

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR BÖLGEDE veya BİR EĞRİ ÜZERİNDE ORTOGONAL
POLİNOMLAR

Nuray YAVUZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Nuray YAVUZ tarafından hazırlanan " BİR BÖLGEDE veya BİR EĞRİ ÜZERİNDE ORTOGONAL POLİNOMLAR " adlı tez çalışması 10/08/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Jüri Üyeleri:

Başkan: Doç.Dr. Nuri ÖZALP

Üye: Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Üye: Yrd.Doç.Dr. Ali OLGUN

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Orhan ATAKOL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR BÖLGEDE veya BİR EĞRİ ÜZERİNDE ORTOGONAL POLİNOMLAR

Nuray YAVUZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki değişkenli homogen harmonik polinomların tanımları verildikten sonra bu polinomlar yardımıyla tanımlanan iki değişkenli harmonik polinomların birim disk içinde ortogonallikleri ve sağladıkları bazı eşitsizlikler incelenmiştir. Bir bölgede süperortogonallik tanımı verildikten sonra hangi koşullar altında iki değişkenli harmonik polinomların süperortogonallik koşullarını sağladığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bir çevre üzerinde ortogonal polinomların tanımı verildikten sonra harmonik polinomların bir çevre üzerinde ortogonallikleri ve sağladıkları bazı eşitsizlikler incelenmiştir. Bir çevre üzerinde süperortogonal polinomların tanımı verildikten sonra bir bölgede ve bir çevre üzerinde süperortogonal polinomlara örnekler verilmiştir.

2010 , 80 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ortogonal polinomlar, süperortogonal polinomlar, harmonik polinomlar, Christoffel-Darboux formülü, Bessel eşitsizliği

ABSTRACT

Master Thesis

ORTHOGONAL POLYNOMIALS OVER a DOMAIN or on a CURVE

Nuray YAVUZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, preliminaries and some necessary definitions, lemmas and theorems that will be needed for later use are given.

In the third chapter, definitions of homogen harmonic polynomials of two variables are given and then, it is analysed orthogonalizations of harmonic polynomials of two variables defined with the help of these polynomials in the unit disk and some inequalities that they hold. Definition of superorthogonal polynomials over a domain is given and then, it is analysed under which circumstances harmonic polynomials of two variables hold the conditions of superorthogonalization.

In the fourth chapter, definition of orthogonal polynomials on a contour is given and then, it is analysed orthogonalization of harmonic polynomials on a contour and some inequalities which they hold. Definition of superorthogonal polynomials on a contour is given and then, it is given some examples of the superorthogonal polynomials over domain and on a contour.

2010 , 80 pages

Key Words: Orthogonal polynomials, superorthogonal polynomials, harmonic polynomials, Christoffel-Darboux formulae, Bessel inequality

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteklerini hiç esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Sayın Abdullah ALTIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a ve Sayın Danışman Hocam Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan aileme ve eşime de saygı ve sevgilerimi sunarım.

Nuray YAVUZ

Ankara, Ağustos 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 BİR BÖLGE ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR	2
2.1 İki Değişkenli Cebirsel Polinomlar	2
2.2 İki Değişkenli Cebirsel Polinomların Ortogonalliği ve Temel Bazı Özellikleri	5
3 BİR BÖLGE ÜZERİNDE HARMONİK ORTOGONAL POLİNOMLAR	17
3.1 Homogen Harmonik Polinomlar	17
3.2 Christoffel- Darboux Formüllerinin Bir Analogu	24
3.3 Birim Disk İçinde Ortogonal Harmonik Polinomlar	28
3.4 Genel Durumda Bir Bölge Üzerinde Ortogonal Harmonik Polinomlar	32
3.5 Bir Bölge Üzerinde Süperortogonal Harmonik Polinomlar	34
3.6 İki Eşlenik Kompleks Değişkenli Ortogonal Polinomlar	40
4 BİR ÇEVRE ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR	46
4.1 Temel Tanımlar ve Özellikler	46
4.2 Cebirsel Bir Eğri Üzerinde İki Değişkenli Polinomlar	51
4.3 Bir Çevre Üzerinde Ortogonal Harmonik Polinomlar	59
4.4 Bir Çevre Üzerinde Süperortogonal Harmonik Polinomlar	63
4.5 Harmonik Polinomların Süperortogonal Sistemleri İçin Örnekler	70
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	80

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{P}_{nk}(x, y)$	basamağı (n, k) olan iki değişkenli polinom
$u_n(x, y)$	n . dereceden iki değişkenli harmonik polinomların reel kısmı
$v_n(x, y)$	n . dereceden iki değişkenli harmonik polinomların imajiner kısmı
$\ u_n\ $	$u_n(x, y)$ polinomunun normu
$h(x, y)$	Düzlemsel bir G bölgesinde ağırlık fonksiyonu
(n, k)	$P_{nk}(x, y) \equiv P_{n,k}(x, y)$ cebirsel polinomunun basamağı
$\{F_{nk}(x, y)\}$	Temel ortonormal polinomların ailesi
(F_{nk}, F_{ms})	$\int \int_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy$ integrali
$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{n}{2}$ sayısının tam değeri
$\tilde{u}_n$	$u_n(\xi, \eta)$ polinomu
$\mathbf{K}_n(x, y, \xi, \eta)$	$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k)$ kısmi toplamı
$\hat{u}_n(x, y)$	$\frac{u_n(x, y)}{\ u_n\ }$ ortonormal harmonik polinomu
$K_n(z)$	$P_n(x, y) + iQ_n(x, y)$ kompleks değişkenli polinomu
$\tilde{\alpha}_n(z)$	$\alpha_n(x, y)$ harmonik polinomunun adjointi
$P_{nk}(z, \bar{z})$	iki eşlenik kompleks değişkenli polinom

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar teorisi üzerinde yapılan çalışmalar ve bunların uygulamaları oldukça gelişmiştir. Bu polinomların matematiksel istatistik, quantum mekaniği ve matematiksel fiziğin uygulamalarında önemli bir yeri vardır. Uygun koşullar altında ortogonal polinomların farklı tip özellikleri halen araştırılmaktadır. Bir değişkenli klasik ortogonal polinomların ilk örnekleri A.M. Legendre, P.S. Laplace, J.L. Lagrange, N.H. Abel tarafından ele alınmıştır. Daha sonraları P.L. Chebychev, klasik ortogonal polinomların bazı önemli özel durumlarını araştırmış ve ortogonal polinomların genel teorisini geliştirmiştir. Bir değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerine yapılan çoğu önemli sonuçlar C. Jacobi, C. Hermite, E. Laguerre ve T.Stieltjes tarafından verilmiştir. Ortogonal polinomlar teorisi üzerinde klasik sonuçlar G. Szegő tarafından ele alınmıştır.

Son yıllarda bir değişkenli polinomların ışığı altında çok değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerinde de çalışmalar yapılmaktadır. 1926 da iki değişkenli Appel polinomlarının özellikleri P. Appel ve J. Kampè de Fèriet tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. 1938 de Jackson, bir bölgede keyfi bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan iki değişkenli ortogonal polinomların en basit özelliklerini ele almıştır.

Bu çalışmada, ilk olarak bir bölgede keyfi bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan polinom grupları ele alınmıştır. Daha sonra Harmonik polinomların bir bölgede ortogonallikleri ve sağladıkları bazı eşitsizlikler incelenmiştir. Bu bilgiler ışığı altında Harmonik polinomların bir çevre üzerinde ortogonallikleri ve sağladıkları eşitsizlikler ele alınmıştır. Süperortogonallik tanımı verilerek bir bölgede ve bir çevre üzerinde süperortogonal polinomlar ile ilgili örnekler incelenmiştir.

2. BİR BÖLGE ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

2.1 İki Değişkenli Cebirsel Polinomlar

x ve y bağımsız değişkenlerinin kuvvetlerinin çarpımıyla elde edilen monomiallerin kümesi,

$$\{x^{n-k}y^k\}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.1)$$

olsun.

$$\{c_{nk}\}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

reel sabitler ve $c_{nk} \neq 0$ olmak üzere n -yinci derceden iki değişkenli cebirsel bir polinom

$$P_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^k c_{ns} x^{n-s} y^s \quad (2.3)$$

dir. Burada n indisi, x ve y değişkenlerine göre polinomun toplam derecesini, k indisi de polinomdaki y değişkeninin en yüksek kuvvetini göstermektedir. c_{nk} katsayısına bu polinomun başkatsayısı adı verilir.

Kolaylık açısından bu polinom (n, k) -yüncü basamaktan bir polinom olarak adlandırılır. Burada k indisi en fazla n ye eşit olabilir. Şimdi (2.3) polinomunun terim sayısını bulalım. (2.3) deki birinci toplam

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

terim içermektedir. İkinci toplam ise $k + 1$ terim içermektedir. Bu durumda (2.3) polinomu,

$$N(n, k) = \frac{n(n+1)}{2} + k + 1 \quad (2.4)$$

terim içermektedir. $k = n$ olması durumunda (2.4) formülü,

$$N(n, n) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

formülüne döndüür.

Başkatsayıları sıfırdan farklı olan (n, k) -yıncı basamaktan bir polinom sistemi,

$$\left. \begin{array}{l} P_{00}(x, y) \\ P_{10}(x, y), P_{11}(x, y) \\ P_{20}(x, y), P_{21}(x, y), P_{22}(x, y) \\ \vdots \\ P_{n0}(x, y), P_{n1}(x, y), P_{n2}(x, y), \dots, P_{n,k-1}(x, y), P_{nk}(x, y) \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

olarak verilsin. (n, k) -yıncı basamaktan herhangi bir $Q_{nk}(x, y)$ polinomu, (2.5) polinom sistemi yardımıyla

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \quad (2.6)$$

formunda tek türlü ifade edilebilir.

(2.3) den $Q_{nk}(x, y)$ polinomu

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m b_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^k b_{ns} x^{n-s} y^s$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Bu polinom daha açık bir şekilde,

$$\begin{aligned} Q_{nk}(x, y) = & b_{00} + b_{10}x + b_{11}y + b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{22}y^2 + \dots \\ & + b_{n0}x^n + b_{n1}x^{n-1}y + \dots \\ & + b_{n,k-1}x^{n-(k-1)}y^{k-1} + b_{nk}x^{n-k}y^k \end{aligned} \quad (2.7)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca (2.5) deki her bir polinomun (2.3) formundaki ifadeleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} P_{00}(x, y) &= c_{00}^{(0,0)} \\ P_{10}(x, y) &= c_{00}^{(1,0)} + c_{10}^{(1,0)}x \\ P_{11}(x, y) &= c_{00}^{(1,1)} + c_{10}^{(1,1)}x + c_{11}^{(1,1)}y \\ &\dots\dots\dots \\ P_{n0}(x, y) &= c_{00}^{(n,0)} + c_{10}^{(n,0)}x + c_{11}^{(n,0)}y + \dots + c_{n0}^{(n,0)}x^n \\ P_{n,k-1}(x, y) &= c_{00}^{(n,k-1)} + c_{10}^{(n,k-1)}x + c_{11}^{(n,k-1)}y + \dots + c_{n0}^{(n,k-1)}x^n + \dots \\ &\quad + c_{n,k-1}^{(n,k-1)}x^{n-(k-1)}y^{k-1} \\ P_{nk}(x, y) &= c_{00}^{(n,k)} + c_{10}^{(n,k)}x + c_{11}^{(n,k)}y + \dots + c_{n0}^{(n,k)}x^n + \dots \\ &\quad + c_{n,k-1}^{(n,k)}x^{n-(k-1)}y^{k-1} + c_{nk}^{(n,k)}x^{n-k}y^k \end{aligned}$$

olurlar. Bu değerler (2.6) da yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
Q_{nk}(x, y) &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \\
&= a_{00} P_{00}(x, y) + a_{10} P_{10}(x, y) + a_{11} P_{11}(x, y) + \dots + a_{n0} P_{n0}(x, y) \\
&\quad + \dots + a_{n,k-1} P_{n,k-1}(x, y) + a_{nk} P_{nk}(x, y) \\
&= a_{00} c_{00}^{(0,0)} + a_{10} (c_{00}^{(1,0)} + c_{10}^{(1,0)} x) + a_{11} (c_{00}^{(1,1)} + c_{10}^{(1,1)} x + c_{11}^{(1,1)} y) \\
&\quad + \dots + a_{n0} (c_{00}^{(n,0)} + c_{10}^{(n,0)} x + c_{11}^{(n,0)} y + \dots + c_{n0}^{(n,0)} x^n) \\
&\quad + \dots + a_{n,k-1} (c_{00}^{(n,k-1)} + c_{10}^{(n,k-1)} x + c_{11}^{(n,k-1)} y + \dots + c_{n0}^{(n,k-1)} x^n + \dots \\
&\quad + c_{n,k-1}^{(n,k-1)} x^{n-(k-1)} y^{k-1}) + a_{nk} (c_{00}^{(n,k)} + c_{10}^{(n,k)} x + c_{11}^{(n,k)} y + \dots + c_{n0}^{(n,k)} x^n + \\
&\quad \dots + c_{n,k-1}^{(n,k)} x^{n-(k-1)} y^{k-1} + c_{nk}^{(n,k)} x^{n-k} y^k) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.7) ve (2.8) deki monomiallerin katsayıları kıyaslanırsa,

$$\begin{aligned}
b_{nk} &= a_{nk} c_{nk}^{(n,k)} \\
b_{n,k-1} &= a_{nk} c_{n,k-1}^{(n,k)} + a_{n,k-1} c_{n,k-1}^{(n,k-1)} \\
b_{n,k-2} &= a_{nk} c_{n,k-2}^{(n,k)} + a_{n,k-1} c_{n,k-2}^{(n,k-1)} + a_{n,k-2} c_{n,k-2}^{(n,k-2)} \\
&\vdots \\
b_{00} &= a_{nk} c_{00}^{(n,k)} + a_{n,k-1} c_{00}^{(n,k-1)} + a_{n,k-2} c_{00}^{(n,k-2)} + \dots + a_{00} c_{00}^{(0,0)}
\end{aligned}$$

şeklinde $\{a_{ms}\}$ bilinmeyenlerine bağlı lineer homogen olmayan

$$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} + k + 1 \right\}$$

tane denklem elde edilir. (2.5) deki her polinomun başkatsayısı sıfırdan farklı olduğundan, bu denklem sisteminin katsayılar determinanı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{nk}^{(n,k)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{n,k-1}^{(n,k)} & c_{n,k-1}^{(n,k-1)} & 0 & \dots & 0 \\ c_{n,k-2}^{(n,k)} & c_{n,k-2}^{(n,k-1)} & c_{n,k-2}^{(n,k-2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{00}^{(n,k)} & c_{00}^{(n,k-1)} & c_{00}^{(n,k-2)} & \dots & c_{00}^{(0,0)} \end{vmatrix} \neq 0$$

olup $\{a_{ms}\}$ ler tek türlü olarak belirlenir. Bu durumda Q_{nk} polinomu (2.6) formunda tek türlü ifade edilebilir ve ispat tamamlanır.

Başkatsayısı 1 olan polinomlar için $\tilde{Q}_{nk}(x, y)$ gösterimini kullanacağız. Bu durumda (2.3)den,

$$\tilde{Q}_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} x^{n-s} y^s + x^{n-k} y^k \quad (2.9)$$

elde edilir.

Şimdi bir bölge üzerinde ortogonal polinomları tanımlayalım.

2.2 İki Değişkenli Cebirsel Polinomların Ortogonalliği ve Temel Bazı Özellikleri

Tanım 2.1 *xoy düzleminde basit, kapalı bir Γ eğrisi tarafından sınırlanan sonlu, basit irtibatlı bir bölge G olsun. $h(x, y)$, G de tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon ve,*

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

koşulu gerçekleşirse, $h(x, y)$ fonksiyonuna G bölgesinde bir “ağırlık fonksiyonu” denir.

Tanım 2.2 *Cebirsel bir polinom sistemi,*

$$\left. \begin{array}{l} F_{00}(x, y) \\ F_{10}(x, y), F_{11}(x, y) \\ F_{20}(x, y), F_{21}(x, y), F_{22}(x, y) \\ \vdots \\ F_{n0}(x, y), F_{n1}(x, y), F_{n2}(x, y), \dots, F_{n,k-1}(x, y), F_{nk}(x, y) \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

olsun. Bu polinom sistemi, aşağıdaki koşulları sağlarsa $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre “ortonormal polinom sistemi” olarak adlandırılır.

i) *Her bir $F_{nk}(x, y)$ polinomunun c_{nk} başkatsayısı pozitif olmalıdır.*

ii) *(2.10) polinomları G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre,*

$$(F_{nk}, F_{ms}) = \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy = \delta_{nm} \delta_{ks} \quad (2.11)$$

ortonormallik koşulunu sağlamalıdır. Burada,

$$\delta_{nm}\delta_{ks} = \begin{cases} 1 & ; (n, k) = (m, s) \\ 0 & ; (n, k) \neq (m, s) \end{cases}$$

dir. Ayrıca başkatsayıları 1 olan ve aynı $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan polinomlar,

$$\tilde{F}_{nk}(x, y) = \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y) \quad (2.12)$$

ile ifade edilir.

Lemma 2.1 $h(x, y)$, G bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, G bölgesinde negatif olmayan herhangi bir (n, k) -yıncı basamaktan ($n \geq 1$) $P_{nk}(x, y)$ polinomu için,

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy > 0$$

dır.

İspat. $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu olduğundan, ağırlık fonksiyonunun tanımı gereğince negatif olmayan bir fonksiyondur. Yani $h(x, y) > 0$ dır. Ayrıca hipotezden $P_{nk}(x, y)$ negatif olmayan bir polinomdur. O halde $h(x, y) \cdot P_{nk}(x, y) \geq 0$ olduğundan,

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy \geq 0 \quad (2.13)$$

dır. Şimdi (2.13) ün sıfır olamayacağını gösterelim.

$$\iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy = 0 \quad (2.14)$$

olsun. Lebesgue integralinden biliyoruz ki, (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$\int_X |f| d\mu = 0 \iff \text{hemen hemen her yerde } f = 0$$

dır. O halde, $X = \mathbb{R}^2$, $A = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mu = \lambda$ için,

$$\int_X |h(x, y) P_{nk}(x, y)| dx dy = \iint_G h(x, y) P_{nk}(x, y) dx dy = 0$$

$$\Longleftrightarrow \text{hemen hemen her yerde } h(x, y) \cdot P_{nk}(x, y) = 0$$

dır. $h(x, y) \cdot P_{nk}(x, y)$ çarpımında $h(x, y) = 0$ olursa,

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

ağırlık fonksiyonu olma koşulu ile çelişir. Diğer taraftan $P_{nk}(x, y) = 0$ olursa $P_{nk}(x, y)$ polinomunun (n, k) -yıncı basamaktan olması ile çelişir. O halde (2.14) hiçbir zaman sifıra eşit olamaz. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.1 $h(x, y)$, G bölgesi üzerinde tanımlanan herhangi bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere, G üzerinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan bir tek ortonormal sistem vardır.

İspat. İspatı tümevarım ile yapalım. ■

$F_{00}(x, y) = c_{00}$, $(0, 0)$ -ıncı basamaktan keyfi bir polinom olsun. $F_{00}(x, y) = c_{00} > 0$ olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan ortonormallik koşulundan,

$$\iint_G h(x, y) F_{00}^2(x, y) dx dy = \iint_G h(x, y) c_{00}^2 dx dy = 1$$

olmalıdır. Bu integrali sağlayacak $c_{00} > 0$ değeri tek türlü belirlenmiş olur. Şimdi de,

$$F_{00}(x, y), F_{10}(x, y), F_{11}(x, y), \dots, F_{n,k-1}(x, y) \quad (2.15)$$

polinom kümesinin ortonormal bir küme oluşturduğunu ve (2.15) polinomlarının tek türlü belirli olduğunu kabul edelim. Bu küme ile ortonormal olacak şekilde (n, k) -yıncı basamaktan bir $F_{nk}(x, y)$ polinomunun tek türlü belirli olduğunu gösterelim. Lemma 2.1 den $F_{nk}(x, y)$ polinomu,

$$F_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} F_{ns}(x, y) + c_{nk} x^{n-k} y^k \quad (2.16)$$

formunda yazılabilir. (2.16) polinomunun (2.15) deki polinomlarla ortogonal olmasını istediğimizden, $(m, s) < (n, k)$ için,

$$(F_{nk}, F_{ms}) = \left(\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} c_{ns} F_{ns}(x, y) + c_{nk} x^{n-k} y^k, F_{ms} \right) = 0$$

sağlanmalıdır. Burada,

$$(m, s) < (n, k) = \begin{cases} (m = n) & \implies s < k \\ m < n \end{cases}$$

dır. (2.15) polinom sisteminin ortonormal olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$c_{ms} + c_{ns}(x^{n-k}y^k, F_{ms}) = 0$$

elde edilir.

$$(x^{n-k}y^k, F_{ms}) = A_{ms}$$

ile gösterilirse,

$$c_{ms} = -c_{nk}A_{ms}$$

olur. Bu değer (2.16) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_{nk}(x, y) &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m (-c_{nk}A_{ms})F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} (-c_{nk}A_{ns})F_{ns}(x, y) + c_{nk}x^{n-k}y^k \\ &= c_{nk} \left[x^{n-k}y^k - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms}F_{ms}(x, y) - \sum_{s=0}^{k-1} A_{ns}F_{ns}(x, y) \right] \\ &= c_{nk}Q_{nk}(x, y) \end{aligned}$$

olur. Burada $Q_{nk}(x, y)$ polinomu tek türlü belirlidir. Bu ise (2.15) polinom sistemine ortogonal olan, (n, k) -yıncı basamaktan $F_{nk}(x, y)$ polinomunun sabit çarpan farkıyla tek olduğunu gösterir. Diğer yandan, ortonormallik koşulu uygulanırsa,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}^2(x, y) dx dy = 1$$

sağlanmalıdır. O halde,

$$\iint_G h(x, y) c_{nk}^2 Q_{nk}^2(x, y) dx dy = 1$$

ve $c_{nk} > 0$ koşulu altında c_{nk} tek türlü belirlenmiş olur. Böylelikle G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan bir tek

$$\{F_{00}(x, y), F_{10}(x, y), F_{11}(x, y), \dots, F_{n0}(x, y), \dots, F_{n,k-1}(x, y), F_{nk}(x, y)\}$$

polinom sistemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi de bu teoremden yararlanarak, bir polinomun bir bölgedeki ortogonalite tanımını verelim.

Teorem 2.2 c_{nk} başkatsayısı sıfırdan farklı olan (n, k) -yıncı basamaktan bir polinom $F_{nk}(x, y)$ olsun. $F_{nk}(x, y)$ polinomunun, bir G bölgesinde tanımlı $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $(p, q) < (n, k)$ olmak üzere basamağı (p, q) olan $Q_{pq}(x, y)$ polinomları için,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) Q_{pq}(x, y) dx dy = 0 \quad (2.17)$$

ifadesinin gerçekleşmesidir.

İspat. ($\implies$) G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal (n, k) -yıncı basamaktan bir polinom $F_{nk}(x, y)$ olsun. Ortogonalite tanımından,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy = 0 \quad ; \quad (n, k) \neq (m, s)$$

sağlanır. Lemma 2.1 den $Q_{pq}(x, y)$ polinomu $\{F_{ms}(x, y)\}$ ler cinsinden,

$$Q_{pq}(x, y) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^q c_{ps} F_{ps}(x, y)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade (2.17) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) \left[\sum_{m=0}^{p-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^q c_{ps} F_{ps}(x, y) \right] dx dy \\ &= \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} \left[\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy \right] \\ & \quad + \sum_{s=0}^q c_{ps} \left[\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ps}(x, y) dx dy \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $\{F_{nk}(x, y)\}$ polinom ailesi ortogonal olduğundan,

$$\begin{aligned} \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ms}(x, y) dx dy &= 0 \\ \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) F_{ps}(x, y) dx dy &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bu durumda,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) Q_{pq}(x, y) dx dy = 0$$

olur. ■

($\Leftarrow$) Tersine (n, k) -yıncı basamaktan daha düşük basamaklı herhangi bir $Q_{pq}(x, y)$ polinomu için (2.17) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Burada $Q_{pq}(x, y)$ polinomu yerine (2.15) de verilen,

$$F_{00}(x, y), F_{10}(x, y), F_{11}(x, y), \dots, F_{n0}(x, y), \dots, F_{n, k-1}(x, y)$$

polinomları alınabilir. Teorem 2.2 den, basamağı (n, k) dan düşük olan (2.15) polinomlarına ortogonal olan (n, k) -yıncı basamaktan $F_{nk}(x, y)$ polinomu sabit çarpan farkıyla tektir. Bu da teoremi ispatlar.

Şimdi ortogonal polinomların extremum özelliklerini inceleyelim. $\tilde{W}_{nk}$,

$$\tilde{Q}_{nk}(x, y) = x^{n-k} y^k + R_{n-1}(x, y) \quad (2.18)$$

formunda (n, k) -yıncı basamaktan, başkatsayısı 1 olan bütün polinomların kümesini gösterebilir. Burada $R_{n-1}(x, y)$, basamağı (n, k) dan küçük olan bir polinomu göstermektedir.

Şimdi $\tilde{W}_{nk}$ polinom kümesi içinde,

$$J(\tilde{Q}_{nk}) = \iint_G h(x, y) [\tilde{Q}_{nk}(x, y)]^2 dx dy \quad (2.19)$$

integralinin minimumunu bulalım.

Teorem 2.3 $\tilde{W}_{nk}(x, y)$ polinom kümesi içinde, (2.19) integralinin minimum değerini alması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{Q}_{nk}(x, y) = \tilde{F}_{nk}(x, y) = \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y) \quad (2.20)$$

olmasıdır ve (2.19) integralinin minimumu

$$\min J(\tilde{Q}_{nk}) = \frac{1}{[c_{nk}]^2} \quad (2.21)$$

dir.

İspat. Lemma 2.1 den, $\tilde{Q}_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + R_{n-1}(x, y)$ formundaki herhangi bir polinom,

$$\tilde{Q}_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns} F_{ns}(x, y) + \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y) \quad (2.22)$$

formunda yazılabilir. $\tilde{Q}_{nk}(x, y)$ polinomunun (2.22) deki eşitliğinin (2.19) de yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} J(\tilde{Q}_{nk}) &= \iint_G h(x, y) \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns} F_{ns}(x, y) + \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y) \right]^2 dx dy \\ &= \iint_G h(x, y) \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns} F_{ns}(x, y) + \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y) \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns} F_{ns}(x, y) + \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y) \right] dx dy \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns}^2 + \frac{1}{[c_{nk}]^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.23) in minimum değerini alması için gerek ve yeter koşul $a_{ms} = 0$ olmasıdır. Bu durumda,

$$\tilde{Q}_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} F_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns} F_{ns}(x, y) + \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y)$$

eşitliğinde $a_{ms} = 0$ olduğu dikkate alınrsa,

$$\tilde{Q}_{nk}(x, y) = \frac{1}{c_{nk}} F_{nk}(x, y) = \tilde{F}_{nk}(x, y)$$

olur ki bu (2.20) eşitliğini ispatlar. Ayrıca yine $a_{ms} = 0$ olduğu dikkate alınrsa,

$$\min J(\tilde{Q}_{nk}) = \min \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns}^2 + \frac{1}{[c_{nk}]^2} \right] = \frac{1}{[c_{nk}]^2}$$

olur. Bu ise (2.21) eşitliğini ispatlar. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 2.4 $F_{nk}(x, y)$, $n \geq 1$ olmak üzere (n, k) -yıncı basamaktan bir ortogonal polinom olsun. G_1 , $F_{nk}(x, y) > 0$ olacak şekildeki G bölgesinin noktalarının kümesi, G_2 ise $F_{nk}(x, y) < 0$ olacak şekildeki G bölgesinin noktalarının kümesi olsun. Bu durumda G_1 ve G_2 kümelerinin her ikisinin de düzlemsel ölçüsü pozitiftir.

İspat. $n \geq 1$ ve $F_{nk}(x, y)$ polinomu, $(0, 0)$ -ıncı basamaktan $F_{00}(x, y)$ polinomuna ortogonal olduğundan,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) dx dy = 0 \quad (2.24)$$

elde edilir. G üzerinde hemen hemen her yerde $F_{nk}(x, y) \geq 0$ olsun. Bu durumda Lemma 2.1 den,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) dx dy > 0$$

olur ki bu durum (2.24) ile çelişir. O halde G_2 nin ölçüsü sıfırdan farklıdır. Ölçü tanımından bir kümenin ölçüsü negatif olamayacağından, G_2 nin ölçüsü pozitiftir. Benzer şekilde hemen hemen her yerde $F_{nk}(x, y) \leq 0$ olsun. ($-F_{nk}(x, y) \geq 0$) olduğundan yine Lemma 2.1 den,

$$\iint_G h(x, y) (-F_{nk}(x, y)) dx dy > 0 \implies \iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) dx dy < 0$$

olur ki bu durum yine (2.24) ile çelişir. O halde G_1 in ölçüsü de pozitiftir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 2.5 Bir G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan (n, k) -yıncı basamaktan $F_{nk}(x, y)$ polinomu,

$$F_{nk}(x, y) = Q_{ms}(x, y) B_{pq}(x, y) \quad ; \quad m \geq 1, \quad p \geq 1 \quad (2.25)$$

formunda iki polinomun çarpımı olarak yazılabiliyor ise, $Q_{ms}(x, y)$ ve $B_{pq}(x, y)$ polinomları da aynı G bölgesinde kendi ağırlık fonksiyonlarına göre ortogonaldirler.

İspat. $(r, l) < (m, s)$ olmak üzere keyfi bir polinom $T_{rl}(x, y)$ olsun. Bu durumda $B_{pq}(x, y)T_{rl}(x, y)$ polinomunun basamağı (n, k) -yıncı basamaktan daha düşük olur. $F_{nk}(x, y)$ ortogonal bir polinom olduğundan Teorem 2.2 den,

$$\iint_G h(x, y) F_{nk}(x, y) B_{pq}(x, y) T_{rl}(x, y) dx dy = 0 \quad (2.26)$$

sağlanır. Burada (2.25) eşitliği kullanılırsa,

$$\iint_G h(x, y) B_{pq}^2(x, y) Q_{ms}(x, y) T_{rl}(x, y) dx dy = 0$$

elde edilir. $T_{rl}(x, y)$ iki değişkenli polinomu, (m, s) -yıncı basamaktan daha düşük basamaklı keyfi bir polinom olduğundan, Teorem 2.2 den $Q_{ms}(x, y)$ polinomu

$$h_1(x, y) = h(x, y) B_{pq}^2(x, y)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Benzer şekilde, $B_{pq}(x, y)$ polinomunun G bölgesinde

$$h_2(x, y) = h(x, y) Q_{ms}^2(x, y)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonalı de kolaylıkla gösterilebilir. ■

Örnek.

$$G(x, y) = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

bölgesini ele alalım. G bölgesinde tanımlı ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = x^2 y$$

olsun. Gerçekten $h(x, y) = x^2 y$, G bölgesinde negatif olmayan bir fonksiyondur ve

$$\iint_G h(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} x^2 y dy dx = \frac{1}{14}$$

olup

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

sağlanır. Şimdi de G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan polinomların bir ailesini elde edelim.

$$F_{00}(x, y) = c_{00}^{(0,0)}$$

olsun. Tanım (2.3) de verilen,

$$\iint_G F_{00}^2(x, y) h(x, y) dx dy = 1$$

ve $c_{00} > 0$ ortonormallik koşulları kullanılarak,

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \left[c_{00}^{(0,0)} \right]^2 x^2 y dy dx = \left[c_{00}^{(0,0)} \right]^2 \int_0^1 \frac{x^6}{2} dx = 1$$

$$\left[c_{00}^{(0,0)} \right]^2 = 14 \implies c_{00} = \sqrt{14}$$

bulunur. Buradan $F_{00}(x, y) = \sqrt{14}$ elde edilir. $(1, 0)$ -ıncı basamaktan $F_{10}(x, y)$ polinomu

$$F_{10}(x, y) = c_{00}^{(1,0)} + c_{10}^{(1,0)} x$$

olsun. Bu polinom $F_{00}(x, y)$ polinomuna ortogonal olmalı ve normu 1 olmalıdır. Yani

$$\iint_G F_{10}(x, y) F_{00}(x, y) h(x, y) dx dy = 0 \quad (2.27)$$

$$\iint_G F_{10}^2(x, y) h(x, y) dx dy = 1 \quad (2.28)$$

koşulları sağlanmalıdır. (2.27) dan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{14} (c_{00}^{(1,0)} + c_{10}^{(1,0)} x) x^2 y dy dx &= 0 \\ c_{00}^{(1,0)} \int_0^1 \int_0^{x^2} x^2 y dy dx + c_{10}^{(1,0)} \int_0^1 \int_0^{x^2} x^3 y dy dx &= 0 \\ \frac{c_{00}^{(1,0)}}{14} + \frac{c_{10}^{(1,0)}}{16} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.28) den ise

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{x^2} \left[(c_{00}^{(1,0)})^2 + 2c_{00}^{(1,0)} c_{10}^{(1,0)} x + (c_{10}^{(1,0)})^2 x^2 \right] x^2 y dy dx &= 1 \\ \frac{(c_{00}^{(1,0)})^2}{14} + \frac{c_{00}^{(1,0)} c_{10}^{(1,0)}}{8} + \frac{(c_{10}^{(1,0)})^2}{18} &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.27), (2.28) sonuçları ve $c_{10}^{(1,0)} > 0$ koşulu birlikte gözönünde bulundurulursa $c_{00}^{(1,0)}$ ve $c_{10}^{(1,0)}$ reel sabitleri

$$c_{00}^{(1,0)} = -21\sqrt{2}, \quad c_{10}^{(1,0)} = 24\sqrt{2}$$

şeklinde bulunur. O halde $(1, 0)$ –ıncı basamaktan $F_{10}(x, y)$ polinomu

$$F_{10}(x, y) = -21\sqrt{2} + 24\sqrt{2}x$$

formundadır. Bu şekilde devam edilirse, $(1, 1)$ –ci basamaktan $F_{11}(x, y)$ polinomu

$$F_{11}(x, y) = \frac{112\sqrt{11}}{\sqrt{2033}} - \frac{288\sqrt{11}}{\sqrt{2033}}x + \frac{270\sqrt{11}}{\sqrt{2033}}y$$

olarak elde edilir. Benzer genişletme ile $(2, 0)$ –ıncı basamaktan $F_{20}(x, y)$ polinomu

$$F_{20}(x, y) = \frac{96}{\sqrt{7}} - \frac{10381}{\sqrt{7}}x + \frac{157}{\sqrt{7}}x^2$$

şeklindedir. İşleme bu şekilde devam edilirse

$$F_{21}(x, y), F_{22}(x, y), \dots, F_{nk}(x, y)$$

polinomları da kolaylıkla elde edilebilir.

3. BİR BÖLGE ÜZERİNDE HARMONİK ORTOGONAL POLİNOMLAR

3.1 Homogen Harmonik Polinomlar

xoy düzleminde kompleks değişkenler ve kutupsal koordinatları

$$z = x + iy = re^{i\varphi}$$

ile ifade edelim. Bu değişken kutupsal koordinatlar cinsinden yazılırsa

$$z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3.1)$$

olur. İki değişkenli harmonik polinomlar

$$u_n(x, y) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k} \quad (3.2)$$

$$v_n(x, y) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1} \quad (3.3)$$

eşitlikleriyle tanımlanırlar.

(3.1) formülü göz önüne alınırsa, bu polinomlar,

$$u_n(x, y) = u_n(r, \varphi) = u_n(z) = r^n \cos n\varphi \quad (3.4)$$

$$v_n(x, y) = v_n(r, \varphi) = v_n(z) = r^n \sin n\varphi \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) ve (3.3) harmonik polinomlarının açık ifadesi,

$$1, x, y, x^2 - y^2, 2xy, \dots, u_n(x, y), v_n(x, y), \dots \quad (3.6)$$

dir. $u_0 = 1, v_0 = 0$ olduğundan (3.6) sistemi

$$\{1, u_n(x, y), v_n(x, y)\} \quad (3.7)$$

formunda ifade edilebilir.

Şimdi (3.7) polinomlarının

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (3.8)$$

bölgesinde ortogonal olduğunu ispatlayalım.

(3.4) ve (3.5) formülleri

$$\iint_G u_n(x, y)v_k(x, y)dxdy = \int_0^1 r^{n+k+1}dr \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \sin k\varphi d\varphi = 0 \quad (3.9)$$

olmasını gerektirir ki bu ise $u_n(x, y)$ ve $v_k(x, y)$ polinomlarının birbirlerine ortogonal olduğunu gösterir. Benzer şekilde (3.2) ve (3.3) polinomlarının tümünün birbirlerine ortogonal oldukları ispatlanabilir. Şimdi bu polinomların normlarını hesaplayalım.

(3.4) den $n > 0$ için

$$\|u_n\|^2 = \iint_G u_n^2(x, y)dxdy = \int_0^1 r^{2n+1}dr \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

olur. Benzer şekilde (3.5) polinomlarının normları da hesaplanabilir. Bu durumda ortonormal harmonik polinomlar

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \hat{u}_n(x, y) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} u_n(x, y) \quad (3.10)$$

$$\hat{v}_n(x, y) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} v_n(x, y) \quad (3.11)$$

formunda bulunur.

(3.2) ve (3.3) formülleri (3.10) ve (3.11) polinomlarının başkatsayılarının sıfırdan farklı olmasını gerektirir. (3.7) sistemindeki herhangi bir polinomun başkatsayısı sıfırdan farklı olduğundan, basamağı n i geçmeyen herhangi $P_n(x, y)$ harmonik polinomu (3.7) polinomları ile

$$P_n(x, y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n [\alpha_k u_k(x, y) + \beta_k v_k(x, y)] \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.10) ve (3.11) den, (3.12) açılımındaki katsayılar

$$\alpha_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G P_n(x, y)u_k(x, y)dxdy \quad (3.13)$$

$$\beta_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G P_n(x, y) v_k(x, y) dx dy \quad (3.14)$$

formülleri ile tanımlıdır.

(3.8) birim diskinde harmonik bir fonksiyon

$$F(x, y) = F(r, \varphi) = F(z) \quad (3.15)$$

ile tanımlansın. Bu fonksiyon birim diskte

$$F(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (3.16)$$

formunda bir seriye açılabilir. Burada katsayılar

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi \quad (3.17)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \quad (3.18)$$

formülleri ile tanımlıdır.

(3.15) harmonik fonksiyonu için (3.16) serisi $r < 1$ için Poisson formülünden elde edilebilir. Gerçekten Poisson integrali $r < 1$ için

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad (3.19)$$

olan bir harmonik fonksiyondur. Burada

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

ifadesi Poisson çekirdeği olarak bilinir ve

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(\theta - \varphi) r^k \quad (3.20)$$

dir. Bunu aşağıda gösterelim.

$$\begin{aligned}
1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(\theta - \varphi) r^k &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (r^k e^{ik(\theta-\varphi)} + r^k e^{-ik(\theta-\varphi)}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{i(\theta-\varphi)})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{-i(\theta-\varphi)})^k \\
&= 1 + r e^{i(\theta-\varphi)} \sum_{k=0}^{\infty} (r e^{i(\theta-\varphi)})^k + r e^{-i(\theta-\varphi)} \sum_{k=0}^{\infty} (r e^{-i(\theta-\varphi)})^k \\
&= 1 + \frac{r e^{i(\theta-\varphi)}}{1 - r e^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{r e^{-i(\theta-\varphi)}}{1 - r e^{-i(\theta-\varphi)}} \\
&= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}
\end{aligned}$$

dir. (3.20) ifadesi (3.19) da dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
F(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(\theta - \varphi) r^k \right] d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \left[\sum_{k=1}^{\infty} [r^k (\cos k\theta \cos k\varphi + \sin k\theta \sin k\varphi)] \right] d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[r^k \cos k\theta \left(\int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \right) \right. \\
&\quad \left. + r^k \sin k\theta \left(\int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.16) da kartezyen koordinatlara geçilir, (3.4) ve (3.5) formülleri dikkate alınırsa,

$$F(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)] \quad (3.21)$$

olur.

Kabul edelim ki (3.15) fonksiyonunun karesi (3.8) bölgesi üzerinde in- tegrallenebilir olsun, yani

$$\|F\|_G^2 = \iint_G |F(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (3.22)$$

koşulu sağlansın. Bu tip fonksiyonların kümesi $H_2(G)$ ile gösterilir. (3.13) ve (3.14) eşitliklerine benzer olarak, (3.7) sistemine göre (3.15) fonksiyonlarının Fourier katsayıları

$$a_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G F(x, y) u_k(x, y) dx dy \quad (3.23)$$

$$b_k = \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G F(x, y) v_k(x, y) dx dy \quad (3.24)$$

formülleri ile tanımlanabilir. (3.17), (3.18), (3.23), (3.24) formüllerinin (3.15) fonksiyonunun aynı Fourier katsayılarını belirttiklerini ispatlayalım. (3.17), (3.18) formülü i ile çarpıldıktan sonra (3.17)den çıkartılır ve $z = \rho e^{i\varphi}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} a_k - ib_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) (\cos k\varphi - i \sin k\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|z|=\rho} F(z) \frac{\bar{z}^k}{iz\rho^k} dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|z|=\rho} F(z) \frac{\bar{z}^k}{\rho^k} \frac{\bar{z}}{i\rho^2} dz \\ &= \frac{(k+1)}{\pi\rho^{k+2}i} \int_{|z|=\rho} F(z) \frac{\bar{z}^{k+1}}{k+1} dz \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu durumda analitik ve harmonik fonksiyonlar için sağlanan

$$\iint_G F(z) \varphi'(z) dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} F(z) \varphi(z) dz \quad (3.26)$$

integral formülü (3.25) eşitliğinde dikkate alınır, ρ yarıçapıyla sınırlanan bölge G_ρ ile gösterilir ve (3.26) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} a_k - ib_k &= \frac{2(k+1)}{\pi\rho^{k+2}} \iint_{G_\rho} F(z) \bar{z}^k dx dy \\ &= \frac{2(k+1)}{\pi\rho^{k+2}} \iint_{G_\rho} F(x, y) [u_k(x, y) - iv_k(x, y)] dx dy \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27) eşitliğinin her iki yanının $\rho \rightarrow 1$ için limiti alınır ve karşılıklı katsayılar eşitlenirse (3.23) ve (3.24) integralleri elde edilir, bu ise ispatı tamamlar.

(3.21) serisi yerine, ortonormal homogen harmonik polinomların

$$F(x, y) = \frac{\hat{a}_0}{2} \hat{u}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\hat{a}_k \hat{u}_k(x, y) + \hat{b}_k \hat{v}_k(x, y)] \quad (3.28)$$

Fourier serisi alınabilir. Bu serinin katsayıları

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= 2 \iint_G F(x, y) \hat{u}_0(x, y) dx dy \\ \hat{a}_k &= \iint_G F(x, y) \hat{u}_k(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\hat{b}_k = \iint_G F(x, y) \hat{v}_k(x, y) dx dy \quad (3.30)$$

formülleri ile verilir. Fourier katsayıları

$$\frac{\hat{a}_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) \leq \|F\|_G^2 \quad (3.31)$$

Bessel eşitsizliğini sağlar. Gerçekten

$$\begin{aligned} \iint_G [F(x, y) - S_n(x, y)]^2 dx dy &= \iint_G [F(x, y)]^2 dx dy - \\ &\quad 2 \iint_G F(x, y) S_n(x, y) dx dy + \iint_G [S_n(x, y)]^2 dx dy \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \iint_G [S_n(x, y)]^2 dx dy &= \iint_G \left[\frac{\hat{a}_0 \hat{u}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\hat{a}_k \hat{u}_k + \hat{b}_k \hat{v}_k) \right]^2 dx dy \\ &= \frac{\hat{a}_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) \\ \iint_G F(x, y) S_n(x, y) dx dy &= \iint_G F(x, y) \left[\frac{\hat{a}_0 \hat{u}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\hat{a}_k \hat{u}_k + \hat{b}_k \hat{v}_k) \right] dx dy \\ &= \frac{\hat{a}_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) \end{aligned}$$

olur. Bunlar yerlerine yazılır ve (3.22) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\frac{\hat{a}_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) \leq \|F\|_G^2$$

elde edilir.

Lemma 3.1 *Eğer $F(x, y)$*

$$w = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2\}$$

kapalı diskinde harmonik bir fonksiyon ise, bu durumda

$$\pi \rho^2 |F(x_0, y_0)|^2 \leq \iint_W |F(x, y)|^2 dx dy \quad (3.32)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\iint_W |F(x, y)|^2 dx dy$ integralinde $x - x_0 = u$ ve $y - y_0 = v$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\iint_W |F(x, y)|^2 dx dy = \iint_W |F(u + x_0, v + y_0)|^2 du dv \quad (3.33)$$

olur.

$$F(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)]$$

eşitliğinde $x - x_0 = u$ ve $y - y_0 = v$ değişken değiştirmeleri yapılır ve

$|u_k(u + x_0, v + y_0)| \geq |u_k(x_0, y_0)|$ ve $|v_k(u + x_0, v + y_0)| \geq |v_k(x_0, y_0)|$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} |F(u + x_0, v + y_0)| &= \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(u + x_0, v + y_0) + b_k v_k(u + x_0, v + y_0)] \right| \\ &\geq \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(x_0, y_0) + b_k v_k(x_0, y_0)] \right| \\ &= |F(x_0, y_0)| \end{aligned} \quad (3.34)$$

bulunur. Bu durumda (3.33) eşitliğinde (3.34) eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \iint_W |F(x, y)|^2 dx dy &= \iint_W |F(u + x_0, v + y_0)|^2 du dv \\ &\geq |F(x_0, y_0)|^2 \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} r dr d\varphi \\ &= \pi \rho^2 |F(x_0, y_0)|^2 \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

3.2 Christoffel- Darboux Formüllerinin Bir Analogu

Bu kısımda homogen harmonik polinomların Fourier serilerinin kısmı toplamaları hesaplanacaktır.

$|q| < 1$ koşulu altında

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (3.35)$$

eşitliğini gözönüne alalım. Bu eşitlikte

$$q = z\bar{\tau} = (x + iy)(\xi - i\eta) \quad (3.36)$$

alınır ve (3.2), (3.3) formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} q^k &= z^k(\bar{\tau})^k = [u_k(x, y) + iv_k(x, y)] [u_k(\xi, \eta) - iv_k(\xi, \eta)] \\ &= u_k(x, y)u_k(\xi, \eta) + v_k(x, y)v_k(\xi, \eta) + i[v_k(x, y)u_k(\xi, \eta) - u_k(x, y)v_k(\xi, \eta)] \end{aligned} \quad (3.37)$$

olur. Ayrıca (3.36) den

$$\begin{aligned} 1 - q &= 1 - (x + iy)(\xi - i\eta) = 1 - (x\xi + y\eta + i(y\xi - x\eta)) \\ &= (1 - x\xi - y\eta) + i(x\eta - y\xi) \end{aligned} \quad (3.38)$$

yazılabilir. Bu değer eşleneği ile çarpılırsa,

$$(1 - x\xi - y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2 = 1 - 2(x\xi + y\eta) + (x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) \quad (3.39)$$

bulunur. Bu değeri $g(x, y, \xi, \eta)$ ile gösterelim. Kısalık için

$$u_k = u_k(x, y) , \quad \tilde{u}_k = u_k(\xi, \eta) \quad (3.40)$$

$$v_k = v_k(x, y) , \quad \tilde{v}_k = v_k(\xi, \eta) \quad (3.41)$$

notasyonlarını kullanalım. (3.35) eşitliğinde (3.37) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^n q^k &= 1 + \sum_{k=1}^n [u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k + i[v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k]] \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{(1 - x\xi - y\eta) + i(x\eta - y\xi)} \\ &= \frac{(1 - q^{n+1}) [(1 - x\xi - y\eta) - i(x\eta - y\xi)]}{g(x, y, \xi, \eta)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

elde edilir. $k = n + 1$ için (3.37) yardımıyla kesrin payını hesaplayabiliriz. (3.42) eşitliğinin reel ve imajiner kısımları ayrı ayrı yazılırsa,

$$1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) = \frac{1}{g(x, y, \xi, \eta)} [(1 - u_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - v_{n+1} \tilde{v}_{n+1})(1 - x\xi - y\eta) - (v_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} \tilde{v}_{n+1})(x\eta - y\xi)] \quad (3.43)$$

$$\sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) = \frac{-1}{g(x, y, \xi, \eta)} [(1 - u_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - v_{n+1} \tilde{v}_{n+1})(x\eta - y\xi) + (v_{n+1} \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} \tilde{v}_{n+1})(1 - x\xi - y\eta)] \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.35) eşitliğinin q ya göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} 1 + 2q + 3q + \dots + nq^{n-1} &= \frac{-(n+1)q^n}{1-q} + \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2} \\ &= \frac{-(n+1)q^n}{1-q} + \frac{1}{1-q}(1+q+q^2+\dots+q^n) \end{aligned} \quad (3.45)$$

bulunur. (3.45) eşitliğinin sağ tarafındaki terimleri hesaplayalım. (3.37) ve (3.38) formüllerinden,

$$\begin{aligned} \frac{-(n+1)q^n}{1-q} &= \frac{-(n+1)}{g(x, y, \xi, \eta)} [u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n + i(v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)] \\ &\quad \times [(1 - x\xi - y\eta) - i(x\eta - y\xi)] \\ &= \frac{-(n+1)}{g(x, y, \xi, \eta)} [(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) \\ &\quad + (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi) \\ &\quad + i(v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) - \\ &\quad i(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi)] \end{aligned} \quad (3.46)$$

yazılabilir. Şimdi (3.45) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci eşitliği hesaplayalım. (3.37), (3.38) ve (3.39) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-q}(1+q+\dots+q^n) &= \frac{(1-x\xi-y\eta)-i(x\eta-y\xi)}{g(x,y,\xi,\eta)} \times \\
&\left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \right] \\
&= \frac{1}{g} \left\{ (1-x\xi-y\eta) \left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] \right. \\
&\quad + (x\eta-y\xi) \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\
&\quad + i(1-x\xi-y\eta) \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\
&\quad \left. - i(x\eta-y\xi) \left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] \right\} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle (3.37) ve (3.38) yardımıyla (3.45) eşitliğinin sağ tarafı elde edilmiş olur. (3.46) ve (3.47) eşitliklerini (3.45) de gözönüne alalım ve eşitliğin sol tarafını (3.37) yardımıyla farklı bir biçimde ifade edelim. Bu durumda eşitlikteki reel kısım hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) &= \frac{-(n+1)}{g} [(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n)(1-x\xi-y\eta) \\
&\quad + (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(x\eta-y\xi)] \\
&\quad + \frac{1}{g} \left\{ (1-x\xi-y\eta) \left[1 + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] \right. \\
&\quad \left. + (x\eta-y\xi) \sum_{k=1}^n (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \right\} \quad (3.48)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.48) eşitliği basit dönüşümlerle

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) &= \frac{1}{g} \left[(1-x\xi-y\eta) \sum_{k=1}^{n-1} (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right. \\
&\quad + (x\eta-y\xi) \sum_{k=1}^{n-1} (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) \\
&\quad - n(1-x\xi-y\eta)(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) \\
&\quad \left. - n(x\eta-y\xi)(v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) \right] \quad (3.49)
\end{aligned}$$

formuna dönüştür. Bu eşitliğin sağ tarafındaki kısmi toplamlar yerine (3.43) ve (3.44) formülleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) &= \frac{1}{g} \left\{ (1 - x\xi - y\eta) \frac{1}{g} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) \right. \\
&\quad \left. - (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi)] \right. \\
&\quad \left. - (x\eta - y\xi) \frac{1}{g} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi) \right. \\
&\quad \left. + (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta)] \right. \\
&\quad \left. - n(1 - x\xi - y\eta)(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) \right. \\
&\quad \left. - n(x\eta - y\xi)(v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) \right\} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.49) ve (3.50) formülleri tek değişkenli ortogonal polinomlar için klasik Christoffel-Darboux formüllerinin analogu ve genelleştirmesidir. Ortonormal harmonik polinomların bilineer serilerinin kısmi toplamları bu eşitlikler yardımıyla ifade edilebilir. (3.49) ve (3.50) formüllerini gözönüne alırken, (3.40) ve (3.41) notasyonlarını gözönünde bulundurabiliriz. Ayrıca bu formüllerde g , (3.39) toplamını göstermektedir, yani

$$g(x, y, \xi, \eta) = 1 - 2(x\xi + y\eta) + (x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) \quad (3.51)$$

dir. Eğer $M(x, y)$ ve $P(x, y)$ noktaları farklı ise, (3.39) formülünden, (3.51) fonksiyonu pozitifdir. Ayrıca M ve P noktaları çakışık ve birim disk içindeyse (3.38) ve (3.39) formülleri (3.51) fonksiyonunun pozitif olmasını gerektirir.

Kabul edelimki $M(x, y)$ noktası birim çember üzerinde olsun, yani $x^2 + y^2 = 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda (3.51) formülünden

$$g(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

elde edilir. Diğer taraftan, aynı $x^2 + y^2 = 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned}
1 - x\xi - y\eta &= x(x - \xi) + y(y - \eta) \\
x\eta - y\xi &= (x - \xi)\eta - (y - \eta)\xi
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikleri gözönüne alarak,

$$\frac{|1 - x\xi - y\eta| (|x - \xi| + |y - \eta|)}{g(x, y, \xi, \eta)} \leq \frac{(|x - \xi| + |y - \eta|)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \leq 2 \quad (3.52)$$

$$\frac{|x\eta - y\xi| (|x - \xi| + |y - \eta|)}{g(x, y, \xi, \eta)} \leq \frac{(|x - \xi| + |y - \eta|)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \leq 2 \quad (3.53)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler $M(x, y)$ naoktasının birim çember üzerinde ve $P(\xi, \eta)$ noktasının kapalı birim disk içinde değişken olması durumunda sağlanır.

3.3 Birim Disk İçinde Ortogonal Harmonik Polinomlar

Bir $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (3.54)$$

birim diski içinde tanımlı olsun. Dolayısıyla $h(x, y) > 0$ dır ve (3.54) bölgesinde integrallenebilirdir. Yani,

$$0 < \iint_G h(x, y) dx dy < \infty$$

koşulu sağlanır.

$$\{1, u_n(x, y), v_n(x, y)\} \quad (3.55)$$

homogen harmonik polinom sistemine $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonallık metodunu uygulayarak, (3.54) bölgesi üzerinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan,

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (3.56)$$

bir harmonik polinom sistemi elde ederiz. (3.56) sistemi için ortonormallik koşulları

$$\begin{aligned} \iint_G h(x, y) A_n(x, y) A_k(x, y) dx dy &= \delta_{nk} \\ \iint_G h(x, y) A_n(x, y) B_k(x, y) dx dy &= 0 \\ \iint_G h(x, y) B_n(x, y) B_k(x, y) dx dy &= \delta_{nk} \end{aligned}$$

formundadır. Kabul edelim ki (3.56) polinomlarının ağırlık fonksiyonu sıfır tarafından düzgün sınırlı olsun ve Lipschitz koşulu sağlansın. Yani,

$$h(x, y) \geq c_1 > 0 \quad (3.57)$$

$$|h(x, y) - h(\xi, \eta)| \leq M_1(|x - \xi| + |y - \eta|) \quad (3.58)$$

koşulları sağlansın. (3.57) ve (3.58) koşulları altında (3.56) polinomlarını ele alalım. $B_n(x, y)$ polinomu (3.55) homogen harmonik polinomlarına göre seriye açılırsa (3.12) ye benzer olarak

$$B_n(x, y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n [\alpha_k u_k(x, y) + \beta_k v_k(x, y)] \quad (3.59)$$

şeklinde elde edilir. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ \beta_k &= \frac{2(k+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

formülleri ile tanımlıdır. α_k, β_k katsayıları, (3.40) ve (3.41) notasyonları kullanılırsa (3.59) eşitliği

$$B_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.60)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$K_n(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \quad (3.61)$$

dır. Gerçekten

$$\begin{aligned} B_n(x, y) &= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{2(k+1)}{\pi} \left(\iint_G B_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) u_k(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(k+1)}{\pi} \left(\iint_G B_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) v_k(x, y) \right] \\ &= \frac{a_o}{2} + \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) \left[\sum_{k=1}^n (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{a_o}{2} + \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) \left[K_n(x, y, \xi, \eta) - \frac{1}{2} \right] ds \\ &= \frac{a_o}{2} + \frac{1}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) ds - \frac{1}{2\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) ds \end{aligned}$$

yazabiliriz ki burada

$$a_o = \frac{1}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) ds$$

dir. Bu ise (3.60) eşitliğidir.

(3.60) eşitliğinde (3.61) eşitliği dikkate alınır ve son terim ayrı yazılırsa

$$\begin{aligned} B_n(x, y) &= \frac{2(n+1)}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) (u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) d\xi d\eta \\ &+ \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.62)$$

elde edilir. Öncelikle eşitliğin sağ tarafının ilk terimi için bir eşitsizlik elde edelim.

(3.57) den ve Cauchy-Schwarz Bunyakovskii eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \iint_G |B_n(\xi, \eta)| |\tilde{u}_k| d\xi d\eta &\leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \iint_G \sqrt{h(\xi, \eta)} |B_n(\xi, \eta)| |\tilde{u}_k| d\xi d\eta \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sqrt{\iint_G |u_k(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2(k+1)c_1}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

elde edilir. Bu durumda (3.62) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimin mutlak değeri

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi c_1}} (|u_n(x, y)| + |v_n(x, y)|) \quad (3.64)$$

değerini geçemez. Şimdi eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim için bir eşitsizlik elde edelim.

$$\iint_G h(\xi, \eta) B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

olduğu dikkate alınır bu eşitlik

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{2}{\pi} \iint_G B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{2}{\pi h(x, y)} \iint_G [h(x, y) - h(\xi, \eta)] B_n(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.65)$$

yazılabilir. $K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)$ kısmi toplamı yerine ondan daha büyük olan

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k)$$

ifadesi alındıktan sonra integral içerisindeki ifade σ_n ile gösterilir ve (3.49) eşitliği dikkate alınır

$$\begin{aligned} \sigma_n &= [h(x, y) - h(\xi, \eta)] B_n(\xi, \eta) \left[\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right] \\ &= [h(x, y) - h(\xi, \eta)] B_n(\xi, \eta) \frac{1}{g} \left[(1 - x\xi - y\eta) \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \right. \\ &\quad \left. + (x\eta - y\xi) \sum_{k=1}^{n-1} (v_k \tilde{u}_k - u_k \tilde{v}_k) - n(1 - x\xi - y\eta)(u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) \right. \\ &\quad \left. - n(x\eta - y\xi)(v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n) \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

bulunur. Kabul edelim ki $M(x, y)$ noktası birim çemberin üzerinde bulunsun. Bu durumda (3.52) ve (3.53) eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler ve (3.58) koşulu kullanılarak, (3.66) için

$$\begin{aligned} |\sigma_n| &\leq 2M_1 |B_n(\xi, \eta)| \left[\sum_{k=0}^{n-1} (|u_k \tilde{u}_k| + |v_k \tilde{v}_k|) + \sum_{k=0}^{n-1} (|v_k \tilde{u}_k| + |u_k \tilde{v}_k|) \right. \\ &\quad \left. + n(|u_n \tilde{u}_n| + |v_n \tilde{v}_n| + |v_n \tilde{u}_n| + |u_n \tilde{v}_n|) \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliği terim terime integre ederek ve (3.63) eşitsizliğini integrellere uygulayarak,

$$\begin{aligned} \iint_G |\sigma_n| d\xi d\eta &\leq M_1 \sqrt{\frac{2\pi}{c_1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} (|u_k| + |v_k|) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} (|v_k| + |u_k| + \frac{2n}{\sqrt{n+1}} (|u_n| + |v_n|)) \right] \\ &\leq c_2 \sqrt{n+1} \end{aligned} \quad (3.68)$$

elde edilir. Elde edilen sonuçları kullanarak bu kısmın sonucunu aşağıdaki teoremden verelim.

Teorem 3.1 *Eğer ağırlık fonksiyonu (3.57) ve (3.58) koşullarını sağlıyor ise bu durumda kapalı birim disk içinde (3.56) polinomları için*

$$|A_n(x, y)| \leq c_3 \sqrt{n+1} \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad (3.69)$$

$$|B_n(x, y)| \leq c_3 \sqrt{n+1} \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad (3.70)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.62) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değeri alınır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |B_n(x, y)| &\leq \frac{2(n+1)}{\pi} \iint_G |B_n(\xi, \eta)| (|u_n \tilde{u}_n| + |v_n \tilde{v}_n|) d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \iint_G |B_n(\xi, \eta)| |K_{n-1}(x, y, \xi, \eta)| d\xi d\eta \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.64) ve (3.68) birlikte dikkate alınır

$$\begin{aligned} |B_n(x, y)| &\leq \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi c_1}} (|u_n(x, y)| + |v_n(x, y)|) \\ &\quad + c_2 \sqrt{n+1} \\ &\leq c_3 \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir bu ise ispatı tamamlar. ■

3.4 Genel Durumda Bir Bölge Üzerinde Ortogonal Harmonik Polinomlar

Homogen harmonik polinom sistemini

$$1, u_1(x, y), v_1(x, y), \dots, u_n(x, y), v_n(x, y), \dots \quad (3.71)$$

formunda yazalım.

Sınırlı basit irtibatlı bir G bölgesi düzgün bir Γ Jordan eğrisi ile sınırlı olsun. Kabul edelim ki $h(x, y)$ G bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Biliyoruz ki $h(x, y) > 0$ dır ve bu bölgede integrallenebilir bir fonksiyondur. (3.71) serisine ortogonalite metodunu uygulayarak G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (3.72)$$

harmonik polinom serisini elde ederiz, yani

$$\begin{aligned}
\iint_G h(x, y) A_n(x, y) A_k(x, y) dx dy &= \delta_{nk} \\
\iint_G h(x, y) A_n(x, y) B_k(x, y) dx dy &= 0 \\
\iint_G h(x, y) B_n(x, y) B_k(x, y) dx dy &= \delta_{nk}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

koşulları sağlar. Öncelikle $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonunun sıfır tarafından düzgün sınırlı olduğunu kabul edelim, yani

$$h(x, y) \geq h_0 > 0, \quad M(x, y) \in G \tag{3.74}$$

koşulu sağlansın. ρ , $M(x, y)$ noktasından Γ ya olan uzaklığı gösterebilir. Bu durumda Lemma 3.1 den (3.74) koşulu altında,

$$\begin{aligned}
\pi \rho^2 |A_n(x, y)|^2 &\leq \iint_{\omega_\rho} |A_n(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\
&\leq \frac{1}{h_0} \iint_G h(\xi, \eta) |A_n(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{h_0}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

elde ederiz.

Böylelikle, eğer (3.74) koşulu sağlanırsa, bu durumda (3.72) polinomları G bölgesinde düzgün sınırlıdır.

G bölgesinde karesi $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre integrallenebilen harmonik bir $f(x, y)$ fonksiyonu tanımlı olsun, yani

$$\|f\|_G^2 = \iint_G h(x, y) f^2(x, y) dx dy < \infty \tag{3.76}$$

eşitsizliği sağlansın. Ortogonal harmonik polinomların Fourier serilerini, $f(x, y)$ fonksiyonuna uygun olarak

$$f(x, y) = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k A_k(x, y) + b_k B_k(x, y)] \tag{3.77}$$

formunda ifade edebiliriz. Bu fonksiyonun Fourier katsayıları (3.77) den

$$\begin{aligned} a_k &= \iint_G h(x, y) f(x, y) A_k(x, y) dx dy \\ b_k &= \iint_G h(x, y) f(x, y) B_k(x, y) dx dy \end{aligned}$$

formülleri ile tanımlıdır.

$\{K_n(z)\}$ G bölgesinde aynı $h(z) = h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan kompleks değişkenli polinomları gösterebilir. Kompleks bölgede ortogonalite koşulu

$$\iint_G h(z) K_n(z) \overline{K_m(z)} dx dy = \delta_{nm} \quad (3.78)$$

formundadır.

3.5 Bir Bölge Üzerinde Süperortogonal Harmonik Polinomlar

Önceki kısma benzer olarak düzgün bir Γ Jordan eğrisi tarafından sınırlanan sonlu basit irtibatlı G bölgesi üzerinde bir $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon G bölgesi üzerinde ortogonal olan yani, (3.78) koşulunu sağlayan kompleks değişkenli $\{K_n(z)\}$ polinom sistemi tanımlar. Reel ve imajiner kısımları ayırarak bu polinomlar için harmonik polinomlara bağlı olarak,

$$K_n(z) = P_n(x, y) + iQ_n(x, y) \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.79)$$

formunda bir gösterim elde edilebilir.

Önceki kısımda gösterildi ki aynı $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (3.80)$$

ortogonal harmonik polinom sistemi tanımlar.

(3.79) formülüne bağlı olarak λ_n ve μ_n sabitler olmak üzere hangi koşullar altında

$$\begin{aligned} A_n(x, y) &= \lambda_n P_n(x, y) \\ B_n(x, y) &= \mu_n Q_n(x, y) \end{aligned} \quad (3.81)$$

eşitliklerinin sağlandığını inceleyelim.

(3.81) koşullarını sağlayan (3.80) polinomlarına G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu ile süperortogonal polinomlar denir.

(3.81) süperortogonalite koşulunun anlamı şudur, (3.79) formülünü kullanarak G bölgesinde $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan (3.80) harmonik polinomlarından, aynı ağırlık fonksiyonuyla ortogonal olan kompleks polinomları oluşturabiliriz.

Önceki kısma benzer olarak, z_0 G bölgesinde sabit bir nokta ve $z = \Psi(\omega)$ ters fonksiyon olmak üzere $\varphi(z_0) = 0$ ve $\varphi'(z_0) > 0$ koşulları altında $\omega = \varphi(z)$, G bölgesini $|\omega| < 1$ diskinde dönüştüren birebir, örten ve konform bir dönüşüm olsun.

$$h(x, y) = |\varphi'(z)|^2, \quad z \in G \quad (3.82)$$

formunda bir ağırlık fonksiyonunu ele alalım. Bu kısımda ağırlık fonksiyonunun (3.82) olması durumunda (3.80) harmonik polinomlarının süperortogonal olduğunu ispatlayacağız. Fakat öncelikle yardımcı sonuçları verelim.

Lemma 3.2 *Herhangi bir $\alpha_n(z)$ harmonik polinomu için $\alpha_n(z)$ nin adjointi olan $\tilde{\alpha}_n(z)$ harmonik polinomu vardır ki*

$$\iint_G \tilde{\alpha}_n(z) |\varphi'(z)|^2 dx dy \leq \iint_G |\alpha_n(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 dx dy \quad (3.83)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\alpha_n(z)$ ve $\tilde{\alpha}_n(z)$ harmonik polinomlarının adjointliğinden, $\omega = re^{i\theta}$ notasyonunu kullanarak

$$\alpha_n[\Psi(\omega)] = \alpha(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k \quad (3.84)$$

$$\tilde{\alpha}_n[\Psi(\omega)] = \tilde{\alpha}(r, \theta) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta) r^k \quad (3.85)$$

seri açılımlarını yazabiliriz. (3.85) açılımında $\tilde{a}_0 = 0$ alabiliriz. Bu durumda (3.84) ve (3.85) eşitliklerini (3.83) eşitsizliğindeki integralde kullanarak konform bir dönüşüm-den sonra

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |\alpha(r, \theta)|^2 r dr d\theta = \frac{\pi a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2(k+1)} (a_k^2 + b_k^2) \quad (3.86)$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |\tilde{\alpha}(r, \theta)|^2 r dr d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2(k+1)} (a_k^2 + b_k^2) \quad (3.87)$$

elde ederiz ki Lemma ispatlanmış olur. ■

Lemma 3.3 *Herhangi $\alpha_n(x, y)$ ve $\beta_m(x, y)$ harmonik polinomları için bu polinomlara adjoint olan $\tilde{\alpha}_n(x, y)$ ve $\tilde{\beta}_m(x, y)$ harmonik polinomları vardır ki*

$$\iint_G \alpha_n(z) \tilde{\beta}_m(z) |\varphi'(z)|^2 dx dy = - \iint_G \tilde{\alpha}_n(z) \beta_m(z) |\varphi'(z)|^2 dx dy \quad (3.88)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.84) ve (3.85) formüllerine benzer olarak

$$\beta_n[\Psi(\omega)] = \beta(r, \theta) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos k\theta + \tilde{b}_k \sin k\theta) r^k \quad (3.89)$$

$$\tilde{\beta}_n[\Psi(\omega)] = \tilde{\beta}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\tilde{b}_k \cos k\theta + \tilde{a}_k \sin k\theta) r^k \quad (3.90)$$

eşitliklerini yazabiliriz. (3.84) ve (3.85) eşitliklerini kullanırsak

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \alpha(r, \theta) \tilde{\beta}(r, \theta) r dr d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2(k+1)} (-a_k \tilde{b}_k + b_k \tilde{a}_k) \quad (3.91)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.85) ve (3.89) den

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(r, \theta) \beta(r, \theta) r dr d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2(k+1)} (-\tilde{a}_k b_k + a_k \tilde{b}_k) \quad (3.92)$$

yazılabilir. (3.91) ve (3.92) den (3.88) eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki bütün sonuçlarda herhangi bir $Q_n(x, y)$ polinomunun adjointi olan $\tilde{Q}_n(x, y)$ harmonik polinomunun Lemma 3.2 ve Lemma 3.3 nin hipotezleri sağlanacak şekilde seçildiğini kabul edelim. ■

Lemma 3.4 (3.80) harmonik polinomları G bölgesi üzerinde (3.82) ağırlık fonksiyonu ile ortonormal ise bu durumda

$$\begin{aligned} A_n(z) &= -\tilde{B}_n(z) \\ B_n(z) &= \tilde{A}_n(z) \end{aligned} \quad (3.93)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Kısalık açısından

$$(A_n, B_m) = \iint_G h(x, y) A_n(x, y) B_m(x, y) dx dy \quad (3.94)$$

notasyonunu kullanalım. Eğer $n < m$ ise bu durumda (3.80) sistemindeki polinomların ortogonallığından,

$$(A_m, \tilde{B}_n) = (B_m, \tilde{A}_n) = 0 \quad (3.95)$$

yazılabilir.

Şimdi $m < n$ olsun. Bu durumda (3.88) eşitliğini kullanarak ve adjoint polinom seçimini gözönünde bulundurarak

$$\begin{aligned} (A_m, \tilde{B}_n) &= -(\tilde{A}_m, B_n) = 0 \\ (B_m, \tilde{A}_n) &= -(\tilde{B}_m, A_n) = 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

elde ederiz. (3.95) ve (3.96) de $n = m$ durumu dahil değildir.

Diğer taraftan herhangi n ve m için Lemma 3.3 den

$$\begin{aligned} (A_m, \tilde{A}_n) &= -(A_n, \tilde{A}_m) \\ (B_m, \tilde{B}_n) &= -(B_n, \tilde{B}_m) \end{aligned}$$

eşitliklerinden (3.80) polinomlarının ortogonallıklarını göz önünde bulundurarak

$$(A_m, \tilde{A}_n) = (B_m, \tilde{B}_n) = 0 \quad (3.97)$$

elde ederiz, burada $n=m$ durumu dahildir.

Şimdi (3.80) sistemine göre adjoint polinomları seriye açılırsa

$$\tilde{A}_n(z) = a_0 A_0 + \sum_{k=1}^n [a_k A_k(z) + b_k B_k(z)] \quad (3.98)$$

$$\tilde{B}_n(z) = \alpha_0 A_0 + \sum_{k=1}^n [\alpha_k A_k(z) + \beta_k B_k(z)] \quad (3.99)$$

yazılabilir.

(3.96) ve (3.97) ortogonallik koşullarını gözönünde bulundurarak (3.98) ve (3.99) formüllerinin herbirinde yalnızca bir katsayı sıfırdan farklıdır. Bu durumda (3.98) ve (3.99) eşitlikleri

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(z) &= b_n B_n(z) \\ \tilde{B}_n(z) &= \alpha_n A_n(z) \end{aligned} \quad (3.100)$$

formuna indirgenebilir. Bu eşitliklerde b_n ve α_n katsayıları adjoint harmonik polinomlar için olan formül yardımıyla belirlenebilir. Kompleks katsayılı keyfi bir polinom için

$$\begin{aligned} R_n(z) &= c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^n (c_k + id_k) z^k \\ &= c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^n (c_k + id_k) [u_k(x, y) + iv_k(x, y)] \\ &= c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^n \{ [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] \\ &\quad + i [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)] \} \end{aligned} \quad (3.101)$$

yazılabilir. $A_n(z)$ ve $\tilde{A}_n(z)$ harmonik polinomları adjoint olduğundan (3.101) formülünden

$$A_n(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] \quad (3.102)$$

$$\tilde{A}_n(z) = d_0 + \sum_{k=1}^n [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)] \quad (3.103)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B_n(z) = \tilde{c}_0 + \sum_{k=1}^n [\tilde{c}_k u_k(x, y) - \tilde{d}_k v_k(x, y)] \quad (3.104)$$

$$\tilde{B}_n(z) = \tilde{d}_0 + \sum_{k=1}^n [\tilde{d}_k u_k(x, y) + \tilde{c}_k v_k(x, y)] \quad (3.105)$$

yazılabilir. Bu açılımdaki baş katsayıları karşılaştırarak (3.100) den

$$\begin{aligned} c_n &= -b_n \tilde{d}_n \\ \tilde{d}_n &= \alpha_n c_n \end{aligned} \quad (3.106)$$

elde edilir ki bu ise $b_n \cdot \alpha_n = -1$ olmasını gerektirir. Böylelikle (3.100) eşitlikleri

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(z) &= b_n B_n(z) \\ \tilde{B}_n(z) &= -\frac{1}{b_n} A_n(z) \end{aligned} \quad (3.107)$$

formunda ifade edilebilir. (3.83) eşitsizliğinden ve (3.80) polinomlarının ortonormalliğinden

$$\begin{aligned} \iint_G \left| \tilde{A}_n(z) \right|^2 |\varphi'(z)|^2 dx dy &\leq 1 \\ \iint_G \left| \tilde{B}_n(z) \right|^2 |\varphi'(z)|^2 dx dy &\leq 1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliklerde (3.107) eşitliklerinin sağ kısmını yerine koyarak $b_n^2 \leq 1$ ve $1 \leq b_n^2$ elde edilir ki bu ise $b_n^2 = 1$ olmasını gerektirir.

Son olarak b_n in işaretini belirlemek için (3.103) ve (3.104) eşitliklerini gözönünde bulunduralım. (3.102) formülünde $d_n = 0$ olduğundan ve c_n başkatsayısı pozitif olduğundan ve (3.104) formülünde $v_n(x, y)$ nin başkatsayısının pozitif olması gerektiğinden $\tilde{d}_n < 0$ elde edilir. Böylelikle (3.106) den $b_n > 0$ olur. Bu durumda $b_n = 1$ dir. Bu değer (3.107) da yerine yazılırsa (3.93) eşitliği elde edilir. Böylece lemma ispatlanmış olur. ■

Teorem 3.2 $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu (3.82) deki gibi verilsin. Bu durumda (3.81) eşitlikleri sağlanır ve

$$\begin{aligned} A_n(x, y) &= \sqrt{2} P_n(x, y) \\ B_n(x, y) &= \sqrt{2} Q_n(x, y) \end{aligned} \quad (3.108)$$

formundadır.

İspat. (3.79) formülünden (3.108) eşitlikleri

$$K_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_n(z) + iB_n(z)] \quad (3.109)$$

formülüne eşittir. Bu polinomlar için (3.78) integrali

$$\iint_G h(x, y) K_n(z) \overline{K_m(z)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_G h(z) [A_n(z) + iB_n(z)] [A_m(z) - iB_m(z)] dx dy \quad (3.110)$$

formundadır. (3.80) polinomlarının tanımından (3.110) eşitliğinin sağ tarafı $n \neq m$ ise 0, $n = m$ ise 1 e eşittir. Böylelikle (3.109) eşitliğinin sağ tarafının n inci derceden pozitif katsayılı $z = x + iy$ değişkenli bir polinom olduğunu ispatlamak kalır.

(3.109) fonksiyonu z değişkenli cebirsel bir polinomdur ve $B_n(z) = \tilde{A}_n(z)$ dir(Lemma 3.4). Bu eşitlikten (3.102) yi gözönünde bulundurarak ve (3.101) eşitliğine benzer olarak

$$\begin{aligned} A_n(z) + iB_n(z) &= c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] \\ &\quad + id_0 + i \sum_{k=1}^n [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)] \\ &= \sum_{k=0}^n (c_k + id_k) z^k \end{aligned} \quad (3.111)$$

elde ederiz. (3.102) formülünden $A_n(z)$ polinomu için $d_n = 0$ koşulu sağlanır, (3.111) polinomunun başkatsayısı $c_n > 0$ eşittir. İspat tamamlanmış olur. ■

3.6 İki Eşlenik Kompleks Değişkenli Ortogonal Polinomlar

$z = x + iy$ ve $\bar{z} = x - iy$ olmak üzere $\{z^n \bar{z}^m\}$ monomialler kümesini

$$\begin{aligned} &1 \\ &z, \bar{z} \\ &z^2, z\bar{z}, \bar{z}^2 \\ &\dots \\ &z^n, z^{n-1}\bar{z}, \dots, z\bar{z}^{n-1}, \bar{z}^n \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.112)$$

şeklinde ifade edelim. Bu monomialler lineer bağımsız olduğundan

$$P_{nk}(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} z^{m-s} \bar{z}^s + \sum_{s=0}^k c_{ns} z^{n-s} \bar{z}^s \quad (3.113)$$

formunda polinomları ele alabiliriz. Kabul edelim ki (3.113) polinomunun başkatsayısı sıfırdan farklı olsun, yani $c_{nk} \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.113) polinomunun basamağı (n, k) dır.

Şimdi G bölgesi xy düzleminde düzgün bir Γ Jordan eğrisi ile sınırlı basit irtibatlı bir bölge ve $h(x, y)$ G bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Ayrıca

$$\left. \begin{array}{l} P_{00}(z, \bar{z}) \\ P_{10}(z, \bar{z}), P_{11}(z, \bar{z}) \\ P_{20}(z, \bar{z}), P_{21}(z, \bar{z}), P_{22}(z, \bar{z}) \\ \vdots \\ P_{n0}(z, \bar{z}), P_{n1}(z, \bar{z}), P_{n2}(z, \bar{z}), \dots, P_{n,k-1}(z, \bar{z}), P_{nk}(z, \bar{z}) \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (3.114)$$

polinom sistemi verilsin. Bu polinom sistemi aşağıdaki koşulları sağlarsa $h(x, y)$ ağırlık fonksiyona göre G bölgesinde ortonormal polinom olarak adlandırılır.

- 1) Her bir $P_{nk}(z, \bar{z})$ polinomunun c_{nk} başkatsayısı pozitiftir.
- 2) (3.114) sistemindeki herhangi iki polinom için

$$\iint_G P_{nk}(z, \bar{z}) \bar{P}_{ms}(z, \bar{z}) h(x, y) dx dy = \delta_{nm} \delta_{ks} \quad (3.115)$$

ortonormallik koşulu sağlanır.

Şimdi bir kaç örnek verelim.

Örnek1.

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (3.116)$$

bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^\alpha, \quad \alpha > -1 \quad (3.117)$$

ile tanımlansın.

$$B_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) = \hat{P}_k(2z\bar{z} - 1; \alpha, n - k)z^{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.118)$$

$$B_{kn}(z, \bar{z}; \alpha) = \hat{P}_k(2z\bar{z} - 1; \alpha, n - k)\bar{z}^{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.119)$$

polinomlarını ele alalım.

(3.118) ve (3.119) polinomlarında ilk indis z değişkeninin en yüksek derecesini, ikinci indis ise $\bar{z}$ değişkeninin en yüksek derecesini gösterir.

(3.118) ve (3.119) polinomlarının (3.116) bölgesinde (3.117) ağırlık fonksiyonu ile ortogonal olduğunu ispatlayalım. (3.118) polinomları için $k \leq n$ ve $s \leq m$ koşulu altında,

$$\begin{aligned} J_{nm}^{(k,s)} &= \iint_G B_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) \bar{B}_{ms}(z, \bar{z}; \alpha) h(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \hat{P}_k(2\rho^2 - 1; \alpha, n - k) \rho^{n-k} e^{i(n-k)\alpha} \right. \\ &\quad \left. \times \hat{P}_s(2\rho^2 - 1; \alpha, m - s) \rho^{m-s} e^{-i(m-s)\alpha} (1 - \rho^2)^\alpha \rho d\rho \right] d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(n-k-m+s)\alpha} d\alpha \\ &\quad \times \int_0^1 \hat{P}_k(2\rho^2 - 1; \alpha, n - k) \hat{P}_s(2\rho^2 - 1; \alpha, m - s) \\ &\quad \cdot \rho^{n-k+m-s} (1 - \rho^2)^\alpha \rho d\rho \end{aligned} \quad (3.120)$$

yazılabilir. $n - k \neq m - s$ ise ilk integral sıfır olur. Kabul edelim ki $n - k = m - s$ olsun. Bu durumda (3.120) eşitliği

$$\begin{aligned} J_{nm}^{(k,s)} &= 2\pi \int_0^1 \hat{P}_k(2\rho^2 - 1; \alpha, n - k) \hat{P}_s(2\rho^2 - 1; \alpha, n - k) \\ &\quad \cdot \rho^{2(n-k)} (1 - \rho^2)^\alpha \rho d\rho \end{aligned}$$

formuna dönüştür.

$$2\rho^2 - 1 = t$$

dönüşümü yaparak

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \frac{1+t}{2} \\ 1-\rho^2 &= \frac{1-t}{2}\end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan

$$\begin{aligned}J_{nm}^{(k,s)} &= 2\pi \int_{-1}^1 \hat{P}_k(t; \alpha, n-k) \hat{P}_s(t; \alpha, n-k) \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1-t}{2}\right)^\alpha \frac{dt}{4} \\ &= \frac{\pi}{2^{n-k+\alpha+1}} \delta_{ks}\end{aligned}\quad (3.121)$$

elde edilir ki bu ise (3.118) polinomlarının birbirine ortogonal olduğunu gösterir. Benzer şekilde (3.119) polinomlarının ortogonallığı de ispatlanabilir. Ayrıca (3.120) formülüne benzer olarak $k \leq n$ ve $s \leq m$ koşulları altında (3.118) ve (3.119) sistemindeki iki polinom için

$$\begin{aligned}J_{ns}^{(k,m)} &= \iint_G B_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) \bar{B}_{sm}(z, \bar{z}; \alpha) h(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(n-k+m-s)\alpha} d\alpha \\ &\quad \times \int_0^1 \hat{P}_k(2\rho^2 - 1; \alpha, n-k) \hat{P}_s(2\rho^2 - 1; \alpha, m-s) \\ &\quad \cdot \rho^{n-k+m-s} (1-\rho^2)^\alpha \rho d\rho\end{aligned}\quad (3.122)$$

yazılabilir. $n = k$ ve $m = s$ eşitliklerinden en az biri sağlanmazsa, (3.122) formülünün sağ tarafındaki ilk integral sıfır olur. Eğer bu eşitliklerin ikisi de sağlanırsa (3.122) formülünden

$$\begin{aligned}J_{nm}^{(n,m)} &= 2\pi \int_0^1 \hat{P}_n(2\rho^2 - 1; \alpha, 0) \hat{P}_m(2\rho^2 - 1; \alpha, 0) \\ &\quad \cdot (1-\rho^2)^\alpha \rho d\rho = \frac{\pi}{2^{\alpha+1}} \delta_{nm}\end{aligned}$$

elde edilir. $n \neq m$ ise bu değer sıfırdır. $n = m = k = s$ koşulu sağlanırsa (3.118) ve (3.119) polinomları tek bir polinoma dönüşür.

(3.118) ve (3.119) formülleri ile tanımlanan polinomlar (3.116) bölgesinde (3.117)

ağırlık fonksiyonu ile ortogonaldır.

(3.121) formülü

$$\|B_{nk}\|_G^2 = \frac{\pi}{2^{n-k+\alpha+1}}$$

eşitliğini gerektirir. Bu durumda (3.118) sistemindeki ortonormal polinomlar

$$\hat{B}_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) = \sqrt{2^{n-k+\alpha+1}/\pi} B_{nk}(z, \bar{z}; \alpha)$$

ile tanımlanır. Benzer bir formül (3.119) polinomları için de sağlanır.

Örnek2. $R \leq \infty$ olmak üzere $(0, R^2)$ aralığında bir $h(t)$ ağırlık fonksiyonu tanımlansın. $\{\tilde{Q}_n(t; k)\}$

$$h_k(t) = t^k h(t), \quad t \in (0, R^2) \quad (3.123)$$

ağırlık fonksiyonu ile aynı $(0, R^2)$ aralığında ortonormal olan polinomları gösterebiliriz.

Bu durumda

$$\int_0^{R^2} \hat{Q}_n(t; k) \hat{Q}_m(t; k) h_k(t) dt = \delta_{nm} \quad (3.124)$$

koşulu sağlanır.

$$\hat{H}_{nk}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{Q}_k(z\bar{z}; n-k) z^{n-k} \quad (3.125)$$

$$\hat{H}_{kn}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{Q}_k(z\bar{z}; n-k) \bar{z}^{n-k} \quad (3.126)$$

polinomlarımızı ele alalım. Bu polinomların

$$h(x^2 + y^2) = h(z\bar{z}) \quad (3.127)$$

ağırlık fonksiyonu ile

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\} \quad (3.128)$$

bölgesinde ortonormal olduğunu ispatlayalım.

(3.125) sistemindeki iki polinom için $k \leq n$ ve $s \leq m$ koşulu altında

$$\begin{aligned} J_{nm}^{(k,s)} &= \iint_G \hat{H}_{nk}(z, \bar{z}) \hat{H}_{ms}(z, \bar{z}) h(z\bar{z}) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \hat{Q}_k(\rho^2; n-k) \hat{Q}_s(\rho^2; m-s) \right. \\ &\quad \left. \times \rho^{n-k+m-s} e^{i(n-k-m+s)\varphi} h(\rho^2) \rho d\rho \right] d\varphi \end{aligned} \quad (3.129)$$

yazılabilir.

$n - k \neq m - s$ ise (3.129) integrali sıfır olur. Kabul edelim ki $n - k = m - s$ olsun.

Bu durumda (3.129) eşitliği

$$J_{nm}^{(k,s)} = 2 \int_0^R \hat{Q}_k(\rho^2; n-k) \hat{Q}_s(\rho^2; n-k) \rho^{2(n-k)} h(\rho^2) \rho d\rho$$

eşitliğini gerektirir. $\rho^2 = t$ alarak ve (3.123) formülünü gözönünde bulundurarak

$$J_{nm}^{(k,s)} = \int_0^{R^2} \hat{Q}_k(t; n-k) \hat{Q}_s(t; n-k) h_{n-k}(t) dt = \delta_{ks}$$

elde edilir. Burada (3.124) formülü gözönünde bulunduruldu. Böylelikle (3.125) polinomları (3.128) bölgesinde (3.127) ağırlık fonksiyonu ile ortonormaldir. Benzer şekilde (3.126) polinomlarının ortogonallığı ve (3.125) polinomlarının (3.126) polinomları ile ortogonallığı ispatlanabilir. (3.125) ve (3.126) polinomları $n = k$ için aynı polinomu ifade ederler.

Örnek3. Chebyshev-Laguerre tipi $\{\hat{L}_n(t; \alpha)\}$ ortonormal polinomlarının

$$h(t) = t^\alpha e^{-t}, \quad \alpha > -1, \quad t > 0$$

ağırlık fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda (3.123) ve (3.124) formüllerinin yerine

$$h_k(t) = t^{\alpha+k} e^{-t}, \quad t > 0$$

$$\int_0^\infty L_n(t; \alpha+k) L_m(t; \alpha+k) h_k(t) dt = \delta_{nm}$$

formülleri yazılabilir. Bu durumda (3.127) ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha e^{-(x^2+y^2)} \quad (3.130)$$

formunda olur ve

$$\hat{H}_{nk}(z, \bar{z}; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{L}_k(z\bar{z}; \alpha + n - k) z^{n-k} \quad (3.131)$$

$$\hat{H}_{kn}(z, \bar{z}; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{L}_k(z\bar{z}; \alpha + n - k) \bar{z}^{n-k} \quad (3.132)$$

polinomları (3.130) ağırlık fonksiyonu ile bütün düzlemde ortonormaldir. Ayrıca (3.131) ve (3.132) formülleri (3.125) ve (3.126) formüllerinin özel halleridir.

4. BİR ÇEVRE ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

4.1 Temel Tanımlar ve Özellikler

s, yay parametresi olmak üzere, düzgün bir Γ eğrisi

$$z = x + iy = \lambda(s) = x(s) + iy(s) \quad (4.1)$$

parametrik eşitliğiyle tanımlanmış olsun.

İki değişkenli

$$h(x, y) = h(z) = h[x(s), y(s)] = h(s) \quad (4.2)$$

fonksiyonu, Γ eğrisi üzerinde pozitif ve integrallenebilen bir fonksiyon ise ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır. Yani

$$0 < \int_{\Gamma} h(x, y) ds = \int_0^l h[x(s), y(s)] ds < \infty$$

koşulu sağlanmalıdır.

x ve y bağımsız değişkenlerinin kuvvetlerinin çarpımıyla elde edilen monomiallerin kümesi,

$$\{x^{n-k}y^k\}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4.3)$$

olsun.

(4.1) eğrisinin bulunduğu düzlemde iki durum söz konusudur. Eğer Γ eğrisi cebirsel ise, bu durumda (4.3) monomialleri eğri üzerinde lineer bağımlıdır, yani bu monomiallerden bazıları diğer monomialler cinsinden ifade edilebilir. Bu durum üzerinde bir sonraki kısımda durulacaktır. Eğer (4.1) eğrisi transandantal ise, bu durumda (4.3) monomialleri lineer bağımsızdır. Bu kısımda Γ eğrisinin transandantal olduğu kabul edilecektir.

İki değişkenli P_{nk} ve P_{ms} polinomları,

$$\int_{\Gamma} h(x, y) P_{nk}(x, y) P_{ms}(x, y) ds = 0$$

koşulunu sağlıyor ise $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre Γ eğrisi üzerinde ortogonaldır denir.

Cebirsel bir polinom sistemi

$$\left. \begin{array}{l} P_{00}(x, y) \\ P_{10}(x, y), P_{11}(x, y) \\ P_{20}(x, y), P_{21}(x, y), P_{22}(x, y) \\ \vdots \\ P_{n0}(x, y), P_{n1}(x, y), P_{n2}(x, y), \dots, P_{n,k-1}(x, y), P_{nk}(x, y) \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

olarak verilsin. Bu sistem aşağıdaki koşulları sağlıyor ise $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre Γ eğrisi üzerinde ortonormaldir denir.

i) Her bir $P_{nk}(x, y)$ polinomunun $c_{nk}^{(n,k)}$ başkatsayısı pozitif olmalıdır.

ii) (4.4) polinomları

$$(P_{nk}, P_{ms}) = \int_{\Gamma} h(x, y) P_{nk}(x, y) P_{ms}(x, y) ds = \delta_{nm} \delta_{ks}$$

ortonormollik koşulunu sağlamalıdır.

Aşağıda bir çevre üzerinde ortogonal polinomların bazı özellikleri ispatsız olarak verilecektir. Bu özelliklerin ispatları bir bölge üzerinde ortogonal olan polinomların ispatlarına benzer şekilde yapılabilir.

1) $h(x, y)$, transandantal bir Γ eğrisi üzerinde ağırlık fonksiyonu ise, bu durumda Γ üzerinde negatif olmayan herhangi bir $Q_{nk}(x, y)$ cebirsel polinomu için

$$\int_{\Gamma} h(x, y) Q_{nk}(x, y) ds > 0 \quad , \quad n \geq 1$$

koşulu sağlanır.

2) Γ üzerinde herhangi $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu bir tek ortonormal polinom sistemi belirler.

3) Başkatsayısı $c_{nk}^{(n,k)} > 0$ olan bir $P_{nk}(x, y)$ polinomu verilmiş olsun. (n, k) -yıncı basamaktan $P_{nk}(x, y)$ polinomunun Γ eğrisi üzerinde ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $(p, q) < (n, k)$ herhangi bir $Q_{pq}(x, y)$ polinomu için,

$$\int_{\Gamma} h(x, y) P_{nk}(x, y) Q_{pq}(x, y) ds = 0 \quad (4.5)$$

koşulunun sağlanmasıdır.

4) Başkatsayıları 1 olan (n, k) -yıncı basamaktan herhangi bir $\tilde{Q}_{nk}(x, y)$ ve $\tilde{P}_{nk}(x, y)$ ortogonal polinomu için

$$\int_{\Gamma} h(x, y) [\tilde{Q}_{nk}(x, y)]^2 ds \geq \int_{\Gamma} h(x, y) [\tilde{P}_{nk}(x, y)]^2 ds = \frac{1}{[c_{nk}^{(n,k)}]^2} \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

5)

$$\tilde{\Phi}_{nk}(x, y) = x^{n-k}y^k + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m A_{ms} x^{m-s} y^s \quad (4.7)$$

formundaki polinom ‘monik polinom’ olarak adlandırılır.

$$\int_{\Gamma} h(x, y) \tilde{\Phi}_{nk}(x, y) x^{p-q} y^q ds = 0$$

koşulunu sağlayan (4.7) polinomuna ‘monik ortogonal polinom’ denir.

6) $W_{nk}(\Gamma)$, basamağı (n, k) yı geçmeyen ve

$$\int_G h(x, y) Q_{nk}^2(x, y) ds \leq 1 \quad (4.8)$$

koşulunu sağlayan polinomların kümesini gösterebilir. $M_o(x_0, y_0)$ sabit bir nokta olsun.

(4.8) koşulunu sağlayan $W_{nk}(\Gamma)$ polinom kümesinin elemanlarının

$$A = \sup Q_{nk}^2(x_0, y_0) \quad (4.9)$$

supremumunu bulalım. (4.9) değeri

$$A = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m P_{ms}^2(x_0, y_0) + \sum_{s=0}^k P_{ns}^2(x_0, y_0)$$

formülü ile tanımlıdır ve bu supremum yalnızca

$$Q_{nk}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m P_{ms}(x_0, y_0) P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k P_{ns}(x_0, y_0) P_{ns}(x, y) \right]$$

polinomu ile elde edilir.

7) $f(x, y)$, Γ eğrisi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun ve

$$\|f\|_{\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} h(x, y) f^2(x, y) ds < \infty$$

koşulunu sağlasın. Bu tip fonksiyonların kümesi $L_2(h, \Gamma)$ ile gösterilecektir. $f(x, y)$ fonksiyonlarının (4.4) polinom sistemine bağlı Fourier katsayıları

$$a_{nk} = \int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) P_{nk}(x, y) ds$$

ile tanımlıdır. Sonuç olarak ortogonal polinomların Fourier serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_{ns} P_{ns}(x, y) \quad (4.10)$$

formundadır. Bu serilerin kısmi toplamı

$$S_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi (4.10) serisi ve onun (4.11) kısmi toplamı için bir kaç özellik verelim.

(4.11) kısmi toplamı $L_2(h, \Gamma)$ uzayında $f(x, y)$ fonksiyonuna yakınsar, yani (n, k) -yıncı basamaktan herhangi bir $Q_{nk}(x, y)$ polinomu için

$$\|f - S_{nk}\|_{\Gamma} \leq \|f - Q_{nk}\|_{\Gamma}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (4.10) serisi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_{ns}^2 \leq \|f\|_{\Gamma}^2$$

Bessel eşitsizliğini sağlar. Gerçekten

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} h(x, y) [f(x, y) - S_n(x, y)]^2 ds &= \int_{\Gamma} h(x, y) [f(x, y)]^2 ds \\ &\quad - 2 \int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) S_n(x, y) ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} h(x, y) [S_n(x, y)]^2 ds \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

yazabiliriz. Bu integrallerin deęerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} h(x, y) [S_n(x, y)]^2 ds &= \int_{\Gamma} h(x, y) \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \right]^2 ds \\
&= \int_{\Gamma} h(x, y) (a_{00} P_{00} + a_{10} P_{10} + a_{11} P_{11} + \dots \\
&\quad + a_{n0} P_{n0} + \dots + a_{nk} P_{nk})^2 ds \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) S_n(x, y) ds &= \int_{\Gamma} h(x, y) f(x, y) \\
&\quad \times \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms} P_{ms}(x, y) + \sum_{s=0}^k a_{ns} P_{ns}(x, y) \right] ds \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14), (4.12) de dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} h(x, y) [f(x, y) - S_n(x, y)]^2 ds &= \|f\|_{\Gamma}^2 - 2 \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2 \right] \\
&\quad + \left[\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2 \right] \geq 0 \\
\|f\|_{\Gamma}^2 &\geq \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m a_{ms}^2 + \sum_{s=0}^k a_{ns}^2
\end{aligned}$$

yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_{ns}^2 \leq \|f\|_{\Gamma}^2$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{s=0}^n a_{ns}^2 \right) = 0$$

koşulu elde edilir.

4.2 Cebirsel Bir Eğri Üzerinde İki Değişkenli Polinomlar

Bu kısımda Γ çevresinin cebirsel bir eğri olması durumu ele alınacaktır. Kabul edelim ki bu eğrinin denklemi

$$x^{N-k}y^p = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^{p-1} c_{Ns} x^{N-s} y^s \quad (4.15)$$

formunda olsun. Γ eğrisi (N, p) -yinci basamaktadır. (4.15) eşitliğinin sağ tarafını kısaca

$$x^{N-p}y^p = Q(x, y) \quad (4.16)$$

formunda ifade edelim. (4.16) eşitliği Γ eğrisi üzerinde sağlandığından, $\{x^{n-k}y^k\}$ monomial sistemi bu eğri üzerinde lineer bağımsız değildir. Şimdi bu problemi detaylı biçimde düşünelim. Monomialler kümesini

$$\begin{aligned} &1, \\ &x, y, \\ &x^2, xy, y^2, \\ &\dots\dots\dots \\ &x^N, x^{N-1}y, \dots, x^{N-p}y^p, \dots, xy^{N-1}, y^N, \\ &x^{N+1}, x^Ny, \dots, x^{N+1-p}y^p, x^{N-p}y^{p+1}, \dots, xy^N, y^{N+1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

formunda ifade edelim. Γ eğrisi (4.16) eşitliği ile tanımlı olduğundan, tablo (4.17) teki ilk N bloktaki monomialler bu eğri üzerinde birbirleriyle lineer bağımsızdır. (4.16) eşitliğinden Γ eğrisi üzerindeki $x^{N-p}y^p$ monomiali tablo (4.13) teki kendisinden önce gelen monomiallerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir.

$\Gamma(m)$, basamağı m den büyük olmayan bütün monomialler kümesi olan W_m içinde basamağı m olan Γ eğrisi üzerinde lineer bağımsız monomiallerin sayısını gösterebilir. (4.16) eşitliği gerektirir ki basamağı N olan $N+1$ monomial arasında mutlaka N tane lineer bağımsız monomial vardır, yani $\Gamma(N) = N$ dir. Şimdi $\Gamma(N+1)$ i hesaplayalım.

(4.16) eşitliğini x ve y ile ayrı ayrı çarparak,

$$\begin{aligned} x^{N+1-p}y^p &= xQ(x, y) \\ x^{N-p}y^{p+1} &= yQ(x, y) \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklinde iki eşitlik elde edilir. Bu eşitlikler gösterir ki $N + 1$ indisli blokta Γ eğrisi üzerinde kendisinden önceki monomialler cinsinden ifade edilebilen iki tane monomial vardır. Ayrıca $\Gamma(N + 1) = N$ elde ederiz. (4.18) eşitliği

$$\begin{aligned} x^{N+2-p}y^p &= x^2Q(x, y), \\ x^{N+1-p}y^{p+1} &= xyQ(x, y), \\ x^{N-p}y^{p+2} &= y^2Q(x, y), \end{aligned}$$

formunda Γ eğrisi üzerinde üç eşitliği gerektirir. Böylelikle $N + 2$ indisli blokta kendisinden önceki monomiallerle lineer bağımlı olan 3 monomial vardır. Buradan $\Gamma(N + 2) = N$ elde edilir. Bu şekilde devam ederek elde edilen eşitlikleri x ve y ile çarparak

$$\Gamma(m) = N \quad , \quad m \geq N \quad (4.19)$$

elde edilir.

Bu durumda eğer Γ eğrisi derecesi N olan (4.15) cebirsel eşitliği ile tanımlı ise, (4.17) monomiallerinin her bloğu, N indisli bloktan başlayarak Γ eğrisi üzerinde yalnızca N tane lineer bağımsız monomial içerir. Bu nedenle lineer bağımlı

$$x^{m-p}y^p, x^{m-p-1}y^{p+1}, \dots, x^{N-p}y^{m-N+p} \quad (4.20)$$

monomiallerini m indisli blokta atlayabiliriz. Bu blokta yalnızca

$$x^m, x^{m-1}y, \dots, x^{m-(p-1)}y^{p-1}, x^{N-(p+1)}y^{m-N+p+1}, \dots, xy^{m-1}, y^m \quad (4.21)$$

monomialleri kalmaktadır. Sonuç olarak (4.17) ile verilen tablo

$$\begin{aligned}
& 1, \\
& x, y, \\
& x^2, xy, y^2, \\
& \dots\dots\dots \\
& x^{N-1}, x^{N-2}y, \dots, xy^{N-2}, y^{N-1}, \\
& x^N, \dots, x^{N-p+1}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{p+1}, \dots, y^N, \\
& x^{N+1}, \dots, x^{N-p+2}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{p+2}, \dots, y^{N+1}, \\
& \dots\dots\dots \\
& x^m, \dots, x^{m-p+1}y^{p-1}, x^{N-p-1}y^{m-N+p+1}, \dots, y^m, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4.22}$$

formuna dönüştür. Bu monomial sistemi Γ eğrisi üzerinde lineer bağımsızdır ve N indisli bloktan itibaren her blok N tane monomial içerir.

Cebirsel bir

$$Q_{nk}(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^m c_{ms} x^{m-s} y^s + \sum_{s=0}^k c_{ns} x^{n-s} y^s \tag{4.23}$$

polinomu verilsin. Bu polinomu (4.15) eşitliği ile tanımlı Γ eğrisi üzerinde ele alarak, (4.23) toplamında (4.20) formundaki monomialler çıkarılabilir, yani

$$c_{mp} = c_{m,p+1} = \dots = c_{m,m-N+p} = 0 \tag{4.24}$$

alınabilir.

Kabul edelim ki $h(x, y)$, Γ eğrisi üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Ortogonalite metodunu (4.22) monomial sistemine uygulayarak, tablo (4.22) e benzer olarak $\{P_{nk}(x, y)\}$ ortogonal polinomların bir sistemini elde ederiz. Bu polinom sistemindeki k indisli blokta açıklık vardır. Fakat (4.24) koşulları her polinom için sağlanır.

Şimdi bu duruma aşağıda bir kaç örnek verelim.

Örnek1. Öncelikle Γ eğrisinin denklemi

$$y = Ax + B, \quad a \leq x \leq b \quad (4.25)$$

formülü ile tanımlı olsun. Bu durumda $N = 1$ dir ve tablo (4.17) teki N indisli blokta 1 tane lineer bağımsız monomial vardır ki o da x tir. Dolayısıyla tablo (4.22) yalnızca 1. sütunu içerir, yani (4.25) doğrusu üzerinde $\{x^n\}$ lineer bağımsız sistemi vardır. (4.25) formülünden dikkate alınarak $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonu tek değişkenli olarak

$$h(x, y) = h(x, Ax + B) = h_0(x), \quad a \leq x \leq b$$

formunda elde edilir. Ayrıca ortogonal polinomlar yalnızca x değişkenine bağlıdır ve ortogonalite aralığı $[a, b]$ dir.

Şimdi Γ eğrisi

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (4.26)$$

birim çemberi olsun. Bu durumda tablo (4.17) deki 2 indisli blok yalnızca iki lineer bağımsız monomial içerir ki bunlar x^2 ve xy dir. Bu durumda $N = 2$ olduğundan, (4.22) tablosundaki her blok x^n ve $x^{n-1}y$ formunda iki polinom içerir. Bu nedenle tablo (4.22) in tamamı

$$1, x, y, x^2, xy, x^3, x^2y, \dots, x^n, x^{n-1}y, \dots \quad (4.27)$$

formunda ifade edilebilir. Bu serinin $h(x, y)$ ağırlık fonksiyonuna göre (4.26) birim çemberi üzerindeki ortogonalliğinden,

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (4.28)$$

ortonormal polinom sistemini elde ederiz. Burada $\{A_n(x, y)\}$ çift indisli ortonormal polinomları göstermektedir, yani $A_n(x, y)$ polinomunun baş katsayısı $\alpha_n x^n$, $B_n(x, y)$ polinomunun baş katsayısı $\beta_n x^{n-1}y$ formundadır.

Şimdi,

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \\ y &= \sin \varphi, \end{aligned} \quad (4.29)$$

koşulları altında (4.28) polinomları için

$$\begin{aligned} A_n(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi}} \\ B_n(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

formüllerinin doğru olduğunu ispatlayalım. Bunun için tümevarım metodunu kullanalım.

$A_1(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ seçilir ve (4.29) formülü gözönüne alınrsa (4.226) çemberi üzerinde $ds = d\varphi$ olduğundan,

$$\int_{\Gamma} A_1(x, y) ds = \int_0^{2\pi} A_1(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (\alpha_0 + \alpha_1 \cos \varphi) d\varphi = 2\pi\alpha_0 = 0$$

olur. Buradan $\alpha_0 = 0$ elde edilir. $\alpha_0 = 0$ olduğu ortonormallik koşulunda gözönüne alınrsa,

$$\int_0^{2\pi} [A_1(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \alpha_1^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \alpha_1^2 \pi = 1$$

olur. Buradan $\alpha_1 = 1/\sqrt{\pi}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$A_1(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos \varphi / \sqrt{\pi}$$

dir.

Benzer şekilde,

$$\int_0^{2\pi} B_1(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) d\varphi = 2\pi a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} B_1(\cos \varphi, \sin \varphi) A_1(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} (a_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (a_1 \cos \varphi + \beta_1 \sin \varphi) \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi = a_1 \sqrt{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} [B_1(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \beta_1^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \beta_1^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \beta_1^2 \pi = 1$$

olur. Ortogonalite ve ortonormalite koşullarından $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ ve $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ elde edilir ki böylelikle $n = 1$ için (4.30) formülü ispatlanmış olur.

(4.30) formülünün n için doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

(4.29) koşulları altında

$$\begin{aligned} A_{n+1}(x, y) &= a_0 A_0 + \sum_{k=1}^n [a_k A_k(x, y) + b_k B_k(x, y)] + a_{n+1} x^{n+1} \\ A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) &= a_0 A_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \end{aligned} \quad (4.31)$$

yazılabilir.

$$\cos^m \varphi = \frac{1}{2^{m-1}} \cos m\varphi + \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(m)} \cos k\varphi \quad (4.32)$$

özelliklerinden ve (4.31) den

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) A_0(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= \\ \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right] + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\varphi &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan

$$a_0 = 0 \quad (4.33)$$

olarak bulunur. $A_{n+1}(x, y)$ polinomunun $A_k(x, y)$ polinomuna ortogonalliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) A_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right] + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \right] \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi \\ &= \sqrt{2} a_0 + \left[\frac{a_k}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 k\varphi d\varphi + \frac{b_k}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \cos k\varphi d\varphi \right] + \int_0^{2\pi} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\pi}} \cos^{n+1} \varphi \cos k\varphi d\varphi \\ &= \sqrt{2} a_0 + a_k + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2^n} \cos(n+1)\varphi + \sum_{k=0}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi \right] \cos k\varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2}a_0 + a_k + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(n+1)\varphi \cos k\varphi}{2^n} + c_k^{n+1} \cos^2 k\varphi \right] d\varphi \\
&= \sqrt{2}a_0 + a_k + a_{n+1}c_k^{n+1}\sqrt{\pi} = 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.33) ve (4.34) birlikte ele alınırsa

$$a_k = -\sqrt{\pi}a_{n+1}c_k^{(n+1)} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{4.35}$$

bulunur. Ayrıca

$$\int_0^{2\pi} A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) B_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 0$$

ortogonallik koşulundan

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} A_{n+1}(x, y) \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} d\varphi &= b_k + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1} \varphi \sin k\varphi d\varphi = 0 \\
b_k &= 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. Bu durumda (4.31) formülünde (4.32), (4.33), (4.35) ve (4.36) formülleri yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) &= -a_{n+1} \sum_{k=1}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi + a_{n+1} \cos^{n+1} \varphi \\
&= -a_{n+1} \sum_{k=1}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi \\
&\quad + a_{n+1} \left[\frac{1}{2^n} \cos(n+1)\varphi + \sum_{k=0}^n c_k^{(n+1)} \cos k\varphi \right] \\
&= \frac{a_{n+1}}{2^n} \cos(n+1)\varphi
\end{aligned} \tag{4.37}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^{2\pi} [A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi = 1$$

ortonormallik koşulu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} [A_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_{n+1}}{2^n} \cos(n+1)\varphi \right]^2 d\varphi \\
&= \frac{a_{n+1}^2}{2^{2n}} \pi = 1 \\
a_{n+1} &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

bulunur. (4.38) eşitliği (4.37) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.30) eşitliğinin ilki $n + 1$ için elde edilir. Aynı işlemler $B_{n+1}(x, y)$ polinomu için de tekrar edilirse

$$\begin{aligned} B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \alpha_0 A_0 + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{\pi}} + \beta_k \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &\quad + \alpha_{n+1} \frac{\cos^{n+1} \varphi}{\sqrt{\pi}} + \beta_{n+1} \cos^n \varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.39)$$

olur. Diğer taraftan (4.32) formülünün her iki tarafının türevi alınırsa

$$\cos^{m-1} \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2^{m-1}} \sin m\varphi + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k^{(m)} \sin k\varphi \quad (4.40)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) A_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) B_k(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= 0 \end{aligned}$$

ortogonallik koşulları kullanılırsa (4.39) ve (4.40) formüllerinden

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n+1 \\ \beta_k &= -\sqrt{\pi} \beta_{n+1} \lambda_k^{(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.41)$$

bulunur. Böylelikle (4.40) ve (4.41) eşitlikleri dikkate alınırsa (4.39) eşitliği

$$B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{\beta_{n+1}}{2^n} \sin(n+1)\varphi \quad (4.42)$$

formuna dönüşür.

$$\int_0^{2\pi} [B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi = 1$$

ortonormallik koşulunu kullanarak

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [B_{n+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)]^2 d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\beta_{n+1}}{2^n} \sin(n+1)\varphi \right]^2 d\varphi \\ &= \frac{\beta_{n+1}^2}{2^{2n}} \pi = 1 \end{aligned}$$

den

$$\beta_{n+1} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \quad (4.43)$$

bulunur. (4.43) eşitliği (4.42) eşitliğinde dikkate alınarak $n + 1$ için (4.30) formüllerinin ikincisi elde edilir. O halde (4.26) çemberi üzerindeki (4.29) sistemi

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

formunda ortonormal trigonometrik sistemine sahiptir.

4.3 Bir Çevre Üzerinde Ortogonal Harmonik Polinomlar

Bir önceki bölümdeki

$$\{1, u_n(x, y), v_n(x, y)\} \quad (4.44)$$

homogen harmonik polinomları yeniden ele alalım. Bu polinomlar

$$\gamma = \{(x, y) = x^2 + y^2 = 1\} \quad (4.45)$$

birim çemberi üzerinde

$$\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\} \quad (4.46)$$

formunda yazılabildiklerinden, bu polinomların (4.45) çemberi üzerinde $h(\varphi) \equiv 1$ birim ağırlık fonksiyonuna göre ortonormalliklerinden,

$$\left\{ 1/\sqrt{2\pi}, u_n(x, y)/\sqrt{\pi}, v_n(x, y)/\sqrt{\pi} \right\} \quad (4.47)$$

homogen harmonik ortonormal polinom sistemi elde edilir. Basamağı n i geçmeyen herhangi bir $P_n(x, y)$ harmonik polinomu

$$P_n(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)] \quad (4.48)$$

formunda tek türlü ifade edilebilir. Burada katsayılar

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} P_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) ds \quad (4.49)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} P_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) ds \quad (4.50)$$

formülleri ile tanımlıdır.

(4.45) çemberi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) = h(\varphi) \quad (4.51)$$

ile tanımlı olsun. (4.44) sistemine (4.45) çemberi üzerinde (4.51) ağırlık fonksiyonuna göre ortogonalite metodu uygulanırsa,

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (4.52)$$

ortonormal harmonik polinomların bir sistemi elde edilir. Diğer taraftan, (4.46) sistemine $[-\pi, \pi]$ aralığında (4.51) ağırlık fonksiyonuna göre ortogonalite metodunu uygulayarak

$$\{A_0, A_n(\varphi), B_n(\varphi)\} \quad (4.53)$$

ortonormal trigonometrik polinomların bir sistemi elde edilir. Kolaylıkla görülebilir ki (4.52) ve (4.53) sistemleri $x = \cos \varphi$ ve $y = \sin \varphi$ koşulları altında denktirler.

Şimdi bir önceki bölümdeki notasyonları ve bazı kısaltmalar kullanılarak (4.52) polinomları için bazı özellikler elde edilecektir. Ayrıca bilineer serilerin kısmi toplamlarını

$$K_n(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k) \quad (4.54)$$

ile ifade edeceğiz. (3.43) eşitliğinden, (ξ, η) ve (x, y) noktalarının (4.45) çemberi üzerinde olması koşulu altında (4.54) fonksiyonu için

$$\begin{aligned} K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) + \frac{1}{2} &= \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) \\ &\quad - (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

formülü sağlanır.

(4.49) ve (4.50) formüllerini kullanarak (4.48) formülüne benzer olarak $B_n(x, y)$ polinomu için

$$B_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) ds \quad (4.56)$$

gösterimi elde edilir. Gerçekten

$$B_n(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k u_k(x, y) + b_k v_k(x, y)]$$

formülünde a_0 , a_k ve b_k katsayıları yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}
B_n(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) ds + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) u_k(\xi, \eta) ds \right) u_k(x, y) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) v_k(\xi, \eta) ds \right) v_k(x, y) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n u_k \tilde{u}_k + v_k \tilde{v}_k \right) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) K_n(x, y, \xi, \eta) ds
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $B_n(x, y)$ polinomunun (4.51) ağırlık fonksiyonuna göre ortogonallığından

$$\int_{\gamma} B_n(\xi, \eta) h(\xi, \eta) K_{n-1}(x, y, \xi, \eta) ds = 0 \quad (4.57)$$

koşulu sağlanır. Kısalık açısından, $z = x + iy$ ve $\tau = \xi + i\eta$ kompleks değişkenlerini kullanalım. (4.56) eşitliğinin her iki yanı $h(z)$ ile çarpılır (4.54) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
h(z)B_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) h(z) K_n(z, \tau) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) h(z) (K_{n-1}(z, \tau) + u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n) ds
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan (4.57) eşitliği

$$\begin{aligned}
h(z)B_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [h(z) - h(\tau)] K_{n-1}(z, \tau) ds \\
&\quad + h(z) \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [u_n(z)u_n(\tau) + v_n(z)v_n(\tau)] ds
\end{aligned} \quad (4.58)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki (4.51) ağırlık fonksiyonu

$$h(x, y) \geq h_0 > 0 \quad (4.59)$$

$$|h(x, y) - h(\xi, \eta)| \leq M(|x - \xi| + |y - \eta|) \quad (4.60)$$

koşullarını sağlasın.

(4.58) eşitliğinin sağ kısmındaki ilk terim için (4.55) formülü, (4.59), (4.60), (3.52), (3.53) eşitsizlikleri ve Cauchy-Schwarz Bunyakovskii eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [h(z) - h(\tau)] K_{n-1}(z, \tau) ds \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| M(|x - \xi| + |y - \eta|) \\
& \quad \times K_{n-1}(z, \tau) ds \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| M(|x - \xi| + |y - \eta|) \\
& \quad \times \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} [(1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n)(1 - x\xi - y\eta) \\
& \quad - (v_n \tilde{u}_n - u_n \tilde{v}_n)(x\eta - y\xi)] ds \\
& \leq \frac{2M}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| |1 - u_n \tilde{u}_n - v_n \tilde{v}_n - v_n \tilde{u}_n + u_n \tilde{v}_n| ds \\
& \leq \frac{10M}{\pi \sqrt{h_0}} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| \sqrt{h(\tau)} ds \\
& \leq \frac{10M}{\pi \sqrt{h_0}} \sqrt{\int_{\gamma} h(\tau) B_n^2(\tau) ds} \tag{4.61}
\end{aligned}$$

formunda bir eşitsizlik elde edilebilir. Benzer şekilde (4.58) eşitliğinin sağ kısmındaki ikinci terim için (4.59) ve Cauchy-Schwarz Bunyakovskii eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| h(z) \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} B_n(\tau) [u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n] ds \right| \leq \frac{h(z)}{\pi} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| |u_n \tilde{u}_n + v_n \tilde{v}_n| ds \\
& \leq \frac{2M}{\pi \sqrt{h_0}} \int_{\gamma} |B_n(\tau)| \sqrt{h(\tau)} ds \\
& \leq \frac{2M}{\pi \sqrt{h_0}} \sqrt{\int_{\gamma} h(\tau) B_n^2(\tau) ds} \tag{4.62}
\end{aligned}$$

formunda bir eşitsizlik elde edilebilir. (4.61), (4.62) eşitsizlikleri ve $B_n(\tau)$ polinomunun $h(\tau)$ ağırlık fonksiyonu ile γ eğrisi üzerinde ortonormal olduğu, (4.58) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$h(z) |B_n(z)| \leq \frac{Mc_1}{\pi \sqrt{h_0}} \sqrt{\int_{\gamma} h(\tau) B_n^2(\tau) ds} = \frac{Mc_1}{\pi \sqrt{h_0}}$$

yazılır. Benzer bir eşitsizlik $A_n(z)$ polinomu için de sağlanır. Buradan, eğer ağırlık fonksiyonu (4.59) ve (4.60) koşullarını sağlarsa bu durumda (4.52) ortonormal harmonik polinomları birim diskte düzgün sınırlıdır, yani

$$\begin{aligned} |A_n(x, y)| &\leq c_2, & x^2 + y^2 &\leq 1 \\ |B_n(x, y)| &\leq c_2, & x^2 + y^2 &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.63)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

4.4 Bir Çevre Üzerinde Süperortogonal Harmonik Polinomlar

Γ kapalı bir *Jordan* eğrisi olsun ve

$$h(x, y) = h(z) \quad , \quad z \in \Gamma \quad (4.64)$$

Γ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu fonksiyon herbirinin başkatsayıları pozitif olan ve

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} h(z) F_n(z) \bar{F}_m(z) ds = \delta_{nm} \quad (4.65)$$

ortonormallik koşulunu sağlayan

$$F_0, F_1(z), F_2(z), \dots, F_n(z), \dots \quad (4.66)$$

kompleks değişkenli fonksiyonlar sistemini tek olarak tanımlar. (4.66) sisteminin her bir polinomunun reel ve imajiner kısımları

$$F_n(z) = P_n(x, y) + iQ_n(x, y) = P_n(z) + iQ_n(z) \quad (4.67)$$

ile gösterilsin. Burada $P_n(x, y)$ ve $Q_n(x, y)$ polinomları adjoint harmonik polinomlardır. Diğer taraftan (4.64) ağırlık fonksiyonu Γ çevresi üzerinde bir

$$\{A_0, A_n(x, y), B_n(x, y)\} \quad (4.68)$$

ortonormal harmonik polinom sistemi belirler.

α_n ve β_n sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} A_n(x, y) &= \alpha_n P_n(x, y) \\ B_n(x, y) &= \beta_n Q_n(x, y) \end{aligned} \quad (4.69)$$

eşitliklerinin hangi koşullar altında sağlandığını inceleyelim.

(4.69) koşulları sağlanırsa bu durumda (4.68) harmonik polinomlar sistemi Γ çevresi üzerinde (4.64) ağırlık fonksiyonuna göre süperortogonal polinom olarak adlandırılırlar.

Bu kısımda, ağırlık fonksiyonunun

$$h(x, y) = h(z) = |\varphi'(z)| \quad , \quad z \in \Gamma \quad (4.70)$$

formülü ile tanımlı olması durumunda (4.69) eşitliklerinin sağlandığı gösterilecektir. Burada $\omega = \varphi(z)$ fonksiyonu $\varphi(z_0) = 0$ ve $\varphi'(z_0) > 0$ koşulları altında Γ çevresinin içi olan G bölgesini $|\omega| < 1$ bölgesine dönüştüren birebir, örten ve konform bir dönüşümdür. Öncelikle aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 4.1 *Herhangi bir $\alpha_n(z)$ harmonik polinomu için bir $\tilde{\alpha}_n(z)$ adjoint harmonik polinomu vardır, bu durumda*

$$\int_{\Gamma} |\tilde{\alpha}_n(z)|^2 |\varphi'(z)| ds \leq \int_{\Gamma} |\alpha_n(z)|^2 |\varphi'(z)| ds \quad (4.71)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\tilde{\alpha}_n(z)$ harmonik polinomu sabit terime kadar $\alpha_n(z)$ polinomu ile tanımlanmaktadır. Ayrıca

$$\lambda(\omega) = \alpha_n[\Psi(\omega)] + i\tilde{\alpha}_n[\Psi(\omega)] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega^k$$

fonksiyonu $|\omega| < 1$ bölgesinde analitik ve $|\omega| \leq 1$ kapalı diskinde süreklidir ve $\lambda'(\omega)$ türevi $|\omega| = 1$ çemberi üzerinde integrallenebilir. Bu durumda

$$\alpha(\theta) = \alpha_n[\Psi(e^{i\theta})] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (4.72)$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \tilde{\alpha}_n[\Psi(e^{i\theta})] = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta) \quad (4.73)$$

düzgün yakınsak serileri yazılabilir. $\tilde{\alpha}_n(z)$ polinomunun sabit terimi keyfi olduğundan (4.73) açılımı $\tilde{a}_0 = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde seçilebilir. Bu durumda (4.72)

ve (4.73) formülleri

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\alpha(\theta)]^2 d\theta = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (4.74)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\tilde{\alpha}(\theta)]^2 d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (4.75)$$

eşitliklerini gerektirir. (4.74) ve (4.75) eşitlikleri karşılaştırılırsa (4.71) eşitsizliği elde edilir. Bu ise lemmayı ispatlar. ■

Lemma 4.2 *Herhangi $\alpha_n(z)$ ve $\beta_m(z)$ harmonik polinomları için $\alpha_n(z)$ ve $\beta_m(z)$ polinomlarına adjoint olan $\tilde{\alpha}_n(z)$ ve $\tilde{\beta}_m(z)$ harmonik polinomları vardır. Bu durumda*

$$\int_{\Gamma} \alpha_n(z) \tilde{\beta}_m(z) |\varphi'(z)| ds = - \int_{\Gamma} \tilde{\alpha}_n(z) \beta_m(z) |\varphi'(z)| ds \quad (4.76)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (4.72) ve (4.73) eşitliklerine benzer olarak

$$\beta(\theta) = \beta_n [\Psi(e^{i\theta})] = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos k\theta + \tilde{b}_k \sin k\theta) \quad (4.77)$$

$$\tilde{\beta}(\theta) = \tilde{\beta}_n [\Psi(e^{i\theta})] = \sum_{k=1}^{\infty} (-\tilde{b}_k \cos k\theta + \tilde{a}_k \sin k\theta) \quad (4.78)$$

yazılabilir. (4.72) ve (4.78) eşitlikleri (4.76) nın sol tarafında dikkate alınır

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\theta) \tilde{\beta}(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k \tilde{b}_k + b_k \tilde{a}_k) \quad (4.79)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.73) ve (4.77) eşitlikleri (4.76) nın sağ tarafında dikkate alınır

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(\theta) \beta(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} (-\tilde{a}_k b_k + a_k \tilde{b}_k) \quad (4.80)$$

yazılabilir. (4.79) ve (4.80) eşitlikleri (4.76) formülünü gerektirir. Lemma ispatlanmış olur. ■

Bu iki Lemmada $\tilde{\alpha}_n(z)$ adjoint polinomu, $\tilde{\alpha}_n [\Psi(e^{i\theta})]$ fonksiyonunun açılımında sabit terim sıfıra eşit olacak şekilde seçilmiştir. Aşağıdaki Lemmada da aynı durum söz konusudur.

Lemma 4.3 (4.70) *ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan (4.68) harmonik polinomları için*

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n(z) &= B_n(z) \\ \tilde{B}_n(z) &= -A_n(z)\end{aligned}\tag{4.81}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Kısalık için

$$(A_n, B_m) = \int_{\Gamma} A_n(z) B_m(z) |\varphi'(z)| ds \tag{4.82}$$

notasyonunu kullanalım. Bu durumda herhangi n ve m için sağlanan (4.76) eşitliği

$$(\alpha_n, \tilde{\beta}_m) = -(\tilde{\alpha}_n, \beta_m) \tag{4.83}$$

formunda ifade edilebilir.

Öncelikle $n < m$ olsun. Bu durumda (4.68) polinom sisteminin ortogonalliğinden

$$(A_m, \tilde{B}_n) = (B_m, \tilde{A}_n) = 0 \tag{4.84}$$

yazılabilir.

Eğer $m < n$ ise bu durumda (4.83) eşitliğinden

$$\begin{aligned}(A_m, \tilde{B}_n) &= -(\tilde{A}_m, B_n) = 0 \\ (B_m, \tilde{A}_n) &= -(\tilde{B}_m, A_n) = 0\end{aligned}\tag{4.85}$$

elde edilir.

(4.84) ve (4.85) eşitliklerinde $n = m$ olması durumu dahil değildir.

Ayrıca (4.83) formundaki eşitliklerden herhangi n ve m için

$$\begin{aligned}(A_m, \tilde{A}_n) &= -(A_n, \tilde{A}_m) \\ (B_m, \tilde{B}_n) &= -(B_n, \tilde{B}_m)\end{aligned}\tag{4.86}$$

yazılabildiğinden (4.68) sisteminin ortogonallığını gözönünde bulundurarak

$$(A_m, \tilde{A}_n) = 0, \quad (B_m, \tilde{B}_n) = 0\tag{4.87}$$

elde edilir ki burada (4.86) eşitliğinden dolayı $n = m$ durumu dahildir.

Şimdi adjoint harmonik polinom sistemi (4.68) sistemine göre

$$\tilde{A}_n(z) = a_0 A + \sum_{k=1}^n [a_k A_k(z) + b_k B_k(z)]\tag{4.88}$$

$$\tilde{B}_n(z) = \alpha_0 A_0 + \sum_{k=1}^n [\alpha_k A_k(z) + \beta_k B_k(z)]\tag{4.89}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(4.82) notasyonu ile ifade edilen (4.85) ve (4.87) eşitlikleri ortogonallık koşullarıdır. Bu koşullar (4.85) koşullarında $n = m$ durumu olmadığından (4.88) ve (4.89) kısmi toplamlarının her ikisinin de yalnızca bir terim içermesini gerektirir. Bu durumda bu iki eşitlik

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n(z) &= b_n B_n(z) \\ \tilde{B}_n(z) &= a_n A_n(z)\end{aligned}\tag{4.90}$$

formuna döndürür. Bu eşitliklerdeki b_n ve α_n katsayıları adjoint harmonik polinomların notasyonu yardımıyla belirlenebilir.

Kompleks katsayılı keyfi bir polinom için

$$\begin{aligned}R_n(z) &= (c_0 + id_0) + \sum_{k=1}^n (c_k + id_k) z^k \\ &= (c_0 + id_0) + \sum_{k=1}^n (c_k + id_k) [u_k(x, y) + iv_k(x, y)] \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] + id_0 + i \sum_{k=1}^n [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)]\end{aligned}\tag{4.91}$$

yazılabilir. $A_n(z)$ ve $\tilde{A}_n(z)$ polinomları adjoint olduğundan (4.91) formülünden

$$A_n(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] \quad (4.92)$$

$$\tilde{A}_n(z) = d_0 + \sum_{k=1}^n [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)] \quad (4.93)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$B_n(z) = \tilde{c}_0 + \sum_{k=1}^n [\tilde{c}_k u_k(x, y) - \tilde{d}_k v_k(x, y)] \quad (4.94)$$

$$\tilde{B}_n(z) = \tilde{d}_0 + \sum_{k=1}^n [\tilde{d}_k u_k(x, y) + \tilde{c}_k v_k(x, y)] \quad (4.95)$$

formülleri de yazılabilir. (4.94) ve (4.95) eşitliklerinin başkatsayılarının karşılaştırılmasıyla (4.85) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} c_n &= b_n(-\tilde{d}_n) \\ \tilde{d}_n &= \alpha_n c_n \end{aligned} \quad (4.96)$$

formunda iki koşul bulunur ki bu koşullar $b_n \alpha_n = -1$ olmasını gerektirir. Bu durumda (4.90) formülleri

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(z) &= b_n B_n(z) \\ B_n(z) &= -\frac{1}{b_n} A_n(z) \end{aligned} \quad (4.97)$$

formuna dönüştür. (4.71) eşitsizliğinden ve (4.68) polinomlarının ortonormalliğinden

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |\tilde{A}_n(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 ds &\leq 1 \\ \int_{\Gamma} |\tilde{B}_n(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 ds &\leq 1 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.97) formüllerinin sağ taraflarını bu eşitsizliklerde yerine koyarak $b_n^2 \leq 1$ ve $1 \leq b_n^2$ koşulları elde edilir ki bu ise $b_n^2 = 1$ olmasını gerektirir.

Son olarak b_n in işaretini belirlemek için (4.93) ve (4.94) eşitliklerini ele alalım. (4.92) eşitliğinde $d_n = 0$ ve c_n başkatsayısı pozitif olduğundan ve (4.94) eşitliğinde $-\tilde{d}_n$ başkatsayısı pozitif olmak zorunda olduğundan $\tilde{d}_n < 0$ elde edilir ve (4.96) deki

ilk eşitlik $b_n > 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda $b_n = 1$ bulunur. O halde (4.97) eşitliklerinde bu durumu gözönüne alarak (4.81) eşitlikleri elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.1 *Ağırlık fonksiyonu (4.70) formülü ile tanımlı olsun. Bu durumda (4.69) koşulları sağlanır ve*

$$\begin{aligned} A_n(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} P_n(x, y) \\ B_n(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} Q(x, y) \end{aligned} \quad (4.98)$$

formunda olurlar, yani (4.66) ortogonal polinomları için

$$F_n(z) = \sqrt{\pi} A_n(x, y) + i\sqrt{\pi} B_n(x, y) \quad (4.99)$$

formülü doğrudur.

İspat. (4.81) formüllerinin birincisi $B_n(z)$ polinomu $A_n(z)$ polinomuna adjointtir anlamına gelir. Bu durumda (4.4.99) fonksiyonu z kompleks değişkenli bir polinomdur. Şimdi bu polinomun başkatsayısının pozitif olduğunu ispatlayalım. (4.91) eşitliğini ters sırada yeniden yazarak (4.81) formüllerinin birincisinden

$$\begin{aligned} A_n(z) + iB_n(z) &= A_n(z) + i\tilde{A}_n(z) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k u_k(x, y) - d_k v_k(x, y)] \\ &\quad + id_0 + i \sum_{k=1}^n [d_k u_k(x, y) + c_k v_k(x, y)] \\ &= c_0 + id_0 + \sum_{k=1}^n (c_k + id_k) z^k \end{aligned} \quad (4.100)$$

elde edilir. Homogen harmonik polinom sisteminin ortogonalliği (4.92) formülünde $d_n = 0$ ve $c_n > 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda (4.100) polinomunun başkatsayısı pozitifdir. Son olarak (4.66) kompleks bölgesinde (4.99) formundaki polinomlar için ortonormallik koşulunu gerçekleyelim. (4.68) polinomlarının ortonormallliğini ve (4.99) formülünü kullanarak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} h(z) F_n(z) \bar{F}_m(z) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [A_n(z) + iB_n(z)] [A_m(z) - iB_m(z)] |\varphi'(z)| ds \\
&= \delta_{nm}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda teklik teoreminden, (4.99) eşitliği ile tanımlı polinomlar, Γ çevresi üzerinde (4.70) ağırlık fonksiyonu ile ortonormal olan (4.65) polinomları ile aynı polinomlardır. Teorem ispatlanmış olur. ■

4.5 Harmonik Polinomların Süperortogonal Sistemleri İçin Örnekler

Öncelikle harmonik polinomların bir sistemi için süperortogonalite koşullarını analiz edelim. İlk olarak bir çevre üzerinde (4.66) polinomlarını ele alalım.

Bir Γ çevresi üzerinde (4.64) ağırlık fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon (4.65) ortonormalite koşulunu sağlayan (4.66) ortogonal polinomlarının bir sistemini belirler. (4.67) formülü ile bu koşul

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [P_n(z) + iQ_n(z)] [P_m(z) - iQ_m(z)] h(z) |dz| = \delta_{nm} \quad (4.101)$$

formuna dönüşebilir. Eğer $n \neq m$ ise (4.101) eşitliği

$$\int_{\Gamma} [P_n(z)P_m(z) + Q_n(z)Q_m(z)] h(z) |dz| = 0 \quad (4.102)$$

$$\int_{\Gamma} [P_m(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_m(z)] h(z) |dz| = 0 \quad (4.103)$$

koşullarını gerektirir. Süperortogonalite koşulu aynı zamanda

$$\int_{\Gamma} P_n(z)P_m(z)h(z) |dz| = 0, \quad n \neq m \quad (4.104)$$

$$\int_{\Gamma} Q_n(z)Q_m(z)h(z) |dz| = 0, \quad n \neq m \quad (4.105)$$

$$\int_{\Gamma} P_n(z)Q_m(z)h(z) |dz| = 0, \quad (4.106)$$

eşitliklerinin sağlanmasına denktir.

Bu kısımda $h(z) = |\varphi'(z)|$ ağırlık fonksiyonu için (4.104), (4.105) ve (4.106) koşullarını sağlayan, $h(z) \neq |\varphi'(z)|$ için bu koşullardan en az birini sağlamayan Γ eğrisinin örneklerini ele alalım.

Örnek1.

$$z = \Psi(\omega) = \omega + a\omega^2, \quad 0 < a < \frac{1}{2} \quad (4.107)$$

fonksiyonu $|\omega| < 1$ birim diskini pürüzsüz bir Γ eğrisi ile sınırlanan G bölgesine dönüştüren birebir, örten ve konform bir dönüşüm olsun. Ters fonksiyonu $\omega = \varphi(z)$ ile ifade edelim.

Ağırlık fonksiyonu

$$h(z) = |\varphi'(z)|, \quad z \in \Gamma \quad (4.108)$$

ile verilsin.

$$|\varphi'(z)| |dz| = \frac{d\omega}{i\omega} = d\theta, \quad z \in \Gamma, \quad \omega = e^{i\theta} \quad (4.109)$$

eşitliğinden (4.65) ortogonallik koşulu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} F_n[\Psi(\omega)] \overline{F_m[\Psi(\omega)]} \frac{d\omega}{\omega} = 0, \quad n \neq m \quad (4.110)$$

formuna dönüştür. Bu formülde $m = 0$ alarak, herhangi bir $\tilde{F}_n(z)$ polinomunun sabit teriminin sıfır olduğu elde edilir. $\tilde{F}_0 = \mu_0 > 0$ olsun. Şimdi başkatsayıları 1 olan polinomları ele alalım. Birinci basamaktan $\tilde{F}_1[\Psi(\omega)] = \omega + a\omega^2$ formunda bir polinom için $\omega = e^{i\theta}$ olduğu ve (4.109) eşitliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \int_{|\omega|=1} \tilde{F}_1[\Psi(\omega)] \frac{d\omega}{i\omega} &= \int_{|\omega|=1} (\omega + a\omega^2) \frac{d\omega}{i\omega} \\ &= \int_0^{2\pi} (e^{i\theta} + ae^{i2\theta}) d\theta = 0 \end{aligned} \quad (4.111)$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1[\Psi(\omega)] &= \cos \theta + a \cos 2\theta \\ \tilde{Q}_1[\Psi(\omega)] &= \sin \theta + a \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.112)$$

formülleri sağlanır. $\tilde{F}_0 = \mu_0 > 0$ olduğundan, (4.112) formülleri $n \leq 1$ ve $m \leq 1$ için (4.104), (4.105) ve (4.106) koşullarının sağlanmasını gerektirir.

İkinci basamaktan ortogonal polinomu

$$\tilde{F}_2(z) = \tilde{F}_2[\Psi(\omega)] = (\omega + a\omega^2)^2 + \mu_1^{(2)}(\omega + a\omega^2) \quad (4.113)$$

formunda ifade edelim. $\mu_1^{(2)}$ katsayısını belirlemek için ortogonalite koşulundan $\omega = e^{i\theta}$ olduğu ve (4.109) eşitliği dikkate alınarak

$$\int_{|\omega|=1} \tilde{F}_2[\Psi(\omega)] \tilde{F}_1[\Psi(\omega)] \frac{d\omega}{i\omega} = \int_{|\omega|=1} \left[(\omega + a\omega^2)^2 + \mu_1^{(2)}(\omega + a\omega^2) \right] \left[\overline{\omega + a\omega^2} \right] \frac{d\omega}{i\omega} = 0 \quad (4.114)$$

yazılabilir ki bu ise

$$\mu_1^{(2)} = -\frac{a}{1+a^2} \quad (4.115)$$

olmasını gerektirir. $\mu_1^{(2)}$ reel sayı olduğundan (4.113) formülünden

$$\tilde{P}_2[\varphi(e^{i\theta})] = \mu_1^{(2)} \cos \theta + (1 + a\mu_1^{(2)}) \cos 2\theta + 2a \cos 3\theta + a^2 \cos 4\theta \quad (4.116)$$

$$\tilde{Q}_2[\varphi(e^{i\theta})] = \mu_1^{(2)} \sin \theta + (1 + a\mu_1^{(2)}) \sin 2\theta + 2a \sin 3\theta + a^2 \sin 4\theta \quad (4.117)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi (4.104), (4.105) ve (4.106) koşullarını gerçekleyelim. (4.109), (4.116) ve (4.117) formüllerinden

$$\int_0^{2\pi} \tilde{P}_2[\Psi(e^{i\theta})] \tilde{Q}_2[\Psi(e^{i\theta})] d\theta = 0 \quad (4.118)$$

yazılabilir. Bu durumda (4.112) ve (4.116) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{P}_1[\Psi(e^{i\theta})] \tilde{P}_2[\Psi(e^{i\theta})] d\theta &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta + a \cos 2\theta) \left[\mu_1^{(2)} \cos \theta + (1 + \mu_1^{(2)} a) \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. + 2a \cos 3\theta + a^2 \cos 4\theta \right] d\theta \\ &= \pi \left[\mu_1^{(2)} + a(1 + \mu_1^{(2)} a) \right] \end{aligned}$$

elde edilir, burada (4.115) eşitliğini kullanarak

$$\int_0^{2\pi} \tilde{P}_1[\Psi(e^{i\theta})] \tilde{P}_2[\Psi(e^{i\theta})] d\theta = 0 \quad (4.119)$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \tilde{Q}_1 [\Psi(e^{i\theta})] \tilde{Q}_2 [\Psi(e^{i\theta})] d\theta &= \int_0^{2\pi} (\sin \theta + a \sin 2\theta) \left[\mu_1^{(2)} \sin \theta + (1 + \mu_1^{(2)} a) \sin 2\theta \right. \\
&\quad \left. + 2a \sin 3\theta + a^2 \sin 4\theta \right] d\theta \\
&= \pi \left[\mu_1^{(2)} + a(1 + \mu_1^{(2)} a) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.120}$$

yazılabilir. (4.104), (4.105) ve (4.106) koşullarının sağlandığı (4.109), (4.112) ve (4.117) yardımıyla benzer şekilde ispatlanabilir.

Bütün adımlar $n = m = 3$ için tekrarlanabilir. Bu durumda

$$\int_0^{2\pi} \tilde{P}_n [\Psi(e^{i\theta})] \tilde{Q}_m [\Psi(e^{i\theta})] d\theta = 0 \tag{4.121}$$

koşulu herhangi n ve m için sağlar.

Böylelikle $\{\tilde{P}_n(x, y)\}$ ve $\{\tilde{Q}_n(x, y)\}$ polinomları (4.107) fonksiyonu ile belirlenen bölgede (4.108) ağırlık fonksiyonu ile süperortogonaldir.

Örnek2.

$$z = \Psi(\omega) = \omega + \frac{b}{\omega^p}, \quad 0 < b < \frac{1}{p}, \quad |\omega| < 1$$

fonksiyonu bir Γ çevresinin dışını $|\omega| > 1$ bölgesine dönüştüren birebir, örten ve konform bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\{P_n(x, y)\}$ ve $\{Q_n(x, y)\}$ polinomları (4.108) ağırlık fonksiyonu ile süperortogonaldir. Bu formülde $b = 1$ ve $p = 1$ alınırsa (4.66) polinomları birinci çeşit Chebyshev polinomları olurlar.

Şimdi (4.108) süperortogonalite koşuluna karşıt bir örnek bulalım.

Örnek3. Γ çevresi (4.107) formülüyle tanımlansın ve ağırlık fonksiyonu

$$h(z) = |1 + \varphi(z)|^2 |\varphi'(z)|, \quad z \in \Gamma \tag{4.122}$$

formunda olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
h(z) |dz| &= |1 + \varphi(z)|^2 |\varphi'(z)| |dz| = |1 + \omega|^2 |d\omega| \\
&= (1 + \omega)(1 + \frac{1}{\omega}) \frac{d\omega}{i\omega} \\
&= (2 + \omega + \frac{1}{\omega}) \frac{d\omega}{i\omega} = 2(1 + \cos \theta) d\theta
\end{aligned} \tag{4.123}$$

formülünü yazabiliriz. Öncelikle birinci basamaktan

$$\tilde{F}_1 [\Psi(\omega)] = \omega + a\omega^2 + \mu_0^{(1)} = \omega + a\omega^2 - \frac{1}{2} \tag{4.124}$$

polinomunu ele alalım. Burada sabit terim

$$\int_{|\omega|=1} (\omega + a\omega^2 + \mu_0^{(1)}) (2 + \omega + \frac{1}{\omega}) \frac{d\omega}{i\omega} = 0 \tag{4.125}$$

koşulu ile tanımlıdır. (4.124) formülünden

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_1 [\Psi(e^{i\theta})] &= \cos \theta + a \cos 2\theta - \frac{1}{2} \\
\tilde{Q}_1 [\Psi(e^{i\theta})] &= \sin \theta + a \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{4.126}$$

elde edilir. $n \leq 1$ ve $m \leq 1$ için (4.104), (4.105) ve (4.106) süperortogonalite koşullarının sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

Şimdi ikinci basamaktan

$$F_2 [\Psi(\omega)] = (\omega + a\omega^2) + \mu_1^{(2)}(\omega + a\omega^2) + \mu_0^{(2)} \tag{4.127}$$

polinomunu ele alalım. Bilinmeyen $\mu_1^{(2)}$ ve $\mu_0^{(2)}$ katsayılarını belirlemek için

$$\begin{aligned}
\int_{|\omega|=1} \tilde{F}_2 [\Psi(\omega)] (2 + \omega + \frac{1}{\omega}) \frac{d\omega}{i\omega} &= 0 \\
\int_{|\omega|=1} \tilde{F}_2 [\Psi(\omega)] (\overline{\omega + a\omega^2}) (2 + \omega + \frac{1}{\omega}) \frac{d\omega}{i\omega} &= 0
\end{aligned} \tag{4.128}$$

koşullarını kullanalım. Birinci eşitlik $2\mu_0^{(1)} + \mu_1^{(2)} = 0$ eşitliğini gerektirir. (4.128) in ikinci eşitliğinden (4.127) formülünü gözönünde bulundurarak

$$\mu_0^{(2)} = \frac{1 + 2a + 2a^2}{3 + 4a + 4a^2} \tag{4.129}$$

elde edilir. Bu durumda (4.127) polinomu

$$\tilde{F}_2 [\Psi(\omega)] = (\omega + a\omega^2)^2 - 2\mu_0^{(2)}(\omega + a\omega^2) + \mu_0^{(2)} \quad (4.130)$$

formunda ifade edilebilir.

Katsayıların ikisi de reel sayı olduğundan (4.130) formülünden

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2 [\Psi(e^{i\theta})] &= \mu_0^{(2)} - 2\mu_0^{(2)} \cos \theta + (1 - 2a\mu_0^{(2)}) \cos 2\theta \\ &\quad + 2a \cos 3\theta + a^2 \cos 4\theta \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2 [\Psi(e^{i\theta})] &= -2\mu_0^{(2)} \sin \theta + (1 - 2a\mu_0^{(2)}) \sin 2\theta \\ &\quad + 2a \sin 3\theta + a^2 \sin 4\theta \end{aligned} \quad (4.132)$$

bulunur.

(4.126), (4.129) ve (4.130) formülleri yardımıyla

$$\int_0^{2\pi} \tilde{P}_1 [\Psi(e^{i\theta})] \tilde{P}_2 [\Psi(e^{i\theta})] (1 + \cos \theta) d\theta = -\frac{3(1 + 2a + 2a^2)\pi}{2(3 + 4a + 4a^2)} \neq 0$$

koşulu kolaylıkla elde edilebilir. Benzer şekilde

$$\int_0^{2\pi} \tilde{Q}_1 [\Psi(e^{i\theta})] \tilde{Q}_2 [\Psi(e^{i\theta})] (1 + \cos \theta) d\theta \neq 0$$

koşulu da ispatlanabilir.

Bu durumda (4.122) ağırlık fonksiyonu için süperortogonalite koşulu sağlanmaz.

Şimdi bir bölge üzerinde süperortogonalite koşulunu ele alalım.

Örnek4. Bir G bölgesi (4.107) fonksiyonu ile tanımlı olsun ve ağırlık fonksiyonu (3.82) deki gibi

$$h(x, y) = h(z) = |\varphi'(z)|^2, \quad z \in G \quad (4.133)$$

formunda olsun.

Bu durumda (4.101) notasyonunu kullanarak süperortogonalite koşulu

$$\int \int_{|\omega| < 1} K_n [\Psi(\omega)] \overline{K_m [\Psi(\omega)]} du dv = \delta_{nm} \quad (4.134)$$

formunda ifade edilebilir.

Eğer $m = 0$ ise Bu durumda (3.26) formülünü uygulayarak (4.134) den

$$\int \int_{|\omega|<1} K_n [\Psi(\omega)] dudv = \frac{1}{2i} \int_{|\omega|=1} K_n [\Psi(\omega)] d\omega = 0, \quad n \geq 1 \quad (4.135)$$

elde edilir. Bu durumda herhangi $K_n(z)$ polinomunun sabit terimi sıfırdır. Buradan

$$K_n(z) = P_n(z) + iQ_n(z) \quad (4.136)$$

notasyonunu kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 [\Psi(re^{i\theta})] &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + ar^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ \tilde{P}_1 [\Psi(re^{i\theta})] &= r \cos \theta + ar^2 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\tilde{Q}_1 [\Psi(re^{i\theta})] = r \sin \theta + ar^2 \sin 2\theta \quad (4.138)$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.137) ve (4.138) formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned} &\int \int_{|\omega|<1} \tilde{P}_1 [\Psi(\omega)] \tilde{Q}_1 [\Psi(\omega)] dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \cos \theta + ar^2 \cos 2\theta)(r \sin \theta + ar^2 \sin 2\theta) r d\theta dr = 0 \end{aligned} \quad (4.139)$$

koşulu elde edilir. Benzer şekilde (4.104), (4.105) ve (4.106) koşulları $n = 1, m = 0$ ve $n = 0, m = 1$ için de ispatlanabilir.

İkinci basamaktan

$$\tilde{K}_2 [\Psi(\omega)] = (\omega + a\omega^2)^2 + \mu_1^{(2)}(\omega + a\omega^2) \quad (4.140)$$

polinomunu ele alalım. $\mu_1^{(2)}$ katsayısı

$$\int \int_{|\omega|<1} \tilde{K}_2 [\Psi(\omega)] \tilde{K}_1 [\Psi(\omega)] dudv = 0$$

koşulu ile belirlidir. (3.26) formülünü uygulayarak

$$\begin{aligned}
& \int \int_{|\omega| < 1} \tilde{K}_2 [\Psi(\omega)] (\overline{\omega + a\omega^2}) dudv \\
&= \frac{1}{2i} \int_{|\omega|=1} \left[(\omega + a\omega^2)^2 + \mu_1^{(2)}(\omega + a\omega^2) \right] \left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{a\omega^3}{3} \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2i} \int_{|\omega|=1} \left[(\omega + a\omega^2)^2 + \mu_1^{(2)}(\omega + a\omega^2) \right] \left(\frac{1}{2\omega} + \frac{a}{3\omega^2} \right) \frac{d\omega}{\omega} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\mu_1^{(2)} = -\frac{2a}{3+a^2} \quad (4.141)$$

eşitliğini gerektirir.

$\mu_1^{(2)}$ reel sayı olduğundan, (4.140) formülü

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_2 [\Psi(re^{i\theta})] &= \mu_1^{(2)} r \cos \theta + (1 + a\mu_1^{(2)}) r^2 \cos 2\theta \\
&\quad + 2ar^3 \cos 3\theta + a^2 r^4 \cos 4\theta
\end{aligned} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_2 [\Psi(re^{i\theta})] &= \mu_1^{(2)} r \sin \theta + (1 + a\mu_1^{(2)}) r^2 \sin 2\theta \\
&\quad + 2ar^3 \sin 3\theta + a^2 r^4 \sin 4\theta
\end{aligned} \quad (4.143)$$

eşitliklerini gerektirir.

(4.142) ve (4.143) formülleri yardımıyla (4.104), (4.105) ve (4.106) formundaki bütün süperortogonalite koşulları $n \leq 2$ ve $m \leq 2$ için G bölgesi üzerinde kolaylıkla sağlanır.

Bu şekilde devam ederek $\{P_n(z)\}$ ve $\{Q_n(z)\}$ polinomlarının (4.107) ile tanımlı G bölgesinde (4.104) ağırlık fonksiyonu ile süperortogonal olduğu ispatlanmış olur.

Eğer ağırlık fonksiyonu (4.107) fonksiyonu ile tanımlı bölgede

$$h(x, y) = h(z) = |1 + \varphi(z)|^2 \left| \varphi'(z) \right|^2, \quad z \in G \quad (4.144)$$

formunda ise bu durumda süperortogonalite sağlanmaz. Bu durum bir çevre üzerinde (4.122) ağırlık fonksiyonu ile ortogonalite durumuna benzer olarak ispat-

lanabilir. Bu durumda (4.123) formülü yerine

$$\begin{aligned} h(x, y) dx dy &= |1 + \varphi(z)|^2 \left| \varphi'(z) \right|^2 dx dy = (1 + \omega)(1 + \omega) du dv \\ &= (1 + 2r \cos \theta + r^2) r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.145)$$

formülü alınabilir.

KAYNAKLAR

- Altın, A., Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. 2006. On a multivariable extension of Lagrange-Hermite polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 17(4); 239-244.
- Altın, A., Erkuş ,E. and Taşdelen F. The Lagrange polynomials in several variables, *Taiwanese J. math.*
- Engelis, G.K. 1974. On some two-dimensional analogues of classical orthogonal polynomials. *Latv. Mat. Ezhegodnik*, 15; 169-202.
- Erkuş, E. and Altın, A. A note on the Lagrange polynomials in several variables, *J. Math. Anal. Appl.*
- Erkuş,E. 2005. Jacobi ve Lagrange Polinomlarının Özelliklerinde Bazı Genişletmeler. Doktora tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Gür, Ş. 1996. Doğurucu Fonksiyonlar. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Jackson, D.1936. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. *Duke Math. Journal*, 2; 423-434.
- Karachik, V.V. 1999. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society* , 126 , 3513-3519.
- Karachik, V.V. 2003. On some special polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society* , 132 , 1049-1058.
- Kral, H.L. and Sheffer, I.M. 1967. Orthogonal polynomials in two variables. *Ann. Mat. Pura Appl*, 4; 325-376.
- Kornwinder, T.H. 1975. Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials. *Theory and Appl. Spec. Funct.*, New York.
- Lee ,D.W. 2005.Partial Differential Equations for products of two classical orthogonal polynomials. *Bull. Korean Math. Soc.* , 42 , 179-188

- Lee, J.K., Littlejohn, L.L. and Yoo, B.H. 2004. Orthogonal polynomials satisfying partial differential equations belonging to the basic class. J. Korean Math. Soc. 41(6); 1049-1070.
- Littlejohn, L.L. 1988. Orthogonal polynomial solutions to ordinary and partial differential equations, Orthogonal polynomials and their applications. (Segovio, 1986), Lectures Notes in Math., vol. 1329, Springer, Berlin, New York.
- Lyskova, A.S. 1991. Orthogonal polynomials in several variables. Soviet Math. Dokl., 43(19); 264-268.
- Özarslan, M.A. and Altın, A. ,2004 . Some Families of Generating Functions for the Multiple Orthogonal Polynomials Associated with Modified Bessel K-Functions, J. of Math. Anal. Appl. 297 , 186-193.
- Özarslan, M.A. 2005. K ATLI Ortogonal Polinomların Bazı Özellikleri. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Rainville, E.D. 1965. Special functions. The Macmillan Company, New York.
- Suetin, P.K. 1988. Orthogonal polynomials in two variables. Gordon and Breach Science Publishers, Moscow.
- Szegő, G. 1939. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Nuray YAVUZ

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 06.02.1985

Medeni Hali: Evli ve 1 çocuk annesi

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Anıttepe Lisesi (2003)

Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2007)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı (2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: