

**T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME
ANABİLİM DALI**

**ALT KİSMİ MOMENT VE YARI-VARYANS
RİSK MODELLERİ KULLANARAK GENETİK ALGORİTMA
YARDIMIYLA PORTFÖY OPTİMİZASYONU:
İMKB UYGULAMASI**

Yüksek Lisans Tezi

Arma Değer MUT

Ankara-2009

**T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME
ANABİLİM DALI**

**ALT KISMİ MOMENT VE YARI-VARYANS
RİSK MODELLERİ KULLANARAK GENETİK ALGORİTMA
YARDIMIYLA PORTFÖY OPTİMİZASYONU:
İMKB UYGULAMASI**

Yüksek Lisans Tezi

Arma Değer MUT

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Güven SAYILGAN

Ankara-2009

T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME
ANABİLİM DALI

**ALT KİSMİ MOMENT VE YARI-VARYANS
RİSK MODELLERİ KULLANARAK GENETİK ALGORİTMA
YARDIMIYLA PORTFÖY OPTİMİZASYONU:
İMKB UYGULAMASI**

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Güven SAYILGAN

Tez Jürisi Üyeleri

Adı ve Soyadı

Doç.Dr.Yalçın KARATEPE

Doç.Dr.Hasan ŞAHİN

Doç.Dr.Güven SAYILGAN

İmzası

.....

.....

.....

Tez Sınavı Tarihi : 02.10.2009

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE**

Bu belge ile, bu tezdeki bütün bilgilerin akademik kurallara ve etik davranış ilkelerine uygun olarak toplanıp sunulduğunu beyan ederim. Bu kural ve ilkelerin gereği olarak, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce ve sonuçları andığımı ve kaynağını gösterdiğimi ayrıca beyan ederim.(07/12/2009)

Tezi Hazırlayan Öğrencinin
Adı ve Soyadı

ARMA DEĞER MUT

İmzası

.....

İçindekiler

Şekil Listesi	v
Tablo ve Grafik Listesi	vi
Kısaltma Listesi	vii
Giriş	1
Birinci Bölüm: Portföy Seçimi Problemiyle İlgili Literatür Araştırması	3
1 Modern Portföy Teorisi ve Portföy Seçimi İle İlgili Literatür Araştırması	3
1.1 Markowitz'in Portföy Teorisi	4
1.1.1 Getiri	5
1.1.2 Risk	6
1.1.2.1 Çeşitlendirmeyeyle Riskin Azaltılması	8
1.1.2.2 Riskin Sayısal Olarak İfade Edilmesi	10
1.1.3 Yatırımcının Fayda Fonksiyonu	12
1.1.4 Risksiz Varlığın Hesaba Katılması	14
1.2 Sayısal Risk Ölçütleri	16
1.2.1 Varyans	16
1.2.2 Kayıp Riski (Downside Risk) Ölçütleri	19
1.2.2.1 Yarı-varyans (Semivariance)	20
1.2.2.2 Riske Maruz Değer (Value-at-Risk) Modeli	21

1.2.2.3	Beklenen Kayıp (Expected Shortfall) Modeli.....	25
1.2.2.4	Alt Kısmi Moment (Lower Partial Moment)	26
1.3	Riski Göz Önünde Bulunduran Portföy Performans Ölçütleri	31
1.3.1	Sharpe Oranı.....	32
1.3.2	Treynor Oranı	33
1.3.2.1	Beta Katsayısı.....	34
1.3.3	Jensen'in Alpha Katsayısı.....	36
1.3.4	Sortino Oranı	37
1.4	Risk-Getiri Ekseninde Etkin Sınırın Belirlenmesine Yönelik Olarak Geliştirilen Teknikler	39
1.4.1	Markowitz'in Kritik Doğrular Yöntemi	39
1.4.2	Sayısal Hesaplama Algoritmaları	41
İkinci Bölüm: Genetik Algoritmalar İle İlgili Literatür Araştırması		44
2	Genetik Algoritmalar	44
2.1	Genetik Algoritmaların Temel Prensipleri	46
2.1.1	Kodlama: Problemin ifade edilmesi	47
2.1.2	Uyum fonksiyonu	50
2.1.3	İlk Popülasyonun Belirlenmesi	52
2.1.4	Popülasyonun Büyüklüğü	52
2.1.5	Çiftleştirilecek Bireylerin Seçimi	53
2.1.6	Genetik Operatörler	55

2.1.6.1	Çapraz Eşleme.....	56
2.1.6.2	Mutasyon.....	58
2.1.7	Genetik Algoritmanın Yakınsaması	59
2.2	Genetik Algoritmelerde Etkin Sınırın Oluşturulmasına Yönelik Literatür Araştırması.....	61
2.2.1	Çok Amaçlı Optimizasyon Problemlerinin Genetik Algoritmalarla Çözümüne İlişkin Yöntemler	62
Üçüncü Bölüm:	İMKB Uygulaması	65
3	İMKB Uygulaması.....	65
3.1	Geliştirilen Genetik Algoritma Uygulamasının Detayları.....	65
3.1.1	Portföy Seçimindeki Kısıtlar.....	65
3.1.2	Başlangıç değerlerinin atanması.....	66
3.1.3	Uyum Fonksiyonu	66
3.1.3.1	Bir Jenerasyon İçin Etkin Sınırın Belirlenmesi.....	66
3.1.3.2	Uyum Fonksiyonunun Hesaplanması	68
3.1.4	Çiftleşme	70
3.1.4.1	Çapraz Eşleme.....	72
3.1.4.2	Mutasyon.....	72
3.1.5	Genetik Algoritmanın Yakınsaması	73
3.2	Veri Kümesinin Elde Edilmesi	75
3.2.1	Hisse Senetlerinin Aylık Getirilerinin Elde Edilmesi.....	75

3.2.2	Veri Kümesine Dahil Edilecek Hisse Senetlerinin Seçimi	76
3.3	Elde Edilen Sonuçlar	77
3.3.1	Uygulama ile Hesaplanan Etkin Sınırlar	77
3.3.2	Etkin Sınırdaki Portföylerde Bulunan Varlıkların Dağılımı	82
3.3.3	Bulunan Etkin Sınırların Değerlendirilmesi	87
	Sonuç	91
	Özet	95
	Summary	96
	Kaynakça	97
	Ekler	107
	Ek 1. Veri Kümesine Dahil Edilen Hisse Senetleri	107
	Ek 2. Genetik Algoritma Parametrelerinin Belirlenmesi Üzerine Yapılan Denemeler	108
	Ek 3. Risksiz Faiz Oranının Hesaplanması	109
	Ek 4. Excel’de Yarı-varyans ve LPM Hesaplamak İçin Geliştirilen Fonksiyonlar	110
	Ek 5. Genetik Algoritma Uygulamasının Kaynak Kodu	111

Şekil Listesi

Şekil 1: Risk-Getiri Eksenlerinde Olanaklı Portföyler	5
Şekil 2: Çeşitlendirmeye Riskin Azaltılması	9
Şekil 3: Risksiz Varlığın Portföye Dahil Edilmesi ve Sermaye Pazar Doğrusu	15
Şekil 4: Çarpıklık ve Basıklık	18
Şekil 5: Value-at-Risk.....	22
Şekil 6: Treynor Oranının Grafikselleştirilmesi.....	34
Şekil 7: Jensen'in Alpha Katsayısının Grafikselleştirilmesi	37
Şekil 8: İkili Sayı Sistemiyle Kodlanmış Kromozomlar.....	49
Şekil 9: Uyum Fonksiyonunun Regülasyonu.....	51
Şekil 10: Genetik Algoritmelerde Çapraz Eşleme.....	57
Şekil 11: Genetik Algoritmelerde Mutasyon	59
Şekil 12: Etkin Sınırın Elde Edilmesi	68
Şekil 13: Uyum Fonksiyonunun Hesaplanması	69
Şekil 14: Uyum Fonksiyonunun Grafikselleştirilmesi.....	70
Şekil 15: Genetik Algoritmanın Yakınsaması.....	74

Tablo ve Grafik Listesi

Tablo 1: Uygulamada kullanılan parametreler.....	78
Tablo 2: Etkin Sınırlardaki Varlık Sayısı Dağılımı	83
Grafik 1: Algoritmanın Yakınsaması.....	79
Grafik 2: Uygulamayla Elde Edilen Etkin Sınırlar.....	80
Grafik 3: Etkin Sınırdaki Portföylerin İçerdiği Varlık Sayısı	82
Grafik 4: Etkin Sınırdaki Bulunan Portföylerdeki Varlıkların Dağılımı	84
Grafik 5: Etkin Sınırların Sharpe Oranı ile Karşılaştırılması	88
Grafik 6: Etkin Sınırların Sortino Oranı ile Karşılaştırılması	89
Grafik 7: Elde Edilen Etkin Sınırların Çarpıklık Değerleri	90

Kısaltma Listesi

ACO	Ant Colony Optimization
ANN	Artificial Neural Networks, Yapay Sinir Ağları
CVaR	Conditional Value-at-Risk, Koşullu Riske Maruz Değer
CAPM	Capital Asset Pricing Model, Sermaye Varlıklarını Fiyatlama Modeli
CML	Capital Market Line, Sermaye Pazar Doğrusu
ES	Expected Shortfall, Beklenen Kayıp
GA	Genetik Algoritmalar, Genetic Algorithms
GARCH	Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity
İMKB	İstanbul Menkul Kıymetler Borsası
LPM	Lower Partial Moment, Alt Kısmi Moment
SML	Security Market Line, Menkul Kıymet Piyasa Doğrusu
TDK	Türk Dil Kurumu
VaR	Value-at-Risk, Riske Maruz Değer
YSA	Yapay Sinir Ağları

Giriş

Markowitz'in öncülüğünü yaptığı modern portföy teorisi, elli yılı aşkın süredir araştırmacılar ve yatırımcılar arasında güncelliğini korumaya devam etmektedir. Modern portföy teorisinin çözüm aradığı sorunlardan birisi olan portföy optimizasyonu ile yatırım yapılmak istenen finansal varlıklarla oluşturulacak portföylerin risk-getiri çerçevesi içerisinde değerlendirilmesi ve getirinin maksimize edilirken riskin minimize edilmesi amaçlanmaktadır.

Riskin ve getirinin kavramsal bir çerçevede incelenerek, sayısal sonuçlar elde etmenin olanaklı hale getirilmesiyle beraber, yatırımcılara ve akademisyenlere bu alanda yepyeni bir kapı açılmıştır. Üzerine yeni kuramlar geliştirilen, yeni bakış açıları ileri sürülen risk-getiri yaklaşımı, yıllardır araştırmacılar ve akademisyenler için bir ilham kaynağı olma özelliğini taşımaktadır.

Bununla beraber, yıllar içerisinde söz konusu modelin temel varsayımları sorgulanmaya başlanmıştır. Modele getirilen eleştiriler, esas olarak risk kavramının üzerinde yoğunlaşmaktadır. Modern portföy teorisindeki portföy optimizasyonu, riskin varyans ile tanımlandığı Markowitz'in ortalama-varyans modeli üzerine kurulmuştur. Riskin varyans ile ifade edilmesi ise, Markowitz'in kendisinin de öne sürdüğü şekilde, yatırımcının risk algısını tam olarak yansıtmadığı gibi portföy getirilerinin olasılık dağılımını da gerçekçi bir biçimde temsil edememektedir.

Portföy optimizasyonu problemini daha ileri noktalara götürebilmek için bu noktadan yola çıkılarak çeşitli sayısal risk ölçütleri geliştirilmiştir. Bu risk ölçütlerinin araştırmacılar tarafından detaylı bir şekilde incelenmesi ve teknolojik olanaklardaki ilerlemeler sayesinde, zaman içerisinde varyansın tanınırlık ve hesaplama kolaylığı sayesindeki üstünlükleri ortadan kalkmıştır. İlerleyen teknolojik alt yapı, beraberinde yeni çözümleme ve hesaplama yöntemleri getirmiş ve söz konusu risk ölçütlerinin uygulanabilir hale gelmesine imkan tanımıştır.

Sözü edilen bu risk ölçütlerinden ikisi olan yarı-varyans ve alt kısmi moment ölçütlerinin portföy optimizasyonunda kullanılması, bu tezin konusunu oluşturmaktadır. Tezin birinci bölümünde, portföy optimizasyonu problemi ve anılan risk ölçütleri teorik bir çerçevede değerlendirilecektir. Portföy optimizasyonunda etkin sınırın hesaplanması için son zamanlarda oldukça popüler bir sayısal çözüm tekniği olan ve çok geniş alanlarda uygulama olanağı bulunan genetik algoritmaların kullanılması tercih edilmiştir. Genetik algoritmalar ve genetik algoritmaların portföy optimizasyonunda kullanılması ile ilgili literatür araştırması tezin ikinci bölümünü oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde, geliştirilen portföy optimizasyon uygulamasının detayları, uygulamanın İMKB 100 endeksine dahil olan hisse senetlerinin geçmiş verileriyle denenmesi ve elde edilen sonuçların değerlendirilmesi yer almaktadır.

Birinci Bölüm: Portföy Seçimi Problemiyle İlgili Literatür Araştırması

1 Modern Portföy Teorisi ve Portföy Seçimi İle İlgili Literatür Araştırması

Portföy seçim problemi, Markowitz ile birlikte başlamıştır. Nobel ödülü sahibi Harry Markowitz 1950'lerin başlarında portföy teorisini ilk defa yayınladığından beri, varyans kullanılarak optimum portföyü oluşturma, akademik dünyada ve yatırım dünyasında oldukça popüler bir konu haline gelmiştir.¹ Markowitz, portföy seçimi ile ilgili teorisini ilk olarak 1952 tarihli makalesinde ortaya koymuştur. 1959 tarihli eserinde çalışmasını detaylandırmış, portföy optimizasyonu yapan yatırımcının tekil olarak hisse senetlerinin seçimiyle veya varlıkların seçimiyle değil, portföy seçimi ile ilgilendiğini belirtirken² tek başına varlıkların değil, varlıkların oluşturduğu portföyün bir bütün olarak değerlendirilmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Markowitz, portföy getirisinin maksimize edilmesinin, tek başına amaçlanan bir şey olmadığı veya başka bir ifade ile tek başına kabul edilebilir olmaması gerektiği düşüncesindedir.³ Ona göre bir yatırımcı, portföy getirisinin maksimize edilmesiyle beraber portföyün riskinin de minimize edilmesini bir amaç veya olumlu bir özellik olarak görmelidir.

¹ Grootveld ve Hallerbach, 1999.

² Markowitz, 1959, s.3.

³ Markowitz, 1952.

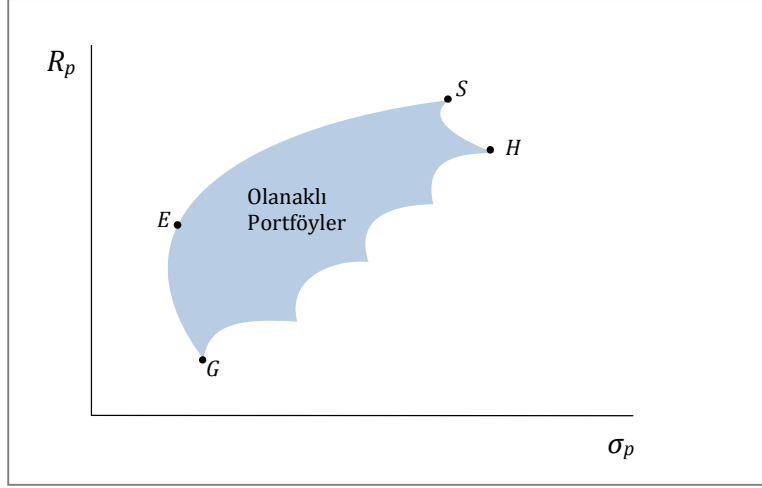
Gelecekte olacaklar belirsizdir ve portföy seçim probleminin altında da bu belirsizlik yer almaktadır. Portföyün gelecekteki performansı hakkında, eldeki mevcut verilerden elde edilen sonuçlar ışığında, ancak varsayımlarda bulunulabilecektir. Varlıkların gelecekteki getirileri, belirli bir kesinlikte bilinemez. Bu yüzden Markowitz, portföy seçiminde, söz konusu varlıkların getirilerinin beklenen değerlerinin hesaplanmasını, beklenen değerden sapmaların da söz konusun varlığın riski olarak tanımlanmasını ileri sürmektedir. Bu tanımlama ışığında, beklenen değerdeki veya portföy getirisindeki değişkenliğin istenmeyen veya olumsuz bir özellik olarak algılanacağı görülebilecektir.

1.1 Markowitz'in Portföy Teorisi

Markowitz'in ortaya koyduğu portföy optimizasyonu iki aşamadan oluşur. İlk aşama risk-getiri etkin sınırının elde edilmesidir. Burada, portföy getirilerinin ortalamasıyla ölçülen getirinin maksimizasyonu ışığında, portföy getirilerinin varyansı ile ölçülen risk değeri minimize edilmektedir. İkinci aşamada ise yatırımcının fayda fonksiyonu ortaya konulmakta ve etkin sınır üzerindeki portföyler arasından fayda fonksiyonunu maksimize eden portföy seçilmektedir.⁴

Markowitz, portföyü oluşturan varlıkların getirilerinin beklenen değeri ile portföyün getirisini, beklenen değerden sapmaları sayısal olarak ifade eden varyans ile de riski tanımlamaktadır.

⁴ Markowitz, 1959.



Şekil 1: Risk-Getiri Eksenlerinde Olanaklı Portföyler

Kaynak: Sharpe, Alexander ve Bailey, 1999, s. 172.

1.1.1 Getiri

Portföyün getirisini matematiksel olarak göstermek için önce N adet varlıktan oluşan bir portföyü ele alalım. $r_{i,t}$ 'nin i numaralı varlığın t dönemindeki getirisini göstermesi durumunda, belirli $[1, T]$ zaman aralığı için geçmiş verilerden elde edilecek getiriler ile hesaplanacak olan,

$$E(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}$$

değeri, i numaralı varlığın beklenen getirisini ifade eder. i varlığının portföy içindeki ağırlığı w_i olarak tanımlandığında, portföyün beklenen getirisini,

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_i) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \dots + w_n E(R_n)$$

olmak üzere portföydeki varlıkların getirilerinin ağırlıklı ortalamaları olarak hesaplanabilir. Elde tutma dönemi başlangıcında belirlenen bu ağırlıkların, elde

tutulma süresi boyunca sabit olarak kaldığı varsayılmaktadır. Buradaki w_i ağırlık katsayıları,

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

koşulunu sağlamalıdır. Orijinal Markowitz modelinde, açığa satış olmadığı varsayımı altında,

$$w_i \geq 0, \quad i \in [1, N]$$

kısıtı bulunmak zorundadır. Tabii ki bu koşul, portföyün oluşturulmasında tek olasılık değildir. Açığa satış söz konusu olduğunda ağırlıklar negatif olabilecektir.⁵

1.1.2 Risk

Bir önceki bölümde portföyün beklenen getirisi özetlenmiştir. Modern portföy teorisindeki portföy optimizasyonunda kullanılan diğer kantitatif ölçü ise bahsedildiği gibi risktir ve bu tezin önemli noktalarından birini oluşturmaktadır. En genel tanımıyla *risk*, kaybetme olasılığı olarak düşünülebilir. TDK'ye göre risk, zarara uğrama tehlikesidir.⁶ Başka bir tanıma göre risk, objektif olasılıkla belirlenebilen kaybetme şansı olarak ifade edilebilir.⁷

⁵ Lin ve Liu, 2008, s. 395.

⁶ TDK web sitesi, <http://www.tdk.gov.tr> (Erişim Tarihi 23 Mart 2009)

⁷ Sayılğan, 2006, s. 432.

Markowitz'in varyans yaklaşımına göre risk (iyi veya kötü yönde) belirsizliktir. Çeşitli kaynaklarda ifade edilen ve yaygın olarak kabul gören genel bakış açısına göre risk ile getiri arasında doğru bir orantı bulunmaktadır.⁸ Gerçekten de, daha fazla getiri elde etme potansiyeli olan yatırım araçlarının daha riskli araçlar olduğu görülebilecektir. Örneğin, bir hazine bonosu veya devlet tahvili, bir hisse senedine göre daha *risksiz* bir varlık olarak kabul edilmektedir.⁹ Bununla beraber geçmişte getirileri çok fazla değişkenlik gösteren bir hisse senedi, çok kazandırma şansı bulunmakla beraber *riskli* bir yatırım aracı olarak değerlendirilebilecektir.

Bununla birlikte, bahsedilen genellemenin tek yönlü bir genelleme olduğu düşünülmektedir. Riski yüksek bir yatırımın getirisi her zaman yüksek olmayabilir. Roy (1952)'a göre riskli bir yatırımın aynı zamanda kazandırıyor olması yatırımcıyı en fazla sevindirecek bir durumdur.¹⁰ Roy esas olarak riski beklenmedik büyük felaketler veya kayıplar olarak değerlendirmektedir. Bu bakış açısıyla, risk ve getiriye olan bu genel yaklaşımın gözden geçirilmesi gerekebilecektir.

⁸ Sayılğan, a.g.e., Sharpe, Alexander ve Bailey, 1999, s. 8.

⁹ Her ne kadar hesaplamalarda risksiz faiz oranı olarak devlet tahvilinin faiz oranı alınmakta ise de, tahvil ve bonoların da faiz riskine maruz oldukları bilinen bir gerçektir. Bununla beraber, Sayılğan (2006) faiz riskinin daha çok tahvil sahiplerinin karşı karşıya kaldığı bir sistematik risk çeşidi olduğunu belirtmiştir. Yatırımcının bir kuponsuz bir tahvili vadesi boyunca elde tutması durumunda başlangıçta planladığı getiriyi vade sonunda elde edeceği de göz önünde bulundurulursa, hisse senetlerinin getirisinin değerlendirildiği bir optimizasyon uygulamasında devlet tahvili faiz oranının risksiz oran olarak alınması çok da yanlış olmayacaktır.

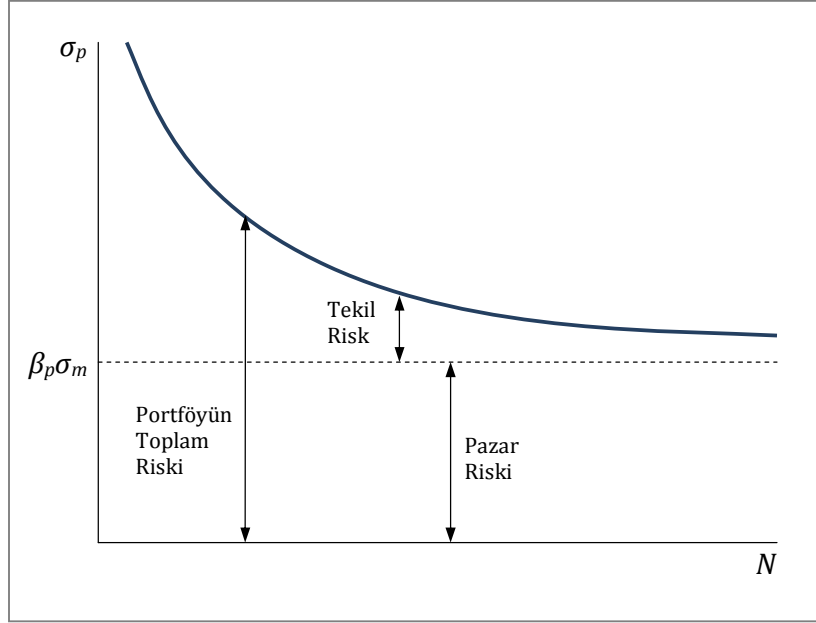
¹⁰ Roy, 1952, s. 433.

1.1.2.1 Çeşitlendirmeye Riskin Azaltılması

Risk üzerinde piyasa riski, endüstri riski, kur riski, teknolojik risk vb. değişik sınıflandırmalara gidilebilir. Portföy teorisinde de risk üzerinde çeşitlendirme ile ilgili bir ayrıma gidilmektedir. Portföy çeşitlendirmeye elimine edilebilen riske *tekil risk* veya *sistemik olmayan risk* denilmektedir. Çeşitlendirmeye önlenemeyen portföy riski ise *pazar riski*, *piyasa riski* veya *sistemik risk* olarak adlandırılmaktadır.¹¹

Eğer portföy yeteri kadar çeşitlendirilirse, sistemik olmayan veya spesifik risklerin azaltılacağı bilinmektedir. Yeteri kadar çeşitlendirme ile tam olarak ne kastedildiği çeşitli araştırmacılar tarafından değişik yorumlansa da, çeşitlendirme arttıkça toplam riskin en fazla varlıkların ayrı ayrı risklerinin toplamı kadar olacağı bir gerçektir. Örneğin, portföydeki bir firmanın yaşayacağı sıkıntı, diğer bir firmada yaşanan olumlu gelişmelerle dengelenebilecektir. Böylece portföyün toplam kaybı, tek bir varlığın kaybından daha düşük olacaktır.

¹¹ Brealey et al., 2004, s. 283.



Şekil 2: Çeşitlendirmeye Riskin Azaltılması

Kaynak: Sharpe, Alexander ve Bailey, 1999, s. 187.

Geçmişte Markowitz'den önce de yatırımcılar yatırımlarını çeşitlendirmenin ve böylece riski azaltmanın öneminin bilincindedirler. Fakat varlıkların risklerinin korelasyon gösterdiği durumlarda çeşitlendirmeye riskin azaltılmasına yönelik yeterli bir teorik altyapı 1952'ye kadar geliştirilmemiştir.¹² Markowitz, 1952 tarihli makalesinde ilk defa riski sayısal olarak ifade ederken, portföy çeşitlendirmesinin de riski azalttığını göstermiştir. O tarihten bu yana araştırmacılar portföyün çeşitlendirmesiyle riskin azaltılması üzerine çalışmalarda bulunmuştur.

Burada riskin çeşitlendirmeye ilgili bir özelliğine değinmek faydalı olacaktır. Artzner et al. (1999)'nin, riskin çeşitli sayısal tanımlarının aralarındaki ortak noktaları ortaya çıkardıkları eserlerinde, İngilizce “*subadditivity*” olarak ifade edilen

¹² Markowitz, 1999, s.5.

prensiple, bir portföyün riskinin, portföyü oluşturan varlıkların riskinden daha az ya da ona eşit olması gerektiğini ileri sürmektedir. Varlıklar X ve Y olmak üzere, bu varlıkların portföy içerisindeki ağırlıkları a ve b ile ve risk ρ simgesiyle ifade edilirse, bu kavram matematiksel olarak,

$$\rho(aX + bY) \leq \rho(aX) + \rho(bY)$$

şeklinde gösterilebilir.¹³ Markowitz'in de varyans kullanarak gösterdiği ve ispatladığı bu eşitsizliğin, “çeşitlendirmeye riskin artmayacağını” ifade ettiğini söylemek yanlış olmayacaktır. Riskin bu “Subadditivity” özelliğine, tezin riske maruz değer ile ilgili bölümünde tekrar değinilecektir.

1.1.2.2 Riskin Sayısal Olarak İfade Edilmesi

Kuşkusuz riskin sözel bir şekilde tanımlanması, bir portföy yöneticisi için yeterli olmayacaktır. Riskin, daha anlamlı olarak ifade edilebilmesi ve portföy seçiminde faydalı olabilmesi için, sayısal olarak belirlenebilmesi ve hesaplanabilmesi gerekmektedir.

Riskin sayısal olarak ifade edilmesi yaklaşımı ilk olarak Markowitz'in 1952 tarihli makalesiyle başlamıştır. Burada risk ölçütü olarak varyans kullanılmıştır. Bununla beraber risk tanımıyla ilgili tek yaklaşım bu değildir. Varyans dışında, yakın zamanlarda güncel hale gelmiş diğer risk tanımları da bulunmaktadır. Hatta Markowitz'in kendisi de başka bir risk ölçütünden, yarı-varyanstan söz etmekte ve

¹³ Artzner et al., 1999; Acerbi ve Tasche, 2001.

bu ölçütü önermektedir. 1959 tarihli kitabının 9. bölümünün tümünü yarı-varyans için ayırmaktadır. Kitabının 1991 tarihli revize edilmiş sürümünde yarı-varyansın daha akla yatkın, daha inandırıcı bir ölçü olduğunu ifade etmektedir. 1993 yılında yapmış olduğu çalışmasında kayıp riskinin bir yatırımcıyı kazanç olasılığından daha çok kaygılandıracağını, bu yüzden de yarı-varyansın yatırımcılar için varyanstan daha uygun bir risk ölçütü olduğunu ileri sürmektedir.¹⁴

Roy, 1952 tarihli makalesinde ileri sürdüğü “önce-güvenlik” (safety-first) kriterini açıklarken, riskin tek yanlılığına değinmektedir. Beklenmeyen felaketler ve kayıplar kimsenin istemediği durumlardır. Kuşkusuz hiç kimse, beklenmedik bir kaybı hoş karşılamayacaktır. Roy’a göre, bir yatırımcı %15 kazanç beklediği bir yatırımdan %5 elde etmeyi bir felaket olarak değerlendirecek iken, eğer bu yatırımcı yatırımından %25 kazanç elde ederse, buna en fazla sevinecektir. Bu bakış açısıyla yatırımcılar beklenmedik kayıpları beklenmedik kazançlardan daha çok önemsemektedirler.¹⁵

Her ne kadar varyansın yatırımcıların bakış açısını tam olarak yansıtmadığı ileri sürülebilirse de, portföy teorisinin ortaya çıkışından bu zamana kadar çeşitli akademisyenler ve araştırmacılar, Markowitz’in başlattığı izden giderek, varyansı temel risk ölçütü olarak kabul etmişlerdir. Bunun da sebebi genel olarak,

¹⁴ Markowitz et al., 1993, s. 307.

¹⁵ Roy, 1952, s. 433.

Markowitz'in ifade ettiği gibi, varyansın uygunluğu, hesaplama açısından kolaylığı ve tanınırlığı dolayısıyla olan üstünlükleridir.¹⁶

Zaman içerisinde, gittikçe daha çok araştırmacının konuyla ilgilenmesi ve hesaplama olanaklarındaki teknolojik gelişmeler, yarı-varyans ve diğer kayıp riski ölçütlerini popüler hale getirmiştir. Kayıp riski ölçütü olarak yarı-varyanstan başka risk tanımları da yapılmıştır. Bu tezin konusunu oluşturan, yarı-varyans ve alt kısmi moment kavramına ve literatürdeki diğer önemli bazı risk ölçütlerine ilerleyen bölümlerde kapsamlı bir şekilde değinilecektir.

1.1.3 Yatırımcının Fayda Fonksiyonu

Değinilmesi gereken diğer bir konu da, Markowitz portföy optimizasyonu modelinin bir parçası olan, yatırımcının fayda fonksiyonudur. Bir U fayda fonksiyonu için getirilerin P olasılık fonksiyonu biliniyorsa elde edilecek olan,

$$E(U) = \sum_s P(R_s)U(R_s)$$

değerinin veya portföy getirileri belirli dönemler için biliniyorsa,

$$E(U) = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T U(R_t)$$

değerinin maksimize edilmesi, Markowitz'e göre yatırımcıya en uygun olan portföyü verecektir.¹⁷ Bu fonksiyonun beklenen getiri ve varyans bilinirken hesaplanabilmesi için yaklaşık bir özüm

¹⁶ Markowitz, 1959, s. 194.

$$E(U) = U(R) + \frac{1}{2} U'(R) \sigma^2$$

denklemini ile önerilmektedir. Denkleminde kullanılmak üzere, Markowitz, R 'nin portföyün getirisini gösterdiği durumda,

$$U(R) = R - AR^2$$

$$U(R) = \text{Log}(1 + R)$$

$$U(R) = \sqrt{1 + R}$$

...

gibi çeşitli fayda fonksiyonları önermektedir.¹⁸ Yatırımcı, risk tercihini yansıtan bir fayda fonksiyonunu kullanarak etkin sınırdaki bulunan portföyler arasından en yüksek faydayı veren portföyü seçecektir.

Markowitz'in önerdiği şekliyle yatırımcının fayda fonksiyonuna getirilmiş eleştiriler de yok değildir. Grootveld ve Hallerbach (1999), kuadratik bir fayda fonksiyonunu gerçekçi bulmamaktadır. Ona göre, belirli bir getiriden sonra marjinal faydanın negatife düşmesi çok mantıklı değildir.¹⁹ Roy (1952), portföy optimizasyonunda yatırımcının fayda fonksiyonunun maksimize edilmesinin yatırımcı için çok fazla tatmin edici bir cevap olmayacağını ileri sürmektedirler.²⁰ Roy'a göre fayda

¹⁷ Sharpe, 2007, s. 21. Buradaki ifadede yer alan P fonksiyonu, R_s getirisi için olasılık dağılımı fonksiyonudur.

¹⁸ Markowitz, 1959.

¹⁹ Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 305.

²⁰ Roy, 1952, s. 433.

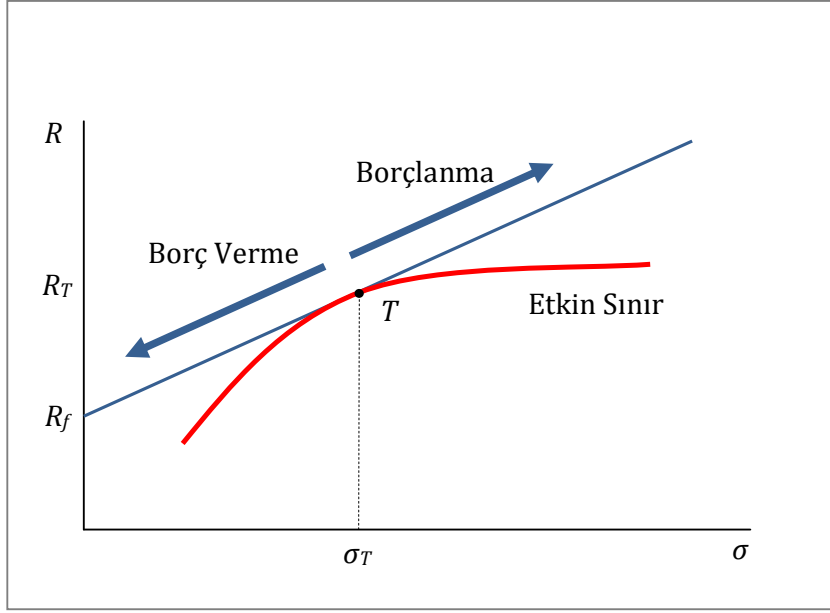
fonksiyonu, ancak kayıp durumunda 0, kazanç durumunda ise 1 değerini veren ekstrem bir şekilde belirlenirse yatırımcının riske bakış açısını yansıtabilir.²¹

Bahsedilen sebeplerden ve fayda fonksiyonunun tercihleri içeren sübjektif bir konu olmasından dolayı yatırımcının fayda fonksiyonu ve portföyün bu fonksiyona göre optimize edilmesiyle ilgili konular bu tezin kapsamı dışında tutulmuştur. Şu var ki, portföy optimizasyonu için etkin sınır oluşturulduktan sonra, etkin sınır üzerinde bulunan ve yatırımcının kişisel tercihine hitap eden bir fayda fonksiyonunu maksimize eden bir portföy, o yatırımcı için optimum portföy olacaktır. Bu yüzden, portföy optimizasyonu için etkin sınırın oluşturulması ve etkin sınırdaki portföylerin elde edilmesi bu tezin kapsamı açısından yeterli görülmektedir.

1.1.4 Risksiz Varlığın Hesaba Katılması

Sharpe et al. (1999), portföy yatırımıyla beraber risksiz varlıktan satın alma ve risksiz orandan borçlanabilme durumunu değerlendirmektedir. Risk getiri ekseninde yer alan herhangi bir portföyle beraber risksiz varlıktan belirli bir ağırlıkta satın alınması durumunda elde edilecek karma portföy, risk getiri ekseninde risksiz varlıkla başlangıçtaki portföy arasında yer alacaktır. Risksiz orandan borç alma ve elde edilen parayı aynı portföyden daha fazla alarak değerlendirme durumunda ise, yapılacak yatırım yine aynı doğru üzerinde ama başlangıç portföyünden daha ileride, daha riskli bir noktada bulunacaktır.

²¹ Roy, a.g.e.



Şekil 3: Risksiz Varlığın Portföye Dahil Edilmesi ve Sermaye Pazar Doğrusu

Kaynak: Sharpe, Alexander ve Bailey, 1999, s. 216.

Bu şekilde yapılacak yatırımlar arasından en iyi getiriye verecek olan portföy, risksiz faiz oranından etkin sınıra çizilecek teğet üzerinde bulunan portföy ile elde edilecektir. Bu teğet noktasındaki portföye *optimum riskli portföy* (*optimum risky portfolio*) adı verilir.²² Risksiz faiz oranından borçlanabilme ve borç verebilme olanağı bulunduğu zaman, yatırımcı çizilecek bu teğetin üzerinde bulunan herhangi bir noktada yatırım yapılabilecektir.

²² Sharpe, 1999, s. 223.

1.2 Sayısal Risk Ölçütleri

1.2.1 Varyans

Varyans, bir dağılımın beklenen değerden sapma miktarını gösteren bir ölçüttür. Varyans terimi ilk olarak Fisher'ın 1918 tarihli makalesinde kullanılmıştır. Markowitz'in 1952 tarihli makalesiyle beraber, risk ölçütü olarak kullanılagelmiştir.²³ Varyans, sürekli bir R dağılımı için, P olasılık fonksiyonunu göstermek üzere,

$$\sigma^2(R) = \int (R - E(R))^2 P(R) dR$$

formülüyle ifade edilir. Varyans σ^2 sembolüyle gösterilmektedir. σ simgesi, varyansın kareköküne eşit olan, standart sapma terimini ifade etmek için kullanılmaktadır. Çok bilinen varyans teriminin kesikli değişkenler için tanımı, popülasyonun tümü için,

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2$$

ile tanımlanmaktadır. Popülasyondan seçilecek örneklem için varyans,

$$S^2(R) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2 = \frac{N}{N-1} \sigma^2(R)$$

formülü ile ifade edilmektedir.²⁴ İki değişkenin ne kadar birlikte değiştiğini gösteren bir ölçüt olan *kovaryans*, matematiksel olarak,

²³ Markowitz, 1999.

²⁴ <http://mathworld.wolfram.com/Variance.html> (Erişim tarihi, 12.03.2009)

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i)$$

olarak ifade edilir. Kovaryans özellikle korelasyon gösteren iki değişkenin toplamının varyansının hesaplamasında oldukça faydalıdır. Bu bağlantı,

$$\sigma^2(aX + bY) = a^2\sigma^2(X) + b^2\sigma^2(Y) + 2a^2b^2Cov(X, Y)$$

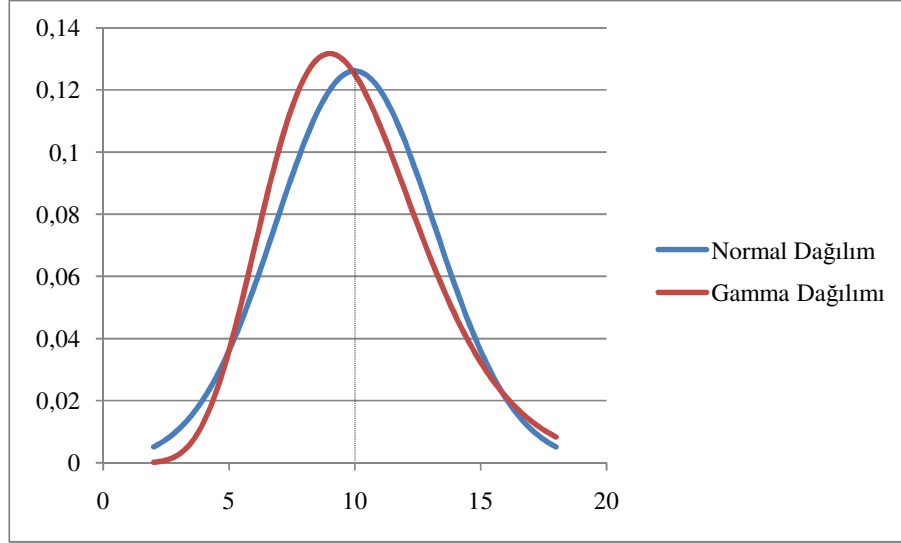
eşitliğiyle gösterilebilecektir.²⁵

Varyans, literatürde sıklıkla risk ölçütü olarak kullanılan bir kavram olup, burada konunun çok bilinen detaylarına değinilmeyecektir. Bununla birlikte, varyansın bir dağılımda ikinci dereceden momenti ifade ettiğini söylemek ve bu noktada olasılık dağılımlarında ikinci ve üçüncü dereceden momentleri gösteren *çarpıklık (skewness)* ve *basıklık (kurtosis)* kavramlarından da bahsetmek yerinde olacaktır.

Basıklık ölçütü dağılımın tepe noktasının normal dağılımdan aşağıda veya yukarıda olduğunu ifade eder. Buna göre dağılım sivri veya basık olarak adlandırılır.²⁶ Dağılımın normal dağılımdan asimetric olarak farklılaştığını ifade eden çarpıklık katsayısı ise, aşağı yönde risk olarak da ifade edilen kayıp riski konusunun incelendiği bu çalışmada önem kazanmaktadır. Kraus ve Litzenberger (1976), pozitif yönde çarpıklığa sahip getiri dağılımlı varlıkların daha çok tercih edildiğini, bu durumun varlık fiyatlarına da yansıdığını belirtmektedir. Nawrocki (1999), pozitif yönde çarpıklığın daha olumlu olduğu görüşünü ifade etmektedir.

²⁵ <http://mathworld.wolfram.com/Covariance.html> (Erişim tarihi, 12.03.2009)

²⁶ Kılıçkaplan, 2000, s. 28.



Şekil 4: Çarpıklık ve Basıklık

Şekildeki normal dağılımın ortalaması 10, varyansı 10, çarpıklık ve basıklık değerleri 0 (sıfır)'dır. Aynı ortalama ve varyansa sahip "Gamma Dağılımı" için çarpıklık 0,63 (sola çarpık) ve basıklık 0,6 (sivri) olarak hesaplanmıştır.

Varyansın risk tanımı olarak kullanımı günümüzde çeşitli eleştirilere maruz kalmakla birlikte, varyansın bu kullanımını savunan en güçlü argümanlar yine Markowitz'den gelmektedir. Markowitz, 1979'da Levy'yle ve 1984'te Kroll ve Levy'yle yaptığı çalışmalarında, münferit olarak hisse senetlerinin getirilerinin normal dağılım göstermese bile, optimal portföylerin getirilerinin normale çok yakın olacağını belirtmektedir.²⁷ Söz konusu duruma ek olarak çarpıklık katsayısının 6 hisse bulunan bir portföy ile bile giderilebileceği ifade edilmektedir. Ne var ki, Nawrocki LPM'nin kullanımıyla, çeşitlendirilmiş bir portföye (istenen yönde) çarpıklık kazandırılabilceğini göstermiş, böylece performansı daha yüksek portföylerin elde

²⁷ Nawrocki, 1999, s.18.

edilebileceğini öne sürmüştür.²⁸ Dolayısıyla Markowitz'in bahsedilen argümanı, varyansın kullanımına çok güçlü bir sav oluşturmamaktadır.

1.2.2 Kayıp Riski (Downside Risk) Ölçütleri

Ortalama-varyans yaklaşımının teoride bir takım limitleri bulunmaktadır. Çoğu yazar ortalama-varyans portföy seçimi modelinin sadece fayda fonksiyonlarının kuadratik olduğu zaman veya getirilerin dağılımının eliptik olduğu zaman optimal kararlara yön verdiğini göstermiştir. Grootveld ve Hallerbach (1999), kuadratik fayda fonksiyonların çok mantıklı olmadığını, bunun yanında eliptik dağılımlı getirilerin de çok gerçekçi olmadığını ifade etmektedir. Finansal varlıkların getirileri özellikle uzun dönemde asimetrik dağılım göstermektedir. Fakat varyans, istenen yukarı yöndeki hareketleri istenmeyen aşağı yöndeki hareketlerle eşit derecede cezalandırdığı için, asimetrik dağılımları yeteri kadar yansıtamamaktadır. Bu bakış açısıyla, aşağı yöndeki hareketlerin, yukarı yöndeki istenen hareketlerden ayrıştırıldığı bir risk konsepti, yatırımcıların risk algısına varyanstan daha çok hitap etmektedir.²⁹

Kayıp riski ölçütlerinin ana çıkış noktası, getiri dağılımı grafiğinin sol tarafında riskli durumlar bulunurken, sağ tarafında daha iyi yatırım fırsatlarının yer almasıdır. Yatırım konsepti altında kayıp riski ölçütlerine duyulan ilgi 1950'lere kadar uzanır.

²⁸ Nawrocki, a.g.e.

²⁹ Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 305.

Roy (1952)'un "Önce Güvenlik Kriteri", belki de en çok bilinen kayıp riski ölçütlerinden birisidir. Bu kriter, bir yatırımın, belirlenmiş bir felaket düzeyinin altına düşme olasılığını ölçen bir çeşit kayıp olasılığıyla değerlendirilmesini önerir.

Kayıp riskine daha genel ve sofistike yaklaşımlar, riski belirli bir getirinin altındaki kayıpların sapmalarının olasılıkla ağırlıklandırılmış bir şekilde hesaplandığı fonksiyonlarla ifade ederler. Bunlara bir örnek, ortalamanın altında kalan getirilerin değişkenliğini ölçen, Markowitz'in önerdiği yarı-varyans ölçütüdür. Yarı-varyans, daha genel "alt kısmi moment" risk ölçütü sınıfının özel bir halidir. Alt kısmi moment ölçütleri, belirli düzeyden az olan getirilerin varyansını ve daha yüksek momentlerini ölçer.

Finansal analistler arasında kavramsal basitliği ve açıklığı sebebiyle son zamanlarda oldukça popüler olmuş bir diğer risk ölçütü de Riske Maruz Değer (VaR) ölçütüdür. VaR, portföyün değerinin belirli bir olasılıkla maksimum ne kadar değer kaybedeceğini gösterir. VaR ölçütünün yakın zamanlarda aldığı eleştirilerle beraber, bu ölçüte çok benzeyen fakat eksik yönlerini barındırmayan Beklenen Kayıp Modeli geliştirilmiştir.

1.2.2.1 Yarı-varyans (Semivariance)

Yarı-varyans, varyans hesaplaması sırasında olasılık dağılımının sadece belirli bir tarafının, ortalamadan küçük veya ortalamadan büyük tarafının, hesaba dahil edildiği bir ölçüttür. Başka bir deyişle yarı-varyans, ortalamanın kayıp veya kazanç

tarafındaki çeşitlenmeyi gösterir. Bu şekilde tanımlanmasına rağmen, yarı-varyans, akademik çalışmalarda genelde kazanç tarafıyla değil, kayıp riski ile ilişkilendirilmektedir. Kesikli değişkenlerle yarı-varyansın hesaplanması, aşağıdaki formül yardımıyla elde edilebilir:

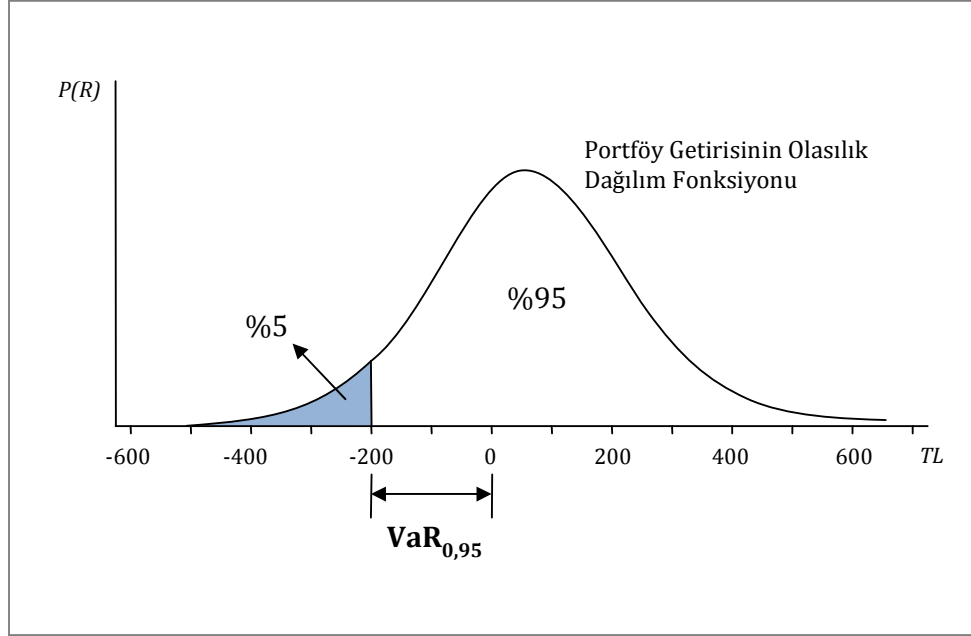
$$SVar(R_p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(0, E(R_i) - R_i)^2$$

Kullanımı Markowitz tarafından da önerilmiş olan, ortalama yarı-varyans modeli, beklenen değerden farklılaşmanın sadece kayıp veya sadece kazanç yönünden incelenmesine olanak sağlamaktadır. Eğer bir portföyün getirilerinin dağılımı tam anlamıyla normal dağılıma uygunluk gösteriyorsa, yarı-varyans, varyansın tam olarak yarısı olacaktır. Eğer dağılım sağa veya sola yatıksa, buna göre yarı varyans, varyansın yarısından daha büyük veya daha küçük bir değer olarak hesaplanacaktır.

1.2.2.2 Riske Maruz Değer (Value-at-Risk) Modeli

Riske maruz değer (VaR – Value-at-Risk), spesifik bir zaman diliminde, belirli bir güven aralığında ve normal pazar koşullarında gerçekleşebilecek kayıp riskini ölçer. Varlıklar için bir risk ölçüm aracı olmakla beraber VaR, portföy optimizasyonu için de kullanılmakta olan bir yöntemdir.³⁰

³⁰ Puelz, 2001; Campbell, Huisman ve Koedijk, 2001.



Şekil 5: Value-at-Risk

Kaynak: Acerbi, 2005, s. 5.

Daha net ifade edilmesi gerekirse, VaR, belirli bir varlığın t zaman diliminde $\%p$ olasılıkla uğrayabileceği değer kaybının minimum ne kadar olacağı sorusuna cevap vermektedir. Başka bir deyişle, bu varlığın t zaman diliminde $(1-p)$ olasılıkla uğrayabileceği maksimum kaybı ifade eder.³¹ R dağılımı ve α güven değeri için riske maruz değer matematiksel olarak,

$$VaR_{\alpha}(R) = -\sup\{r \mid P[R \leq r] < \alpha\}$$

olarak formüle edilmektedir.³² Buradaki $\sup$ fonksiyonu, bir kümenin belirli bir kritere göre en büyük elemanını belirten supremum fonksiyonudur.³³

³¹ Beninga ve Wiener, 1998.

³² Acerbi ve Tasche, 2001, s.376.

³³ <http://mathworld.wolfram.com/Supremum.html> (Erişim Tarihi 28 Mart 2009)

Tanımı belirli olmasına karşın literatürde Value-at-Risk'in ölçülmesine ilişkin çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır. Bu yaklaşımlar,

1. parametrik modeller,
2. yarı-parametrik modeller,
3. parametrik olmayan modeller,

olmak üzere özetlenebilir.³⁴ Varyans-kovaryans modeli ve GARCH (Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity) modeli gibi modeller parametrik modellerin altında bulunmaktadır. Bu yöntemler istatistiksel olarak dağılımları tahmin edip ortaya çıkan matematiksel dağılım modeli üzerinden VaR değerini hesaplamaktadır. Bu yöntemlerde dağılımla ilgili bir varsayım yapıldığı gözlenebilecektir. Örneğin varyans-kovaryans modelinde dağılımın normal dağılım olduğu varsayılır. Yarı-parametrik modeller arasında Extreme Value Theory, CAViaR, Quasi-Maximum Likelihood GARCH modelleri gibi çok daha sofistike modeller bulunmaktadır.³⁵

Parametrik olmayan yöntemlerin genel olarak avantajı dağılımla ilgili herhangi bir varsayımda bulunmaması ve modellerden bağımsız olarak çalışabilmesidir. Bu metotlar arasında tarihi değerler yöntemi ve hibrid yöntem bulunmaktadır. Tarihi değerler yöntemi, belirli bir zaman aralığındaki değerleri kullanarak VaR hesaplanmasına dayanır. Seçilen zaman penceresindeki getiriler en düşükten itibaren

³⁴ Manganelli ve Engle, 2001, s. 7.

³⁵ Manganelli ve Engle, a.g.e.

sıralanır ve istenen güven aralığına ulaşılan kadar getirilerin dağılımları toplanarak ilerlenir. Bu güven değerine ulaşıldığındaki getiri, VaR değerini verecektir.

Zaman diliminin çok geniş seçilmesi durumunda (örn. günlük veriler için, 2 yıl ve daha uzun süre) çok eski verilerin hesaplamayı olumsuz etkilemesi konusunda kuşkuların bulunması üzerine hibrid model geliştirilmiştir. Hibrid modelde ise VaR değeri tarihsel modeldeki değerlerin tarihe göre geçmişe gittikçe azalan bir katsayıyla çarpılmasıyla bulunur. Seçilecek bir λ katsayısına göre, K adet portföy getirisi, en yakından başlamak üzere

$$\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\right), \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\right)\lambda, \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\right)\lambda^2, \dots, \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda^K}\right)\lambda^{K-1}$$

ağırlıklarıyla ilişkilendirilmektedir. Bundan sonra getiriler en düşükten itibaren sıralanır ve ağırlıklarıyla çarpılarak bulunan değerleri istenen güven aralığına erişilinceye kadar toplayarak ilerlenir. Bulunan değer, hibrid modele göre VaR değerini verecektir.³⁶

VaR modeli son zamanlarda, oldukça fazla eleştiri almıştır. Bu eleştirilerden belki de en önemlisi, VaR modelinin, daha önce değinilmiş olan, riskin “subadditivity” özelliğini göstermediğidir. Bu yöntem kullanıldığında, ölçülen portföy riski portföyü oluşturan varlıkların riskinden daha büyük olabilmektedir. Bu yüzden VaR çeşitlendirmeyeyle riskin azaltılması prensibiyle uyum göstermemektedir. Acerbi ve Tasche (2001) makalelerinde, VaR ölçütünün anılan özelliği tam anlamıyla yerine getiremediğini, bu nedenle de portföy optimizasyonu problemlerinde

³⁶ Manganelli ve Engle, a.g.e., s. 8.

kullanılamayacağını, dolayısıyla da VaR'ın tam anlamıyla bir risk ölçütü sayılamayacağını öne sürmektedir.³⁷ Yazarların VaR yerine kullanımını önerdiği alternatif model ise, beklenen kayıp modelidir.

1.2.2.3 Beklenen Kayıp (Expected Shortfall) Modeli

Beklenen Kayıp (ES – Expected Shortfall), VaR modelinin tutarsızlıklarını azaltmak için geliştirilmiş bir risk ölçüm modelidir. Kimi kaynaklarda koşullu riske maruz değer (CVaR-Conditional Value-at-Risk) olarak da geçen beklenen kayıp, belirli bir varlığın t zaman diliminde en kötü $\%p$ durumda uğrayabileceği değer kayıplarının beklenen değerini gösterir. VaR ölçütü minimum kayıp miktarını gösterirken, ES ise bu kayıpların ortalama değerini ifade eder. Beklenen kayıp,

$$\mu_{\alpha}(R) = E(r_t | r_t < VaR(R))$$

olarak tanımlanabilir.³⁸

Expected Shortfall modeliyle ilgili en büyük eleştiri, modelin, büyük olasılıkla gerçekleşebilecek küçük kayıplarla, küçük olasılıkla gerçekleşebilecek büyük kayıplara aynı ölçüde yaklaşmasıdır. Daha önce değinildiği gibi yatırımcılar, kayıplara daha farklı bir bakış açısıyla yaklaşmaktadır. Örneğin, kimi yatırımcılar, büyük kayıplar yerine daha olası olmasına rağmen gerçekleşebilecek küçük

³⁷ Acerbi ve Tasche, a.g.e., s.381.

³⁸ Chen, 2008, s. 2.

kayıpların olma olasılığını tercih edebilir.³⁹ Bu bakımdan, büyük kayıplara karşı daha hassas olan yatırımcılar için ES modeli avantajsız bir ölçüt olabilecektir.⁴⁰

1.2.2.4 Alt Kısmi Moment (Lower Partial Moment)

Finans alanında kullanılan bir diğer risk ölçütü sınıfı da “Alt Kısmi Moment” ölçütleridir. Buradaki kısmi terimi, getirilerin olasılık dağılımının sadece belirli bir parçasının ölçüldüğünü yansıtmaktadır. Söz konusu ölçütte, belirli bir hedef getiriden daha düşük olan getiriler hesaplamaya dahil edilerek olası kayıpların momenti hesaplanmaktadır. Bawa (1975) ve Fishburn (1977), bu kayıp riskini alt kısmi moment terimi altında tanımlayıp, “ α - t ” modelini geliştirmişlerdir.⁴¹

Alt kısmi moment, portföy getirilerinin belirli bir t hedef getirisinin altında kalan değerlerine bağlı olarak ölçülen bir risk ölçütüdür ve şu şekilde ölçülmektedir:⁴²

$$LPM_{\alpha,t}(R_p) = \int_{-\infty}^t (t - R)^{\alpha} P(R) dR$$

³⁹ Söz konusu duruma ev sigortası örnek olarak gösterilmektedir. İnsanlar, evin içerisinde zarara uğrama olasılığı yüksek bir çok eşyayı değil, kayıp olasılığı daha düşük olmakla beraber kayıp durumunda etkisi çok büyük olacak olan evlerini sigortalatmayı tercih ederler.

⁴⁰ Clarke, 2003, s. 47.

⁴¹ Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 306.

⁴² Price et al., 1982.

Burada, t hedef getiri, $P(R)$ de olasılık dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Sürekli değişkenlerle yukarıdaki gibi tanımlanan fonksiyon, kesikli değişkenlerde ölçülmek istendiğinde,

$$LPM_{\alpha,t}(R_p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}(0, t - R_i)^\alpha$$

olarak tanımlanacaktır.

LPM formülünde kullanılan t parametresi, Roy(1952)'un felaket düzeyi olarak ifade ettiği seviyedir. Uygulamada t değeri olarak risksiz varlığın getiri oranının (r_f) kullanılmasına sıklıkla karşılaşılabılır. Formülde geçen α parametresi, t 'den daha düşük getiri elde etmenin göreceli etkileri hakkında yatırımcının hislerini yansıtır. Fishburn (1977), riske karşı kayıtsız yatırımcıya uygun olan $\alpha = 1$ değerinin, risk arayan yatırımcıyla ($0 < \alpha < 1$), riskten kaçan yatırımcıyı ($\alpha > 1$) ayırdığını göstermiştir.⁴³

Alt kısmi moment ölçütünün burada bir ölçü sınıfı olarak ifade edilmesinin sebebi ise α ve t parametrelerinin değerini değiştirerek, birçok kayıp riski ölçütünün elde edilebilmesidir. Örneğin, $\alpha = 1$ ve $t = VaR(R)$ kullanıldığında ortaya çıkan formül beklenen kayıp modelidir.⁴⁴ Literatürde sıklıkla LPM formülünde $\alpha = 2$ değerinin kullanıldığı gözlenmektedir. Bu kullanımla beraber, hedef getirinin $t = E(R)$ olarak belirlenmesi halinde yarı-varyans formülü elde edilecektir.

⁴³ Fishburn, 1977, s. 123.

⁴⁴ Grootveld ve Hallerbach, a.g.e.

LPM modelinin neden daha başarılı olarak değerlendirilebileceğine ilişkin objektif bir yaklaşım *Stokastik Üstünlük (Stochastic Dominance)* kavramıyla açıklanmaktadır. Stokastik üstünlük, yatırımcının fayda fonksiyonunu tam olarak bilmeye gerek olmadan, getirileri kesin olmayan yatırımların karşılaştırılabilmesini sağlayan bir kriterdir.⁴⁵ Yatırımları getiri ve olasılıklarıyla değerlendiren bu yaklaşıma göre, bir yatırım ötekine göre stokastik üstünlük gösteriyorsa, fayda fonksiyonunun monoton artan olduğu durumda, diğer yatırıma göre tercih edilecektir.

Stokastik üstünlük kriterlerini sağlayan portföy kümeleri, çok çeşitli yatırımcı gruplarına hitap etmektedir. Örneğin birinci dereceden stokastik üstün etkin sınır, getiriyi arzulayan yatırımcılara, ikinci dereceden stokastik üstün portföyler, riskten kaçınma gösteren yatırımcılara, üçüncü dereceden stokastik üstün portföyler, fayda fonksiyonu azalan mutlak riskten kaçınma (absolute risk aversion) gösteren yatırımcılara hitap etmektedir.⁴⁶ Whitmore (1970), ikinci dereceden stokastik üstün bir kümenin birinci dereceden stokastik üstün bir kümeden daha kapsamlı olduğunu, üçüncü dereceden stokastik üstün bir kümenin de ikinci dereceden daha kapsamlı olduğunu ifade etmektedir.⁴⁷

⁴⁵ Hadar ve Russell, 1969.

⁴⁶ Bawa et al., 1979, s. 609.

⁴⁷ İkinci dereceden stokastik üstün bir küme, birinci dereceden stokastik üstün bir kümeye göre daha üstün anlamına gelmemelidir. Bunun anlamı, birinci dereceden

Bawa (1978), her skalar t değeri için ve belirli bir tipte her getiri dağılımı için, LPM modelinin stokastik üstünlük konsepti altında diğer tüm portföyleri domine edeceğini göstermektedir. Roy'un önce güvenlik kriterindeki kayıp olasılığı, $\alpha \geq 0$ olan tüm LPM modellerinde olduğu gibi birinci dereceden stokastik üstünlük kriterini sağlamaktadır. Markowitz'in ortalama-varyans modeli ile seçilecek portföyler, $\alpha \geq 1$ olarak belirlenmiş tüm LPM modelleri ile seçilecek portföyler gibi ikinci dereceden stokastik üstünlük göstermektedir. Bu durum, fayda fonksiyonunun artan mutlak riskten kaçınma göstermesini gerektirmektedir. Bu koşul Grootveld ve Hallerbach'e göre çok da gerçekçi değildir.⁴⁸ LPM formülünde $\alpha \geq 2$ olmak üzere seçilecek her α değeri için elde edilecek etkin portföyler üçüncü dereceden stokastik üstünlük sağlanmaktadır. Bu da Grootveld ve Hallerbach (1999)'da ifade edildiği gibi, fayda fonksiyonunun azalan mutlak riskten kaçınma gösterdiği her bireye uygun sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır.⁴⁹

LPM yaklaşımıyla birçok kayıp riski ölçütü ifade edilebilmekle birlikte, çoğu görüşün aksine, bunlar arasından sadece bazıları getiri-risk teorik çerçevesinde

stokastik üstün portföylerin oluşturacağı kümenin, daha dar bir küme olduğudur. Aynı durum, üçüncü dereceden stokastik üstünlük için de geçerlidir. Bkz. Whitmore, 1970, s. 457.

⁴⁸ Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 305.

⁴⁹ Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 307.

varyanstan daha üstün özellikler göstermektedir.⁵⁰ Grootveld ve Hallerbach (1999), $\alpha \geq 2$ ve $t = R_f$ olarak belirlenen LPM ölçütlerinin teorik çerçevede varyansan üstünlük sağladığını, fakat böyle bir tanımlamanın ölçütün kullanımına kısıtlama getirdiğini belirtmektedir. Chen et al. (2007), New York hisse senedi borsasında yaptıkları ampirik araştırmalarında, kayıp riski ölçütlerinin açıklayıcı gücünün daha yüksek olduğunu ifade etmektedirler. Bununla birlikte, sıfıra olan uzaklığa göre hesaplanan kayıp riski ölçütlerinin, ortalamaya veya ortalama pazar getirisine uzaklığa göre hesaplanan kayıp riski ölçütlerinden daha başarılı olduğunu belirtmektedirler.⁵¹

LPM (ve yarı-varyans) modelleriyle ilgili eleştiri, hesaplama zorluğundan gelmektedir. Bu modelin sürekli olmayan yapısından dolayı, kovaryans kullanımı gibi, tekil olarak hisselerin LPM değerleri ve hisselerin birbirleri aralarındaki varsayımsal bir Co-LPM değerlerinden portföyün LPM değerinin bulunması olanaklı değildir.⁵² LPM değerinin hesaplanmasıyla ilgili çeşitli sezgisel yaklaşımlar bulunmakla birlikte, portföyün LPM değerinin bulunabilmesi için, tüm hisselerin getiri değerlerini içeren veri kümesinden tekrar hesaplama yapılması gerekmektedir. Böyle olduğu için, LPM kullanılarak yapılan portföy optimizasyonunda Markowitz yaklaşımındaki kovaryans matrisinin kullanılması gibi deterministik bir çözüm yolu bulunmamaktadır.

⁵⁰ Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 305.

⁵¹ Chen et al., 2007.

⁵² Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 308.

1.3 Riski Göz Önünde Bulunduran Portföy Performans Ölçütleri

Bir yatırımcı, elindeki bir portföyün başarımla ilgili tüm verileri bilmek isteyecektir. Eskiden, belki de şans sayesinde başarılı portföyler elde edilmiş olabilir. Ancak günümüzde portföyleri değerlendirmek için portföylerin birbirlerine olan üstünlüklerini sayısal olarak ifade edebilen yöntemler kullanılmaktadır. Portföy optimizasyonu sonucu elde edilen portföylerin başarımlarını karşılaştırabilmek için, akademik açıdan kabul görmüş bu portföy değerlendirme kriterlerinin kullanılması yerinde olacaktır.

Portföylerin başarımlarını karşılaştıran çok çeşitli ölçütler bulunmaktadır. Portföyleri sadece getirilerine ve sadece pazar fiyatlarına göre portföyleri değerlendiren kriterler bunların bir bölümünü oluşturmaktadır.⁵³ Bir önceki bölümde literatürde bulunan risk ile ilgili çeşitli ölçütlere değinilmiştir. Risk portföy seçiminde yatırımcıların önem verdiği hususlardan birisi olmakla beraber, portföylerin sadece risk ölçütleriyle değerlendirilmesi portföyler arasında karşılaştırma yapılabilmesi için tek başına yeterli olmayacaktır.

Literatürde portföyleri getiri ve risklerine göre değerlendiren, riske göre düzenlenmiş birçok ölçüt bulunmaktadır. Jensen'in Alpha Katsayısı, Beta Katsayısı, Calmar Oranı, MiniMax Oranı, Mutlak Ortalama Sapma (Mean Absolute Deviation-MAD)

⁵³ Sharpe et al., a.g.e., s. 825-834.

Oranı, Farinelli-Tibiletti Oranı, Information Oranı, Sharpe Oranı, M^2 Oranı, Sortino Oranı, Stutzer Endeksi, Treynor Oranı, Yukarı Potansiyeli Oranı⁵⁴ bunlar arasından örnek olarak gösterilebilecek birkaçıdır. Çeşitli araştırmacılar tarafından ortaya konulmuş olan bu oranlar, kendi varsayımları altında, herhangi iki portföy verildiğinde bunları karşılaştırmakta faydalı olabilecek sayısal katsayılar üretmektedirler. Bütün bu ölçütler teorik olarak geçerlidir fakat farklı optimal çözümlere ulaştırmaktadır. Literatürde kabul görmüş ve pratikte de kullanım alanı bulmuş olan bu oranlar arasından, yaygın olarak kullanılan bazı oranlara aşağıda değinilecektir.

1.3.1 Sharpe Oranı

Sharpe oranı, portföyün etkinliğini değerlendiren ilk kriterlerden birisi olarak değerlendirilebilir. W.F.Sharpe, bu oranı 1966 yılında yayımlanan makalesinde tanımlamış ve bu makalede (bu oran kendi ismiyle anılmaya başlamadan önce) “reward-to-variability ratio”, başka bir deyişle değişkenliğe karşı elde edilecek ödül oranı olarak isimlendirmiştir.⁵⁵ Sharpe oranı, bir varlığın ekstra getirisinin yatırımcının aldığı ekstra riski ne kadar karşıladığını karakterize etmekte kullanılmaktadır.

⁵⁴ Biglova et al., 2004, s.2.

⁵⁵ Sharpe, 1994.

r_t , portföyün t dönemindeki getirisi, r_{Mt} ise karşılaştırılacak portföyün veya market portföyünün aynı dönemdeki getirisi olarak tanımlandığında, fazla getiri (excess return),

$$ER_p = R_p - R_f$$

olarak formüle edilecektir. Bu durumda, σ portföyün standart sapmasını göstermek üzere, Sharpe oranı,

$$S_p = \frac{ER_p}{\sigma_p} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

formülüyle tanımlanmıştır.⁵⁶

Sharpe oranı, her ne kadar eliptik dağılımlarla ve özellikle normal dağılımlarla yüksek uyumluluk gösterse de, dağılımların basıklık ve çarpıklık gösterdiği durumlarda bu oranın kullanımının yanlış yatırım kararlarına yol açabileceği ve etkin sonuçlar elde edilmediği çeşitli araştırmacılar tarafından ileri sürülmektedir.⁵⁷

1.3.2 Treynor Oranı

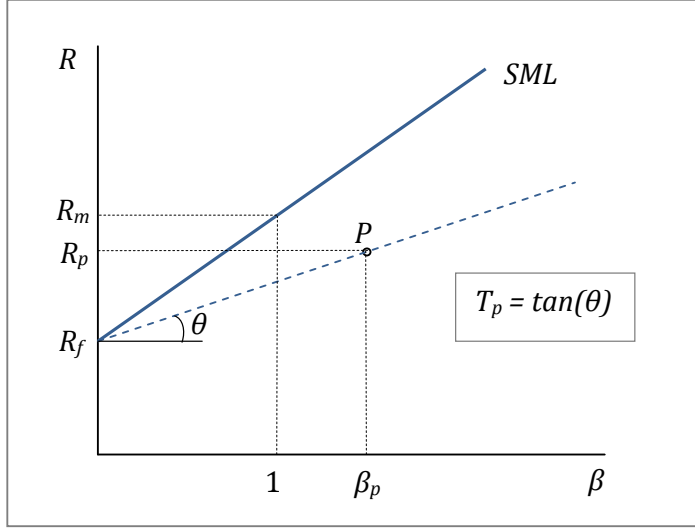
Literatürde kabul görmüş bir diğer ünlü kriter de Treynor oranıdır. İngilizcede “Reward-to-volatility ratio” olarak tanımlanan, volatiliteye karşı elde edilecek ödül oranı olarak da ifade edilebilecek olan Treynor oranı, fazla getirinin beta katsayısına bölümüyle ifade edilir ve

⁵⁶ Sharpe, a.g.e.

⁵⁷ Biglova et al., 2004, s. 2.

$$T_p = \frac{ER_p}{\beta_{p,m}} = \frac{R_p - R_f}{\beta_{p,m}}$$

formülüyle hesaplanabilir.⁵⁸ Tıpkı Sharpe oranının Sermaye Pazar Doğrusu konsepti altında portföyler arasında bir karşılaştırma sağladığı gibi, Treynor oranı da, grafiksel olarak Menkul Kıymet Piyasa Doğrusu (Security Market Line, SML) çerçevesi içerisinde şekilde görüldüğü üzere karşılaştırma sağlamaktadır. Bu noktada beta katsayısına değinmek faydalı olacaktır.



Şekil 6: Treynor Oranının Grafiksel İfadesi

Kaynak: Sharpe et al., 1999, s. 840, 843.

1.3.2.1 Beta Katsayısı

Pazara göre fiyatları oranında pazardaki tüm menkul kıymetlerden içeren portföye *pazar portföyü* adı verilir.⁵⁹ Bir varlığın beta katsayısı, varlığın getirisinin pazar

⁵⁸ Konuralp, 2005, s. 351; Sharpe, a.g.e., s. 843.

⁵⁹ Sharpe et al., 1999, s. 231.

portföyünün getirisiyle kovaryansının pazar portföyünün getirisinin varyansına bölünmesiyle bulunur.⁶⁰ Beta katsayısı şu formülle ifade edilebilir:

$$\beta_{p,m} = \frac{cov(R_p, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

Beta, varlığın getirisinin pazar portföyünün getirisinin değişkenliğine olan hassasiyetini açıklar. Pazar portföyü ile tam olarak uyum gösteren bir portföyün beta katsayısı 1'dir.

Beta katsayısının muhtemelen en bilinen kullanım alanı da, klasik CAPM çerçevesi içerisindeki yeridir. Beta katsayısını içeren portföy ölçütlerine yapılan belki de en güçlü eleştiri, CAPM modelinin yaratıcılarından biri olan Sharpe'tan gelmiştir. Sharpe'a göre, beta katsayısını içeren portföy değerlendirme ölçütlerinin geçerliliği, CAPM modelinin geçerliliğine sıkı sıkıya bağlıdır. CAPM'in geçerli olmadığı durumlarda beta temelli ölçütlerin de çok uygun olmadığı düşünülmektedir.⁶¹

Beta katsayısının kullanımıyla ilgili başka bir yorum da Konuralp'ten gelmiştir. Konuralp, portföyün beta katsayısının, varlıkların beta katsayısının ağırlıklı ortalaması olması özelliğinden dolayı çeşitlendirmeye beta değerinin küçülmesinin beklenmemesi gerektiğini ifade etmektedir. Bu yüzden dolayı Sharpe'ın performans ölçütünün Treynor ölçütüne göre üstünlük taşıdığını belirtmektedir.⁶²

⁶⁰ Fama ve French, 2004, s.28.

⁶¹ Sharpe et al., a.g.e., s. 855.

⁶² Konuralp, 2005, s. 352.

1.3.3 Jensen'in Alpha Katsayısı

Jensen, geleneksel CAPM modelinden türetilen SML denklemine bir α (*alpha*) katsayısı ekleyerek, portföyü portföy yöneticisinin başarısının veya başarısızlığının yansımaları ifade eden ve portföyün pazar portföyünden ne kadar iyi başarı elde ettiğini gösteren bu α katsayısıyla ölçmektedir.⁶³ Bu değer, bir portföy için menkul kıymet piyasa doğrusunun ne kadar altında veya üstünde getiri elde edildiğini verir. E_p varlığın beklenen getirisini ifade etmek üzere, SML denklemi,

$$E(R_p) = R_f + \beta_p(R_m - R_f)$$

olarak yazılırsa, katsayının bulunması için pazar modeline göre oluşturulacak olan

$$R_p - R_f = \alpha_p + \beta_p(R_m - R_f) + \varepsilon_p$$

fonksiyonunun ex-post (geçmişe dönük, gerçekleşmiş) denkleminde hata katsayısı ihmal edilir ve

$$R_p - R_f = \alpha_p + \beta_p(R_m - R_f)$$

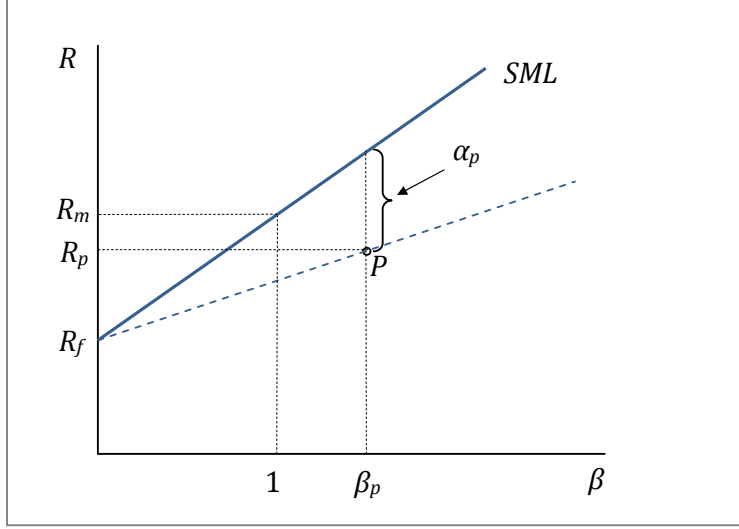
olarak gösterilir. Buna göre Jensen'in alpha katsayısı,

$$\alpha_p = R_p - (R_f + \beta_p(R_m - R_f))$$

olarak hesaplanacaktır.⁶⁴ Grafiksel olarak alpha katsayısı şekildeki gibi gösterilir.

⁶³ Jensen, 1968.

⁶⁴ Konuralp, a.g.e., s.354-356.



Şekil 7: Jensen'in Alpha Katsayısının Grafiksel İfadesi

Kaynak: Sharpe et al., 1999, s. 840.

1.3.4 Sortino Oranı

Sortino ve Price tarafından 1994 yılında tanıtılmış olan oran,

$$S_{\alpha,t,p} = \frac{R_p - t}{\sqrt[{\alpha}]{LPM_{\alpha,t}(R_p)}}$$

formülüyle tanımlanmaktadır.⁶⁵ Burada t istenen hedef getiriyi ifade etmektedir. Bu oranın kullanımında, genel olarak t yerine risksiz faiz oranını gösteren r_f değerinin tercih edildiği görülmektedir. Sortino oranı, bu bahsedilen kullanım şekliyle Sharpe oranı ile hemen hemen aynıdır. Tek farkı, paydadaki standart sapma değeri yerine, LPM ölçütünün karekökünün kullanılmasıdır. Buradaki formülde $\alpha=2$ ve $t=E(R_p)$

⁶⁵ Biglova, 2004, s. 18.

kullanıldığında bulunacak olan kareköklü ifade çeşitli kaynaklarda yarı-standart sapma (semi-standart deviation) olarak ifade edilmektedir.⁶⁶

Biglova (2004), değişik risk yaklaşımlarını karşılaştırdığı eserinde, çeşitli performans ölçütlerinin birbirleriyle benzerliklerine değinmekte ve bu ölçütlerin çoğunun ortak noktasının, portföy getirisinin risksiz varlığın getirisinden çıkartılmasıyla elde edilecek olan fazla getirinin, portföy için belirlenmiş risk katsayısına bölünmesiyle elde edildiğini belirtmektedir. Sortino oranının, Sharpe oranının kayıp riski kullanılan şekli olduğu buradan görülebilecektir. Bu oranın Sharpe oranından farkı, beklenen getirisi asimetric dağılım gösteren portföylerde ortaya çıkmaktadır. Chaudry ve Johnson (2008), Sortino oranını Sharpe oranıyla karşılaştırmaktadır. Yazarlar, özellikle dağılımlarda çarpıklığın (skewness) görülmekte olduğu portföylerde, Sortino oranının çok daha güçlü bir ölçüt olduğu ve üstün sonuçlar verdiği sonucuna vardıklarını ifade etmektedirler.⁶⁷ Pedersen ve Satchell (2002), üç klasik performans ölçütünün, Sharpe oranı, Treynor oranı ve Jensen'in alpha katsayısının CAPM varsayımları altında başarılı olduklarını belirtmekte, fakat klasik CAPM çerçevesinin geçerli olmadığı kayıp riski ölçütü konsepti altında bu ölçütlerin çok anlamlı ölçütler olmadığını ifade etmektedir. Anılan yazarlar, bundan ötürü Sortino oranının uygun ve teorik açıdan en tutarlı performans ölçütü olduğunu belirtmektedirler.⁶⁸ Bu açıdan değerlendirildiğinde, kayıp riski ölçütleriyle optimize

⁶⁶ Pedersen ve Satchell, 2002.

⁶⁷ Chaudry ve Johnson, 2008, s.500.

⁶⁸ Pedersen ve Satchell, a.g.e., s. 10.

edilen portföylerin klasik performans ölçütleriyle değerlendirilmesinin yetersiz olduğu görülmüş, çalışmanın ampirik bölümünde portföyleri karşılaştırmak için Sortino oranının kullanılması daha uygun bulunmuştur.

1.4 Risk-Getiri Ekseninde Etkin Sınırın Belirlenmesine Yönelik Olarak Geliştirilen Teknikler

1.4.1 Markowitz'in Kritik Doğrular Yöntemi

Markowitz portföy teorisini ortaya koyduktan sonra etkin sınırın elde edilmesi sorununu görmüş ve bir aşama daha ileri giderek, etkin sınırın oluşturulmasına yönelik kritik doğrular yöntemi olarak bilinen kuadratik programlama çözüm metodunu sunmuştur.⁶⁹ Bu yöntem, ortalama-varyans modelinde etkin sınırın oluşturulmasına yöneliktir ve konunun detayları bu tezin kapsamı dışındadır. Bununla beraber, bu yöntemin nasıl işlediğine değinmekte fayda vardır. Yatırımcı optimizasyona başlarken beklenen getiri vektörünü ve varyans kovaryans matrisini oluşturur. Algoritmaya en yüksek getirili portföyün (hissenin) seçimiyle başlanır. Daha sonra algoritma yardımıyla etkin sınırdaki bulunan ve etkin sınırı tam olarak tanımlayan bir dizi *köşe portföy* belirlenir. Köşe portföyün tanımına göre, iki ardışık köşe portföyün herhangi bir kombinasyonu ile oluşacak portföy her zaman etkin

⁶⁹ Markowitz, 1956.

sınırdaki ve bu iki portföyün arasında bulunmalıdır.⁷⁰ Bu şekilde bulunacak köşe portföylerin belirlenmesinden sonra, ardışık köşe portföylerin kombinasyonu ile oluşacak parabol parçalarından oluşan küme, bize etkin sınırı verecektir.⁷¹

Markowitz'in quadratik programlama modeli hesaplama olarak çok kolay ve hızlı sonuçlar vermektedir. Bununla beraber modelin kullanılabilmesi için belirli varsayımların kabul edilmesi gerekmektedir. Öncelikle, riskin yarı-varyans veya LPM gibi başka bir risk ölçütü olarak tanımlanması durumunda, bu risk modelleri için kovaryans matrisi gibi bir matris kullanılamayacağından, Markowitz'in klasik algoritması çözüm sunamamaktadır.⁷² Bu durum klasik algoritmanın modifiye edilmesini gerektirmiştir. Nitekim Markowitz et al. (1993) daha sonra algoritmanın yarı-varyans ile kullanımına ilişkin yeni bir yöntem ortaya koymuştur.⁷³

Klasik yöntemin tek sorunu hesaplama güçlükleri değildir. Modelde belirli varsayımlar bulunmaktadır. Açığa satış olanağının bulunmadığı varsayımı buna bir örnektir. Bunun dışında, kimi durumlarda portföy yöneticilerinin veya regülasyonların belirleyebileceği çeşitli kısıtlamalar bulunabilir. Portföyü oluşturan varlıklardan belirli tamsayı değerli lotlarda satın alınabilmesi, portföyde minimum

⁷⁰ Bununla beraber, ardışık olmayan iki portföyün kombinasyonu ile oluşacak portföyler etkin sınırdaki bulunmak zorunda değildir.

⁷¹ Sharpe et al., a.g.e., s. 193-197.

⁷² Grootveld ve Hallerbach, a.g.e., s. 308.

⁷³ Markowitz et al. 1993.

veya maksimum varlık adedi, belirli bir varlıktan minimum satın alma miktarı, belirli sektörlerden alım yapılma zorunluluğu gibi kısıtlar pratikte söz konusu olabilmektedir. Bu durum kimi zaman klasik portföy optimizasyon modelinin modifiye edilmesini gerektirmekte, kimi zaman ise başka çözüm metotlarının kullanılmasını zorunlu kılmaktadır.⁷⁴

1.4.2 Sayısal Hesaplama Algoritmaları

Portföy optimizasyon probleminin çözümünde sayısal hesaplama yöntemleri de kullanılmaktadır. Bu yöntemler *sezgisel (heuristic)* yöntemler olarak da adlandırılan metotlardır. İngilizce “Heuristics” kelimesi günümüzde bir keşfe rehberlik etme, bir problemin çözümünü iyileştirme anlamlarında kullanılmaktadır. Bu yöntemler sınıfı genel olarak çözüm arama ve deneme yanılma yöntemlerini ihtiva eder. Sezgisel yöntemler kullanılarak, hızlı bir şekilde en iyi çözüme olabildiğince yakın sonuçlar elde edilmesi amaçlanmaktadır.⁷⁵

Bu yöntemler, genel olarak sayısal hesaplama veya arama yöntemlerine yardımcı olmak üzere algoritmaya eklenmiş yol gösterici ipuçları içerir. Bu ipuçlarının ortaya konulmasında başka problemlerin çözüm yöntemlerinden etkilenilmiş veya doğadan, biyolojiden ilham almış olabilir.

⁷⁴ Lin ve Liu, 2008, s. 395.

⁷⁵ Groner et al., s. 1.

Monte-Carlo Yöntemi sayısal yöntemlere bir örnektir. Bu yöntemde, problemin değer kümesi belirli bir olasılık dağılımına sahip (örn. normal dağılım) rastlantısal sayılar kullanılarak test edilir. Bu yöntemle, bütün olasılıkların tek tek denenmesi değil ama olasılıklar içerisinde seçilen örneklerin belirli yaklaşıklıkta bir sonuç ortaya koyması amaçlanmaktadır. Finans alanında da bu yöntem riskin hesaplanması, opsiyonların değerinin bulunması gibi çok çeşitli uygulama alanlarında kullanılmaktadır. Markowitz, 1959 tarihli eserinde ortalama yarı-varyans portföy optimizasyonu için Monte-Carlo yöntemini önermektedir.⁷⁶ Markowitz, hesaplama kolaylığı açısından bu yöntemin kuadratik optimizasyon yöntemi gibi kullanılabileceğini, bu yöntemle yaklaşık fakat en iyiye oldukça yakın sonuçların elde edilmesinin mümkün olduğunu, tam çözümleri bulmanın da ekonomik olmadığını ve gerekli de olmadığını ifade etmektedir.⁷⁷

Yapay Sinir Ağları (YSA, Artificial Neural Networks, ANN) da portföy optimizasyonu için kullanılan sezgisel tekniklerden birisidir.⁷⁸ Yapay sinir ağları, sinir hücrelerinin çalışma yapısından ilham alınarak geliştirilmiş hesaplama yöntemlerinin genel adıdır. Yapay sinir ağlarında sayısal girdi parametreleriyle beslenen nöronların belirli bir matematiksel fonksiyona göre tetiklenmesi ve bir çıktı üretmesi söz konusudur. Bu şekilde oluşturulan nöronların birbirleri ardına katmanlı bir yapıda sıralanarak bir ağ oluşturulması sonucunda birtakım nöronların çıktıları diğerlerinin girdileri olacak, en

⁷⁶ Markowitz, 1959, s. 200-201.

⁷⁷ Markowitz, 1959, s. 280.

⁷⁸ Örneğin, bkz. Fernandez ve Gomez, 2007.

son katmandaki nöronların anlamlı çıktılar vermesi beklenmektedir. Sistemdeki nöronların en önemli özelliği, adapte olabilir ve öğrenebilir yapıda olmalarıdır. Algoritmanın çeşitli durumlardaki başarısı, bahsedilen ağı yapısının formunda ve öğrenme algoritmasının etkinliğinde bulunmaktadır.

Literatürde başka birçok sezgisel algoritma bulunmaktadır. *Tepe tırmanışı (Hill Climbing)* metodunda, her iterasyonda başlangıç noktasından daha verimli yöne doğru ilerlenir. Bu şekilde lokal optimum bulunur. *Simule Edilmiş Tavlama (Simulated Annealing)* yöntemi fiziksel bir süreçten, metallerin tavlanma sürecinden ilham alınarak geliştirilmiştir. Tepe tırmanışı algoritmasına benzeyen bu yöntemde, aramanın lokal optimumda sonlanmaması için, sisteme “ısı” verilir. Bu şekilde enerji kazandırılan partiküllerin lokal optimumda durmaması sağlanır. Sistem daha sonra yavaş yavaş soğutulur ve global optimumun elde edilmesi beklenir.⁷⁹ “*Greedy Algorithm*” yönteminde, parametreler en büyük faydayı veren parametreden itibaren teker teker optimize edilerek belirlenir.⁸⁰ *Karınca Kolonisi Optimizasyonu, (Ant-Colony Optimisation, ACO)* yine kaynağını doğadan alan başka bir algoritmadır. Genellikle yol bulma problemleri için kullanılan bu yöntemde, yuvalarından besin kaynaklarına ulaşmaya çalışan karıncalardan ilham alınmaktadır.⁸¹ Portföy optimizasyonu için kullanılan bir başka sezgisel yöntem de, tezin konusunu oluşturan *Genetik Algoritmalar*dır.

⁷⁹ Drea et al., 2006, s. 6-7.

⁸⁰ Coutino-Gomez et al., 2003, s. 921.

⁸¹ Drea et al., a.g.e., s. 8.

İkinci Bölüm: Genetik Algoritmalar İle İlgili Literatür Araştırması

2 Genetik Algoritmalar

Genetik algoritmalar (GA), deterministik olmayan veya deterministik olarak çözümünde güçlükler bulunan, bununla birlikte sayısal çözümlerin elde edilmesinin veya çözüme yaklaşık olan sonuçlara sayısal yöntemlerle ulaşılmasının çok daha kolay olduğu problemlerin çözümünde kullanılan çözüm yöntemlerinin bir sınıfıdır. Genetik algoritmalar, genel olarak arama ve optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılan yöntemler arasında yer almaktadır. Örneğin, genetik algoritmalar, bir köprünün tasarımında veya kumaştan parça kesiminin optimizasyonunda kullanılabilmektedir.

Genetik algoritmalar biyolojik organizmaların evrimleşme süreçlerini temel almaktadır. Genetik algoritmalar, ilk defa Charles Darwin'in "Türlerin Kökeni" adlı eserinde ortaya konulmuş olan evrimsel süreçlerin taklit edilerek gerçek dünyaya ilişkin çeşitli problemlerin çözülmesini sağlamaktadırlar. Evrim, organizmaların doğaya, dış dünyaya adaptasyonu, uyum sağlaması sürecidir. Dünyada yaşayan her organizma, karakteristiklerini ortaya koyan kromozomlara sahiptir. Bu kromozomlarda bulunan genler, organizmanın fenotipine değişik bir özellik katmaktadır. Çeşitlilik gösteren bu aleller sayesinde, popülasyonu oluşturan bireylerin bazılarında kimi özellikler öne çıkmakta, belirginlik göstermektedir. Doğal seleksiyon sonucunda, içinde bulunduğu ortama daha çok uyum gösteren bireylerin ayakta kalma, yaşama şansı daha yüksek olmaktadır. Popülasyonun kalan bu

bireylerden çoğalması, nesiller geçtikçe popülasyonun içinde bulunduğu çevreye daha çok uyum sağlayan bireylere sahip olmasını sağlamaktadır. Bu süreç dış dünyaya ilişkin problemlerle farklı şekillerde başa çıkabilen bireylerin özelleşmesini mümkün kılmaktadır. Bu bakış açısıyla doğa büyük bir problem çözücüdür.

Genetik algoritmalar da problemlerin çözümünde benzeri yolları kullanırlar. Genetik algoritmaların temel prensipleri ilk olarak Holland (1975) tarafından ortaya konulmuş ve birçok kaynak tarafından detaylı bir şekilde tanımlanmıştır. GA'lar doğal evrim süreçlerinin temel yönlerini simüle etmektedirler. Algoritmadaki bireyler veya kromozomlar, doğal ortamdaki canlıları temsil eder. Kromozomlar bireylerin genotipi, kromozomların temsil ettiği çözüm de bireylerin fenotipidir. Çözülecek problem, içinde bulunulan ve uyum sağlanması gereken çevredir. Dış dünyaya adaptasyon ve doğal seleksiyona, uyum fonksiyonu ve seçim yöntemleriyle benzetim yapılır. Bireylerin çoğalması ve neslini devam ettirmesi için, kromozomlarda bulunan çapraz eşleme ve mutasyon süreçleri taklit edilir.

Bu sınıfa dahil algoritmaların genel yapısı, çözüme aday olacak bir popülasyon ile başlayıp, bu popülasyon üzerinde mutasyon ve çiftleştirme uyguladıktan sonra elde edilen yeni çözüm kümesinin bir uygunluk fonksiyonuyla değerlendirilmesi ve seçiminden oluşur. Aşağıda genetik algoritmaların genel akış kalıbı ifade edilmektedir:⁸²

⁸² Rudolph, 1994, s. 2.

1. İlk popülasyonu belirle.
2. Her bireyin uyumunu hesapla.
3. (Her yeni nesil için) Çiftleştirilmek üzere bireyleri belirle.
4. Seçilen bireyleri çiftleştir, yeni bireyleri oluştur.
5. Yeni nesildeki bireylerin uyumunu hesapla
6. Durmak için belirlenen kriter oluşuncaya kadar 3. adıma git.
7. Algoritma sonu

Yukarıda belirtilen sürecin aşamalarında, uygulamada kullanılan detaylardaki farklılıklar, algoritmaların farklılıklarını ve başarımını belirlemektedir. GA'lar ile ilgili çoğu araştırma, GA'ların iyi performans göstermesi için ampirik kuralların bulunması üzerine yoğunlaşmaktadır. GA'ların neden ve nasıl çalıştıklarına ilişkin genel bir teori mevcut değildir. Bununla beraber, GA'ların başarısını kısmi olarak açıklayan birçok araştırma ortaya konulmuştur.⁸³

2.1 Genetik Algoritmaların Temel Prensipleri

Genetik algoritma çalıştırılabilir olmadan önce, çözülecek olan problem uygun bir şekilde kodlanmalı veya ifade edilmelidir. Kodlama kısmıyla (problemin sayısal olarak ifade edilmesiyle) beraber, uyum fonksiyonu bir genetik algoritmanın en kritik noktasıdır. Kodlama ve uyum fonksiyonunun dışındaki diğer kısımların optimizasyonu için çok çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Ancak, bu yönlerin

⁸³ Beasley et al., 1993a.

iyileştirilmesiyle çok çeşitli problemlerin çözümüne sadece küçük iyileştirmeler sağlanabileceği görülmüştür. Grefenstette, GA'lar için ideal parametrelerin bulunabildiğini ifade etmiş (örn. mutasyon olasılığı, popülasyon büyüklüğü vb.) fakat GA'ların temel mekanizmasının oldukça tutarlı olduğu ve makul toleranslarla parametre seçiminin çok kritik olmadığı sonucuna varmıştır.⁸⁴ Bununla birlikte kodlama ve uyum fonksiyonu GA'nın performansındaki en önemli belirleyicilerdir.

2.1.1 Kodlama: Problemin ifade edilmesi

Genetik algoritmaların çalıştırılabilmesi için, herşeyden önce çözüme konu olan problemin uygun bir şekilde ifade edilmesi veya kodlanması gereklidir. G.A.larda problemin potansiyel çözümünün sayısal bir dizi parametre ile ifade edilebildiği varsayılmaktadır. Bu parametrelerin her birine gen adı verilir. Bu parametreler birleştirilerek kromozom da denilen bir parametre kümesi elde edilir. Bu kromozomların her biri bir birey olarak ifade edilir. Bu bireylerin her biri, bir nesil için popülasyonun üyeleridir.

Kromozomlar, genetik terimlerle genotip olarak adlandırılır. Genotip, bir organizmayı oluşturabilmek için temel bilgileri ihtiva etmektedir. Genotipte yer alan bilgiyle ortaya çıkartılabilecek organizmaya da fenotip denir. Aynı terim genetik algoritmalar için de kullanılmaktadır. Örneğin, bir köprü tasarımı probleminin genetik algoritmalarla çözümünde, köprünün sayısal olarak ifade edilecek

⁸⁴ Beasley et al., 1993a.

parametreleri (boyutlar, yapısal özellikler, vb.) genotip, bu parametrelerle inşa edilecek köprünün tasarımı da fenotiptir. Bir bireyin doğal ortama uyumu, fenotipin performansına bağlıdır. Bu da genetik algoritmada kullanılacak uyum fonksiyonu yardımıyla genotipten elde edilebilir.

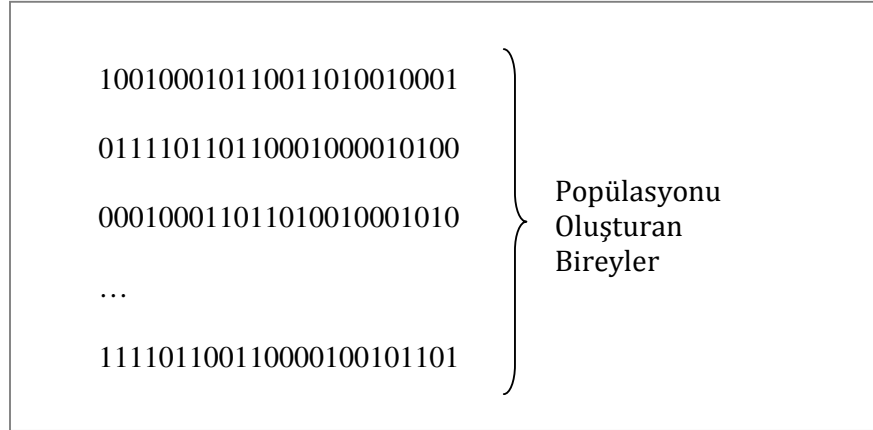
Genler kromozom içinde ikilik sayı sisteminde veya reel sayılarla ifade edilebilir. Holland, ilk defa kromozomları ikilik sistemde ifade etmiştir. 1 veya 0 değerini alabilen basamak değerine *bit* adı verilmektedir.⁸⁵ Bu yöntemde, her bir gen bir bit ile, 0 veya 1 olarak ifade edilerek kodlanır.

Kromozomun içerisinde yer alan kod dizisinin belirli bir bölümü, optimize edilecek bir parametreyi ifade edebilir veya kromozomun tümü bir sayıyı ifade edecek şekilde kodlama yapılabilir. Burada önemli olan ve araştırmacı tarafından belirlenmesi gereken neyin nasıl kodlanacağıdır.

Kodlamanın ikilik sistemde yapılması şart değildir. Reel sayılar kullanılarak oluşturulacak n elemanlı bir $v = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörünün bir kromozomu ifade ettiği genetik algoritmalar *reel sayılı genetik algoritmalar* adı verilir. Wright (1991) genetik algoritmaların reel sayılar kullanarak da oluşturulabileceğini gösteren makalesinde, reel sayılardaki çiftleşme ve mutasyon operatörlerinin Holland'ın ortaya koyduğu ikilik sayı sistemi üzerinde çalışan genetik algoritmalarla ilgili teoremlerin geçerliliğini ihlal etmediğini göstermektedir. Wright'a göre reel sayılarla

⁸⁵ <http://en.wikipedia.org/wiki/Bit> (Erişim tarihi 20.04.2009)

oluşturulacak parametrelerin kullanıldığı genetik algoritmalar daha verimli, daha çözümlülük ve çeşitli genetik operatörler kullanmak için daha esnektir.⁸⁶



Şekil 8: İkilik Sayı Sistemiyle Kodlanmış Kromozomlar

Kaynak: Holland, 1975.

Bu yöntemde *alel* kavramı karşımıza çıkmaktadır. Alel, genetik bakış açısı altında kromozomun içerisinde belirli bir işlevi bulunan ve çeşitli versiyonları olabilen kod bölümüdür. (Örneğin, bir çiçek için çiçeğin yaprağının rengini belirleyecek belirli bir gen bölümü) Genel olarak optimizasyon problemlerinde kullanılan genetik algoritmaların bu çeşidinde, her bir alel bir reel sayıyla ifade edilir ve optimize edilecek bir parametreyi gösterir. Optimize edilecek fonksiyon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olarak ifade edilirse, $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü bir kromozom, x_i ($1 \leq i \leq n$ için) değerleri de her bir alel olarak belirtilebilir. Burada optimize edilecek fonksiyon f ile uyum fonksiyonu birbirine yakın bağlantılıdır. Çoğu zaman uyum fonksiyonu olarak

⁸⁶ Wright, 1991, s. 11.

optimize edilecek fonksiyonun kendisi kullanılmaktadır. Bu şekilde reel parametreler olduğu gibi fonksiyona konabilecektir.

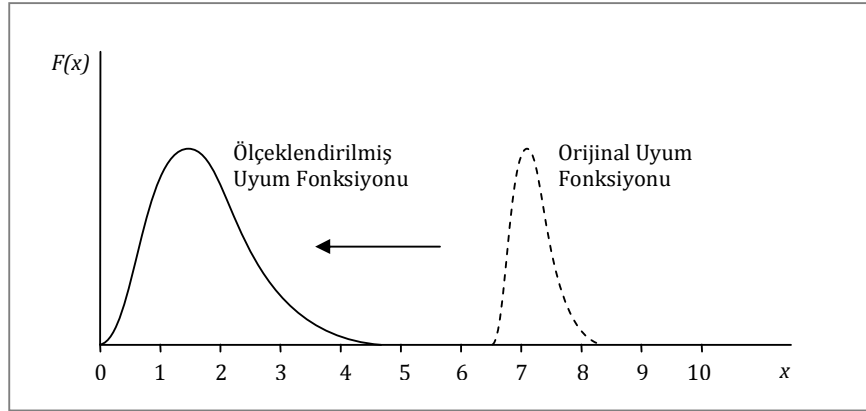
2.1.2 Uyum fonksiyonu

Genetik algoritmalarda her bir tekil problemin çözümü için, o probleme özgü bir uyum fonksiyonu geliştirilmelidir. Uyum fonksiyonu, verilen bir kromozom için tek bir sayısal değer verir. Bu değer, bireyin faydasıyla, yeteneğiyle veya başarımıyla doğru orantılıdır. Çoğu problem için, bu değer sadece optimize edilecek fonksiyonun değeri olacaktır. Ancak durum her zaman böyle olmayabilir. Örneğin bir köprü tasarımının optimizasyonunda, güç-ağırlık oranı, maliyet, üretim zamanı ve benzeri birçok performans kriterinin kombinasyonu bir arada değerlendirilmelidir. Uyum fonksiyonunun doğru ifade edilmesindeki güçlük de buradan kaynaklanmaktadır.

Uyum fonksiyonu her ne şekilde ifade edilirse edilsin, bazı temel gereksinimleri sağlamalıdır. İdeal olarak uyum fonksiyonunun sürekli ve düzenli olması, birbirine yakın parametrelerin birbirine yakın uyum değerleri vermesi beklenir.⁸⁷ Bununla birlikte, uyum fonksiyonu uyumlu ile uyumsuzu birbirinden ayırabilecek, fakat erken yakınsamaya mahal vermeyecek şekilde oluşturulmalıdır. Genetik algoritmalarda görel olarak daha fazla uyum gösteren bazı bireylerin optimal olmayan bir noktaya yaklaşıp, popülasyonu domine etmesi, *erken yakınsama* veya *prematür yakınsama*

⁸⁷ Beasley et al., 1993a, s. 9.

olarak adlandırılır.⁸⁸ Bu durum ortaya çıktığında, popülasyon bir kere yakınsadıktan sonra genetik algoritmanın daha iyi çözümler arama yeteneği azalır. Çapraz eşleme hemen hemen aynı kromozomlar üretir. Bu noktada sadece mutasyon yeni alanların araştırılmasını sağlayabilecektir ve bu basit olarak yavaş bir rastgele arama sağlayacaktır.



Şekil 9: Uyum Fonksiyonunun Regülasyonu

Kaynak: Beasley et al., 1993a, s. 13.

Bir başka sorun da yavaş veya *geç yakınsama*dır. Nesiller sonrasında popülasyon geniş olarak yakınsamış, fakat halen global maksimuma erişememiştir. Ortalama uyum oldukça yüksektir ve en iyi ve ortalama bireyler arasındaki fark oldukça azdır. Bu noktada uyum fonksiyonu GA'yı daha ileri itebilecek kadar yüksek çözünürlüklü değildir. Bu probleme de önceki problemin çözümüne olan yaklaşım gibi bir yaklaşımla çözüm bulunabilir. Bu da uyum fonksiyonunun efektif alanının genişletilmesiyle yapılır. Bunların arasında, en uyumludan itibaren bireyleri sıralama

⁸⁸ Beasley et al., 1993a, s. 10.

(fitness ranking), uyum ölçeklendirme (fitness scaling), uyum pencereleme (fitness windowing) gibi yöntemler bulunmaktadır. Uyum fonksiyonunun ölçeklendirilmesi için çeşitli yöntemler bulunmakla beraber,⁸⁹ bunların temel amacı, uyum fonksiyonunu daha düzenli bir yapıya kavuşturmadır.

2.1.3 İlk Popülasyonun Belirlenmesi

Başlangıç popülasyonu problemin kısıtlarını ihlal etmeyecek bir biçimde rastgele olarak üretilebilir veya sezgisel bir şekilde belirlenebilir.⁹⁰ Her ne kadar sezgisel belirlenen ilk bireyler, genetik algoritmaların biraz daha hızlı yakınsamasını sağlayabilmişse de, çok çeşitli problemlerde erken yakınsamaya yol açabileceği görülmüştür.⁹¹ Bu yüzden, yeteri kadar çeşitliliği sağlayabilmek için, seçilecek olan bireylerin değer kümesinde geniş bir alanda dağılım göstermesinin popülasyonun seçiminde önemli bir kriter olduğu düşünülmektedir.

2.1.4 Popülasyonun Büyüklüğü

Popülasyonun çözüm aranan uzayı yeteri kadar kapsayabilmesi için yeteri kadar büyük olması aranmaktadır.⁹² Her GA için popülasyon büyüklüğü, o uygulamaya

⁸⁹ Bkz. Beasley et al., a.g.e., s. 12.

⁹⁰ Grefenstette, 1986, s. 122.

⁹¹ Gen et al. 2008, s. 10, 68.

⁹² Goldberg et al., 1991.

özgü olmakla beraber, genellikle yüzler mertebesinde. Popülasyon, belirlenecek seçim yöntemiyle birlikte, nesiller boyunca artabilir veya sabit tutulabilir. Grefentette (1986), optimum popülasyon büyüklüğünü bulmak için GA'ları kullanmış, ve kendi uygulaması için optimum popülasyon büyüklüğünün yaklaşık 20-30 olduğunu ifade etmiştir. Wright (1991), reel parametrelili genetik algoritmaları tanıttığı eserinde tekil çözüm için popülasyon büyüklüğünü 20 olarak belirlemiştir.

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, elde edilmek istenen sonuç sayısına bağlı olarak popülasyon büyüklüğü artacaktır. Genel olarak q adet çözümün istendiği çok amaçlı optimizasyon probleminde, her bir çözüm için alt popülasyon büyüklüğü m olarak belirlenirse, popülasyon büyüklüğü $N = q.m$ olarak saptanabilecektir.⁹³ Yun (2001), etkin sınırları bulmak için kullandığı GA uygulamasında 80 adet birey kullanmaktadır. Srinivas (1994) çok amaçlı problemlerin GA'larla çözümü için önerdiği NSGA algoritmasını 100 bireyle çalıştırmaktadır.

2.1.5 Çiftleştirilecek Bireylerin Seçimi

GA'ların çiftleşme veya çoğalma aşamasında, popülasyon içerisinde bireyler seçilerek çiftleştirilir ve yeni jenerasyonu oluşturacak soylar elde edilir. Bu noktada çiftleştirilen bireyler yeni bireylerle değiştirilebilir veya yeni bireylerin popülasyona eklenmesi sağlanabilir. Çiftleştirilecek bireylerin daha uyumlu olanların daha çok tercih edileceği bir şekilde rastgele seçilmesine imkan tanınacak bir şekilde

⁹³ Fonseca ve Fleming, 1993, s. 417.

belirlenir. Bu şekilde, daha yüksek uyum gösteren bireylerin birden fazla defa seçilmesi, uyumsuz olanlara nazaran daha olasıdır.

Çiftleşecek bireylerin seçimi için literatürde çeşitli teknikler geliştirilmiştir. *Tournament Selection* (turnuva seçimi) yönteminde çiftleşme havuzu dolana kadar rastgele iki birey seçilir ve bunlar arasında (uyumlarıyla orantılı bir olasılıkla) kazanan birey gen havuzuna atılır.⁹⁴ *Fitness ranking* (uyum sıralama) yönteminde bireyler uyumlarına göre sıralanır ve belirli sayıda en uyumlu bireylerin çiftleşmesi sağlanır. *Steady-state replacement* (olduğu yerde yerleştirme) tekniğinde, çiftleşecek şanslı bireyler değil, ölecek şanssız bireyler seçilir ve yeni jenerasyon soylar, şanssız bireylerin yerine konur.⁹⁵ Genetik algoritmalarda, her nesildeki yeni bireylerin popülasyona oranı *nesil farkı* (generation gap) terimiyle ifade edilmektedir. Olduğu yerde yerleştirme tekniğinde, genellikle nesil farkı düşüktür.

Bahsedilmesi gereken diğer bir durum, bazı bireyler için çiftleşme veya mutasyonun olmaması durumudur. Popülasyon içindeki en iyi bireyin (bireylerin) hiçbir değişikliğe uğramadan bir sonraki nesle aktarılmasına *elitist strateji* adı verilmektedir.⁹⁶ Eğer algoritma, bir sonraki nesle k adet bireyi olduğu gibi aktarıyorsa, bu genetik algoritma *k-elitist* olarak adlandırılmaktadır. Elitist seleksiyon ile en iyi bireylerin çiftleşme için seçilmemesi ihtimali ve genetik operatörler ile

⁹⁴ Beasley et al., 1993a, s. 12.

⁹⁵ Beasley et al., a.g.e.

⁹⁶ Rudolph, 1994.

bozunmaları önlenir. Elitist seçim ilk defa Kenneth De Jong (1975) tarafından ortaya konulmuştur. Birçok araştırmacı elitist seçim metodunun genetik algoritmaların performansını oldukça önemli derecede iyileştirdiğini ifade etmektedir.⁹⁷

2.1.6 Genetik Operatörler

Çiftleştirilecek bireyler seçildikten sonra kromozomları eşlenir. Bu eşleme yapılırken çapraz eşleme (crossover) ve mutasyon (mutation) mekanizmaları kullanılır. Daha detaylı olarak anlatılacak olan bu işlemlere genel olarak *genetik operatör* adı verilir. Çapraz eşleme operatörü, iki kromozom kullanarak yeni kromozom (veya kromozomlar) üretir. Mutasyon operatörü ise, bir kromozom verildiğinde, bu kromozomda bir değişikliğe yol açar. Çiftleşme ve mutasyonla ilgili genel görüş, çiftleşmenin araştırma evreninde hızlı bir aramayı sağladığı, mutasyonun da arama evreninde ufak değişimler sağladığı yönündedir.

Burada çiftleşme ve mutasyon operatörlerinin genetik algoritmalarda en çok kullanılan şekillerinden bahsedilmiştir. Bu tanımlamalara benzer operatörler rahatlıkla türetilabilir veya oluşturulabilir. Reel sayılarla gerçekleştirilecek genetik algoritmalarda, bir geni rastgele değiştirme, bir gene veya alele belirli bir sayı ekleme veya belirli bir sayıyla çarpma örnek verilebilecek mutasyon operatörleri arasındadır. Yine iki kromozomun aritmetik veya geometrik ortalamasını alma, iki kromozom arasındaki farkı bir diğerine ekleme vb. operatörler de çapraz eşleme

⁹⁷ Mitchell, 1999, s. 126.

operatörlerine verilebilecek örneklerdir.⁹⁸ Burada aktarılan genetik operatörler dışında literatürde çeşitli operatörler bulunabilir. Tersine çevirme, gen çiftleme vb. operatörler verilebilecek örnekler arasındadır.⁹⁹

2.1.6.1 Çapraz Eşleme

Çapraz eşlemede iki bireyin kromozomları, rastgele seçilen bir pozisyonundan bölünür. Bu bölünme sonucu iki baş ve iki kuyruk kromozom parçası elde edilir. Kuyruk kromozomlar birbirleriyle değiştirilerek tam uzunlukta yeni kromozomlar oluşturulacak şekilde birleştirilir. Elde edilen yeni soylar, ebeveynlerinin genetik özelliklerini taşır. Bu şekildeki çapraz eşlemeye tek noktadan çapraz eşleme (single point crossover) adı verilir. Çaprazlama işlemi birden fazla nokta için de yapılabilir.

Reel parametrelili kromozomlarda çapraz eşlemede benzeri bir yaklaşım kullanılmakla beraber, bu yöntemde daha değişik seçeneklerin kullanılabilmesi söz konusudur. Literatürde reel sayılı genetik algoritmalar için birçok çapraz eşleme operatörü bulabilmek mümkündür.¹⁰⁰ Bunlardan birisi, ikilik sistemin benzeri bir şekilde, eşleme noktası belirlendikten sonra kromozomların yer değiştirmesinden ibarettir. Bu yöntem, *basit çapraz eşleme* adı verilmektedir.¹⁰¹ Lineer eşleme olarak adlandırılan

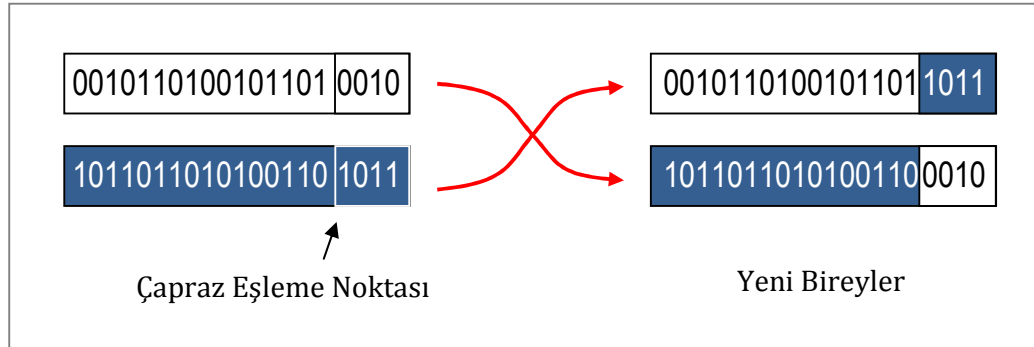
⁹⁸ Beasley et al., 1993b.

⁹⁹ Mitchell, 1999, s. 130.

¹⁰⁰ Herrera et al., 1998, s. 288-292.

¹⁰¹ Wright, 1991.

bir başka eşleme yöntemi ise, v_1 ve v_2 kromozomları için belirlenecek olan $(1/2v_1+1/2v_2)$, $(3/2v_1 - 1/2v_2)$ ve $(-1/2 v_1+3/2v_2)$ olmak üzere üç yeni kromozomun elde edilmesidir.¹⁰² Bunlar içerisinde en iyi başarıyı gösteren ikisi popülasyona eklenir. Önerilen başka bir çapraz eşleme yöntemi aritmetik eşlemedir. Bu yöntemde v_1 ve v_2 kromozomları seçilecek rastgele bir λ katsayısına göre $(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)$ ve $((1-\lambda)v_1+\lambda v_2)$ şeklinde hesaplanacak iki yeni kromozom elde edilir.¹⁰³ Yine olumlu sonuçlar veren bir diğer eşleme yöntemi *BLX- α* yöntemidir. Algoritma boyunca belirlenmiş olan bir α katsayısına göre uygulanacak yöntemde, v_2 , v_1 'den büyük olmak üzere $[v_1 - I\alpha, v_2 + I\alpha]$ aralığında rastgele bir noktada bir kromozom belirlenecektir. Buradaki I değeri $I = v_2-v_1$ olarak tespit edilmektedir.¹⁰⁴



Şekil 10: Genetik Algoritmalarda Çapraz Eşleme

Çapraz eşleme çiftleştirilecek bütün bireylere uygulanmayabilir. Beasley et al. (1993a), bir nesildeki çiftleştirme olasılığı 0,6 ile 1,0 arasında olacak biçimde

¹⁰² Wright, a.g.e.

¹⁰³ Michalewicz, 1996.

¹⁰⁴ Herrera et al., a.g.e., s. 288.

rastgele bir seçim yapılmasını önermektedir. Eğer bir bireye çapraz eşleme uygulanmazsa, elde edilecek yeni soylar ebeveynlerin birer kopyasıdır. Bu uygulama bireylere kendi genlerini çiftleşme ile değiştirmeden bir sonraki nesle aktarma şansı tanır.

2.1.6.2 Mutasyon

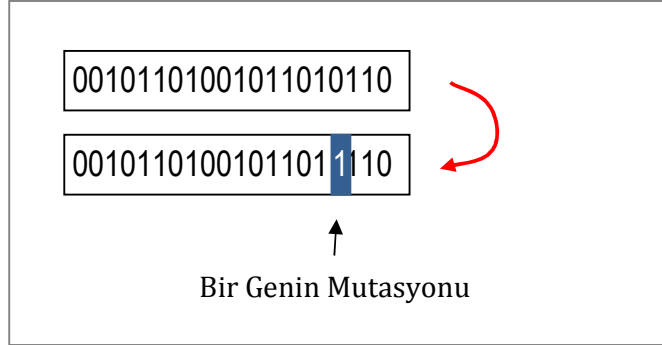
Mutasyon, çiftleşme sonrası elde edilecek yeni bireylere uygulanır. Mutasyon ile rastgele seçilecek bazı genler yine rastgele seçilecek bir olasılıkla değiştirilir. Reel sayılar kullanan GA'larda mutasyon yöntemleri de, çapraz eşleme yöntemleri gibi çeşitlidir. Düzensiz mutasyon, (non-uniform mutation), herhangi bir gene (genellikle normal dağılıma uyan) rastgele bir sayının eklenmesiyle gerçekleştirilir.¹⁰⁵ Rastgele mutasyonda (random mutation), kromozomda mutasyona uğrayacak gen geçerli parametre aralığından seçilecek herhangi bir değerle değiştirilir.¹⁰⁶

Optimal mutasyon oranı konusunda çeşitli görüşler mevcuttur. Back (1993), ikilik sistemde ifade edilen bir kromozomun uzunluğu l olarak ifade edilirse optimal mutasyon oranının $1/l$ olduğunu, bununla beraber mutasyon oranının değiştirilmesinin verim sağlayacağını düşündüğünü belirtmektedir. Grenesfette, düşük çapraz eşleme oranıyla kullanılacak yüksek mutasyon oranının ve yüksek çapraz eşleme oranıyla kullanılacak düşük mutasyon oranının verimli olduğunu ifade

¹⁰⁵ Temby et al., 2005, s. 1111. Herrera et al., a.g.e., s. 293.

¹⁰⁶ Herrera et al., a.g.e., s. 293.

etmektedir.¹⁰⁷ Wright (1991), reel sayılarla ifade edilen kromozomlarda optimal mutasyon oranının standart genetik algoritmalarındakinden çok daha yüksek olduğunu ileri sürmekte, çeşitli problemler için çeşitli mutasyon oranlarının daha iyi sonuçlar verdiğini ortaya koymaktadır.



Şekil 11: Genetik Algoritmalarla Mutasyon

2.1.7 Genetik Algoritmanın Yakınsaması

Optimizasyon teorisinde, global optimumun limit olduğu durumda algoritmanın bir bu limit yakınında peşi sıra bir dizi değer üretmesi durumunda algoritmanın global optimuma yakınsadığı söylenebilir.¹⁰⁸ Eğer genetik algoritma düzgün bir şekilde oluşturulmuşsa, popülasyon birbirini izleyen nesiller boyunca evrimleşecektir. Böylece popülasyon içindeki en iyilerin uyumu ve popülasyonun genel olarak ortalama uyumu global optimuma doğru iyileşecektir.

¹⁰⁷ Grefenstette, 1986, s. 127.

¹⁰⁸ Rudolph, 1994.

Yakınsama, düzenliliğin artması yönündeki gelişmedir. Beasley et al. (1993a)'ne göre bir gen, popülasyonun büyük çoğunluğuyla aynı değere sahipse yakınsamış demektir.¹⁰⁹ Çeşitli araştırmacılar, Markov zincirleriyle genetik algoritmalarda yakınsama koşullarını analiz etmişlerdir. Başka araştırmalar, global optimumun belirli bir güven aralığında bulunabilmesi için gerekli minimum iterasyon sayısı üzerinde yoğunlaşmıştır.¹¹⁰

Pratikte bir genetik algoritmanın ne zaman durdurulması gerektiği sorusuna cevap vermek zordur. Haupt (1994), bu soruya cevap olarak,

- problemin doğru cevabının bulunması,
- daha fazla ilerleme kaydedilememesi,
- istatistiksel olarak popülasyonun standart sapmasının belirli değere ulaşması,
- en iyi sonucun lokal olarak optimize edilmeye çalışılması ve iyileştirme sağlanılamaması,
- belirli sayıda iterasyon yapılması,

durumlarında algoritmanın durdurulabileceği önerisinde bulunmaktadır.¹¹¹ Problemin doğru cevabının bulunması durumu dışındaki seçeneklerde, en optimal çözümün garanti edilemeyeceği açıktır. Bu seçeneklerde sonuca belirli yakınlıkta çözümler bulunabilecektir. Doğru cevabın tam olarak bilinmediği bu durumlarda önemli olan elde edilen çözümlerin kabul edilebilir toleranslar içerisinde olup olmadığıdır.

¹⁰⁹ Beasley et al., 1993a.

¹¹⁰ Haupt, 2004, s. 107.

¹¹¹ Haupt, a.g.e., s. 109.

2.2 Genetik Algoritmalarla Etkin Sınırın Oluşturulmasına Yönelik Literatür Araştırması

Genetik algoritmalarla portföy optimizasyonu üzerine literatürde yapılmış çeşitli çalışmalar bulunmaktadır.¹¹² Yapılmış olan bu çalışmalarda, genel olarak, etkin sınırın tümünü elde etmeye yönelik uygulamalar yerine tek bir portföy elde edilmesinin amaçlandığı ya da etkin sınırı oluşturmak için genetik algoritmanın tekrar tekrar çalıştırılarak etkin sınırın çeşitli noktalarının elde edilmesi yönünde uygulamalar geliştirildiği gözlenmektedir.

Bu durum genetik algoritmaların esas olarak tek bir çözüme odaklanmasından kaynaklanmaktadır. Genetik algoritmalar, tek bir uyum fonksiyonunda uyumun iyileştirilmesi yönünde çözümler geliştirmektedirler. Bu uyum fonksiyonu ise genellikle tek bir amaç fonksiyonu üzerinden oluşturulmaktadır. Fakat, gerçek hayatta iyileştirilmek istenen problemlerin aynı anda birden fazla amacı karşılaması veya birden çok optimum noktanın bulunması istenebilir. Örneğin, bir köprü tasarımında dayanıklılık, genişlik ve maliyet karşılanması istenen amaçlar olabilir. Bu problemlere *çok amaçlı optimizasyon problemi* (multi-objective optimisation) denilmektedir.¹¹³

¹¹² Örn. Lin ve Liu, 2008; Yang, 2006.

¹¹³ Michalewicz, 1996, s. 168.

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin genellikle tek bir en etkin çözümü bulunmamaktadır. Bunun yerine, etkin çözüm kümesinin elde edilmesi, problemin sayısal olarak çözümünü teşkil etmektedir. Burada *pareto optimalite* kavramı karşımıza çıkmaktadır. Diğer parametreler sabit tutularak, herhangi bir parametrenin değiştirilmesiyle sonucun daha iyiye gidemeyeceği çözüm noktalarına *pareto optimal* çözüm denir. Bu şekilde *domine edilmemiş (non-dominated)* pareto optimal çözümlerin yer aldığı sınıra da *pareto etkin sınır* adı verilmektedir. Portföy teorisinde risk getiri eksenlerinde bulunacak etkin sınır, esas olarak bir pareto etkin sınırdır.

Önceki bölümlerde bahsedildiği gibi, risk getiri eksenlerinde etkin sınırın optimizasyonu problemi, bir çok amaçlı optimizasyon problemidir. Bu problemde riskin minimize edilmesi ve getirinin maksimize edilmesi olmak üzere optimize edilmek istenen iki farklı amaç bulunmaktadır. Amaçların karşılanmasına yönelik olarak etkin sınırın genetik algoritmalarla geliştirilmesi için, bunun yapılabilmesine imkan tanıyan yöntemler bir sonraki bölümde incelenmektedir.

2.2.1 Çok Amaçlı Optimizasyon Problemlerinin Genetik Algoritmalarla Çözümüne İlişkin Yöntemler

Genetik algoritmalar esas olarak tek bir amaç fonksiyonunun (veya uyum fonksiyonunun) optimize edilmesi üzerine geliştirilmiş metotlardır. Bununla beraber, çok amaçlı problemlerin genetik algoritmalarla çözümü için değişik yaklaşımlar da mevcuttur. Bu yaklaşımların bir kısmı amaçları ayrı ayrı optimize ederek çözüm bulmaya çalışırken, diğerleri pareto etkin sınır optimizasyonu üzerinde

yoğunlaşmaktadır. Bunu da çoklu amaçları tek bir uyum fonksiyonu haline getirerek, algoritmanın çeşitli yönlerini (seleksiyon, çiftleşme, mutasyon) değiştirerek veya bunların bileşimi karma yöntemler kullanarak gerçekleştirmektedirler.

Schaffer, 1984 tarihli eserinde Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA) yöntemini önermiştir. Bu yöntem, farklı bireylerin farklı amaç fonksiyonunu optimize etmesine dayanır. Bu şekilde bulunan bireyler etkin sınırda yer almamakta, sadece kendi amaçlarını optimize edebilmektedirler.¹¹⁴ Horn et al. (1994), Niche'd Pareto Genetic Algorithm (NPGA) yöntemini ileri sürmüştür. Bu yöntemde önce domine edilmemiş bireyler belirlenir. Diğer bireyler, o jenerasyon için pareto etkin sınırda yer alan bu bireylere göre gruplandırılır.¹¹⁵

Srinivas ve Deb(1994), Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA) yöntemini, Deb et al. (2002) NSGA-II yöntemini geliştirmiştir. Bu yöntemler, her jenerasyon için pareto etkin sınırların kademeli olarak oluşturulmasına dayanır. Bunlar dışında Amaç Ağırlıklandırma (Objective Weighting), Uzaklık Fonksiyonu Yöntemi (uzaklıkların toplamı), Min-Max Formülasyonu gibi yöntemler çok amaçlı optimizasyon problemlerinin genetik algoritmalarla çözümünde kullanılan yöntemlerdir.¹¹⁶

¹¹⁴ Horn et al., 1994, s. 82.

¹¹⁵ Horn et al., a.g.e., s. 83.

¹¹⁶ Srinivas ve Deb, 1994.

Pareto etkin sınır optimizasyonu problemlerinde yakınsamanın garanti edilebilmesi için bazı koşullar bulunmaktadır. Veldhuizen ve Lamont (1998), bu koşulları özetlemektedir. Veldhuizen ve Lamont’a göre, eğer bir genetik algoritma

- pareto temelli sıralama ve seçim uyguluyorsa,
- monoton bir uyum fonksiyonu kullanıyorsa,¹¹⁷

popülasyon dizisi monotondur. Eğer bir genetik algoritma,

- popülasyon dizisi monotonsa (pareto etkinlik azalmıyorsa),
- mutasyon operatörüyle arama uzayının tümüne erişilebileceğini garanti edebiliyorsa,

t iterasyon sayısını göstermek üzere, $t \rightarrow \infty$ limitinde algoritmanın pareto optimum çözümü elde etme olasılığı 1’dir. Başka bir deyişle, algoritmanın yakınsadığı garanti edilmektedir. Bununla beraber, genel olarak herhangi bir genetik algoritmanın ne kadar zaman sonra optimal çözüme ulaşacağı ise araştırma ve merak konusudur.¹¹⁸

¹¹⁷ Pareto etkin sınırdaki bulunan bireyler için aynı değeri veren uyum fonksiyonları, monoton uyum fonksiyonları olarak tanımlanmaktadır. Bkz. Veldhuizen ve Lamont, 1998, s. 6.

¹¹⁸ Veldhuizen ve Lamont, 1998.

Üçüncü Bölüm: İMKB Uygulaması

3 İMKB Uygulaması

3.1 Geliştirilen Genetik Algoritma Uygulamasının Detayları

Genetik algoritma uygulamasının İMKB verileriyle gerçekleştirilmesi ve sonuçların alınması ve incelenmesinden oluşacak olan tezin ampirik kısmı için, var olan hazır programların kullanılması tercih edilmemiş, yapılmak istenen değişikliklerin ve ayarlamaların daha kolay adapte edilebilmesi için yapılacak uygulamanın bir yazılım olarak geliştirilmesi kararlaştırılmıştır. Yazılım dili seçenekleri arasından, çoklu dizilerde kolay bir şekilde işlem yapma imkânı tanıyan, basit, yazımı kolay ve anlaşılır bir dil olduğu için, Python programlama dili seçilmiştir. Aşağıda yer alan başlıklar altında, yazılımda kullanılan algoritmanın detayları yer almaktadır.

3.1.1 Portföy Seçimindeki Kısıtlar

Genetik algoritmanın sonucunda elde edilecek portföyler için, açığa satış olmadığı varsayılmıştır. Bunun için, genetik algoritmanın her aşamasında elde edilen kromozomlar, varlıkların ağırlıkların toplamı $\sum w_i = 1$ olacak şekilde normalize edilmiştir. Bunun dışında algoritmaya portföydeki varlıklar için minimum veya maksimum alım miktarı vb. gibi herhangi bir kısıt konulmamıştır.

3.1.2 Başlangıç değerlerinin atanması

Algoritmanın başlangıcında, rastgele portföyler oluşturulup, bu portföyler popülasyonun ilk üyeleri olarak belirlenmiştir. Portföylerin oluşturulması aşamasında, portföydeki varlıklara rastgele değerler atanmış, daha sonra bu ağırlıkların toplamı $\sum w_i = 1$ olacak şekilde, ağırlıklar normalize edilmiştir. Yapılan denemeler sonucunda, bu şekilde oluşturulmuş 120 adet portföyü içeren bir kümenin popülasyon olarak yeterli sonuçlar verdiği görülmüştür.

3.1.3 Uyum Fonksiyonu

Algoritmada kullanılan uyum fonksiyonu (fitness function), etkin sınırın geliştirilmesi üzerine tasarlanmış ve optimize edilmiştir. Uyum fonksiyonu, her jenerasyondaki popülasyonun oluşturduğu etkin sınır için, uyumluluğu test edilecek üyenin risk-getiri eksenlerinde etkin sınıra olan uzaklığı olarak tanımlanmıştır. Bu noktada öncelikle etkin sınırın belirlenme yöntemi üzerinde durulmalıdır.

3.1.3.1 Bir Jenerasyon İçin Etkin Sınırın Belirlenmesi

Etkin sınır tanımına göre, belirli bir risk değeri için, getirisi en yüksek olan portföy veya verilen bir getiri için riski en düşük olan portföy etkin sınırdaki yer almaktadır.¹¹⁹

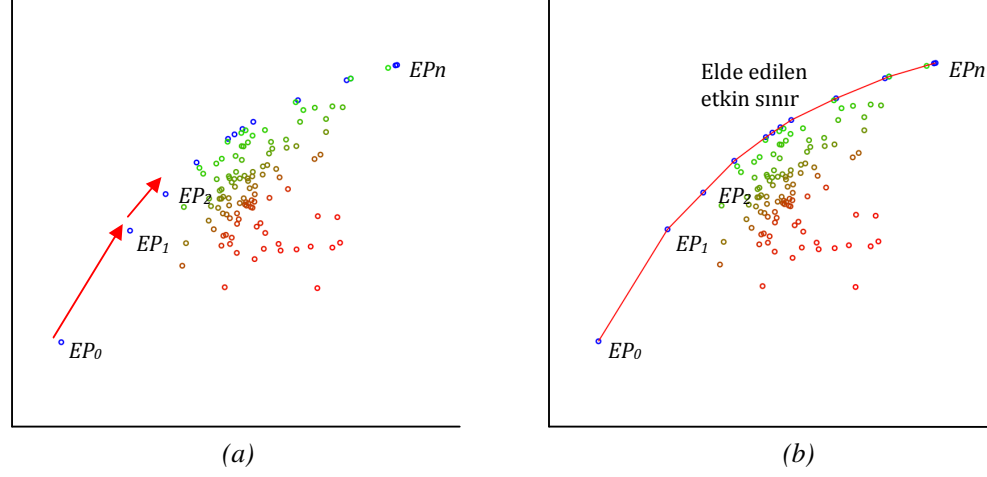
¹¹⁹ Markowitz, 1952.

Etkin sınır üzerindeki bir portföy için, getirisi daha yüksek ve aynı zamanda riski daha düşük bir portföy daha bulunamaz.

Bu tanımdan çıkarılacak bir diğer husus, etkin sınırın konveks olması gerektiğidir. Herhangi bir popülasyonda bulunan portföyler getiri-risk eksenlerindeki bir grafik üzerine noktalar olarak yerleştirildiğinde, aynı riskte bulunan diğer tüm portföylerin getiri ekseninde konumsal olarak daha üstte olmadığı portföylerden oluşan noktaları birleştiren doğru parçalarından oluşan küme, o jenerasyon için etkin sınır kabul edilmektedir. Bu noktaların hesaplanması şu şekilde gerçekleştirilmiştir:

1. Belirlenen risk parametresine ve portföydeki varlıkların ağırlıklarına göre portföyün riskini ve getirisini hesapla.
2. Popülasyonda risk değeri en düşük olan portföyü ilk nokta olarak belirle. (EP_0 noktası)
3. Riski ve getirisi daha yüksek olan popülasyondaki tüm portföyler için, etkin sınırdaki bulunan bir önceki EP_i noktası ile (ilk başlangıçta EP_0 noktası ile) oluşacak doğrunun tanjantının en büyük olduğu noktayı tespit et. (EP_{i+1} noktası)
4. Eğer popülasyonda riski ve getirisi daha yüksek hiçbir nokta kalmamışsa, bu noktayı etkin sınırdaki en son nokta olarak belirle. (EP_n noktası)

Bu şekilde elde edilen etkin sınırlar, bir sonraki nesil için hesaplanacak uyum fonksiyonunda kullanılmakta ve bir sonraki nesle aktarılabilecek elit bireyler arasına dahil edilmektedir.



Şekil 12: Etkin Sınırın Elde Edilmesi

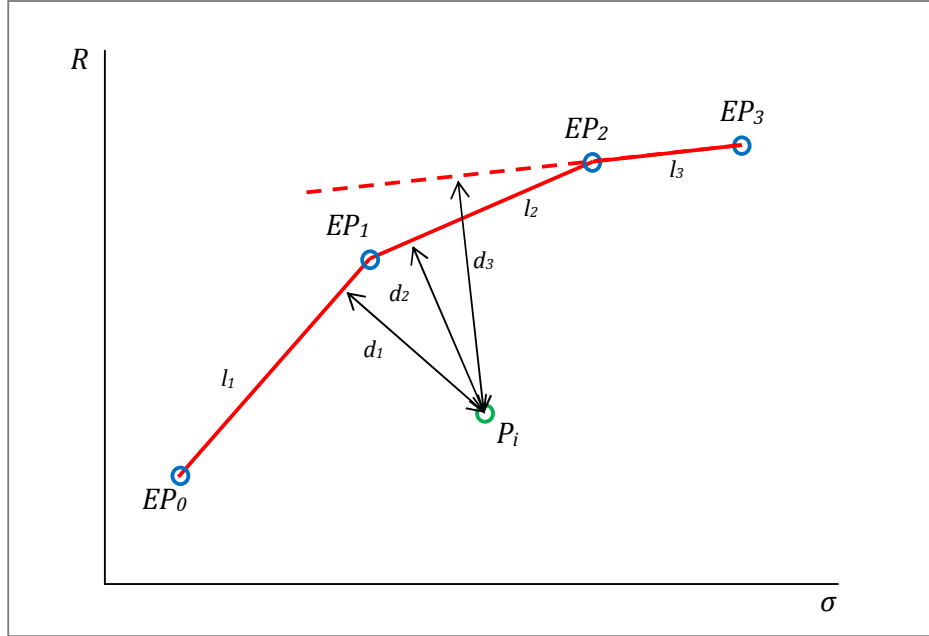
Etkin sınırın elde edilmesi için, EP_0 noktasından EP_n noktasına kadar ilerlenir (a). Elde edilen doğru parçaları o nesil için etkin sınırı verecektir (b).

3.1.3.2 Uyum Fonksiyonunun Hesaplanması

Yapılan genetik algoritma uygulamasında bireylerin uyumlarının etkin sınıra olan uzaklıklarıyla ölçülmesi kararlaştırılmıştır. Bu şekilde, elitist seçimle beraber, genetik algoritmanın tek bir noktaya yönlendirilmemesi sağlanmış, bu uygulamanın etkin sınırı iyileştirme yönünde davranacağı görülmüştür.

Uygulamada her bir jenerasyon için etkin sınırdaki bulunan portföyler, o jenerasyonun en uyumlu portföyleri olarak kabul edilmiştir. Geriye kalan diğer portföyler ise etkin sınıra uzaklıklarına göre sıralanmaktadır. Etkin sınırdaki bulunan noktaların, etkin sınıra olan uzaklıkları 0 (sıfır)'dır. Etkin sınırdaki yer almayan portföyler için ise, o nesil için hesaplanan etkin sınırı oluşturan doğru parçalarına olan uzaklıkları arasında

en küçük değer, söz konusu portföy'ün etkin sınıra uzaklığı kabul edilmiş ve portföyün uyum derecesi bu uzaklık olarak saptanmıştır. Bu şekilde belirlenecek olan uyum kriterleri için, 0 (sıfır) en uyumlu olmak üzere, diğerine göre daha küçük uyum katsayısına sahip portföy bir diğerinden daha uyumlu olarak kabul edilecektir.

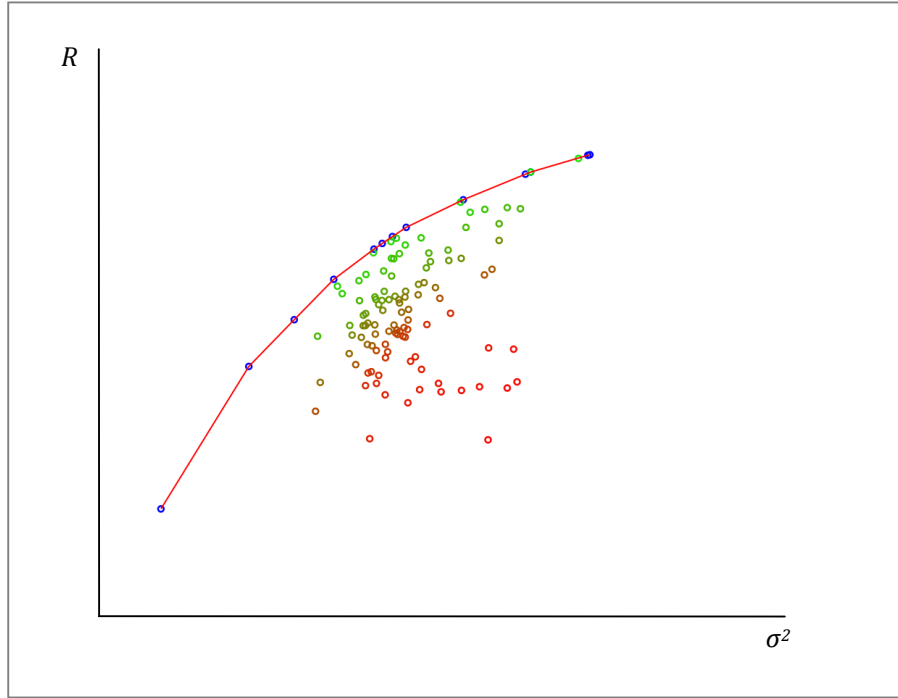


Şekil 13: Uyum Fonksiyonunun Hesaplanması

Şekilde etkin sınır l_1 , l_2 ve l_3 doğru parçalarıyla temsil edilmektedir. P_i portföyünün risk-getiri eksenlerindeki koordinatlarının, l_1 , l_2 ve l_3 doğrularına olan uzaklıkları arasından en küçüğü, etkin sınıra uzaklık olarak belirlenecektir.

Buradaki uygulama, genetik algoritmalar için anlatılan uyum fonksiyonundan farklıdır. Genel olarak uyum fonksiyonlarının vereceği daha büyük değerler, daha uyumlu bireyleri göstermektedir. Uygulamamızda ise, 0 en uyumlu olmak üzere daha küçük değerler daha uyumlu bireyleri göstermektedir. Sonuçta, prensip olarak iki uygulama arasında uyumluluğu temsil açısından farklılık bulunmamakla beraber, kullanılan uyum fonksiyonunun en uyumluya 0 değeri vererek standardize etmesi

dolayısıyla başkaca bir ölçeklendirmeye gerek duyulmaması bir avantaj olarak görülebilir.



Şekil 14: Uyum Fonsiyonunun Grafiksel Olarak Gösterimi

Bireylerin etkin sınıra uzaklığa göre belirlenen uyumları, örnek grafikte renklerle gösterilmektedir. Her bir nokta, risk getiri ekseninde yerleştirilmiş bir portföyü temsil etmektedir. Yeşil noktalar en uyumlu, kırmızı noktalarsa en uyumsuz bireylerdir. Diğer bireyler uyumlarına göre yeşil ile kırmızı arasında kademeli olarak renklendirilmiştir. Şekilde bulunan mavi noktalar etkin sınırdaki yer alan noktalar olup, etkin sınır kırmızı çizgiyle gösterilmiştir. (Grafığı elde etmek için kullanılan parametreler, risk: varyans, nüfus: 120, iterasyon no: 150.)

3.1.4 Çiftleşme

Uygulanan genetik algoritma modelinde elitist bir seçim stratejisi uygulanmaktadır.

Buna göre, her nesil için etkin sınırdaki yer alan bireyler bir sonraki nesle aktarılacak

üzere korunmaktadır. Bu yöntem etkin sınırın sürekli olarak korunması ve geliştirilmesi için gerekli görülmüş ve tercih edilmiştir.

Etkin sınırdaki bulunan portföy sayısı, her nesil için değişkenlik göstermektedir. Bununla birlikte, popülasyonun nüfusunun (N) sabit tutulması kararlaştırılmıştır. Dolayısıyla, etkin sınırdaki yer alan k adet bireyin bir sonraki nesle aktarılması sonrasında, geriye kalan ($N-k$) adet birey, çiftleştirilmiş yeni soylardan seçilmektedir.

Çiftleştirilecek bireylerin seçimi için ise sıralama yöntemi kullanılmıştır. Buna göre öncelikle popülasyon uyum kriterine göre sıralanır. Bundan sonra popülasyon içerisinde çiftleştirilecek bireyler seçilir. Uygulamada, sıralanmış olan popülasyon rastgele ($N/2$) bireyden oluşan iki gruba ayrılmaktadır. İki grubun üyeleri aşağıda detayları anlatılacak olan çapraz eşleme algoritmasıyla eşleştirilmektedir. Her eşleme sonucunda ebeveynlerinin yerine geçecek bireyler elde edilir. Elde edilen yeni küme, elit bireylerden sonra kalan yeri doldurmak üzere rastgele bir şekilde seçilerek, yeni popülasyona eklenir. Bu yeni bireyler üzerinde daha sonra mutasyon uygulanır.

Mutasyon ve çapraz eşleme aşamalarından sonra, varlıkların ağırlıkları toplamı 1 olacak şekilde portföy ağırlıkları normalize edilmektedir. Tüm aşamalarda bir bireyin portföydeki tüm varlıkları kaybetmesi olasılığına karşı mutasyona uğramış portföy kontrol edilmekte, böyle bir durum söz konusu ise mutasyon veya çapraz eşleme o birey için uygulanmamaktadır.

3.1.4.1 Çapraz Eşleme

İki bireyin çapraz eşleme ile çiftleştirilmesi sonucunda iki yeni birey elde edilir. Çapraz eşleme için denenen yöntemler arasında, %50 BLX- α ve %50 basit çapraz eşleme yönteminin en iyi sonuçları verdiği görülmüştür.¹²⁰ Bu şekilde çapraz eşlenmiş bireylerin erken yakınsamaya mahal vermeden, etkin sınırı geniş bir şekilde kapsadığı gözlenmiştir.

3.1.4.2 Mutasyon

Uygulamamızda popülasyonun elit bireyleri hariç geriye kalan bireyleri, belirli bir olasılıkla mutasyona tabi tutulmaktadır. Mutasyon için literatürde var olan operatörler kullanılmamış olup, rastgele mutasyon yöntemi değiştirilerek yeni bir mutasyon algoritması uygulanmıştır. Buna göre, P_a olasılıkla bireylerin bir genleri değiştirilmekte, bu şekilde portföydeki bir varlığın ağırlığı değiştirilmektedir. Aynı bireyler P_b olasılıkla portföydeki varlıklardan birini kaybetmektedir. Bu şekildeki uygulamanın sebebi, portföyde sıfırdan farklı ve çok küçük¹²¹ ağırlığa sahip varlıkların genetik algoritmanın geç yakınsamasına sebep olması ve bu durumda algoritmanın etkin sınırın sadece en yüksek getirili varlıktan oluşan sol üst ucunu saptayamamasıdır.

¹²⁰ $\alpha = 0.5$ kullanılmıştır.

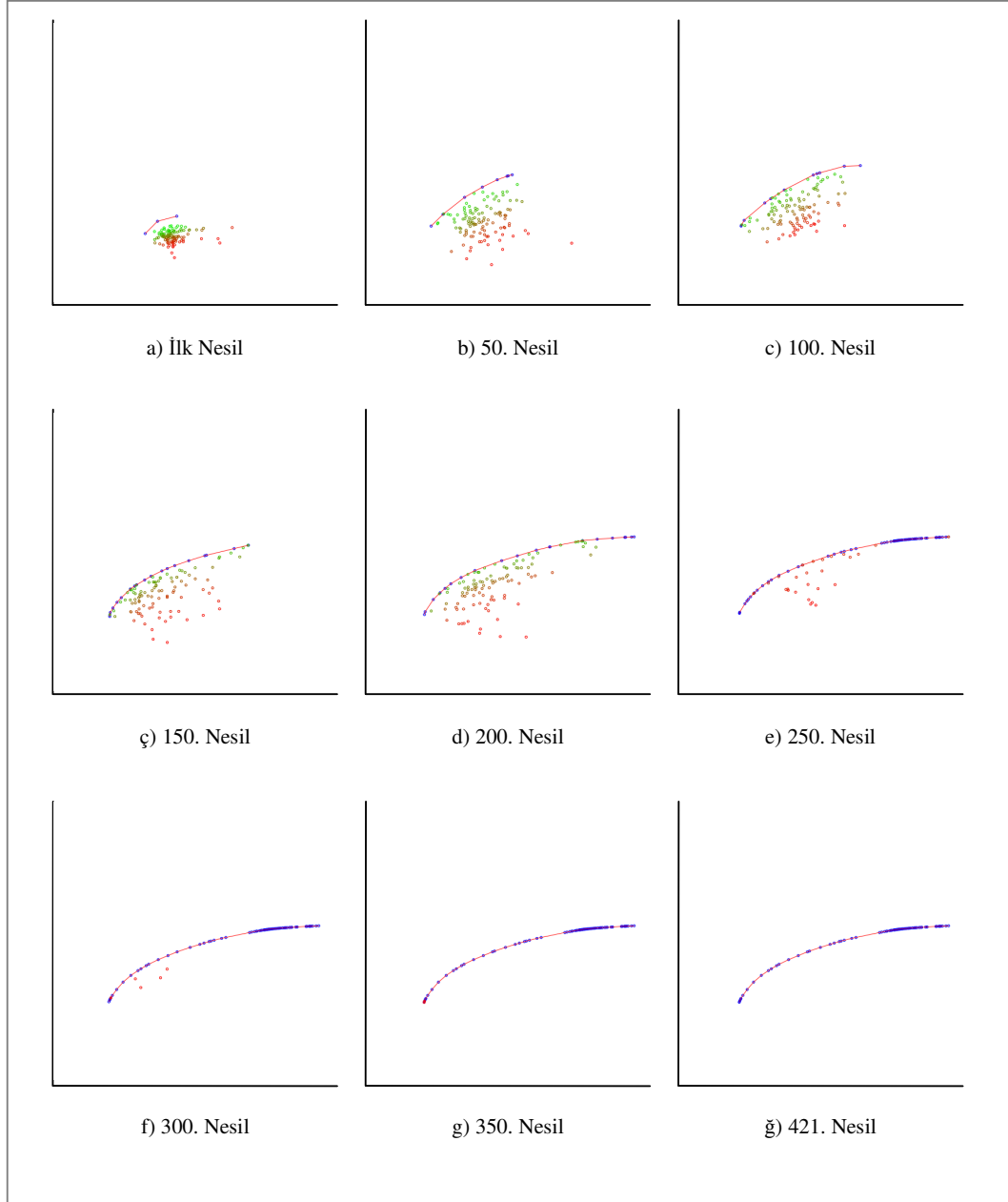
¹²¹ 10^{-5} veya daha küçük

Mutasyon olasılığı da dahil olmak üzere, genetik algoritmada seçilen parametrelerin belirlenmesi üzerine çeşitli denemeler yapılmıştır. Denemeler sonucunda, P_a ve P_b mutasyon olasılıklarının her ikisinin de 0,3 olmak üzere mutasyon olasılığının 0,51 olması durumunda en iyi sonuçların elde edildiği gözlenmiştir. Denemelerde bulunan etkin sınır ile risk eksenini arasında kalan alanın büyüklüğü, seçilen bir risk ölçütü için genetik algoritma parametrelerinin başarımını göstermektedir. Çünkü söz konusu alan ne kadar büyükse, bulunan etkin sınır o kadar geniş ve gerçek etkin sınıra o kadar yakın olacaktır. Yapılmış olan bu denemelerin sonuçları, *Ek 2*'de yer almaktadır.

3.1.5 Genetik Algoritmanın Yakınsaması

Pareto etkin sınır problemlerinin yakınsama koşulu önceki bölümlerde aktarılmıştır. Uygulamamızda kullanılacak seçim fonksiyonu pareto etkin sınırdan alınacak k adet birey için k -elitist bir strateji izlediği için, sonraki nesilde en azından bu bireylerin bulunması garanti edilerek, pareto optimalitenin azalmaması sağlanacaktır. Başka bir deyişle seçim fonksiyonumuzun monoton olduğunu garanti edecektir.

Kullanacağımız uyum fonksiyonu, pareto etkin sınıra eşit uzaklıktaki bireyler için aynı değeri vereceği için, monoton bir uyum fonksiyonudur. Çiftleşme ve mutasyon operatörlerinin rastgele parametrelerle belirleniyor olması ve mutasyon operatörü üzerinde bir kısıt olmadığı için algoritmanın arama uzayının tümünü kapsamayı sağlayabilmektedir. Dolayısıyla yukarıdaki koşullar olduğu için, algoritmamızın yeteri kadar iterasyon sonra etkin sınırı oluşturması garanti edilmektedir.



Şekil 15: Genetik Algoritmanın Yakınsaması

Grafikler Ek 2’de yer alan tabloda bulunan 7 numaralı denemeden elde edilmiştir.

Genetik algoritmanın sonlandırılması için belirlenen kriter, tüm nüfusun etkin sınıra yakınsaması, başka bir deyişle tüm bireylerin etkin sınırdaki yer almasıdır. Uygulamada nesillerin 200 ile 400 arası iterasyon sonunda genetik algoritmanın yeterli çeşitliliği sağlayarak yakınsadığı görülmüştür. İstisnai durumlarda algoritmanın sonsuz döngüye girmesini önlemek için de algoritmadaki iterasyon sayısı 500 adet ile sınırlandırılmıştır.

3.2 Veri Kümesinin Elde Edilmesi

3.2.1 Hisse Senetlerinin Aylık Getirilerinin Elde Edilmesi

Hisse senetlerinin aylık getirileri İMKB web sitesinde bulunan “İMKB Şirketleri Aylık Fiyat ve Getiri Verileri” sayfasından temin edilmiştir.¹²² Getiri verileri sitede bulunan, hisse senetlerinin ay sonu kapanış fiyatlarını ve USD ve TL bazlı aylık ve bileşik getirilerini içeren excel dosyalarından alınmıştır. Aylık getiriler, bir hisse senedinin bir ay boyunca elde tutulması sonucunda elde edilen getiriye göstermekte olup aşağıdaki formüle göre hesaplanmıştır.¹²³

$$R_i = \frac{F_i(BDL + BDZ) - RR.BDL + T - R_{i-1}}{R_{i-1}}$$

¹²² http://www.imkb.gov.tr/sirket/fiyat_getiri.htm (Erişim tarihi: 03.05.2009)

¹²³ http://www.imkb.gov.tr/sirket/fiyat_getiri_aciklama.htm (Erişim tarihi: 03.05.2009)

R_i : “ i ” ayına ait getiri.

F_i : “ i ” ayına ait en son kapanış fiyatı.

BDL : Ay içinde alınan bedelli hisse adedi.

BDZ : Ay içinde alınan bedelsiz hisse adedi.

RR : Rüçhan hakkı kullanma fiyatı.

T : Ay içinde 1.000,-TL/1 YTL nominal değerli bir hisse senedine ödenen net temettü tutarı.

F_{i-1} : “ i ” ayından bir önceki aya ait en son kapanış fiyatı.

3.2.2 Veri Kümesine Dahil Edilecek Hisse Senetlerinin Seçimi

Tezin uygulama bölümünde, 1.1.2009 tarihinde İMKB-100 endeksine dahil olan firmalar kullanılacaktır. Endekse giren şirketlerin listesi İMKB web sitesinin “Endeksler” sayfasından temin edilmiştir.¹²⁴

Anılan firmaların bazılarının halka arz tarihleri yakın zamanlı olduğu için, geçmişe yönelik aylık getiri verilerinin çok ileri gitmediği görülmektedir. Bu durum, hesaplamalarda bazı sıkıntılara yol açmaktadır. Varyansın hesaplanması için firmaların sadece elde bulunan verilerinin kullanılması belki makul karşılanabilecektir. Ancak, özellikle kovaryans veya LPM gibi karşılıklı getirilerin hesaplamaya dahil edildiği ölçütlerde, bir hisse senedinden kısmi olarak kullanılan verilerin hesaplama yapmayı mümkün kılmadığı görülecektir.

¹²⁴ <http://www.imkb.gov.tr/endeksler.htm> (Erişim tarihi: 03.05.2009)

Bu nedenle İMKB-100 endeksine bağılı tüm hisse senetlerinin hesaplamaya dahil edilmesi tercih edilmemiştir. Bu haliyle daha dar bir zaman aralığında daha çok hisse senediyle analiz yapılması ile daha geniş bir zaman çerçevesinde alınacak daha çok veriye karşılık daha az hisse senedinin veri kümesine dahil edilmesi arasında bir seçim yapma gerekliliğı doğmuştur. Bu yüzden, uygulamaya dahil edilmek üzere Eylül 2000'den Aralık 2008'e kadar (anılan aylar dahil olmak üzere) 100 aylık dönemde tam olarak veri bulunan 80 adet hisse senedi seçilmiştir. İMKB-100 endeksine giren firmalar ve uygulamaya dahil edilmek üzere seçilen söz konusu firmaların listesi *Ek I*'de yer almaktadır.

Seçilen verilerin 2000 yılının Eylül ayını ve sonrasını, özellikle de 2001 krizini içerdığı ve 2007-2008 dönemindeki küresel mali krizi kapsadığı, bu şekliyle belirlenen kümenin, sistematik riskin aşağı yönde olduğu finansal kriz dönemlerini içeren bir çerçevede seçilmiş olduğu gözlenebilir. Bu sebeple kullanılan veri kümesinin belirlenmesinde makul bir seçim yapıldığı söylenebilecektir.

3.3 Elde Edilen Sonuçlar

3.3.1 Uygulama ile Hesaplanan Etkin Sınırlar

Uygulamada beş adet alt kısmi moment ve bir adet varyans olmak üzere altı adet risk ölçütü seçilmiş, genetik algoritma parametrelerini belirlemek üzere denemeler yapılmıştır. Denemelerde etkin sınır altında kalan alanın en yüksek olduğu sonuç

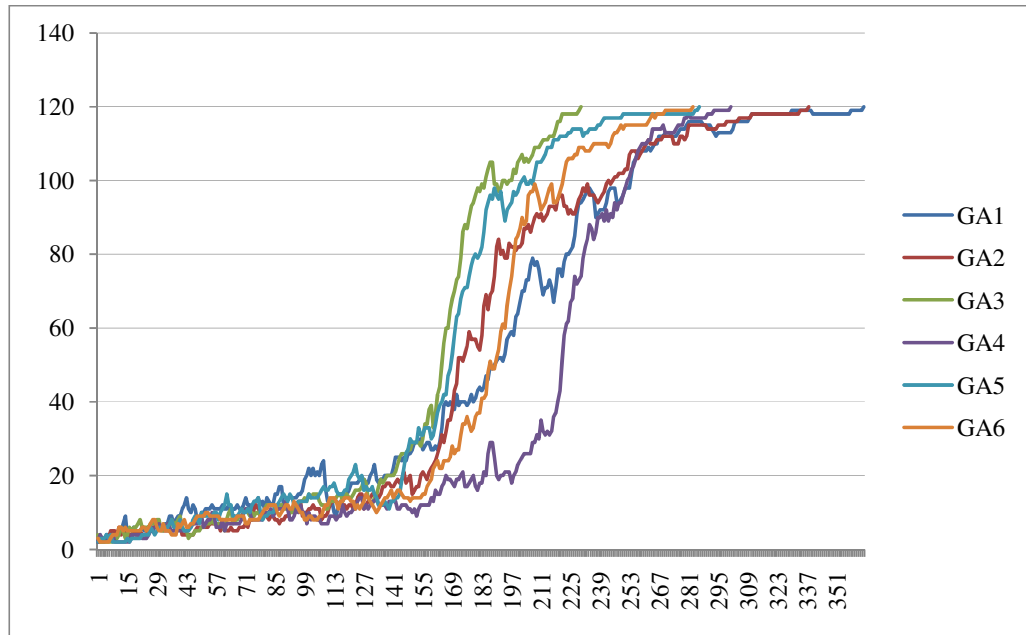
optimum etkin sınır olarak belirlenmiştir. Alt kısmi momentin alfa parametresinin 1 olarak belirlendiği denemelerde yakınsama sağlanamamıştır. Bu parametrenin 1,5 ila 3 arasında 0,5 adımlarla seçilmesi yeterli bulunmuştur.

Risk ölçütü olarak yarı-varyans, ve LPM ölçütleri kullanılmış, bulunan etkin sınırların karşılaştırılabilmesi için varyans da uygulamaya dahil edilmiştir. LPM ölçütünde kullanılmak üzere seçilen t hedef getiri değeri için risksiz faiz oranının kullanılması tercih edilmiştir. Risksiz faiz oranı olarak, 2 Ocak 2009 tarihinde borsada satışta bulunan devlet tahvilleri ve hazine bonolarının yıllık bileşik getirilerinin ortalaması alınarak %1,261953 olarak hesaplanan aylık getiri kullanılmıştır. Hesaplamanın yapıldığı değerler, İMKB web sitesinin “Tahvil ve Bono Piyasası Bültenleri” sayfasından temin edilmiştir. Hesaplanmaya ilişkin veriler ve tahvil ve bonoların listesi *Ek 3*’ten incelenebilir. LPM ölçütünde kullanılacak α parametresi için ise 1,5, 2, 2,5, ve 3 değerleri seçilmiştir. Bu değerlerin özetlendiği tablo aşağıda yer almaktadır.

Tablo 1: Uygulamada kullanılan parametreler

Etkin Sınır Kodu	Kullanılan Risk Ölçütü	Mutasyon Oranı	Algoritmanın Yakınsadığı İterasyon Sayısı	Etkin Sınır Uzunluğu	Etkin Sınır Altında Kalan Alan
GA1	Varyans	0,51	362	320,74	1.317,13
GA2	Yarı-varyans	0,65	336	114,83	462,73
GA3	LPM _{1,5, %1,26}	0,51	228	14,03	55,97
GA4	LPM _{2, %1,26}	0,51	299	79,45	325,15
GA5	LPM _{2,5, %1,26}	0,51	284	457,64	1.890,69
GA6	LPM _{3, %1,26}	0,51	281	2.686,11	11.179,10

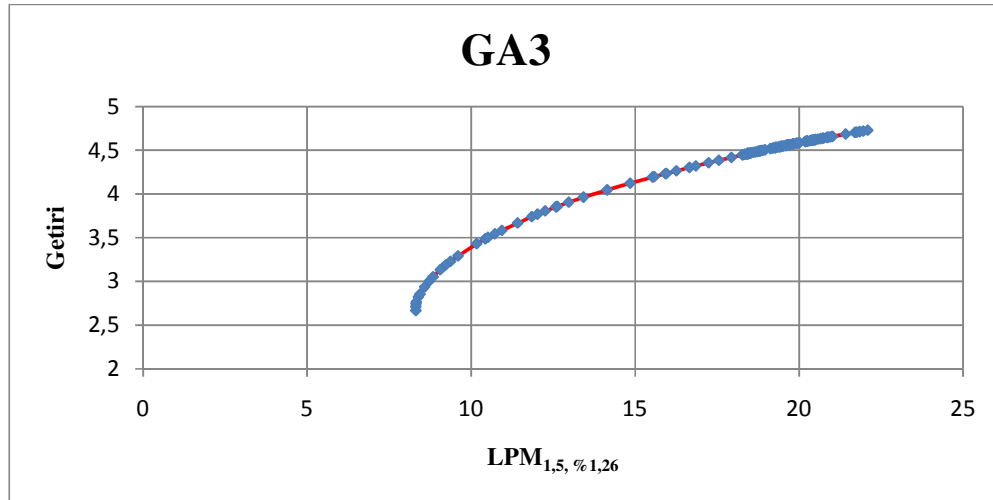
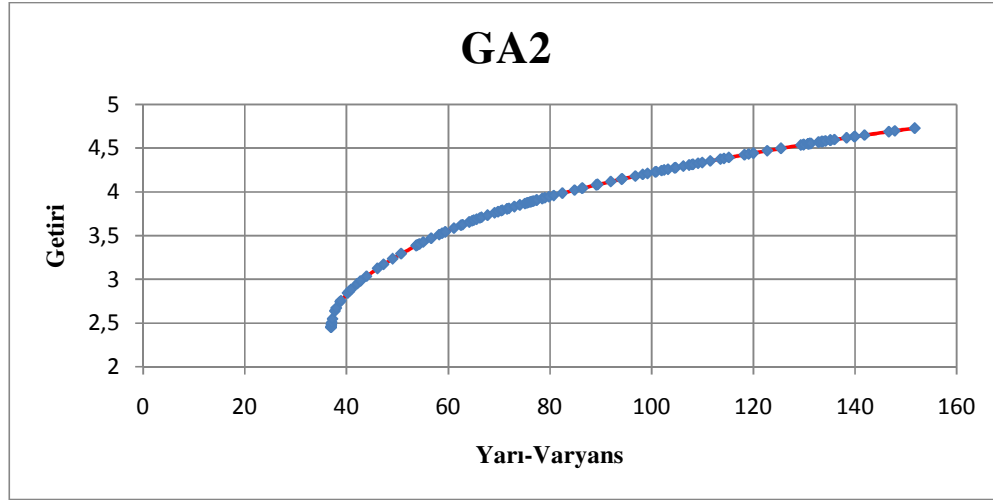
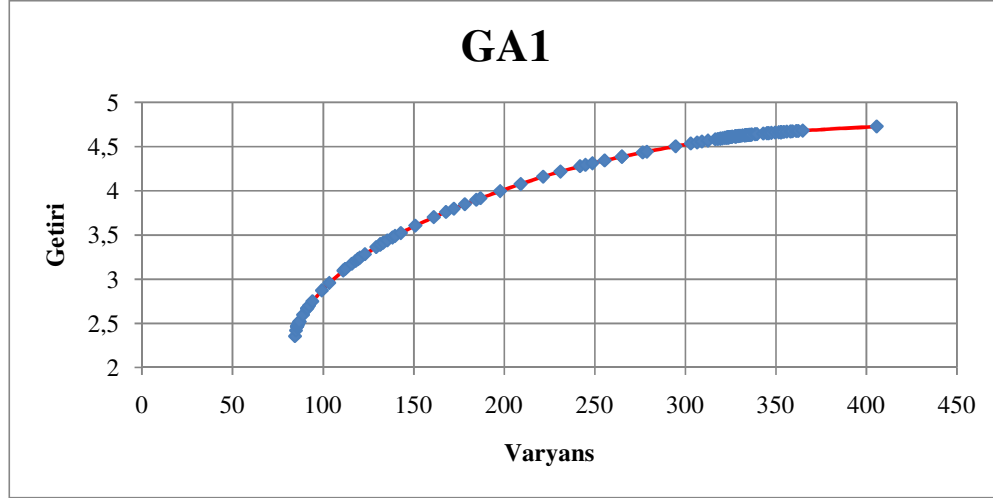
Algoritmanın çeşitli risk ölçütleri için çeşitli iterasyon adımlarında yakınsadığı gözlenmiştir. Her denemede bu sayı değişkenlik göstermekle beraber, genel olarak 200-350 iterasyon sonunda etkin sınırın elde edildiği görülebilecektir. Her iterasyonda etkin sınırdaki yer alan birey sayısı aşağıdaki grafikten incelenebilir. Popülasyondaki birey sayısı genel olarak 100-200 iterasyon sonra, yaklaşık 30-40 bireye ulaştığında, algoritmanın yakınsaması hızla artmaktadır. Bu noktadan sonra portföylerin kabaca belirmiş olduğu görülmüştür. Birey sayısı 100-110 değerine ulaştığında yakınsama yavaş bir şekilde sonlanmaktadır. Bu durumda artık algoritmayla yeni varlıklardan oluşan bir portföy elde edilememekte, var olan portföylerdeki varlıkların ağırlıkları değiştirilerek elde edilen ara portföylerle etkin sınır doldurulmaktadır.



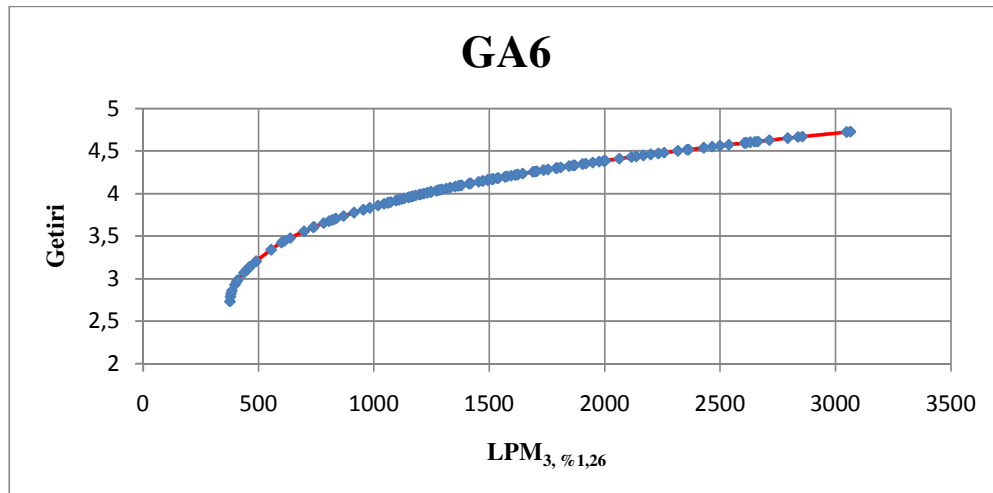
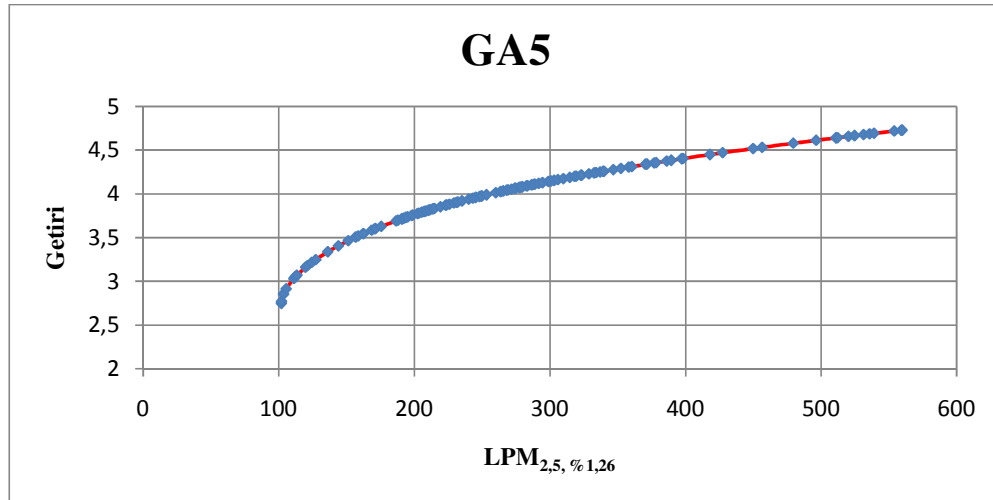
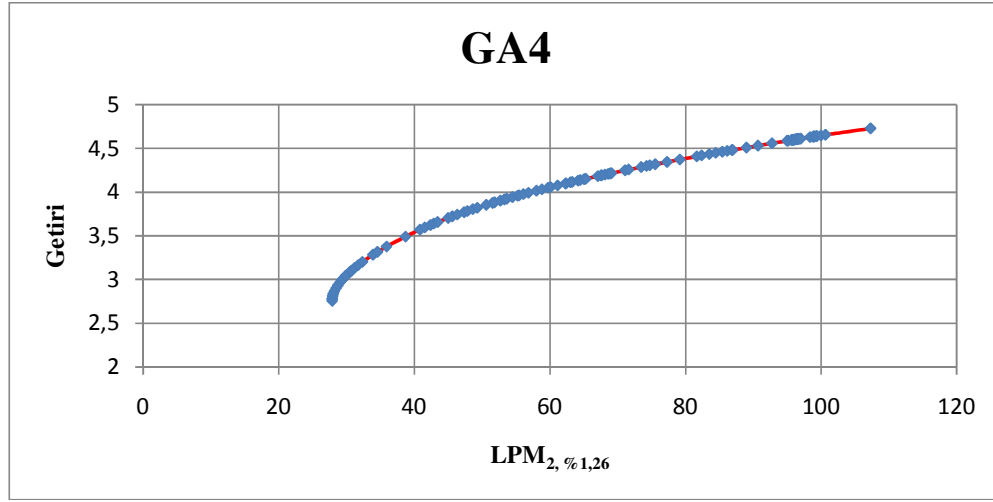
Grafik 1: Algoritmanın Yakınsaması

İterasyon numarası x ekseninde, etkin sınırdaki yer alan portföy sayısı y ekseninde gösterilmektedir.

Grafik 2: Uygulamayla Elde Edilen Etkin Sınırlar

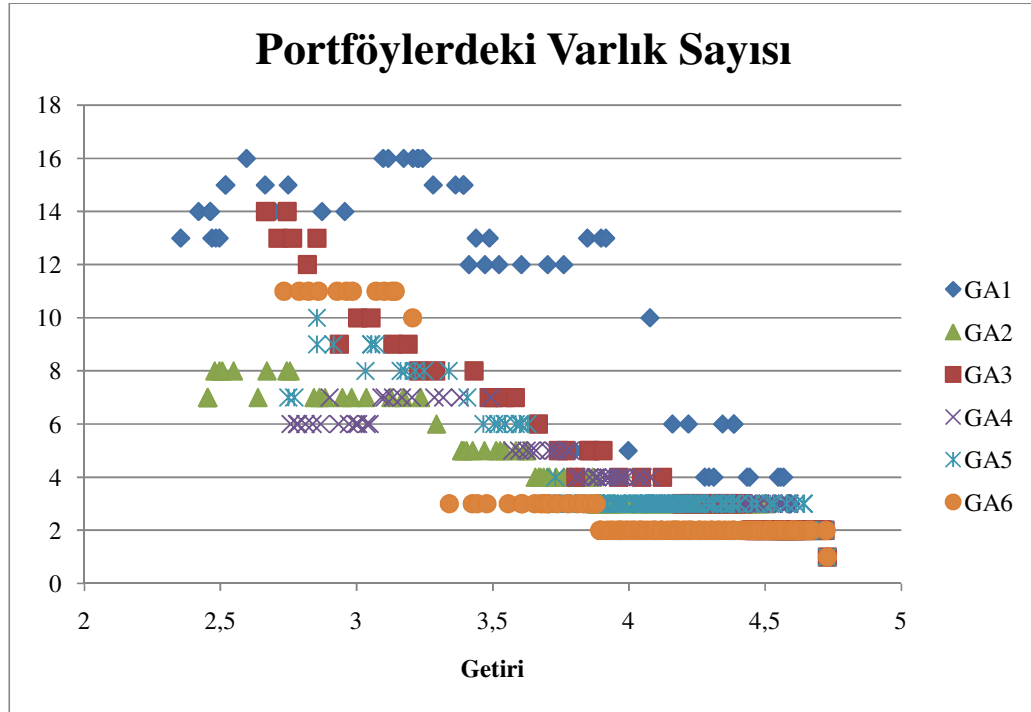


(Grafik 2'nin Devamı)



3.3.2 Etkin Sınırdaki Portföylerde Bulunan Varlıkların Dağılımı

Elde edilen etkin sınırdaki portföylerin değerlendirilmesi gereken bir nokta da portföylerdeki varlık sayısı ve varlıkların dağılımıdır. Portföylerdeki varlık sayıları, getiri eksenlerine göre birbirleriyle karşılaştırıldığında, varyans kullanılarak elde edilen portföylerin genellikle aynı getiri için çok daha fazla sayıda varlık içerdiği görülebilecektir. Yine varyans ile elde edilmiş portföylerdeki varlık sayılarının diğerlerine göre daha düzensiz bir yapıda oldukları göze çarpabilir. Yarı-varyans ve LPM ölçütleri kullanılarak elde edilen portföyler getiriye göre azalan bir yapıda bulunarak, nispeten daha düzenli bir dağılım göstermektedir.



Grafik 3: Etkin Sınırdaki Portföylerin İçerdiği Varlık Sayısı

Portföy içerisindeki ağırlığı 10^{-3} 'ten küçük olan varlıklar hesaplama dahil edilmemiştir.

Tablo 2: Etkin Sınırlardaki Varlık Sayısı Dağılımı

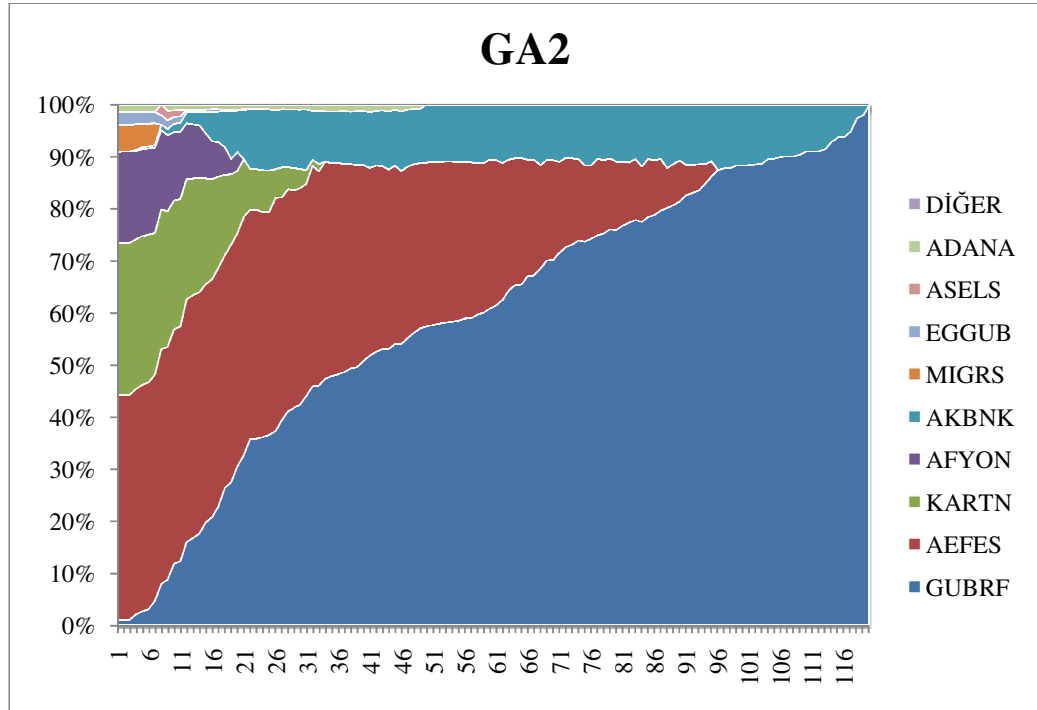
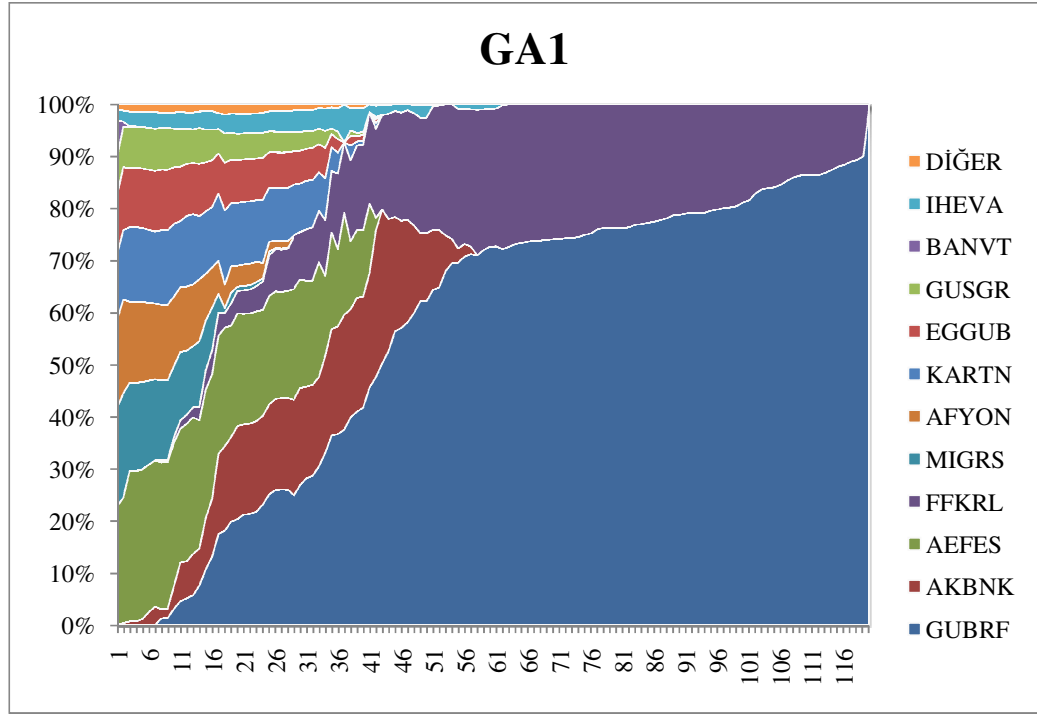
<i>Etkin Sınır Boyunca,</i>	GA1	GA2	GA3	GA4	GA5	GA6
<i>En Az Varlık Adedi</i>	1	1	1	1	1	1
<i>En Fazla Varlık Adedi</i>	16	8	14	7	10	11
<i>Ortalama Varlık Adedi</i>	10,96	4,99	6,49	4,80	5,18	4,95

Yukarıda bulunan *Tablo 2* incelendiğinde, varyans risk ölçütünün etkin sınır boyunca ortalama 10,96 varlık adediyle en fazla varlığı içeren portföyleri oluşturduğu görülebilecektir. Yarı-varyans, LPM₂ ve LPM₃ ölçütleri, portföylerde ortalama 5'ten az varlık bulundurmaktadır. Özellikle yarı-varyans ve LPM₂ ölçütü, portföyde en fazla 8 ve 7 varlık bulundurarak, kendi tanımları ışığında riskin daha az sayıda portföyle minimize edildiklerini göstermektedirler.

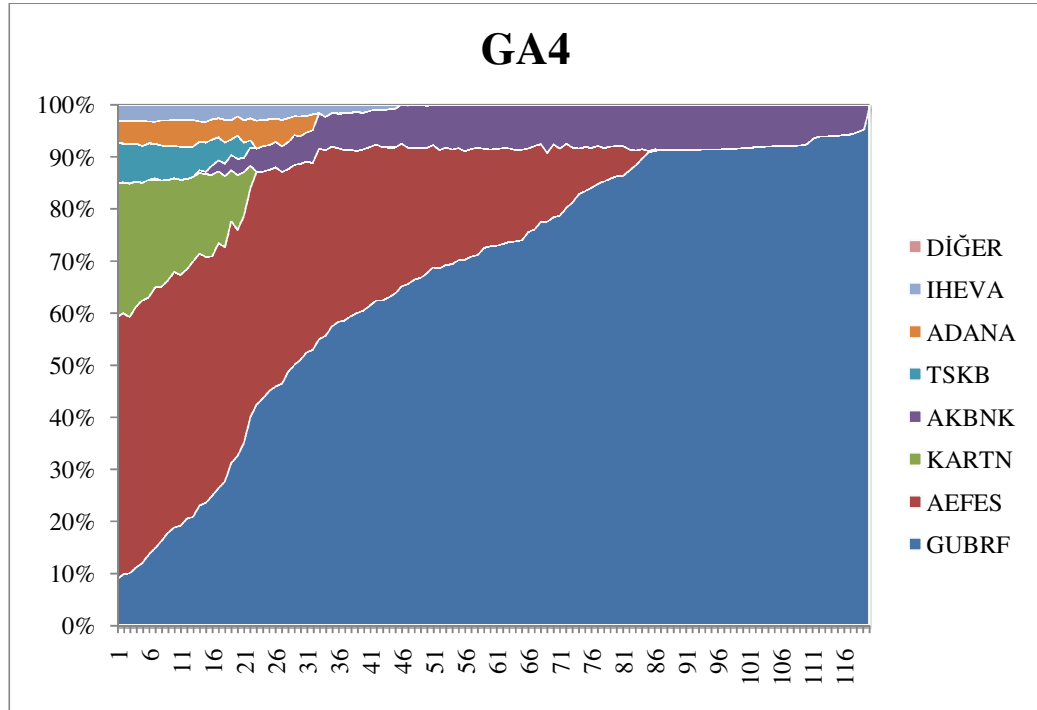
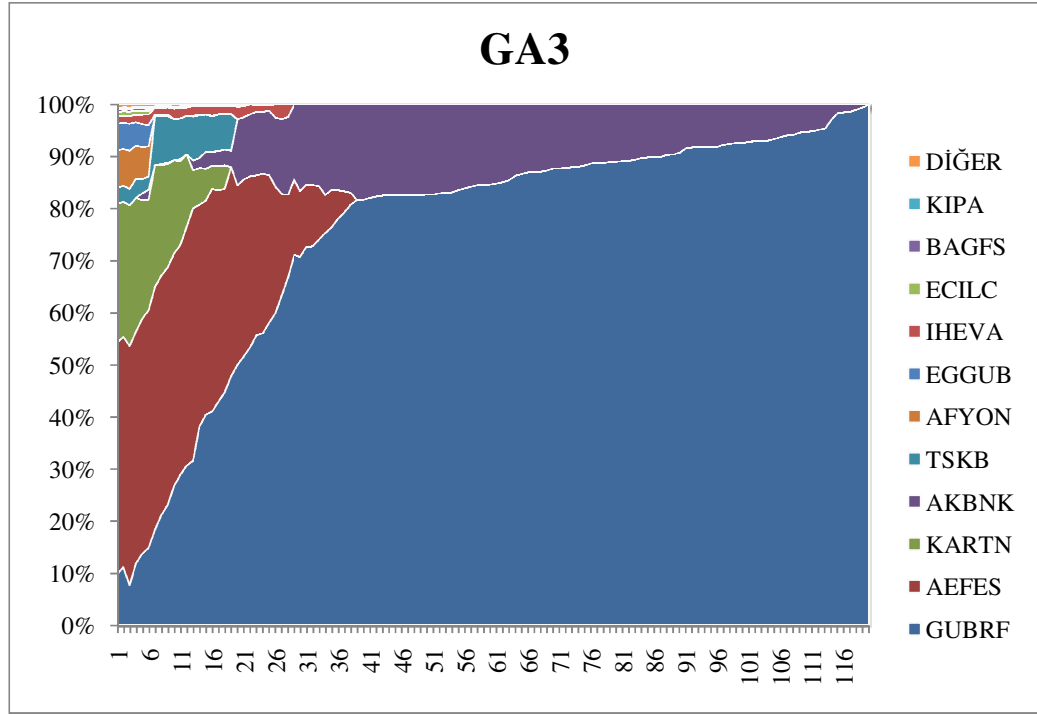
Grafik incelendiğinde göze çarpan bir diğer düzensizlik de LPM₃ ölçütündeki varlık sayısının azlığıdır. LPM₃ ölçütüyle elde edilen portföylerde, %3,3'ten yüksek olan getirilerde portföyde çok az sayıda varlık bulunduğu gözlenebilir. Bu durum, söz konusu getiriye elde edebilmek için kullanılacak varlıkların arasından, bu risk profiline uygun varlık bulunmadığı yönünde düşünülebilir.

Portföylerde kullanılan varlıklar incelendiğinde, sonuçların çok da şaşırtıcı olmadığı görülebilecektir. Etkin sınırın en yüksek getirili ucunda, veri kümesindeki en yüksek getiriye sahip olan GUBRF hissesi kullanılmaktadır. Etkin sınırın bu ucundan itibaren bu hisse senedinin çeşitli oranlarda kullanıldığı görülmektedir. Elde edilen bütün portföylerde, en yüksek riskten daha düşüğe gidildikçe portföye başka hisselerin de portföye eklenip çeşitlendirmeye gidildiği görülmektedir.

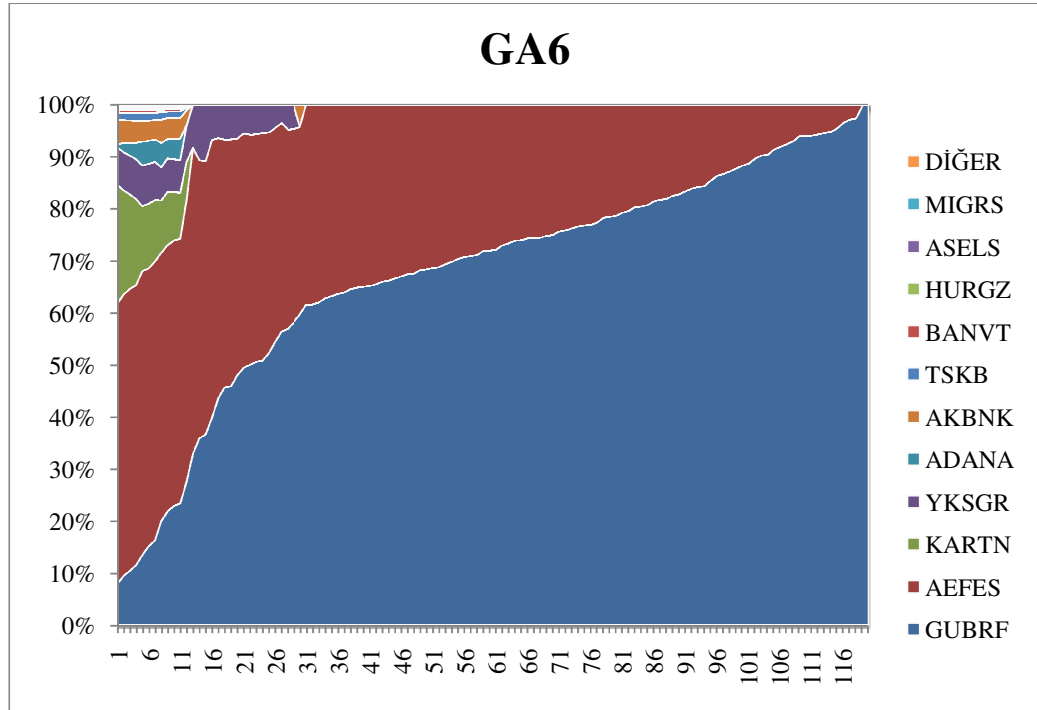
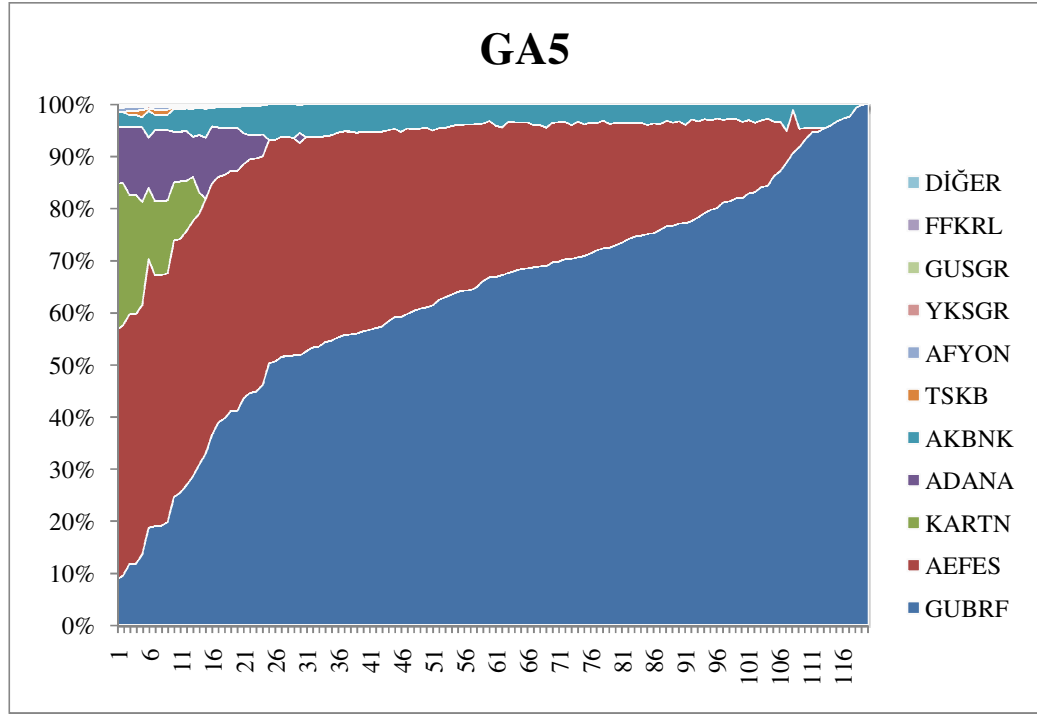
Grafik 4: Etkin Sınırdaki Bulunan Portföylerdeki Varlıkların Dağılımı



(Grafik 4'ün Devamı)



(Grafik 4'ün Devamı)



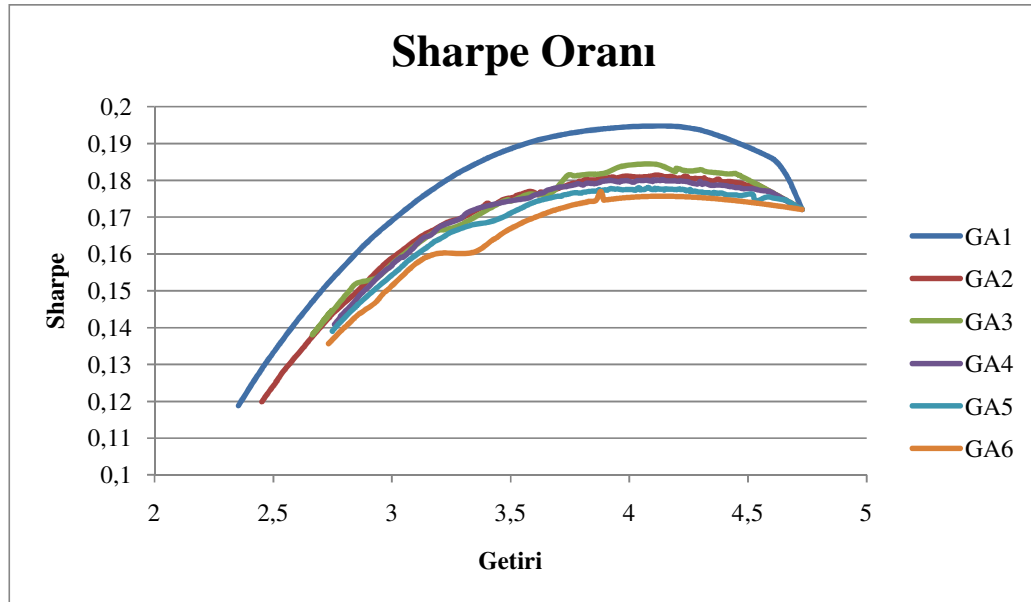
Grafikler incelendiğinde, GA2, GA3, GA4 ve GA5 etkin sınırlarında neredeyse etkin sınırın tamamı boyunca AKBNK hissesinin kullanıldığı göze çarpacaktır. Bu hissenin, veri kümesinde getiriye göre standart sapma oranı 0,20 değeriyle 0,23 değer almış GUBRF hissesinden sonra ikinci olan hisse olması dikkat çekicidir. Portföylerde kullanılan diğer varlıklar da incelendiğinde, etkin sınırların riskin ve getirinin yüksek olduğu kısımlarında çeşitlendirmeyeyle riskin azaltılmasından çok, özellikle getirisi yüksek ve getirisine oranla standart sapması düşük olan hisselerin seçilmiş olduğu görülmektedir. Bu duruma ilginç bir istisna FFKRL hissesinde bulunmaktadır. Varyans ölçütüyle elde edilen etkin sınırın risk yüksek bölümünde, AKBNK portföydeki yerini bu hisseye bırakmaktadır. Bu hissenin özelliği, veri kümesi içinde fazla getiriye oranla standart sapmasının en yüksek ikinci hissesi olmasıdır.

3.3.3 Bulunan Etkin Sınırların Değerlendirilmesi

Uygulamada aynı portföy için değişik değer aralıklarında ve değişik anlamlar içeren çıktılar üreten risk ölçütleri kullanılmaktadır. Bu ise elde edilen etkin sınırların ve portföylerin birbirleriyle karşılaştırılmasını güçleştirmektedir. Bu durum, etkin sınırların Sharpe ve Sortino oranlarıyla karşılaştırıldığı grafikler incelendiğinde görülebilir. Grafiklerde, etkin sınırlar anılan performans ölçütleriyle kıyaslandığında alınması beklenen sonuçların elde edildiği gözlenebilecektir.

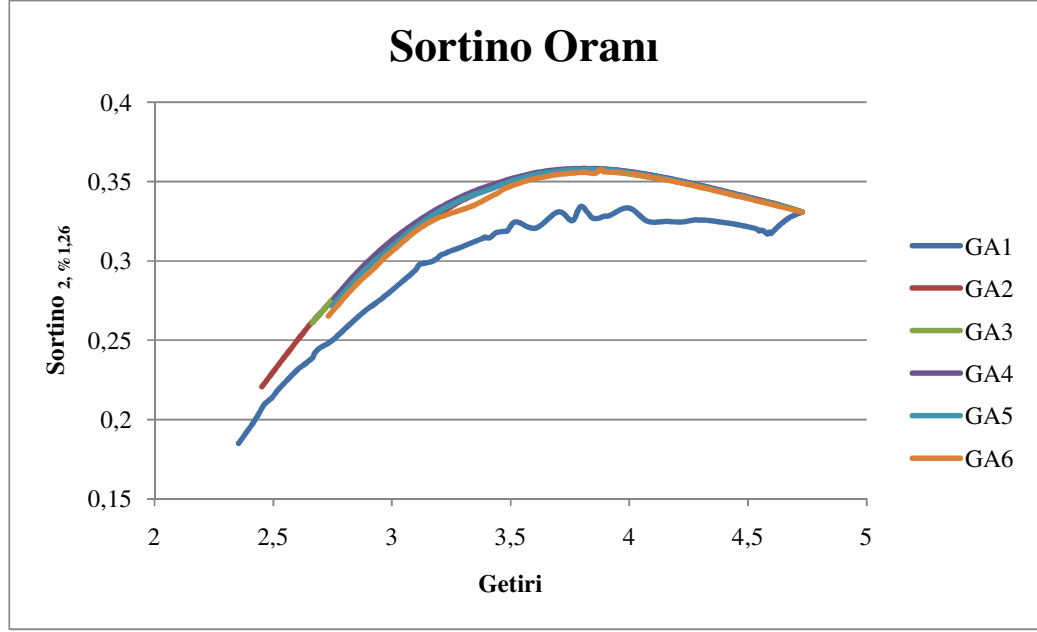
Etkin sınırdaki yer alan portföylerin Sharpe değerleriyle oluşturulan *Grafik 5*'te, varyans risk ölçütünün kullanıldığı GA1 etkin sınırının Sharpe oranıyla en başarılı

değerlere sahip olduğu göze çarpmaktadır. Diğer risk ölçütleri kullanılarak elde edilen etkin sınırlar birbirine çok yakın değerler vermekle beraber, GA5 ve GA6 etkin sınırları diğerlerinden daha kötü sonuçlar vermiştir. $LPM_{1,5, \%1,26}$ ölçütünün %4 getiri civarındaki değerlerde diğerlerinden biraz daha üstün olduğu görülebilmektedir. Dikkate değer bir diğer nokta da, yarı-varyans ve $LPM_{2, \%1,26}$ kullanılan GA2 ve GA4 etkin sınırlarının hemen hemen birbirinin aynı değerler vermiş olmasıdır.



Grafik 5: Etkin Sınırların Sharpe Oranı ile Karşılaştırılması

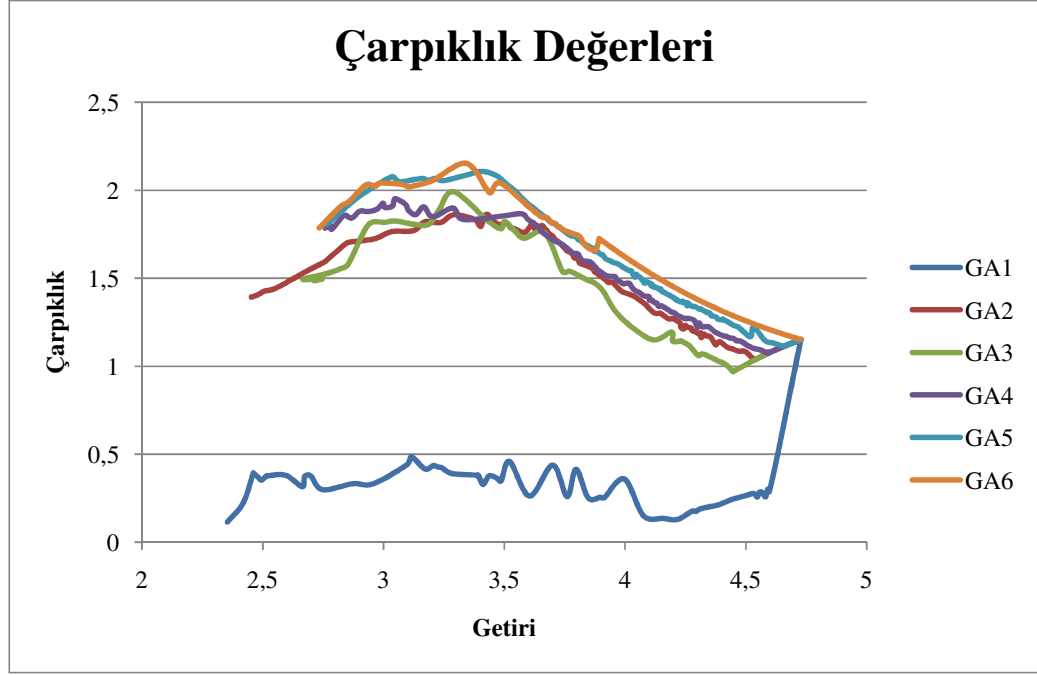
Uygulamada elde edilen etkin sınırlar Sortino_{2, %1,26} oranıyla değerlendirildiğinde, varyans dışındaki risk ölçütlerinin birbiriyle neredeyse aynı sonuçlar vermesi dikkat çekicidir. Varyans ise bu performans ölçütü kullanıldığında belirgin bir şekilde diğerlerinden daha kötü sonuç vermektedir.



Grafik 6: Etkin Sınırların Sortino Oranı ile Karşılaştırılması

Grafik 5'te varyans dışındaki ölçütlerin, *Grafik 6*'da ise varyansın kullanıldığı etkin sınırların grafiklerinde düzensizliklerin olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum, söz konusu düzensizliğin, kayıp riski ölçütlerinin süreksizliğinden veya kesikli yapısından kaynaklandığı şeklinde açıklanabilir.

Portföylerin değerlendirileceği bir başka kriter de çarpıklık katsayılarıdır. Elde edilen portföylerin çarpıklık değerleri *Grafik 7*'de verilmektedir. Varyansın minimize edilmesi amaçlanan ortalama-varyans modelinde çarpıklıkla ilgili herhangi bir hesaplama adımı bulunmamaktadır. Bu durumda elde edilen bu çarpıklık değerlerinin yan etki olarak ortaya çıktığı söylenebilecektir. Varyans risk modeliyle elde edilen portföylerdeki çarpıklık değeri genel olarak 0,5'in altında seyretmektedir. Çarpıklığın diğerlerinden belirgin bir şekilde az olması, varyansın ortalama getirinin her iki yanındaki aşırılıkların azaltma yönünde eğilimi ile açıklanabilir.



Grafik 7: Elde Edilen Etkin Sınırların Çarpıklık Değerleri

Varyans dışındaki diğer risk modelleriyle elde edilen portföylerin çarpıklık değerlerinin ise oldukça yüksek olduğu görülmektedir. Bu modellerle varyans modeliyle elde edilen çarpıklığa nazaran aynı getiri için 2,5 ila 4,5 katına varan çarpıklık değerine sahip portföyler elde edilmiştir. Elde edilen pozitif çarpıklık değerleri, getirilerin olasılık dağılımının sola çarpık olduğunu gösterir. Bu da dağılımın kazanç yönündeki kuyruğunun daha uzun olmasını sağlayacaktır. Bu yüzden anılan modellerle istenen yönde çarpıklık elde edildiği söylenebilecektir. Bundan dolayı, tezin konusunu oluşturan risk modellerinin kayıp riskinin azaltılması açısından varyanstan daha yüksek başarımlar sağladığı söylenebilecektir.

Sonuç

Modern portföy teorisinin temellerini atan Markowitz'in geliştirdiği getiri-risk konsepti ile riskin sayısal olarak ifade edilmesi önerilmektedir. Finans alanında yepyeni bir akım başlatan bu yaklaşımda, risk ilk defa varyans ile tanımlanmaktadır. Aynı getiriye sahip iki yatırım arasından getirileri daha düzenli olanı seçmeye olanak tanıyan varyans kullanımı, hesaplama açısından basit ve uygun olması dolayısıyla kısa zamanda finans dünyasında popüler hale gelmiştir.

Bununla birlikte, Markowitz de dahil olmak üzere çeşitli araştırmacılar tarafından, varyansın, yatırımcının risk algısına çok da uygun olan bir risk modeli olmadığı dile getirilmektedir. Yatırımcılar kayıpları kazançlara göre daha çok önemserler. Bir yatırımdan beklenenin altında getiri elde edilmesi felaket olarak adlandırılabilir iken, normalin üzerinde kazandırması yatırımcıyı en fazla sevindirecektir. Varyans ise kayıp ve kazançta eşit ağırlık vermekte, kazançları kayıplar ile aynı derecede cezalandırmaktadır. Varyans bu şekilde normal dağılım gösteren getirilerle uyumlu çalışırken, gerçek hayattaki getirileri normal dağılımda olmayan varlıklarda kullanıldığında düzgün sonuçlara ulaşılmasını güçleştirmektedir. Bunlara ek olarak, varyans ile düzgün sonuçlar elde edilebilmesi için, yatırımcının fayda fonksiyonunun kuadratik bir fonksiyon olması gerekmektedir. Bu durumun çok olası görülmediği ise çeşitli akademisyenler tarafından dile getirilmiştir.

Varyans modelinin sorgulanmaya başlamasıyla beraber çeşitli kayıp riski ölçütleri geliştirilmiştir. Bu risk ölçütlerinden birisi olan ve bu tezin konusunda yer alan yarı-varyans, modern portföy teorisinin kurucularından olan Markowitz tarafından önerilmiştir. Yarı-varyans, varyans hesaplamasına sadece ortalamanın altındaki getirilerin dahil edilmesiyle hesaplanmaktadır. Bu şekilde yapılan hesaplama ile kazanç yönündeki varyasyonlar risk büyüklüğünü etkilememektedir.

Tezin konusunda bulunan bir diğer risk ölçütü olan alt kısmi moment, Bawa ve Fishburn tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu ölçüt ile belirli bir hedef getirinin altında kalan getirilerin belirli derecedeki momenti hesaplanmaktadır. Alt kısmi moment ölçütünün parametreleri ile risk, yatırımcının risk arzusuna göre istenen şekilde belirlenebilmektedir. Bununla birlikte, bu parametrelerinin belirlenme şekline göre literatürde bulunan beklenen kayıp ve yarı-varyans ölçütleri elde edilebilmektedir.

Bahsedilen bu kayıp riski ölçütleri, aynı ortalamaya sahip iki varlık arasında kayıp olasılığı daha düşük olanı tercih etmeye olanak tanımaktadır. Bu yönden yatırımcının risk algısına daha çok hitap etmektedir. Bununla birlikte elde edilen portföye istenen yönde çarpıklık kazandırması ve stokastik üstünlük kavramı ışığında daha geniş bir kümeden seçim yapabilmeye imkan tanınması, bu risk ölçütünün diğer üstün özellikleri arasındadır.

Sözü edilen risk ölçütlerinin kullanımındaki hesaplama güçlüklerini aşmak için sayısal çözüm teknikleri arasından, kaynağını doğadan ilham almış sezgisel bir

özüm tekniği olan genetik algoritmalar seçilmiştir. İlk olarak Holland tarafından ortaya atılan ve Goldberg tarafından kapsamlı bir şekilde incelenerek geliştirilen genetik algoritmalar, sade fakat güçlü yapısı ve parametrelerin esnek bir şekilde belirlenmesiyle çok çeşitli problemlere çözüm imkanı tanınması dolayısıyla, çok çeşitli alanda uygulama imkanı bulmakta ve kullanılmaktadır.

Portföy optimizasyonu problemi, esas olarak bir çok amaçlı optimizasyon problemidir. Problemin, getiri-risk eksenleri altında pareto etkin sınırın elde edilmesine indirgenmesi, uygulanacak olan genetik algoritmanın da bu yönde modifiye edilmesini gerektirmiştir. Yapılan alışma sonucunda genetik algoritma etkin sınırın bir bütün olarak elde edilmesine olanak tanıyacak şekilde modifiye edilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde geliştirilen genetik algoritma uygulaması İMKB-100 endeksine dahil hisse senetlerinin 2009 yılına kadar olan 100 aylık geçmiş verileriyle test edilmiştir. Risk ölçütü olarak karşılaştırmak üzere farklı parametrelere sahip dört adet alt kısmi moment ölçütü, yarı-varyans ve varyans kullanılmıştır. Elde edilen etkin sınırlar ve bunlar üzerine yapılan değerlendirilmeler yine bu bölümde yer almaktadır.

Genel olarak, etkin sınırlarda daha yüksek riske sahip portföylerin, getirisi yüksek ve riskli birkaç varlığın değerik ağırlıklardaki bileşiminden oluştukları görölmektedir. Elde edilen düşük riskli portföyler ise çeşitlendirilmiş portföylerdir. Sonuçlar incelendiğinde, varyans ile sayıca daha çok varlık içeren portföyler elde edildiği

gözlennmektedir. Varyans ile en çok 16 varlık kullanılarak risk minimize edilebilirken, yarı-varyans ve LPM_2 ölçütleriyle en fazla 8 varlık kullanılarak riskin minimize edilmesi sağlanabilmiştir.

Elde edilen etkin sınırların değerlendirilmesi için etkin sınırdaki bulunan portföylerin akademik açıdan geçerli kabul edilen performans ölçütlerinden Sharpe ve Sortino oranları hesaplanmıştır. Anılan performans kriterlerinin, çeşitli akademisyenlerin belirttiği gibi, kendi risk tanımları altında optimize edilen portföyleri daha üstün bulduklarına tanık olunmuştur. Bu şekilde farklı risk birimlerinin birbirleriyle karşılaştırılmasına imkan bulunmadığı görülebilecektir. Portföylerin karşılaştırıldığı bir diğer kriter de çarpıklık katsayılarıdır. Elde edilen etkin sınırlar çarpıklık katsayısı yönünden birbiriyle karşılaştırıldıklarında, teorik olarak öngörüldüğü şekilde, kayıp riski ölçütleri kullanılan etkin sınırların çarpıklık değerleri açısından çok daha üstün oldukları belirlenmiştir.

Gelecekte olacaklar belirsizdir. Portföy seçimi probleminin temelinde de bu belirsizlik yatmaktadır. Riskin tanımının daha anlamlı bir şekilde belirlenmesi sonucunda yatırımcının risk algısına ve sağduyuya uygun hale getirilmesi bu belirsizliğin azalmasına yol açacağı gibi, istenen özellikte portföy seçilebilmesine imkan tanıyarak elde edilen portföylerin kalitesini artıracaktır. Kayıp riski ölçütleri sözü edilen amaçların elde edilmesine imkan tanımakta olup, ileride yatırımcılar ve akademisyenler arasında çok daha popüler olacağı yönünde umut vermektedir.

Özet

Portföy optimizasyonu uzun zamandır yatırımcıların ve araştırmacıların ilgisini çeken bir konu olmuştur. Portföy optimizasyonu, esas olarak getirinin maksimize edilmesi ve riskin minimize edilmesinin hedeflendiği bir çok amaçlı optimizasyon problemidir. Problemin çözümü sonucunda elde edilen sonuçların geçerliliği açısından, bu problemin parametrelerinin doğru olarak tanımlanması önem taşımaktadır.

Çeşitli araştırmacılar tarafından yatırımcıların risk algısını daha iyi temsil ettikleri belirtilen kayıp riski ölçütlerinin arasında bulunan yarı-varyans ve alt kısmi moment ölçütleri kullanılarak portföy optimizasyonu uygulamasının gerçekleştirildiği bu çalışmada, pareto etkin portföylerin elde edilmesi için sezgisel hesaplama tekniklerinden birisi olan genetik algoritmaların kullanılması tercih edilmiştir. Geliştirilen uygulama İMKB 100 endeksine kayıtlı hisse senetlerinin geçmiş verileriyle test edilmiş ve elde edilen etkin sınırların elde edilmesi beklenen sonuçlarla uyum içerisinde bulunduğu gözlenmiştir.

Summary

Portfolio optimization has long been a matter of interest for investors and researchers. It is mainly a multi-objective optimization problem that aims to maximize expected return while minimizing risk. It is important to define the meaning of these parameters accurately, in terms of validity that is acquired by the solution of the problem.

In this study, portfolio optimization is implemented through two downside risk measures, semi-variance and lower partial moment, which are stated by researchers to be better representation for investors risk perception. Genetic algorithms, which are among the heuristic computational methods, are used to achieve pareto-efficient portfolios. The implementation is tested by historical data of the shares that are authorized to Istanbul Stock Exchange-100 Index, and it is observed that the efficient portfolios achieved by the implementation are consistent with expected results.

Kaynakça

- Acerbi, C., Tasche, D., (2001), "Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk", **Economic Notes**, Vol. 31, No. 2, s. 379–388.
- Artzner, P., et al., (1999) "Coherent Measures of Risk", **Mathematical Finance**, Vol. 9, No. 3, s. 203–228.
- Bäck, Thomas, (1993), "Optimal Mutation Rates in Genetic Search", **Proceedings of the fifth International Conference on Genetic Algorithms**, Publisher Morgan Kaufmann, s. 2–8.
- Ballesterio, E., (2005), "Mean-Semivariance Efficient Frontier: A Downside Risk Model for Portfolio Selection", **Applied Mathematical Finance**, Vol. 12, No. 1, s. 1–15.
- Bawa, Vijay S., (1978), "Safety-First, Stochastic Dominance, and Optimal Portfolio Choice", **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol. 13, No. 2, s. 255–271.
- Bawa, Vijay S., Lindenberg, Eric B., Rafsky, Lawrence C., (1979), "An Efficient Algorithm to Determine Stochastic Dominance Admissible Sets", **Management Science**, Vol. 25, No. 7, s. 609-622.
- Beasley, D., Bully, David R., Martin, Ralph R., (1993a), "An Overview of Genetic Algorithms: Part 1, Fundamentals", **University Computing**, Vol.15, No. 2, s. 58–69.
- Beasley, D., Bully, David R., Martin, Ralph R., (1993b), "An Overview of Genetic Algorithms: Part 2, Research Topics", **University Computing**, Vol.15, No. 2, s. 170–181.

- Beninga, S., Wiener, Z., (1998), “Value-at-Risk”, **Mathematica in Education and Research**, Vol. 7, No. 4.
- Biglova, A., et al., (2004), “Comparison Among Different Approaches For Risk Estimation in Portfolio Theory”, **Journal of Portfolio Management**, Vol. 31, s. 103–112.
- Bozkuş, S., (2005), “Risk Ölçümünde Alternatif Yaklaşımlar: Riske Maruz Değer (VaR) ve Beklenen Kayıp (ES) Uygulamaları”, **Dokuz Eylül Üniversitesi İ.İ.B.F. Dergisi**, Cilt: 20, Sayı:2, s. 27–45.
- Brealey, R. A., Myers, S. C., Marcus, A. J., (2004), **Fundamentals of Corporate Finance**, McGraw-Hill/Irwin.
- Campbell, R., Huisman, R., Koedijk, K., (2001), “Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework”, **Journal of Banking & Finance**, Vol. 25, s. 1789–1804.
- Chaudhry, A., Johnson, H.L., (2008), “The Efficacy of the Sortino Ratio and Other Benchmarked Performance Measures Under Skewed Return Distributions”, **Australian Journal of Management**, Vol. 32, No. 3, Özel Sayı, s. 485–502.
- Chen, D., Chen, C., Chen, J., (2007), “Downside risk measures and equity returns in the NYSE”, **Applied Economics**, iFirst, 2007, s.1–16.
- Chen, Song X., (2008), “Nonparametric Estimation of Expected Shortfall”, **Journal of Financial Econometrics**, Vol. 6, No. 1, s. 87–107.
- Clarke, Roger G., (2003), “Measuring and Managing Investment Risk”, **The Handbook of Risk**, John Wiley & Sons, Ben Warwick (Editor), Ch. 5, s. 45–56.

- Coutino-Gomez, C.A., Torres-Jimenez, J., Villarreal-Antelo, B.M., (2003), "Heuristic Methods for Portfolio Selection at the Mexican Stock Exchange", **Intelligent Data Engineering and Automated Learning**, Springer Berlin/Heidelberg, s. 919–923.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., Meyarivan, T., (2002), "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II", **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, Vol. 6, No. 2, s. 182–197.
- Dreo, J., Petrowski, A., Siarry, P., Taillard, E., (2006), **Metaheuristics for Hard Optimization**, Springer
- Fama, Eugene F., (1971), "Risk, Return, and Equilibrium", **The Journal of Political Economy**, Vol. 79, No. 1, s. 30–55.
- Fama, Eugene F., French, Kenneth R., (2004), "The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence", **The Journal of Economic Perspectives**, Vol. 18, No. 3, s. 25–46.
- Fernandez, Gomez, (2007), "Portfolio selection using neural networks", **Computers & Operations Research**, Vol. 34, No. 4, s. 1177–1191.
- Fishburn, Peter C., (1977), "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns", **The American Economic Review**, Vol. 67, No. 2, s. 116–126.
- Fisher, R.A., (1918), "The Correlation between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance", **Philosophical Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, Vol. 52, s. 399–433.

- Fonseca, Carlos M., Fleming, Peter J., (1993), "Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization", **5th International Conference on Genetic Algorithms**, s. 416-423.
- Gen, M, Cheng, R., Lin, L., (2008), **Network Models and Optimization Multiobjective Genetic Algorithm Approach**, Springer-Verlag London Limited.
- Goldberg, David E., Deb, Kalyanmoy, Clark, James H., (1991), "Genetic Algorithms, Noise, and the Sizing of Populations", **Complex Systems**, Vol. 6, s. 333-362.
- Grefenstette, John J., (1986), "Optimization of Control Parameters for Genetic Algorithms", **IEEE Transactions On Systems, Man, And Cybernetics**, Vol. SMC-16, No. 1., s. 122–128.
- Grootveld, H., Hallerbach, W., (1999), "Variance vs. downside risk: Is there really that much difference?", **European Journal of Operational Research**, Vol. 114, s. 304–319.
- Groner, R., Groner, M., Bischof, Walter F., (1983), "Approaches to Heuristics: A Historical Review", **Methods of Heuristics**, Lawrence Erlbaum Associates, s. 1–15.
- Hadar, J., Russell, William R., (1969), "Rules for Ordering Uncertain Prospects", **The American Economic Review**, Vol. 59, No. 1, s. 25-34.
- Harlow, W. V., Ramesh, K., Rao, S., (1989), "Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence", **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol. 24, No. 3, s. 285–311.

- Haupt, Randy L., (2000), "Optimum population size and mutation rate for a simple real geneticalgorithm that optimizes array factors", **IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium**, Vol. 2, s. 1034-1037.
- Haupt, Randy L., Haupt, Sue E., (2004), **Practical Genetic Algorithms**, Second Edition, Wiley.
- Herrera, F., Lozano, M., Verdegay, J.L., (1998), "Tackling Real-Coded Genetic Algorithms: Operators and Tools for Behavioural Analysis", **Artificial Intelligence Review**, Vol. 12, No. 4, s. 265-319.
- Holland, J. H., (1975), **Adaptation in Natural and Artificial Systems**, University of Michigan Press. (Second edition: MIT Press, 1992.)
- Horn, J., Nafpliotis, N., Goldberg, David E., (1994), "A Nicheed Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization", **First IEEE Conference on Evolutionary Computation**, IEEE World Congress on Computational Intelligence, s. 82–87.
- Huang, X., (2007), "Two New Models For Portfolio Selection With Stochastic Returns Taking Fuzzy Information", **European Journal of Operational Research**, Vol. 180, s. 396–405.
- Huang, X., (2007), "Portfolio Selection with a New Definition of Risk", **European Journal of Operational Research**, Vol. 186, 2008, s. 351–357.
- Jarrow, R., Zhao, F., (2006), "Downside Loss Aversion and Portfolio Management", **Management Science**, Vol. 52, No. 4, s. 558–566.
- Jensen, Michael C., (1968), "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964", **The Journal of Finance**, Vol. 23, No. 2, s. 389–416.

- Kılıçkaplan, S., (2000), **İstatistiğe Giriş I**, Alkım Kitabevi, 6. baskı.
- Konuralp, G., (2005) **Sermaye Piyasaları, Analizler Kuramlar ve Portföy Yönetimi**, Alfa yayınları, 2. baskı.
- Kraus, A., Litzenberger, Robert H., (1976), "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", **The Journal of Finance**, Vol. 31, No. 4, s. 1085-1100.
- Leitner, J., (2008), "Optimal Portfolios with Lower Partial Moment Constraints and LPM-Risk-Optimal Martingale Measures", **Mathematical Finance**, Vol. 18, No. 2, s. 317–331.
- Lin, C., Liu, Y., (2008), "Genetic Algorithms for Portfolio Selection Problems with Minimum Transaction Lots", **European Journal of Operational Research**, Vol. 185, s. 393–404.
- Manganelli, S., Engle, Robert F., (2001), "Value-at-Risk Models in Finance", **ECB Working Paper Series**, No. 75.
- Markowitz, Harry M., (1952), "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, Mart 1952, s. 77–91.
- Markowitz, Harry M., (1956) "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints", **Naval Research Logistics Quarterly**, No. 3, s. 111-133.
- Markowitz, Harry M., (1959), **Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investment**, Yale University Press.
- Markowitz, Harry M., (1991), "Foundations of Portfolio Theory", **The Journal of Finance**, Vol.46, No.2, s. 469–477.

- Markowitz, Harry M., (1999), “The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”, **Financial Analysts Journal**, Vol. 55, No. 4, s. 5–16.
- Markowitz, Harry M.; Todd, P., Xu, G., Yamane, Y., (1993), “Computation of mean-semivariance efficient sets by the Critical Line Algorithm”, **Annals of Operations Research**, Vol. 45, No. 1, s. 307–317.
- Merton, Robert C., (1969), “Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case”, **The Review of Economics and Statistics**, Vol. 51, No. 3, s. 247–257.
- Michalewicz, Z., (1996), **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**, Springer, 3. baskı.
- Miller, Brad L., Goldberg, David E., (1995), “Genetic Algorithms, Tournament Selection and the Effects of Noise”, **Complex Systems**, Vol. 9, s. 193–212.
- Mitchell, Melanie, (1999), **An Introduction to Genetic Algorithms**, A Bradford Book The MIT Press, Cambridge, 5. Baskı.
- Nawrocki, David N., (1991), “Optimal Algorithms And Lower Partial Moment: Ex-Post Results”, **Applied Economics**, Vol. 23, s. 465–470.
- Nawrocki, David N., (1999), “A Brief History of Downside Risk Measures”, **Journal of Investing**, Güz 1999, s. 9–25.
- Nwogugu, M., (2007), “Correlation, Variance, Semi-Variance and Covariance are Irrelevant in Risk Analysis, Mechanics and Portfolio Management”, SSRN Working Papers, 2007.

- Pedersen, Christian S., Satchell, Stephen E., (2002), "On The Foundation of Performance Measures under Asymmetric Returns", **Quantitative Finance**, Vol. 2, No. 3, s. 217–223.
- Price, K., Price, B., Nantell, Timothy J., (1982), "Variance and Lower Partial Moment Measures of Systematic Risk: Some Analytical and Empirical Results", **The Journal of Finance**, Vol. 37, No. 3, s. 843–855.
- Puelz, Amy V., (2001), "Value-at-Risk Based Portfolio Optimization", **Stochastic Optimization: Algorithms and Applications**, Uryasev, S. ve Pardalos, P.M. editör, Kluwer Academic Publishers, s. 279–302.
- Roy, A. D., (1952), "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol. 20, No. 3, **The Econometric Society**, s. 431–449.
- Rudolph, G., (1994), "Convergence Analysis of Canonical Genetic Algorithms", **IEEE Transactions on Neural Networks**, Vol. 5, No. 1, s. 96–101.
- Sayılğan, G., (2006), **Soru ve Yanıtlarla İşletme Finansmanı**, Turhan Kitabevi Yayınları, Ankara.
- Sharpe, William F., (1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", **The Journal of Finance**, Vol. 19, No. 3, s. 425–442.
- Sharpe, William F., (1994), "The Sharpe Ratio", **The Journal of Portfolio Management**, Vol. 21, No. 1, s. 49–58.
- Sharpe, William F., Alexander, Gordon J., Bailey, Jeffery V., (1999), **Investments**, Prentice Hall, 6th International Edition, 1999.

- Sharpe, William F., (2007), "Expected Utility Asset Allocation", **Financial Analysts Journal**, CFA Institute, Vol. 63, No. 5, s.18–30.
- Srinivas, N., Deb, K., (1994), "Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms", **Evolutionary Computation**, Vol. 2, s. 221–248.
- Temby, L., Vamplew, P., Berry, A., (2005), "Accelerating Real-Valued Genetic Algorithms Using Mutation-with-Momentum", **AI 2005: Advances in Artificial Intelligence**, s. 1108–1111. (kitab)
- Unser, M., (2000), "Lower Partial Moments as Measures of Perceived Risk: An Experimental Study", **Journal of Economic Psychology**, Vol. 21, s. 253–280.
- Veldhuizen, David A. Van, Lamont, Gary B., (1998), "Evolutionary Computation and Convergence to a Pareto Front", **Stanford University**, California.
- Whitmore, G. A., (1970), "Third-Degree Stochastic Dominance", **The American Economic Review**, Vol. 60, No. 3, s. 457-459.
- Wright, Alden H., (1991), "Genetic Algorithms for Real Parameter Optimization", **Foundations of Genetic Algorithms**, Morgan Kaufmann, s. 205–218.
- Yan, W., Miao, R., Li, S., (2007), "Multi-period Semi-variance Portfolio Selection: Model and Numerical Solution", **Applied Mathematics and Computation**, Vol. 194, s.128–134.
- Yang, X., (2006), "Improving Portfolio Efficiency: A Genetic Algorithm Approach", **Computational Economics**, Vol. 28, No. 1, s. 1–14.

Yun, Y.B., et al., (2001), “Generation of Efficient Frontiers in Multi-objective Optimization Problems by Generalized Data Envelopment Analysis”, **European Journal of Operational Research**, Vol. 129, s. 586–595.

İMKB web sitesi, <http://www.imkb.gov.tr> (Erişim Tarihi 1 Mart 2009)

TDK web sitesi, <http://www.tdk.gov.tr> (Erişim Tarihi 23 Mart 2009)

Wolfram Mathworld web sitesi, <http://mathworld.wolfram.com> (Erişim Tarihi 23 Mart 2009-25 Nisan 2009)

Ekler

Ek 1. Veri Kümesine Dahil Edilen Hisse Senetleri

1.1.2009 Tarihinde İMKB-100 Endeksine Dahil Olan Hisse Senetleri*

Hisse Kodu	Hisse Adı	Veri Sayısı		Hisse Kodu	Hisse Adı	Veri Sayısı	
ADANA	ADANA ÇİMENTO (A)	215	x	KRDMD	KARDEMİR (D)	127	x
AEFES	ANADOLU EFES	102	x	MARTI	MARTI OTEL	227	x
AFYON	AFYON ÇİMENTO	214	x	MERKO	MERKO GIDA	171	x
AKBNK	AKBANK	222	x	MIGRS	MİGROS	215	x
AKCNS	AKÇANSA	147	x	NTHOL	NET HOLDİNG	231	x
AKENR	AK ENERJİ	102	x	NTTUR	NET TURİZM	218	x
AKGRT	AKSİGORTA	169	x	OTKAR	OTOKAR	165	x
AKSA	AKSA	229	x	PEGYO	PERA GMYO	201	x
ALARK	ALARKO HOLDİNG	236	x	PETKM	PETKİM	222	x
ALKIM	ALKİM KİMYA	106	x	PRKTE	PARK ELEK.MADENCİLİK	135	x
ANHYT	ANADOLU HAYAT EMEK.	107	x	PTOFS	PETROL OFİSİ	212	x
ANSGR	ANADOLU SİGORTA	183	x	SAHOL	SABANCI HOLDİNG	138	x
ARCLK	ARÇELİK	276	x	SASA	ADVANSASA	146	x
AELS	AELSAN	221	x	SISE	ŞİŞE CAM	276	x
AYGAZ	AYGAZ	230	x	SKBNK	ŞEKERBANK	141	x
BAGFS	BAGFAŞ	276	x	TATKS	TAT KONSERVE	185	x
BANVT	BANVİT	194	x	TELL	TURKCELL	102	x
BOYNR	BOYNER MAĞAZACILIK	151	x	TEBNK	T.EKONOMİ BANK.	107	x
CIMSA	ÇİMSA	276	x	TEKST	TEKSTİLBANK	224	x
CLEBI	ÇELEBİ	146	x	THYAO	TÜRK HAVA YOLLARI	217	x
DGZTE	DOĞAN GAZETECİLİK	184	x	TOASO	TOFAŞ OTO. FAB.	210	x
DOHOL	DOĞAN HOLDİNG	187	x	TRCAS	TURCAS PETROL	110	x
DYHOL	DOĞAN YAYIN HOL.	125	x	TRKCM	TRAKYA CAM	218	x
ECILC	ECZACIBAŞI İLAÇ	223	x	TSKB	T.S.K.B.	238	x
ECZYT	ECZACIBAŞI YATIRIM	276	x	TUPRS	TÜPRAŞ	212	x
EGGUB	EGE GÜBRE	276	x	VESTL	VESTEL	223	x
EGSER	EGE SERAMİK	191	x	YAZIC	YAZICILAR HOLDING	107	x
EREGL	EREĞLİ DEMİR ÇELİK	276	x	YKBNK	YAPI VE KREDİ BANK.	259	x
FFKRL	FİNANS FİN. KİR.	183	x	YKSGR	YAPI KREDİ SİGORTA	170	x
FORTS	FORTIS BANK	220	x	ZOREN	ZORLU ENERJİ	104	x
FROTO	FORD OTOSAN	276	x	AGYO	ATAKULE GMYO	83	
GARAN	GARANTİ BANKASI	223	x	ALBRK	ALBARAKA TÜRK	19	
GLYHO	GLOBAL YAT. HOLDİNG	164	x	ANELT	ANEL TELEKOM	40	
GOLDS	GOLDAS KUYUMCULUK	109	x	ASYAB	ASYA KATILIM BANKASI	32	
GRUND	GRUNDİG ELEKTRONİK	195	x	BIMAS	BİM MAĞAZALAR	42	
GSDHO	GSD HOLDİNG	110	x	CCOLA	COCA COLA İÇECEK	32	
GUBRF	GÜBRE FABRİK.	276	x	DOAS	DOĞUŞ OTOMOTİV	55	
GUSGR	GÜNEŞ SİGORTA	170	x	ENKAI	ENKA İNŞAAT	78	
HURGZ	HÜRRIYET GZT.	203	x	FENER	FENERBAHÇE SPORTİF	59	
IHEVA	İHLAS EV ALETLERİ	147	x	HALKB	T. HALK BANKASI	20	
IHLAS	İHLAS HOLDİNG	178	x	KOZAA	KOZA MADENCİLİK	71	
ISAMB	IŞIKLAR AMBALAJ	175	x	RYSAS	REYSAŞ LOJİSTİK	35	
ISCTR	İŞ BANKASI (C)	254	x	SELEC	SELÇUK ECZA DEPOSU	33	
ISFIN	İŞ FİN.KİR.	106	x	SNGYO	SİNPAŞ GMYO	19	
ISGYO	İŞ GMYO	109	x	TAVHL	TAV HAVALİMANLARI	23	
IZMDC	İZMİR DEMİR ÇELİK	276	x	TKFEN	TEKFEN HOLDİNG	14	
KARSN	KARSAN OTOMOTİV	107	x	TTKOM	TÜRK TELEKOM	8	
KARTN	KARTONSAN	276	x	ULKER	ÜLKER BİSKÜVİ	59	
KCHOL	KOÇ HOLDİNG	276	x	VAKBN	VAKIFLAR BANKASI	38	
KIPA	TESCO KİPA	134	x	VESBE	VESTEL BEYAZ EŞYA	33	

* (x) işaretli hisseler veri kümesine dahil edilmiştir.

Ek 2. Genetik Algoritma Parametrelerinin Belirlenmesi Üzerine Yapılan Denemeler

Sıra ¹	Risk	Çapraz Eşleme Tipi	Mutasyon Oranı ² (a)	Mutasyon Oranı ³ (b)	Toplam Mutasyon Oranı ⁴ (c)	Yakın-sama ⁵	Etkin Sınır Altında Kalan Alan ⁶
1	Varyans	Uygulanan	0,5	0,3	0,65	332	1.315,72
2	Varyans	BLX	0,5	0,3	0,65	257	1.313,78
3	Varyans	Simple	0,5	0,3	0,65	4999	1.281,33
4	Varyans	Uygulanan	0	0,3	0,3	483	1.309,10
5	Varyans	Uygulanan	0,5	0	0,5	499	946,22
6*	Varyans	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	362	1.317,13
7	Varyans	Uygulanan	0,5	0,3	0,65	421	1.314,70
8*	Yarı-Varyans	Uygulanan	0,5	0,3	0,65	336	462,73
9	Yarı-Varyans	Uygulanan	0,5	0,1	0,55	435	458,79
10	Yarı-Varyans	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	406	462,10
11	Yarı-Varyans	Uygulanan	0,1	0,3	0,37	187	458,25
12	LPM _{2, %3}	Uygulanan	0,5	0,3	0,65	204	351,40
13	LPM _{2, %3}	Uygulanan	0,5	0,1	0,55	446	360,48
14	LPM _{2, %3}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	361	361,34
15	LPM _{2, %3}	Uygulanan	0,1	0,3	0,37	197	360,65
16	LPM _{2, %1.26}	Uygulanan	0,5	0,3	0,65	164	321,89
17	LPM _{2, %1.26}	Uygulanan	0,5	0,1	0,55	347	323,24
18*	LPM_{2, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	299	325,15
19	LPM _{2, %1.26}	Uygulanan	0,1	0,3	0,37	421	324,33
20	LPM _{0.5, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	499*	1,98
21	LPM _{1, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	499*	10,73
22*	LPM_{1.5, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	228	55,97
23*	LPM_{2.5, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	284	1.890,69
24*	LPM_{3, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	281	11.179,10
25	LPM _{3.5, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	273	66.473,50
26	LPM _{4, %1.26}	Uygulanan	0,3	0,3	0,51	413	399.089,78

¹ (*) işaretli denemeler tezin uygulama kısmında kullanılmaktadır.

² Portföydeki bir varlığın ağırlığını değiştirme olasılığını gösterir.

³ Portföyden rastgele bir varlığı çıkarma olasılığını ifade eder.

⁴ Toplam mutasyon oranını belirtir. $c = 1 - (1-a)(1-b)$ formülüyle hesaplanmıştır.

⁵ Tüm bireylerin etkin sınırdaki yer aldığı iterasyon sayısını belirtir. (*) işaretli denemelerde yakınsama sağlanamamıştır.

⁶ Bulunan etkin sınırın altında kalan alanı birim kare cinsinden gösterir. Daha yüksek değerler daha iyi başarıyı ifade eder.

Ek 3. Risksiz Faiz Oranının Hesaplanması

Menkul Kıymetler	Valör	Vadeye Kalan Gün Sayısı	Bileşik Getiri % (Kapamış)
<i>Devlet Tahvili</i>			
TRT040209T13	02.01.2009	33	16,76
TRT080409T17	02.01.2009	96	16,41
TRT060509T18	02.01.2009	124	16,25
TRT150709T15	02.01.2009	194	16,25
TRT050809T16	05.01.2009	212	16,21
TRT050809T16	02.01.2009	215	16,26
TRT071009T51	05.01.2009	275	16,20
TRT071009T51	02.01.2009	278	16,50
TRT181109T16	02.01.2009	320	16,15
TRT130110T10	05.01.2009	373	16,17
TRT130110T10	02.01.2009	376	16,14
TRT100210T12	02.01.2009	404	16,29
TRT140410T16	05.01.2009	464	16,16
TRT140410T16	02.01.2009	467	16,15
TRT230610T13	05.01.2009	534	16,12
TRT230610T13	02.01.2009	537	16,15
TRT190111T13	02.01.2009	747	16,82
TRT150212T15	05.01.2009	1136	13,68
TRT150212T15	02.01.2009	1139	13,74
TRT070312T14	05.01.2009	1157	16,83
TRT070312T14	02.01.2009	1160	16,90
TRT260912T15	02.01.2009	1363	17,03
TRT280813T13	02.01.2009	1699	17,10
<i>Hazine Bonosu</i>			
TRB140109T12	02.01.2009	12	16,46
TRB180209T17	02.01.2009	47	16,59
TRB110309T13	02.01.2009	68	16,51
TRB240609T15	05.01.2009	170	16,35
TRB240609T15	02.01.2009	173	16,29
<i>Yıllık Ortalama Getiri %</i>			16,23
<i>Aylık Ortalama Getiri %*</i>			1,26

* $r_{ay} = (r_{yl})^{1/12}$ formülüyle hesaplanmıştır.

Kaynak: İMKB, Tahvil ve Bono Piyasası Bültenleri
<http://www.imkb.gov.tr/bultenler.htm> (Erişim tarihi: 25.05.2009)

Ek 4. Excel’de Yarı-varyans ve LPM Hesaplamak İçin Geliştirilen Fonksiyonlar

```
‘ Fonksiyon: Yarı-varyans
Function SVAR(rng As Range)
    Dim rsum As Double
    Dim rmean As Double
    Dim curr As Double
    Dim cnt As Integer

    rmean = WorksheetFunction.Average(rng)
    rsum = 0
    cnt = 0
    For Each cell In rng.Cells
        If Not IsEmpty(cell.Value) Then
            curr = cell.Value
            If (rmean - curr) > 0 Then
                rsum = rsum + ((rmean - curr) * (rmean -
curr))
            End If
            cnt = cnt + 1
        End If
    Next
    SVAR = rsum / (cnt - 1)
End Function

‘ Fonksiyon: Alt Kısmi Moment
Function LPM(rng As Range, t As Double, a As Double)
    Dim rsum As Double
    Dim rmean As Double
    Dim curr As Double
    Dim cnt As Integer

    rmean = WorksheetFunction.Average(rng)
    rsum = 0
    cnt = 0
    For Each cell In rng.Cells
        If Not IsEmpty(cell.Value) Then
            curr = cell.Value
            If (t - curr) > 0 Then
                rsum = rsum + (t - curr) ^ a
            End If
            cnt = cnt + 1
        End If
    Next
    LPM = rsum / (cnt - 1)
End Function
```

Ek 5. Genetik Algoritma Uygulamasının Kaynak Kodu

```
# -*- coding: cp1254 -*-
import re
import random
import sys
import math

#--- Fonksiyon: Ortalamayı hesaplar.
def ortalama(x):
    s = 0
    for v in x:
        s = s + v
    return s/len(x)

#--- Fonksiyon: Varyans hesaplar.
def varyans(x):
    s = 0
    m = ortalama(x)
    for v in x:
        s = s + (m-v)**2
    return s/(len(x)-1)

#--- Fonksiyon: Yarı-varyans hesaplar.
def yari_varyans(x):
    s = 0
    m = ortalama(x)
    for v in x:
        if (m-v) > 0:
            s = s + (m-v)**2
    return s/(len(x)-1)

#--- Fonksiyon: Alt Kısmi Moment hesaplar.
def alt_kismi_moment(x, t, a):
    s = 0
    for v in x:
        if (t-v) > 0:
            s = s + (t-v)**a
    return s/(len(x)-1)

#--- Fonksiyon: Ağırlıklar verildiğinde, portföy'ün aylık getirilerinden
oluşan bir matris verir
def portfoy_getirileri(agirliklar):
    # Boş bir getiri matrisi oluştur.
    getiriler = [ 0.0 for i in range(len(aylik_getiriler[0])-1) ]
    # Portföyün dağılımına göre aylık getirileri hesapla.
    for i in range(len(agirliklar)):
        if agirliklar[i] <> 0:
            for j in range(len(aylik_getiriler[0])-1):
                getiriler[j] = getiriler[j] + (agirliklar[i] *
aylik_getiriler[i][j+1])
    return getiriler

#--- Fonksiyon: Ağırlık matrisini normalize eder.
def normalize(a):
    s = 0
    for w in a:
        s = s + w
    for i in range(len(a)):
        a[i] = a[i] / s
    return a
```

```

#--- Fonksiyon: Etkin sınıra olan uzaklığa göre uyumu verir.
def fitness( etkin_sinir, agirlik ):
    P = (risk(portfoy_getirileri(agirlik)),
    ortalama(portfoy_getirileri(agirlik)))
    P1 = etkin_sinir[0]
    d = []
    for P2 in etkin_sinir[1:]:
        Lsqr = (P2[0]-P1[0])**2 + (P2[1]-P1[1])**2
        s = ((P1[1]-P[1])*(P2[0]-P1[0])) - ((P1[0]-P[0])*(P2[1]-P1[1]))
        s = s / Lsqr
        d.append( s * math.sqrt( Lsqr ) )
        P1 = P2
    return min(d)

#--- Risk fonksiyonu: Buradaki tanımlamaya göre risk belirlenir.
def risk(x):
    return varyans(x)
    #return yari_varyans(x)
    #return alt_kismi_moment(x, 1.26, 2)

#--- Etkin sınır fonksiyonu: Etkin sınırdaki portföyleri belirler.
def etkin_sinir_ver( populasyon ):
    es_populasyon_x_y = [ ( risk(portfoy_getirileri(x)),
    ortalama(portfoy_getirileri(x)), i ) for (i,x) in enumerate(populasyon) ]
    #min.x'i bul
    minel = es_populasyon_x_y[0]
    for el in es_populasyon_x_y[1:]:
        if el[0]<minel[0]: minel = el

    etkin_sinir = [minel]
    es_populasyon_x_y.remove(minel)
    curr = minel
    #max-tan için taramaya başla.
    while len(es_populasyon_x_y) > 0:
        maxel = None
        maxtan = -1
        found = False
        for tmp in es_populasyon_x_y:
            if tmp[0]>curr[0] and tmp[1]>curr[1]:
                tan = (curr[1]-tmp[1]) / (curr[0]-tmp[0])
                if tan > maxtan:
                    maxtan = tan;
                    maxel = tmp;
                    found = True;
        if not found: break
        etkin_sinir.append(maxel)
        es_populasyon_x_y.remove(maxel)
        curr = maxel
    return etkin_sinir

#--- Veri dosyası oluşturma fonksiyonu:
def csv_dosya_olustur( veriler, dosya_adi):
    f = open(dosya_adi + ".csv", 'w')
    for v in veriler:
        if isinstance(v, list) or isinstance(v, tuple):
            f.write((';' .join(map(str,v))).replace('.',',')) + '\n')
        else:
            f.write(str(v).replace('.',',')) + '\n')
    f.close()

```

```

#-----
# PROGRAM BAŞLANGICI

nufus = 120

# Veri dosyasını oku.
f = open('IMKB.csv', 'r')
ln = f.readline() # İlk satırı atla.
aylik_getiriler = []
while len( ln ) > 0:
    ln = f.readline()
    tmp = ln.replace( "\n", "" ).replace( ",", "." )
    lndata = re.findall( r"^[^;]+", tmp )
    lndata[1:] = map( float, lndata[1:] )
    if len(lndata) == 0: continue
    aylik_getiriler.append( lndata )
f.close()
varlik_sayisi = len(aylik_getiriler)

# N adet rastgele portföyden oluşan bir popülasyon belirle.
populasyon = []
for i in range(nufus):
    agirliklar = [ math.floor(max(random.random() * 100 - 50,0)) for i in
range(varlik_sayisi) ]
    agirliklar = normalize( agirliklar )
    populasyon.append(agirliklar)

# Etkin sınırı oluştur.
etkin_sinir = etkin_sinir_ver( populasyon )
convergence.append( len(etkin_sinir) ) # LOG

# Populasyonu sırala.
populasyon_fitness = [ (fitness(etkin_sinir, x), i) for i,x in
enumerate(populasyon) ]
populasyon_fitness.sort()
populasyon_sirali = [ populasyon[i] for _, i in populasyon_fitness ]
populasyon = populasyon_sirali

# İterasyon.
for iterasyon in range(500):

    # Bir sonraki nesli belirle.

    # Çapraz eşleme: İki grup oluştur ve çiftleştir.
    grup1 = []
    grup1.extend(populasyon) #[:(nufus)]
    grup2 = []
    for i in range(len(populasyon)/2):
        j = math.floor(random.random() * len(grup1))
        grup2.append( grup1.pop(j) )
    yeni_nesil = []
    for i in range(len(grup1)):
        # Çapraz eşleme bölümü. %50 BLX-a, %50 Basit yöntem uygulanmıştır.
        r = int( random.random() * varlik_sayisi ) # Çapraz eşleme noktası.
        k1 = random.random() # BLX için katsayı.
        k2 = random.random() # BLX için katsayı.
        yeni_birey_1 = []
        yeni_birey_2 = []
        alpha = 0.5 - iterasyon / 500 * 0.5
        for j in range(varlik_sayisi):
            aralik = (grup1[i][j] - grup2[i][j])
            yeni_agirlik_1 = grup2[i][j] - aralik * alpha + k1 * aralik *
(1+2*alpha)
            if yeni_agirlik_1 < 0: yeni_agirlik_1 = 0
            yeni_birey_1.append( yeni_agirlik_1 )

```

```

        yeni_agirlik_2 = grup2[i][j] - aralik * alpha + k1 * aralik *
(1+2*alpha)
        if yeni_agirlik_2 < 0: yeni_agirlik_2 = 0
        yeni_birey_2.append( yeni_agirlik_2 )
        yeni_nesil.append(yeni_birey_1)
        ## Ağırlıkların sıfır olmamasını sağla.
        yeni_birey_3 = grup1[i][:r] + grup2[i][r:]
        s = 0
        for w in yeni_birey_3:
            s = s + w
        if s == 0:
            yeni_nesil.append(yeni_birey_2)
        else:
            yeni_nesil.append(yeni_birey_3)
    yeni_nesil = [ normalize(uye) for uye in yeni_nesil ]
    # Elitist seçim.
    etkin_sinir = etkin_sinir_ver( populasyon )
    populasyon_2 = []
    for t in etkin_sinir:
        populasyon_2.append( populasyon[ t[2] ] )
    populasyon_2.extend( yeni_nesil )

    # Popülasyonun nüfusunu sabit tut.
    populasyon = []
    populasyon.extend( populasyon_2[:nufus] )

    # Mutasyon.
    for i in range(len(etkin_sinir) ,len(populasyon)):
        mutasyon_gerçekleştirildi = False
        if random.random()<0.3:
            # Bir tane varlığı çıkar.
            c = 0
            for w in populasyon[i]:
                if w > 0: c = c + 1
            if c > 1:
                c = int(random.random() * c)
                for w in populasyon[i]:
                    if w > 0:
                        c = c - 1
                        if c == 0:
                            populasyon[i][ populasyon[i].index(w) ] = 0.0
                            mutasyon_gerçekleştirildi = True
                            break
            if random.random()<0.5:
                # Bir tane varlığın ağırlığını değiştir.
                populasyon[i][int(random.random() * varlik_sayisi)] =
random.random() * i / len(populasyon)
                mutasyon_gerçekleştirildi = True
            if mutasyon_gerçekleştirildi:
                # Normalize et.
                populasyon[i] = normalize(populasyon[i])

    # Bu noktada yeni jenerasyon hazır.

    # Jenerasyonu bir sonraki nesle hazırla.
    etkin_sinir = etkin_sinir_ver( populasyon )

    # Popülasyonu tekrar sırala.
    populasyon_fitness = [ (fitness(etkin_sinir, x), i) for i,x in
enumerate(populasyon) ]
    populasyon_fitness.sort()
    populasyon_sirali = [ populasyon[i] for _, i in populasyon_fitness ]
    populasyon = populasyon_sirali

    # Tüm bireyler yakınsadıysa, algoritmayı bitir.

```

```
        if len(etkin_sinir) == nufus:
            break

# Elde edilen etkin sınırı dosyaya yaz.
populasyon_x_y_z = [ (risk(portfoy_getirileri(x)),
ortalama(portfoy_getirileri(x)), fitness(etkin_sinir, x)) for x in
populasyon ]
csv_dosya_olustur( populasyon_x_y_z, "etkin sinir")

# Portföylerin ağırlıklarını dosyaya yaz.
csv_dosya_olustur( populasyon, "populasyon")

print "*** PROGRAM SONU."
```