

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKLAŞMA UZAYLARI VE HİPERUZAYLAR ÜZERİNDE
TANIMLI YAKLAŞMA YAPILARI

Meryem BİTEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Meryem BİTEN tarafından hazırlanan “Yaklaşma Uzayları ve Hiperuzaylar Üzerinde Tanımlı Yaklaşma Yapıları” adlı tez çalışması 11/07/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Rıza ERTÜRK



Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Erdal GÜNER



Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER



Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11/07/2017



Meryem BİTEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKLAŞMA UZAYLARI VE HİPERUZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLI YAKLAŞMA YAPILARI

Meryem BİTEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanacağımız temel kavramlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, ölçek ve yaklaşma sistemi kavramları tanımlanarak, bu kavramların temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca; bu terimlerin ürettiği matematiksel yapılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; yaklaşma uzayı kavramı ve yaklaşma uzayları arasında tanımlı büzülme dönüşümleri ifade edilerek bu kavramların temel özellikleri incelenmiştir. Nesneleri yaklaşma uzayları, morfizmleri büzülme dönüşümleri olan App kategorisinin özellikleri verilmiştir. Ayrıca; App kategorisi ve bu kategorinin temel alt kategorileri olan Met, qMet ve Top kategorileri ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Beşinci bölümde; Wijsman topoloji, Hausdorff metrik topoloji ve proximal topoloji tanımları ifade edilmiştir. App kategorisi içinde, bu topolojilerin analoğu olacak biçimde inşa edilen yapılar incelenmiştir.

Altıncı bölümde ise tez ile ilgili genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Temmuz 2017, 90 sayfa

Anahtar Kelimeler: Uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, ölçek, yaklaşma sistemi, hiperuzay, hipertopoloji, büzülme dönüşümü, topolojik kategori, gömülme dönüşümü

ABSTRACT

Master Thesis

APPROACH SPACES AND APPROACH STRUCTURES ON HYPERSPACES

Meryem BİTEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. Sevdâ SAĞIROĞLU PEKER

This thesis consist of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter basic concepts that we will use throughout the work are recalled.

In chapter three; by introducing the notion of distance, limit operator, gauge and approach system , the properties of these fundamental concepts are investigated. Also the relations between mathematical structures produced by these terms are studied.

In chapter four; examining the notion of approach spaces and contractions between approach spaces, the fundamental properties of these concepts are investigated. The properties of the topological category App with objects all approach spaces and morphisms all contractions are expressed. Moreover, the category App and the relations between App and its fundamental subcategories; Met, qMet and Top are investigated.

In chapter five; the definitions of Wijsman topology, Hausdorff metric topology and proximal topology are expressed. In the notion of the category App, the structures constructed as the analogue of these topologies are investigaed.

In chapter six and the last chapter conducts a general evaluation.

July 2017, 90 pages

Key Words: Distance, limit operator, gauge, approach system, hyperspace, hyper-topology, contraction, topological category, embedding function

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan, yoluma ışık tutan, her konuda bana destek ve cesaret veren danışman hocam Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'e ve her anımda yanımda olan, maddi manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen aileme en içten saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Meryem BİTEN
Ankara, Temmuz 2017



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Topoloji ve Metriğe İlişkin Bazı Temel Kavramlar.....	4
2.2 Kategori Teoriye İlişkin Bazı Temel Kavramlar	8
3. YAKLAŞMA UZAYLARI	13
3.1 Yaklaşma Uzaylarını Karakterize Eden Matematiksel Yapılar... ..	13
3.1.1 Uzaklık Fonksiyonu	13
3.1.2 Limit Operatörü	16
3.1.3 Yaklaşma Sistemleri	25
3.1.4 Ölçekler	29
3.2 Yaklaşma Uzaylarını Karakterize Eden Matematiksel Yapılar Arasındaki İlişkiler	30
4. TOPOLOJİK VE METRİK YAKLAŞMA UZAYLARI	49
4.1 Yaklaşma Uzayları ve Temel Özellikleri.....	49
4.2 Topolojik Yaklaşma Uzayları	62
4.3 (Quasi-)Metrik Yaklaşma Uzayları	68
5. HİPERUZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLI YAKLAŞMA YAPI- LARI	72
5.1 Wijsman Yaklaşma Yapısı	76
5.2 Proximal Yaklaşma Yapısı	81
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	86
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ	90

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{A}$	Yaklaşma sistemi
A^c	A kümesinin tümleyeni
App	Yaklaşma uzayları ve büzülme dönüşümleri kategorisi
$a \ominus b$	$(a - b) \vee 0$
$adh\mathfrak{F}$	$\mathfrak{F}$ süzgecinin yığılma noktalarının kümesi
$C(X, \mathbb{R})$	X kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlı sürekli fonksiyonların ailesi
$CL(X)$	X kümesinin kapalı alt kümelerinin kümesi
$CLB(X)$	X kümesinin kapalı ve sınırlı alt kümelerinin kümesi
cl	Pretopolojik kapanış operatörü
δ	Uzaklık fonksiyonu
$\mathbf{F}(\mathfrak{F})$	$\mathfrak{F}$ süzgecinden daha ince olan süzgeçlerin ailesi
$\mathbf{F}(X)$	X kümesi üzerinde tanımlı tüm süzgeçlerin ailesi
$\mathfrak{F} \rightarrow x$	$\mathfrak{F}$ süzgeci x noktasma yakınsar
$\mathfrak{F} \rightsquigarrow x$	$\mathfrak{F}$ süzgeci x noktasma yığılır
$\mathcal{G}$	Ölçek
H_d	Hausdorff metriği
2^X	X kümesinin alt kümelerinin ailesi
$2^{(X)}$	X kümesinin sonlu elemanlı alt kümelerinin ailesi
λ	Limit operatörü
$\lim \mathfrak{F}$	$\mathfrak{F}$ süzgecinin limit noktalarının kümesi
Met	Metrik uzaylar ve genişlemeyen dönüşümler kategorisi
$\mathbb{P}$	$[0, \infty]$ kapalı aralığı
Set	Kümeler ve sürekli fonksiyonlar kategorisi
θ_A	A kümesinin göstergesi
Top	Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar kategorisi
$\mathbf{U}(\mathfrak{F})$	$\mathfrak{F}$ süzgecinden daha ince olan ultrasüzgeçlerin ailesi
$\mathbf{U}(X)$	X kümesi üzerinde tanımlı tüm ultrasüzgeçlerin ailesi
$V_\tau(x)$	x noktasının τ topolojisine göre komşuluklar ailesi

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 5.1	$A, B \subset \mathbb{R}^2$ kümeleri arasındaki artık ve boşluk	74
-----------	---	----

1. GİRİŞ

Metrik kavramı ilk olarak 1906 yılında Fréchet tarafından tanımlanmıştır. Bir küme, üzerinde tanımlanan metrik ile birlikte ele alındığında metrik uzay olarak adlandırılır. Metrik uzayların matematiğin dominant genleri olduğu yadsınamaz. Ancak, analizde çok sıkça kullanılan ve temel kavramlarından sayılan yakınsaklık, süreklilik ve kompaktlık kavramlarının özelliklerini çalışmayı sağlayan, ilgili küme üzerinde var olan metriğin ürettiği topolojik yapıdır. Metrikten bağımsız, yalnız bir topolojik uzayda çalışıldığında ise, metrik yapının sağladığı uzaklığa ilişkin bilgi ve özelliklerinden yoksun kalırız. Bu kayıp Weil (Weil 1938) ve Dieudonné (Dieudonné 1939) tarafından ortaya konulan "Düzgün Uzay" kavramı ile bir parça telafi edilmiştir. Düzgünlük yapısı metrik uzayda anlamlı olan bazı önemli kavramların (tamamen sınırlılık ve tamlık gibi) daha geniş bir alana (yerel konveks uzaylar ve topolojik gruplar gibi) aktarılmasını sağlamıştır. Diğer yandan; pek çok topolojik özellik kayda değer metrik karşılıklara sahiptir. Örneğin; kompaktlık metrik uzaylarda tamamen sınırlılık ile yakından ilişkili bir kavramdır, benzer bir durum bağlantılılık için de geçerlidir: Topolojik bağlantılılık için gerek ve yeter şart uzayın ayırık iki kapalıdan oluşan bir örtüsünün olmamasıdır, benzer şekilde Cantor tarafından verilen Cantor-bağlantılılık uzayın birbirine uzaklıkları pozitif olan iki parçaya ayrılamaması olarak tanımlanır. Bu durumda akla, bu benzer kavramlar arasında birleştirici bir **teori** kurulup kurulamayacağı sorusu gelir. Bu teori; **Yaklaşma Uzayları (Approach Space)** adı ile Lowen tarafından ortaya konulmuştur (Lowen 1989). Yaklaşma uzaylarının ana fikri noktalar ve kümeler arasındaki uzaklık kavramına dayanmaktadır. 1914 de Hausdorff, bir (X, d) metrik uzayında bir $x \in X$ noktasının bir $A \subset X$ kümesine olan uzaklığını tanımlamıştır. Lowen ise bir noktanın bir kümeye olan uzaklığını

$$\delta : X \times 2^X \longrightarrow [0, \infty]$$

biçiminde ifade ettiği ve belirli özellikleri gerçekleyen bir fonksiyon yardımıyla tanımlamıştır. Üstelik bu uzaklık kavramı, sadece metrik uzaylarda değil herhangi bir topolojik uzayda veya düzgün uzayda da verilebilir. Aslında Lowen çalışmaya "Rast-

gele seçilen metrikleşebilen uzaylar için elde edilen başlangıç yapıları metrikleşebilir değildir." **sorunu** üzerine düşünmekle başlamıştır. Bu **sorunun** özel hali az çok hepimizi ilgilendirir. I bir indis kümesi, $((X_i, d_i))_{i \in I}$ metrikleşebilen topolojik uzayların bir ailesi, $X = \prod_{i \in I} X_i$ olmak üzere $(\pi_i : X \longrightarrow X_i)_{i \in I}$ ile X üzerinde tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının ailesi gösterilsin. $(\pi_i)_{i \in I}$ ailesini sürekli kılacak şekilde X üzerinde elde edilen başlangıç topolojisi metrikleşemez. Bu ise başka bir soru doğurur: "Gerçekten sonsuz çarpıma geçildiğinde uzaklığa ilişkin kuramsal kavramlar ortadan kalkar mı?"

Topolojik uzaylar ve düzgünlük uzayları alanındaki gelişmelerden sonra topoloji olmaksızın varlığını sürdüremeyecek olan çok sayıda matematiksel teori ortaya çıkmıştır. Bunlardan bazıları; topolojik vektör uzayları, Wijsman topoloji ve normlu uzaylar üzerinde tanımlı zayıf ve zayıf* topolojileridir. Bu örneklerin çoğunda bir metrik yapı ile yola çıkılır. Ancak sonuçta elde edilen topolojik yapı metrikleşebilir değildir. Kaybolan nümerik bilgi nasıl ortaya çıkarılabilir? Yerel durumda Lowen, yeni ve nümerik yapıya sahip olan yaklaşma uzaylarını tanımlayarak bu **sorunu** ortadan kaldırır. Lowen yaklaşma uzaylarını karakterize etmek için uzaklık, limit operatörü, yaklaşma sistemleri, ölçek, kapamış kuleleri, alt ve üst zarf operatörü kavramlarını tanımlamış ve bu kavramların matematiksel olarak birbirine eş yapılar olduğunu göstermiştir. X üzerinde bu yapılardan herhangi birinin varlığını kabul ettiğimizde içinde bulunduğumuz uzay bir **yaklaşma uzayıdır**. Yaklaşma uzayları ve bu uzaylar arasında tanımlı bütülme dönüşümleri ile birlikte, kısaca **App** ile gösterilen, bir topolojik kategori oluşturur. App kategorisi, Top ve Met kategorilerinden daha geniş bir kategoridir. 1989 da Lowen Top kategorisinin App kategorisi içine yansılmalı ve ko-yansılmalı bir biçimde, Met ve qMet kategorilerinin ise App içine ko-yansılmalı biçimde gömülebileceğini göstermiştir. Ayrıca; topolojik ve metrik yaklaşma uzaylarını tanımlamıştır. Top, Met, qMet ve Unif kategorileri ile App kategorisi arasındaki ilişkiler (Lowen 1989), (Lowen ve Windels 1997) çalışmalarında ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Lowen 1987-1997 yılları arasında Colebunders, Robeys, Sioen, Vaughan, Windels ve Verbeeck gibi bir çok matematikçi ile çalışmıştır. Bu çalışmalardan bazıları ,

(Lowen 1988), (Lowen ve Colebunders 1988), (Lowen 1993), (Lowen ve Sioen 1996), (Lowen ve Sioen 1998), (Lowen ve Windels 1997), ve (Lowen 1997) dir. Bu yayınları ve yaklaşma uzayları ile ilgili çalışmalarını 1997 yılında "Approach Spaces, The Missing Link in the Topology-Uniformity-Metric Triad" isimli kitabında bir araya getirmiştir. Yaklaşma uzaylarının kompaktlık, hiperuzaylar, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi ve domain teori gibi matematiğin pek çok alanında uygulamaları vardır. Bu konular ile ilgili bazı çalışmalar (Lowen ve Robeys 1994), (Lowen ve Verbeeck 1998), (Lowen ve Sioen 2000) ve (Lowen ve Sagirolu 2013) dır. Lowen, 2015 yılına kadar olan pek çok çalışmasını, ilk kitabındaki kavramlarla birleştirerek ve teoriyi güncelleyerek "Index Analysis, Approach Theory at Work" isimli kitabını yayımlamıştır.

Bu tez çalışmasında; yaklaşma yapılarından bazıları ele alınmış ve hiperuzaylara ilişkin yaklaşma yapılarının nasıl inşa edildiği açıklanmıştır. İkinci bölümde; çalışmamız boyunca kullanacağımız topoloji, metrik ve kategori teoriye ilişkin temel tanım ve kavramlar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde; yaklaşma uzaylarını karakterize eden temel yapılardan uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi ve ölçek kavramları ile bu kavramlar arasındaki ilişkiler aktarılmıştır. Ayrıca, bu kavramların matematiksel olarak eş yapılar olduğunun nasıl gösterildiği açıklanmıştır. Dördüncü bölümde; yaklaşma uzayı kavramı ve yaklaşma uzayları arasında tanımlı bütölme dönüşümleri ifade edilerek bu kavramların temel özellikleri incelenmiştir. Topolojik ve metrik yaklaşma uzayları tanımlanarak Top kategorisinin App kategorisi içine yansımali ve ko-yansımali bir biçimde, Met ve qMet kategorilerinin App kategorisi içine ko-yansımali bir biçimde nasıl gömülebildiği açıklanmıştır. Son bölümde ise Wijsman, Hausdorff metrik ve proximal topolojiden esinlenerek bu topolojilerin analoğu olacak biçimde tanımlanan yaklaşma yapıları ve temel özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; diğer bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan topoloji, metrik ve kategori teori ile ilişkili bazı temel kavramlar hatırlatılacaktır.

2.1 Topoloji ve Metriğe İlişkin Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere; X kümesinin iki elemanlı her alt kümesi, X içinde infimum ve supremum değerlerine sahip ise $(X, \leq)$ ikilisine **latis** adı verilir (Bourbaki 1968).

Tanım 2.2 X bir latıs ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda; aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise Y kümesine **ideal** adı verilir.

I1) $\forall x, y \in Y : x \vee y \in Y$

I2) $x \in Y, t \in X$ ve $t \leq x \Rightarrow t \in Y$ (Birkhoff 1961).

Tanım 2.3 X bir küme ve $\mathfrak{F} \subset 2^X$ olmak üzere;

F1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

F2) $F, G \in \mathfrak{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathfrak{F}$

F3) $F \in \mathfrak{F}, F \subseteq G \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$

özelliklerini sağlayan $\mathfrak{F}$ ailesine X üzerinde bir **süzgeç** adı verilir (Bourbaki 1966).

X kümesi üzerinde tanımlı tüm süzgeçlerin ailesi $\mathbf{F}(X)$ ile gösterilecektir.

$\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere;

$$\mathfrak{F} \leq \mathcal{G} \iff \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{G}$$

biçiminde tanımlanan “ $\leq$ ” bağıntısı, $\mathbf{F}(X)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Eğer; $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ise, $\mathcal{G}$ süzgeci $\mathfrak{F}$ süzgecinden **daha incedir** ya da $\mathfrak{F}$ süzgeci $\mathcal{G}$ süzgecinden **daha kabadır** denir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.4 X bir küme, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$, $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ olsun. Eğer;

$$\forall F \in \mathfrak{F} : \exists B \in \mathfrak{B} \ni B \subseteq F$$

oluyorsa, $\mathfrak{B}$ ailesi $\mathfrak{F}$ **süzgeci için bir taban**dır denir. Bu durumda;

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathfrak{B} : B \subseteq F\}$$

biçiminde ifade edilir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.5 X bir küme, $\mathfrak{B} \subset 2^X$ olsun. $\mathfrak{B}$ ailesi

i) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$

ii) $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists C \in \mathfrak{B} \ni C \subseteq A \cap B$

özelliklerini sağlıyor ise $\mathfrak{B}$ ailesine, X üzerinde bir **süzgeç tabanı** adı verilir (Bourbaki 1966).

$\mathfrak{B}$ ailesinin X üzerinde ürettiği süzgeç,

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathfrak{B} : B \subseteq F\}$$

dir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.6 (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olsun. (X, τ) topolojik uzayında x noktasının komşuluklar ailesi $\mathcal{V}_\tau(x)$ ile gösterilsin. Eğer;

i) $\mathcal{V}_\tau(x) \subseteq \mathfrak{F}$ ise, $\mathfrak{F}$ süzgeci x noktasına yakınsar denir,

ii) Her $F \in \mathfrak{F}$ ve her $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$ için $V \cap F \neq \emptyset$ oluyor ise, x noktası $\mathfrak{F}$ süzgecinin bir yığılma noktasıdır denir (Bourbaki 1966).

Bu iki durum sırasıyla $\mathfrak{F} \rightarrow x$ ve $\mathfrak{F} \rightsquigarrow x$ gösterimleri ile ifade edilir.

Tanım 2.7 X bir küme ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Eğer, $\mathfrak{F}$ süzgecinden daha ince başka bir süzgeç bulunamıyor ise $\mathfrak{F}$ süzgecine **ultrasüzgeç** adı verilir (Bourbaki 1966).

X kümesi üzerinde tanımlı tüm ultrasüzgeçlerin ailesi $\mathbf{U}(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.8 X bir küme, I bir indis kümesi, $\{(Y_\beta, \tau_\beta)\}_{\beta \in I}$ topolojik uzaylarının bir ailesi ve $\{f_\beta : X \longrightarrow Y_\beta\}_{\beta \in I}$ bir fonksiyonlar ailesi olsun.

$$\mathcal{S}_\beta := \{f_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \in \tau_\beta\}$$

olmak üzere $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in I} \mathcal{S}_\beta$ ailesi, X üzerinde bir topoloji için alttabandır. $\mathcal{S}$ ailesi tarafından üretilen topolojiye $\{f_\beta : X \longrightarrow Y_\beta\}_{\beta \in I}$ ailesine karşılık gelen **başlangıç topolojisi** (zayıf topoloji) adı verilir (Munkres 1975).

Tanım 2.9 $\{(X_\beta, \tau_\beta)\}_{\beta \in I}$ topolojik uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\beta \in I} X_\beta$ olsun. $\beta \in I$ için β -ıncı izdüşüm fonksiyonu π_β ile gösterilmek üzere, $\{\pi_\beta\}_{\beta \in I}$ ailesinin X üzerinde ürettiği başlangıç topolojisine özel olarak; **çarpım topolojisi** adı verilir (Munkres 1975).

Tanım 2.10 X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bire-bir fonksiyon olsun. Eğer;

$$\begin{aligned} f' : X &\longrightarrow f(X) \\ x &\longrightarrow f'(x) = f(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı f' fonksiyonu bir homeomorfizm oluyorsa, f fonksiyonuna **topolojik gömülme** adı verilir (Munkres 1975).

Çalışmamız boyunca metrik ve quasi-metrik kavramları alışlagelmışten biraz daha genel fonksiyonlar için kullanılacaktır. X bir küme olmak üzere $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu, her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$ koşulunu ve üçgen eşitsizliğini sağlıyorsa, d fonksiyonu bir **quasimetrik** olarak adlandırılacaktır. d quasimetriğinin simetri koşulunu sağlaması durumunda ise, d fonksiyonu **metrik** olarak adlandırılacaktır. (X, d) quasimetrik (metrik) uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere; x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar $B_d(x, \varepsilon)$, x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar $B_d[x, \varepsilon]$ ile ifade edilecektir. Ayrıca $A \subseteq X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere;

$$A^{(\varepsilon)} := \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlanır (Munkres 1975).

(X, d) ve (X', d') iki quasimetrik uzay ve $f : X \longrightarrow X'$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\forall x, y \in X : d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna **genişlemeyen dönüşüm** adı verilir.

Tanım 2.11 (X, τ) bir topolojik uzay ve d , X üzerinde tanımlı bir metrik olsun. Bu durumda; d metriği tarafından üretilen τ_d topolojisi ile τ çakışıyor ise (X, τ) topolojik uzayı **metrikleşebilir** denir (Munkres 1975).

Tanım 2.12 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X kümesinin sayılabilir ve yoğun en az bir alt kümesi varsa (X, τ) uzayına **ayrılabilir** denir (Munkres 1975).

Tanım 2.13 (X, τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\forall h > f(x_0) : \exists U \in \mathcal{V}_{(x_0)} \ni \forall u \in U : h > f(u)$$

oluyor ise, f fonksiyonu x_0 noktasında **üstten yarı-süreklidir** denir (Bourbaki 1968).

Tanım 2.14 X bir küme ve $cl : 2^X \longrightarrow 2^X$ operatörü,

C1) $cl(\emptyset) = \emptyset,$

C2) $\forall A \subseteq X : A \subseteq cl(A),$

C3) $\forall A, B \subseteq X : cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B),$

C4) $\forall A \subseteq X : cl(cl(A)) = cl(A)$

özelliklerini sağlıyor ise cl operatörüne X üzerinde bir **topolojik kapanış operatörü** adı verilir. cl operatörü sadece **C1-C2-C3** özelliklerini sağlıyor ise **pre-topolojik kapanış operatörü** adını alır (Čech 1966).

Tanım 2.15 X bir küme ve $* : X \times X \longrightarrow X$ fonksiyonu

i) $\forall x, y \in X : x * y \in X$

ii) $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$

özelliklerini sağlıyor ise $(X, *)$ ikilisine bir **yarıgrup** adı verilir (Halıcıoğlu 2014).

Tanım 2.16 L boş kümeden farklı bir indis kümesi, her $\lambda \in L$ için $J_\lambda \neq \emptyset$ ve $(X_{\lambda,j})_{j \in J_\lambda, \lambda \in L}$ bir kümeler ailesi olsun. $I = \prod_{\lambda \in L} J_\lambda$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler

mevcuttur.

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in L} \left(\bigcap_{j \in J_\lambda} X_{\lambda,j} \right) &= \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{\lambda \in L} X_{\lambda,f(\lambda)} \right) \\ \bigcap_{\lambda \in L} \left(\bigcup_{j \in J_\lambda} X_{\lambda,j} \right) &= \bigcup_{f \in I} \left(\bigcap_{\lambda \in L} X_{\lambda,f(\lambda)} \right) \end{aligned}$$

Bu özelliğe kısaca; tam dağılım özelliği adı verilmektedir (Bourbaki 1968).

Tanım 2.17 X bir küme ve R , X üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Bu durumda; X kümesinin her bir elemanı, X kümesinin bir alt kümesi oluyorsa ve X kümesi, R bağıntısına göre iyi sıralı ise, X kümesine bir **ordinal sayı** adı verilir. $0 = \emptyset$ en küçük ordinal sayıdır ve her bir ordinal sayı, kendisinden önce gelen ordinallerin iyi sıralı bir kümesidir. α bir ordinal sayı olmak üzere; α dan büyük olan en küçük ordinal sayıya α nın **önde geleni** adı verilir ve $\alpha + 1$ biçiminde ifade edilir. Herhangi bir ordinal sayının önde geleni olmayan, sıfırdan farklı ordinal sayıya **limit ordinal** adı verilir (Jech 1978).

Tanım 2.18 X bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \theta_A : X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longrightarrow \theta_A(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in A \\ \infty & , \quad x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona A **kümesinin gösterge** fonksiyonu (indicator function) adı verilir. Herhangi bir $w < \infty$ için $\theta_A^w = \theta_A \wedge w$ dir.

2.2 Kategori Teoriye İlişkin Bazı Temel Kavramlar

Matematiksel bir yapı inşa etmek isteyen her araştırmacı, bu yapı ile eş anlamlı bir matematiksel yapı olup olmadığını ve bu yapının mevcut yapılar ile arasındaki ilişkileri araştırmak zorundadır. Bu aşamada, ihtiyaç duyulan kavram kategori teoridir.

Kategori tanımı ve kategori örneklerini vermeden önce aşağıdaki tabloyu inceleyelim:

Yapılar	Yapıyı Koruyan Dönüşümler	
Kümeler Sınıfı	Fonksiyonlar	Set
Topolojik Uzaylar	Sürekli Fonksiyonlar	Top
Metrik Uzaylar	Genişlemeyen Dönüşümler	Met
Vektör Uzaylar	Lineer Dönüşümler	Vec

Birinci sütuna, her bir ögesi üzerinde bir matematiksel yapı olan aileler, ikinci sütuna bu ögeler arasındaki matematiksel özellikleri taşıyan dönüşümler yazılmıştır. Her bir satır, birer kategori örneğidir.

Tanım 2.19 Bir $\mathcal{C}$ kategorisi aşağıda verilen parçalardan oluşur;

- i) Elemanları $\mathcal{C}$ -nesnelerden oluşan ve $|\mathcal{C}|$ biçiminde ifade edilen bir sınıf,
- ii) $\mathcal{C}$ -nesnelerin keyfi bir (A, B) çifti için $\mathcal{C}(A, B)$ biçiminde gösterilen ve $A \longrightarrow B$ tanımlı morfizmler kümesi,
- iii) Her $A \in |\mathcal{C}|$ için $I_A : A \longrightarrow A$ biçiminde tanımlı birim dönüşümler,
- iv) $\mathcal{C}$ -nesnelerden oluşan her (A, B, D) üçlüsü için

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, D) &\longrightarrow \mathcal{C}(A, D) \\ (f, g) &\longrightarrow f \circ g \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı ve

$$\forall B, C \in |\mathcal{C}|, \forall f \in \mathcal{C}(A, B), \forall g \in \mathcal{C}(C, A) : f \circ I_A = f \text{ ve } I_A \circ g = g$$

özellikliğini sağlayan fonksiyon olmalıdır. Burada; $\mathcal{C}(A, B)$ kümelerinin ikişer ikişer ayrık olduğu unutulmamalıdır (Adámek vd. 1990).

Tanım 2.20 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{A}$ iki kategori olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ kategorisi $\mathcal{C}$ nin bir **alt kategorisi**dir denir.

- i) $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$
- ii) $\forall A, B \in |\mathcal{A}| : \mathcal{A}(A, B) \subset \mathcal{C}(A, B)$
- iii) $\mathcal{A}$ kategorisi üzerindeki bileşke işlemi, $\mathcal{C}$ kategorisi üzerindeki bileşke işleminin $\mathcal{A}$ ya kısıtlamasıdır.

iv) Her $A \in |\mathcal{A}|$ için I_A birim morfizmi $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{A}$ kategorilerinde aynı morfizmdir (Adámek vd. 1990).

Tanım 2.21 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ biçiminde tanımlı olmak üzere; $\mathcal{C}$ kategorisindeki her A nesnesi için $F(A)$ da $\mathcal{D}$ kategorisinde nesne, $\mathcal{C}$ kategorisindeki her $f : A \longrightarrow B$ dönüşümü için $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ dönüşümü de $\mathcal{D}$ kategorisinde bir dönüşüm oluyorsa ve aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise, F dönüşümüne $\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathcal{D}$ kategorine tanımlı bir **funktor** adı verilir.

i) $\forall A \in |\mathcal{C}| : F(I_A) = I_{F(A)}$

ii) $\forall f, g \in Mor(\mathcal{C}) : F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

(Adámek vd. 1990).

Tanım 2.22 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ biçiminde tanımlı fonksiyon bu iki kategori arasında tanımlı bir funktor olsun. Bu durumda;

i) F morfizmler üzerinde bire-bir ise F funktoruna **gömülme (embedding) funktor** denir.

ii) $\forall A, B \in |\mathcal{C}|$ için $F : \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B))$ dönüşümü bire-bir ise F funktoruna **düzenli (faithfull) funktor** denir.

iii) $\forall A, B \in |\mathcal{C}|$ için $F : \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B))$ dönüşümü örten ise F funktoruna **dolu (full) funktor** denir.

(Adámek vd. 1990).

Tanım 2.23 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{C}$ iki kategori ve $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ nin bir alt kategorisi olsun. $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ funktoru her $A \in |\mathcal{A}|$ ve her $f \in Mor(\mathcal{A})$ için $F(A) := A$ ve $F(f) := f$ biçiminde tanımlı ise F funktoruna **içerme funktoru** denir.

Tanım 2.24 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ biçiminde tanımlı fonksiyon bu iki kategori arasında tanımlı bir funktor olsun. Bu durumda; $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ biçiminde tanımlı ve $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$, $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$ eşitliklerini sağlayan bir G funktoru varsa F funktoruna **izomorfizm** adı verilir. $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru izomorfizm ise $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri **izomorf kategorilerdir**. (Adámek vd. 1990).

Tanım 2.25 $\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere; $U : \mathcal{C} \longrightarrow SET$ biçiminde tanımlı en azından bir düzenli fonktor bulunabiliyor ise $\mathcal{C}$ kategorisine **belirli (concrete) kategori**, U dönüşümüne ise **unutkan (forgetful) fonktor** adı verilir (Adámek vd. 1990).

Nesneleri metrik uzaylar, dönüşümleri genişlemeyen dönüşümler olan fonksiyonlardan oluşan kategori metrik uzaylar kategorisi olarak adlandırılır ve kısaca **Met** ile gösterilir. Nesneleri quasimetrik uzaylar, dönüşümleri genişlemeyen dönüşümler olan fonksiyonlardan oluşan kategori quasimetrik uzaylar kategorisi olarak adlandırılır ve kısaca **qMet** ile gösterilir. Set, Top, Met ve qMet kategorileri belirli kategori örnekleridir.

Tanım 2.26 $\mathcal{C}$ bir belirli kategori olsun. Bu durumda; aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise, $\mathcal{C}$ ye **topolojik kategori** adı verilir.

i) Başlangıç yapıları mevcuttur:

X bir küme I bir indis kümesi olmak üzere; $\mathcal{C}$ -nesnelerin bir $(X_i, \xi_i)_{i \in I}$ ailesi ve $(f_i : X \longrightarrow X_i)_{i \in I}$ fonksiyonlar ailesi için, X üzerinde bir tek ξ , $\mathcal{C}$ -yapısı

$$(f_i : X \longrightarrow (X_i, \xi_i))_{i \in I}$$

ailesine karşılık gelen başlangıç yapısıdır. Yani; her $(Y, \eta) \in |\mathcal{C}|$ için, bir

$$g : (Y, \eta) \longrightarrow (X, \xi)$$

dönüşümünün $\mathcal{C}$ -morfizm olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall i \in I \text{ için } f_i \circ g : (Y, \eta) \longrightarrow (X_i, \xi_i)$$

dönüşümlerinin birer $\mathcal{C}$ -morfizm olmasıdır.

ii) Her X kümesi için, X üzerinde tanımlanabilen $\mathcal{C}$ -yapıların ailesi bir kümedir.

iii) Tek elemanlı her küme üzerinde bir tek $\mathcal{C}$ -yapı tanımlıdır.

(Preuss 1987).

Tanım 2.27 $\mathcal{C}$ bir belirli kategori ve X , $\mathcal{C}$ nin bir nesnesi olsun. Eğer her Y kümesi için X nesnesinden Y kümesine tanımlı her fonksiyon bir $\mathcal{C}$ -morfizm oluyorsa X nesnesine **ayrık nesne**, Y kümesinden X nesnesine tanımlı her fonksiyon bir $\mathcal{C}$ -morfizm oluyorsa X nesnesine **ayrık olmayan nesne** denir (Adámek vd. 1990).

Tanım 2.28 $\mathcal{C}$ bir kategori, $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ nin bir alt kategorisi ve $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ biçiminde tanımlı bir içme fonktörü olsun. Bu durumda;

i) $\mathcal{C}$ nin her X nesnesi için $\mathcal{A}$ nın bir $X_{\mathcal{A}}$ nesnesi ve bir $r_X : X \longrightarrow X_{\mathcal{A}}$ morfizmi, $\mathcal{A}$ nın her Y nesnesi ve $f : X \longrightarrow Y$ biçiminde tanımlı her $\mathcal{C}$ -morfizm için bir tek $f_* : X_{\mathcal{A}} \longrightarrow Y$ $\mathcal{A}$ -morfizmi $f_* \circ r_X = f$ olacak biçimde tanımlanabiliyor ise $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ **içinde yansımalıdır** denir. Bu durumda; r_X dönüşümü X nesnesinin $\mathcal{A}$ **yansıması** olarak adlandırılır veya $X_{\mathcal{A}}$ nesnesine X nesnesinin $\mathcal{A}$ **yansıması** adı verilir (Herrlich 1983).

ii) $\mathcal{C}$ nin her X nesnesi için $\mathcal{A}$ nın bir $X_{\mathcal{A}}$ nesnesi ve bir $m_X : X_{\mathcal{A}} \longrightarrow X$ morfizmi, $\mathcal{A}$ nın her Y nesnesi ve $f : Y \longrightarrow X$ biçiminde tanımlı her $\mathcal{C}$ -morfizm için bir tek $f^* : Y \longrightarrow X_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$ -morfizmi $m_X \circ f^* = f$ olacak biçimde tanımlanabiliyor ise $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ **içinde ko-yansımalıdır** denir. Bu durumda; m_X dönüşümü X nesnesinin $\mathcal{A}$ **ko-yansıması** olarak adlandırılır veya $X_{\mathcal{A}}$ nesnesine X nesnesinin $\mathcal{A}$ **ko-yansıması** adı verilir (Herrlich 1983).

3. YAKLAŞMA UZAYLARI

Yaklaşma uzayları; uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi, ölçek, zarf operatörü, komşuluk sistemi, kapanış kulesi, fonksiyonel ideal yakınsaklık ve fonksiyon çatısı olarak adlandırılan, matematiksel olarak eş kavramlardan herhangi biri ile karakterize edilebilir. Bu kavramların tümünü aynı anda incelemek, kısıtlı bir süre zarfında mümkün olmadığından tez çalışmamızı; teoremin iskeleti olarak değerlendirilebilecek olan uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi ve ölçek olarak adlandırılan kavramlar üzerinde yoğunlaştırdık. İlk olarak; bu kavramlar tanımlanarak temel özellikleri verilecektir. Daha sonra, bu kavramların matematiksel olarak eş yapılar olduğunun nasıl elde edildiği açıklanacaktır.

3.1 Yaklaşma Uzaylarını Karakterize Eden Matematiksel Yapılar

Çalışmamız boyunca; $[0, \infty]$ kapalı aralığı, üzerinde tanımlı alışılmış sıralama bağıntısı, tam latis yapısı ve toplamsal yarıgrup yapısıyla ele alınacaktır. $x \in [0, \infty)$ olmak üzere

$$x + \infty = \infty + x = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty - x = \infty$$

$$\infty - \infty = 0$$

olarak kabul edilecektir. $[0, \infty]$ kapalı aralığı toplamsal yarıgrup olduğundan, çıkarma işlemine ihtiyaç duyduğumuz durumlarda,

$$\forall a, b \in [0, \infty] : a \ominus b = (a - b) \vee 0$$

biçiminde tanımlı " $\ominus$ " işlemi kullanılacaktır. Kısalık açısından, $[0, \infty]$ kapalı aralığı $\mathbb{P}$ ile gösterilecektir.

3.1.1 Uzaklık Fonksiyonu

Bir X kümesinin herhangi iki noktası arasındaki uzaklık, yani "metrik" kavramı, ilk olarak 1906 yılında Fréchet tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra, 1914 yılında

Hausdorff bir (X, d) metrik uzayında, bir noktanın bir kümeye olan uzaklığını;

$$\begin{aligned}\delta_d : X \times 2^X &\longrightarrow [0, \infty] \\ (x, A) &\longrightarrow \delta_d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)\end{aligned}$$

fonksiyonu yardımıyla ifade etmiştir. Lowen, bu kavramın daha soyut matematiksel yapılar üzerinde ifade edilip edilemeyeceğini araştırmış ve 1987 yılında herhangi bir X kümesi üzerinde bir noktanın bir kümeye olan uzaklığını,

$$\begin{aligned}\delta : X \times 2^X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta(x, A)\end{aligned}\tag{3.1}$$

biçiminde tanımlı ve belirli koşulları sağlayan bir fonksiyon yardımıyla tanımlamıştır. Böylece, Hausdorff tarafından ifade edilen tanımın analoğu; X bir topoloji ile donatıldığında, hatta X bir düzgünlük yapısı ile donatıldığında da verilebilecektir. Uzaklık fonksiyonu tanımını vermeden önce, bu tanımlı verirken kullanacağımız bir kavramı ifade edelim. Herhangi bir X kümesi verilsin ve δ fonksiyonu (3.1) de ifade edildiği gibi alınsın. Bu durumda, $A \subseteq X$ ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olmak üzere;

$$A^{(\varepsilon)} := \{x \in X \mid \delta(x, A) \leq \varepsilon\}$$

dir.

Tanım 3.1 X bir küme olmak üzere,

$$\delta : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$$

fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlıyor ise, δ fonksiyonuna **uzaklık fonksiyonu** adı verilir.

D1) $\forall A \subseteq X : x \in A \Rightarrow \delta(x, A) = 0,$

D2) $\forall x \in X : \delta(x, \emptyset) = \infty,$

D3) $\forall x \in X, \forall A, B \subseteq X : \delta(x, A \cup B) = \min \{\delta(x, A), \delta(x, B)\},$

D4) $\forall x \in X, \forall A \subseteq X, \forall \varepsilon \in \mathbb{P} : \delta(x, A) \leq \delta(x, A^{(\varepsilon)}) + \varepsilon$

dur (Lowen 1989).

Örnek 3.1 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere,

$$\delta_\tau : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$(x, A) \longrightarrow \delta_\tau(x, A) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in cl_\tau(A) \\ \infty & , \quad x \notin cl_\tau(A) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur.

Önerme 3.1 X bir küme ve $\delta : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $\forall x \in X, \forall A, B \subseteq X : A \subseteq B \Rightarrow \delta(x, B) \leq \delta(x, A)$,
 - ii) $\forall x \in X, \forall \mathcal{A} \subseteq 2^X, \mathcal{A}$ sonlu elemanlı için $\delta(x, \bigcup \mathcal{A}) = \min_{A \in \mathcal{A}} \delta(x, A)$,
 - iii) $\forall x \in X, \forall A, B \subseteq X : \delta(x, A) \leq \delta(x, B) + \sup_{b \in B} \delta(b, A)$
- dır (Lowen 1989).

İspat. i) $A \subseteq B$ olsun. (D3) özelliğinden; $\delta(x, B) = \delta(x, A \cup B) \leq \delta(x, A)$ dır.

ii) $x \in X, \mathcal{A} = (A_k)_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} \subseteq 2^X$ olsun. Eşitliğin gerçekleştiğini tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayalım. $n - 1 \in \mathbb{N}$ için

$$\delta(x, \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) = \min_{1 \leq k \leq n-1} \delta(x, A_k) \quad (3.2)$$

eşitliğinin gerçekleştiğini kabul edelim. Bu durumda, n için

$$\delta(x, \bigcup_{k=1}^n A_k) = \delta\left(x, \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \cup A_n\right)$$

yazılabilir. (3.2) ve (D3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \delta(x, \bigcup_{k=1}^n A_k) &= \min \left\{ \delta(x, \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k), \delta(x, A_n) \right\} \\ &= \min \left\{ \min_{1 \leq k \leq n-1} \delta(x, A_k), \delta(x, A_n) \right\} \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} \delta(x, A_k) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olsun. $\varepsilon = \inf \{ \theta \in \mathbb{P} \mid B \subset A^{(\theta)} \}$ ve $y \in B$ alınırsa, $B \subset A^{(\theta)}$ koşulunu sağlayan her θ için $y \in A^{(\theta)}$ olacağından $\delta(y, A) \leq \theta$ dır. Bu durumda, $\delta(y, A) \leq \inf \theta = \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $B \subset A^{(\varepsilon)}$ olur ve (i) özelliğinden,

$$\delta(x, A^{(\varepsilon)}) \leq \delta(x, B) \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca; $t > 0$ olmak üzere $\sup_{b \in B} \delta(b, A) < t$ olduğu kabul edilirse, $B \subset A^{(t)}$ bulunur ve

$$\varepsilon = \inf \{ \theta \in \mathbb{P} \mid B \subset A^{(\theta)} \} \leq t \quad (3.4)$$

eşitsizliği gerçekleşir. O halde; $\varepsilon \leq \sup_{b \in B} \delta(b, A)$ dır. Böylece; (3.3) ve (3.4) eşitsizlikleri ve (D4) kullanılırsa

$$\delta(x, A) \leq \delta(x, B) + \sup_{b \in B} \delta(b, A)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

3.1.2 Limit Operatörü

Limit operatörü; bir noktanın, bir süzgecin limit noktası olmaya ne kadar yakın olduğunu ölçen bir fonksiyon olarak değerlendirilebilir. Öncelikle; bu operatörü tanımlarken kullanacağımız notasyonları ve kavramları ifade edelim. X kümesi üzerinde tanımlı tüm süzgeçlerin ailesi $\mathbf{F}(X)$ ve tüm ultrasüzgeçlerin ailesi $\mathbf{U}(X)$ ile gösterilecektir. Ayrıca, bir $\mathfrak{F}$ süzgecinden ince olan tüm süzgeçlerin (ultrasüzgeçlerin) ailesi $\mathbf{F}(\mathfrak{F})(\mathbf{U}(\mathfrak{F}))$ ile gösterilecektir. X bir küme ve $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ olmak üzere, $\mathcal{A}$ ailesinin yığını;

$$stack\mathcal{A} := \{B \subseteq X \mid \exists A \in \mathcal{A} : A \subseteq B\}$$

biçiminde tanımlanır. $stack\mathcal{A}$ ailesi süzgeç olmak zorunda değildir. Eğer, $\mathcal{A}$ ailesi bir süzgeç tabanı ise, $stack\mathcal{A}$ süzgeç olup $\mathcal{A}$ süzgeç tabanının ürettiği süzgeçtir. Özel olarak; $\mathcal{A}$ ailesi yerine $A \subseteq X$ alt kümesi alınır,

$$stackA = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\}$$

ailesi bir süzgeç olur ve $stackA$ kısaca $\overset{\bullet}{A}$ ile gösterilir. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ süzgecinin keseni;

$$sec\mathfrak{F} := \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \mathcal{U} = \{A \subseteq X \mid \forall F \in \mathfrak{F} : A \cap F \neq \emptyset\} \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanır. $sec\mathfrak{F}$ ailesi süzgeç olmak zorunda değildir, ancak daima

$\mathfrak{F} \subseteq sec\mathfrak{F}$ dir. $A \subseteq X$ ve $A \neq \emptyset$ ise, kolaylık sağlaması açısından $\mathbf{F}(stackA)$ yerine $\mathbf{F}(A)$, $\mathbf{U}(stackA)$ yerine ise $\mathbf{U}(A)$ gösterimleri kullanılacaktır (Dolecki ve Maynard 2016).

Örnek 3.2 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ topolojik uzayında, $\mathcal{A} = \{[0, 1], [2, 3]\}$ ailesi verilsin. Bu durumda, $stack\mathcal{A}$ süzgeç değildir.

Örnek 3.3 $\mathfrak{F} = stack\{[0, 1]\}$ süzgecinin keseni süzgeç değildir.

Tanım 3.2 X bir küme, J herhangi bir indis kümesi ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\sigma : J &\longrightarrow F(X) \\ j &\longrightarrow \sigma(j) = \mathfrak{F}_j\end{aligned}$$

olmak üzere; σ fonksiyonunun $\mathfrak{F}$ süzgecine göre **köşegen süzgeci**,

$$\sum \sigma(\mathfrak{F}) = \bigvee_{A \in \sigma(\mathfrak{F})} \bigcap_{\mathcal{G} \in A} \mathcal{G} = \bigvee_{F \in \mathfrak{F}} \bigcap_{j \in F} \sigma(j) \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlanır (Kowalsky 1954).

(3.6) eşitliğinde $\bigvee$ sembolü, bir süzgeçler ailesinin supremumu için kullanılmıştır ve bu supremum mevcuttur. Yukarıda tanımlanan σ fonksiyonu, her bir $j \in J$ indisine $\mathbf{F}(X)$ ailesinin bir tek $\mathfrak{F}_j$ süzgecini karşılık getirmektedir. Bu nedenle; $(\sigma(j))_{j \in J}$ ailesi, **X kümesi üzerinde tanımlı süzgeçlerin bir seçimi** olarak adlandırılır.

Önerme 3.2 J, L ve K boş kümeden farklı birer küme, $\sigma : J \rightarrow \mathbf{F}(X)$, $\gamma : L \rightarrow \mathbf{F}(J)$ ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } \sum \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} \bigcap_{j \in F} \sigma(j)$$

$$\text{ii) } \sum \sigma\left(\bigcap_{l \in L} \gamma(l)\right) = \bigcap_{l \in L} \sum \sigma(\gamma(l))$$

$$\text{iii) } \sum \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{\rho \in \prod_{j \in J} \mathbf{U}(\sigma(j))} \sum \rho(\mathfrak{F})$$

$$\text{iv) } \sum \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{\rho \in \prod_{j \in J} \mathbf{U}(\sigma(j))} \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \sum \rho(\mathcal{U})$$

v) (3.6) eşitliğinde; ele alınan tüm süzgeçler ultrasüzgeç ise, köşegen süzgeç de ultrasüzgeçtir (Lowen 1997).

Lemma 3.1 X bir küme ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Eğer; her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için bir $s(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ ögesi seçilebiliyor ise, $\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_s} s(\mathcal{U}) \in \mathfrak{F}$ olacak biçimde sonlu elemanlı bir $\mathbf{U}_s \subseteq \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ ailesi vardır (Lowen 1997).

İspat. $\mathfrak{F}$ bir süzgeç olmak üzere her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için bir $s(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ seçilebilsin. Ancak, $\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_s} s(\mathcal{U}) \in \mathfrak{F}$ olacak biçimde sonlu elemanlı bir $\mathbf{U}_s \subseteq \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ kümesi olmadığını kabul edelim. Dolayısıyla;

$$\mathfrak{F} \cup \{X \setminus s(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})\}$$

kümesi sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan, bir süzgeç tabanıdır ve böylece bir süzgeç üretir. Bu durumda,

$$\mathcal{G} := \mathfrak{F} \cup \{X \setminus s(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})\} \subset \mathcal{U}'$$

olacak biçimde bir $\mathcal{U}'$ ultrasüzgeci vardır. $\mathfrak{F} \subset \mathcal{U}'$ olduğundan $\mathcal{U}' \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ dir. O halde; $\mathcal{U}'$ süzgecine karşılık bir $s(\mathcal{U}') \in \mathcal{U}'$ vardır. Ancak; $X \setminus s(\mathcal{U}') \in \mathcal{U}'$ olduğundan çelişki elde edilir. ■

Lemma 3.2 X bir küme, $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(X)$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{P}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{y \in U} f(y) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{y \in U} f(y)$$

dir (Lowen ve Colebunders 1988).

İspat. $\alpha > 0$ olmak üzere $\inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{y \in U} f(y) < \alpha$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\exists U \in \mathcal{U} \ni \forall y \in U : f(y) < \alpha$$

dır. Ayrıca, her $V \in \mathcal{U}$ için $U \cap V \neq \emptyset$ olduğundan

$$\exists z_v \in U \cap V \ni f(z_v) < \alpha$$

olacaktır. Bu durumda,

$$\forall V \in \mathcal{U} : \inf_{z \in V} f(z) < \alpha$$

elde edilir. Böylece; $\sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{y \in U} f(y) \leq \alpha$ bulunur. Tersine; $\inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{y \in U} f(y) > \alpha$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\forall U \in \mathcal{U} : \exists y \in U \ni f(y) > \alpha$$

dır. Her $U \in \mathcal{U}$ için $y \in \{z \mid f(z) > \alpha\} \cap U$ olduğundan $\{z \mid f(z) > \alpha\} \in \text{sec } \mathcal{U} = \mathcal{U}$ dur. Ayrıca; $\inf_{y \in \{z \mid f(z) > \alpha\}} f(y) \geq \alpha$ olacaktır. O halde,

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{y \in U} f(y) \geq \alpha$$

dır. ■

Tanım 3.3 X bir küme olmak üzere,

$$\lambda : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, λ fonksiyonuna X üzerinde bir **limit operatörü** adı verilir.

$$\mathbf{L1}) \quad \forall x \in X : \left[\lambda(\dot{x}) \right] (x) = 0,$$

$$\mathbf{L2}) \quad J \text{ herhangi bir indis kümesi ve her } j \in J \text{ için } \mathfrak{F}_j \in \mathbf{F}(X) \text{ ise,}$$

$$\lambda \left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) = \sup_{j \in J} \lambda \mathfrak{F}_j \quad ,$$

$$\mathbf{L3}) \quad \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) \text{ ve } \forall \sigma : X \longrightarrow \mathbf{F}(X) \text{ fonksiyonu için,}$$

$$\lambda \left(\sum \sigma(\mathfrak{F}) \right) \leq \lambda \mathfrak{F} + \sup_{x \in X} \lambda(\sigma(x))(x)$$

dir (Lowen 1997).

Örnek 3.4 X bir küme olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda \mathfrak{F} = \begin{cases} \theta_{\{x\}} & , \quad \mathfrak{F} = \dot{x} \\ \infty & , \quad \mathfrak{F} \neq \dot{x} \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyon X üzerinde bir limit operatörüdür.

Teorem 3.1 X bir küme ve $\lambda : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$ fonksiyonu (L1) özelliğini sağlasın.

Bu durumda, λ fonksiyonunun limit operatörü olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathbf{L2w}) \quad \forall \mathcal{G}, \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) \ni \mathcal{G} \subseteq \mathfrak{F} : \lambda \mathfrak{F} \leq \lambda \mathcal{G}$$

ve

$$\mathbf{L}) \quad \forall J \neq \emptyset, \forall \psi : J \longrightarrow X, \forall \sigma : J \longrightarrow \mathbf{F}(X), \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J) \text{ için,}$$

$$\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) \leq \lambda(\psi(\mathfrak{F})) + \sup_{j \in J} \lambda(\sigma(j))(\psi(j))$$

özelliklerinin sağlanmasıdır (Lowen 1997).

İspat. λ fonksiyonu bir limit operatörü olsun. Bu durumda; (L2w) özelliğinin sağlandığı açıktır. (L) özelliğinin sağlandığını gösterelim. $J \neq \emptyset$, $\psi : J \longrightarrow X$, $\sigma : J \longrightarrow \mathbf{F}(X)$ ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$ olsun.

$$\begin{aligned} \rho : X &\longrightarrow \mathbf{F}(X) \\ x &\longrightarrow \rho(x) = \begin{cases} \dot{x} & , \quad x \notin \psi(J) \\ \bigcap_{j \in \psi^{-1}(x)} \sigma(j) & , \quad x \in \psi(J) \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. $\psi(\mathfrak{F})$ ile, $\mathfrak{F}$ süzgecinin öğelerinin ψ fonksiyonu altındaki görüntülerinin kümesi tarafından üretilen süzgeç gösterilsin. Bu durumda; $\psi(\mathfrak{F})$ süzgeci ve $(\rho(x))_{x \in X}$ seçimi için (L3) ifade edilebilir. Ayrıca, (L) özelliğinin sağlandığını görmek için

$$\sum \rho(\psi(\mathfrak{F})) \subseteq \sum \sigma(\mathfrak{F}) \quad (3.7)$$

kapsamasına ihtiyaç duyulacaktır. Öncelikle (3.7) nin doğru olduğunu gösterelim.

$W \in \sum \rho(\psi(\mathfrak{F}))$ olsun. (3.6) kullanılırsa;

$$\exists \mathcal{G} \in \psi(\mathfrak{F}) \ni \forall x \in \mathcal{G} : W \in \rho(x) \quad (3.8)$$

dir. $\mathcal{G} \in \psi(\mathfrak{F})$ olduğundan en azından bir $J_F \in \mathfrak{F}$ için $\psi(J_F) \subset \mathcal{G}$ dir. O halde,

$$\forall j \in J_F : \psi(j) \in \mathcal{G} \quad (3.9)$$

olur ve (3.8) kullanılırsa, her $j \in J_F$ için $W \in \rho(\psi(j))$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, her $j \in J_F$ için $j \in \psi^{-1}(\psi(j))$ olduğundan ρ fonksiyonunun tanımından $W \in \sigma(j)$ dir. Böylece; en azından bir $J_F \in \mathfrak{F}$ için $W \in \bigcap_{j \in J_F} \sigma(j)$ olduğu elde edilir ve (3.7)

ile verilen kapsama sağlanır. Sırasıyla; (3.7), (L2W), (L3), ρ fonksiyonunun tanımı, (L1) ve (L2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) &\leq \lambda(\sum \rho(\psi(\mathfrak{F}))) \\
&\leq \lambda(\psi(\mathfrak{F})) + \sup_{x \in X} \lambda(\rho(x))(x) \\
&= \lambda(\psi(\mathfrak{F})) + \sup_{x \in \psi(J)} \lambda\left(\bigcap_{j \in \psi^{-1}(x)} \sigma(j)\right)(x) \\
&= \lambda(\psi(\mathfrak{F})) + \sup_{j \in J} \lambda(\sigma(j))(\psi(j))
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve (L) özelliği sağlanır. Diğer yandan, (L2w) ve (L) özelliklerinin sağlandığını kabul edelim. (L3) özelliğinin sağlandığını görmek için; (L) özelliğini $J := X$ ve $\psi = id_X$ seçerek yazmak yeterlidir. Son olarak; (L2) özelliğinin sağlandığını gösterelim; $x \in X$, J herhangi bir indis kümesi ve her $j \in J$ için $\mathfrak{F}_j \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\sigma : J &\longrightarrow \mathbf{F}(X), \sigma(j) = \mathfrak{F}_j \\
\psi : J &\longrightarrow X, \psi(j) = x \\
\mathfrak{F} &:= \{J\}
\end{aligned}$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sum \sigma(\mathfrak{F}) &= \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \\
\lambda\psi(\mathfrak{F})(x) &= 0 \\
\sup_{j \in J} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) &= \sup_{j \in J} \lambda(\mathfrak{F}_j)(x)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. (L) özelliği ve (3.10) kullanılırsa,

$\lambda\left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right) \leq \sup_{j \in J} \lambda\mathfrak{F}_j$ eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan, her $j \in J$ için $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \subset \mathfrak{F}_j$ kapsaması mevcut olduğundan (L2w) özelliği kullanılarak, $\sup_{j \in J} \lambda\mathfrak{F}_j \leq \lambda\left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$ eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 3.2 X bir küme olmak üzere $\lambda : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$ fonksiyonu (L1) ve (L2w) özelliklerini sağlasın. Bu durumda, λ fonksiyonunun limit operatörü olması için gerek ve yeter koşul

$\mathbf{L}^*) \forall J \neq \emptyset, \forall \psi : J \longrightarrow X, \forall \sigma : J \longrightarrow \mathbf{F}(X)$ ve $\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$ için

$$\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) \leq \lambda(\psi(\mathfrak{F})) + \inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{j \in F} \lambda(\sigma(j))(\psi(j))$$

özelliğinin sağlanmasıdır (Lowen 1997).

İspat. λ fonksiyonu bir limit operatörü olsun. Teorem 3.1 den, λ fonksiyonu (L) özelliğini sağlar. O halde; $J \neq \emptyset, \psi : J \longrightarrow X$, $\sigma : J \longrightarrow \mathbf{F}(X)$ ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$ olmak üzere,

$$\sup_{j \in J} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) \leq \inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{j \in F} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) \quad (3.11)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilirse $(\mathbf{L}^*)$ özelliği elde edilir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$\inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{j \in F} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) < \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$\exists F_\varepsilon \in \mathfrak{F} : \sup_{j \in F_\varepsilon} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) < \varepsilon$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \sigma' : J &\longrightarrow \mathbf{F}(X) \\ j &\longrightarrow \sigma'(j) := \begin{cases} \text{stack} \psi(j) & , \quad j \notin F_\varepsilon \\ \sigma(j) & , \quad j \in F_\varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda; $\{F \in \mathfrak{F} \mid F \subseteq F_\varepsilon\}$ ailesi, $\mathfrak{F}$ süzgeci için bir süzgeç tabanı olduğundan $\sigma'(F) = \sigma(F)$ elde edilir. (L1) özelliği ve σ' dönüştürmenin tanımından,

$$\sup_{j \in J} \lambda(\sigma'(j))(\psi(j)) = \sup_{j \in F_\varepsilon} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) < \varepsilon$$

elde edilir ve böylece (3.11) eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan, (L1) ve (L2w) özelliklerini sağlayan λ fonksiyonunun $(\mathbf{L}^*)$ özelliğini de sağladığını kabul edelim. λ fonksiyonunun Teorem 3.1 de verilen (L) özelliğini sağladığı gösterilebilir ise limit operatörü olduğu ispatlanmış olur. $J \neq \emptyset, \psi : J \rightarrow X, \sigma : J \rightarrow \mathbf{F}(X)$ ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$ olsun. Bu durumda $(\mathbf{L}^*)$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) &\leq \lambda(\psi \mathfrak{F}) + \inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{j \in F} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) \\ &\leq \lambda(\psi \mathfrak{F}) + \sup_{j \in F} \lambda(\sigma(j))(\psi(j)) \end{aligned}$$

elde edilir ve (L) özelliği sağlanır. ■

Teorem 3.3 X bir küme olmak üzere, $\lambda : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$ fonksiyonu (L1) ve (L2) özelliklerini sağlasın. Bu durumda λ fonksiyonunun limit operatörü olması için gerek ve yeter koşul

L3*) $\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $\forall \sigma : X \longrightarrow \mathbf{F}(X)$, $(\sigma(x))_{x \in X}$ seçimi için

$$\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) \leq \lambda \mathfrak{F} + \inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{x \in F} \lambda(\sigma(x))(x)$$

özellığının sağlanmasıdır (Lowen 1997).

İspat. Teorem 3.2 nin ispatına benzer şekilde kolayca gösterilebilir. ■

Buraya kadar ele alınan karakterizasyonlar, süzgeçler yardımıyla formülize edilmiştir. Ancak, limit operatörü özel olarak ultrasüzgeçler yardımıyla da tanımlanabilir. Gerçekten, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda \mathfrak{F}$ fonksiyonu

$$\lambda \mathfrak{F} = \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda \mathcal{U} \quad (3.12)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Lemma 3.3 X bir küme, J herhangi bir indis kümesi ve $\sigma : J \longrightarrow \mathbf{U}(X)$ fonksiyonu X kümesi üzerinde tanımlı ultrasüzgeçlerin bir seçimi olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{U}(\sum \sigma(\{J\})) = \{\sum \sigma(\mathcal{W}) \mid \mathcal{W} \in \mathbf{U}(J)\}$$

dir (Lowen 1997).

İspat. $\mathcal{V} \in \mathbf{U}(\sum \sigma(\{J\}))$ ve $\mathcal{V} \notin \{\sum \sigma(\mathcal{W}) \mid \mathcal{W} \in \mathbf{U}(J)\}$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{V}$ bir ultrasüzgeç ve her $\mathcal{W} \in \mathbf{U}(J)$ için $\sum \sigma(\mathcal{W})$ ultrasüzgeç olduğundan,

$$\sum \sigma(\mathcal{W}) \not\subseteq \mathcal{V} \text{ ve } \mathcal{V} \not\subseteq \sum \sigma(\mathcal{W})$$

dır. $\sum \sigma(\mathcal{W}) \not\subseteq \mathcal{V}$ kabulü ile ispata devam edelim. $\mathcal{V} \not\subseteq \sum \sigma(\mathcal{W})$ kabulü ile de ispat benzer şekilde elde edilir. Böylece; her $\mathcal{W} \in \mathbf{U}(J)$ için

$$\exists A_{\mathcal{W}} \in \sum \sigma(\mathcal{W}) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \bigcap_{j \in W} \sigma(j) \ni A_{\mathcal{W}} \notin \mathcal{V}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\forall \mathcal{W} \in \mathbf{U}(J) : \exists W \in \mathcal{W} \ni (\forall j \in W : A_{\mathcal{W}} \in \sigma(j)) \text{ ve } A_{\mathcal{W}} \notin \mathcal{V} \quad (3.13)$$

olacaktır. Lemma 3.1 de $\mathfrak{F}$ süzgeci yerine $\{J\}$ alınır; her $\mathcal{W} \in \mathbf{U}(\{J\})$ için $W = S(\mathcal{W}) \in \mathcal{W}$ ögesi (3.13) gerçekleşecek biçimde seçilebilmektedir. O halde; sonlu elemanlı bir $\mathbf{U}_S = (\mathcal{W}_k)_{1 \leq k \leq n} \subseteq \mathbf{U}(\{J\})$ vardır öyle ki

$$J = \bigcup_{\mathcal{W} \in \mathbf{U}_S} S(\mathcal{W}) = \bigcup_{k=1}^n W_k$$

ve

$$\bigcup_{k=1}^n A_{\mathcal{W}_k} \notin \mathcal{V}$$

dir. Hipotezden $\sum \sigma(\{J\}) = \bigcap_{j \in J} \sigma(j) \subset \mathcal{V}$ olduğundan,

$$\exists j_0 \in J : \bigcup_{k=1}^n A_{\mathcal{W}_k} \notin \sigma(j_0) \quad (3.14)$$

dir. Ancak, $J = \bigcup_{k=1}^n W_k$ eşitliği ve (3.13) kullanılırsa, $j_0 \in J$ için

$$\exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \ni j_0 \in W_k \text{ ve } A_{\mathcal{W}_k} \in \sigma(j_0)$$

dır. Bu ise (3.14) ile çelişir. Dolayısıyla;

$$\forall \mathcal{V} \in \mathbf{U}(\sum \sigma(\{J\})) : \exists \mathcal{W} \in \mathbf{U}(J) \ni \sum \sigma(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{V}$$

olur ve $\sum \sigma(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ elde edilir. Diğer yandan, $\mathcal{V} \in \{\sum \sigma(\mathcal{W}) \mid \mathcal{W} \in \mathbf{U}(J)\}$ ve $\mathcal{V} \notin \mathbf{U}(\sum \sigma(\{J\}))$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\exists \mathcal{W}' \in \mathbf{U}(J) : \mathcal{V} = \sum \sigma(\mathcal{W}') \quad (3.15)$$

olacaktır. Ayrıca, $\mathcal{V} \notin \mathbf{U}(\sum \sigma(\{J\}))$ olduğundan $\sum \sigma(\{J\}) \not\subseteq \mathcal{V}$ dir. Dolayısıyla (3.6) kullanılırsa

$$\exists F \in \bigcap_{j \in J} \sigma(j) \ni F \notin \mathcal{V} \quad (3.16)$$

dir. Böylece, (3.15) ve (3.16) den $F \notin \bigcup_{W \in \mathcal{W}' j \in W} \sigma(j)$ olduğu elde edilir. O halde;

$W = J$ seçimi için de $F \notin \bigcap_{j \in J} \sigma(j)$ dir. Bu ise (3.16) ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. ■

Aşağıda verilecek olan teoremlerin ispatları, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 için verilen ispatlara benzer olarak elde edilir.

Teorem 3.4 X bir küme olmak üzere, $\lambda : \mathbf{U}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$ dönüşümü (L1) özelliğini sağlasın. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda \mathcal{U}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonunun limit operatörü olması için gerek ve yeter koşul

$\mathbf{LU}^*) \forall J \neq \emptyset, \forall \psi : J \longrightarrow X, \forall \sigma : J \longrightarrow \mathbf{U}(X)$ ve $\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{U}(J)$ için,

$$\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) \leq \lambda \psi(\mathfrak{F}) + \inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{j \in F} \lambda(\sigma(j))(\psi(j))$$

özelliğinin sağlanmasıdır (Lowen 2015).

Teorem 3.5 X bir küme olmak üzere, $\lambda : \mathbf{U}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$ dönüşümü (L1) özelliğini sağlasın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda \mathcal{U}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonunun limit operatörü olması için gerek ve yeter koşul

$\mathbf{LU}) \forall J \neq \emptyset, \forall \psi : J \longrightarrow X, \forall \sigma : J \longrightarrow \mathbf{U}(X)$ ve $\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{U}(J)$ için

$$\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) \leq \lambda \psi(\mathfrak{F}) + \sup_{j \in J} \lambda(\sigma(j))(\psi(j))$$

özelliğinin sağlanmasıdır (Lowen 2015).

3.1.3 Yaklaşma Sistemleri

X kümesi üzerinde bir yaklaşma sistemi, $\mathbb{P}^X$ ailesinin belirli koşulları sağlayan bir alt ailesidir. Bu kavram; metrik kavramının yerelleştirilmesi olarak değerlendirilebilir. X kümesinin her bir $x \in X$ noktasına, $\mathbb{P}^X$ kümesinin bir $\mathbb{A}(x)$ alt ailesi karşılık getirilir. $\mathbb{A}(x)$ ailesinin her bir ögesinin, verilen bir $y \in X$ noktasında aldığı değer, y noktasının, x noktasına olan uzaklığı olarak değerlendirilir.

$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}^X$ ve $\varphi \in \mathbb{P}^X$ olmak üzere,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall w < \infty : \exists \varphi_\varepsilon^w \in \mathbb{A} \ni \varphi \wedge w \leq \varphi_\varepsilon^w + \varepsilon \quad (3.17)$$

önermesi gerçekleşiyor ise φ fonksiyonu, $\mathbb{A}$ ailesi tarafından **baskılanır** denir.

$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}^X$ ailesi tarafından baskılanan her fonksiyon $\mathbb{A}$ ailesine ait oluyor ise, $\mathbb{A}$ ailesine **yoğundur** denir.

Tanım 3.4 X bir küme, her $x \in X$ için $\mathbb{A}(x)$ ailesi, $\mathbb{P}^X$ içinde bir ideal olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $\mathbb{A}(x)$ ailesi aşağıda verilen özellikleri sağlıyor ise, $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ ailesine X üzerinde bir **yaklaşma sistemi** adı verilir.

A1) $\forall \varphi \in \mathbb{A}(x) : \varphi(x) = 0$,

A2) $\mathbb{A}(x)$ ailesi yoğun,

A3) $\forall \varphi \in \mathbb{A}(x), \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall w < \infty$ için $\exists (\varphi_z)_{z \in X} \in \prod_{z \in X} \mathbb{A}(z)$ vardır öyle ki;

$$\forall z, y \in X : \varphi(y) \wedge w \leq \varphi_x(z) + \varphi_z(y) + \varepsilon$$

dır (Lowen 1989).

Örnek 3.5 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, her $x \in X$ için

$$\mathbb{A}_\tau(x) := \{ \varphi \in \mathbb{P}^X \mid \varphi(x) = 0 \text{ ve } \varphi, x \text{ noktasında üstten yarı-sürekli} \}$$

biçiminde tanımlı $(\mathbb{A}_\tau(x))_{x \in X}$ ailesi X üzerinde bir yaklaşma sistemidir.

Bir yaklaşma sistemi, daha az özelliğe sahip fonksiyon aileleri yardımı ile de üretilebilir.

$\mathbb{P}^X$ üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı;

$$f \leq g \iff \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$$

biçiminde tanımlansın. $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}^X$ olmak üzere,

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{B} : \exists v \in \mathcal{B} \ni \varphi \vee \psi \leq v$$

önermesi gerçekleşiyor ise $\mathcal{B}$ ailesine $\mathbb{P}^X$ içinde bir **ideal tabanı** denir. Bu kavramlar yardımıyla bir yaklaşma sistemi için taban kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.5 X bir küme ve $\mathcal{B} = (\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesinin her bir ögesi $\mathbb{P}^X$ içinde bir ideal tabanı olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $\mathcal{B}(x)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, $\mathcal{B}$ ailesine X üzerinde bir **yaklaşma tabanı** adı verilir.

B1) $\forall \varphi \in \mathcal{B}(x) : \varphi(x) = 0$,

B2) $\forall \varphi \in \mathcal{B}(x), \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall w < \infty$ için $\exists (\varphi_z)_{z \in X} \in \prod_{z \in X} \mathcal{B}(z)$ vardır öyle ki;

$$\forall z, y \in X : \varphi(y) \wedge w \leq \varphi_x(z) + \varphi_z(y) + \varepsilon$$

dır (Lowen 1989).

Yaklaşma tabanı ve yaklaşma sistemi arasındaki ilişki belirlenirken, doyurulmuş küme kavramı kullanılır. $\mathcal{B} \subset \mathbb{P}^X$ olmak üzere $\mathcal{B}$ ailesi yardımıyla tanımlanan

$$\widehat{\mathcal{B}} := \{\varphi \in \mathbb{P}^X \mid \varphi, \mathcal{B} \text{ tarafından baskılanır}\}$$

ailesine, $\mathcal{B}$ ailesinin **doyurulmuşu** adı verilir.

Tanım 3.6 X bir küme, $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ X üzerinde bir yaklaşma sistemi, her bir $x \in X$ için $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathbb{P}^X$ ve $\mathcal{B}(x)$ ailesi bir ideal tabanı olsun. Bu durumda,

$$\forall x \in X : \mathbb{A}(x) = \widehat{\mathcal{B}(x)}$$

eşitliği mevcut ise, $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi, $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ **yaklaşma sistemi için tabandır** ya da $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ yaklaşma sistemi $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi tarafından üretilir denir (Lowen 1997).

Önerme 3.3 X bir küme olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır.

i) $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ bir yaklaşma tabanı ise, $(\widehat{\mathcal{B}(x)})_{x \in X}$ ailesi, $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesini taban kabul eden bir yaklaşma sistemidir.

ii) $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi verilen bir $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ yaklaşma sistemi için taban ise, $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ bir yaklaşma tabanıdır.

(Lowen 1989).

İspat. İlk özelliğin sağlandığını göstermek için; $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesinin bir yaklaşma tabanı olduğunu kabul edelim. Öncelikle, $(\widehat{\mathcal{B}(x)})_{x \in X}$ ailesinin yaklaşma sistemi

olduğunu gösterelim. (A1) özelliği için $x \in X$ ve $\varphi \in \widehat{\mathcal{B}(x)}$ alınırsa,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall w < \infty : \exists \varphi_\varepsilon^w \in \mathcal{B}(x) \ni \varphi \wedge w \leq \varphi_\varepsilon^w + \varepsilon$$

olacağı açıktır. Ayrıca, $\sup_{w < \infty} \varphi(x) \wedge w = \varphi(x)$ eşitliği her zaman gerçekleştiğinden $\varphi(x) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon = 0$ elde edilir. (A2) özelliğinin sağlandığını gösterelim: $x \in X, \psi \in \mathbb{P}^X$ olsun ve $\psi, \widehat{\mathcal{B}(x)}$ tarafından baskılsın. Bu durumda;

$$\forall \varepsilon > 0, \forall w < \infty : \exists \varphi_\varepsilon^w \in \widehat{\mathcal{B}(x)} \ni \psi \wedge w \leq \varphi_\varepsilon^w + \varepsilon/2$$

dir. $\varphi_\varepsilon^w \in \widehat{\mathcal{B}(x)}$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve her $w < \infty$ için

$$\exists \tau \in \mathcal{B}(x) \ni \varphi_\varepsilon^w \wedge w \leq \tau + \varepsilon/2$$

dir. Böylece, $\psi \wedge w \leq \tau + \varepsilon$ elde edilir. (A3) özelliğinin sağlandığını göstermek için; $\varphi \in \widehat{\mathcal{B}(x)}, \varepsilon > 0, w < \infty$ alalım. Bu durumda, $\varphi \wedge w \leq \varphi_\varepsilon^w + \varepsilon/2$ olacak biçimde bir $\varphi_\varepsilon^w \in \mathcal{B}(x)$ mevcuttur. Ayrıca, $\mathcal{B}(x)$ yaklaşma tabanı olduğundan, en azından bir $(\varphi_z)_{z \in X} \in \prod_{z \in X} \mathcal{B}(z)$ vardır öyle ki;

$$\forall z, y \in X : \varphi_\varepsilon^w(y) \wedge w \leq \varphi_x(z) + \varphi_z(y) + \varepsilon/2$$

dir. Dolayısıyla $z, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} \varphi(y) \wedge w &\leq (\varphi_\varepsilon^w(y) + \varepsilon/2) \wedge w \\ &= \varphi_\varepsilon^w(y) \wedge w + \varepsilon/2 \\ &\leq \varphi_x(z) + \varphi_z(y) + \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $(\widehat{\mathcal{B}(x)})_{x \in X}$ ailesinin, $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesini taban kabul ettiği Tanım 3.6 dan açıktır. İkinci özelliği ispatlamak için $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesinin verilen bir $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ yaklaşma sistemi için taban olduğunu kabul edelim. $x \in X$ ve $\varphi \in \mathcal{B}(x)$ alınırsa, $\varphi \in \widehat{\mathcal{B}(x)} = \mathbb{A}(x)$ dir. O halde; (B1) özelliği sağlanır. (B2) özelliğinin sağlandığını gösterelim: $x \in X, \varphi \in \mathcal{B}(x), \varepsilon > 0$ ve $w < \infty$ olsun. Bu durumda; (A3) özelliği kullanılırsa, en azından bir $(\varphi_z)_{z \in X} \in \prod_{z \in X} \mathbb{A}(z)$ vardır öyle ki;

$$\forall z, y \in X : \varphi(y) \wedge w \leq \varphi_x(z) + \varphi_z(y) + \varepsilon/2$$

olacaktır. $\widehat{\mathcal{B}(x)} = \mathbb{A}(x)$ olduğundan $\varphi_x \in \mathbb{A}(x)$ için,

$$\exists \psi_x \in \mathcal{B}(x) \ni \varphi_x \wedge w \leq \psi_x + \varepsilon/4$$

ve $\varphi_z \in \mathbb{A}(z)$ için

$$\exists \psi_z \in \mathcal{B}(z) \ni \varphi_z \wedge w \leq \psi_z + \varepsilon/4$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \varphi(y) \wedge w &\leq (\varphi_x(z) + \varphi_z(y) + \varepsilon/2) \wedge w \\ &\leq (\varphi_x(z) + \varphi_z(y)) \wedge w + \varepsilon/2 \\ &\leq \varphi_x(z) \wedge w + \varphi_z(y) \wedge w + \varepsilon/2 \\ &\leq (\psi_x(z) + \varepsilon/4) + (\psi_z(y) + \varepsilon/4) + \varepsilon/2 \\ &\leq \psi_x(z) + \psi_z(y) + \varepsilon \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ■

3.1.4 Ölçekler

X bir küme, $\mathfrak{D} \subseteq qMet(X)$ ve $d \in qMet(X)$ olsun. Eğer; $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall w < \infty$ için

$$\exists d_x^{\varepsilon, w} \in \mathfrak{D} \ni d(x, \cdot) \wedge w \leq d_x^{\varepsilon, w}(x, \cdot) + \varepsilon$$

önermesi gerçekleşiyor ise, d quasimetriği $\mathfrak{D}$ quasimetrik ailesi tarafından **yerel baskılanır** ya da $\mathfrak{D}$ ailesi d quasimetriğini yerel baskılar denir. Eğer $\mathfrak{D}$ ailesi tarafından yerel baskılanan her d quasimetriği $\mathfrak{D}$ ailesine ait ise, $\mathfrak{D}$ ailesi **yerel yoğun**dur denir (Lowen 1997).

Tanım 3.7 X bir küme, $\mathcal{G} \subseteq qMet(X)$ ve $\mathcal{G}$ ailesi $qMet(X)$ içinde bir ideal olsun. Bu durumda, $\mathcal{G}$ yerel yoğun ise $\mathcal{G}$ ailesine **ölçek** adı verilir (Lowen 1997).

Örnek 3.6 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, $\mathcal{G}_\tau := \{d \in qMet(X) \mid \tau_d \subseteq \tau\}$ biçiminde tanımlı aile X üzerinde bir ölçektir.

Ölçek için taban kavramı tanımı verilmeden önce, bu tanımda gerek duyulacak olan yerel yönlendirilmiş aile ve yerel doyurulmuş aile tanımlarını verelim.

Tanım 3.8 X bir küme ve $\mathcal{H} \subseteq qMet(X)$ olsun. $\mathcal{H}$ ailesinin sonlu elemanlı her $\mathcal{H}_0$ alt ailesi için $\sup_{d \in \mathcal{H}_0} d \in qMet(X)$ ögesi, $\mathcal{H}$ tarafından yerel baskılanıyor ise, $\mathcal{H}$ ailesi **yerel yönlendirilmiştir** denir (Lowen 1997).

Tanım 3.9 X bir küme ve $\mathcal{D} \subseteq qMet(X)$ olmak üzere

$$\widehat{\mathcal{D}} := \{d \in qMet(X) \mid \mathcal{D} \text{ ailesi } d \text{ quasimetrigini yerel baskılar}\}$$

ailesine, $\mathcal{D}$ ailesinin **yerel doyurulmuşu** adı verilir (Lowen 1997).

Tanım 3.10 X bir küme olsun. $qMet(X)$ ailesinin bir $\mathcal{H}$ alt kümesi ve bir $\mathcal{G}$ ölçeği için $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{G}$ oluyor ise, $\mathcal{H}$ ailesi **$\mathcal{G}$ ölçeği için tabandır** ya da **$\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ ölçeğini üretir** denir (Lowen 1997).

Tanım 3.11 X bir küme ve $\mathcal{G}$, X üzerinde bir ölçek olsun. Bu durumda, $\mathcal{G}$ ailesi metriklerden oluşan bir tabana sahip ise, $\mathcal{G}$ ailesi simetriktir denir (Lowen 1997).

Önerme 3.4 X bir küme ve $\mathcal{H} \subseteq qMet(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.

- i) $\mathcal{H}$ ailesi yerel yönlendirilmiş ise, $\widehat{\mathcal{H}}$ ailesi, $\mathcal{H}$ ailesini taban kabul eden bir ölçektir.
 - ii) $\mathcal{H}$ ailesi bir $\mathcal{G}$ ölçeği için taban ise, $\mathcal{H}$ yerel yönlendirilmiştir.
- (Lowen 1997).

İspat. (i) ve (ii) özellikleri, Önerme 3.3 için verilen ispata benzer tekniklerle kolaylıkla elde edilir. ■

3.2 Yaklaşma Uzaylarını Karakterize Eden Matematiksel Yapılar Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde; bir X kümesi üzerinde, uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi ve ölçek olarak adlandırılan yapılardan biri verildiğinde, verilen yapı yardımıyla diğer yapıların nasıl elde edilebileceği açıklanacaktır. Ayrıca; kavramlar arasındaki ilişkiler kategorik olarak değerlendirilerek, bu yapıların matematiksel olarak eş yapılar olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.6 $(\delta \Rightarrow \lambda)$ $\delta : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$, X kümesi üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \lambda : F(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda \mathfrak{F} := \sup_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}} \delta_U \end{aligned}$$

fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir limit operatörüdür. Ayrıca,

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall A \subseteq X : \delta(x, A) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda \mathcal{U}(x) \quad (3.18)$$

dir (Lowen 1997).

İspat. Öncelikle, λ fonksiyonunun bir limit operatörü olduğunu gösterelim. $x \in X$ ise, $\lambda \left(\overset{\bullet}{x} \right) (x) = \sup_{U \in \text{sec } \overset{\bullet}{x}} \delta_U(x) = 0$ olduğundan (L1) özelliği sağlanır. Herhangi bir $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J} \subset \mathbf{F}(X)$ için,

$$\text{sec} \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \bigcup_{j \in J} \text{sec } \mathfrak{F}_j \quad (3.19)$$

ve

$$\sup_{U \in \bigcup_{j \in J} \text{sec } \mathfrak{F}_j} \delta_U(x) = \sup_{j \in J} \sup_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}_j} \delta_U(x) \quad (3.20)$$

eşitlikleri her zaman sağlanır. Bu eşitlikler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda \left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) &= \sup_{U \in \text{sec} \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j} \delta_U(x) \\ &= \sup_{U \in \bigcup_{j \in J} \text{sec } \mathfrak{F}_j} \delta_U(x) \\ &= \sup_{j \in J} \sup_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}_j} \delta_U(x) \\ &= \sup_{j \in J} \lambda(\mathfrak{F}_j) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (L2) özelliği sağlanır. (L3) özelliğinin sağlandığını gösterelim:

$\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve X üzerinde tanımlı süzgeçlerin bir seçimi $(\sigma(x))_{x \in X}$ olmak üzere;

$$\varepsilon := \sup_{y \in X} \lambda(\sigma(y))(y)$$

biçiminde tanımlansın. İlk olarak; $\mathfrak{F}$ ve $(\sigma(x))_{x \in X}$ seçiminin öğelerinin ultrasüzgeç olması durumunda (L3) özelliğinin gerçekleştiğini gösterelim. Bu kabul nedeniyle $\text{sec}(\sum \sigma(\mathfrak{F})) = \sum \sigma(\mathfrak{F})$ olur ve

$$\forall D \in \sum \sigma(\mathfrak{F}) : \delta_D(y) \leq \lambda \mathfrak{F} + \varepsilon$$

olduğu gösterilirse λ fonksiyonunun tanımı gereği ispat tamamlanır. $D \in \sum \sigma(\mathfrak{F})$ olsun. Bu durumda, (3.6) eşitliğinden,

$$\exists F \in \mathfrak{F} \ni \forall y \in F : D \in \sigma(y)$$

dir. Böylece; her $y \in F$ için

$$\begin{aligned} \delta_D(y) &\leq \sup_{U \in \sec \sigma(y)} \delta_U(y) \\ &= \lambda(\sigma(y))(y) \\ &\leq \sup_{y \in X} \lambda(\sigma(y))(y) = \varepsilon \end{aligned}$$

yani $y \in D^{(\varepsilon)}$ bulunur. Dolayısıyla; $D^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{F}$ olur ve (D4) özelliği kullanılırsa,

$$\delta_D \leq \delta_{D^{(\varepsilon)}} + \varepsilon \leq \lambda\mathfrak{F} + \varepsilon$$

elde edilir. Son olarak, λ fonksiyonunun tanımı ve Önerme 3.2 (v) kullanılırsa,

$$\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) = \sup_{D \in \sum \sigma(\mathfrak{F})} \delta_D \leq \lambda\mathfrak{F} + \varepsilon \quad (3.21)$$

olduğu elde edilir. Şimdi, $\mathfrak{F}$ ve $(\sigma(x))_{x \in X}$ seçiminin öğelerinin süzgeç olması durumunu inceleyelim. Herhangi bir $\rho \in \prod_{y \in X} \mathbf{U}(\sigma(y))$ için $\varepsilon_\rho := \sup_{y \in X} \lambda(\rho(y))(y)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda (3.21) kullanılırsa,

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F}) : \lambda\left(\sum \rho(\mathcal{U})\right) \leq \lambda\mathcal{U} + \varepsilon_\rho$$

dir. Ayrıca, (3.12) den $\lambda\mathfrak{F} = \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda\mathcal{U}$ dur ve

$$\varepsilon = \sup_{\rho \in \prod_{y \in X} \mathbf{U}(\sigma(y))} \varepsilon_\rho$$

32

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böylece; Önerme 3.2 (iv) ve (L2) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) &= \lambda \left(\bigcap_{\rho \in \prod_{y \in X} \mathbf{U}(\sigma(y))} \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \sum \rho(\mathcal{U}) \right) \\
&= \sup_{\rho \in \prod_{y \in X} \mathbf{U}(\sigma(y))} \lambda \left(\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \sum \rho(\mathcal{U}) \right) \\
&= \sup_{\rho \in \prod_{y \in X} \mathbf{U}(\sigma(y))} \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda(\sum \rho(\mathcal{U})) \\
&\leq \sup_{\rho \in \prod_{y \in X} \mathbf{U}(\sigma(y))} \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\lambda\mathcal{U} + \varepsilon_\rho) \\
&= \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda\mathcal{U} + \sup_{\rho \in \prod_{y \in X} \mathbf{U}(\sigma(y))} \varepsilon_\rho \\
&= \lambda\mathfrak{F} + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (3.18) eşitliğini ispatlayalım. $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Herhangi bir $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)$ için $A \in \mathcal{U}$ olduğundan

$$\delta(x, A) \leq \sup_{U \in \mathcal{U}} \delta(x, U) = \lambda\mathcal{U}(x)$$

olup $\delta(x, A) \leq \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda\mathcal{U}(x)$ bulunur. Tanım 2.16 da $\kappa = \mathcal{U}, L = \mathbf{U}(A), f = \xi$ ve $I = \prod_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \mathcal{U}$ alınırsa,

$$\inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda\mathcal{U}(x) = \sup_{\xi \in \prod_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \mathcal{U}} \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \delta_{\xi(\mathcal{U})}(x) \quad (3.22)$$

eşitliği yazılabilir. $\xi \in \prod_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \mathcal{U}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\xi : \mathbf{U}(A) &\longrightarrow \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \mathcal{U} \\
\mathcal{U} &\longrightarrow \xi(\mathcal{U})
\end{aligned}$$

fonksiyonu, her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)$ için bir $\xi(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ seçer. Lemma 3.1 kullanılırsa,

$$\exists \mathbf{U}_\xi \subseteq \mathbf{U}(A) \ni \mathbf{U}_\xi \text{ sonlu elemanlı ve } A \subseteq \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}_\xi} \xi(\mathcal{U})$$

olur. (3.22) eşitliği ve (D3) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda \mathcal{U} &= \sup_{\xi \in \prod_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \mathcal{U}} \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \delta_{\xi(\mathcal{U})} \\
&\leq \sup_{\xi \in \prod_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \mathcal{U}} \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}_{\xi}} \delta_{\xi(\mathcal{U})} \\
&\leq \delta(x, A)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 3.7 $(\lambda \Rightarrow \delta) \lambda : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$, X kümesi üzerinde bir limit operatörü olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\delta : X \times 2^X &\longrightarrow \mathbb{P} \\
(x, A) &\longrightarrow \delta(x, A) := \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda \mathcal{U}(x)
\end{aligned}$$

fonksiyonu X kümesi üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur. Ayrıca,

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X), \forall x \in X : \lambda \mathfrak{F}(x) = \sup_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}} \delta(x, U) \quad (3.23)$$

dir (Lowen 1997).

İspat. Öncelikle, δ fonksiyonunun bir uzaklık fonksiyonu olduğunu gösterelim.

$A \subseteq X$ ve $x \in A$ ise, (L1) den

$$\delta(x, A) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda \mathcal{U}(x) \leq \lambda \left(\overset{\bullet}{x} \right)(x) = 0$$

olacağından (D1) özelliği sağlanır. Herhangi bir $x \in X$ için

$$\delta(x, \emptyset) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\emptyset)} \lambda \mathcal{U}(x) = \infty$$

olduğundan (D2) açıktır. (D3) özelliği,

$$\forall A, B \subseteq X : \mathbf{U}(\text{stack } A \cup B) = \mathbf{U}(\text{stack } A) \bigcup \mathbf{U}(\text{stack } B)$$

eşitliği kullanılarak kolayca gösterilebilir. (D4) özelliğinin sağlandığını ispatlamadan önce teoremden ifade edilen (3.23) eşitliğinin gerçekleştiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\lambda' : \mathbf{F}(X) &\rightarrow \mathbb{P}^X \\
\mathfrak{F} &\rightarrow \lambda' := \sup_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}} \delta_U
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. δ fonksiyonu tanımından, herhangi bir $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(X)$ için

$$\lambda' \mathcal{U} = \sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{W \in \mathbf{U}(U)} \lambda W \leq \lambda \mathcal{U}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan; Tanım 2.16 da $\kappa = U$, $L = \mathcal{U}$, $J_\kappa = \mathbf{U}(U)$, $I = \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathbf{U}(U)$ ve $f = \theta$ alınır ve (L2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda'(\mathcal{U}) &= \sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{W \in \mathbf{U}(U)} \lambda W \\ &= \inf_{\theta \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathbf{U}(U)} \sup_{U \in \mathcal{U}} \lambda(\theta(U)) \\ &\geq \lambda(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

olur ve böylece $\lambda = \lambda'$ olduğu elde edilir. Böylece; her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(X)$ için $\lambda \mathcal{U} = \lambda' \mathcal{U}$ olduğu görülür. Benzer şekilde, herhangi bir $\mathfrak{F} \in F(X)$ süzgeci için de eşitliğin sağlandığı gösterilebilir. (D4) özelliğinin gerçeklendiğini görmek için, $A \subseteq X$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda;

$$\forall y \in A^{(\varepsilon)} : \exists \sigma(y) \in \mathbf{U}(A) \ni \lambda(\sigma(y))(y) \leq \varepsilon \quad (3.24)$$

olacaktır. Gerçekten; bir an için,

$$\exists y_0 \in A^{(\varepsilon)} \text{ ve } \forall \mathcal{U} \in \mathbf{U}(A) : \varepsilon < \lambda \mathcal{U}(y_0) = \sup_{U \in \mathcal{U}} \delta(y_0, U)$$

olduğu kabul edilirse, her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)$ için $\varepsilon < \delta(y_0, V_{\mathcal{U}})$ olacak biçimde en azından bir $V_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ seçilebilir. Lemma 3.1 kullanılırsa, en azından bir $(\mathcal{U}_k)_{1 \leq k \leq n}$ ailesi

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathcal{U}_k \in \mathbf{U}(A) \text{ ve } A \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{\mathcal{U}_k} \quad (3.25)$$

olacak biçiminde belirlidir. (3.25) ve (D3) kullanılırsa,

$$\delta(y_0, A) \geq \delta\left(y_0, \bigcup_{k=1}^n V_{\mathcal{U}_k}\right) > \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise, y_0 noktasının seçimi ile çelişir. O halde iddiamız doğrudur. Böylece her $y \in A^{(\varepsilon)}$ için (3.24) yardımıyla bir $\sigma(y)$ süzgeci seçilir. $y \notin A^{(\varepsilon)}$ olması durumunda ise, $\sigma(y) = \dot{y}$ alınır. Bu durumda;

$$\varepsilon' = \sup_{y \in X} \lambda(\sigma(y))(y) \leq \varepsilon$$

olur. Ayrıca, her $\mathcal{W} \in \mathbf{U}(A^{(\varepsilon)})$ için $\sum \sigma(\mathcal{W}) \in \mathbf{U}(A)$ olduğunu ve (L3) özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}\delta(x, A) &= \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda \mathcal{U}(x) \\ &\leq \lambda(\sum \sigma(\mathcal{W}))(x) \\ &\leq \lambda \mathcal{W}(x) + \varepsilon' \\ &\leq \lambda \mathcal{W}(x) + \varepsilon\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Her $\mathcal{W} \in \mathbf{U}(A^{(\varepsilon)})$ için bu eşitsizlik sağlandığından,

$$\delta(x, A) \leq \inf_{\mathcal{W} \in \mathbf{U}(A^{(\varepsilon)})} \lambda \mathcal{W}(x) + \varepsilon = \delta(x, A^{(\varepsilon)}) + \varepsilon$$

dur. ■

Teorem 3.6 ve Teorem 3.7 de sırasıyla; herhangi bir δ uzaklık fonksiyonu verildiğinde, δ ya karşılık gelen limit operatörünün nasıl tanımlanacağı ve herhangi bir λ limit operatörü verildiğinde, λ ya karşılık gelen uzaklık fonksiyonunun nasıl tanımlanacağı gösterilmiştir.

Karışıklığa neden olabileceğini düşündüğümüz durumlarda; bir δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen limit operatörünü λ_δ ile, bir λ limit operatörüne karşılık gelen uzaklık fonksiyonunu δ_λ ile ifade edeceğiz.

Sonuç 3.1 λ, X kümesi üzerinde bir limit operatörü olsun. Bu durumda;

$$\forall A \subseteq X \text{ ve } \forall x \in X : \delta(x, A) = \inf_{\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(A)} \lambda \mathfrak{F}(x)$$

dir (Lowen 2015).

λ_δ limit operatörüne karşılık gelen uzaklık fonksiyonu ile δ uzaklık fonksiyonunun ve δ_λ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen limit operatörü ile λ limit operatörünün çakıştığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, uzaklık fonksiyonu ve limit operatörü kavramları matematiksel olarak eş yapılardır.

Teorem 3.8 $(\delta \Rightarrow \mathcal{G})$ X bir küme ve $\delta : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{G} := \left\{ d \in qMet(X) \mid \forall A \subseteq X, \forall x \in X : \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \delta(x, A) \right\}$$

ailesi, X üzerinde bir ölçektir (Lowen 1997).

İspat. $\mathcal{G}$ bir ideal, $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Tanım 2.16 da $\kappa = a$, $J_\kappa = \mathcal{G}_0$,

$\varphi = f$, $I = \prod_{a \in A} \mathcal{G}_0$ olarak alınırsa,

$$\inf_{a \in A} \sup_{d \in \mathcal{G}_0} d(x, a) = \sup_{\varphi \in \mathcal{G}_0^A} \inf_{a \in A} \varphi(a)(x, a)$$

eşitliği elde edilir. $\varphi \in \mathcal{G}_0^A$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} \varphi(a)(x, a) &= \inf_{d \in \mathcal{G}_0} \inf_{a \in \varphi^{-1}(d)} d(x, a) \\ &\leq \inf_{d \in \mathcal{G}_0} \delta(x, \varphi^{-1}(d)) \\ &= \delta(x, A) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\mathcal{G}$ sonlu supremum işlemi altında kapalıdır. $\mathcal{G}$ ailesinin yerel doymuş olduğunu gösterelim. $d \in qMet(X)$ olmak üzere her $x \in X$, her $\varepsilon > 0$ ve her $w < \infty$ için

$$\exists e^{\varepsilon, w} \in \mathcal{G} \ni d(x, \cdot) \wedge w \leq e^{\varepsilon, w}(x, \cdot) + \varepsilon$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda; herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \wedge w \leq \inf_{a \in A} e(x, a) + \varepsilon \leq \delta(x, A) + \varepsilon$$

olur. ε keyfi olduğundan;

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \wedge w \leq \delta(x, A)$$

yazılabilir. w üzerinden supremum alınırsa $\inf_{a \in A} d(x, a) \leq \delta(x, A)$ elde edilir. O halde, $d \in \mathcal{G}$ olup $\mathcal{G}$ yerel yoğundur. ■

Teorem 3.8 de herhangi bir δ uzaklık fonksiyonu verildiğinde, δ ya karşılık gelen ölçüğün nasıl tanımlanacağı ifade edilmiştir. Karışıklığa neden olabileceğini düşündüğümüz durumlarda, bir δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen ölçüğü $\mathcal{G}_\delta$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.5 X bir küme ve $\delta : X \times 2^X \rightarrow \mathbb{P}$, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $\xi \in \mathbb{R}^+$ ve her $Z \subseteq X$ için

$$\begin{aligned} d_Z^\xi : X \times X &\rightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\rightarrow d_Z^\xi(x, y) := (\delta(x, Z) \wedge \xi) \ominus (\delta(y, Z) \wedge \xi) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d_Z^ξ fonksiyonu $\mathcal{G}_\delta$ ailesine aittir (Lowen 1997).

İspat. $\xi \in \mathbb{R}^+$ ve $Z \subseteq X$ olsun. d_Z^ξ fonksiyonunun quasimetrik olduğu tanımından açıktır. $d_Z^\xi \in \mathcal{G}_\delta$ olduğunu gösterelim; $x \in X$ ve $A \subseteq X$ ise,

$$\begin{aligned} d_Z^\xi(x, A) &= \inf_{a \in A} d_Z^\xi(x, a) = \inf_{a \in A} ((\delta(x, Z) \wedge \xi - \delta(a, Z) \wedge \xi) \vee 0 \\ &= (\delta(x, Z) \wedge \xi + \inf_{a \in A} (-\delta(a, Z) \wedge \xi)) \vee 0 \\ &= (\delta(x, Z) \wedge \xi - \sup_{a \in A} \delta(a, Z) \wedge \xi) \vee 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Önerme 3.1 (iii) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d_Z^\xi(x, A) &\leq \left(\left(\delta(x, A) + \sup_{a \in A} \delta(a, Z) \right) \wedge \xi \right) \ominus \left(\sup_{a \in A} \delta(a, Z) \wedge \xi \right) \\ &\leq \left(\delta(x, A) \wedge \xi + \left(\sup_{a \in A} \delta(a, Z) \wedge \xi \right) \right) \ominus \left(\sup_{a \in A} \delta(a, Z) \wedge \xi \right) \\ &= (\delta(x, A) \wedge \xi) \vee 0 \\ &\leq \delta(x, A) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.9 $(\mathcal{G} \Rightarrow \delta)$ X bir küme, $\mathcal{H} \subseteq qMet(X)$ ve $\mathcal{H}$ ailesi, X üzerinde bir ölçek tabanı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \delta : X \times 2^X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta(x, A) := \sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{a \in A} d(x, a) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyon X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur (Lowen 1997).

İspat. (D1) ve (D2) özelliklerinin sağlandığı açıktır. (D3) özelliğinin sağlandığını gösterelim. $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{c \in A \cup B} d(x, c) &\leq \sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{a \in A} d(x, a) \\ \sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{c \in A \cup B} d(x, c) &\leq \sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{b \in B} d(x, b) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\delta(x, A \cup B) \leq \min \{ \delta(x, A), \delta(x, B) \}$$

olacaktır. Diğer yandan; $\alpha > 0$ ve $\delta(x, A) \wedge \delta(x, B) > \alpha$ olduğu kabul edilirse,

$$\exists d_1 \in \mathcal{H} : \inf_{a \in A} d_1(x, a) > \alpha$$

ve

$$\exists d_2 \in \mathcal{H} : \inf_{b \in B} d_2(x, b) > \alpha$$

dır. $\mathcal{H}$ yerel yönlendirilmiş olduğundan, $\mathcal{H}_0 = \{d_1, d_2\}$ alınrsa, her $x \in X$, her $\varepsilon > 0$ ve her $w < \infty$ için en azından bir $d_\varepsilon^{w,x} \in \mathcal{H}$ vardır öyle ki

$$(d_1 \vee d_2)(x, \cdot) \wedge w \leq d_\varepsilon^{w,x}(x, \cdot) + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge w &\leq \inf_{a \in A} d_1(x, a) \wedge \inf_{b \in B} d_2(x, b) \wedge w \\ &\leq \inf_{c \in A \cup B} (d_1 \vee d_2)(x, c) \wedge w \\ &\leq \inf_{c \in A \cup B} d_\varepsilon^{w,x}(x, c) + \varepsilon \\ &\leq \sup_{e \in \mathcal{H}} \inf_{c \in A \cup B} e(x, c) + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Özel olarak, $w = \alpha$ alınrsa $\delta(x, A \cup B) \geq \alpha$ bulunur ve böylece

$$\min\{\delta(x, A), \delta(x, B)\} \leq \delta(x, A \cup B)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla (D3) özelliği sağlanır. (D4) özelliğinin sağlandığını gösterelim: $x \in X, A \subseteq X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $b \in A^{(\varepsilon)}$ alınrsa,

$$\sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{a \in A} d(b, a) \leq \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$\forall d \in \mathcal{H} \text{ ve } \forall \theta > 0 : \exists a_d \in A \ni d(b, a_d) \leq \varepsilon + \theta$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} d(x, a_d) &\leq d(x, b) + d(b, a_d) \\ &\leq d(x, b) + \varepsilon + \theta \end{aligned}$$

ve $a_d \in A$ olduğundan,

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, b) + \varepsilon + \theta$$

olur. $b \in A^{(\varepsilon)}$ ve $d \in \mathcal{H}$ keyfi olduğundan

$$\sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \sup_{d \in \mathcal{H}} \inf_{b \in A^{(\varepsilon)}} d(x, b) + \varepsilon$$

olduğu elde edilir. ■

Teorem 3.9 da herhangi bir $\mathcal{G}$ ölçeği verildiğinde, $\mathcal{G}$ ye karşılık gelen uzaklık fonksiyonunun nasıl tanımlanacağı ifade edilmiştir. Karışıklığa neden olabileceğini düşündüğümüz durumlarda, bir $\mathcal{G}$ ölçeğine karşılık gelen uzaklık fonksiyonunu $\delta_{\mathcal{G}}$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.10 δ , X kümesi üzerinde bir uzaklık fonksiyonu ve $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\delta}$ olsun. Bu durumda, her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için

$$\delta(x, A) = \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a)$$

dır (Lowen 1997).

İspat. Teorem 3.8 den $\sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \delta(x, A)$ olduğu açıktır. Diğer yandan Önerme 3.5 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a) &\geq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \sup_{Z \subseteq X} \inf_{a \in A} d_Z^{\xi}(x, a) \\ &\geq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \inf_{a \in A} [(\delta(x, A) \wedge \xi) \ominus (\delta(a, A) \wedge \xi)] \\ &= \delta(x, A) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.2 δ , X kümesi üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için

$$\delta(x, A) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \sup_{Z \subseteq X} \inf_{a \in A} d_Z^{\xi}(x, a)$$

dır (Lowen 1997).

Önerme 3.6 X bir küme, δ X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu, $\mathcal{D} \subseteq qMet(X)$, $\mathcal{D}$ ailesi yerel yönlendirilmiş ve

$$\forall x \in X, \forall A \subseteq X : \delta(x, A) = \sup_{d \in \mathcal{D}} \inf_{a \in A} d(x, a)$$

ise, $\mathcal{D}$ ailesi $\mathcal{G}_\delta$ ölçeği için tabandır (Lowen 1997).

İspat. Teorem 3.8 kullanılırsa,

$$\mathcal{G}_\delta = \left\{ d \in qMet(X) \mid \forall A \subseteq X, \forall x \in X : \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \sup_{d \in \mathcal{D}} \inf_{a \in A} d(x, a) \right\}$$

dir. O halde, $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{G}_\delta$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}_\delta$ olduğundan $\widehat{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{G}_\delta$ olduğu açıktır. Diğer yandan, $\mathcal{G}_\delta \not\subseteq \widehat{\mathcal{D}}$ olduğunu kabul edelim. $d_0 \in \mathcal{G}_\delta$ ve $d_0 \notin \widehat{\mathcal{D}}$ olsun. Bu durumda; en azından bir $x \in X, \varepsilon > 0$ ve $w < \infty$ vardır ve

$$\forall d \in \mathcal{D} : \exists y_d \in X \ni d_0(x, y_d) \wedge w > d(x, y_d) + 2\varepsilon$$

olur. $\mathcal{D}$ nin sonlu elemanlı herhangi bir $\mathcal{D}_0$, alt ailesi için,

$$A(\mathcal{D}_0) := \left\{ y \in X \mid d_0(x, y) \wedge w > \sup_{d \in \mathcal{D}_0} d(x, y) + \varepsilon \right\}$$

kümesini tanımlayalım. $\mathcal{D}$ ailesi yerel yönlendirilmiş olduğundan, $\sup_{d \in \mathcal{D}_0} d \in \widehat{\mathcal{D}}$ dir.

Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$, her $x \in X$ ve her $w < \infty$ için

$$\exists e_x^{\varepsilon, w} \in \mathcal{D} \ni \left(\sup_{d \in \mathcal{D}_0} d \right) (x, \cdot) \wedge w \leq e_x^{\varepsilon, w} (x, \cdot) + \varepsilon$$

olacağından $A(\mathcal{D}_0) \neq \emptyset$ ve $A(\mathcal{D}_0) \supseteq \{y \in X \mid d_0(x, y) \wedge w > e_x^{\varepsilon, w}(x, y) + 2\varepsilon\}$ dir.

Dolayısıyla $\{A(\mathcal{D}_0) \mid \mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}\}$ ailesi bir süzgeç tabanıdır. Teorem 3.10 ve her $e \in \mathcal{D}$ için $A(\mathcal{D}_0 \cup \{e\}) \subset A(\mathcal{D}_0)$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}} \delta(x, A(\mathcal{D}_0)) \wedge w &= \sup_{\mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}} \sup_{e \in \mathcal{D}} \inf_{y \in A(\mathcal{D}_0)} e(x, y) \wedge w \\ &\leq \sup_{\mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}} \sup_{e \in \mathcal{D}} \inf_{y \in A(\mathcal{D}_0 \cup \{e\})} \left(\sup_{d \in \mathcal{D}_0} d \vee e \right) (x, y) \wedge w \\ &= \sup_{\mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}} \inf_{y \in A(\mathcal{D}_0)} \sup_{d \in \mathcal{D}_0} d(x, y) \wedge w \\ &\leq \sup_{\mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}} \inf_{y \in A(\mathcal{D}_0)} d_0(x, y) \wedge w - \varepsilon \\ &\leq \sup_{\mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}} \sup_{e \in \mathcal{G}_\delta} \inf_{y \in A(\mathcal{D}_0)} e(x, y) \wedge w - \varepsilon \\ &= \sup_{\mathcal{D}_0 \in 2^{(\mathcal{D})}} \delta(x, A(\mathcal{D}_0)) \wedge w - \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir, ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabultümüz yanlıştır. O halde; $\mathcal{G}_\delta \subseteq \widehat{\mathcal{D}}$ dir. ■

Teorem 3.11 $\mathcal{G}$, X kümesi üzerinde bir ölçek ve $\delta = \delta_{\mathcal{G}}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{G} = \left\{ d \in qMet(X) \mid \forall A \subseteq X, \forall x \in X : \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \delta(x, A) \right\}$$

dir (Lowen 1997).

İspat. $\mathcal{G}$, X üzerinde bir ölçek olduğundan ideal ve dolayısıyla yerel yönlendirilmiştir. Önerme 3.6 kullanılırsa, yerel yönlendirilmiş $\mathcal{G}$ ailesinin,

$$\mathcal{G}_\delta = \left\{ d \in qMet(X) \mid \forall A \subseteq X, \forall x \in X : \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \delta(x, A) \right\}$$

ailesi için taban olduğu açıktır. O halde, $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_\delta$ dir. $\mathcal{G}$ ölçek olduğundan yerel doyurulmuştur, dolayısıyla $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{G}}$ dir.

Teorem 3.8, Teorem 3.9, Teorem 3.10 ve Teorem 3.11 in sonucu olarak $\delta_{\mathcal{G}}$ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen ölçek ile $\mathcal{G}$ ölçeği ve $\mathcal{G}_\delta$ ölçeğine karşılık gelen uzaklık fonksiyonu ile δ fonksiyonunun çakıştığı söylenebilir. Dolayısıyla, uzaklık fonksiyonu ve ölçek yapıları matematiksel olarak eş yapılardır. ■

Teorem 3.12 $(\mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{A})$ X bir küme ve $\mathcal{H} \subseteq qMet(X)$ olsun. $\mathcal{H}$ yerel yönlendirilmiş ve

$$\forall x \in X \text{ için } \mathcal{B}(x) := \{d(x, \cdot) \mid d \in \mathcal{H}\}$$

biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda, $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi, X üzerinde bir yaklaşma tabanıdır. $\mathcal{H}$ ailesi tarafından üretilen ölçek $\mathcal{G}$ ve $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi tarafından üretilen yaklaşma sistemi $\mathbb{A} = (\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ olmak üzere;

$$\mathcal{G} = \{d \in qMet(X) \mid \forall x \in X : d(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)\}$$

dir (Lowen 1997).

İspat. $\mathcal{H}$ ailesi yerel yönlendirilmiş olduğundan, her $x \in X$ için $\mathcal{B}(x)$ bir ideal tabanıdır. $\mathcal{B}(x)$ ailesinin (B1) ve (B2) özelliklerini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

Son olarak, $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{H}}$ ve her $x \in X$ için $\widehat{\mathcal{B}(x)} = \mathbb{A}(x)$ olduğundan,

$$\mathcal{G} = \{d \in qMet(X) \mid \forall x \in X : d(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)\}$$

olduğu elde edilir. ■

Teorem 3.13 $(\mathbb{A} \rightrightarrows \mathcal{G}) \mathbb{A} = (\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir yaklaşma sistemi olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{G} := \{d \in qMet(X) \mid \forall x \in X : d(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)\}$$

biçiminde tanımlanan aile, X üzerinde bir ölçektir (Lowen 1997).

İspat. $d, e \in \mathcal{G}$ ise, her $x \in X$ için $d(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)$ ve $e(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)$ dir. Ayrıca, her $x \in X$ için $\mathbb{A}(x)$ ideal olduğundan,

$$(d \vee e)(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)$$

olur. Dolayısıyla, $d \vee e \in \mathcal{G}$ dir. Diğer yandan, $e \in \mathcal{G}$ ve $d \leq e$ olsun. Her $x \in X$ için $\mathbb{A}(x)$ ideal olduğundan $d(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)$ olur ve dolayısıyla $d \in \mathcal{G}$ dir. O halde, $\mathcal{G}$ bir idealdir ve yerel yoğun olduğu tanımından açıktır. ■

Teorem 3.12 ve Teorem 3.13 de sırasıyla; herhangi bir $\mathcal{G}$ ölçeği verildiğinde, $\mathcal{G}$ ye karşılık gelen yaklaşma sisteminin nasıl tanımlanacağı ve herhangi bir $\mathbb{A}$ yaklaşma sistemi verildiğinde, $\mathbb{A}$ ya karşılık gelen ölçeğin nasıl tanımlanacağı ifade edilmiştir.

Karışıklığa neden olabileceğini düşündüğümüz durumlarda; bir $\mathcal{G}$ ölçeğine karşılık gelen yaklaşma sistemini $\mathbb{A}_{\mathcal{G}}$ ile, bir $\mathbb{A}$ yaklaşma sistemine karşılık gelen ölçeği $\mathcal{G}_{\mathbb{A}}$ ile ifade edeceğiz.

Önerme 3.7 $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi X üzerinde bir yaklaşma tabanı ve bu yaklaşma tabanı tarafından üretilen yaklaşma sistemi $\mathbb{A} = (\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ olsun. Bu durumda, her $\xi < \infty$ ve her $Z \subseteq X$ için;

$$\begin{aligned} d_Z^\xi &: X \times X \longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow d_Z^\xi(x, y) = \left(\sup_{\varphi \in \mathcal{B}(x)} \inf_{z \in Z} \varphi(z) \wedge \xi \right) \ominus \left(\sup_{\psi \in \mathcal{B}(y)} \inf_{z \in Z} \psi(z) \wedge \xi \right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan d_Z^ξ fonksiyonu $\mathcal{G}_{\mathbb{A}}$ ölçeğine aittir (Lowen 1997).

İspat. $\xi < \infty$ ve $Z \subseteq X$ için d_Z^ξ fonksiyonunun bir quasimetrik olduğu açıktır. O halde, her bir $x \in X$ için $d_Z^\xi(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)$ olduğunu gösterebilirsek Teorem 3.13 den ispat tamamlanır. $\xi < \infty, Z \subseteq X, x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda; her bir $x \in X$ için

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{B}(x)} \inf_{z \in Z} \varphi(z) \wedge \xi \leq \inf_{z \in Z} \varphi(z) \wedge \xi + \varepsilon \quad (3.26)$$

olacak biçimde bir $\varphi \in \mathcal{B}(x)$ seçilebilir. (B2) den $\varphi \in \mathcal{B}(x)$ için en azından bir $(\psi_u)_{u \in X} \in \prod_{u \in X} \mathcal{B}(u)$ vardır öyle ki

$$\forall y, z \in X : \varphi(z) \wedge \xi \leq \psi_x(y) + \psi_y(z) + \varepsilon \quad (3.27)$$

eşitsizliği gerçekleşir. (3.26) ve (3.27) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} d_Z^\xi(x, y) &= \left(\sup_{\varphi \in \mathcal{B}(x)} \inf_{z \in Z} \varphi(z) \wedge \xi \right) \ominus \left(\sup_{\psi \in \mathcal{B}(y)} \inf_{z \in Z} \psi(z) \wedge \xi \right) \\ &\leq \left(\inf_{z \in Z} \varphi(z) \wedge \xi + \varepsilon \right) \ominus \left(\inf_{z \in Z} \psi_y(z) \wedge \xi \right) \\ &\leq \left(\inf_{z \in Z} (\psi_x(y) + \psi_y(z) + \varepsilon) \wedge \xi + \varepsilon \right) \ominus \left(\inf_{z \in Z} \psi_y(z) \wedge \xi \right) \\ &\leq \left(\inf_{z \in Z} (\psi_x(y) + \psi_y(z) \wedge \xi + \varepsilon) + \varepsilon \right) \ominus \left(\inf_{z \in Z} \psi_y(z) \wedge \xi \right) \\ &\leq \left(\psi_x(y) + 2\varepsilon + \inf_{z \in Z} \psi_y(z) \wedge \xi \right) \ominus \left(\inf_{z \in Z} \psi_y(z) \wedge \xi \right) \\ &= \psi_x(y) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde; (A2) den her $x \in X$ için $d_Z^\xi(x, \cdot) \in \mathbb{A}(x)$ dir. ■

Önerme 3.8 $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir yaklaşma sistemi ve $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathbb{A}}$ olsun. Bu durumda, her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{a \in A} \varphi(a) = \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a)$$

dir (Lowen 1997).

İspat. $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda; $\sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{a \in A} \varphi(a)$ olduğu açıktır. Diğer yandan; Önerme 3.7 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a) &\geq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \sup_{Z \subseteq X} \inf_{a \in A} d_Z^\xi(x, a) \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \sup_{Z \subseteq X} \inf_{a \in A} \left(\left(\sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{z \in Z} \varphi(z) \wedge \xi \right) \ominus \left(\sup_{\psi \in \mathbb{A}(a)} \inf_{z \in A} \psi(z) \wedge \xi \right) \right) \\
&\geq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \inf_{a \in A} \left(\left(\sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{z \in A} \varphi(z) \wedge \xi \right) \ominus \left(\sup_{\psi \in \mathbb{A}(a)} \inf_{z \in A} \psi(z) \wedge \xi \right) \right) \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \inf_{a \in A} \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{z \in A} \varphi(z) \wedge \xi \\
&= \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{z \in A} \varphi(z)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 3.14 $\mathbb{A} = (\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir yaklaşma sistemi ve $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathbb{A}}$ olsun. Bu durumda,

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall A \subseteq X : \mathcal{B}(x) = \{d(x, \cdot) \mid d \in \mathcal{G}\}$$

ise, $\mathbb{A}(x) = \widehat{\mathcal{B}(x)}$ dır (Lowen 1997).

İspat. Teorem 3.13 den $\widehat{\mathcal{B}(x)} \subseteq \mathbb{A}(x)$ olduğu açıktır. Diğer yandan, en azından bir $x \in X$ için $\mathbb{A}(x) \not\subseteq \widehat{\mathcal{B}(x)}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, en azından bir $\psi \in \mathbb{A}(x)$ vardır öyle ki $\psi \notin \widehat{\mathcal{B}(x)}$ dır. O halde,

$$\exists \varepsilon > 0, \exists w < \infty \text{ ve } \forall \varphi \in \mathcal{B}(x) : \psi \wedge w \not\leq \varphi + \varepsilon$$

olmalıdır. Dolayısıyla, her $d \in \mathcal{G}$ için en azından bir $y_d \in X$ vardır öyle ki $\psi(y_d) \wedge w > d(x, y_d) + \varepsilon$ olur. Bu durumda;

$$A(d) := \{y \in X \mid \psi(y) \wedge w > d(x, y) + \varepsilon\}$$

kümesi boş kümeden farklıdır. Ayrıca $d, e \in \mathcal{G}$ için $A(d) \cap A(e) = A(d \vee e) \neq \emptyset$ ve $\psi \in \mathbb{A}(x)$ olduğundan, Önerme 3.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sup_{d \in \mathcal{G}} \sup_{e \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} e(x, y) \wedge w &\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \sup_{e \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d \vee e)} (d \vee e)(x, y) \wedge w \\
&= \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} d(x, y) \wedge w \\
&\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} ((\psi(y) \wedge w) - \varepsilon) \wedge w \\
&\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} (\psi(y) \wedge w) - \varepsilon \\
&\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{y \in A(d)} (\varphi(y) \wedge w) - \varepsilon \\
&= \sup_{d \in \mathcal{G}} \sup_{e \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} e(x, y) \wedge w - \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir, bu ise çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. ■

Teorem 3.12, Teorem 3.13 ve Teorem 3.14 ün sonucu olarak $\mathbb{A}_{\mathcal{G}}$ yaklaşma sistemine karşılık gelen ölçek ile $\mathcal{G}$ ölçeği ve $\mathcal{G}_{\mathbb{A}}$ ölçeğine karşılık gelen yaklaşma sistemi ile $\mathbb{A}$ yaklaşma sisteminin çakıştığı söylenebilir. Dolayısıyla, yaklaşma sistemi ve ölçek yapıları matematiksel olarak eş yapılarıdır.

Teorem 3.15 $(\delta \rightrightarrows \mathbb{A}) \delta$, X kümesi üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için

$$\mathbb{A}(x) := \left\{ \varphi \in \mathbb{P}^X \mid \forall A \subseteq X : \inf_{a \in A} \varphi(a) \leq \delta(x, A) \right\}$$

biçiminde tanımlanan aile, X üzerinde bir yaklaşma sistemidir (Lowen 1989).

İspat. Teorem 3.8 ve Teorem 3.12 kullanılırsa δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ yaklaşma sistemi, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\delta}$ olmak üzere her bir $x \in X$ için

$$\mathcal{B}(x) = \{d(x, \cdot) \mid d \in \mathcal{G}\}$$

biçiminde tanımlanan aile tarafından üretilen yaklaşma sistemidir. O halde, her $x \in X$ için $\widehat{\mathcal{B}(x)} = \mathbb{A}(x)$ eşitliği gösterilebilirse ispat tamamlanır. $\varphi \in \widehat{\mathcal{B}(x)}$ olsun. Bu durumda,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall w < \infty : \exists d_x^{\varepsilon, w} \in \mathcal{B}(x) \ni \varphi \wedge w \leq d_x^{\varepsilon, w}(x, \cdot) + \varepsilon$$

dur. Dolayısıyla, herhangi bir $A \subseteq X$ için

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} \varphi(a) \wedge w &\leq \inf_{a \in A} d_x^{\varepsilon, w}(x, a) + \varepsilon \\ &\leq \delta(x, A) + \varepsilon \end{aligned}$$

olacaktır. ε keyfi olduğundan $\varphi \in \mathbb{A}(x)$ dir. Diğer yandan, $\mathbb{A}(x) \not\subseteq \widehat{\mathcal{B}(x)}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, en azından bir $\psi \in \mathbb{A}(x)$ vardır öyle ki $\psi \notin \widehat{\mathcal{B}(x)}$ dir. $\psi \notin \widehat{\mathcal{B}(x)}$ olduğundan,

$$\exists \varepsilon > 0, \exists w < \infty \text{ ve } \forall d \in \mathcal{B}(x) : \psi \wedge w \not\leq d(x, \cdot) + \varepsilon$$

olacaktır. Her $d \in \mathcal{G}$ için

$$A(d) := \{y \in X \mid \psi(y) \wedge w > d(x, y) + \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlanan küme $A(d) \cap A(e) = A(d \vee e)$ eşitliğini sağlar. $e, d \in \mathcal{G}$, $y \in A(d)$ ve $\psi \in \mathbb{A}(x)$ için δ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sup_{d \in \mathcal{G}} \delta(x, A(d)) \wedge w &= \sup_{d \in \mathcal{G}} \sup_{e \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} e(x, y) \wedge w \\ &\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \sup_{e \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} (d \vee e)(x, y) \wedge w \\ &= \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} d(x, y) \wedge w \\ &\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} (\psi(y) \wedge w - \varepsilon) \wedge w \\ &\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{y \in A(d)} \psi(y) \wedge w - \varepsilon \\ &\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{y \in A(d)} \varphi(y) \wedge w - \varepsilon \\ &\leq \sup_{d \in \mathcal{G}} \delta(x, A(d)) \wedge w - \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir, bu ise çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. O halde; $\mathbb{A}(x) \subseteq \widehat{\mathcal{B}(x)}$ dir. ■

Teorem 3.16 $(\mathbb{A} \Rightarrow \delta) (\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir yaklaşma sistemi olsun. Bu durumda,

$$\delta(x, A) := \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x)} \inf_{a \in A} \varphi(a)$$

X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur (Lowen 1989).

İspat. Teorem 3.9 ve Önerme 3.8 den açıktır. ■

Teorem 3.15 ve Teorem 3.16 da sırasıyla; herhangi bir δ uzaklık fonksiyonu verildiğinde, δ ya karşılık gelen yaklaşma sisteminin nasıl tanımlanacağı ve herhangi bir $\mathbb{A}$ yaklaşma sistemi verildiğinde, $\mathbb{A}$ ya karşılık gelen uzaklık fonksiyonunun nasıl tanımlanacağı gösterilmiştir. Karışıklığa neden olabileceğini düşündüğümüz durumlarda; bir δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemini $\mathbb{A}_\delta$ ile, bir $\mathbb{A}$ yaklaşma sistemine karşılık gelen uzaklık fonksiyonunu $\delta_{\mathbb{A}}$ ile ifade edeceğiz.

$\delta_{\mathbb{A}}$ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemi ile $\mathbb{A}$ yaklaşma sistemi ve $\mathbb{A}_\delta$ yaklaşma sistemine karşılık gelen uzaklık fonksiyonu ile δ uzaklık fonksiyonu çakıştığından, yaklaşma sistemi ve uzaklık fonksiyonu yapıları matematiksel olarak eş yapılardır.



4. TOPOLOJİK VE METRİK YAKLAŞMA UZAYLARI

Bu bölümde; yaklaşma uzayı kavramı ve yaklaşma uzayları arasında tanımlı büzülme dönüşümleri ifade edilerek bu kavramların temel özellikleri incelenecektir. Böylece; nesneleri yaklaşma uzayları, morfizmleri büzülme dönüşümleri olan kategori ve bu kategorinin alt kategorileri ile arasındaki ilişkiler verilecektir.

4.1 Yaklaşma Uzayları ve Temel Özellikleri

Üçüncü bölümde; bir X kümesi üzerinde uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi ve ölçek kavramlarının matematiksel olarak eş kavramlar olduğunu ifade ettik. Bu durumda, aşağıda verilen tanım anlamlıdır.

Tanım 4.1 X bir küme olsun. X üzerinde, $\mathfrak{S}$ ile bir uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi veya ölçek ifade edilsin. Bu durumda; $\mathfrak{S}$, X üzerinde bir **yaklaşma yapısı** olarak adlandırılır. $(X, \mathfrak{S})$ ikilisine ise **yaklaşma uzayı** adı verilir (Lowen 1989).

O halde; bir yaklaşma uzayı, matematiksel olarak birbirine eş olan uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi veya ölçek kavramlarından herhangi biri ile ifade edilebilir.

Örnek 4.1 $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{E}} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow d_{\mathbb{E}}(x, y) := |x - y| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı metrik verilsin. Bu durumda; $\mathbb{P}$ üzerinde tanımlı bir $\mathfrak{S}$ yaklaşma yapısı,

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{E}} : \mathbb{P} \times 2^{\mathbb{P}} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta_{\mathbb{E}}(x, A) := \begin{cases} 0 & , \ x = \infty \text{ ve } A \text{ sınırsız} \\ \infty & , \ x = \infty \text{ ve } A \text{ sınırlı} \\ \inf_{a \in A} |x - a| & , \ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı $\delta_{\mathbb{E}}$ uzaklık fonksiyonu ya da bu uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen,

$$\forall x \in X : \mathbb{A}_{\mathbb{E}}(x) := \begin{cases} \{\varphi \in \mathbb{P}^{\mathbb{P}} \mid \varphi \leq d_{\mathbb{E}}(x, \cdot)\} & , \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ \{\theta_{[a, \infty]} \mid a < \infty\}^{\wedge} & , \quad x = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlı yaklaşma sistemi ile verilebilir.

Örnek 4.2 $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow d_{\mathbb{P}}(x, y) := x \ominus y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı quasimetrik verilsin. Bu durumda; $\mathbb{P}$ üzerinde tanımlı bir $\mathfrak{S}$ yaklaşma yapısı,

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \times 2^{\mathbb{P}} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta_{\mathbb{P}}(x, A) := \begin{cases} x \ominus \sup A & , \quad A \neq \emptyset \\ \infty & , \quad A = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı $\delta_{\mathbb{P}}$ uzaklık fonksiyonu ya da bu uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen,

$$\forall x \in X : \mathbb{A}_{\mathbb{P}}(x) := \begin{cases} \{\varphi \in \mathbb{P}^{\mathbb{P}} \mid \varphi \leq d_{\mathbb{P}}(x, \cdot)\} & , \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ \{\theta_{[a, \infty]} \mid a \in \mathbb{R}^+\}^{\wedge} & , \quad x = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlı yaklaşma sistemi ile verilebilir. Diğer yandan; her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{P})$ için $l(\mathfrak{F}) := \inf_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}} \sup U$ biçiminde tanımlanmak üzere; $\mathfrak{S}$ yaklaşma yapısı, $\delta_{\mathbb{P}}$ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen,

$$\forall x \in \mathbb{P} : \lambda_{\mathbb{P}} \mathfrak{F}(x) = x \ominus l(\mathfrak{F})$$

biçiminde tanımlı $\lambda_{\mathbb{P}}$ limit operatörü ile de verilebilir.

Tanım 4.2 (X, δ) bir yaklaşma uzayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \alpha : F(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow (\alpha \mathfrak{F})(x) := \sup_{F \in \mathfrak{F}} \delta(x, F) \end{aligned}$$

operatörüne δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen **yığılma operatörü** adı verilir (Lowen 1997).

Her bir $x \in X$ için $\alpha\mathfrak{F}$ fonksiyonu, x noktasının $\mathfrak{F}$ süzgecinin yığılma noktası olmaya ne kadar yakın olduğunu ölçen fonksiyon olarak değerlendirilir.

Limit operatörü ve yığılma operatörü arasındaki ilişki, aşağıda verilen önerme ile açık bir biçimde görülecektir.

Önerme 4.1 $\mathfrak{S}, X$ kümesi üzerinde bir yaklaşma yapısı olsun. λ, X üzerinde tanımlı limit operatörünü ve α, X üzerinde tanımlı yığılma operatörünü göstereyin.

$\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere, $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{G}$ ise

$$\alpha\mathfrak{F} \leq \alpha\mathcal{G} \leq \lambda\mathcal{G} \leq \lambda\mathfrak{F}$$

dir (Lowen 1997).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ ve $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{G}$ olsun. Bu durumda; Tanım 4.2 den, her $x \in X$ için,

$$(\alpha\mathfrak{F})(x) = \sup_{F \in \mathfrak{F}} \delta(x, F) \leq \sup_{G \in \mathcal{G}} \delta(x, G) = \alpha\mathcal{G}(x)$$

olduğu açıktır. Diğer yandan, Teorem 3.6 kullanılırsa;

$$\lambda\mathcal{G} = \sup_{\mathcal{U} \in \text{sec } \mathcal{G}} \delta_{\mathcal{U}} \geq \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{G}} \delta_{\mathcal{U}} = \alpha\mathcal{G}$$

elde edilir. ■

$x \in X$ noktası için, $(\lambda\mathfrak{F})(x) = 0$ ve $(\alpha\mathfrak{F})(x) = 0$ durumları sırasıyla, x noktasının $\mathfrak{F}$ süzgecinin limit noktası ve yığılma noktası olması olarak değerlendirilir. Yukarıdaki önermeden anlaşılacağı gibi; x noktası, bir $\mathfrak{F}$ süzgecinden daha ince olan bir $\mathcal{G}$ süzgecinin yığılma noktası ise, $\mathfrak{F}$ süzgecinin de yığılma noktası olacaktır. Her limit noktası bir yığılma noktasıdır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 4.2 $\mathfrak{S}, X$ kümesi üzerinde tanımlı bir yaklaşma yapısı olsun. λ, X üzerinde tanımlı limit operatörünü ve α, X üzerinde tanımlı yığılma operatörünü göstereyin. Bu durumda;

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U}(X) : \lambda\mathcal{U} = \alpha\mathcal{U}$$

dur (Lowen 1989).

İspat. Teorem 3.6 ve Tanım 4.2 den açıktır. ■

Önerme 4.3 $\mathfrak{S}$, X kümesi üzerinde bir yaklaşma yapısı, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler mevcuttur.

- i) $(\lambda\mathfrak{F})(x) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\lambda\mathcal{U})(x) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\alpha\mathcal{U})(x),$
 - ii) $(\alpha\mathfrak{F})(x) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\lambda\mathcal{U})(x) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\alpha\mathcal{U})(x)$
- dir (Lowen 1997).

İspat. (i) $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Önerme 4.1 den herhangi bir $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için $\lambda\mathcal{U} \leq \lambda\mathfrak{F}$ olup,

$$\sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda\mathcal{U} \leq \lambda\mathfrak{F}$$

elde edilir. Diğer yandan; Önerme 4.1 den $\alpha\mathfrak{F} \leq \alpha\mathcal{U} \leq \lambda\mathcal{U}$ olup

$$\alpha\mathfrak{F} \leq \sup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \lambda\mathcal{U}$$

elde edilir. İkinci eşitlik, Önerme 4.2 den açıktır.

(ii) $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ ve her $x \in X$ için

$$\sup_{F \in \mathfrak{F}} \delta(x, F) \leq \sup_{U \in \mathcal{U}} \delta(x, U)$$

olur ve, $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ keyfi olduğundan

$$\sup_{F \in \mathfrak{F}} \delta(x, F) \leq \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} \sup_{U \in \mathcal{U}} \delta(x, U) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\alpha\mathcal{U})(x)$$

elde edilir. Tanım 4.2 ve Önerme 4.2 den,

$$(\alpha\mathfrak{F})(x) \leq \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\lambda\mathcal{U})(x)$$

dir. O halde; $\inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\lambda\mathcal{U})(x) \leq (\alpha\mathfrak{F})(x)$ olduğu gösterilirse, ilk eşitlik için ispat tamamlanır. Her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için $(\alpha\mathfrak{F})(x) < (\lambda\mathcal{U})(x)$ olduğunu kabul edelim. Önerme 4.2 ve Tanım 4.2 den her bir $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için bir $U_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ ögesi $(\alpha\mathfrak{F})(x) < \delta(x, U_{\mathcal{U}})$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda; Lemma 3.1 den $\mathbf{U}(\mathfrak{F})$ ailesinin sonlu elemanlı bir U_0 alt ailesi vardır ve $\bigcup_{\mathcal{U} \in U_0} U_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}$ dir. Bu durumda;

Tanım 4.2 den

$$\begin{aligned} (\alpha \mathfrak{F})(x) &\geq \delta \left(x, \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}_0} U_{\mathcal{U}} \right) \\ &= \min_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}_0} \delta(x, U_{\mathcal{U}}) \\ &> (\alpha \mathfrak{F})(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde;

$$\exists \mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F}) : (\alpha \mathfrak{F})(x) \geq (\lambda \mathcal{U})(x)$$

ve dolayısıyla $(\alpha \mathfrak{F})(x) \geq \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})} (\lambda \mathcal{U})(x)$ olur. ■

Topolojik uzayda, bir süzgecin bir noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart kendisinden ince olan tüm ultrasüzgeçlerin o noktaya yakınsamasıdır. Bir süzgecin bir noktaya yığılması için gerek ve yeter şart ise kendisinden ince en azından bir ultrasüzgecin o noktaya yakınsamasıdır. Önerme 4.3 de verilen özellikler bu sonuçlar ile uyumludur.

Tanım 4.3 X ve X' iki küme, δ ve δ' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı iki uzaklık fonksiyonu ve $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $A \subseteq X$ için

$$\delta'_{f(A)} \circ f \leq \delta_A$$

eşitsizliği veya her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için;

$$\delta'(f(x), f(A)) \leq \delta(x, A)$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise, f fonksiyonuna **yaklaşma uzayları arasında tanımlı bir büzülme dönüşümü** adı verilir (Lowen 1989).

Yaklaşma uzayları arasında tanımlı büzülme dönüşümleri, kısaca; büzülme olarak ifade edilecektir.

Lemma 4.1 X ve X' iki küme, δ ve δ' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı iki uzaklık fonksiyonu ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Bu durumda,

$$\forall \mathcal{W} \in \mathbf{U}(f(\mathfrak{F})) : \exists \mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F}) \ni f(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$$

dır (Lowen 2015).

İspat. Bir an için

$$\exists \mathcal{W} \in \mathbf{U}(f(\mathfrak{F})), \forall \mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F}) : f(\mathcal{U}) \not\subseteq \mathcal{W}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda; her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için en azından bir $V_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ vardır öyle ki; $f(V_{\mathcal{U}}) \notin \mathcal{W}$ dır. Lemma 3.1 den, en azından bir $(\mathcal{U}_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ mevcuttur öyle ki $V_{\mathcal{U}_1} \in \mathcal{U}_1, V_{\mathcal{U}_2} \in \mathcal{U}_2, \dots, V_{\mathcal{U}_n} \in \mathcal{U}_n$ ve $\bigcup_{i=1}^n V_{\mathcal{U}_i} \in \mathfrak{F}$ dir. Bu durumda $\mathcal{W}$ ultrasüzgeç olduğundan en azından bir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $f(V_{\mathcal{U}_k}) \in \mathcal{W}$ elde edilir, bu ise $V_{\mathcal{U}_k}$ kümesinin seçimi ile çelişir. Benzer şekilde en azından bir $\mathcal{W} \in \mathbf{U}(f(\mathfrak{F}))$ ve her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için $\mathcal{W} \not\subseteq f(\mathcal{U})$ olması durumunda da çelişki elde edilir. ■

Teorem 4.1 X ve X' iki küme, δ ve δ' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı iki uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda; $f : X \rightarrow X'$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir. (λ ve $\mathbb{A}$ (λ' ve $\mathbb{A}'$) ile δ (δ') uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen limit operatörü ve yaklaşma sistemi ifade edilecektir.)

- i) f fonksiyonu bir büzülmedir.
- ii) $\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : \lambda'(f(\mathfrak{F})) \circ f \leq \lambda \mathfrak{F}$ dir.
- iii) $\forall \mathcal{U} \in \mathbf{U}(X) : \lambda'(f(\mathcal{U})) \circ f \leq \lambda \mathcal{U}$ dir.
- iv) $\forall x \in X, \forall \varphi' \in \mathbb{A}'(f(x)) : \varphi' \circ f \in \mathbb{A}(x)$ dir.
- v) $\forall d' \in \mathcal{G}' : d' \circ (f \times f) \in \mathcal{G}$ dir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) f fonksiyonu bir büzülme ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için Teorem 3.6 dan,

$$\left(\lambda'(f(\mathfrak{F})) \right)(x) = \sup_{U \in \sec(f(\mathfrak{F}))} \delta'(f(x), U)$$

ve

$$(\lambda \mathfrak{F})(x) = \sup_{V \in \sec \mathfrak{F}} \delta(x, V) \quad (4.1)$$

olduğundan, $\sup_{U \in \sec(f(\mathfrak{F}))} \delta'(f(x), U) \leq \sup_{V \in \sec \mathfrak{F}} \delta(x, V)$ eşitsizliğinin gerçekleştiği gösterilirse ispat tamamlanır. Keyfi bir $U \in \sec(f(\mathfrak{F}))$ alalım. $\sec(f(\mathfrak{F})) \subseteq f(\sec \mathfrak{F})$ olduğundan, $U = f(V)$ olacak biçimde en azından bir $V \in \sec \mathfrak{F}$ vardır. O halde,

$$\forall U \in \sec(f(\mathfrak{F})) : \exists V \in \sec \mathfrak{F} \ni \delta'(f(x), f(V)) \leq \delta(x, V)$$

olur ve ispat tamamlanır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\mathbf{U}(X) \subseteq \mathbf{F}(X)$ olduğundan açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 3.7 den, her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için

$$\delta'(f(x), f(A)) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(f(A))} (\lambda' \mathcal{U})(f(x)) \quad (4.2)$$

dir. Keyfi bir $\mathcal{V} \in \mathbf{U}(A)$ alınırsa, hipotezden

$$\forall x \in X : (\lambda'(f(\mathcal{V}))) (f(x)) \leq (\lambda \mathcal{V})(x)$$

elde edilir. Ayrıca, $f(\mathbf{U}(A)) \subseteq \mathbf{U}(f(A))$ olduğundan $f(\mathcal{V}) \in \mathbf{U}(f(A))$ dır. Bu durumda,

$$\forall \mathcal{V} \in \mathbf{U}(A) : \exists \mathcal{U}_{\mathcal{V}} = f(\mathcal{V}) \in \mathbf{U}(f(A)) \ni (\lambda' \mathcal{U}_{\mathcal{V}})(f(x)) \leq (\lambda \mathcal{V})(x)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(f(A))} (\lambda' \mathcal{U})(f(x)) \leq \inf_{\mathcal{V} \in \mathbf{U}(A)} (\lambda \mathcal{V})(x)$$

olup, f bir büzülme dönüşümüdür.

(i) $\Rightarrow$ (iv) f fonksiyonu büzülme olsun. En azından bir $x_0 \in X$ ve $\varphi'_0 \in \mathbb{A}'(f(x_0))$ için $\varphi'_0 \circ f \notin \mathbb{A}(x_0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda; en azından bir $\varepsilon_0 > 0$ ve $\omega_0 < \infty$ vardır öyle ki,

$$\forall \varphi \in \mathbb{A}(x_0) : (\varphi'_0 \circ f) \wedge \omega_0 \not\leq \varphi \wedge \omega_0 + \varepsilon_0$$

dır. Dolayısıyla;

$$A(\varphi) := \left\{ x \in X \mid \varphi'_0(f(x)) \wedge \omega_0 > \varphi(x) + \varepsilon_0 \right\}$$

kümesi boş kümeden farklıdır. Teorem 3.16 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x_0)} \delta(x_0, A(\varphi)) \wedge \omega_0 &= \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x_0)} \sup_{\psi \in \mathbb{A}(x_0)} \inf_{x \in A(\varphi)} \psi(x) \wedge \omega_0 \\ &\leq \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x_0)} \sup_{\psi \in \mathbb{A}(x_0)} \inf_{x \in A(\varphi \vee \psi)} (\varphi \vee \psi)(x) \wedge \omega_0 \\ &= \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x_0)} \inf_{x \in A(\varphi)} \varphi(x) \wedge \omega_0 \\ &\leq \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x_0)} \inf_{x \in A(\varphi)} \varphi'_0(f(x)) \wedge \omega_0 - \varepsilon_0 \\ &\leq \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x_0)} \sup_{\xi \in \mathbb{A}'(f(x_0))} \inf_{y \in f(A(\varphi))} \xi(y) \wedge \omega_0 - \varepsilon_0 \\ &= \sup_{\varphi \in \mathbb{A}(x_0)} \delta'(f(x_0), f(A(\varphi))) \wedge \omega_0 - \varepsilon_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun büzülme olması ile  eli ir.

(iv)⇒(v) $d' \in \mathcal{G}'$ olsun. Bu durumda; Teorem 3.13 den,

$$\forall x \in X : d' (f(x), .) \in \mathbb{A}' (f(x))$$

olacaktır. Dolayısıyla, her $x \in X$ için $d' (f(x), .) \circ f \in \mathbb{A} (x)$ olur ve $d' \circ (f \times f) \in \mathcal{G}$ elde edilir.

(v)⇒(i) Herhangi bir $\alpha > 0$, her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için $\delta' (f(x), f(A)) > \alpha$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.10 dan,

$$\exists d' \in \mathcal{G}' \ni \forall a \in A : d' (f(x), f(a)) > \alpha$$

dır. Hipotezden, $d' \circ (f \times f) \in \mathcal{G}$ olur. $d' \circ (f \times f) := e$ olarak alınırsa,

$$\exists e \in \mathcal{G} : \inf_{a \in A} e(x, a) > \alpha$$

bulunur ve $\delta(x, A) = \sup_{e \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} e(x, a) > \alpha$ elde edilir. Dolayısıyla; $\delta' (f(x), f(A)) \leq \delta(x, A)$ dir. ■

Önerme 4.4 (X, δ) bir yaklaşma uzayı olmak üzere, herhangi bir $A \subseteq X$ için,

$$\begin{aligned} \delta_A : (X, \delta) &\rightarrow (\mathbb{P}, \delta_{\mathbb{P}}) \\ x &\rightarrow \delta(x, A) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir büzülmedir. ($\delta_{\mathbb{P}}$ yapısı örnek 4.2 de tanımlanmıştır.)

 spat. $x \in X$ ve $B \subseteq X$ olsun. Bu durumda, $B = \emptyset$ ise $\delta(x, B) = \infty$ ve dolayısıyla δ_A bir büzülme dönüşümüdür. Diğer yandan, $B \neq \emptyset$ ise önerme 3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{P}} (\delta_A(x), \delta_A(B)) &= \delta_A(x) \ominus \sup_{b \in B} \delta_A(b) \\ &\leq \left(\delta(x, B) + \sup_{b \in B} \delta(b, A) \right) \ominus \sup_{b \in B} \delta(b, A) \\ &= \delta(x, B) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Nesneler olarak yaklaşma uzayları, morfizmler olarak yaklaşma uzayları arasında tanımlı büzülme dönüşümleri göz önüne alınırsa, Tanım 2.19 anlamında bir kategori elde edilmiş olur.

Tanım 4.4 Nesneleri yaklaşma uzayları, morfizmleri büzülme dönüşümleri olan kategori App ile gösterilir (Lowen 1989).

App kategorisi, başlangıç yapılarına göre kapalıdır. Teorem 4.2 de; ele alınacak küme ailesinin öğeleri üzerinde yaklaşma yapıları olarak yaklaşma sistemleri verildiğinde, başlangıç yapılarının nasıl elde edileceği gösterilecektir. Teorem 4.3 ve Teorem 4.4 de ise, bu küme ailesinin öğeleri üzerindeki yaklaşma yapılarının sırasıyla ölçekler ve uzaklık fonksiyonları olması durumlarında karşılık gelecek başlangıç yapıları ifade edilecektir.

Tanım 4.5 δ ve δ' , X kümesi üzerinde tanımlı iki uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda;

$$id_X : (X, \delta) \longrightarrow (X, \delta')$$

fonksiyonu büzülme oluyorsa δ fonksiyonu δ' fonksiyonundan daha ince (veya δ' fonksiyonu δ fonksiyonundan daha kaba) dir denir. δ fonksiyonunun δ' fonksiyonundan daha ince olması $\delta' \leq \delta$ biçiminde ifade edilir (Lowen 1989).

Teorem 4.2 App bir topolojik kategoridir. Özel olarak; X bir küme, J bir indis kümesi, $(X_j)_{j \in J}$ yaklaşma uzaylarının bir ailesi olmak üzere; App içinde

$$(f_j : X \longrightarrow X_j)_{j \in J}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyon ailesi verilsin. Her bir $j \in J$ için $(\mathcal{B}_j(x))_{x \in X_j}$ ailesi X_j üzerinde tanımlı yaklaşma sistemi için taban olmak üzere; X üzerindeki başlangıç yaklaşma sistemi için taban, her $x \in X$ için

$$\mathcal{B}(x) := \left\{ \sup_{j \in K} \xi_j \circ f_j \mid K \in 2^{(J)}, \forall j \in K : \xi_j \in \mathcal{B}_j(f_j(x)) \right\}$$

dir (Lowen 1989).

İspat. App kategorisinin belirli (concrete) olduğu tanımından açıktır ve $X = \{a\}$ kümesi üzerinde bir tek yaklaşma yapısı tanımlanabilir. I bir indis kümesi olmak üzere; herhangi bir X kümesi üzerinde tanımlı $\{\delta_i\}_{i \in I}$ yaklaşma yapılarının ailesi,

$$\delta_i \leq \delta_j \iff id_X : (X, \delta_j) \longrightarrow (X, \delta_i) \text{ büzülme}$$

biçiminde tanımlanan “ $\leq$ ” bağıntısına göre kısmi sıralıdır. O halde; Tanım 2.26 gereğince App kategorisinin başlangıç yapılarına göre kapalı olduğu gösterilebilirse ispat tamamlanır. $x \in X$ olmak üzere; $\mathcal{B}(x)$ ailesinin bir yaklaşma sistemi için taban olduğunu gösterelim: $\mathcal{B}(x)$ ailesinin ideal tabanı olduğu ve (B1) özelliğini sağladığı tanımından açıktır. (B2) özelliği için $x \in X$ ve $\varphi \in \mathcal{B}(x)$ alalım. Bu durumda,

$$\exists K \in 2^{(J)} \ni \forall j \in K : \xi_j \in \mathcal{B}_j(f_j(x)) \text{ ve } \varphi = \sup_{j \in K} \xi_j \circ f_j \quad (4.3)$$

dir. Her bir $j \in J$ için $(\mathcal{B}_j(z))_{z \in X_j}$ ailesi X_j üzerindeki yaklaşma sistemi için taban olduğundan, (B2) özelliğini sağlar. O halde; $f_j(x) \in X_j$, $\varepsilon > 0$, $w < \infty$ için en azından bir $(\xi_z^j)_{z \in X_j} \in \prod_{z \in X_j} \mathcal{B}_j(z)$ vardır öyle ki;

$$\forall z, y \in X_j : \xi_j(y) \wedge w \leq \xi_{f_j(x)}^j(z) + \xi_z^j(y) + \varepsilon \quad (4.4)$$

dur. Kısalık açısından; her $t \in X$ için

$$v_t := \sup_{j \in K} \xi_{f_j(t)}^j \circ f_j$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $v_t \in \mathcal{B}(t)$ olup ve her $t, s \in X$ için (4.3) ve (4.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi(s) \wedge w &= \left(\sup_{j \in K} \xi_j \circ f_j \right)(s) \wedge w = \sup_{j \in K} \xi_j(f_j(s)) \wedge w \\ &\leq \sup_{j \in K} \left(\xi_{f_j(x)}^j(f_j(t)) + \xi_{f_j(t)}^j(f_j(s)) + \varepsilon \right) \\ &\leq v_x(t) + v_t(s) + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla; $(\mathbb{A}(x))_{x \in X} := \widehat{(\mathcal{B}(x))}_{x \in X}$ ailesi, X üzerinde bir yaklaşma sistemidir. $(\mathbb{A}(x))_{x \in X}$ ailesinin bir başlangıç yapısı olduğunu gösterelim: $(Z, (\mathfrak{C}(z))_{z \in Z})$ bir yaklaşma uzayı, $g : Z \longrightarrow X$ fonksiyonu her $j \in J$ için

$$f_j \circ g : (Z, (\mathfrak{C}(z))_{z \in Z}) \longrightarrow (X_j, (\mathbb{A}_j(x))_{x \in X_j})$$

fonksiyonları bütölme olacak biçimde tanımlı bir fonksiyon olsun. Teorem 4.1 kullanılırsa,

$$\forall z \in Z, \forall \psi' \in \mathbb{A}_j((f_j \circ g)(z)) : \psi' \circ (f_j \circ g) \in \mathfrak{C}(z) \quad (4.5)$$

dir. g fonksiyonunun bütölme olduğunu göstermek için $z \in Z$ ve $\varphi' \in \mathbb{A}(g(z))$ alalım. Bu durumda, en azından bir $K \in 2^{(J)}$ vardır öyle ki her $j \in K$ için

$\xi_j \in \mathcal{B}_j(f_j(g(z)))$ olmak üzere;

$$\left(\sup_{j \in K} \xi_j \circ f_j \right) \circ g = \sup_{j \in K} \xi_j \circ (f_j \circ g)$$

dir. (4.5) den $\xi_j \circ (f_j \circ g) \in \mathfrak{C}(z)$, $\mathfrak{C}(z)$ ideal olduğundan $\sup_{j \in K} \xi_j \circ (f_j \circ g) \in \mathfrak{C}(z)$ ve dolayısıyla, $\varphi' \circ g \in \mathfrak{C}(z)$ elde edilir. Teorem 4.1 den g büzülme dönüşümüdür. Tanım 4.5 den ispat tamamlanır. ■

Bir X kümesi üzerinde tanımlanan ayrık App-yapı, matematiksel olarak birbirine denk olan aşağıdaki yaklaşma yapılarından herhangi biri ile verilebilir.

i) Uzaklık Fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \delta : X \times 2^X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta(x, A) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in A \\ \infty & , \quad x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

ii) Limit Operatörü:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda\mathfrak{F} = \begin{cases} \theta_{\{x\}} & , \quad \mathfrak{F} = \dot{x} \\ \infty & , \quad \mathfrak{F} \neq \dot{x} \end{cases} \end{aligned}$$

iii) Yaklaşma Yapısı: $\forall x \in X$ için $\mathbb{A}(x) = \{\varphi \in \mathbb{P}^X \mid \varphi(x) = 0\}$

iv) Ölçek: $\mathcal{G} = qMet(X)$

Bir X kümesi üzerinde tanımlanan ayrık olmayan App-yapı, matematiksel olarak birbirine denk olan aşağıdaki yaklaşma yapılarından herhangi biri ile verilebilir.

i) Uzaklık Fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \delta : X \times 2^X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta(x, A) = \begin{cases} 0 & , \quad A \neq \emptyset \\ \infty & , \quad A = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

ii) Limit Operatörü:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda\mathfrak{F} = 0 \end{aligned}$$

iii) Yaklaşma Yapısı: $\forall x \in X$ için $\mathbb{A}(x) = \{0\}$

iv) Ölçek: $\mathcal{G} = \{0\}$

Teorem 4.3 X bir küme, J bir indis kümesi, $(X_j)_{j \in J}$ yaklaşma uzaylarının bir ailesi olmak üzere; App içinde

$$(f_j : X \longrightarrow X_j)_{j \in J}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyon ailesi verilsin. Her bir $j \in J$ için $\mathcal{H}_j$ ile X_j üzerinde tanımlı ölçek için taban gösterilmek üzere; X üzerindeki başlangıç ölçeği için taban,

$$\mathcal{H} := \left\{ \sup_{j \in K} d_j \circ (f_j \times f_j) \mid K \in 2^{(J)}, \forall j \in K : d_j \in \mathcal{H}_j \right\}$$

dir (Lowen 1997).

İspat. Teorem 4.2 nin ispatına benzer olarak elde edilebilir. ■

X bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Teorem 4.4 de kullanılacak olan $\mathcal{P}(A)$ ailesi;

$$\mathcal{P}(A) := \left\{ \mathcal{R} = (A_i)_{i \in I} \mid I \text{ sonlu elemanlı, } \forall i \in I : A_i \subseteq A \text{ ve } A = \bigcup_{i \in I} A_i \right\}$$

biçiminde tanımlıdır.

Teorem 4.4 X bir küme, J bir indis kümesi, $(X_j)_{j \in J}$ yaklaşma uzaylarının bir ailesi olmak üzere; App içinde

$$(f_j : X \longrightarrow X_j)_{j \in J}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyon ailesi verilsin. Her $j \in J$ için δ_j ile X_j üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu gösterilmek üzere; X üzerinde tanımlı başlangıç uzaklık fonksiyonu,

$$\delta(x, A) := \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A)} \min_{P \in \mathcal{R}} \sup_{j \in J} \delta_j(f_j(x), f_j(P))$$

dir (Lowen 1989).

İspat. δ fonksiyonunun bir uzaklık fonksiyonu olduğu kolayca gösterilebilir. X üzerindeki başlangıç uzaklık fonksiyonu δ_b ile gösterilmek üzere; $\delta = \delta_b$ olduğu

gösterilirse ispat tamamlanır. $\delta \leq \delta_b$ eşitsizliği (D3) özelliği kullanılarak gösterilir. Diğer yandan; $\alpha > 0$ olmak üzere, $\delta_b(x, A) > \alpha$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.3 ve Teorem 3.10 kullanılırsa,

$$\sup_{K \in 2^{(J)}} \sup_{(d_k)_{k \in K} \in \prod_{k \in K} \mathcal{G}_k} \inf_{a \in A} \sup_{k \in K} d_k(f_k(x), f_k(a)) > \alpha$$

olacaktır. Bu durumda; en azından bir $K \in 2^{(J)}$ ve bir $(d_k)_{k \in K} \in \prod_{k \in K} \mathcal{G}_k$ vardır öyle ki her $a \in A$ ve en azından bir $k \in K$ için $d_k(f_k(x), f_k(a)) > \alpha$ dır. O halde;

$$A \cap \left(\bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(B_{d_k}(f_k(x), \alpha)) \right) = \emptyset$$

olur. Ayrıca;

$$B_k := A \cap f_k^{-1}(X_k \setminus B_{d_k}(f_k(x), \alpha))$$

alınırsa $A = \bigcup_{k \in K} B_k$ ve her $k \in K$ için,

$$\begin{aligned} \sup_{j \in J} \delta_j(f_j(x), f_j(B_k)) &\geq \delta_k(f_k(x), f_k(B_k)) \\ &= \sup_{d \in \mathcal{G}_k} \inf_{a \in B_k} d(f_k(x), f_k(a)) \\ &\geq \inf_{a \in B_k} d_k(f_k(x), f_k(a)) \\ &\geq \alpha \end{aligned}$$

olur. Böylece; $\delta = \delta_b$ elde edilir. ■

Sonuç 4.1 X bir küme, J bir indis kümesi olmak üzere; $(X_j, d_j)_{j \in J}$ metrik uzayların keyfi bir ailesi olsun. $\delta_\pi = \prod_{j \in J} \delta_{d_j}$ ile

$$\mathcal{H}_\pi := \left\{ \sup_{k \in K} d_k \circ (pr_k \times pr_k) \mid K \subseteq J, K \text{ sonlu elemanlı} \right\}$$

ölçek tabanının ürettiği ölçeğe karşılık gelen uzaklık fonksiyonu gösterilmek üzere; her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için,

$$\delta_\pi(x, A) = \sup_{K \in 2^{(J)}} \inf_{a \in A} \sup_{k \in K} d_k(pr_k(x), pr_k(a))$$

biçiminde tanımlıdır (Lowen 1997).

4.2 Topolojik Yaklaşma Uzayları

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere; her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için

$$\delta_\tau : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$(x, A) \longrightarrow \delta_\tau(x, A) = \begin{cases} 0 & , \ x \in cl_\tau(A) \\ \infty & , \ x \notin cl_\tau(A) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur. Bu bölümde; δ_τ fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma yapıları ifade edilecek ve Top kategorisi ile App kategorisi arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Önerme 4.5 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$\delta_\tau : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$$

fonksiyonu, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur ve bu uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma yapıları aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

i) Her $x \in X$ için $\mathbb{A}_\tau(x) := \{\varphi \in \mathbb{P}^X \mid \varphi(x) = 0 \text{ ve } \varphi, x \text{ noktasında üstten yarı-süreklili}\}$ dir. $(\mathbb{A}_\tau(x))_{x \in X}$ yaklaşma sisteminin tabanı her $x \in X$ için $\mathcal{B}_\tau(x) := \{\theta_V \mid V \in \mathcal{V}_\tau(x)\}$ dir.

ii) $\mathcal{G}_\tau := \{d \in qMet(X) \mid \tau_d \subseteq \tau\}$ dur.

(Lowen 1997).

İspat. δ_τ fonksiyonunun (D1) ve (D2) özelliklerini sağladığı kolayca görülebilir. Her $A, B \subseteq X$ için

$$cl_\tau(A \cup B) = cl_\tau(A) \cup cl_\tau(B)$$

olduğundan, δ_τ fonksiyonu (D3) özelliğini sağlar. Her $\varepsilon > 0$ için $A^{(\varepsilon)} = cl_\tau(A)$ ve $A^{(\infty)} = X$ olduğundan, (D4) özelliğinin sağlandığı açıktır.

(i) δ_τ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemi Teorem 3.15 den,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\delta_\tau}(x) &:= \left\{ \varphi \in \mathbb{P}^X \mid \forall A \subseteq X : \inf_{a \in A} \varphi(a) \leq \delta_\tau(x, A) \right\} \\ &= \left\{ \varphi \in \mathbb{P}^X \mid \forall A \subseteq X : x \in cl_\tau(A) \implies \inf_{a \in A} \varphi(a) = 0 \right\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. $\varphi \in \mathbb{A}_{\delta_\tau}(x)$ olsun. Bu durumda; $\varphi(x) = 0$ olduğu açıktır. φ fonksiyonunun x noktasında üstten yarı sürekliliğini gösterelim: Bir an için $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}$ fonksiyonunun x noktasında üstten yarı sürekliliğini kabul edelim. Bu durumda;

$$\exists \varepsilon_x > 0 \ni \forall U \in \mathcal{V}_{(x)} : \varphi(U) \not\subseteq [0, \varphi(x) + \varepsilon_x]$$

dir. $A = \{\varphi > \varepsilon_x\}$ alınırsa, $x \in cl_\tau(A)$ olduğundan $\inf_{a \in A} \varphi(a) = 0$ olacaktır. O halde;

$$\varepsilon_x > 0 : \exists u_{\varepsilon_x} \in A \ni \varphi(u_{\varepsilon_x}) \leq \varepsilon_x$$

elde edilir, bu ise A kümesinin tanımı ile çelişir. Diğer yandan; $\varphi \in \mathbb{A}_\tau(x)$, $A \subseteq X$ ve $x \in cl_\tau(A)$ olduğunu kabul edelim. $x \in A$ ise $\varphi \in \mathbb{A}_{\delta_\tau}(x)$ olduğu açıktır. $x \notin A$ olsun. Kabulden;

$$\forall V \in \mathcal{V}_{(x)} : V \cap A \neq \emptyset \quad (4.6)$$

dır. Ayrıca; φ , x noktasında üstten yarı sürekliliğinden

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U \in \mathcal{V}_{(x)} \ni \varphi(U) \subseteq [0, \varepsilon]$$

olacaktır. (4.6) dan, $U \cap A \neq \emptyset$ dir. Böylece;

$$\exists a_\varepsilon \in U \cap A \ni x \neq a_\varepsilon \text{ ve } \varphi(a_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

olur ve dolayısıyla $\inf_{a \in A} \varphi(a) = 0$ bulunur. Sonuç olarak; $\mathbb{A}_\tau = \mathbb{A}_{\delta_\tau}$ dur. Şimdi; $\widehat{\mathcal{B}_\tau(x)} = \mathbb{A}_\tau(x)$ olduğunu gösterelim: $\varphi \in \mathbb{A}_\tau(x)$ olsun. Bu durumda; her $\varepsilon > 0$ için en azından bir $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\tau(x)$ vardır öyle ki $\varphi(U_\varepsilon) \subseteq [0, \varepsilon]$ dur. Bu durumda; $\theta_{U_\varepsilon} \in \mathcal{B}_\tau(x)$ olur ve

$$\forall \varepsilon > 0, \forall w < \infty : \varphi \wedge w \leq \theta_{U_\varepsilon} + \varepsilon$$

dur. O halde; $\mathbb{A}_\tau(x) \subseteq \widehat{\mathcal{B}_\tau(x)}$ elde edilir. $\widehat{\mathcal{B}_\tau(x)} \subseteq \mathbb{A}_\tau(x)$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

(ii) δ_τ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen ölçek, Teorem 3.8 den;

$$\mathcal{G}_{\delta_\tau} = \left\{ d \in qMet(X) \mid \forall A \subseteq X, \forall x \in X : \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \delta_\tau(x, A) \right\}$$

biçiminde tanımlıdır. $d \in \mathcal{G}_{\delta_\tau}$ olsun. Bu durumda; her $A \subseteq X$ için $cl_\tau(A) \subseteq cl_{\tau_d}(A)$ olduğu gösterilirse $d \in \mathcal{G}_\tau$ olduğu söylenebilir. $d \in \mathcal{G}_{\delta_\tau}$ olduğundan, $A \subseteq X$ ve $x \in cl_\tau(A)$ için $\mathcal{G}_{\delta_\tau}$ ailesinin tanımından $\inf_{a \in A} d(x, a) = 0$ dir. Bu durumda;

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists a_\varepsilon \in A \ni d(x, a_\varepsilon) < \varepsilon$$

olup $a_\varepsilon \in A \cap B_d(x, \varepsilon)$ dur. O halde; $x \in cl_{\tau_d}(A)$ ve $\mathcal{G}_{\delta_\tau} \subseteq \mathcal{G}_\tau$ dur. Diğer yandan; $d \in \mathcal{G}_\tau$ olsun. Her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için $\delta_\tau(x, A) = \infty$ ise $d \in \mathcal{G}_{\delta_\tau}$ olduğu açıktır. $\delta_\tau(x, A) = 0$ ise $x \in cl_\tau(A)$ ve dolayısıyla $x \in cl_{\tau_d}(A)$ bulunur. Bu durumda;

$$\forall \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

dır ve böylece, $\inf_{a \in A} d(x, a) = 0$ elde edilir. ■

Tanım 4.6 $(X, \mathfrak{S})$ bir yaklaşma uzayı olsun. $\mathfrak{S}$ yaklaşma yapısı, X üzerinde tanımlı bir τ topolojisi yardımıyla üretilen $\delta_\tau, (\mathbb{A}_\tau(x))_{x \in X}$ veya $\mathcal{G}_\tau$ yaklaşma yapılarından herhangi biri ile çakışiyorsa, $\mathfrak{S}$ **topolojik yaklaşma yapısıdır** denir (Lowen 1989).

Önerme 4.6 (X, δ) bir yaklaşma uzayı olsun. Bu durumda, (X, δ) nın topolojik yaklaşma yapısı olması için gerek ve yeter şart, birbirine denk olan aşağıdaki önermelerden herhangi birinin sağlanmasıdır.

- i) $\delta(X \times 2^X) \subseteq \{0, \infty\}$
 - ii) $\forall d \in \mathcal{G}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha d \in \mathcal{G}$
- (Lowen 1997).

İspat. (X, δ) bir topolojik yaklaşma uzayı olsun. Önerme 4.5 den; her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için $\delta(x, A) = 0$ veya $\delta(x, A) = \infty$ olacağından $\delta(X \times 2^X) \subseteq \{0, \infty\}$ olduğu açıktır. Diğer yandan; $\delta(X \times 2^X) \subseteq \{0, \infty\}$ olduğu kabul edilirse;

$$c(A) := \{x \in X \mid \delta(x, A) = 0\}$$

biçiminde tanımlanan operatör, X üzerinde bir topolojik kapanış operatörüdür. c operatörünün ürettiği topoloji τ_c ile gösterilmek üzere; $\delta = \delta_{\tau_c}$ dir. Dolayısıyla (X, δ) bir topolojik yaklaşma uzayıdır. (i) önermesi ile (ii) önermesinin denk olduğunu gösterelim: $\delta(X \times 2^X) \subseteq \{0, \infty\}$ olsun. $d \in \mathcal{G}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ alalım. Her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için $\delta(x, A) = \infty$ olması durumunda $\alpha d \in \mathcal{G}$ olacağı Teorem 3.8 den açıktır. $\delta(x, A) = 0$ ise,

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists a_\varepsilon \in A \ni d(x, a_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\frac{\varepsilon}{\alpha} > 0$ sayısı için de en azından bir $a_{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \in A$ vardır öyle ki $d(x, a_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}$ dir. O halde; $\inf_{a \in A} (\alpha d)(x, a) = 0$ olur ve Teorem 3.8 den $\alpha d \in \mathcal{G}$ elde

edilir. Diğer yandan; (ii) gerçeklensin ve $m \notin \{0, \infty\}$ olmak üzere $x \in X$, $A \subseteq X$ için, $\delta(x, A) = m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda; Teorem 3.10 kullanılırsa,

$$\sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a) = m \quad (4.7)$$

ve

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists d_\varepsilon \in \mathcal{G} \ni \inf_{a \in A} d_\varepsilon(x, a) \geq m - \varepsilon$$

elde edilir. Özel olarak; her $\varepsilon < m$ için de $\inf_{a \in A} d_\varepsilon(x, a) > m - \varepsilon$ olacaktır. $\alpha = \frac{m}{m-\varepsilon}$ alınırsa,

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists d_\varepsilon \in \mathcal{G} \ni \inf_{a \in A} (\alpha d_\varepsilon)(x, a) > m$$

olur ve $\sup_{d \in \mathcal{G}} \inf_{a \in A} d(x, a) > m$ elde edilir. Bu ise (4.7) ile çelişir. ■

(X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay olmak üzere; bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f : (X, \delta_\tau) \longrightarrow (Y, \delta_{\tau'})$ fonksiyonunun bütümlü olmasıdır. Böylece;

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \xrightarrow{F} & \mathbf{App} \\ \tau & \longrightarrow & \delta_\tau \\ f & \longrightarrow & f \end{array}$$

funktoru bir dolu gömülmedir. Üstelik Top kategorisi App kategorisi içine belirli yansımali ve belirli ko-yansımali olarak gömülür. Şimdi bu ilişkileri ifade eden önerme ve teoremleri verelim.

Önerme 4.7 (X, δ) bir yaklaşma uzayı olsun. Bu durumda, her $A \subseteq X$ için

$$cl(A) := \{x \in X \mid \delta(x, A) < \infty\}$$

biçiminde tanımlanan operatör bir pretopolojik kapanış operatörüdür (Lowen 1989).

İspat. $A \subseteq X$ olmak üzere, her $x \in A$ için (D1) özelliğinden $\delta(x, A) = 0$ ve dolayısıyla $x \in cl(A)$ elde edilir. $cl(\emptyset) = \emptyset$ eşitliği operatörün tanımından açıktır.

$A, B \subseteq X$ olmak üzere; (D3) özelliğinden,

$$\begin{aligned} x \in cl(A \cup B) &\Leftrightarrow \delta(x, A \cup B) < \infty \\ &\Leftrightarrow \min \{ \delta(x, A), \delta(x, B) \} < \infty \\ &\Leftrightarrow x \in cl(A) \vee x \in cl(B) \\ &\Leftrightarrow x \in cl(A) \cup cl(B) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.5 Top kategorisi, PreTop kategorisi içine belirli yansımali olarak gömülür.

Özel olarak; (X, cl) pretopolojik uzayının Top-yansımali,

$$id_X : (X, cl) \longrightarrow (X, cl^{tr})$$

dönüşümü yardımıyla verilir. Burada; cl^{tr} operatörü her $A \subseteq X$ için

$$\begin{aligned} cl^0(A) &:= A \\ cl^{\alpha+1}(A) &:= cl(cl^\alpha(A)) \quad , \alpha \text{ keyfi ordinal} \\ cl^\beta(A) &:= \bigcup_{\alpha < \beta} cl^\alpha(A) \quad , \beta \text{ limit ordinal} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$cl^{tr}(A) := cl^\gamma(A) \ni cl^{\gamma+1}(A) = cl^\gamma(A)$$

biçiminde tanımlıdır ve bir topolojik kapanış operatörüdür (Herrlich 1974).

Teorem 4.6 Top kategorisi, App kategorisi içine belirli yansımali bir alt kategorisi olarak gömülür. Özel olarak; (X, δ) herhangi bir yaklaşma uzayı olmak üzere, (X, δ) nın Top-yansımali δ^{tr} , cl pretopolojik kapanış operatörünün, Top-yansımali üret-tiği uzaklık fonksiyonudur (Lowen 1989).

İspat. $id_X : (X, \delta) \longrightarrow (X, \delta^{tr})$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun bütölme olduğunu gösterelim. $x \in X$ ve $A \subseteq X$ için $\delta(x, A) = \infty$ ise id_X fonksiyonunun bütölme olduğu açıktır. $\delta(x, A) < \infty$ ise, Önerme 4.7 den $x \in clA \subseteq cl^{tr}A$ olur ve dolayısıyla $\delta^{tr}(x, A) = 0$ elde edilir. Şimdi (Y, τ) herhangi bir topolojik uzay olmak üzere;

$$f : (X, \delta) \longrightarrow (Y, \delta_\tau)$$

biçiminde tanımlı fonksiyonun bir bütölme olduğunu kabul edelim. $x \in X$, $A \subseteq X$ ve $x \in cl(A)$ olsun. Bu durumda; $\delta(x, A) < \infty$ olur ve kabulümüzden;

$$\delta_\tau(f(x), f(A)) < \infty$$

elde edilir. O halde; Önerme 4.5 den; $\delta_\tau(f(x), f(A)) = 0$ ve $f(x) \in cl_\tau(f(A))$ dır. Dolayısıyla;

$$f : (X, cl) \longrightarrow (Y, cl_\tau)$$

fonksiyonu süreklidir. Böylece; $f : (X, \delta^{tr}) \longrightarrow (Y, \delta_\tau)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon bir bütölmedir. ■

Teorem 4.7 Top kategorisi, App kategorisi içine belirli koyansımali bir alt kategorisi olarak gömülür. Özel olarak; (X, δ) herhangi bir yaklaşma uzayı olmak üzere, (X, δ) nın Top ko-yansıması δ^{tc} ,

$$cl_\delta(A) := \{x \in X \mid \delta(x, A) = 0\}$$

topolojik kapanış operatörü tarafından üretilen, uzaklık fonksiyonudur (Lowen 1989).

İspat. cl_δ operatörünün bir topolojik kapanış operatörü olduğu ve

$$id_X : (X, \delta^{tc}) \longrightarrow (X, \delta)$$

dönüşümünün bir bütölme olduğu kolayca gösterilebilir. (Y, τ) herhangi bir topolojik uzay olmak üzere;

$$f : (Y, \delta_\tau) \longrightarrow (X, \delta)$$

fonksiyonunun bir bütölme olduğunu kabul edelim. $y \in Y$, $A \subseteq Y$ ve $y \in cl_\tau(A)$ ise, Önerme 4.5 den $\delta_\tau(y, A) = 0$ olur ve f bütölme olduğundan $\delta(f(y), f(A)) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $f(y) \in cl_\delta(f(A)) = cl^{tc}(f(A))$ dır. Bu durumda; $f : (Y, \delta_\tau) \longrightarrow (X, \delta^{tc})$ biçiminde tanımlanan fonksiyon bir bütölmedir. ■

Önerme 4.8 (X, δ) bir yaklaşma uzayı, $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemi için taban, $\mathcal{H}$ kümesi δ uzaklık fonksiyonuna karşılık

gelen ölçek için taban ve λ, δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen limit operatörü olsun Bu durumda; (X, δ) yaklaşma uzayının topolojik ko-yansımasında,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : \quad \mathfrak{F} \rightarrow x &\Leftrightarrow (\lambda \mathfrak{F})(x) = 0 \\ \mathfrak{F} \rightsquigarrow x &\Leftrightarrow (\alpha \mathfrak{F})(x) = 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &= \{V \subseteq X \mid \exists \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{B}(x) : \{\varphi < \varepsilon\} \subseteq V\} \\ &= \{V \subseteq X \mid \exists \varepsilon > 0, \exists d \in \mathcal{H} : B_d(x, \varepsilon) \subseteq V\}\end{aligned}$$

dir (Lowen 2015).

4.3 (Quasi-)Metrik Yaklaşma Uzayları

(X, d) bir quasimetrik uzay olmak üzere; her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\delta_d : X \times 2^X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta_d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur. Bu bölümde δ_d uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma yapıları ifade edilecek ve qMet kategorisi ile App kategorisi arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Önerme 4.9 X bir küme ve (X, d) bir quasimetrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\delta_d : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$$

fonksiyonu, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur ve δ_d ye karşılık gelen yaklaşma yapıları aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

i) $\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X), \forall x \in X$ için

$$\begin{aligned}(\alpha_d \mathfrak{F})(x) &= \sup_{F \in \mathfrak{F}} \inf_{y \in F} d(x, y) = \sup_{F \in \mathfrak{F}} \delta_d(x, F) \\ (\lambda_d \mathfrak{F})(x) &= \inf_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{y \in F} d(x, y)\end{aligned}$$

dir.

ii) $\forall x \in X$ için $\mathbb{A}_d(x) := \{\varphi \in \mathbb{P}^X \mid \varphi \leq d(x, \cdot)\}$ ve bu yaklaşma sistemi için taban $\{d(x, \cdot)\}$ dir.

iii) $\mathcal{G}_d := \{e \in qMet(X) \mid e \leq d\}$ ve bu ölçek için taban $\{d\}$ dir.

(Lowen 1989).

İspat. Önerme 4.5 in ispatına benzer olarak elde edilir. ■

(X, d) ve (Y, d') iki quasi-metrik uzay olmak üzere, bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun genişlemeyen bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul $f : (X, \delta_d) \longrightarrow (Y, \delta_{d'})$ fonksiyonunun bir büzülme olmasıdır. Böylece;

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{qMet} & \xrightarrow{F} & \mathbf{App} \\ d & \longrightarrow & \delta_d \\ f & \longrightarrow & f \end{array}$$

funktoru, bir dolu gömülmedir. Üstelik $qMet$ kategorisi App kategorisi içine belirli ko-yansımali bir alt kategorisi olarak gömülür. Şimdi, bu ilişkileri ifade eden önerme ve teoremleri verelim.

Teorem 4.8 $qMet$ kategorisi, App kategorisi içine belirli ko-yansımali bir alt kategorisi olarak gömülür. (X, δ) herhangi bir yaklaşma uzayı olmak üzere; δ nın $qMet$ ko-yansımali

$$\begin{aligned} d_\delta : X \times X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow d_\delta(x, y) = \delta(x, \{y\}) \end{aligned}$$

quasimetriğine karşılık gelen δ^{qm} uzaklık fonksiyonu tarafından belirlenir (Lowen 1989).

İspat. Her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için (D3) özelliğinden,

$$\delta(x, A) \leq \inf_{a \in A} \delta(x, \{a\}) = \delta^{qm}(x, A)$$

olur ve dolayısıyla $id_X : (X, \delta^{qm}) \longrightarrow (X, \delta)$ fonksiyonu bir büzülmedir. (Y, d) herhangi bir quasimetrik uzay olmak üzere $f : (Y, \delta_d) \longrightarrow (X, \delta)$ fonksiyonu bir büzülme olsun. Bu durumda; her $y \in Y$ ve her $A \subseteq Y$ için,

$$\begin{aligned} \delta^{qm}(f(y), f(A)) &= \inf_{a \in A} \delta(f(y), \{f(a)\}) \\ &\leq \inf_{a \in A} \delta_d(y, \{a\}) \\ &= \delta_d(y, A) \end{aligned}$$

dır. Böylece, $f : (Y, \delta_d) \longrightarrow (X, \delta^{qm})$ biçiminde tanımlanan fonksiyon bir büzülme dönüşümdür. ■

Önerme 4.10 (X, δ) bir yaklaşma uzayı olsun. $(\mathcal{B}(x))_{x \in X}$ ailesi, δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemi için taban ve $\mathcal{H}$, δ ya karşılık gelen ölçek için taban ise

$$\forall x, y \in X : d_\delta(x, y) = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}(x)} \varphi(y) = \sup_{d \in \mathcal{H}} d(x, y)$$

dir (Lowen 1997).

İspat. Teorem 3.16, Teorem 3.9 ve Teorem 4.8 den kolayca elde edilebilir. ■

X kümesi üzerinde d quasimetriği verilsin. Bu durumda;

$$d^-(x, y) = d(y, x)$$

biçiminde tanımlanan d^- quasimetriğine, d **quasimetriğinin eşleniği** adı verilir. Bu iki quasimetrik yardımıyla elde edilen;

$$d^* := d \vee d^-$$

fonksiyonu bir metriktir.

Teorem 4.9 Met kategorisi, App kategorisi içine belirli ko-yansımali bir alt kategorisi olarak gömülür. (X, δ) herhangi bir yaklaşma uzayı olmak üzere; δ nın Met ko-yansımali

$$\begin{aligned} d_\delta^* : X \times X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow d_\delta^*(x, y) = d_\delta(x, y) \vee d_\delta^-(x, y) \end{aligned}$$

metriğine karşılık gelen δ^m uzaklık fonksiyonu tarafından belirlenir (Lowen 1989).

İspat. Teorem 4.8 in ispatına benzer olarak elde edilir. ■

Örnek 4.3 $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde $d_{\mathbb{E}}$ öklid metriği ve $\delta_{\mathbb{E}}$ uzaklık fonksiyonu, Örnek 4.2 de tanımlandığı gibi ele alınsın. Bu durumda; $\delta_{\mathbb{E}}$ uzaklık fonksiyonunun, hem qMet ko-yansımali hem de Met ko-yansımali, $(\mathbb{P}, d_{\mathbb{E}})$ yaklaşma uzayıdır.

Örnek 4.4 $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde $\delta_{\mathbb{P}}$ uzaklık fonksiyonu ve $d_{\mathbb{P}}$ quasimetriği, Örnek 4.2 de tanımlandığı gibi ele alınsın. Bu durumda; $\delta_{\mathbb{P}}$ uzaklık fonksiyonunun Met ko-yansımali $(\mathbb{P}, d_{\mathbb{E}})$, qMet ko-yansımali $(\mathbb{P}, d_{\mathbb{P}})$ dir.

Önerme 4.11 δ , X kümesi üzerinde bir düzgün yaklaşma yapısı ve $\mathcal{H}$ bu yaklaşma yapısına karşılık gelen ölçek için taban olsun. Bu durumda; aşağıdaki özellikler vardır.

i) δ yaklaşma yapısının topolojik ko-yansıması,

$$\{B_d(x, \varepsilon) \mid d \in \mathcal{H}, \varepsilon > 0\}_{x \in X}$$

biçiminde tanımlı aileyi komşuluklar tabanı kabul eden τ_δ topolojisi tarafından belirlenir.

ii) δ yaklaşma yapısının metrik ko-yansıması,

$$\begin{aligned} d_\delta : X \times X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow \sup_{d \in \mathcal{H}} d(x, y) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı metrik tarafından belirlenir.

İspat. Önerme 4.8 ve Teorem 4.9 kullanılarak kolayca elde edilebilir. ■

5. HİPERUZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLI YAKLAŞMA YAPILARI

X bir küme olsun. 2^X kümesinin belirli özelliklere sahip alt kümeleri üzerinde tanımlanan topolojilere ilişkin ilk çalışma, E. Michael tarafından 1950 yılında yapılmıştır. E. Michael, 2^X kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlanan topolojileri **hipertopoloji** olarak adlandırmıştır. Hipertopolojilere ilişkin çalışmalar 1960 yılının ortalarında R. Wijsman tarafından geliştirilmiş ve sonraki 50 yıl içerisinde U. Mosco, R. Wets, H. Attouch ve R. Lowen gibi ünlü matematikçiler hipertopolojiler üzerine çalışmaya devam etmiştir. Hipertopolojilerin en çok bilinen örnekleri; Wijsman topoloji, Hausdorff metrik topoloji, proximal topoloji, Vietoris topoloji ve Attouch-Wets topolojidir. R. Lowen ve M. Sioen, 1996-1998 yıllarında Wijsman, Hausdorff metrik ve proximal topolojiden esinlenerek bu topolojilerin analoğu olacak biçimde yaklaşma yapıları inşa edilip edilemeyeceğini araştırmış ve her bir kavram ile ilişkili olan yaklaşma yapıları tanımlamışlardır.

Bu bölümde, Wijsman, Hausdorff metrik ve proximal topoloji kavramları kısaca hatırlatılacak ve daha sonra App kategorisi içinde, bu topolojilerin analoğu olacak biçimde inşa edilen yapılar ile ilgili temel bilgiler verilecektir. 2^X kümesinin bir alt ailesi, üzerinde inşa edilen bir matematiksel yapı ile göz önüne alınıyorsa bu yapıyı **hiperuzay** olarak adlandıracğız.

(X, d) bir metrik uzay olsun. X kümesinin; boş kümeden farklı, kapalı alt kümelerinin ailesi $CL(X)$ ile, boş kümeden farklı, kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi $CLB(X)$ ile gösterilir.

Tanım 5.1 (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $A, B \in CL(X)$ için

$$H_d(A, B) = \sup_{x \in X} |\delta_d(x, A) - \delta_d(x, B)|$$

biçiminde $CL(X)$ üzerinde tanımlanan metrik, Hausdorff metrik olarak adlandırılır. H_d metriğinin $CL(X)$ üzerinde ürettiği topolojiye ise **Hausdorff metrik topoloji** adı verilir ve τ_{H_d} ile gösterilir (Beer 1993).

Hausdorff metrik topoloji; $A \in CL(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_A : X &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonlarının $\mathfrak{F}$ ailesi $(C(X, \mathbb{R}), \tau_{uc})$ topolojik uzayından indirgenen yapısıyla ele alındığında

$$\begin{aligned} F : CL(X) &\longrightarrow C(X, \mathbb{R}) \\ A &\longrightarrow F(A) = d_A \end{aligned}$$

fonksiyonu gömülme dönüşümü olacak biçimde, $CL(X)$ üzerinde tanımlanan topoloji ile çakışır.

Tanım 5.2 (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} d_x : CL(X) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A &\longrightarrow d_x(A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonların oluşturduğu $\{d_x \mid x \in X\}$ ailesinin $CL(X)$ üzerinde ürettiği başlangıç topolojisine **Wijsman topoloji** adı verilir ve τ_{Wd} ile gösterilir (Beer 1993).

Wijsman topoloji,

$$\mathcal{W}_1 := (\{A \in CL(X) \mid d(x, A) < \alpha\})_{x \in X, \alpha > 0}$$

$$\mathcal{W}_2 := (\{A \in CL(X) \mid d(x, A) > \alpha\})_{x \in X, \alpha > 0}$$

olmak üzere $\mathcal{S} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ ailesini alt taban kabul eden topolojidir. $CL(X)$ üzerinde Wijsman topoloji farklı şekillerde tanımlanabilir. $\mathbb{R}^+$ kümesi alışılmış öklid topolojisi ile donatıldığında; $CL(X)$ üzerinde Wijsman topolojinin,

$$(CL(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ : A \longrightarrow \delta_d(x, A))_{x \in X}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon ailesinin $CL(X)$ üzerinde ürettiği başlangıç topolojisi olduğu Tanım 5.2 den açıktır. Diğer yandan, $(\mathbb{R}^+)^X$ kümesi çarpım topoloji ile donatıldığında; $CL(X)$ üzerinde tanımlı Wijsman topoloji

$$CL(X) \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^X : A \longrightarrow \delta_d(\cdot, A)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonu sürekli kılan en kaba topoloji ile çakışır. Ancak, $\mathbb{R}^+$ kümesi üzerinde alışılmış topoloji yerine, alışılmış metrik alınarak bu inşa yapılamaz. Yaklaşma uzayları kullanılarak bu problem ortadan kaldırılacaktır.

Wijsman topoloji, ancak (X, d) metrik uzayının ayrılabilir olması durumunda metrikleşebilir. Ayrılabilirlik şartını sağlamayan bir (X, d) metrik uzayı ele alındığında, $CL(X)$ üzerinde uzaklığa ilişkin bilgi veren bir yapının nasıl inşa edildiği 1996 yılında Lowen ve Sioen tarafından gösterilmiştir.

(X, d) bir metrik uzay olsun. $A \subseteq X$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ olmak üzere,

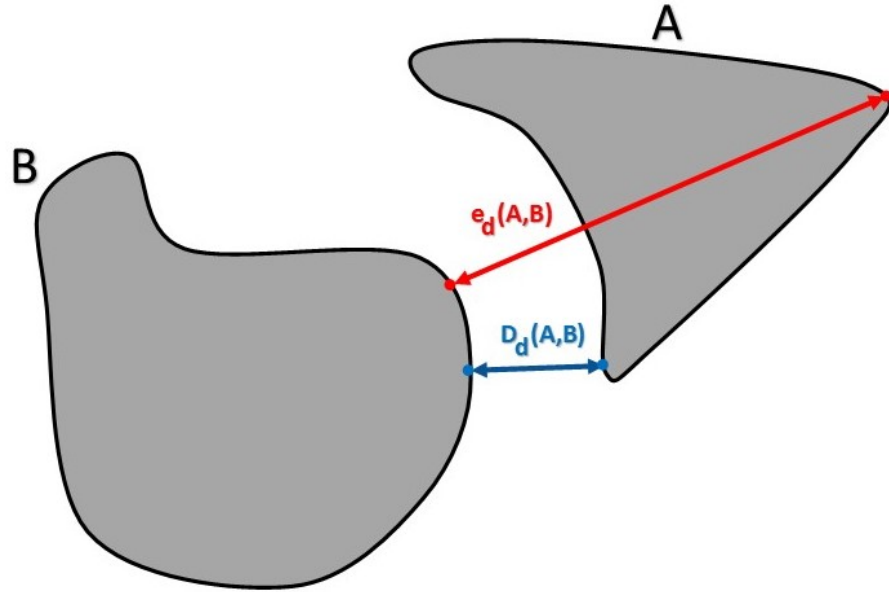
$$S_\varepsilon(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlıdır. Sıklıkla kullanacağımız iki önemli fonksiyon $CL(X) \times CL(X)$ üzerinde tanımlı

$$D_d(A, B) := \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\},$$

$$e_d(A, B) := \sup_{x \in A} \delta_d(x, B)$$

fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar sırasıyla; boşluk ve artık fonksiyonları olarak adlandırılır. Kabaca, aşağıda düzlemde verilen A ve B kümeleri arasındaki artık ve boşluk gösterilmiştir.



Şekil 5.1. $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kümeleri arasındaki artık ve boşluk

X bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere;

$$A^- := \{B \in CL(X) \mid B \cap A \neq \emptyset\}$$

$$A^+ := \{B \in CL(X) \mid B \subseteq A\}$$

ve d , X üzerinde tanımlı bir metrik olmak üzere;

$$\begin{aligned} A^{++} &:= \{B \in CL(X) \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : S_\varepsilon(B) \subseteq A\} \\ &= \{B \in CL(X) \mid D_d(B, A^c) > 0\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır (Beer 1993).

Tanım 5.3 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere;

$$\{V^- \mid V \in \tau_d\} \cup \{V^{++} \mid V \in \tau_d\}$$

ailesi $CL(X)$ kümesi üzerinde bir topoloji için alt tabandır. Bu aile tarafından üretilen topolojiye, **proximal topoloji** adı verilir ve $\tau_{prox(d)}$ biçiminde gösterilir (Beer 1993).

Proximal topoloji hem $CL(X)$ hem de $CLB(X)$ kümeleri üzerine inşa edilebilir. Bu iki durumu aynı anda inceleyebileceğimiz, daha kapsamlı bir tanım verilmiştir. $\Delta \subseteq CL(X)$ ve $\Delta \neq \emptyset$ olmak üzere;

$$\{V^- \mid V \in \tau_d\} \cup \{(D^c)^{++} \mid D \in \Delta\}$$

ailesini alttaban kabul eden topolojiye **Δ -proximal topoloji** adı verilir ve $\tau_{prox(\Delta, d)}$ biçiminde gösterilir. Özel olarak, $\Delta = CLB(X)$ olması durumunda; karşılık gelen proximal hipertopolojiye **sınırlı proximal topoloji** adı verilir ve $\tau_{bprox(\Delta, d)}$ biçiminde gösterilir. $\Delta = CL(X)$ olması durumunda, proximal topoloji ile **Δ -proximal topoloji** çakışacaktır.

Tanım 5.4 (X, τ) bir topolojik uzay olsun ve $CL(X)$ bir hipertopoloji ile donatılsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \psi : X &\longrightarrow CL(X) \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \{x\} \end{aligned}$$

fonksiyonu bir gömülme dönüşümü oluyor ise, $CL(X)$ üzerinde tanımlı hipertopoloji X üzerinde tanımlı hipertopoloji ile **uyumludur** denir (Michael 1951).

Daha açık ifade edilecek olursa; $\mathcal{K} = \{\{x\} \mid x \in CL(X)\}$ ailesi $CL(X)$ üzerinde tanımlı hipertopolojiden indirgenen yapısı ile ele alındığında, ψ bir homeomorfizm oluyorsa, $CL(X)$ üzerinde tanımlı hipertopoloji X üzerinde tanımlı topoloji ile uyumludur denir.

5.1 Wijsman Yaklaşma Yapısı

Lowen, Hausdorff metriğine alternatif olarak, $CL(X)$ üzerinde X kümesinin sonlu elemanlı her F alt kümesine,

$$\begin{aligned} d_F : CL(X) \times CL(X) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (A, B) &\longrightarrow d_F(A, B) = \sup_{x \in F} |\delta_d(x, A) - \delta_d(x, B)| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı bir metrik karşılık getirmiştir. Böylece,

$$\mathfrak{D}_{W_d} := \{d_F \mid F \in 2^{(X)}\}$$

biçiminde tanımlanan metrik ailesi elde edilir. Ayrıca; $\mathfrak{D}_{W_d}$ kümesinin sonlu elemanlı her bir $\mathcal{D}$ alt kümesi için $\sup_{d \in \mathcal{D}} d \in \mathfrak{D}_{W_d}$ dir. Dolayısıyla $\mathfrak{D}_{W_d}$ simetrik bir ölçek için simetrik bir tabandır. $\mathfrak{D}_{W_d}$ ailesinin ürettiği ölçeğe karşılık gelen uzaklık fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \delta_{W_d} : CL(X) \times 2^{CL(X)} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (A, \mathcal{A}) &\longrightarrow \delta_{W_d}(A, \mathcal{A}) = \sup_{F \in 2^{(X)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_F(A, B) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. δ_{W_d} uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma yapısı Wijsman yaklaşma yapısı olarak adlandırılır. $CL(X)$ kümesi, Wijsman yaklaşma yapısı ile donatılırsa elde edilen yaklaşma uzayı kısaca $CL_{W_d}(X)$ biçiminde, Hausdorff metriği ile donatılırsa elde edilen yaklaşma uzayı kısaca $CL_{H_d}(X)$ biçiminde gösterilecektir (Lowen ve Sioen 1996).

Wijsman yaklaşma yapısının, Wijsman topoloji ve Hausdorff metrik topoloji ile ilişkisi aşağıdaki önerme ile açıklanabilir.

Önerme 5.1 $CL_{W_d}(X)$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması $(CL(X), \tau_{W_d})$ ve metrik ko-yansıması $CL_{H_d}(X)$ dir (Lowen ve Sioen 1996).

İspat. $A \in CL(X)$ olsun ve $CL_{W_d}(X)$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması τ ile gösterilsin. Bu durumda, Önerme 4.8 (ii) kullanılırsa,

$$\mathcal{B}_{(A)} = \{B_{d_F}(A, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0, d_F \in \mathfrak{D}_{W_d}\}$$

ailesi, τ topolojisine göre A kümesinin komşuluklar ailesi için tabandır. $(CL(X), \tau_{W_d})$ hiperuzayında, $\mathcal{B}_{(A)}$ ailesinin A kümesinin komşuluklar ailesi için taban olduğu gösterilebilirse ispat tamamlanır. O halde,

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\tau_{W_d(A)}} : B_{d_F}(A, \varepsilon) \subseteq W \quad (5.1)$$

olacak biçimde bir $F \in 2^{(X)}$ ve bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunmalıdır. $W \in \mathcal{V}_{\tau_{W_d(A)}}$ olsun. Bu durumda, $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere,

$$W_1 = \{D \in CL(X) \mid d(x, D) < \alpha\}$$

$$W_2 = \{D \in CL(X) \mid d(y, D) > \beta\}$$

aileleri vardır öyle ki $A \in W_1 \cap W_2 \subset W$ dir. O halde,

$$0 < \varepsilon < \min \{\alpha - d(x, A), d(y, A) - \beta\}$$

ve $F = \{x, y\}$ seçilirse, $B_{d_F}(A, \varepsilon) \subseteq W_1$ ve $B_{d_F}(A, \varepsilon) \subseteq W_2$ elde edilir ve (5.1) sağlanır. Şimdi, $CL_{W_d}(X)$ ailesinin metrik ko-yansımasının, $CL_{H_d}(X)$ olduğunu gösterelim. Önerme 4.11 kullanılırsa, $CL_{W_d}(X)$ ailesinin metrik ko-yansıması

$$\begin{aligned} d_{\delta_{W_d}} : CL(X) \times CL(X) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (A, B) &\longrightarrow d_{\delta_{W_d}}(A, B) = \sup_{F \in \mathfrak{D}_{W_d}} d_F(A, B) \end{aligned}$$

olup, Teorem 4.9 dan ve $\mathfrak{D}_{W_d}$ simetrik ölçek tabanı olduğundan $d_{\delta_{W_d}}$ bir metriktir. Eğer;

$$\forall A, B \in CL(X) : d_{\delta_{W_d}}(A, B) = H_d(A, B)$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} d_{\delta_{W_d}}(A, B) &= \sup_{F \subseteq X} d_F(A, B) \\ &= \sup_{x \in X} d_{\{x\}}(A, B) \\ &= H_d(A, B) \end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 5.1 $\mathbb{R}^+$ alışılmış öklid metriği ile donatılsın. Wijsman yaklaşma yapısı,

$$(CL(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ : A \longrightarrow \delta_d(x, A))_{x \in X}$$

fonksiyon ailesi için başlangıç yaklaşma yapısıdır (Lowen 1989).

İspat. $\mathbb{R}^+$ üzerinde $d_{\mathbb{E}}(x, y) = |x - y|$ öklid metriğine karşılık gelen uzaklık fonksiyonu $\delta_{d_{\mathbb{E}}}$ olsun. Önerme 4.9 dan, $\delta_{d_{\mathbb{E}}}$ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen ölçeğin tabanı $\{d_{\mathbb{E}}\}$ dir. O halde, Teorem 4.3 kullanılırsa, $CL(X)$ üzerindeki başlangıç ölçeği için taban,

$$\mathcal{H} := \left\{ \sup_{x \in F} d_{\mathbb{E}} \circ (\delta_d(x, \cdot) \times \delta_d(x, \cdot)) \mid F \in 2^{(X)} \right\}$$

dir. Bu durumda; $\mathfrak{D}_{W_d} = \mathcal{H}$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. $F \subseteq X$ ve $A, B \in CL(X)$ için

$$\begin{aligned} d_F(A, B) &= \sup_{x \in F} |\delta_d(x, A) - \delta_d(x, B)| \\ &= \sup_{x \in F} d_{\mathbb{E}}(\delta_d(x, A), \delta_d(x, B)) \end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{D}_{W_d} = \mathcal{H}$ olduğu açıktır. ■

$\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ olmak üzere, $\mathcal{A}$ ailesinin sonlu elemanlı örtülerinin kümesi $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ile ifade edilecektir.

Teorem 5.2 $\mathbb{R}^+$ alışılmış öklid metriği ile ve $(\mathbb{R}^+)^X$ çarpım uzaklık fonksiyonu ile donatılsın. Bu durumda; Wijsman yaklaşma yapısı

$$\begin{aligned} CL(X) &\longrightarrow (\mathbb{R}^+)^X \\ A &\longrightarrow \delta_d(\cdot, A) \end{aligned}$$

fonksiyonu için başlangıç yaklaşma yapısıdır (Lowen 1989).

İspat. Sonuç 4.1 den, $(\mathbb{R}^+)^X$ üzerindeki çarpım uzaklık fonksiyonu, $f \in (\mathbb{R}^+)^X$ ve $F \subseteq (\mathbb{R}^+)^X$ olmak üzere;

$$\delta_{\Pi}(f, \mathcal{F}) = \sup_{F \in 2^{(X)}} \inf_{g \in \mathcal{F}} \sup_{x \in F} |f(x) - g(x)|$$

biçiminde tanımlıdır. $A \in CL(X)$ ve $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ olsun. Teorem 4.4 den, $CL(X)$ kümesi üzerindeki başlangıç uzaklık fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\delta'(A, \mathcal{A}) &= \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})} \min_{P \in \mathcal{R}} \delta_{\Pi}(\delta_d(x, A), \delta_d(x, P)) \\ &= \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})} \min_{P \in \mathcal{R}} \sup_{F \in 2(X)} \inf_{g \in \delta(x, P)} \sup_{x \in F} \delta_{\mathbb{E}}(\delta_d(x, A), \{g(x)\}) \\ &= \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})} \min_{P \in \mathcal{R}} \sup_{F \in 2(X)} \inf_{B \in P} \sup_{x \in F} |\delta_d(x, A) - \delta_d(x, B)|\end{aligned}$$

dir. O halde, $\delta'(A, \mathcal{A}) = \delta_{W_d}(A, \mathcal{A})$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir ise, ispat tamamlanır. Her bir $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ için,

$$\begin{aligned}\delta_{W_d}(A, \mathcal{A}) &= \sup_{F \in 2(X)} \inf_{B \in \bigcup_{P \in \mathcal{R}} P} d_F(A, B) \\ &= \sup_{F \in 2(X)} \min_{P \in \mathcal{R}} \inf_{B \in P} d_F(A, B) \\ &\leq \delta'(A, \mathcal{A})\end{aligned}$$

dır. Diğer yandan, $\alpha > 0$ için $\delta_{W_d}(A, \mathcal{A}) = \sup_{F \subseteq X} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_F(A, B) < \alpha$ olsun. Bu durumda,

$$\forall F \subseteq X \text{ ve } \exists B \in \mathcal{A} : d_F(A, B) < \alpha$$

dir. Diğer yandan; her $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ için $B \in \mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathcal{R}} P$ olduğundan,

$$\sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})} \sup_{F \subseteq X} \min_{P \in \mathcal{R}} \inf_{B \in P} d_F(A, B) \leq \alpha$$

olur. Dolayısıyla, $\delta'(A, \mathcal{A}) \leq \delta_{W_d}(A, \mathcal{A})$ elde edilir. ■

Tanım 5.4 ile (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere; $CL(X)$ üzerinde tanımlı hipertopolojilerin X üzerinde tanımlı topoloji ile uyumlu olmasının ne anlama geldiği ifade edilmiştir. Bu tanımın analogu yaklaşma uzayları içinde de ele alınabilir. Örneğin; (X, d) metrik uzayı yardımıyla $CL(X)$ üzerine inşa edilen yaklaşma yapısı δ_{W_d} uzaklık fonksiyonu ile ifade edildiğinde,

$$\begin{aligned}\psi : (X, \delta_d) &\longrightarrow (CL(X), \delta_{W_d}) \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \{x\}\end{aligned}$$

fonksiyonu bir gömülme dönüşümü oluyorsa $CL(X)$ üzerinde tanımlı δ_{W_d} yaklaşma yapısı d metriği ile uyumludur diyebiliriz.

Önerme 5.2 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $CL(X)$ üzerine inşa edilen Wijsman yaklaşma yapısı d metriği ile uyumludur (Lowen 2015).

İspat. (X, τ_d) Hausdorff uzayı olduğundan,

$$\begin{aligned}\psi : (X, \delta_d) &\longrightarrow (CL(X), \delta_{W_d}) \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \{x\}\end{aligned}$$

dönüşümü iyi tanımlı ve birebirdir. ψ fonksiyonunun gömülme olabilmesi için,

$\psi : X \longrightarrow \psi(X)$ fonksiyonu ve tersi büzülme olmalıdır. $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\delta_{W_d}(\psi(x), \psi(A)) &= \sup_{F \in 2(X)} \inf_{a \in A} \sup_{y \in F} |d(y, x) - d(y, a)| \\ &\geq \inf_{a \in A} |d(x, x) - d(x, a)| \\ &= \delta_d(x, A)\end{aligned}$$

dır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\delta_{W_d}(\psi(x), \psi(A)) &= \sup_{F \in 2(X)} \inf_{a \in A} \sup_{y \in F} |d(y, x) - d(y, a)| \\ &\leq \sup_{F \in 2(X)} \inf_{a \in A} \sup_{y \in F} d(x, a) \\ &= \delta_d(x, A)\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

Önerme 5.3 (X, d) metrik uzayı ayrılabilir ise, $CL_{W_d}(X)$ sayılabilir bir ölçek tabanına sahiptir (Lowen 2015).

İspat. (X, d) ayrılabilir olduğundan, sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahiptir. Bu küme Y ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\mathcal{D}_0 := \{d_F \mid F \subseteq Y\}$$

kümesi sayılabilirdir ve bir ölçek için tabandır. $\mathcal{D}_0$ kümesi sonlu supremuma göre kapalı ve dolayısıyla yerel yönlendirilmiştir. Önerme 3.4 den, $\mathcal{D}_0$ bir ölçek için tabandır. $\widehat{\mathcal{D}_0}$ metrik ailesine karşılık gelen uzaklık fonksiyonu $\delta_{\widehat{\mathcal{D}_0}}$ olmak üzere; $\delta_{\widehat{\mathcal{D}_0}} = \delta_{W_d}$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $A \in CL(X)$ ve $\mathcal{A} \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

$$\delta_{W_d}(A, \mathcal{A}) \geq \sup_{F \subseteq Y} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_F(A, B)$$

olduğu açıktır. Diğer yandan, $\varepsilon > 0$ ve $F \subseteq X$ olsun. Y alt kümesi X içinde yoğun olduğundan, her bir $x \in X$ için $d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir $y \in Y$ mevcuttur ve dolayısıyla; her bir $x \in F$ için bu şekilde bir $y_x \in Y$ seçilerek elde edilen

$$F_\varepsilon := \{y_x \mid x \in F\}$$

kümesi boş kümeden farklıdır. $A \in CL(X)$ ve $\mathcal{A} \in 2^{(X)}$ ise,

$$\begin{aligned} \delta_{W_d}(A, \mathcal{A}) &= \sup_{F \in 2^{(X)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_F(A, B) \\ &\leq \sup_{F \in 2^{(X)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_{F_\varepsilon}(A, B) + \varepsilon \\ &\leq \sup_{F \in 2^{(Y)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_F(A, B) + \varepsilon \\ &= \delta_{\widehat{\mathcal{D}_0}}(A, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

5.2 Proximal Yaklaşma Yapısı

Tanım 5.5 (X, d) bir metrik uzay, $\Delta \subseteq CL(X)$ ve $\Delta \neq \emptyset$ olsun. Eğer;

$$\forall T \in \Delta, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : T^{(\varepsilon)} \in \Delta$$

oluyor ise, Δ ailesi **sonlu genişlemeler altında değişmezdir** denir. Sonlu genişlemeler altında değişmez olan Δ ailesi,

$$\{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \Delta$$

özellğine de sahip ise, Δ ya X in bir **p-örtüsü** adı verilir.

X bir küme olmak üzere $(X^c)^{++} = \emptyset$ olduğundan, $\Delta \subseteq CL(X)$ ve $\Delta \neq \emptyset$ için

$$\tau_{prox}(\Delta, d) = \tau_{prox}(\Delta \cup \{X\}, d)$$

eşitliği mevcuttur. $2_0^{(\Delta)}$ ile Δ nın boş kümeden farklı tüm sonlu elemanlı alt kümelerinin kümesi gösterilecektir. Her $\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}$ için

$$\begin{aligned} d^\Gamma : CL(X) \times CL(X) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (A, B) &\longrightarrow d^\Gamma(A, B) = \sup_{T \in \Gamma} |D_d(A, T) - D_d(B, T)| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır ve

$$\mathfrak{D}^{\Delta,d} := \left\{ d^\Gamma \mid \Gamma \in 2_0^{(\Delta)} \right\}$$

olarak göz önüne alınır.

Önerme 5.4 (X, d) bir metrik uzay ve Δ , X kümesinin bir p-örtüsü olsun. Bu durumda; $\mathfrak{D}^{\Delta,d} \subseteq \text{Met}(X)$ ve

$$\begin{aligned} \delta_{\text{prox}(\Delta,d)} : \quad CL(X) \times 2^{CL(X)} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (A, \mathcal{A}) &\longrightarrow \delta_{\text{prox}(\Delta,d)}(A, \mathcal{A}) = \sup_{\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} d^\Gamma(A, B) \end{aligned}$$

bir uzaklık fonksiyonudur (Lowen ve Sioen 1998).

İspat. $\mathfrak{D}^{\Delta,d} \subseteq \text{Met}(X)$ olup $\mathfrak{D}^{\Delta,d}$ ailesi bir ölçek tabanıdır. Teorem 3.9 kullanılırsa;

$$\delta_{\mathfrak{D}^{\Delta,d}}(x, A) = \delta_{\text{prox}(\Delta,d)}(x, A)$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

$\delta_{\text{prox}(\Delta,d)}$ uzaklık fonksiyonu, Δ -proximal uzaklık fonksiyonu olarak adlandırılır ve $(CL(X), \delta_{\text{prox}(\Delta,d)})$ yaklaşma uzayı kısaca $CL_{\text{prox}(\Delta,d)}(X)$ biçiminde gösterilir.

Teorem 5.3 (X, d) bir metrik uzay ve Δ , X kümesinin bir p-örtüsü olsun. Bu durumda; $\delta_{\text{prox}(\Delta,d)}$ yaklaşma yapısı

$$\left(\begin{array}{ccc} D_d(\cdot, T) : CL(X) &\longrightarrow & (\mathbb{R}^+, \delta_{d_\mathbb{E}}) \\ A &\longrightarrow & D_d(A, T) \end{array} \right)_{T \in \Delta}$$

fonksiyon ailesi için başlangıç yapısıdır (Lowen ve Sioen 1998).

İspat. $(D_d(\cdot, T))_{T \in \Delta}$ fonksiyon ailesi için başlangıç uzaklık fonksiyonu δ ile gösterilmek üzere; her $A \subseteq X$ ve her $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ için Teorem 4.4 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \delta_{\text{prox}(\Delta,d)}(A, \mathcal{A}) &= \sup_{\Gamma \in 2^{(\Delta)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} \sup_{T \in \Gamma} d_\mathbb{E}(D_d(A, T), D_d(B, T)) \\ &= \sup_{T \in \Delta} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_\mathbb{E}(D_d(A, T), D_d(B, T)) \\ &= \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A)} \sup_{T \in \Delta} \inf_{B \in \mathcal{P}} \min_{P \in \mathcal{P}} d_\mathbb{E}(D_d(A, T), D_d(P, T)) \\ &= \delta(A, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 5.1 (X, d) bir metrik uzay ve Δ , X kümesinin bir p-örtüsü olsun. Bu durumda; $\tau_{prox(\Delta, d)}$

$$\left(\begin{array}{ccc} D_d(\cdot, T) : CL(X) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^+, \tau_{\mathbb{E}}) \\ A & \longrightarrow & D_d(A, T) \end{array} \right)_{T \in \Delta}$$

fonksiyon ailesi için $CL(X)$ üzerindeki başlangıç topolojisi (Lowen ve Sioen 1998).

Önerme 5.5 (X, d) bir metrik uzay ve Δ , X kümesinin bir p-örtüsü olsun. Bu durumda; $CL_{prox(\Delta, d)}(X)$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması $(CL(X), \tau_{prox(\Delta, d)})$ ve metrik ko-yansıması $CL_{H_d}(X)$ dir (Lowen ve Sioen 1998).

İspat. $CL_{prox(\Delta, d)}(X)$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansımasının $(CL(X), \tau_{prox(\Delta, d)})$ olduğu Teorem 5.3 ve Sonuç 5.1 den açıktır. $CL_{prox(\Delta, d)}(X)$ yaklaşma uzayının metrik ko-yansımasının $CL_{H_d}(X)$ olduğunu ispatlayalım: Teorem 4.9 dan $\delta_{prox(\Delta, d)}$ yaklaşma yapısının metrik ko-yansımasının $\delta_{prox(\Delta, d)}^*$ metriği tarafından belirlendiğini bilinmektedir. O halde,

$$\forall A, B \in CL(X) : \delta_{prox(\Delta, d)}^*(A, B) = H_d(A, B)$$

eşitliğinin gerçekleştiği gösterilirse ispat tamamlanır. $A, B \in CL(X)$ için,

$$\begin{aligned} \delta_{prox(\Delta, d)}^*(A, B) &= \delta_{prox(\Delta, d)}(A, \{B\}) \vee \delta_{prox(\Delta, d)}(B, \{A\}) \\ &= \sup_{\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}} d^\Gamma(A, B) \\ &= \sup_{\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}} \sup_{T \in \Gamma} |D_d(A, T) - D_d(B, T)| \\ &= \sup_{T \in \Delta} |D_d(A, T) - D_d(B, T)| \\ &\geq \sup_{x \in X} |D_d(A, \{x\}) - D_d(B, \{x\})| \\ &= \sup_{x \in X} |\delta_d(x, A) - \delta_d(x, B)| \\ &= H_d(A, B) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Diğer yandan; her $T \in \Delta$ için

$$D_d(A, T) \leq e_d(B, A) + D_d(B, T)$$

$$D_d(B, T) \leq e_d(A, B) + D_d(A, T)$$

eşitsizlikleri her zaman mevcut olduğundan;

$$|D_d(A, T) - D_d(B, T)| \leq e_d(A, B) \vee e_d(B, A) = H_d(A, B)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \delta_{prox(\Delta, d)}^*(A, B) &= \sup_{T \in \Delta} |D_d(A, T) - D_d(B, T)| \\ &\leq e_d(A, B) \vee e_d(B, A) \\ &= H_d(A, B) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

(X, d) metrik uzayı yardımıyla $CL(X)$ üzerine inşa edilen $\delta_{prox(X, \Delta)}$ yaklaşma yapısı ele alındığında;

$$\begin{aligned} \psi : (X, \delta_d) &\longrightarrow (CL(X), \delta_{prox(X, \Delta)}) \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \{x\} \end{aligned}$$

fonksiyonu bir gömülme dönüşümü oluyorsa $CL(X)$ üzerinde tanımlı $\delta_{prox(X, \Delta)}$ yaklaşma yapısı d metriği ile uyumludur diyebiliriz.

Önerme 5.6 (X, d) bir metrik uzay ve Δ , X kümesinin bir p-örtüsü olsun. Bu durumda; $CL(X)$ kümesi üzerindeki Δ -proximal yaklaşma yapısı d metriği ile uyumludur (Lowen ve Sioen 1998).

İspat. X üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned} \psi : X &\longrightarrow (CL(X), \delta_{prox(X, \Delta)}) \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \{x\} \end{aligned}$$

fonksiyonuna karşılık gelen başlangıç uzaklık fonksiyonu δ ile gösterilsin. Teorem 3.14 den $\delta_{prox(\Delta, d)}$ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemi için taban

$$\left(\left\{ d^\Gamma(F, \cdot) \mid \Gamma \in 2_0^{(\Delta)} \right\} \right)_{F \in CL(X)}$$

dır. Bu durumda; Teorem 4.2 ve Teorem 3.16 kullanılırsa her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için,

$$\begin{aligned} \delta(x, A) &= \sup_{\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}} \inf_{a \in A} d^\Gamma(\psi(x), \cdot) \circ \psi(a) \\ &\leq \sup_{\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}} \inf_{a \in A} \sup_{D \in \Gamma} d(x, a) \\ &= \delta_d(x, A) \end{aligned}$$

dır. Diğer yandan; Δ , X kümesinin bir p-örtüsü olduğundan her $x \in X$ ve her $A \subseteq X$ için

$$\begin{aligned}\delta(x, A) &= \sup_{\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}} \inf_{a \in A} \sup_{D \in \Gamma} |d(x, D) - d(a, D)| \\ &\geq \inf_{a \in A} |\delta_d(x, \{x\}) - \delta_d(a, \{x\})| \\ &= \delta_d(x, A)\end{aligned}$$

elde edilir. ■



6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Metrik uzayların matematiğin dominant genleri olduğunu hiç birimiz yadsımayız. Sadece metrikleşebilen topolojik uzaylarda oynadıkları rolle değil, kendi yapılarıyla da, örneğin Banach uzaylarının teorisinde olduğu gibi vazgeçilmezlerdir. Yine analizin temel kavramlarından olan yakınsaklık, süreklilik ve kompaktlık gibi kavramların tanıtılması ve özelliklerinin çalışılmasını sağlayan metrik yapının ürettiği topolojidir. Metrikten bağımsız, yalın bir topolojik uzayda çalışıldığında ise, metrik yapının sağladığı nümerik bilgiden yoksun kalırız. Bu kayıp Weil ve Dieudonné tarafından ortaya konulan Düzgün Uzay kavramı ile bir parça telafi edilmiştir. Düzgünlük yapısı metrik uzayda anlamlı olan bazı önemli kavramları (tamamen sınırlılık ve tamlık gibi) daha geniş bir alana (yerel konveks uzaylar ve topolojik gruplar gibi) genişletmiştir.

Yaklaşma uzayları, metrik uzayların sınırlarını aştığımızda uzaklığa ilişkin nümerik bilgiye ulaşmamızı sağlayan bir matematiksel yapıdır. Çalışmamız boyunca, yaklaşma uzayları ve temel özellikleri üzerine yoğunlaştık, özel olarak hiperuzaylar ile ilişkili bazı yaklaşma yapılarının özelliklerini öğrendik ve tartıştık. Bundan sonraki çalışmalarımızda hiperuzaylara ilişkin incelemelere devam etmeyi planlıyoruz.

KAYNAKLAR

- Adámek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. 1990. Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats. New York, USA.
- Beer, G. 1989. Convergence of continuous linear functionals and their level sets. Arch. Math, 52, 482.
- Beer, G. 1991. Mosco Convergence and weak topologies for convex sets and functions. Mathematika, 38, 89-104.
- Beer, G., Lechicki, A., Levi, S. and Naimpally, S., 1992. Distance Functionals and suprema of hyperspace topologies. Annali di Matematica pura et applicata. 162, 367.
- Beer, G. and Luchetti, R. 1993. Weak Topologies for the Closed Subsets of a Metrizable Space. Trans. Am. Math. Soc 335.
- Beer, G. 1993. Topologies on Closed and Closed Convex sets. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Boston, London.
- Birkhoff, G. 1967. Lattice Theory. AMS Coll. Publ., Providence, R.I., XXV. Mishavaka, IN, U.S.A.
- Bourbaki, N. 1966. General Topology. Springer. Hermann, Paris.
- Bourbaki, N. 1968. Elements of Mathematics. Theory of Sets, Springer. Hermann, Paris.
- Čech, E. 1966. Topological Spaces. Academia. Prague.
- Dieudonné, J. 1939. Sur les espaces uniformes complets. Ann. Ecol. Norm. Supér. 56, 276-291.
- Dolecki, S. 2016. Convergence Foundations of Topology. USA.
- Dugundji, J. 1967. Topology. Allyn and Bacon, Boston.
- Frechét, M. 1946. De l'écart numerique à l'écart abstrait. Port. Math. 5,121-131.
- Halıcıoğlu, S. ve Arıkan, A. 2014. Cebire Giriş. Palme yayıncılık, Ankara.
- Herrlich, H. and Strecker, G. E. 1973. Category Theory. Allyn and Bacon, Boston.
- Herrlich, H. 1974. Topological Structures, in: Topological Structures, Math. Centre Tracts 52, Amsterdam 59-122.
- Herrlich, H. 1983. Categorical Topology 1971-1981, Heldermann Verlag, Berlin.
- Herrlich, H. and Lowen, R. 1999. On Simultaneously reflective and coreflective subcategories.
- Jech, T. 1978. Set Theory. Springer, Verlac Berlin Heidelberg, New York.

- Kowalsky, J. 1954. Limesräume und Kompletttierung, *Math. Nachr.* 12, 301-340.
- Lechicki, A. and Levi, S. 1987. Wijsman Convergence in the hyperspaces of a metric space. *Bull. University, Italy*.
- Lowen, R. 1988. Kuratowski's measure of noncompactness revisited. *Q.J. Math. Oxford* 39. 235-254.
- Lowen, R. and Colebunders, E. 1988. A quasi-topos containing *Conv* and *Met* as full subcategories. *Int J. Math. Science* 11. 417-438.
- Lowen, R. 1989. Approach Spaces A common supercategory of *Top* and *Met*. *Math. Nachr.* 141 183-226.
- Lowen, R. 1993. Approximation of weak convergence, *Math. Nachr.* 160, 299-312.
- Lowen, R. and Robeys, K. 1994. Compactification of products of metric spaces and their relation to Smirnov and Čech-Stone compactifications *Topology Appl.* 55 163-183.
- Lowen, R. and Sioen 1996. M. The Wijsman and Attouch-Wets topologies on hyperspaces revisited *Topology.* 70, 179-197.
- Lowen, R. 1997. Approach Spaces: the Missing Link in the Topology Uniformity Metric Triad. *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford University Press. New York, United States.
- Lowen, R. and Windels, B. 1997. A-Unid: a common supercategory of UNIF and MET. 21, 1-18.
- Lowen, R. and Verbeeck C. 1998. Local compactness in approach spaces: part I *Int. J. Math. Sci.* 21 429-438.
- Lowen, R. and Sioen, M. 1998. Weak representations of quantified hyperspace Structures. *Elsevier.* 104, 169-179.
- Lowen, R. and Sioen, M. 1998. Proximal Hypertopologies revisited. *Set Valued Analysis* 6, 1-19.
- Lowen, R. and Sioen, M. 2000. Weak Representations of quantified hyperspace structures. *Topology Appl.* 104, 169-179.
- Lowen, R. and Sioen, M. 2000. Approximations in functional analysis *Result. Math.* 37 345-372.
- Lowen, R. and Sagioglu, S. 2013 Convex closures, Weak topologies and Feeble Approach Spaces. 21, 581-600.
- Lowen, R. and Wuyts, P. 2013. The Vietoris hyperspace structure for approach spaces. *Acta Math, Hung.* 139, 286-302.
- Lowen, R. 2015. Index Analysis, Approach Theory at Work. Springer.

- Michael, E. 1951. Topologies on spaces of subsets. Trans. Am. Math. Soc. 71.
- Munkres, J. R. 1975. A first course Topology. Prentice Hall. Englewood Cliffs, USA.
- Preuss, G. 1987. Theory of Topological Structures: an approach to categorical topology. Springer.
- Weil. A. 1938. Sur les Espaces à Structure Uniforme et sur la Topologie Générale. Hermann. Paris.
- Willard, S. 2004. General Topology. Dover Publications. Sdney, Australia.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Meryem BİTEN
Doğum Yeri : Elbistan
Doğum Tarihi : 06/04/1992
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Reha Midilli Anadolu Lisesi (2010)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2014)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2014 – Temmuz 2017)