bu nokta çiftleri D_δ olarak tanımlansın. Ek olarak $(\vartheta(x_1), \vartheta(x_2))$ noktaları da olsun ve E_δ olarak tanımlansın. Eğer φ dönüşümünü geçişliyse $(x_1, x_2) \rightarrow (\vartheta(x_1), \vartheta(x_2))$ yazılır. Bu noktalar arasındaki minimum mesafe $d_\delta > 0$ olarak bulunur ve d_δ duyarlılık sabiti olarak adlandırılır (Banks vd 1992).

Teorem 5.2 (Banks vd 1992) $\varphi : I \rightarrow I$ sürekli bir dönüşüm olsun. φ nin periyodik noktalar kümesi yoğun ve φ geçişliyse, φ başlangıç koşullarına duyarlıdır.

Lemma 5.1 (Berglund ve Vellekoop 1994) $\varphi : J \rightarrow J$, J aralığında $\mathbb{R}$ uzayında sürekli bir dönüşüm olsun. I , J aralığının alt aralığı olsun öyle ki I aralığı φ dönüşümünün hiçbir periyodik noktasını içermesin. Eğer x , $\varphi^m(x)$ ve $\varphi^n(x) \in I$ ise, o halde ya $x < \varphi^m(x) < \varphi^n(x)$ olmalıdır ya da $x > \varphi^m(x) > \varphi^n(x)$ olmalıdır. Burada $0 < m < n$.

İspat. $z < \varphi^m(z)$ ve $\varphi^n(z) < \varphi^m(z)$ olacak şekilde bir $z \in J$ alalım ve $\psi(x) = \varphi^m(x)$ tanımlansın. $z < \psi(z)$ olduğundan tümevarımdan $k \geq 1$ için $z < \psi(z) < \psi^{k+1}(z)$ dır. $\varphi^{n-m}(\varphi^m(z)) < \varphi^m(z)$ olduğu kabul edilirse benzer bir ispat yapılır. $\psi = \varphi^{n-m}$ tanımlansın. O zaman $\varphi^{(t-m)m}(\varphi^m(z)) < \varphi^m(z)$ dır. Fakat bu durumda $\varphi^{(t-m)m}(x) - x$, z noktasında pozitif, $\varphi^m(z)$ noktasında negatif olur. Bu durum ara değer teoreminden J içinde $(t-m)m$ periyotlu bir periyodik nokta elde edilmesine neden olur ve bu bir çelişkidir. $z > \varphi^m(z) > \varphi^n(z)$ durumu da benzer şekilde ispatlanır. ■

Teorem 5.3 (Berglund ve Vellekoop 1994) $\varphi : J \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer φ dönüşümü geçişliyse, o halde J aralığındaki periyodik noktalar kümesi J aralığı içinde yoğundur yani, φ dönüşümü kaotiktir.

Kaos, birçok fiziksel olgunun içinde bulunabilir. Kaotik bir davranış sergileyen bir sistemin davranışını analiz etmek ve öngörmek her ne kadar faydalı olsa da kaosu analiz etmek zor olabilir. Bunun için kaosu kontrol edilmesi gerekir. Dinamik

sistemlerin oluşturduğu kaosun kontrol edilmesi son yıllarda giderek artan bir ilgi görmektedir (Chen ve Dong 1998).

5.1 Kaos Kontrolü

Sistemin kaotik olması, sistem üzerindeki en ufak bir değişikliğin daha sonrasında büyük farklara yol açmasına sebep olur. Kaotik sistemler öngörülemezler olduklarından analiz edilmeleri oldukça güçtür (Witvoet 2005).

Kaos kontrolü, 1990'lerin başlarından itibaren ilgi gören bir alan olup son yıllarda bu alanda birçok çalışma yapılmıştır (Andrievskii ve Fradkov 2002). Kaos kontrolünün temel unsuru, kaosa sebep olan kararsız periyodik kümelerin yoğunluğudur ve bu periyodik yörüngelerin bazıları sistemin davranışını belirler (Grebogi ve Lai 1997). Kararsız yörüngeler sistemi kaosa süreklediği için bu kararsız yörüngelerin kararlı hale getirilmesi gerekir. 1990 yılında Yorke ve çalışma arkadaşları bir kaotik sistemin özelliklerinin, parametrelerindeki çok küçük değişimler yoluyla önemli ölçüde değiştirilebildiğini görmüşlerdir (Andrievskii ve Fradkov 2002). Yani, bazı parametrelerin yakın bir çevresinde kaosu kontrol edilebilir, bu da bu parametreler üzerinde küçük değişimlerle yapılır.

Ayrık sistemlerde bir parametrenin üzerine uygulanan ufak bir değişimin kaotik bir yörüngeyi periyodik kararlı bir yörüngeye dönüştürülebileceği gösterilmiştir (Andrievskii ve Fradkov 2002). Kaosun kontrol edilebildiği yönündeki çalışmalar kaotik sistemin özelliklerinin, parametreler üzerindeki küçük etkileşimler sayesinde analiz edilebildiği ortaya koyulmuştur (Andrievskii ve Fradkov 2002). Burada bahsedilen küçük değişimler geri besleme olarak bilinir ve Ott, Grebogi ve Yorke bu durumu şöyle işler (Auerbach vd. 1992):

1. Kaotik yörünge içerisinde gömülü olan kararsız periyodik yörüngelerden bazıları belirlenir.
2. Belirlenen yörüngelerin konumu ve kararlılıkları incelenir.

3. İncelemeden sonra sistem üzerinde istenilen değişikliğe sebep olacak yörünge seçilir.

4. Seçilen yörüngenin kararlı hale gelmesi için üzerinde küçük bir kontrol uygulanır.

Kaosu kontrol etmek için, Ott, Grebogi ve Yorke (OGY) tarafından geliştirilen, kararsız periyodik yörüngeleri kararlı hale getirme metodu ya da kontrol algoritması olarak bilinse de en yaygın adı OGY yöntemidir (Cammack 2003). OGY yöntemi, kaotik bir sistemi en kısa sürede kontrol etmeye yardımcı olur. Lineer sistemler, yapılan küçük değişimlerin kontrolü ile kararlı hale getirilebilir, bu nedenle seçilen kararsız periyodik yörünge geri besleme kontrolü ile kararlı yapılır (Auerbach vd. 1992). lineer olmayan sistemler de lineer hale getirilebildiklerinden geri besleme kontrolü lineer olmayan sistemler için de mümkündür.

$$x(t+1) = \Phi(x(t), p(t))$$

ayrık sistemi ele alınsın, burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$ olup Φ , düzgün vektör fonksiyonunu temsil eder. $p(t)$ ise üzerinde sapma uygulanabilecek bahsi geçen ulaşılabilir parametredir. Sadece küçük kontroller uygulanmak istendiğinden p parametresi

$$|p(t) - \bar{p}| < \delta$$

şeklinde küçük bir aralık ile sınırlandırılır, burada $\bar{p}$ sembolik olarak seçilen bir parametredir. $\Phi(x, p)$ kaotik bir çekiciye sahip olsun. Bu kaotik çekici tüm başlangıç koşullarını etkileyecek şekilde $p(t)$ parametresini $(\bar{p} - \delta, \bar{p} + \delta)$ aralığının içine düşürsün. Bunun amacı bu çekiciyi içeren yörüngeye tüm sistem dinamiklerinin yakınlaşmasını sağlamaktır ve bunun için belirlenen periyodik yörüngenin δ uzağında bir komşuluk ele alınıp bu komşulukta sistem dinamikleri lineer kabul edilir (Grebogi ve Lai 1997). Sistemlerin yapısından dolayı, durum yörüngesinin bu komşulukta var olacağı garanti edilir (Auerbach vd 1992). Buradaki durum yörüngesinden kasıt, kaos kontrol edilirken parametrenin zaman içerisinde ilerdiği yoldur. Yani, durum yörüngesi sistemin zaman içerisinde belirlenen hedefi nasıl takip ettiğini gösterir ve bu yörünge belirlenen komşuluğa girdikten sonra kararlı hale getirme yapılır. Yörüngenin kararlı hale getirilmesinin amacı bu durum yörüngesi belirlenen yörüngenin

komşuluğu içerisinde tutmaktır (Grebogi ve Lai 1997). Basitlik açısından, belirlenen yörünge sistemin sabit noktası olarak seçilsin. $x^*(\bar{p})$, kararsız sabit nokta olsun. $p(t)$ değerleri $\bar{p}$ ye yakın ve $x^*(\bar{p})$ sabit noktasının komşuluğunda olsun. O halde, lineer dönüşüm

$$x(t+1) - x^*(\bar{p}) = A[x(t) - x^*(\bar{p})] + B(p(t) - \bar{p}) \quad (5.2)$$

dir, burada A matrisi $n \times n$ türünde Jakobiyen matris ve B , $n \times 1$ türünde bir vektördür (Witvoet 2005). Yani,

$$A = D_x \Phi(x, p)$$

$$B = D_p \Phi(x, p)$$

dir, burada A kısmi türevi $x = x^*$ için alınırken B kısmi türevi $p = \bar{p}$ için alınır (Grebogi ve Lai 1997). Zamana bağlı $(p(t) - \bar{p})$ sapması için

$$p(t) - \bar{p} = -K^T[x(t) - x^*(\bar{p})] \quad (5.3)$$

hesaplanır, burada K^T , $1 \times n$ türünde bir matris olup x^* noktasını kararlı hale getirecek şekilde seçilmelidir (Witvoet 2005). (5.3) denklemi (5.2) denkleminde yerleştirildiğinde

$$x(t+1) - x^*(\bar{p}) = (A - BK^T)[x(t) - x^*(\bar{p})] \quad (5.4)$$

elde edilir. (5.4) denklemi $(A - BK^T)$ asimptotik kararlı olduğunda x^* sabit noktasının da kararlı olduğunu gösterir. $(A - BK^T)$ nin asimptotik kararlı olması, elde edilen özdeğerlerinin modülünün 1 den küçük olması demektir (Grebogi ve Lai 1997). Buradaki asıl problem K^T matrisini belirlemektir. K^T matrisindeki özdeğerlerin (veya kutupların) mutlak değeri 1 den küçük olmalıdır. Özdeğerlerin bu şekilde ayarlanmasını sağlayan tekniğin adı kutup yerleştirme (pole placement) olarak bilinir (Auerbach vd. 1992). Kutup yerleştirmenin

$$C = (B \ AB \ A^2B \dots A^{n-1}B)$$

den oluşan ve kontrol matrisi olarak bilinen tekil bir çözümü vardır (Auerbach vd. 1992). A matrisinin karakteristik denklemi $\phi(A)$ olmak üzere kutup yerleştirme probleminin çözümü

$$K^T = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1)(B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B)^{-1}\phi(A)$$

olarak tanımlanır ve bu formül Ackermann formülü olarak bilinir (Kailath 1979). Bir sistemin kontrol edilir olması kontrol matrisinin rankının n olmasıyla yani, $\text{rank}(C) = n$ olmasıyla belirlenir (Klamka 2008).

Şimdi OGY yönteminin bir uygulaması olarak

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t + \delta N_t(r_1 - \varepsilon P_t) \\ P_{t+1} = P_t + \delta P_t \left(r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t} \right) \end{cases} \quad (5.5)$$

sistemini ele alalım (Kangalgil ve Işık 2020). OGY yönteminin incelenmesi için sadece $E^* = \left(\frac{r_1^2 \theta}{r_2 \varepsilon (\alpha \varepsilon + r_1)}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right)$ sabit noktası ele alınsın. Bu sabit noktanın Jakobiye matrisi

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

olup, burada

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \delta r_1 - \delta P \varepsilon \\ a_{12} &= -\delta N \varepsilon \\ a_{21} &= \frac{\delta P^3 \theta}{N^2(\alpha + P)} \\ a_{22} &= 1 + \delta r_2 - \frac{3\delta P^2 \theta}{N(\alpha + P)} + \frac{\delta P^3 \theta}{N(\alpha + P)^2} \end{aligned}$$

dir. Buradan karakteristik denklem,

$$\lambda^2 - T(J)\lambda + D(J) = 0$$

olarak elde edilir. (5.5) sisteminin kontrol sistemi

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t + \delta N_t(r_1 - \varepsilon P_t) = \varphi(N_t, P_t, r_1) \\ P_{t+1} = P_t + \delta P_t \left(r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t} \right) = \psi(N_t, P_t, r_1) \end{cases}$$

olup, r_1 ulaşılabilir (kontrol edilebilir) parametredir ve $|r_1 - r_{10}| < \mu$ aralığı ile sınırlandırılır. Burada $\mu > 0$ dir ve r_{10} kaotik bölgeye ait göstermelik parametredir. İstenilen yörüngeyi kararlı hale getirmek için geri besleme kontrol yöntemi ile bölge hareket ettirilir. (N^*, P^*) noktası (5.5) nin kararsız sabit noktası olsun ve Neimark-Sacker çatallanması oluştursun. Bu kararsız noktanın yakın bir komşuluğunda,

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} - N^* \\ P_{t+1} - P^* \end{pmatrix} \approx A \begin{pmatrix} N_t - N^* \\ P_t - P^* \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} r_1 & r_{10} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

yazılır. Burada,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(N^*, P^*, r_{10})}{\partial \psi(N^*, P^*, r_{10})} & \frac{\partial \varphi(N^*, P^*, r_{10})}{\partial P_t} \\ \frac{\partial N_t}{\partial \psi(N^*, P^*, r_{10})} & \frac{\partial P_t}{\partial \psi(N^*, P^*, r_{10})} \end{pmatrix}$$

ve

$$B = \begin{pmatrix} \frac{r^2 r_{10}}{r_2 \varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dır.

Ek olarak, $C = (B : AB)$ matrisi sağlanırsa sistem kontrol edilebilirdir denir ve,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 r_{10}}{r_2 \varepsilon} & \frac{\delta^2 r_{10}}{r_2 \varepsilon} \\ 0 & \frac{\delta \theta r_2 r_{10}}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

olup tüm parametreler pozitiftir. $K = (\rho_1 \ \rho_2)$ olmak üzere, $(r_1 \ r_{10}) = -K \begin{pmatrix} N_t - N^* \\ P_t - P^* \end{pmatrix}$ olsun. (5.6) sistemi

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} - N^* \\ P_{t+1} - P^* \end{pmatrix} \approx (A - BK) \begin{pmatrix} N_t - N^* \\ P_t - P^* \end{pmatrix}$$

sistemine dönüşür ve kontrol edilebilirlik

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t + \delta N_t ((r_{10} - \rho_1(N_t - N^*) - \rho_2(P_t - P^*)) - \varepsilon P_t) \\ P_{t+1} = P_t + \delta P_t \left(r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t} \right) \end{cases}$$

olur. Seçilen (N^*, P^*) sabit noktasının lokal asimptotik kararlı olmasının gerek ve yeterli koşulu $A - BK$ matrisinden gelen tüm özdeğerlerin birim çember içerisinde olmasıdır. $A - BK$ matrisinin Jakobiyeni

$$A - BK = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta^2 \rho_1 r_{10}}{r_2 \varepsilon} & -\frac{\delta^2 r_{10}}{r_2} \left(1 + \frac{\rho_2}{\varepsilon} \right) \\ \frac{\theta r_2^2}{\varepsilon} & 1 + r_2(\delta - 2\theta) \end{pmatrix}$$

olup karakteristik denklemi,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(2 + r_2(\delta - 2\theta) - \frac{\delta^2 \rho_1 r_{10}}{r_2 \varepsilon} \right) \lambda + 1 + r_2(\delta - 2\theta) - \frac{\delta^2 r_2 r_{10}}{\varepsilon} \left(\frac{\rho_1}{r_2^2} (1 + r_2(\delta - 2\theta)) + \theta \left(1 + \frac{\rho_2}{\varepsilon} \right) \right).$$

dir. Burada λ_1 ve λ_2 özdeğerler olmak üzere

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + r_2(\delta - 2\theta) - \frac{\delta^2 \rho_1 r_{10}}{r_2 \varepsilon} \quad (5.7)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 + r_2(\delta - 2\theta) - \frac{\delta^2 r_2 r_{10}}{\varepsilon} \left(\frac{\rho_1}{r_2^2} (1 + r_2(\delta - 2\theta)) + \theta \left(1 + \frac{\rho_2}{\varepsilon} \right) \right) \quad (5.8)$$

yazılır.

Kararlılık doğrularının elde edilebilmesi için $\lambda_1 = \pm 1$ ve $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ denklemlerinin çözülmesi gerekir. Bu kısıtlamalar, λ_1 ve λ_2 değerlerinin mutlak değerlerinin 1 den küçük olmasını garanti eder. $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ olduğu varsayılınsın bu durumda (5.8) denklemi

$$L_1 := -\frac{\delta^2 \rho_1 r_{10}}{r_2 \varepsilon} (r_2(\delta - 2\theta) + 1) + \frac{\delta \theta r_2 \rho_2}{\varepsilon} + r_2(\delta - \theta(\delta r_1 - 2)) = 0$$

olup, $\lambda_1 = 1$ için (5.7) ve (5.8)

$$L_2 := -\frac{\delta^2 \rho_1 r_{10}}{\varepsilon} (\delta - 2\theta) + \frac{\delta \theta r_2 r_{10}}{\varepsilon} + \delta \theta r_2 r_{10} = 0$$

olarak yazılır.

Son olarak eğer $\lambda_1 = -1$ olarak alınırsa (5.7) ve (5.8) denklemleri

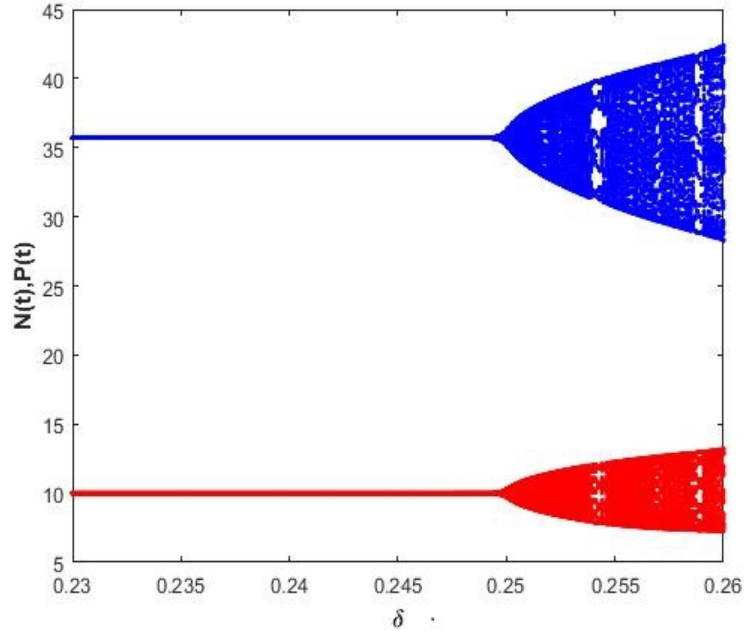
$$L_3 := -\frac{\delta^2 \rho_1 r_{10}}{r_2 \varepsilon} (r_2(\delta - 2\theta + 2) + \frac{\delta^2 \theta r_2 \rho_2 r_{10}}{\varepsilon} + r_2(2(\delta - 2\theta) + \delta \theta r_{10}) + 4 = 0$$

olarak yazılır.

Kararlı özdeğerler bazı parametreler için L_1 , L_2 ve L_3 doğrularıyla sınırlanan $\rho_1 \rho_2$ düzlemindeki üçgensel bölge içinde kalır. Örnek olarak, parametre değerleri $r_1 = 3.7037037037$, $r_2 = 12$, $\delta = 0.27$, $\theta = 50$, $\varepsilon = 0.4$, $\alpha = 0.23$, $r_1 \in [3.6, 4.5]$ ve $(N_0, P_0) = (34, 9.5)$ başlangıç noktası için sabit nokta $(N^*, P^*) = (35.71428571, 10)$ olarak alındığında $\delta < 0.25$ noktasında sistem kararlılığını kaybedip sistem Neimark-Sacker çatallanması oluşur (Şekil 5.3).

$(N^*, P^*) = (38.58024692, 9.259259260)$ sabit nokta olarak alınıp aynı parametreler için Jakobiye matris hesaplandığında,

$$|\lambda_{1,2}| = |-0.62 \pm 0.7846018095I| = 1$$



Şekil 5.3 Neimark-Sacker çatallanması

özdeğerleri bulunur. Şimdi (5.5) sistemi için OGY yöntemi uygulansın ve $r_{1_0} = 3.725$ olsun. Kontrol sistemi,

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t + 0.27N_t((3.725 - \rho_1(N_t - 38.8028332) - \rho_2(P_t - 9.3125)) - \varepsilon P_t), \\ P_{t+1} = P_t + 0.27P_t \left(12 - 50\frac{P_t}{N_t}\right) \end{cases} \quad (5.9)$$

olup, $K = (\rho_1 \ \rho_2)$ ve kararsız $(N^*, P^*) = (38.58024692, 9.259259260)$ sabit noktadır. A , B ve C matrisleri bu değerler için hesaplandığında

$$C = \begin{pmatrix} 10.47656250 & 10.47656250 \\ 0 & 8.146575000 \end{pmatrix}$$

olup $rank(C) = 2$ olduğundan sistem kontrol edilebilirdir. Kontrol edilebilir sistemin Jakobiyesi

$$A - BK = \begin{pmatrix} 1 - 10.47656250\rho_1 & -4.190625 - 10.47656250\rho_2 \\ 0.7776 & -2.24 \end{pmatrix}$$

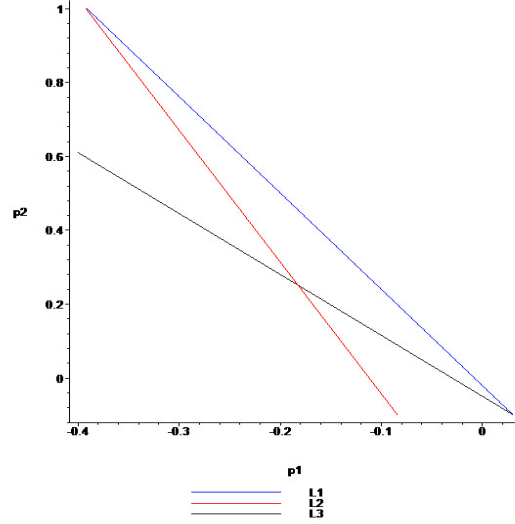
olup matris hesaplandıktan sonra L_1 , L_2 ve L_3 doğruları

$$L_1 = 0.01863 + 23.4675\rho_1 + 8.146575\rho_2 = 0,$$

$$L_2 = 3.25863 + 33.94406250\rho_1 + 8.146575\rho_2 = 0,$$

$$L_3 = 0.77863 + 12.99093750\rho_1 + 8.1446575\rho_2 = 0.$$

olur.



Şekil 5.4 L_1 , L_2 ve L_3 doğrularıyla oluşturulan üçgensel kararlılık bölgesi

Üçgensel kararlı bölge bu üç doğru ile sınırlıdır (Şekil 5.4). Bu üçgensel bölge, sistemin kararlı olduğu parametre değerleri olup $(\rho_1 \ \rho_2)$ değerleri bu üçgensel bölge içerisinde kaldığı sürece sistem kararlı halde olur. Bu şekilde oluşan çatallanma geri besleme kontrol tekniğine dayanan OGY kontrol yöntemi ile kontrol edilir hale gelmiştir.

6. SONUÇ

Ayrık sistemler teori ve uygulama açısından oldukça önemli matematiksel yapılardır. Sistemler, özellikle uygulama kısmında karmaşık yapılar sergilediğinden sistemin yapısının analiz edilmesi gerekir. Çatallanma teorisi ve kaos sistemlerin yapısını belirler. Bu yapıyı analiz etmek için sabit noktaların kararlılık analizi yapılması gerekir. Bunun sayesinde sistemin kararlılık durumu ile çatallanma türü belirlenebilir ve sistem hakkında bilgi sahibi olunabilir. Fakat sistem kaos oluşturduğunda iyi bir şekilde analiz edilemez. Sistemin daha iyi analiz edilebilmesi için kaosun kontrol edilmesi gerekir.

Bu tezde öncelikle skaler fark denklemleri ve fark denklem sistemleri üzerinde durulmuş ve bunların sabit noktaları hakkında bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ardından sabit noktaların kararlılıkları yakından incelenmiştir. Denklem sistemleri incelenirken öncelikle temel lineer cebir bilgileri verilerek faz diyagramları aracılığıyla lineer sistemler ve kararlılıkları üzerinde durulmuştur. Kararlılık analizi için bazı tanım ve teoremler verildikten sonra lineer olmayan sistemlerin incelenebilmesi için lineerleştirme yöntemi tanıtılmıştır. Devamında, çatallanma teorisine girilerek hem skaler denklemler hem de denklem sistemleri için çatallanma türleri verilmiştir. Tezin son kısmı kaos için ayrılmış olup Devaney'in kaos tanımı üzerinde durulmuştur. Ayrık sistemlerin kaotik davranış sergilemesi için gerekli olan koşullar tanıtılmış ve kaosu kontrol etmek için bir yöntem tanıtılarak bu yöntemin pekişmesi bir örnekle desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- Alligood, K. T., Sauer, T.D. ve Yorke, J.A. 1996. *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 603, USA.
- Allen, L.J.S. 2007. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson, 360, USA.
- Andrievskii, B. R. ve Fradkov, A. L. 2002. *Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods*. Automation and Remote Control, 64(5), 673-713.
- Anton, H. ve Rorres, C. 2019. *Elementary Linear Algebra*. Wiley, 816, New York.
- Auerbach, D., Grebogi, C., Ott, E. ve Yorke, J.A. 1992. *Controlling Chaos in High Dimensional Systems*. Physical Review Letters, 69(24), 971-975.
- Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. ve Stacey, P. 1992. *On Devaney's Definition of Chaos*. The American Mathematical Monthly, 99, 332-334.
- Bereketoğlu, H. 2021. *Diferensiyel Denklemler*. Nobel Akademik Yayıncılık, 554, Ankara.
- Bereketoğlu H. ve Kutay, V. 2012. *Fark Denklemleri*. Gazi Kitabevi, 203, Ankara.
- Berglund, R. ve Vellekoop, M. 1994. *On Intervals, Transitivity = Chaos*. The American Mathematical Monthly, 1, 353-355.
- Bubolo, M. 2018. *The Dynamics of the Logistic Map and Difference Equations*. Academic Festival, 31, DigitalCommons@SHu, USA.
- Carr, J. 1981. *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag, 142, New York.
- Chantraine, P. 1968. *Dictionnaire Étymologique de la Langue Grecque: Histoire des Mots*. Klincksieck, 1447, France.
- Devaney, R. L. 1986 *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, 362, USA.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equation*. Springer, 543, USA.
- Elaydi, S. 2007. *Discrete Chaos*. Springer, 435, USA.
- Ercan, Z. 2020. *Topoloji*. ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık, 472, Ankara.
- Farris, S. M. ve Hamdi, M. S. 2023. *Bifurcation Theory: A Review*. Al-Rafidain Journal of Computer Sciences and Mathematics, 17(2), 93-103.
- Gökmen, A. 2009 *Kaos Teorisinin Genel Bir Değerlendirmesi*. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 2(1), 61-79.
- Grebogi, C. ve Lai, Y. C. 1997. *Controlling chaotic dynamical systems*. Systems and Control Letters, 31, 307-312.

- Halanay, A. ve Rasvan, V. 2018. *Stability and Stable Oscillations in Discrete Time Systems*. CRC Press, 300, USA.
- Hale, J. K. ve Koçak, H. 1996. *Dynamics and Bifurcations*. Springer, 574, USA.
- Homburg, A. J. ve Knobloch, J. 2025. *Bifurcation Theory*. American Mathematical Society, 646, Rhode Island.
- Kailath, T. 1979. *Linear Systems*. Pearson Education, 704, USA.
- Kangalgil, F. ve Işık, S. 2020. *Controlling chaos and Neimark-Sacker bifurcation in a discrete-time predator-prey system*. Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics, 49(5), 1761 – 1776.
- Klamka, J. 2008. *Controllability of dynamical systems*. Mathematica Applicanda, 36, 57-75.
- Kuznetsov, Y. A. 2004. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 634, USA.
- Liddell, H. G., Scott, R. 1996. *A Greek-English Lexicon*. Clarendon Press, 2448, England.
- May, R. 1976. *Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics*. Nature, 26(5560), 459-467.
- May, R. ve Oster, G. F. 1976. *Bifurcations and Dynamic Complexity in Simple Ecological Models*. The American Naturalist, 110(974), 573-599.
- Ortega, J.M. 1987. *Matrix Theory*. Spriger, 262, USA.
- Strogatz, S. H. 2014. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. CRC Press, 528, USA.
- Thom, R. 1972. *Stabilité structurelle et morphogenèse*. InterEditons, 400, France.
- Tollu, D. T. 2009. *Bazı Fark Denklemlerinin Kararlılığı*. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 69, Konya.
- Witvoet, G. 2005. *Control of Chaotic Dynamical Systems using OGY*. Traineeship Report, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven.