

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI KUTUPLU HALKALAR

Tuğçe ÇALCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2014

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Tuğçe ÇALCI tarafından hazırlanan “**YARI KUTUPLU HALKALAR**” adlı tez çalışması 17/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Ali Bülent EKİN
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR

Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17/07/2014

Tuğçe ÇALCI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI KUTUPLU HALKALAR

Tuğçe ÇALCI

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı anlatılmaktadır. İkinci bölümde çalışma için gerekli olan ön bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş tersinir elemanlar tanımlanmakta ve genelleştirilmiş tersinir elemanların bazı özellikleri incelenmektedir. Dördüncü bölümde yarı kutuplu halkalar tanımlanmakta ve yarı kutuplu halkaların özellikleri incelenmektedir. Beşinci bölümde bazı matris halkalarının hangi şartlar altında yarı kutuplu oldukları incelenmektedir.

Temmuz 2014, 91 sayfa

Anahtar Kelimeler : Yarı kutuplu halka, pseudo-tersinir eleman, Drazin-tersinir eleman, kuvvetli π -düzenli halka, kuvvetli temiz halka, kuvvetli düzenli halka, matris halkası

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

QUASIPOLAR RINGS

Tuğçe ÇALCI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

This thesis consists of five chapters. The first chapter is the introduction of the thesis. In the second chapter, basic concepts which are necessary for the thesis are given. In the third chapter, generalized invertible elements are defined and some results of these elements are given. The fourth chapter is related to quasipolar rings. In this chapter, the quasipolar rings are introduced and some results are studied. In the fifth chapter, quasipolarity of matrix rings is given. The question of under what conditions matrix rings are quasipolar are investigated.

July 2014, 91 pages

Key Words : Quasipolar ring, pseudo-inverse element, Drazin-inverse element, strongly π -regular ring, strongly clean ring, strongly regular ring, matrix ring

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar insani ilişkilerde deengin fikirleriyle gelişmeye katkıda bulunan danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU' na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); tezimde çok önemli katkıları olan, üzerimde çok emeği bulunan, hem matematiğe hem de hayata yaklaşımıyla bizlere örnek olan, bilgisini ve deneyimlerini her zaman çok cömertce bizlerle paylaşan, birlikte çalışmaktan zevk aldığım saygıdeğer hocam Sayın Abdullah HARMANCI' ya (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); çalışma süresince büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım kıymetli hocam Sayın Dr. Burcu ÜNGÖR' e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); bilimsel çalışmaların yanında her aşamada pratik çözümleriyle bir hoca, bir arkadaş olarak destek olan Sayın Orhan GÜRGÜN' e; tez çalışmamı 2211 kodlu Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile destekleyerek maddi olarak sağlayan TÜBİTAK'a; tez çalışmam boyunca anlayışını sevgisini benden esirgemeyen, her zaman bana cesaret veren, her zor anımda yanımda olan sevgili eşim Mete Burak ÇALCI' ya; bugünlere gelmemde çok emeği bulunan, her zaman desteğini, sevgisini hissettiğim aileme çok teşekkür ederim.

Tuğçe ÇALCI

Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1 Bazı Tanım ve Teoremler	3
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİR ELEMANLAR	10
3.1 Kuvvetli π -Düzenli Elemanlar	10
4. YARI KUTUPLU HALKALAR	22
4.1 YarıKutuplu Eleman ve Denklikleri	22
4.2 YarıKutuplu Halkalar	28
4.3 Üstel YarıKutuplu Halkalar	38
4.3.1 Üstel yarıkutuplu matris halkaları	41
5. MATRİS HALKALARINDA YARI KUTUPLULUK	46
5.1 $M_2(R)$ Halkasında YarıKutupluluk	46
5.2 $T_n(R)$ Halkasında YarıKutupluluk	55
5.3 $K_s(R)$ Halkasında YarıKutupluluk	60
6. SONUÇ	87

SİMGELER DİZİNİ

$\det(A)$	A matrisinin determinantı
$\text{tr}(A)$	A matrisinin izi
$\text{comm}(a)$	a ile değişmeli olan elemanların kümesi
$\text{comm}^2(a)$	a ile değişmeli olan elemanlarla değişmeli olan elemanların kümesi
$r_R(a)$	a nın R deki sağ sıfırlayanı
$l_R(a)$	a nın R deki sol sıfırlayanı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\text{der}(f(x))$	$f(x)$ polinomunun derecesi
$\text{End}(M)$	M modülünün endomorfizma halkası
${}_R M$	M sol R -modül
$N \leq M$	N modülü M nin alt modülü
$N \ll M$	N modülü M nin dar alt modülü
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\prod_{i \in I} R_i$	R_i halkalarının direkt çarpımı
$\bigoplus_{i \in I} R_i$	R_i halkalarının direkt toplamı
$R[x]$	R halkası üzerine kurulan polinomlar halkası
$R[[x]]$	R halkası üzerine kurulan kuvvet serisi halkası
$C(R)$	R halkasının merkezi
$T(R, M)$	R halkasının M modülü ile oluşturulan aşıkâr genişlemesi
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$U(R)$	R halkasının tersinir elemanlarının kümesi
$R^\#$	R halkasının tüm kuvvetli düzenli elemanlarının kümesi
R^{nil}	R halkasının tüm üstel sıfır elemanlarının kümesi
R^{qnil}	R halkasının tüm yarı üstel sıfır elemanlarının kümesi
$I(R; V)$	R halkasının V modülü ile oluşturulan ideal genişlemesi
$K_s(R)$	R üzerindeki genelleştirilmiş matris halkası
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipinde matris halkası
$T_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris halkası

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\text{Ker}\theta$	θ homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im}\theta$	θ homomorfizmasının görüntü kümesi
$\alpha _P$	α dönüşümünün P ye kısıtlanması

1. GİRİŞ

Drazin (1958) yılında “*Pseudo-inverses in associative rings*” isimli makalesinde bir R halkasında $x \in R$ için , $x^m = x^{m+1}c$ ve $c = c^2x$ olacak şekilde $c \in comm(x)$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ varsa x elemanına *pseudo-tersinir* (*pseudo-invertible*) adını vermiştir. Burada $c \in R$ ye x in *pseudo-terisi* denilmiştir. Aynı makalede Azumaya’nın kuvvetli π -düzenli eleman tanımıyla pseudo-tersinir eleman arasındaki ilişkiyi incelemiş ve denk olduklarını göstermiştir.

Koliha’nın (1995) yılındaki “*A generalized Drazin inverse*” isimli çalışmasında bir R halkasında $b \in comm(a)$, $ab^2 = b$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^k = a^{k+1}b$ ve denk olarak $b \in comm(a)$, $ab^2 = b$, $a - a^2b \in R^{nil}$ şartlarını sağlayan $b \in R$ ye a nın *Drazin tersi* (*Drazin inverse*) adı verilmiştir. Böylece pseudo-tersinir eleman tanımına alternatif bir karakterizasyon ortaya koyulmuştur.

Harte (1991) yılında, bir R halkasında eğer her $x \in comm(a)$ için $1 + xa \in U(R)$ oluyorsa $a \in R$ yı *yarı üstel sıfır* (*quasinilpotent*) eleman olarak tanımlamış ve tüm yarı üstel sıfır elemanların kümesini R^{qnil} ile göstermiştir. Aynı çalışmada bir R halkasında $a(1 - ab) \in R^{qnil}$, $ab = (ab)^2$ olacak şekilde $b \in comm^2(a)$ varsa $a \in R$ ye *yarı kutuplu* (*quasipolar*) eleman denmiştir. Harte bu tanım yardımıyla kuvvetli π -düzenli elemanları yarı kutuplu elemanlara genelleştirmiştir. Koliha ve Patricio (2002) yılında yayımladıkları “*Elements of rings with equal spectral idempotens*” makalesinde Harte tarafından verilen yarı kutuplu eleman tanımını “bir R halkasında $a + p \in U(R)$, $ap \in R^{qnil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ varsa a ya yarı kutuplu eleman denir” şeklinde güncellemişlerdir. Ayrıca bu şartları sağlayan p ye a nın *spektral eşkare* (*spectral idempotent*) elemanı adı verilmiştir.

Ying ve Chen (2012) yılındaki “On quasipolar rings” makalesinde yarı kutuplu halkaların bazı halka sınıflarıyla ilişkilerini incelemişler ve $T_n(R)$ nin hangi şartlar altında yarı kutuplu olduğunu araştırmışlardır. Daha sonra bu sonuçlar da kullanılarak Cui ve Chen “When is a 2×2 matrix ring over a commutative local ring quasipolar?” makalesinde $M_2(R)$ halkasının hangi şartlar altında yarı kutuplu

olduğunu göstermişlerdir.

Huang, Tang ve Zhou (2012) yılında yerel bir halka üzerinde genelleştirilmiş matris halkalarının yarı kutupluluk özelliğini incelemişlerdir. Bir R halkası için $K_s(R)$ halkasının birim elemanı I_2 olarak tanımlanmıştır. Gürgün, Halıcıoğlu ve Harmancı (2014) te yayımlanan “*Nil-quasipolar rings*” isimli çalışmada, $a + p \in R^{nil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ varsa a ya *üstel yarı kutuplu (nil-quasipolar)* ve bu şartları sağlayan $p \in R$ ye *üstel spektral eşkare (nil-spectral idempotent) eleman* adını vermişlerdir. Bu çalışmada üstel yarı kutuplu halkaların bazı özellikleri incelenmiştir. Üstel yarı kutuplu halka ile yarı kutuplu halka arasındaki ilişki araştırılmıştır. Ayrıca matrislerin hangi şartlar altında üstel yarı kutuplu olduğu da gösterilmiştir.

Bu tezde *kuvvetli π -düzenli (strongly π -regular)*, *kutuplu (polar)*, *pseudo-tersinir (pseudo-invertible)* ve *Drazin tersinir (Drazin invertible)* elemanların denk oldukları gösterilmiştir. Daha sonra yarı kutuplu eleman tanımı verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Yarı kutuplu halkaların bazı halka sınıflarıyla olan ilişkileri üzerinde durulmuştur. Üstel yarı kutuplu halka tanımı verilmiş ve bazı halka sınıfları ile ilişkileri incelenmiştir. Son olarak, bazı matris halkalarının hangi şartlar altında yarı kutuplu olduğu çalışılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Bazı Tanım ve Teoremler

Bu bölümde tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan halkalar ile ilgili tanım ve teoremler verilmektedir.

Uyarı 2.1.1. Bu çalışma boyunca halkalar birimli alınmaktadır. Bir R halkasının tersinir elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilmektedir.

Uyarı 2.1.2. Bir R halkası üzerindeki $n \geq 1$ tamsayıları için $n \times n$ tipindeki tüm üst üçgensel matrislerin oluşturduğu küme $T_n(R)$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1.3. R bir halka olsun. Eğer $e \in R$ için $e^2 = e$ sağlanıyor ise, e ye *eşkare (idempotent) eleman*; $e_1, e_2 \in R$ eşkare elemanlar olmak üzere eğer $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ ise e_1 ve e_2 elemanlarına *dik eşkare (orthogonal idempotents)* denir.

Tanım 2.1.4. Bir R halkasının bütün elemanları eşkare ise R ye *Boolean halka* denir.

Tanım 2.1.5. R bir halka olsun. $C(R) = \{x \in R : \text{Her } y \in R \text{ için } yx = xy\}$ kümesine R halkasının *merkezi (center of R)* denir.

Tanım 2.1.6. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Eğer $e \in C(R)$ ise e ye *merkezil eşkare (central idempotent)* denir.

Tanım 2.1.7. R bir halka olsun. Eğer R nin tüm eşkare elemanları R nin merkezinde ise o zaman R ye *abel (abelian) halka* denir.

Tanım 2.1.8. R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir ve R halkasındaki tüm üstel sıfır elemanların kümesi R^{nil} ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. R bir halka olsun. Eğer R nin bir I idealinin her elemanı üstel sıfır ise I ya *üstel ideal (nil ideal)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.10. Sıfırdan farklı üstel sıfır elemana sahip olmayan halkaya *indirgenmiş (reduced) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.11. R bir halka olsun. $r_R(a) = \{x \in R : ax = 0\}$ şeklinde tanımlı kümeye a nın R deki *sağ sıfırlayana* (*right annihilator*) denir. Benzer şekilde $l_R(a) = \{y \in R : ya = 0\}$ şeklinde tanımlı kümeye a nın R deki *sol sıfırlayana* (*left annihilator*) denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.12. R bir halka olsun. Bu durumda $a \in R$ için

$$comm(a) = \{x \in R : ax = xa\}$$

ve

$$comm^2(a) = \{x \in R : \text{her } y \in comm(a) \text{ için } xy = yx\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.13. R bir halka olsun. Eğer R nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise R ye *bölümlü* (*division*) *halka* denir.

Tanım 2.1.14. R bir halka olsun. Eğer $x \in R$ için $xyx = x$ şartını sağlayan $y \in R$ varsa x e *düzenli* (*regular*) *eleman* denir ve $y = x^-$ ile gösterilir. R nin her elemanı düzenli ise R ye *düzenli* (*regular*) *halka* denir. R halkasının tüm düzenli elemanlarının oluşturduğu küme R^- ile gösterilir.

Önerme 2.1.15. $a, b \in R^-$ ve $A, B \subseteq R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$(1) (1 - a^-a)R = r_R(a),$$

$$(2) r_R(a) = r_R(Ra),$$

$$(3) Ra = l_R(r_R(a)) = l_R(r_R(Ra)),$$

$$(4) A \subseteq B \text{ ise } l_R(B) \subseteq l_R(A) \text{ (Koliha ve Patricio 2002).}$$

İspat:

- (1) $y \in R$ için $a((1 - a^-a)y) = 0$ olur ve $(1 - a^-a)y \in r_R(a)$ elde edilir. Karşıt olarak $ax = 0$ olsun, buradan $(1 - a^-a)x = x$ yani $x \in (1 - a^-a)R$ olur.

(2) $r_R(a) \subseteq r_R(Ra)$ olduğu açıktır. Karşıt olarak $r_R(Ra) = \{ y \in R : \text{her } x \in R \text{ için } xay = 0 \}$ olduğundan $x = 1$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

(3) $ya \in Ra$ olsun. Bu durumda her $x \in r_R(a)$ için $yax = 0$ olur ve $ya \in l_R(r_R(a))$ elde edilir. Karşıt olarak $y \in l_R(r_R(a))$ olsun. Böylece her $x \in r_R(a)$ için $yx = 0$ olur. $y = ya^-a + y(1 - a^-a)$ ve (1) den $(1 - a^-a) \in r_R(a)$ olduğundan $y(1 - a^-a) = 0$ olur ve $y = ya^-a \in Ra$ ispatlanır.

(4) $A \subseteq B$ ise $l_R(B) \subseteq l_R(A)$ olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 2.1.16. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer $I + K = R$ olacak şekilde R nin her K ideali için $K = R$ ise, I ya *dar (small) ideal* adı verilir.

Tanım 2.1.17. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $1 - x$ in R de sol tersi varsa x e *sol yarı düzenli (left quasiregular)*, $1 - x$ in R de sağ tersi varsa x e *sağ yarı düzenli (right quasiregular)*, $1 - x$ in R de sol ve sağ tersi varsa x e *yarı düzenli (quasiregular)* eleman denir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.1.18. R bir halka ve R nin bir ideali I olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) I sol yarı düzenlidir.
- (2) I yarı düzenlidir.
- (3) I ideali R de dardır (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.19. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $x = xux$ olacak şekilde $u \in U(R)$ elemanı mevcut ise x e *tersinir düzenli (unit regular) eleman* denir (Nicholson 1999).

Tanım 2.1.20. R bir halka olsun. R nin maksimal sol (sağ) ideallerinin kesişimine R nin *Jacobson radikali* denir ve $J(R)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.21. R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki kümeler eşittir.

- (1) $J(R)$,
- (2) R nin tüm sol (sağ) ilkel ideallerinin kesişimi,

- (3) $\{x \in R \mid \text{her } r, s \in R \text{ için } rxs \text{ yarı düzenli}\},$
- (4) $\{x \in R \mid \text{her } r \in R \text{ için } rx \text{ yarı düzenli}\},$
- (5) $\{x \in R \mid \text{her } s \in R \text{ için } xs \text{ yarı düzenli}\},$
- (6) R nin tüm yarı düzenli sol (sağ) ideallerinin birleşimi,
- (7) R nin tüm yarı düzenli ideallerinin birleşimi,
- (8) R nin en geniş dar sol (sağ) ideali (Anderson ve Fuller 1992).

Uyarı 2.1.22. R bir halka olsun. Her $u \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ için $u + j \in U(R)$ dir.

Tanım 2.1.23. R bir halka olsun. Eğer $R/J(R)$ bölümlü halka ise o zaman R ye *yerel (local) halka* denir.

Önerme 2.1.24. Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R yerel halkadır.
- (2) R halkası tek maksimal ideale sahiptir.
- (3) $J(R)$ maksimal sol idealdir.
- (4) R nin sol terse sahip olmayan elemanlarının kümeleri toplamaya göre kapalıdır.
- (5) $J(R) = \{x \in R \mid Rx \neq R\}$
- (6) $J(R) = \{x \in R \mid x \notin U(R)\}$
- (7) Her $x \in R$ için $x \in U(R)$ veya $1 - x \in U(R)$ dir.

Tanım 2.1.25. Sıfırdan farklı bir R halkasının sıfır ve kendisinden başka ideali yoksa R ye *basit (simple) halka* denir.

Tanım 2.1.26. R bir halka olsun. Eğer R halkası minimal sağ ideallerinin direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa R ye *yakın basit (semisimple) halka* denir.

Teorem 2.1.27. Bir R halkasının yakın basit olması için gerek ve yeter şart R nin minimal sol ideallerinin direkt toplamı olmasıdır.

Tanım 2.1.28. R bir halka olmak üzere eğer $R/J(R)$ yakın basit halka ise R ye *yakın yerel (semilocal)* denir.

Tanım 2.1.29. R bir halka olsun. Eğer her $x \in comm(a)$ için $1 - xa \in U(R)$ oluyorsa $a \in R$ ye *yarı üstel sıfır (quasinilpotent) eleman* denir. R halkasındaki tüm yarı üstel sıfır elemanların kümesi R^{qnil} ile gösterilir.

Lemma 2.1.30. Bir R halkası için $J(R) \subseteq R^{qnil}$ ve $R^{nil} \subseteq R^{qnil}$ sağlanır.

İspat: $J(R) = \{a \in R : 1 + Ra \subset U(R)\}$ olduğundan $J(R) \subseteq R^{qnil}$ olduğu açıktır. $a \in R^{nil}$, a nın indeksi k ve $x \in comm(a)$ olsun. Bu durumda $1 + xa \in U(R)$ ve

$$(1 + xa)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i x^i a^i$$

dir. Dolayısıyla $a \in R^{qnil}$ olur.

Fakat Örnek 2.1.31 de görüldüğü gibi yukarıdaki kapsamaların tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.1.31.

(1) $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 2 \nmid b\}$ halkasında $2 \in \mathbb{Z}_{(2)}$ yarı üstel sıfır eleman olmasına rağmen üstel sıfır değildir.

(2) R birimli bir halka olmak üzere $M_2(R)$ halkasında $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elemanı üstel sıfır eleman olduğundan yarı üstel sıfır eleman olup aynı eleman $J(M_2(R)) = \begin{pmatrix} J(R) & J(R) \\ J(R) & J(R) \end{pmatrix}$ de değildir.

Önerme 2.1.32. R bir halka, $a \in U(R)$ ve $b \in R^{qnil} \cap comm(a)$ olsun. Bu durumda $a + b \in U(R)$ dir.

İspat: $b \in R^{qnil}$ olduğundan her $x \in comm(b)$ için $1 + xb \in U(R)$ dir. $b \in comm(a)$ olduğundan $1 + ab \in U(R)$, böylece $b \in J(R)$ olur ve buradan $a^{-1}(a+b) = 1 + a^{-1}b \in U(R)$ elde edilir. Sonuç olarak $(1 + a^{-1}b)^{-1}a^{-1}(a+b) = 1$ sağlanır.

Tanım 2.1.33. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $N + K = M$ olacak şekilde M nin her K alt modülü için $K = M$ ise, N ye *dar (small) alt modül* adı verilir ve $N \ll M$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.34. M, K ve U R -modüller olmak üzere her $f : M \rightarrow K$ R -modül epimorfizması ve her $\gamma : U \rightarrow K$ R -modül homomorfizması için $f\bar{\gamma} = \gamma$ olacak biçimde $\bar{\gamma} : U \rightarrow M$, R -modül homomorfizması varsa U ya *M -projektif modül* denir. Eğer U , her M modülü için M -projektif ise U ya *projektif (projective) modül* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow \bar{\gamma} & & \searrow \gamma & \\ M & \xrightarrow{f} & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tanım 2.1.35. M bir modül olmak üzere bir P projektif modülü için $\varphi : P \rightarrow M$ epimorfizma olsun. Eğer $\text{Ker}\varphi \ll P$ ise, P ye M nin *projektif örtüsü (projective cover)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.36. Sıfırdan farklı M modülünün sıfır ve kendisinden başka alt modülü yoksa M ye *basit (simple) modül* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.37. R bir halka olsun. Eğer her sağ (sol) R -modül bir projektif örtüye sahip ise, R ye *sağ (sol) mükemmel (perfect) halka* denir. Eğer her basit R -modül bir projektif örtüye sahip ise, R ye *yakın mükemmel (semiperfect) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.38. p bir asal sayı olmak üzere $R = \widehat{\mathbb{Z}}_p = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i : a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq p-1\}$ kümesi aşağıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya p tabanına göre tamsayılar (p -adic integers) halkası denir. R değişmeli yerel halkadır ve $J(R) = pR$ dir. Toplama işlemi

$$a_0 + b_0 \equiv c_0 \pmod{p}, a_0 + b_0 = c_0 + k_0 p; a_1 + b_1 + k_0 \equiv c_1 \pmod{p}, a_1 + b_1 + k_0 = c_1 +$$

$k_1p; \dots$ olmak üzere $(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots) + (b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots) = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots$

ve çarpma işlemi

$a_0b_0 \equiv d_0 \pmod{p}$, $a_0b_0 = d_0 + l_0p$; $a_0b_1 + a_1b_0 + l_0 \equiv d_1 \pmod{p}$, $a_0b_1 + a_1b_0 + l_0 = d_1 +$

$l_1p; \dots$ olmak üzere $(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots) + (b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots) = d_0 + d_1p + d_2p^2 + \dots$

şeklinde tanımlıdır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİR ELEMANLAR

3.1 Kuvvetli π -Düzenli Elemanlar

Önerme 3.1.1. R bir halka olsun. $a \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a^2x = a = ya^2$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır.
- (2) $aR = a^2R$ ve $r_R(a) = r_R(a^2)$.
- (3) $R = aR \oplus r_R(a)$.
- (4) $aua = a$ ve $au = ua$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır.
- (5) $e^2 = e \in R$ için $a = ue = eu$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır.
- (6) $a^2u = a = ua^2$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır.
- (7) $b \in \text{comm}(a)$ ve $a^2b = a$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

Tanım 3.1.2. Önerme 3.1.1 deki denk şartlardan birini sağlayan $a \in R$ ye *kuvvetli düzenli (strongly regular) veya grup tersinir (group invertible) eleman* denir. R halkasının tüm kuvvetli düzenli elemanlarının kümesi $R^\#$ ile gösterilir. Bu çalışmada genellikle kuvvetli düzenli kavramı kullanılmaktadır.

Önerme 3.1.3. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a^n \in a^{n+1}R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
- (2) $a^n R = a^{n+1}R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
- (3) $aR \supseteq a^2R \supseteq \dots$ zinciri sonlu bir adımda durur (Nicholson 1999).

Tanım 3.1.4. Önerme 3.1.3 deki denk şartlardan birini sağlayan a ya *sağ π -düzenli (right π -regular) eleman* denir. Benzer şekilde *sol π -düzenli (left π -regular) eleman* tanımı da yapılabilir (Nicholson 1999).

Önerme 3.1.5. (*Dischinger Lemma*) Bir R halkasının tüm elemanları sağ π -düzenli ise R nin tüm elemanları sol π -düzenlidir (Dischinger 1976).

Lemma 3.1.6. R bir halka ve $a \in R$ kuvvetli düzenli eleman olsun. Bu durumda $z \in \text{comm}(a)$, $a^2z(=za^2) = a$ ve $az^2(=z^2a) = z$ olacak şekilde bir tek $z \in R$ vardır. Özel olarak a düzenlidir. $a^2x = a$ şartını sağlayan herhangi bir $x \in R$ için $z = ax^2$ dir. Ayrıca $z \in \text{comm}^2(a)$ dır (Azumaya 1954).

İspat: $x, y \in R$ ve $a^2x = a$, $ya^2 = a$ olsun. Bu durumda aşağıdaki (1), (2), (3) eşitlikleri sağlanır.

$$(1) \quad ax = ya^2x = ya.$$

$$(2) \quad ax^2 = yax = y^2a.$$

$$(3) \quad axa = ya^2 = a = a^2x = aya.$$

Burada $z = ax^2$ alır ve yerine yazarsak (1), (2), (3) den

$$az = aax^2 = a^2xx = ayax = ax = ya = yaxa = ax^2a = za,$$

$$a^2z = aaz = aza = aax^2a = a^2xxa = axa = a,$$

$$az^2 = azz = yaz = yax = ax^2 = z \text{ elde edilir.}$$

Şimdi $az' = z'a$, $a^2z'(=z'a^2) = a$, $az'^2(=z'^2a) = z'$ olsun. (2) de x ve y yerine sırasıyla z ve z' yazarsak $z = az^2 = z'^2a = z'$ olur ve z nin tekliği ispatlanır. Şimdi $c \in \text{comm}(a)$ olsun. O zaman $zac = zca = zca^2z = za^2cz = acz = caz$ olur. Böylece $zc = z^2ac = zzac = zcza = zcaz = zac z = cazz = caz^2 = cz$ olup $z \in \text{comm}^2(a)$ elde edilir.

Lemma 3.1.7. R bir halka olmak üzere $a \in R$ sağ düzenli eleman ve $a^2x = a$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$(a - ax^na^n)^r = \begin{cases} a^r - ax^{n-r+1}a^n & r = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & r = n + 1. \end{cases}$$

(Azumaya 1954).

Tanım 3.1.8. R bir halka olsun. Eğer R nin bütün üstel sıfır elemanlarının üstel sıfırlık indeksi sınırlı ise R ye *sınırlı indekse (bounded index) sahiptir* denir ve bu durumda bütün üstel sıfırlık indekslerinin üst sınırlarının en küçüğüne R nin *indeksi* denir (Azumaya 1954).

Teorem 3.1.9. R sınırlı indekse sahip bir halka olsun. Bu durumda R nin her sağ düzenli (sol düzenli) elemanı kuvvetli düzenlidir (Azumaya 1954).

İspat: R nin indeksi n ve $a \in R$ sağ-düzenli, $a^2x = a$ olsun. Bu durumda Lemma 3.1.7 gereğince $(a - ax^n a^n)^{n+1} = 0$ olduğundan $(a - ax^n a^n)^n = 0$ olur ve $(a - ax^n a^n)^n = a^n - axa^n = 0$ elde edilir. Aynı lemmada n yerine $n + 1$ alınırsa $(a - ax^{n+1} a^{n+1})^{n+1} = a^{n+1} - axa^{n+1} = a(a^n - axa^n) = 0$ ve buradan $(a - ax^{n+1} a^{n+1})^{n+1} = a^n - ax^2 a^{n+1} = 0$ olup $a^n = ax^2 a^{n+1}$ sonucuna varılır. Bu eşitlik sağdan ax^n ile çarpılır ve $a^{n+1}x^n = a$ olması kullanılırsa $a = ax^2 a^2$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.10. R bir halka ve $a \in R$ sağ düzenli eleman olsun. Bu durumda a nın kuvvetli düzenli olması için gerek ve yeter şart $r_R(a^2) = r_R(a)$ olmasıdır (Azumaya 1954).

İspat: a kuvvetli düzenli olsun. O zaman $ya^2 = a$ olacak şekilde $y \in R$ vardır. $t \in r_R(a^2)$ alınırsa $a^2t = 0$ olup $ya^2t = 0$ ve buradan $at = 0$ bulunur. Böylece $r_R(a^2) \subseteq r_R(a)$ elde edilir. $r_R(a) \subseteq r_R(a^2)$ olduğu açıktır. Karşıt olarak $r_R(a) = r_R(a^2)$ olsun. a sağ düzenli olduğundan $a^2R = aR$ olup $f : aR \rightarrow aR$ ve $u \in aR$ olmak üzere $f(u) = au$ ile tanımlı dönüşüm homomorfizmadır. Hatta $u \in \text{Ker } f$ için $f(u) = a^2y = 0$ ise $y \in r_R(a^2) = r_R(a)$ olur. Buradan $ay = 0 = u$ bulunur. Böylece f izomorfizma olur. ϕ dönüşümü f nin tersi olmak üzere ϕ de izomorfizma olur. $a \in (a^2R =)aR$ olduğundan özel olarak $\phi(a^2) = a$ olur. Buradan $((\phi)^2(a))(a^2) = \phi(\phi(a^2))(a) = \phi(a^2) = a$ olup a sol düzenli bulunur.

Tanım 3.1.11. R bir halka olsun. Eğer $R/J(R)$ düzenli ve eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir ise R ye *yakın düzenli (semiregular) halka* denir (Nicholson 1977).

Teorem 3.1.12. Bir $a \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $p \in \text{comm}(a)$, $ap \in R^{nil}$ ve $a + p \in U(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ vardır.
- (2) $p \in \text{comm}^2(a)$, $ap \in R^{nil}$ ve $a + p \in U(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ vardır.
- (3) $b \in \text{comm}(a)$, $b = ab^2$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.
- (4) $b \in \text{comm}^2(a)$, $b = ab^2$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.

(5) $b \in comm^2(a)$, $b = ab^2$ ve $a - a^2b \in R^{nil}$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

(6) $b \in comm(a)$, $b = ab^2$ ve $a - a^2b \in R^{nil}$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

(7) $a^p = a^{p+1}x$ ve $a^q = ya^{q+1}$ olacak şekilde p, q pozitif tamsayıları ve $x, y \in R$ vardır.

(8) $b \in comm(a)$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.

(9) $b \in comm^2(a)$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $ap \in R^{nil}$ olduğundan $(ap)^k = a^k p = 0$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ olsun. Bu durumda $ab = ba = 1 - p$ olur. Eğer $x \in comm(a)$ olarak alınırsa, $xp - pxp = (1 - p)xp = (1 - p)^k xp = b^k a^k xp = b^k x a^k p = 0$ olup $xp = pxp$ elde edilir. Benzer şekilde $px = pxp$ olduğu gösterilerek $p \in comm^2(a)$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Eğer $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ olarak alınırsa, $b \in comm(a)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $ab^2 = a[(a+p)^{-1}(1-p)]^2 = a(a+p)^{-2}(1-p) = (a+p)(a+p)^{-2}(1-p) = (a+p)^{-1}(1-p) = b$ dir. Kabul gereğince $ap^k = a^k p = 0$ olacak biçimde pozitif bir k tamsayısı mevcut olup kolayca görülebileceği üzere $a^k = a^{k+1}b$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Kabul gereğince $b \in comm(a)$, $b = ab^2$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak biçimde bir $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla sadece $b \in comm^2(a)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $xa = ax$ olacak şekilde bir $x \in R$ alınsın. Bu durumda $bx = b(ab)^k x = b^{k+1}a^k x = b^{k+1}xa^k = b^{k+1}xa^{k+1}b = (ba)^{k+1}xb = bxab$ ve $xb = x(ab^2) = xa^k b^{k+1} = a^k x b^{k+1} = a^{k+1}b x b^{k+1} = bxab = baxb$ elde edilir. Yani $bx = xb$ olup $b \in comm^2(a)$ dır.

(4) $\Rightarrow$ (5) (4) gereğince $a^k = a^{k+1}b$ olup $(a - a^2b)^k = 0$ bulunur.

(5) $\Rightarrow$ (6) Açıktır.

(6) $\Rightarrow$ (7) Hipotez gereğince $a - a^2b \in R^{nil}$ olduğundan $(a - a^2b)^k = 0$ olacak biçimde bir k pozitif tamsayısı vardır. Bu durumda $a^k = a^{k+1}b$ ve $a^k = ba^{k+1}$ elde edilir ki bu istenendir.

(7) $\Rightarrow$ (8) $a^p = a^{p+1}x$ ve $a^q = ya^{q+1}$ olacak şekilde $x, y \in R$ ve $p, q \in \mathbb{Z}$ mevcut olsun. Eğer p ve q tamsayılarının maksimumuna m denilir ve $b = a^m x^{m+1}$ alınırsa, $a^{m+1}x = a^m = ya^{m+1}$ ve $a^m x = ya^{m+1}x = ya^m$ sağlanır. Tümevarım

prensibinin uygulanması ile kolayca gösterilebilir ki $a^m x^k = y^k a^m$ ($k = 1, 2, \dots$) dir. Dikkat edilmelidir ki b tamsayısı aynı zamanda $b = y^{m+1} a^m$ olarak ifade edilebilir. Bu durumda $ab = aa^m x^{m+1} = a^{m+1} x x^m = a^m x^m = y^m a^m = \dots = ba$ olup yine Tümevarım prensibi gereğince $a^m = a^{m+k} x^k$ elde edilir. Böylece $a^{m+1} b = a^{m+1} a^m x^{m+1} = a^{m+(m+1)} x^{m+1} = a^m$ sağlanır.

(8) $\Rightarrow$ (9) (8) gereğince $ab = ba$ ve $a^k = a^{k+1} b$ olacak şekilde bir $b \in R$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $a^k = a^{k+1} b = a^{k+2} b^2 = a^{k+3} b^3 = \dots = a^{k+j} b^j$ ($j = 1, 2, \dots$) elde edilir. Eğer $c = a^k b^{k+1}$ alınırsa o zaman $a^k = a^{k+1} c$ olacağı açıktır. Yine $ac = a^{k+1} b^{k+1}$ ve $ca = a^k b^{k+1} a = a^{k+1} b^{k+1}$ olduğundan $ac = ca$ dir. Diğer taraftan $c \in comm^2(a)$ olduğu (3) $\Rightarrow$ (4) ispatına benzer olarak gösterilebilir.

(9) $\Rightarrow$ (1) Kabulden $b \in comm^2(a)$ ve $a^k = a^{k+1} b$ olacak biçimde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Eğer $c = a^k b^{k+1}$ denilirse, $b \in comm^2(a)$ olduğundan kolayca görülür ki $c \in comm^2(a)$ dir. Ayrıca $a^{k+1} c = a^k$ olduğu da açıktır. Diğer taraftan $c^2 a = cac = ca^{k+1} b^{k+1} = a^{k+1} c b^{k+1} = a^k b^{k+1} = c$ dir. Bu durumda $p = 1 - ac$ olsun. $ac^2 = c$ ve $c \in comm(a)$ olduğundan $p^2 = p \in comm(a)$ sağlanır. $a^k - a^{k+1} c = a^k(1 - ac) = a^k p = (ap)^k = 0$ olup $ap \in R^{nil}$ bulunur. Diğer taraftan $(a+p)(c+p) = 1+ap \in U(R)$ olup $a+p \in U(R)$ olma şartı da sağlanır.

Tanım 3.1.13. Teorem 3.1.12 deki denk şartlardan birini sağlayan $a \in R$ ye *kuvvetli π -düzenli (strongly π -regular), Drazin-tersinir (Drazin-invertible), pseudo-tersinir (pseudo-invertible), kutuplu (polar) eleman* denir. Teorem 3.1.12 deki (3), (4), (5) ve (6) denk şartlarından birini sağlayan b elemanına, a nın Drazin tersi denir ve a^D ile gösterilir. Bu çalışmada genellikle kuvvetli π -düzenli ve Drazin tersinir kavramları kullanılmaktadır.

Teorem 3.1.14. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda x in R de en fazla bir tane Drazin-tersi vardır. Eğer x in R de Drazin-tersi varsa bu eleman x ile yer değiştiren elemanlarla yer değiştirir (Drazin 1958).

Sonuç 3.1.15. Eğer $x_1, \dots, x_j$ Drazin-tersinir elemanlar ve $x_s x_t = 0$ ($s, t = 1, \dots, j; s \neq t$) ise $x_1 + \dots + x_j$ Drazin-tersinirdir ve $(x_1 + \dots + x_j)^D = x_1^D + \dots + x_j^D$ dir (Drazin 1958).

Teorem 3.1.16. R bir halka, $x \in R$ Drazin-tersinir ve k bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda x^k Drazin-tersinirdir, $(x^k)^D = (x^D)^k$ dır ve $i(x^k) = q$ sayısı $0 \leq kq - i(x) < k$ şartını sağlayan tek (pozitif) tamsayıdır (Drazin 1958).

Teorem 3.1.17. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer x Drazin-tersinir ise x^D de Drazin-tersinirdir. Yani x^D var olduğunda indeksi 1 dir ve $(x^D)^D = x^2 x^D$ sağlanır (Drazin 1958).

Sonuç 3.1.18. R bir halka ve $x \in R$ olsun. $(x^D)^D = x$ olması için gerek ve yeter şart x in Drazin-tersinir ve indeksinin 1 olmasıdır. Bu durumda $y \in R$ olmak üzere $y \in comm(x)$ olması için gerek ve yeter şart $x^D y = y x^D$ olmasıdır (Drazin 1958).

Sonuç 3.1.19. R bir halka ve $x \in R$ Drazin-tersinir eleman olsun. Bu durumda her $k \geq i(x)$ tamsayısı için $((x^k)^D)^D = x^k$ sağlanır (Drazin 1958).

Sonuç 3.1.20. R bir halka olsun. $x \in R$ Drazin-tersinir eleman olmak üzere $((x^D)^D)^D = x^D$ dır (Drazin 1958).

Lemma 3.1.21. Bazı $n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $a^{n+1}x = a^n$ ve $ya^{m+1} = a^m$ olsun. Bu durumda $a^{m+1}x = a^m$ ve $ya^{n+1} = a^n$ de sağlanır (Azumaya 1954).

İspat: $m \geq n$ ise $a^{n+1}x = a^n$ olduğundan $a^{m+1}x = a^m$ elde edilir. $m < n$ olsun. Bu durumda $a^m = ya^{m+1}$ den $a^m (= y^2 a^{m+2} = \dots) = y^{n-m} a^n$ ve böylece $a^{m+1}x = y^{n-m} a^{n+1}x = y^{n-m} a^n = a^m$ elde edilir. Benzer şekilde $ya^{n+1} = a^n$ de bulunur.

Önerme 3.1.22. (*Azumaya Lemma*) R bir halka, $a \in R$ kuvvetli π -düzenli ve $a^n R = a^{n+1} R$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O halde a^n kuvvetli düzenlidir ve $ab = ba$, $a^n = a^{n+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ vardır (Azumaya 1954).

Sonuç 3.1.23. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a kuvvetli π -düzenli ise a π -düzenlidir (Azumaya 1954).

İspat: Önerme 3.1.22 gereğince a^n kuvvetli düzenlidir. Böylece a^n düzenli olup a π -düzenlidir.

Tanım 3.1.24. a^n sağ düzenli (sol düzenli) olacak şekilde en küçük n pozitif tamsayısına kuvvetli π -düzenli a elemanının indeksi denir (Azumaya 1954).

Uyarı 3.1.25. R bir halka ve $a \in R$ olsun. a üstel sıfır eleman ise a kuvvetli π -düzenlidir ve üstel sıfırlık indeksi Tanım 3.1.24 deki indeksle aynıdır (Azumaya 1954).

Lemma 3.1.26. a indeksi n olan kuvvetli π -düzenli eleman ve $az = za$, $a^{n+1}z = a^n$ olacak şekilde z mevcut olsun. Bu durumda $a - a^2z$ üstel sıfır elemandır ve indeksi n dir (Azumaya 1954).

Teorem 3.1.27. R sınırlı indekse sahip bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R halkası π -düzenlidir,
- (2) R sağ π -düzenlidir,
- (3) R sol π -düzenlidir,
- (4) R kuvvetli π -düzenlidir (Azumaya 1954).

Teorem 3.1.28. R bir halka ve $x \in R$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- (1) x , e_1 , u_1 birbirleriyle değişmeli ve $x^{n_1} = e_1u_1$ olacak şekilde $e_1^2 = e_1 \in R$, $u_1 \in U(R)$ ve n_1 pozitif tamsayısı vardır.
- (2) $x = e_2 + u_2$, $e_2u_2 = u_2e_2$ ve $(xe_2)^{n_2} = 0$ olacak şekilde $e_2^2 = e_2 \in R$, $u_2 \in U(R)$ ve n_2 pozitif tamsayısı vardır.
- (3) $xe_3 = e_3x \in U(e_3Re_3)$ ve $(1 - e_3)x^{n_3} = 0$ olacak şekilde $e_3^2 = e_3 \in R$ ve n_3 pozitif tamsayısı vardır.
- (4) x kuvvetli π -düzenlidir.

Yukarıdaki e_1 , e_2 , e_3 eşkare elemanları tektir (Ying ve Chen 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (4) $x^{n_1} = e_1 u_1$ olacak şekilde $e_1^2 = e_1 \in R$, $u_1 \in U(R)$ ve n_1 pozitif tamsayısı olsun. $x^{n_1+1} = x e_1 u_1$ ve $e_1 x^{n_1} = e_1 u_1 = (e_1 x)^{n_1}$ sağlanır. Bu durumda $x^{n_1} = e_1 u_1^{-1} u_1^2 = e_1 u_1^{-2} u_1^3 = \dots = e_1 u_1^{-n_1} u_1^{n_1+1} = u_1^{-n_1} (e_1 u_1)^{n_1+1} = u_1^{-n_1} (x^{n_1})^{n_1+1} = b x^{n_1+1}$ olup x kuvvetli π -düzenli olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) x kuvvetli π -düzenli olsun. Önerme 3.1.22 gereğince $xy = yx$ ve $x^n = x^{n+1}y$ olacak şekilde $n \geq 1$ tamsayısı ve $y \in R$ vardır. Bu durumda her $k \geq 1$ için $x^n = x^n(xy) = x^{n+1}y(xy) = x^{n+2}y^2 = \dots = x^{n+k}y^k$ elde edilir. Özel olarak $x^n = x^{2n}y^n = x^n y^n x^n$ olup $f = x^n y^n = y^n x^n$ eşkare elemandır. $y^n f = z$ olsun. $z \in fRf$ ve $x^n z = z x^n = f$ sağlanır. Böylece $xf = fx$, $x^n f = x^n$ ve $w = x^n + (1 - f) \in U(R)$ olmak üzere $fw = wf = x^n f = x^n$ elde edilir. Burada $w^{-1} = z + (1 - f)$ dir.

(1) $\Rightarrow$ (2) Teorem 3.1.32 den $x - (1 - e_1) \in U(R)$ dir. $e_2 = 1 - e_1$ ve $u_2 = x - e_2$ olsun. Bu durumda $u_2 e_2 = e_2 u_2$ ve $(x e_2)^{n_1} = x^{n_1} e_2 = 0$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $e_3 = 1 - e_2$ olsun. Bu durumda $x e_3 = e_3 x = e_3(x - e_2) = e_3 u_2 \in U(e_3 R e_3)$ sağlanır. $e_2^2 = e_2$ olduğundan $e_3^2 = e_3$ olduğu açıktır. Ayrıca $(1 - e_3)a^{n_2} = (a e_2)^{n_2} = 0$ olup ispat tamamlanır.

(3) $\Rightarrow$ (1) x elemanı (3) ü sağladığından bazı $v_3 = e_3(e_3 x)^{-1} = (x e_3)^{-1} e_3 \in e_3 R e_3$ için $x v_3 = v_3 x = e_3$ ve $x^{n_3} = x^{n_3} e_3$ sağlanır. $u_1 = x^{n_3} + 1 - e_3$ ve $v_1 = v_3^{n_3} + 1 - e_3$ olsun. Bu durumda $u_1 v_1 = v_1 u_1 = 1$ ve x, e_3, u_1 değişmeli olacak şekilde $x^{n_3} = e_3 x^{n_3} + e_3 - e_3 = e_3 u_1$ elde edilir. $e_1 = e_3 = 1 - e_2$ olduğundan e_1, e_2, e_3 eşkare elemanlarının tekliğini göstermek için sadece e_3 eşkare elemanın tek olduğunu göstermek yeterlidir.

İddia: Eğer e eşkare elemanı (3) ü sağlar ise o zaman $e \in comm^2(x)$ sağlanır.

İspat: $y \in comm(x)$ olsun. $xe = ex \in U(eRe)$ olduğundan $xu = e = ux$ olacak şekilde $u \in eRe$ vardır. Ayrıca $(1 - e)x^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı vardır. Böylece $ey - eye = ey(1 - e) = u^n x^n y(1 - e) = u^n y x^n (1 - e) = 0$ olur ve $ey = eye$ elde edilir. Benzer şekilde $ye = eye$ olup $ey = ye$ yani $e \in comm^2(x)$ bulunur.

$f^2 = f$ elemanı (3) deki şartları sağlasın. Bu durumda yukarıdaki iddiamızdan $f \in comm^2(x)$ olur. Ayrıca $x, e_3, v_3 \in comm(x)$ ve herbiri değişmeli olduğundan f, e_3, x, v_3 değişmeli olur. Böylece $e_3 - e_3 f = e_3(1 - f) = v_3 x(1 - f) = v_3(1 - f)x$

yarı üstel sıfır olur. Benzer şekilde $f - fe_3$ elemanı da üstel sıfır olur. Ayrıca $e_3 - e_3f$ ve $f - fe_3$ eşkare eleman olduğundan $e_3 = e_3f = f$ bulunur ve e_3 eşkare elemanın tekliği ispatlanır.

Önerme 3.1.29. R bir halka olsun. $a \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) a kuvvetli π -düzenlidir.
- (2) $a^n = fw = wf$ şartını sağlayan herbiri aralarında değişmeli $f^2 = f \in R$, $w \in U(R)$ elemanları için $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur.
- (3) a^m kuvvetli düzenli olacak şekilde m pozitif tamsayısı vardır (Nicholson 1999).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Kabul edelim ki $a \in R$ kuvvetli π -düzenli olsun. Bu durumda Önerme 3.1.22 gereğince $ab = ba$ ve $a^n = a^{n+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $a^n = a^n(ab) = a^{n+1}b(ab) = \dots = a^{n+k}b^k$ elde edilir. Son durumda $k = n$ alınırsa $a^n = a^{2n}b^n$ olur. Ayrıca $a^n b^n = b^n a^n$ olduğundan $a^n = a^n b^n a^n$ dir. $f = a^n b^n$ olarak alınırsa $f^2 = f \in R$ bulunup $af = fa$ ve $a^n f = a^n b^n a^n = a^n$ dir. Burada $c = b^n f$ şeklinde seçilsin. Açıkça $c \in fRf$ ve $a^n c = ca^n$ olduğu görülür. $w = a^n + (1 - f)$ elemanının tersi $w^{-1} = c + (1 - f)$ olup $fw = wf = a^n f = a^n$ dir. (2) $\Rightarrow$ (3) $a^n w^{-1} a^n = a^n (c + (1 - f)) a^n = a^n c a^n + a^n (1 - f) a^n = f a^n + a^{2n} - a^n f a^n = a^n$ ve $a^n w - 1 = w^{-1} a^n$ olduğundan a^n kuvvetli düzenlidir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $m \in \mathbb{Z}^+$ için a^m kuvvetli düzenli olsun. Böylece $a^m = a^{2m} b_1$ ve $a^m = b_2 a^{2m}$ olacak şekilde $b_1, b_2 \in R$ mevcuttur. $a^m = a^{m+1} (a^{m-1} b_1)$ ve $a^m = (b_2 a^{m-1}) a^{m+1}$ olarak yazılabileceğinden a kuvvetli π -düzenli olarak bulunur.

Tanım 3.1.30. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a = e + u$ ve $eu = ue$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$, $u \in U(R)$ mevcut ise a ya *kuvvetli temiz (strongly clean)* denir (Nicholson 1999).

Tanım 3.1.31. Bütün elemanları kuvvetli temiz olan halkaya *kuvvetli temiz (strongly clean) halka* denir (Nicholson 1999).

Teorem 3.1.32. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a kuvvetli π -düzenli ise kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

İspat: $a \in R$ kuvvetli π -düzenli olsun. Önerme 3.1.29 gereğince bir $n \geq 0$ tamsayısı için $a^n = fw = wf$ olacak şekilde $f^2 = f \in R$ ve $w \in U(R)$ mevcuttur ve bu elemanlar aralarında değişmelidir. $u = a(1 - f)$ ve $v = a^{n-1}w^{-1}f - (1 + a + \dots + a^{n-1})(1 - f)$ olarak seçilsin. Buradan $uv = vu$ bulunur ve $u = af - (1 - a)(1 - f)$ dir. Ayrıca $a^n f = fa^n = a^n$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} uv &= [af - (1 - a)(1 - f)][a^{n-1}w^{-1}f - (1 + a + \dots + a^{n-1})(1 - f)] \\ &= a^n w^{-1}f + (1 - a)(1 + a + \dots + a^{n-1})(1 - f) \\ &= f + (1 - a^n)(1 - f) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $u \in U(R)$ ve $(1 - f)^2 = 1 - f$ olup $a = (1 - f) + u$ elde edilir. Ayrıca $(1 - f)u = u(1 - f)$ olduğundan a kuvvetli temizdir.

Sonuç 3.1.33. Her kuvvetli π -düzenli halka kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

Sonuç 3.1.34. Her kuvvetli düzenli halka kuvvetli temizdir (Nicholson 1999).

Örnek 3.1.35. Her sol (sağ) mükemmel halkanın tek üreteçli sol (sağ) idealleri üzerinde azalan zincir kuralı sağlandığından kuvvetli π -düzenlidir. Böylece Sonuç 3.1.33 gereğince mükemmel her halka kuvvetli temiz olur (Nicholson 1999).

Sonuç 3.1.33 ün karşısı her zaman doğru değildir. Örnek 3.1.36 da görüldüğü gibi her kuvvetli temiz halka kuvvetli π -düzenli olmayabilir.

Örnek 3.1.36. $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : 2 \nmid b\}$ halkası yerel halka olup her yerel halka kuvvetli temiz olduğundan $\mathbb{Z}_{(2)}$ halkası kuvvetli temizdir. Fakat $2 \in \mathbb{Z}_{(2)}$ için $2^n = 2^{n+1}b$ olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}_{(2)}$ olmadığından $\mathbb{Z}_{(2)}$ kuvvetli π -düzenli değildir.

Önerme 3.1.37. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda a nın Drazin-tersinir olması için gerek ve yeter şart a^k grup tersinir olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ nin mevcut olmasıdır (Koliha ve Patricio 2002).

İspat: $a \in R$ Drazin-tersinir olsun. Tanım 3.1.13 gereğince $a^k = a^{k+1}b$ ve $ab = ba$ sağlanacak biçimde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $a^k = a^{k+1}b$ ifadesinin sağ tarafındaki a^k yerine eşiti olan $a^{k+1}b$ nin yazılması ile $a^k = a^{k+1}b = aa^k b = aa^{k+1}bb$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $a^k = a^{2k}b^{k-1}$ bulunur ve $ab = ba$ olduğundan

a^k grup tersinirdir. Karşıt olarak bir $k \in \mathbb{N}$ için a^k grup tersinir olsun. Dolayısıyla $a^k = a^{2k}b$ ve $ab = ba$ olacak şekilde $b \in R$ mevcuttur. Bu durumda $c = a^{k-1}b \in R$ için $a^k = a^{k+1}c$ ve $ac = ca$ sağlandığından a Drazin tersinirdir.

Önerme 3.1.38. $\alpha \in \text{End}({}_R M)$ ve $\pi = \pi^2 \in \text{End}({}_R M)$ olsun.

- (1) $M\pi\alpha \leq M\pi$ olması için gerek ve yeter şart $\pi\alpha = \pi\alpha\pi$ olmasıdır.
- (2) $M\pi\alpha \leq M\pi$ ve $M(1-\pi)\alpha \leq M(1-\pi)$ olması için gerek ve yeter şart $\pi\alpha = \alpha\pi$ olmasıdır (Nicholson 1999).

İspat: π eşkare eleman olduğundan ispat açıktır.

Sonuç 3.1.39. R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $\alpha \in E = \text{End}(M)$ kuvvetli π -düzenlidir.
- (2) $M = M\alpha^n \oplus \text{Ker}\alpha^n$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı vardır.
- (3) $\pi\alpha = \alpha\pi \in \pi E \pi$ tersinir ve $(1-\pi)(\alpha) = (\alpha)(1-\pi) \in (1-\pi)E(1-\pi)$ üstel sıfır olacak biçimde $\pi = \pi^2 \in E$ vardır
- (4) $P\alpha \leq P$ ve $Q\alpha \leq Q$ olmak üzere $M = P \oplus Q$ ayrışımı vardır. Burada $\alpha|_P \in \text{End}(P)$ tersinir ve $\alpha|_Q \in \text{End}(Q)$ üstel sıfırdır (Armendariz vd. 1978).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\alpha \in E = \text{End}(M)$ kuvvetli π -düzenli olsun. Bu durumda Teorem 3.1.12 den $\alpha^n = \alpha^{2n}h$ olacak biçimde bir $n \geq 1$ tamsayısı ve $h \in \text{comm}(\alpha^n)$ vardır. Bu durumda $m(1-\alpha^n h) \in M(1-\alpha^n h)$ için $(m(1-\alpha^n h))\alpha^n = 0$ olup $M(1-\alpha^n h) \leq \text{Ker}\alpha^n$ bulunur. Ayrıca $M = M(1-\alpha^n h) + M(\alpha^n h)$ olduğundan $M = M\alpha^n + \text{Ker}\alpha^n$ sağlanır. $x \in M\alpha^n \cap \text{Ker}\alpha^n$ ise, $x\alpha^n = 0$ ve $x = m\alpha^n$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. $x\alpha^n = x\alpha^n h = m\alpha^{2n}h = m\alpha^n = x$ olup $x = 0$ olacağından $M = M\alpha^n \oplus \text{Ker}\alpha^n$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\alpha \in E$ ve bir $n \geq 1$ tamsayısı için $M = M\alpha^n \oplus \text{Ker}\alpha^n$ ve $g = \alpha^n$ olsun. $M = Mg \oplus \text{Ker}g$ olup $Mg = (Mg \oplus \text{Ker}g)g = Mg^2$ olur. Diğer taraftan $(\text{Ker}g^2)g \leq Mg \cap \text{Ker}g = 0$ olacağından $\text{Ker}g^2 \leq \text{Ker}g \leq \text{Ker}g^2$ olup $\text{Ker}g = \text{Ker}g^2$

dir. Böylece $M = Mg^2 \oplus \text{Ker}g^2$ dir. $u : M \rightarrow M$ endomorfizması $x \in \text{Ker}g = \text{Ker}g^2$ ve $yg^2 \in Mg^2 = Mg$ olmak üzere $(x + (y)g^2)u = yg$ ile tanımlı olsun. Bu durumda $u \in E$ iyi tanımlıdır. Dolayısıyla $g = g^2u$ olup $g = \alpha^n$ için $\alpha^n = \alpha^{2n}u$ olduğundan $\alpha \in E$ kuvvetli π -düzenlidir.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Teorem 3.1.28 den açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) $P = M\pi$ ve $Q = M(1 - \pi)$ olsun. Lemma 3.1.38 gereğince $\pi\alpha = \alpha\pi$ ise $P\alpha \leq P$ ve $Q\alpha \leq Q$ sağlanır. $\pi\alpha = \alpha\pi \in \pi E\pi$ tersinir olduğundan $(\alpha\pi)^{-1} = \pi\gamma\pi$ olacak şekilde $\gamma \in E$ vardır. $\gamma_0 = \pi\gamma\pi|_P$ olsun. Bu durumda $\gamma_0 \in \text{End}(P)$ olur. $p \in P$ için $((p)\alpha|_P)\gamma_0 = (p\pi)\alpha\gamma_0 = p(\alpha\pi\gamma_0) = p\pi = p$ ve $((p)\gamma_0)\alpha|_P = p(\pi\gamma\pi)\alpha|_P = p(\pi\gamma\pi\alpha) = p\pi = p$ olur ve $\alpha|_P \in U(\text{End}(P))$ bulunur. Son olarak $(1 - \pi)(\alpha) = (\alpha)(1 - \pi) \in (1 - \pi)E(1 - \pi)$ üstel sıfır olsun. Bu durumda $((1 - \pi)\alpha)^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı vardır. $M(1 - \pi) = M - M\pi = M - P = Q$ olduğundan $m \in M$ için $m(1 - \pi)\alpha = m\alpha|_Q$ olup $\alpha|_Q$ üstel sıfır eleman olur.

(4) $\Rightarrow$ (3) $P = M\pi$ ve $Q = M(1 - \pi)$ olsun. Lemma 3.1.38 gereğince $P\alpha \leq P$ ve $Q\alpha \leq Q$ ise $\pi\alpha = \alpha\pi$ sağlanır. $\alpha|_P \in U(\text{End}(P))$ olsun. $(\alpha|_P)^{-1} = \gamma$ ve $\gamma_0 = \pi\gamma\pi$ olsun. Bu durumda $p \in P$ için $p(\alpha\pi)\gamma_0 = p(\alpha\pi)\pi\gamma\pi = p\alpha\pi\gamma\pi = p\alpha|_P\gamma\pi = p\pi$ ve $p\gamma_0\alpha\pi = p\pi\gamma\pi\alpha\pi = p\pi\gamma\pi\pi\alpha = p\gamma\pi\alpha = p\gamma\alpha\pi = p\gamma\alpha|_P\pi = p\pi$ olup $(\alpha\pi)\gamma_0 = \pi = \gamma_0(\alpha\pi)$ bulunur. Böylece $\alpha\pi \in U(\pi E\pi)$ elde edilir. Son olarak $\alpha|_Q$ üstel sıfır eleman ise $M(1 - \pi) = M - M\pi = M - P = Q$ olduğundan $m \in M$ için $m(1 - \pi)\alpha = m\alpha|_Q$ olup $(1 - \pi)(\alpha) = (\alpha)(1 - \pi) \in (1 - \pi)E(1 - \pi)$ üstel sıfır olur.

4. YARI KUTUPLU HALKALAR

Bu bölümde yarı kutuplu eleman ile genelleştirilmiş Drazin tersinir eleman tanımlarının denkliği gösterilecektir. Daha sonra yarı kutuplu halka tanımı verilecek ve bazı özellikleri incelenecektir.

4.1 Yarı Kutuplu Eleman ve Denklikleri

Teorem 4.1.1. R bir halka olmak üzere $a \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $b \in comm^2(a)$, $ab^2 = b$ ve $a^2b - a \in R^{qnil}$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

(2) $p \in comm^2(a)$, $ap \in R^{qnil}$ ve $a + p \in U(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ vardır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $p = 1 - ab$ alınırsa $p \in comm^2(a)$, $(1 - p)^2 = a^2b^2 = a(ab^2) = ab = 1 - p$, yani $p^2 = p$ sağlanır. $a^2b - a \in R^{qnil}$ olduğundan $ap \in R^{qnil}$ bulunur. Son olarak $a + p \in U(R)$ olduğu gösterilir ise ispat tamamlanır. $bp = b(1 - ab) = b - ab^2 = 0$ olduğundan

$$(a + p)(b + p) = ab + ap + bp + p = 1 - p + ap + p = 1 + ap \in U(R) \quad (4.1)$$

elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ olsun. Bu durumda $b \in comm^2(a)$ sağlanır. Ayrıca, $ab^2 = a(1 - p)(a + p)^{-2} = (a + p)(1 - p)(a + p)^{-2} = (1 - p)(a + p)^{-1} = b$, $a^2b - a = a^2(1 - p)(a + p)^{-1} - a = a(a + p)(a + p)^{-1}(1 - p) - a = -ap \in R^{qnil}$ elde edilir. Ayrıca $(a + p)b = ab + pb = 1 - p + pb = 1 - p$, yani $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ bulunur.

Tanım 4.1.2. Yukarıdaki denk şartlardan birini sağlayan $a \in R$ ye *yarı kutuplu (quasipolar)* veya *genelleştirilmiş Drazin tersinir (generalized Drazin invertible) eleman* (kısaca *g-Drazin tersinir*) denir. R nin g-Drazin tersinir elemanlarının kümesi R^{gD} ile gösterilir. (2) şartını sağlayan $p \in R$ ye a nın *spektral eşkare (spectral idempotent) elemanı* denir ve $p = a^\pi$ ile gösterilir. (1) şartını sağlayan $b \in R$ ye a nın *g-Drazin tersi (g-Drazin inverse)* denir ve $b = a^{gD}$ ile gösterilir. Spektral idempotent ile g-Drazin ters arasında

$$a^{gD} = b = (a + a^\pi)^{-1}(1 - a^\pi) = (1 - a^\pi)(a + a^\pi)^{-1} \quad (4.2)$$

$$a^\pi = 1 - a^{gD}a = 1 - aa^{gD}, \quad a^\pi a^{gD} = a^{gD}a^\pi = 0 \quad (4.3)$$

bağıntıları vardır. Ayrıca (4.1) den $a^{gD} + a^\pi \in U(R)$ elde edilir (Koliha ve Patricio 2002).

Örnek 4.1.3. Bir R halkasının eşkare elemanları, tersinir elemanları ve üstel sıfır elemanları yarı kutupludur. Ayrıca $J(R)$ deki her eleman yarı kutupludur.

İspat: $e^2 = e \in R$, $u \in U(R)$, $a \in R^{nil}$ ve $b \in J(R)$ olsun. Sırasıyla $1 - e$, 0 , 1 , 1 spektral eşkare elemanlarıyla e , u , a , b elemanları yarı kutuplu olur.

Önerme 4.1.4. R bir halka ve $a \in R$ yarı kutuplu olsun. Bu durumda a^π tektir (Koliha ve Patricio 2002).

İspat: p ve q , a nın spektral eşkare elemanları olsunlar.

$$\begin{aligned} 1 - (1 - p)q &= 1 - (1 - p)(a + p)^{-1}(a + p)q \\ &= 1 - (1 - p)(a + p)^{-1}aq - (1 - p)(a + p)^{-1}pq \\ &= 1 - b(aq) \end{aligned}$$

$p \in comm^2(a)$ olduğundan $b \in comm(aq)$ olur ve $aq \in R^{qnil}$ den $1 - b(aq) \in U(R)$ elde edilir. Bu durumda $1 - (1 - p)q = 1 - (1 - p)^2q^2 = (1 - (1 - p)q)(1 + (1 - p)q)$ ve $1 - (1 - p)q \in U(R)$ olduğundan $(1 - p)q = 0$ yani $q = pq$ olur. Benzer şekilde $1 - (1 - q)p \in U(R)$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $p = q$ elde edilir.

Uyarı 4.1.5. $U(R) \subseteq R^\# \subseteq R^D \subseteq R^{gD}$ (Koliha ve Patricio 2002).

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi yukarıdaki kapsamaların tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.1.6.

- (1) $\mathbb{Z}_4$ halkasında $\bar{2} \in \mathbb{Z}_4$ alınsın. Bu durumda $\bar{2}$ nin spektral eşkare elemanı $\bar{1}$ olsun. Buradan $\bar{2}$ g-Drazin tersinirdir ayrıca Drazin tersinirdir. Fakat $\bar{2} \notin U(\mathbb{Z}_4)$ dir.
- (2) $\mathbb{Z}_6$ halkasında $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$ kuvvetli düzenlidir yani $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6^\#$ dir. Fakat $\bar{3} \notin U(\mathbb{Z}_6)$ dir.

Önerme 4.1.7. Eğer $a \in R^{gD}$ ise, o zaman $a^{gD} \in R^\#$ ve $(a^{gD})^\pi = a^\pi$ dir. Ayrıca $a^{gD} \in U(R)$ olur (Koliha ve Patricio 2002).

İspat: $b \in comm^2(a)$, $ab^2 = b$, $a^2b - a \in R^{qnil}$ olacak şekilde $b \in R$ olsun. $b = a^{gD} \in R^\#$ olduğu gösterilecektir. (4.1)den $a^{gD} + a^\pi \in U(R)$ ve $a^{gD}a^\pi = a^\pi a^{gD} = 0 \in R^{qnil}$, $a^\pi \in comm^2(a^{gD})$ olup a^{gD} , a^π spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur ve $(a^{gD})^\pi = a^\pi$ dir. Ayrıca $ab^2 = b$ ve $b \in comm^2(a)$ olduğundan $b^2a - b = 0$, yani $i(b) \leq 1$ bulunur ve $b = a^{gD} \in R^\#$ olur.

Önerme 4.1.8. $a \in R^{gD}$ olsun. Eğer $x \in U(R) \cap comm(a)$ ise $a + xa^\pi \in U(R)$ ve

$$a^{gD} = (a + xa^\pi)^{-1}(1 - a^\pi) \quad (4.4)$$

sağlanır (Koliha ve Patricio 2002).

İspat: $x \in U(R) \cap comm(a)$ olsun. Bu durumda $x \in U(R)$ ve $aa^\pi \in R^{qnil} \cap comm(a)$ olduğundan Önerme 2.1.32 gereğince $aa^\pi + x \in U(R)$ olur.

$$a + xa^\pi = (a + xa^\pi)a^\pi + (a + xa^\pi)(1 - a^\pi)$$

$$= (aa^\pi + xa^\pi) + a - aa^\pi + xa^\pi - xa^\pi$$

$$= (aa^\pi + x)a^\pi + a(1 - a^\pi)$$

$$= (aa^\pi + x)a^\pi + (a + a^\pi)(1 - a^\pi)$$

böylece $(a + xa^\pi)^{-1} = (aa^\pi + x)^{-1}a^\pi + (a + a^\pi)^{-1}(1 - a^\pi)$ bulunur ve $a + xa^\pi \in U(R)$ olur. (4.3) den $(a + xa^\pi)a^{gD} = aa^{gD} + xa^\pi a^{gD} = 1 - a^\pi$ kolaylıkla elde edilir.

Tanım 4.1.9. R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $a^\pi = b^\pi$ olması için gerek ve yeter şart $aa^{gD} = bb^{gD}$ olmasıdır.

Teorem 4.1.10. R bir halka, $a \in R^{gD}$ ve $b \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \ b \in R^{gD} \text{ ve } a^\pi = b^\pi \text{ sağlanır.}$$

$$(2) \ a^\pi \in comm^2(b), \ ba^\pi \in R^{qnil} \text{ ve } b + a^\pi \in U(R) \text{ sağlanır.}$$

$$(3) \ a^\pi \in comm^2(b), \ ba^\pi \in R^{qnil} \text{ ve } a^{gD}b + a^\pi \in U(R) \text{ sağlanır.}$$

$$(4) \ b \in R^{gD}, \ a^{gD}b + a^\pi \in U(R) \text{ ve } b^{gD} = (a^{gD}b + a^\pi)^{-1}a^{gD} \text{ sağlanır.}$$

(5) $b \in R^{gD}$ ve $b^{gD} - a^{gD} = a^{gD}(a - b)b^{gD}$ sağlanır.

(6) $b \in R^{gD}$, $a^\pi \in comm(b)$ ve $1 - (b^\pi - a^\pi)^2 \in U(R)$ sağlanır.

(7) $b \in R^{gD}$, $b^{gD}R \subseteq a^{gD}R$ ve $r(b^{gD}) \subseteq r(a^{gD})$ sağlanır (Koliha ve Patricio 2002).

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Teorem 4.1.1 den denklik açıktır.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $(a^{gD} + a^\pi)((1 + a^\pi)b + a^\pi) = a^{gD}b + a^\pi$ elde edilir. $a^{gD} + a^\pi \in U(R)$ olduğundan

$$(b + a^\pi) - a^\pi b \in U(R) \Leftrightarrow a^{gD}b + a^\pi \in U(R) \quad (4.5)$$

dir. $a^\pi b(a^{gD}b + a^\pi) = a^\pi b a^{gD}b + a^\pi b a^\pi = b a^\pi a^{gD}b + a^\pi b = a^\pi b$ ve

$(a^{gD}b + a^\pi)a^\pi b = a^{gD}b a^\pi b + a^\pi b = a^{gD}a^\pi b^2 + a^\pi b = a^\pi b$ sağlanır yani $(a^{gD}b + a^\pi) \in comm(a^\pi b)$ olur. $a^\pi b \in R^{qnil}$ olduğundan $1 + (a^{gD}b + a^\pi)a^\pi b = 1 + a^\pi b \in U(R)$

olur. Ayrıca $b + a^\pi \in comm(a^\pi b)$ olduğu kolayca görülebilir ve buradan da $1 + (b + a^\pi)a^\pi b \in U(R)$ sağlanır. (2) şartı sağlansın. Bu durumda $(b + a^\pi)^{-1} \in comm(a^\pi)$

olacağından $1 + (b + a^\pi)^{-1}a^\pi b \in U(R)$ olur ve (4.5) den $a^{gD}b + a^\pi \in U(R)$ elde edilir. Karşıt olarak (3) şartı sağlansın (4.5) den $(b + a^\pi) - a^\pi b \in U(R)$ olacağından $((b + a^\pi) - a^\pi b)(1 + a^\pi b) = b + a^\pi \in U(R)$ bulunur ve denklik ispatlanır.

(3) $\Rightarrow$ (4) (1) ve (3) denk olduğundan $a^\pi = b^\pi$ olur. Bu durumda $(a^{gD}b + a^\pi)b^{gD} = a^{gD}bb^{gD} + a^\pi b^{gD} = a^{gD}(1 - a^\pi) + b^\pi b^{gD} = a^{gD}$ sağlanır ve $b^{gD} = (a^{gD}b + a^\pi)^{-1}a^{gD}$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (5) Eğer $b^{gD} = (a^{gD}b + a^\pi)^{-1}a^{gD}$ ise $a^{gD} = (a^{gD}b + a^\pi)b^{gD}$ olur ve $b^{gD} - a^{gD} = (1 - a^{gD}b - a^\pi)b^{gD} = (a^{gD}a - a^{gD}b)b^{gD} = a^{gD}(a - b)b^{gD}$ elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (1) $b^{gD} - a^{gD} = a^{gD}(a - b)b^{gD}$ olduğundan $b^{gD} = a^{gD}(b^\pi + ab^{gD})$ sağlanır. Bu eşitlik sağdan $b^{gD}b^2$ ile çarpılır ise $bb^{gD} = a^{gD}ab^{gD}b$ elde edilir. $aa^{gD} = 1 - a^\pi$ ve $bb^{gD} = 1 - b^\pi$ olduğundan $a^\pi = a^\pi b^\pi$ bulunur. Benzer şekilde $a^{gD} = (a^\pi + a^{gD}b)b^{gD}$ eşitliği soldan a^2a^{gD} ile çarpılır ise $aa^{gD} = aa^{gD}bb^{gD}$ bulunur ve $b^\pi = a^\pi b^\pi$ elde edilir. Böylece $a^\pi = b^\pi$ sağlanır.

(1) $\Rightarrow$ (6) Açıktır.

(6) $\Rightarrow$ (1) $b^\pi \in comm^2(b)$ ve $a^\pi \in comm(b)$ olduğundan $b^\pi a^\pi = a^\pi b^\pi$ sağlanır. Bu durumda $1 - (b^\pi - a^\pi)^2 = (1 - a^\pi + b^\pi)(1 - b^\pi + a^\pi) \in U(R)$ olduğundan $(1 - a^\pi + b^\pi) \in U(R)$ ve $(1 - b^\pi + a^\pi) \in U(R)$ olur. Ayrıca $a^\pi(1 - a^\pi + b^\pi) = a^\pi b^\pi = b^\pi(1 - b^\pi + a^\pi)$

dır. Böylece

$$a^\pi = (1 - a^\pi + b^\pi)^{-1} a^\pi b^\pi = (1 - a^\pi + b^\pi)^{-1} (1 - a^\pi + b^\pi) a^\pi b^\pi = a^\pi b^\pi,$$

$$b^\pi = (1 - b^\pi + a^\pi)^{-1} b^\pi a^\pi = (1 - b^\pi + a^\pi)^{-1} (1 - b^\pi + a^\pi) b^\pi a^\pi = a^\pi b^\pi \text{ elde edilir.}$$

(7) $\Rightarrow$ (1) a^{gD}, b^{gD} düzenli elemanlardır. Önerme 2.1.15 den,

$$r(Rb^{gD}) = r(b^{gD}) \subseteq r(a^{gD}) = r(Ra^{gD})$$

ve

$$Rb^{gD} = l_R(r_R(Rb^{gD})) \supseteq l_R(r_R(Ra^{gD})) = Ra^{gD}$$

elde edilir. $Ra^{gD} \subseteq Rb^{gD}, b^{gD} \subseteq a^{gD}R$ ve $a^{gD}R = aa^{gD}R, Rb^{gD} = Rbb^{gD}$ olduğundan

$$a^{gD} = ybb^{gD} \text{ ve } aa^{gD}x = b^{gD} \quad (4.6)$$

olacak şekilde $x, y \in R$ mevcuttur. (4.6) dan $a^{gD}aa^{gD}x = a^{gD}b^{gD}$ elde edilir. $a^{gD} \in \text{comm}(a)$ ve $a(a^{gD})^2 = a^{gD}$ olduğundan $a^{gD}x = a^{gD}b^{gD}$ sağlanır. Benzer şekilde (4.6) dan $a^{gD}b^{gD} = ybb^{gD}b^{gD}$ elde edilir. $b(b^{gD})^2 = b^{gD}$ olduğundan $a^{gD}b^{gD} = yb^{gD}$ bulunur. Bulunan eşitlikler (4.6) da yerine yazılırsa $a^{gD} = a^{gD}bb^{gD}$ ve $b^{gD} = aa^{gD}b^{gD}$ bulunur. Bu durumda $aa^{gD} = aa^{gD}bb^{gD}$ ve $bb^{gD} = aa^{gD}bb^{gD}$ sağlanır. Sonuç olarak $aa^{gD} = bb^{gD}$ olup istenilen elde edilir.

(1) $\Rightarrow$ (7) $aa^{gD} = bb^{gD}$ olduğundan $b^{gD}R = bb^{gD}R = aa^{gD}R = a^{gD}R$ ve benzer şekilde $Rb^{gD} = Ra^{gD}$ sağlanır. Buradan $r(Rb^{gD}) = r(Ra^{gD})$ olduğu açıktır. Sonuç olarak Önerme 2.1.15 den $r(a^{gD}) = r(b^{gD})$ elde edilir.

Uyarı 4.1.11. Teorem 4.1.10 daki $1 - (b^\pi - a^\pi)^2 \in U(R)$ olması için gerek ve yeter şart $1 - a^\pi + b^\pi \in U(R)$ ve $1 - b^\pi + a^\pi \in U(R)$ olmasıdır. Fakat Örnek 4.1.12 de görüldüğü gibi sadece $1 - a^\pi + b^\pi \in U(R)$ ya da sadece $1 - b^\pi + a^\pi \in U(R)$ olması yeterli değildir.

Örnek 4.1.12. $R = M_3(\mathbb{R})$ ve $a, b \in R$ olmak üzere,

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olsun. Bu durumda } a^{gD} = a \text{ ve } b^{gD} = b \text{ olup}$$

$$a^\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } b^\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

$ba^\pi = a^\pi b$ ve $1 - a^\pi + b^\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in U(R)$ olmasına rağmen $a^\pi \neq b^\pi$ dir. Yani $1 - (b^\pi - a^\pi)^2 \notin U(R)$ bulunur.

Lemma 4.1.13. R bir halka olsun. $a \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) a yarı kutupludur.
- (2) $p \in comm^2(a)$, $1 - p \in aRa$ ve $ap \in R^{qnil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ vardır.
- (3) $p \in comm^2(a)$, $ap \in R^{qnil}$ ve her $x \in U(R) \cap comm(a)$ için $xa + p \in U(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ vardır (Cui ve Chen 2012a).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) a nın spektral eşkare elemanı $p \in R$ olsun. Bu durumda $p^2 = p \in comm^2(a)$, $a + p \in U(R)$ ve $ap \in R^{qnil}$ sağlanır. Böylece her $x \in U(R) \cap comm(a)$ için $xp = px$ dir. $ap \in R^{qnil}$ olduğundan $1 + xap \in U(R)$ ve buradan $x^{-1} + ap \in U(R)$ olur. $y = (ap + x^{-1})^{-1}x^{-1}p + (a + p)^{-1}x^{-1}(1 - p)$ olsun.

$$\begin{aligned}
(xa + p)y &= y(xa + p) \\
&= (ap + x^{-1})^{-1}ap + (ap + x^{-1})^{-1}x^{-1}p + (a + p)^{-1}a(1 - p) \\
&= (ap + x^{-1})^{-1}(ap + x^{-1})p + (a + p)^{-1}(a + p)(1 - p) \\
&= p + (1 - p) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup $xa + p \in U(R)$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (2) $x = 1$ alalım ve $a + p = u \in U(R)$ olsun. Bu durumda $au^{-1} + pu^{-1} = 1$ sağlanır. $up = pu$ olduğundan $au^{-1}(1 - p) = 1 - p$ elde edilir. Benzer şekilde $u^{-1}(a + p) = 1$ olduğundan $(1 - p)u^{-1}a = 1 - p$ elde edilir. Sonuç olarak $1 - p = (1 - p)^2 = au^{-1}(1 - p)u^{-1}a \in aRa$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $1 - p = ara \in aRa$ olsun. $ap = pa$ ve $ap \in R^{qnil}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(a + p)(arara + p) &= (a + p)[(1 - p)ra + p] \\
&= 1 - p + p + ap \\
&= 1 + ap \in U(R)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(arara + p)(a + p) = 1 + ap \in U(R)$ olur. Böylece $a + p \in U(R)$ bulunur.

Lemma 4.1.14. R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ yarı kutuplu ise o zaman her $x \in U(R) \cap C(R)$ için xa yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012a).

İspat: a nın spektral eşkare elemanı $p \in R$ olsun. Bu durumda her $x \in U(R) \cap C(R)$ için Önerme 4.1.13 gereğince $xa + p \in U(R)$ olur. $z \in comm(xa)$ alalım. $x \in U(R) \cap C(R)$ olduğundan $z \in comm(a)$ olur. $p \in comm^2(a)$ olduğundan $zp = pz$ dir. Böylece $p \in comm^2(xa)$ olur. Ayrıca her $w \in comm(xap)$ için $wx \in comm(ap)$ sağlanır. $ap \in R^{qnil}$ olduğundan $1 + w(xap) \in U(R)$ ve buradan $(xa)p \in R^{qnil}$ elde edilir. Sonuç olarak xa elemanı p spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

Sonuç 4.1.15. R bir halka ve $a \in R$ olsun. a nın yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $-a$ nın yarı kutuplu olmasıdır.

İspat: Lemma 4.1.14 de $x = -1$ için ispat açıktır.

4.2 Yarı Kutuplu Halkalar

Tanım 4.2.1. R bir halka olsun. Eğer R nin tüm elemanları yarı kutuplu ise R ye *yarı kutuplu halka* (*quasipolar ring*) denir.

Teorem 4.2.2. Eğer R abel yakın düzenli halka ise o zaman R yarı kutupludur. Karşıtı her zaman doğru değildir. R değişmeli yarı kutuplu halka ise R yakın düzenlidir (Ying ve Chen 2012).

İspat: R abel yakın düzenli halka olsun. Bu durumda her $a \in R$ için $a - aba \in J(R)$ olacak şekilde $b \in R$ mevcuttur. Eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseldiğinden $e - ba \in J(R)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Bu durumda $u = 1 - e + ba \in U(R)$ sağlanır. $r \in R$ için $\bar{r} = r + J(R)$ olduğundan $\bar{u} = \bar{1}$ olur. Böylece $\bar{a}(\bar{1} - \bar{e}) = \bar{a}(\bar{1} - \bar{b}\bar{a}) = \bar{a} - \bar{a}\bar{b}\bar{a} = \bar{0}$ olup $a(1 - e) \in J(R) \subseteq R^{qnil}$ elde edilir. Ayrıca $ue = bae$ ve R abel olduğundan $e = u^{-1}ba = eu^{-1}ba$ olur. $r = eu^{-1}b$ olsun. Bu durumda $e = ra$, $r = er$ ve $ra = rara$ olduğundan $ra = era = r(ar)a = ra(ar) = (ra)ar = a(ra)r = ar$ bulunur. Böylece $a(1 - e) \in J(R)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (a + (1 - e))(r + (1 - e)) &= (r + (1 - e))(a + (1 - e)) \\ &= ra + r(1 - e) + (1 - e)a + (1 - e) \end{aligned}$$

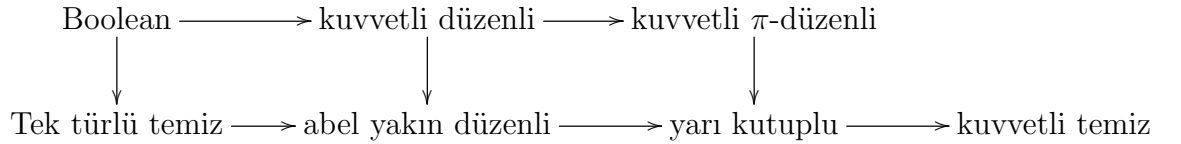
$$\begin{aligned}
&= ra + r - re + a - ea + 1 - e \\
&= 1 + a(1 - e) \in U(R)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak R abel olduğundan $1 - e \in comm^2(a)$ olduğu açıktır. Sonuç olarak a elemanı $1 - e$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

Karşıt olarak R değişmeli yarı kutuplu halka olsun. Bu durumda R temiz halka olduğundan eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. Her $a \in R$ için $a + p = u \in U(R)$ ve $ap \in R^{qnil} = J(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ mevcuttur. Bu durumda $p = u^{-1}pu = u^{-1}p(p + a) = u^{-1}p(1 + a) = (1 - u^{-1}a)(1 + a)$ ve böylece $a - a(u^{-1} + u^{-1}a - 1)a = ap \in J(R)$ bulunur. Buradan $\bar{a} \in R/J(R)$ düzenli olup R yakın düzenlidir.

Uyarı 4.2.3. $\prod_i R_i$ halkasının yarı kutuplu, abel yakın düzenli ve kuvvetli π -düzenli olması için gerek ve yeter şart her R_i halkasının yarı kutuplu, abel yakın düzenli ve kuvvetli π -düzenli olmasıdır.

Uyarı 4.2.4.



Örnek 4.2.5.

- (1) $R_1 = \mathbb{Z}_{(2)}$ ve S sonlu bir halka, $n > 1$ olmak üzere $R_2 = M_n(S)$ olsun. Bu durumda $R_1 \oplus R_2$ yarı kutupludur fakat abel yakın düzenli ve kuvvetli π -düzenli değildir.
- (2) $\mathbb{F}$ ikiden fazla elemanı olan bir cisim olsun. Bu durumda $R_1 \oplus \mathbb{F}$ abel yakın düzenlidir fakat kuvvetli π -düzenli ve tek türlü temiz halka değildir (Ying ve Chen 2012).

İspat:

- (1) $R_1/J(R_1) \cong \mathbb{Z}_{(2)}$ olduğundan R_1 tek türlü temiz halkadır. Fakat Örnek 4.2.16 gereğince R_1 yarı kutupludur ama kuvvetli π -düzenli değildir. R_2 halkası sonlu olduğundan kuvvetli π -düzenlidir fakat abel yakın düzenli değildir. Uyarı 4.2.3

gereğince $R_1 \oplus R_2$ yarı kutupludur fakat abel yakın düzenli ve kuvvetli π -düzenli değildir.

- (2) $\mathbb{F}$ cisim olduğundan $a \in \mathbb{F}$ için $a, a-1 \in U(\mathbb{F})$ ve 0, 1 eşkare elemanlar olmak üzere $a = a + 0$ ve $a = (a-1) + 1$ şeklinde yazılabildiğinden $\mathbb{F}$ tek türlü temiz halka değildir. Ayrıca R_1 kuvvetli π -düzenli olmadığından Uyarı 4.2.3 gereğince $R_1 \oplus \mathbb{F}$ halkası tek türlü temiz ve kuvvetli π -düzenli halka değildir. Fakat $\mathbb{F}$ ve R_1 yakın düzenli olduğundan $R_1 \oplus \mathbb{F}$ halkası da yakın düzenlidir.

Lemma 4.2.6. R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $(eRe)^{qnil} = (eRe) \cap R^{qnil} \subseteq eR^{qnil}e$ sağlanır. Ayrıca eğer her $r \in R^{qnil}$ için $er = re$ ise o zaman $(eRe)^{qnil} = (eRe) \cap R^{qnil} = eR^{qnil}e$ dir (Ying ve Chen 2012).

İspat: Aşağıdaki ifadeleri ispatlamak yeterli olur.

- (i) Eğer $a \in (eRe)^{qnil}$ ise $a \in R^{qnil}$ sağlanır.
- (ii) Eğer $a \in (eRe) \cap R^{qnil}$ ise $a \in (eRe)^{qnil}$ sağlanır.
- (iii) Eğer $a \in (eRe) \cap R^{qnil}$ ise $a \in eR^{qnil}e$ sağlanır.
- (iv) Eğer her $r \in R^{qnil}$ için $er = re$ ve $a \in eR^{qnil}e$ ise $a \in (eRe)^{qnil}$ sağlanır.

İspat: (i) Her $x \in comm(a)$ olsun. Bu durumda $exea = exa = eax = ax$ ve $axe = axe = xae = xa$ sağlanır. $a \in (eRe)^{qnil}$ olduğundan $e - exea \in U(eRe)$ dir. Buradan $b(e - exea) = e = (e - exea)b$ olacak şekilde $b \in R$ mevcut olup $b(1 - xa) = e = (1 - xa)b$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
 (1 + xab)(1 - xa) &= 1 - xa + xab - xabxa \\
 &= 1 - xa + xa(b - bxa) \\
 &= 1 - xa + xae \\
 &= 1 \\
 &= (1 - xa)(1 + xab)
 \end{aligned}$$

olup $1 - xa \in U(R)$ elde edilir ve $a \in R^{qnil}$ olur.

- (ii) $a \in R^{qnil}$ olduğundan her $x \in comm(a)$ için $c(1 - xa) = 1 = (1 - xa)c$ olacak şekilde $c \in R$ mevcuttur. Böylece $(e - xa)ece = e(1 - xa)ce = e = ec(1 - xa)e =$

$ece(e - xa)$ olup $e - xa \in U(eRe)$ elde edilir.

(iii) $a \in (eRe) \cap R^{qnil}$ olsun. Bu durumda $a = eae \in eR^{qnil}e$ sağlanır.

(iv) $d \in R^{qnil}$ olmak üzere $a = ede$ olsun. Hipotezden $ed = de$ sağlanır. Ayrıca $x \in eRe$ olmak üzere $x \in comm(a)$ için $xd = xed = xede = xa = ax = edex = dex = dx$ elde edilir. $d \in R^{qnil}$ olduğundan $c(1 - xd) = 1 = (1 - xd)c$ olacak şekilde $c \in R$ mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} ece(e - xa) &= ece(e - xede) \\ &= ece(e - xd) \\ &= ec(e - xd) \\ &= ec(1 - xd)e \\ &= e \\ &= (e - xa)ece \end{aligned}$$

olup $e - xa \in U(eRe)$ elde edilir ve $a \in (eRe)^{qnil}$ sağlanır.

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi Lemma 4.2.6 daki her $r \in R^{qnil}$ için $er = re$ olma şartı kaldırılamaz.

Örnek 4.2.7. $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$ ve $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $eR^{qnil}e \not\subseteq (eRe)^{qnil}$ dır (Ying ve Chen 2012).

İspat:

$$\begin{aligned} R^{qnil} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \\ eRe &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ ve } (eRe)^{qnil} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ elde edilir. Böylece} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\in eR^{qnil}e \text{ olup } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin (eRe)^{qnil} \text{ olduğundan } eR^{qnil}e \not\subseteq (eRe)^{qnil} \text{ bu-} \\ &\text{lunur.} \end{aligned}$$

Önerme 4.2.8. R bir halka olsun. Eğer R yarı kutuplu ise o zaman her $e^2 = e \in R$ için eRe halkası da yarı kutupludur (Ying ve Chen 2012).

İspat: R yarı kutuplu olsun. Bu durumda her $a \in eRe$ için $a + p = u \in U(R)$, $ap \in R^{qnil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ mevcuttur. $e \in comm(a)$ olduğundan

$ep = pe$ sağlanır. Böylece $(epe)^2 = epeepe = epepe = epe$ ve $eu = e(a + p) = (a + p)e = ue$ elde edilir. Buradan $a + epe = e(a + p)e = eue \in U(eRe)$ bulunur. $x \in eRe$ olmak üzere $x \in comm(a)$ olsun. Bu durumda $p \in comm^2(a)$ olduğundan $xep = xp = px = epex$ olup $epe \in comm^2(a)$ dır. Son olarak $aepe = ap \in eRe \cap R^{qnil}$ olup Lemma 4.2.6 gereğince $a(epe) \in (eRe)^{qnil}$ bulunur ve eRe halkası yarı kutuplu olur.

Teorem 4.2.9. R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ kuvvetli π -düzenli ise o zaman a yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012a).

İspat: a kuvvetli π -düzenli olsun. Teorem 3.1.28 gereğince $a = p + u$, $pu = up$ ve $(ap)^n = 0$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$, $u \in U(R)$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda $-a + p = -u \in U(R)$ ve $-ap \in R^{nil} \subseteq R^{qnil}$ olduğundan $-a$ yarı kutupludur. Sonuç 4.1.15 gereğince a yarı kutuplu olur.

Sonuç 4.2.10. Her kuvvetli π -düzenli halka yarı kutupludur (Ying ve Chen 2012).

Teorem 4.2.11. R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ yarı kutuplu ise o zaman a kuvvetli temizdir (Cui ve Chen 2012a).

İspat: a yarı kutuplu olsun. Sonuç 4.1.15 gereğince $-a$ yarı kutuplu olur. Bu durumda $-a + p = u \in U(R)$, $-ap \in R^{qnil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(-a)$ mevcuttur. Buradan $a = p + (-u)$ ve $up = pu$ olduğundan a kuvvetli temiz olur.

Sonuç 4.2.12. Her yarı kutuplu halka kuvvetli temizdir.

Önerme 4.2.13. Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R yarı kutupludur ve eşkare elemanları sadece 0 ve 1 dir.
- (2) R yerel halkadır.
- (3) R kuvvetli temizdir ve eşkare elemanları sadece 0 ve 1 dir (Cui ve Chen 2012a).

İspat: (2) $\Rightarrow$ (1) R bir yerel halka olsun. Bu durumda $a \in R$ için $a \in U(R)$ ya da $a \in J(R)$ dir. $a \in U(R)$ olsun. Bu durumda $p = 0$ spektral eşkare elemanı ile a yarı

kutuplu olur. $a \in J(R)$ olursa $p = 1$ spektral eşkare elemanıyla yarı kutuplu olur ve ispat tamamlanır.

(1) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (2) Eşkare elemanların sadece 0 ve 1 olduğu halkalarda kuvvetli temiz ve temiz olma özellikleri denktir. $a \in R$, $e \in \{0, 1\}$ için $a = e + u$ ve $u \in U(R)$ olsun. Eğer $a \notin U(R)$ ise $e = 1$ olur ve buradan $1 - a \in U(R)$ bulunur. Böylece R yerel halkadır.

Önerme 4.2.14. R bir yarı kutuplu halka ve $R^{qnil} = J(R)$ olsun. Bu durumda R nin kuvvetli π -düzenli olması için gerek ve yeter şart $R^{qnil} = R^{nil}$ olmasıdır (Cui ve Chen 2012a).

İspat: R kuvvetli π -düzenli olsun. Bu durumda her $a \in J(R)$ için $a^m = a^{m+1}b$ olacak şekilde m pozitif tamsayısı ve $b \in R$ mevcuttur. $a^m(1 - ab) = 0$ ve $1 - ab \in U(R)$ olduğundan $a^m = 0$ olur. Böylece $J(R) = R^{qnil} \subseteq R^{nil}$ sağlanır. Her zaman $R^{nil} \subseteq R^{qnil}$ olduğundan $R^{nil} = R^{qnil}$ elde edilir. Karşıt olarak $R^{nil} = R^{qnil}$ olsun. $r \in R$ ve $-r$ nin spektral eşkare elemanı olarak $p \in R$ alınsın. Bu durumda $-r + p = u \in U(R)$ ve $rp \in R^{qnil} = J(R)$ sağlanır. $v = -u$ ve $1 - p = e$ alınırsa $r = p + v$ ve $J(R)$ nil olduğundan bazı n pozitif tamsayıları için $r^n p = 0$ elde edilir. Buradan $r^n = r^n(1 - p) = (p + v)^n(1 - p) = v^n e = ev^n$ olacak şekilde $v^n \in U(R)$ ve $e^2 = e \in R$ vardır. Önerme 3.1.29 gereğince r kuvvetli π -düzenlidir.

Halkalar değişmeli olsa bile yarı kutuplu halkalar kuvvetli π -düzenli ve kuvvetli temiz halkalardan farklıdır.

Örnek 4.2.15. S bir halka olmak üzere,

$S[\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{(2)}] = \{(q_1, \dots, q_n, a, a, \dots) : n \geq 1, q_i \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Z}_{(2)}\}$ halkası kuvvetli temizdir fakat yarı kutuplu değildir (Ying ve Chen 2012).

İspat: $R = S[\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{(2)}]$ bileşensel toplama ve çarpma işlemleri ile birimli ve değişmeli bir halkadır. Ayrıca $\mathbb{Z}_{(2)}$ nin yerel halka olduğu açıktır. $x = (q_1, \dots, q_n, a, a, \dots) \in R$ alınsın. $(e_1, \dots, e_n, e, e, \dots)^2 = (e_1, \dots, e_n, e, e, \dots)$ ve $(u_1, \dots, u_n, u, u, \dots) \in U(R)$ olacak şekilde $x = (e_1, \dots, e_n, e, e, \dots) + (u_1, \dots, u_n, u, u, \dots)$ şeklinde yazılabildiği gösterilecektir.

$a \in U(\mathbb{Z}_{(2)})$ ve $q_i \neq 0$ olsun. Bu durumda $e_i = 0$, $u_i = q_i$, $e = 0$ ve $u = a$ alınırsa x kuvvetli temiz olur.

$a \in U(\mathbb{Z}_{(2)})$ ve $q_i = 0$ olsun. Bu durumda $e_i = 1$, $u_i = -1$, $e = 0$ ve $u = a$ alınırsa x kuvvetli temiz olur.

$a \notin U(\mathbb{Z}_{(2)})$ ve $q_i \neq 0$ olsun. Bu durumda $e_i = 0$, $u_i = q_i$, $e = 1$ ve $u = a - 1$ alınırsa x kuvvetli temiz olur.

$a \notin U(\mathbb{Z}_{(2)})$ ve $q_i = 0$ olsun. Bu durumda $e_i = 1$, $u_i = -1$, $e = 1$ ve $u = a - 1$ alınırsa x kuvvetli temiz olur. Böylece R kuvvetli temizdir.

R yarı kutuplu olsun. $J(R) = R^{qnil}$ ve R değişmeli olduğundan $R^{nil} = R^{qnil} = 0$ bulunur ve Önerme 4.2.14 gereğince R kuvvetli π -düzenli olur. Fakat $(2, 2, \dots) \in R$ nin kuvvetli π -düzenli olmamasıyla çelişir. Dolayısıyla R yarı kutuplu değildir.

Örnek 4.2.16. $\mathbb{Z}_{(p)}$ lokalizasyon halkası yarı kutupludur fakat kuvvetli π -düzenli değildir (Cui ve Chen 2012a).

İspat: $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ yerel halka olduğundan Önerme 4.2.13 gereğince yarı kutupludur. $J(R) = R^{qnil}$ fakat $R^{nil} \neq R^{qnil}$ olduğundan Önerme 4.2.14 gereğince kuvvetli π -düzenli değildir.

Tanım 4.2.17. R bir halka ve ${}_R V_R$ $R - R$ ikili modül olsun. R nin V ile olan *ideal-genişlemesi* (*ideal-extension*) $I(R; V)$ ile gösterilir. $I(R; V) = R \oplus V$ kümesi bileşensel toplama işlemi ile abel gruptur ve $(r, v)(s, w) = (rs, rw + vs + vw)$ şeklinde tanımlı çarpma işlemi ile birimi $(1, 0)$ olan bir halkadır (Cui ve Chen 2012a).

Uyarı 4.2.18. Bir R halkasının $I(R; V)$ ideal genişlemesi verilsin. Buradan $(R, 0) = \{(r, 0) : r \in R\}$ ve $(0, V) = \{(0, v) : v \in V\}$ dir. Bu durumda $(R, 0)$ kümesi R nin bir alt halkasıdır ve $(R, 0) \cong R$ dir. Ayrıca $(0, V)$ kümesi $I(R; V)$ nin bir ideali olup $(0, V) \cong V$ ve $I(R; V)/(0, V) \cong R$ dir.

Uyarı 4.2.19. $S = I(R; V)$ için aşağıdakiler denktir.

- (1) $(0, V) \subseteq J(S)$ dir.
- (2) Eğer $u \in U(R)$ ve $v \in V$ ise $(u, v) \in U(S)$ dir.

(3) Eğer $v \in V$ ise $v + w + vw = 0$ olacak şekilde $w \in V$ mevcuttur.

Lemma 4.2.20. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $S = I(R; V)$ ideal genişlemesi yarı kutupludur.

(1) R yarı kutupludur.

(2) Eğer $e^2 = e \in R$ ise o zaman her $v \in V$ için $ev = ve$ sağlanır.

(3) Eğer $v \in V$ ise o zaman bazı $w \in V$ için $v + w + vw = 0$ sağlanır.

Ayrıca S abel yarı kutuplu ve V sıfırdan farklı eşkare eleman içermiyor ise yukarıdaki şartlar sağlanır (Cui ve Chen 2012a).

İspat: $s = (r, v) \in S$ olsun. Eğer $r \in U(R)$ ise $s = (r, 0)(1, r^{-1}v)$ ve $(0, V) \subseteq J(S)$ olduğundan $(1, r^{-1}v) = (1, 0) + (0, r^{-1}v) \in U(S)$ olup $s \in U(S)$ dir. (1) den r yarı kutuplu olduğundan $e^2 = e \in comm^2(r)$, $r + e \in U(R)$ ve $er \in R^{qnil}$ olacak şekilde spektral eşkare elemanı mevcuttur. $p = (e, 0)$ olsun. Bu durumda $p^2 = p \in S$ ve $r + e \in U(R)$ olduğundan $p + s = (e + r, v) \in U(S)$ elde edilir. Eğer $s' = (r', v') \in comm(s)$ ise $r' \in comm(r)$ dir. $e \in comm^2(r)$ olduğundan $er' = r'e$ ve (2) den $ps' = (er', ev') = (r'e, v'e) = s'p$ sağlanır. Böylece $p \in comm^2(s)$ elde edilir. Son olarak her $t = (a, w) \in comm(ps)$ için $a \in comm(er)$ olur. $er \in R^{qnil}$ olduğundan $1 + (er)a \in U(R)$ dir. Böylece $(1, 0) + (ps)t \in U(S)$ olduğundan $ps \in S^{qnil}$ bulunur ve S halkası yarı kutuplu olur.

Karşıt olarak S abel yarı kutuplu halka olsun ve V sıfırdan farklı eşkare eleman içermesin. Eğer $e^2 = e \in R$ ise $(e, 0) \in S$ de eşkare eleman olur. S abel olduğundan her $v \in V$ için $(e, 0)(0, v) = (0, v)(e, 0)$ olur ve (2) sağlanır.

(1) ve (3) ün sağlandığını göstermek için ilk iddia $(e, x)^2 = (e, x)$ ise $e^2 = e$ ve $x = 0$ olduğudur. $(e, x)^2 = (e, x)$ olsun. Bu durumda $e^2 = e$ ve (2) den $x = 2ex + x^2$ olur. Bu eşitlik e ile çarpılırsa $ex + ex^2 = 0$ ve x ile çarpılırsa $x^2 = 2ex^2 + x^3$ elde edilir. Bu üç eşitlikten $x = x^3$ olup $x^2 \in V$ eşkare eleman olur. Hipotezden $x^2 = 0$ dir. Böylece $x = 2ex$ yani $(1 - 2e)x = 0$ bulunur. $1 - 2e \in U(R)$ olduğundan $x = 0$ olur ve iddia ispatlanır.

$a \in R$ olsun. Bu durumda $k = (a, 0) \in S$ olur. $e^2 = e$ olmak üzere $p^2 = p = (e, 0) \in$

S , k nin spektral eşkare elemanı olsun. $k + p = (a + e, 0) \in U(S)$ olduğundan $a + e \in U(R)$ elde edilir. Her $a' \in comm(a)$ için $(a', 0) \in comm(k)$ olur. $p \in comm^2(k)$ olduğundan $p(a', 0) = (a', 0)p$ bulunur ve $ea' = a'e$ sağlandığından $e \in comm^2(a)$ elde edilir. $ae \in R^{qnil}$ olduğunu göstermek için $b \in comm(ae)$ alınırsa $(b, 0) \in comm(kp)$ olur. $kp = (ae, 0) \in S^{qnil}$ olduğundan $1 + (ae)b \in U(R)$ bulunur ve a elemanı e spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

Son olarak (3) ün sağlandığı gösterilsin. $v \in V$, $(0, v) \in S$ olsun. S yarı kutuplu olduğundan $q + (0, v) = (f, v)$ olacak şekilde $q^2 = q = (f, 0) \in S$ spektral eşkare elemanı mevcuttur. Bu durumda $f^2 = f \in U(R)$ olduğundan $f = 1$ ve bazı $w \in V$ için $(1, v)^{-1} = (1, w)$ bulunur. Böylece (3) elde edilir.

Teorem 4.2.21. Bir abel R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R yarı kutupludur.
- (2) Her $n \geq 1$ için $R[x]/(x^n)$ yarı kutupludur.
- (3) Bazı $n \geq 2$ için $R[x]/(x^n)$ yarı kutupludur.
- (4) $R[[x]]$ yarı kutupludur.
- (5) Her $n \geq 1$ için $R_n = \{(a_{ij}) \in T_n(R) | a_{11} = \dots = a_{nn}\}$ yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012a).

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (4) x tarafından üretilen ideal (x) olmak üzere $R[[x]] \cong I(R; (x))$ dir. $I(R; (x))$ yarı kutuplu olsun. $(x) \subseteq J(R[[x]])$ sıfırdan farklı eşkare eleman içermez. Ayrıca $(e, x) \in I(R; (x))$ ise $e^2 = e$ ve $x = 0$ olup R abel olduğundan $I(R; (x))$ abeldir. Bu durumda Önerme 4.2.20 den R yarı kutuplu olur.

Karşıt olarak R yarı kutuplu olsun. Bu durumda Önerme 4.2.20 de (1) sağlanır. $(x) \subseteq J(R[[x]])$ olup (3) ve R abel olduğundan (2) sağlanır. Böylece $I(R; (x))$ yarı kutuplu olur.

(1) $\Leftrightarrow$ (5) $V = \{(a_{ij}) \in T_n(R) | a_{11} = \dots = a_{nn} = 0\}$ olsun. Bu durumda $R_n \cong I(R; V)$ olur. R yarı kutuplu olsun. Bu durumda Önerme 4.2.20 de (1) sağlanır. R_n halkasının eşkare elemanları köşegensel matrislerdir. Ayrıca R abel olduğundan $e^2 = e \in R$ ise her $(a_{ij}) \in V$ için $e(a_{ij}) = (a_{ij})e$ olup Önerme 4.2.20 de (2) de

sağlanır. Son olarak $V \subseteq J(R_n) = \{(a_{ij}) \in T_n(R) | a_{11} = \dots = a_{nn} \in J(R)\}$ olduğundan Önerme 4.2.20 de (3) sağlanır ve $I(R; V)$ yarı kutuplu olur.

Karşıt olarak $I(R; V) \cong R_n$ yarı kutuplu olsun. R abel olduğundan $I(R; V)$ abeldir ve V halkasının tüm elemanları üstel sıfır olduğundan sıfırdan farklı eşkare elemanı yoktur. Dolayısıyla Önerme 4.2.20 den R yarı kutuplu olur.

(1) $\Rightarrow$ (2) $n \geq 1$ için $S = R[x]/(x^n)$ ve $e = \sum_{i=0}^{n-1} e_i x^i \in S$ olsun. $\sum_{i=0}^{n-1} e_i x^i$ üstel sıfır olduğundan $e \in U(S)$ olması için gerek ve yeter şart $e_0 \in U(R)$ olmasıdır. R abel olduğundan eğer e eşkare eleman ise $e = e_0$ şeklindedir. $h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j \in S$ olsun.

$b_0 \in R$ nin spektral eşkare elemanı p olsun. $\sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j = xh'(x)$ olsun. Bu durumda $p + h(x) = p + b_0 + xh'(x)$ ve $b_0 + p \in U(R)$ olduğundan $p + h(x) \in U(S)$ olur. Son olarak $y \in comm(h(x)p)$ olsun. Bu durumda $y \in comm(b_0 p)$ olur ve $b_0 p \in R^{qnil}$ olduğundan $1 - yb_0 p \in U(R)$ bulunur. Böylece $1 - yh(x)p \in U(S)$ olup $h(x)p \in R^{qnil}$ elde edilir. Sonuç olarak $h(x)$, p spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) İspat (1) $\Rightarrow$ (2) deki ispata benzer olarak yapılabilir. $a \in R$ olsun. Bu durumda a , $R[x]/(x^n)$ halkasının elemanı olarak görülebilir. Çünkü $f : R \rightarrow R[x]/(x^n)$, $f(a) = a + (x^n)$ ile tanımlı dönüşüm birebir halka homomorfizmasıdır. $R[x]/(x^n)$ yarı kutuplu olduğundan $a + p \in U(R[x]/(x^n))$ ve $ap \in (R[x]/(x^n))^{qnil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ spektral eşkare elemanı vardır. Bu durumda $a + p \in U(R)$ ve $ap \in R^{qnil}$ olup a elemanı p spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

Tanım 4.2.22. R bir halka ve M bir (R, R) ikili modül olmak üzere R nin M ile olan *aşık ar genişlemesi* (*trivial extension*) olan $T(R, M) = R \oplus M$ bileşensel toplama işlemi ve $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir halkadır. Bu halka $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & r \end{bmatrix}$ şeklindeki matrislerden oluşan halkaya izomorftur (Cui ve Chen 2012a).

Uyarı 4.2.23. S sonlu bir halka ve n pozitif bir tamsayı olsun. Sonlu halkalar mükemmel ve mükemmel halkalar kuvvetli π -düzenli olduğundan $R = T_n(S)$ ve $T(R, R)$ halkaları Sonuç 4.2.10 gereğince yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012a).

Örnek 4.2.24. Eğer R abel yarı kutuplu bir halka ise o zaman kuvvet serileri halkası olan $R[[x]]$ yarı kutupludur. Fakat $R[[x]]$ in alt halkası olan $R[x]$ halkası yarı kutuplu değildir (Cui ve Chen 2012a).

İspat: Teorem 4.2.21 den $R[[x]]$ in yarı kutuplu olduğu açıktır. $x \in R[x]$ için x kuvvetli temiz olmadığından $R[x]$ kuvvetli temiz değildir. Dolayısıyla $R[x]$ yarı kutuplu değildir.

4.3 Üstel Yarı Kutuplu Halkalar

Bu bölümde üstel yarı kutuplu halka tanımı verilecek ve $M_2(R)$ nin hangi şartlar altında üstel yarı kutuplu olduğu araştırılacaktır.

Tanım 4.3.1. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a + p \in R^{nil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ varsa a ya *üstel yarı kutuplu (nil quasipolar)* denir. Bu şartları sağlayan p ye a nın *üstel spektral eşkare (nil spectral idempotent) elemanı* denir. Eğer R nin tüm elemanları üstel yarı kutuplu ise R ye *üstel yarı kutuplu halka (nil-quasipolar ring)* denir (Gürgün vd. 2014).

Örnek 4.3.2. R bir halka olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Her $a \in R^{nil}$ üstel yarı kutupludur.
- (2) $a \in R$ nin üstel yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $-1 - a \in R$ nin üstel yarı kutuplu olmasıdır.
- (3) $u \in U(R)$ nin üstel yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $u + 1 \in R^{nil}$ olmasıdır (Gürgün vd. 2014).

İspat:

- (1) Her $a \in R^{nil}$ $p = 0$ üstel spektral eşkare elemanı ile üstel yarı kutupludur.
- (2) $a + p \in R^{nil}$ ve $p^2 = p \in comm^2(a)$ olması için gerek ve yeter şart $(-1 - a) + (1 - p) \in R^{nil}$ ve $(1 - p)^2 = 1 - p \in comm^2(-1 - a)$ olmasıdır.

(3) u üstel yarı kutuplu olsun. Bu durumda $u + p = b \in R^{nil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(u)$ vardır. Bu durumda $p = b - u \in U(R)$ olur. Buradan $p = 1$ elde edilir ve $u + 1 \in R^{nil}$ bulunur. Karşıt olarak $u + 1 \in R^{nil}$ ise u nun üstel yarı kutuplu olduğu açıktır. Ayrıca $u \in -1 + R^{nil} \subseteq U(R)$ dir.

Sonuç 4.3.3. Eğer R üstel yarı kutuplu bir halka ise o zaman 2 üstel sıfırdır ve $2 \in J(R)$ dir (Gürgün vd. 2014).

İspat: $1 \in U(R)$ olduğundan Örnek 4.3.2 den $2 \in R^{nil}$ dir.

Tanım 4.3.4. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a - e \in R^{nil}$ ve $ae = ea$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcut ise a ya *kuvvetli üstel temiz (strongly nil clean) eleman* denir. R nin tüm elemanları kuvvetli üstel temiz ise R ye *kuvvetli üstel temiz (strongly nil-clean) halka* denir (Diesl 2006).

Teorem 4.3.5. R bir halka olsun. R nin üstel yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart kuvvetli üstel temiz olmasıdır (Gürgün vd. 2014).

İspat: R üstel yarı kutuplu olsun. O zaman $a \in R$ için $a + p \in R^{nil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ vardır. Sonuç 4.3.3 den $2 \in R^{nil}$ dir. Bu durumda $a + p - 2p = a - p \in R^{nil}$ dir. Böylece a kuvvetli üstel temiz olup R kuvvetli üstel temizdir. Karşıt olarak R kuvvetli üstel temiz ve $a \in R$ olsun. Bu durumda $a - e \in R^{nil}$ olacak şekilde $e^2 = e \in comm(a)$ mevcuttur. Ayrıca $p^2 = p \in R$ için $2 - p \in R^{nil}$ olup $2 - p - 1 = 1 - p \in U(R)$ olduğundan $p = 0$ dir. Buradan $2 \in R^{nil}$ bulunur. Böylece $a - e + 2e = a + e \in R^{nil}$ olur. $e \in comm^2(a)$ olduğunu göstermek için $x \in comm(a)$ olsun. $a - e = b \in R^{nil}$ olduğundan $(a - e)(1 - e) \in R^{nil}$ dir. O zaman $(a(1 - e))^k = a^k(1 - e) = 0$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. Ayrıca $ae = ea = e(b + 1) = (b + 1)e$ ve böylece $ae(b + 1)^{-1} = (b + 1)^{-1}ea = e$ dir. Buradan $ex - exe = ex(1 - e) = e^k x(1 - e) = (b + 1)^{-k} ea^k x(1 - e) = (b + 1)^{-k} exa^k(1 - e) = 0$ olup $ex = exe$ elde edilir. Benzer şekilde $xe = exe$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak $e \in comm^2(a)$ bulunur.

Teorem 4.3.5 de gösterildiği gibi üstel yarı kutuplu halkalar ile kuvvetli üstel temiz halkalar denktir. Fakat aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi kuvvetli üstel temiz eleman

üstel yarı kutuplu olmak zorunda değildir. Benzer şekilde üstel yarı kutuplu olup kuvvetli üstel temiz olmayan elemanlar da mevcuttur.

Örnek 4.3.6. $R = \mathbb{Z}_3$ olsun. $\bar{2} + \bar{1} = \bar{0} \in R^{nil}$ olup $\bar{2} \in R$ üstel yarı kutupludur. Fakat kuvvetli üstel temiz değildir. Ayrıca $\bar{1} - \bar{1} = \bar{0} \in R^{nil}$ olup $\bar{1} \in R$ kuvvetli üstel temizdir. Fakat üstel yarı kutuplu değildir.

Sonuç 4.3.7. R bir halka ve $2 \in R^{nil}$ olsun. Bu durumda $a \in R$ nin üstel yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart a nın kuvvetli üstel temiz olmasıdır (Gürğün vd. 2014).

İspat: Teorem 4.3.5 den ispat açıktır.

Önerme 4.3.8. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a üstel yarı kutuplu ise o zaman a yarı kutupludur (Gürğün vd. 2014).

İspat: $a \in R$ üstel yarı kutuplu olsun. Bu durumda $a + p = b \in R^{nil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ mevcuttur. $a + (1 - p) = b - 2p + 1$ olup $b \in R^{nil}$ ve $(2p - 1)^2 = 1$ olduğundan $b - 2p + 1 \in U(R)$ dir. Ayrıca $p^2 = p \in comm^2(a)$ olduğundan $(1 - p)^2 = 1 - p \in comm^2(a)$ dir. Son olarak $a(1 - p) = (a + p)(1 - p) = b(1 - p) \in R^{nil} \subseteq R^{qnil}$ dir. Böylece a elemanı $1 - p$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutupludur.

Sonuç 4.3.9. Her üstel yarı kutuplu halka yarı kutupludur (Gürğün vd. 2014).

Önerme 4.3.10. R bir halka olsun. $a \in R$ üstel yarı kutuplu olmak üzere a^N şeklinde tanımlı bir tek üstel spektral eşkare elemana sahiptir (Gürğün vd. 2014).

İspat: a nın üstel spektral eşkare elemanları $p, q \in R$ olsun. O zaman Önerme 4.3.8 den $1 - p$ ve $1 - q$ elemanları a nın spektral eşkareleridir. Önerme 4.1.4 gereğince $1 - p = 1 - q$ olup $p = q$ bulunur.

Önerme 4.3.11. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a üstel yarı kutuplu ise a kuvvetli π -düzenlidir (Gürğün vd. 2014).

İspat: $a \in R$ üstel yarı kutuplu olsun. Bu durumda $a + p = b \in R^{nil}$ olacak şekilde $p^2 = p \in comm^2(a)$ mevcuttur. $a + (1 - p) = b - 2p + 1$ olup $b \in R^{nil}$ ve $(2p - 1)^2 = 1$ olduğundan $b - 2p + 1 \in U(R)$ dir. Ayrıca $p^2 = p \in comm^2(a)$ olduğundan $(1 - p)^2 = 1 - p \in comm^2(a)$ dir. Son olarak $a(1 - p) = (a + p)(1 - p) = b(1 - p) \in R^{nil}$ olup Tanım 3.1.13 den a kuvvetli π -düzenlidir.

Örnek 4.3.12 de görüldüğü gibi Önerme 4.3.11 in karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 4.3.12. $R = \mathbb{Z}_3$ olsun. $\bar{1} + \bar{0} = \bar{1} \in U(R)$ ve $\bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} \in R^{nil}$ olduğundan $\bar{1} \in R$ kuvvetli π -düzenlidir. Fakat üstel yarı kutuplu değildir.

Sonuç 4.3.13. R bir halka olsun. Eğer R üstel yarı kutuplu ise o zaman R kuvvetli π -düzenlidir.

Tanım 4.3.14. $a, b \in R$ için $aR + bR = R$ olsun. Eğer $a + by \in U(R)$ olacak şekilde $x, y \in R$ varsa R halkasına *durgun aralığı bir olan (stable range one) halka* denir.

Örnek 4.3.15. (1) $R = \mathbb{Z}_3$ olsun. R yerel olduğundan yarı kutupludur. Fakat $2 \in U(R)$ olduğundan Sonuç 4.3.3 den R üstel yarı kutuplu değildir.

(2) $R = \mathbb{Z}_{(2)}$ halkası yerel olduğundan yarı kutupludur. Fakat $J(R) = 2R$ olup üstel olmadığından kuvvetli π -düzenli değil, dolayısıyla Sonuç 4.3.13 gereğince üstel yarı kutuplu değildir.

4.3.1 Üstel yarı kutuplu matris halkaları

Önerme 4.3.16. R bir değişmeli yerel halka ve $E \in M_2(R)$ olsun. Bu durumda $E^2 = E$ olması için gerek ve yeter şart $E = 0$ ya da $E = I_2$ ya da $yz = x - x^2$ şartını sağlayan $x, y, z \in R$ için $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 - x \end{bmatrix}$ şeklinde olmasıdır (Cui ve Chen 2011).

İspat: $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $E^2 = E$ olsun. Böylece

$$bc = a - a^2$$

$$b(a + d - 1) = 0$$

$$c(a + d - 1) = 0$$

$$bc = d - d^2$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $a - a^2 = d - d^2$ olup $(a - d)(a + d - 1) = 0$ bulunur.

Son eşitlikte bütün durumlar incelenirse,

1.*Durum:* $a + d - 1 \in U(R)$ olsun. Bu durumda $b = 0$, $c = 0$ ve $a = d$ bulunur.

Buradan $a = a^2$ elde edilir. R yerel halka olduğundan eşkare elemanları 0 ve 1 dir.

Böylece $E = 0$ ya da $E = I$ olarak bulunur.

2.*Durum:* $a + d - 1 \in J(R)$ olsun. Eğer $a - d \in J(R)$ ise $-4bc + 1 = 4(a^2 - a) + 1 = ((a - d) + (a + d - 1))^2 \in J(R)$ olur. Buradan $bc \in U(R)$ dir. Ayrıca $bc(a + d - 1)^2 = 0$

olduğundan $a + d - 1 = 0$ bulunur. Bu durumda $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ şeklindedir ve $bc = a - a^2$ dir. Eğer $a - d \in U(R)$ ise $a + d - 1 = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ olup $bc = a - a^2$ dir.

Tanım 4.3.17. R bir halka ve $A, B \in M_n(R)$ olsun. Eğer bazı $V \in U(M_n(R))$ için $A = V^{-1}BV$ oluyorsa A ile B benzerdir (*similar*) denir ve $A \sim B$ ile gösterilir.

Lemma 4.3.18. R bir halka, $a \in R$ ve $u \in U(R)$ olsun. Bu durumda a nın üstel yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $u^{-1}au$ nın üstel yarı kutuplu olmasıdır (Gürgün vd. 2014).

İspat: Eğer a üstel yarı kutuplu ise o zaman $u^{-1}au$ nın da üstel yarı kutuplu olduğunu göstermek yeterlidir. a üstel yarı kutuplu olsun. O zaman $a + e = b \in R^{nil}$ olacak şekilde $e^2 = 2 \in comm^2(a)$ vardır. $p = u^{-1}eu$ olsun. Bu durumda $p^2 = p \in R$ dir. $b \in R^{nil}$ olduğundan $b^t = 0$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $(u^{-1}bu)^t = u^{-1}b^tu = 0$ olup $(u^{-1}au) + (u^{-1}eu) = u^{-1}bu \in R^{nil}$ dir. $x \in comm(u^{-1}au)$ için $x(u^{-1}au) = (u^{-1}au)x$ ve böylece $(uxu^{-1})a = a(uxu^{-1})$ dir. $e^2 = e \in comm^2(a)$ olduğundan $e(uxu^{-1}) = (uxu^{-1})e$ elde edilir. Böylece $px = xp$ olup $p \in comm^2(a)$ olur. Sonuç olarak $u^{-1}au$ elemanı p üstel spektral eşkare elemanı ile üstel yarı kutuplu bulunur.

Lemma 4.3.19. R bir halka olsun. Bu durumda $A \in U(M_2(R))$ nin üstel yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $A + I_2 \in (M_2(R))^{nil}$ olmasıdır (Gürgün vd. 2014).

İspat: $A \in U(M_2(R))$ ve A üstel yarı kutuplu olsun. Bu durumda $A^N = I_2$ olup $A + I_2 \in (M_2(R))^{nil}$ dir. Karşıt olarak $A + I_2 \in (M_2(R))^{nil}$ olsun. Bu durumda A üstel yarı kutupludur ve $A \in -I_2 + (M_2(R))^{nil} \subseteq U(M_2(R))$ olur.

Önerme 4.3.20. R değişmeli yerel bir halka ve $A \notin (M_2(R))^{nil}$ olacak şekilde $A \in M_2(R)$ olsun. Eğer $\det(A), \operatorname{tr}(A) \in J(R)$ ise o zaman A üstel yarı kutuplu değildir (Gürgün vd. 2014).

İspat: A üstel yarı kutuplu olsun. Bu durumda Örnek 4.3.2(2) gereğince $-A - I_2$ üstel yarı kutupludur. $\det(-A - I_2) = 1 + \det(A) + \operatorname{tr}(A) \in U(R)$ olduğundan Lemma 4.3.19 gereğince $(-A - I_2) + I_2 = -A \in (M_2(R))^{nil}$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

Lemma 4.3.21. R değişmeli yerel bir halka olsun. Bu durumda $A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ nın üstel yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

- (1) $A \in (M_2(R))^{nil}$ dir.
- (2) $A + I_2 \in (M_2(R))^{nil}$ dir.
- (3) $u \in -1 + R^{nil}$ ve $j \in R^{nil}$ dir.
- (4) $j \in -1 + R^{nil}$ ve $u \in R^{nil}$ dir (Gürgün vd. 2014).

İspat: A üstel yarı kutuplu olsun. O zaman $A + E = W \in (M_2(R))^{nil}$ olacak şekilde $E^2 = E \in \operatorname{comm}^2(A)$ vardır. Eğer $E = 0$ ise (1) sağlanır. Eğer $E = I_2$ ise (2) sağlanır. $E \neq 0$ ve $E \neq I_2$ olsun. Bu durumda Önerme 4.3.16 gereğince

$bc = a - a^2$ şartını sağlayan $a, b, c \in R$ için $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ şeklindedir. $F =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{comm}(A)$ olduğundan $EF = FE$ olup $b = c = 0$ bulunur. Buradan

$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ veya $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Eğer $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $A + E = W \in$

$(M_2(R))^{nil}$ olduğundan $u \in -1 + R^{nil}$ ve $j \in R^{nil}$ dir. Eğer $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise

$A + E = W \in (M_2(R))^{nil}$ olduğundan $j \in -1 + R^{nil}$ ve $u \in R^{nil}$ dir. Karşıt

olarak eğer $A \in (M_2(R))^{nil}$ ya da $A + I_2 \in (M_2(R))^{nil}$ ise A üstel yarı kutupludur. $u = -1 + w \in -1 + R^{nil}$ ve $j \in R^{nil}$ ve $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. Bu durumda $E^2 = E$ ve $A + E = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \in (M_2(R))^{nil}$ dir. Eğer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in comm(A)$ ise $b = c = 0$ olup $EB = BE$ elde edilir. Böylece $E \in comm^2(A)$ olup A üstel yarı kutuplu olur. Şimdi $j = -1 + w' \in -1 + R^{nil}$ ve $u \in R^{nil}$ olsun. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ alınsın. Bu durumda $E^2 = E$ ve $A + E = \begin{bmatrix} w' & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \in (M_2(R))^{nil}$ dir. Son olarak $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in comm(A)$ olsun. Bu durumda $b = c = 0$ olup $EB = BE$ elde edilir. Böylece $E \in comm^2(A)$ olup A üstel yarı kutuplu olur.

Önerme 4.3.22. R değişmeli yerel bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (1) $J(R)$ üsteldir.
- (2) R kuvvetli π -düzenlidir.
- (3) Her $n > 1$ için $M_n(R)$ kuvvetli π -düzenlidir (Borooah vd. 2008).

Lemma 4.3.23. R yerel halka ve $A \in M_2(R)$ olsun. Bu durumda A nın aşikar olmayan kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart $j_1, j_2 \in J(R)$ olmak üzere $A \sim \begin{bmatrix} 1 + j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix}$ olmasıdır (Yang ve Zhou 2008).

Tanım 4.3.24. R bir halka ve $A \in M_2(R)$ olsun. Eğer $A \notin U(M_2(R))$ ise A ya *tekil* (*singular*) eleman denir (Chen 2010).

Tanım 4.3.25. R bir halka ve $A \in M_2(R)$ tekil olsun. Bu durumda eğer $I_2 - A \notin U(M_2(R))$ ise A ya *katkısız tekil* (*purely singular*) eleman denir (Chen 2010).

Önerme 4.3.26. R değişmeli yerel bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) $M_2(R)$ nin her katkısız tekil elemanı üstel yarı kutupludur.

(2) $J(R)$ üsteldir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $j \in J(R)$ olsun. Bu durumda $A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ katkısız tekildir. Hipotezden $A + E = W \in (M_2(R))^{nil}$ olacak şekilde $E^2 = E \in comm^2(A)$ vardır. Önerme 4.3.16 gereğince $bc = a - a^2$ şartını sağlayan $a, b, c \in R$ için $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{bmatrix}$ şeklindedir. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in comm(A)$ olduğundan $EF = FE$ olup $b = c = 0$ bulunur. Buradan $E = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 - a \end{bmatrix}$ şeklindedir. Bu durumda $A + E = \begin{bmatrix} j + a & 0 \\ 0 & 2 - a \end{bmatrix} \in (M_2(R))^{nil}$ olduğundan $j + a, 2 - a \in R^{nil}$ dir. Ayrıca $a^2 = a$ olduğundan $a = 0$ ya da $a = 1$ dir. Eğer $a = 1$ ise $1 \in R^{nil}$ olur ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle $a = 0$ dir. Böylece $j \in R^{nil}$ olup $J(R)$ üsteldir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Önerme 4.3.22 gereğince $M_2(R)$ kuvvetli π -düzenlidir. Böylece $M_2(R)$ kuvvetli temizdir. $A \in M_2(R)$ katkısız tekil olsun. Lemma 4.3.23 gereğince $j_1, j_2 \in J(R)$ olmak üzere $A \sim \begin{bmatrix} 1 + j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix}$ dir. Böylece $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $P \in U(M_2(R))$ vardır. Buradan $A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + P \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix} P^{-1}$ elde edilir. $J(R)$ üstel olduğundan $P \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ 0 & j_2 \end{bmatrix} P^{-1} \in (M_2(R))^{nil}$ olur ve A üstel yarı kutuplu olur.

5. MATRİS HALKALARINDA YARI KUTUPLULUK

5.1 $M_2(R)$ Halkasında Yarı Kutupluluk

Önerme 5.1.1. R bir halka, $n \geq 1$ olmak üzere $A \in M_n(R)$ ve $V \in U(M_n(R))$ olsun. Bu durumda A nın yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $V^{-1}AV$ nın yarı kutuplu olmasıdır (Cui ve Chen 2011).

İspat: $T = M_n(R)$ ile gösterilsin. $A \in T$ olmak üzere $E \in T$, A nın spektral eşkare elemanı olsun. $P = V^{-1}EV$ alınırsa $P^2 = P$ sağlanır. $A + E \in U(T)$ olduğundan $V^{-1}AV + P \in U(T)$ olur. $B \in comm(V^{-1}AV)$ alınsın. Buradan $VBV^{-1} \in comm(A)$ elde edilir. $E \in comm^2(A)$ olduğundan

$$E(VBV^{-1}) = (VBV^{-1})E \Leftrightarrow B(V^{-1}EV) = (V^{-1}EV)B \Leftrightarrow BP = PB$$

olur ve böylece $P \in comm^2(V^{-1}AV)$ elde edilir. Ayrıca her $Y \in comm(V^{-1}AVP) = comm(V^{-1}AEV)$ için

$$Y(V^{-1}AEV) = (V^{-1}AEV)Y \Leftrightarrow (VYV^{-1})AE = AE(VYV^{-1})$$

yani $(VYV^{-1}) \in comm(AE)$ olur. $AE \in T^{qnil}$ olduğundan $I_n + AE(VYV^{-1}) \in U(T)$ ve buradan $I_n + V^{-1}AE(VYV^{-1})V = I_n + (V^{-1}AEV)Y = I_n + (V^{-1}AVP)Y \in U(T)$ sağlanır. Böylece $(V^{-1}AV)P \in T^{qnil}$ elde edilir ve $V^{-1}AV \in T$ yarı kutuplu olur.

Uyarı 5.1.2. Önerme 5.1.1 de ispat edildiği gibi E nin, A nın spektral eşkare elemanı olması için gerek ve yeter şart $V^{-1}EV$ nin, $V^{-1}AV$ nın spektral eşkare elemanı olmasıdır (Cui ve Chen 2011).

Lemma 5.1.3. R bir yerel halka olsun. $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olması için gerek ve yeter şart her $u, v \in U(R)$ için $u + v \neq 1$ olmasıdır (Chen vd. 2006).

İspat: $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ve $u + v = 1$ olacak şekilde $u, v \in U(R)$ olsun. Bu durumda $f : R/J(R) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ olacak şekilde bir f izomorfizması mevcuttur. Bu izomorfizma altında her $u \in U(R)$ $f(u) = \bar{1}$ ve her $j \in J(R)$ $f(j) = \bar{0}$ elemanı ile eşleşir. Buradan $u, v \in U(R)$ için $f(u + v) = f(1) = \bar{1} = f(u) + f(v) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ dır. Sonuçta bir

çelişki olduğundan kabul yanlış olup istenilen elde edilir. Karşıt olarak $u \in U(R)$ olsun. Bu durumda $u + (1 - u) = 1$ dir. Hipotezden $1 - u \in J(R)$ olmalıdır. Böylece $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ elde edilir.

Teorem 5.1.4. R değişmeli yerel halka ve $\det(A) \in J(R)$ olacak şekilde $A \in M_2(R)$ olsun. Bu durumda $\text{tr}(A) \in J(R)$ olması için gerek ve yeter şart A nın yarı kutuplu ve spektral eşkare elemanın I_2 olmasıdır (Cui ve Chen 2011).

İspat: $\det(A) \in J(R)$ olacak şekilde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. Örnek 4.1.3 den dolayı $A \notin J(M_2(R))$ alınabilir.

$\text{tr}(A) \in J(R)$ olsun. R yerel olduğundan $a, d \in J(R)$ ya da $ad \in U(R)$ dir. $a, d \in J(R)$ olduğu durumda b, c den biri $J(R)$ de ve $ad \in U(R)$ olduğu durumda $bc \in U(R)$ olur. $a, d \in J(R)$ ve b, c den biri $J(R)$ de olsun. $b \in J(R)$ ve $c \in U(R)$ alınsın. $P = I_2$ alınırsa $\det(A + P) = 1 + \text{tr}(A) + \det(A) \in U(R)$ böylece $A + P \in U(M_2(R))$ olur. $B \in \text{comm}(AP)$ alınsın. Bu durumda $APB = BAP \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ için $x_{11}, x_{12}, x_{22} \in J(R)$ olur. Bu durumda $I_2 + APB \in U(R)$ ve $AP \in (M_2(R))^{qnil}$ elde edilir.

$a, b, c, d \in U(R)$ olsun. $P = I_2$ alınırsa $\det(A) \in J(R)$ olduğundan $\det(A + P) = 1 + \text{tr}(A) + \det(A) \in U(R)$ ve buradan $A + P \in U(M_2(R))$ elde edilir. $Y = (y_{ij}) \in \text{comm}(AP)$ olsun. Bu durumda

$$cy_{12} = by_{21}, b(y_{11} - y_{22}) = y_{12}(a - d), c(y_{11} - y_{22}) = y_{21}(a - d) \quad (5.7)$$

elde edilir. $s = a - d$ alınırsa

1. *Durum:* $2 \in U(R)$ olsun. $\text{tr}(A) \in J(R)$ ve $d \in U(R)$ olduğundan $s = \text{tr}(A) - 2d \in U(R)$ olur. (5.7) den $y_{21} = s^{-1}c(y_{11} - y_{22})$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \det(I_2 + APY) &= 1 + ay_{11} + dy_{22} + by_{21} + cy_{12} + (ay_{11} + by_{21})(cy_{12} + dy_{22}) \\ &\quad - (ay_{12} + by_{22})(cy_{11} + dy_{21}) \\ &= 1 + ay_{11} + dy_{22} + 2by_{21} + \det(A)\det(Y) \\ &= 1 + ay_{11} + dy_{22} + 2b(s^{-1}c(y_{11} - y_{22})) + \det(A)\det(Y) \\ &= 1 + (a + 2bcs^{-1})y_{11} + (d - 2bcs^{-1})y_{22} + \det(A)\det(Y) \\ &= 1 + s^{-1}(a\text{tr}(A) - 2\det(A))y_{11} - s^{-1}(d\text{tr}(A) - 2\det(A))y_{22} + \det(A)\det(Y) \end{aligned}$$

$$= 1 + s^{-1}tr(A)(ay_{11} - dy_{22}) - 2s^{-1}det(A)(y_{11} - y_{22}) + det(A)det(Y)$$

elde edilir. $tr(A), det(A) \in J(R)$ olduğundan $det(I_2 + APY) \in U(R)$ olur. Böylece $AP = A \in (M_2(R))^{qnil}$ olup I_2 matrisi A nın spektral eşkare elemanıdır.

2. *Durum:* $2 \in J(R)$ olsun. Bu durumda $s = tr(A) - 2d \in J(R)$ olur. $b \in U(R)$ olduğundan (5.7) den $y_{11} = y_{22} + b^{-1}y_{12}s$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} det(I_2 + APY) &= 1 + ay_{11} + dy_{22} + 2by_{21} + det(A)det(Y) \\ &= 1 + a(y_{22} + b^{-1}y_{12}s) + dy_{22} + 2by_{21} + det(A)det(Y) \\ &= 1 + tr(A)y_{22} + ab^{-1}y_{12}s + 2by_{21} + det(A)det(Y) \in U(R) \end{aligned}$$

olup $AP \in (M_2(R))^{qnil}$ elde edilir ve sonuç olarak I_2 matrisi A nın spektral eşkare elemanı olur.

Karşıt olarak $P = I_2$, A nın spektral eşkare elemanı olsun. $tr(A) \in U(R)$ alınsın. Bu durumda $Y = \begin{bmatrix} -(tr(A))^{-1} & 0 \\ 0 & -(tr(A))^{-1} \end{bmatrix}$ için $Y \in comm(AP)$ olmasına rağmen $det(I_2 + APY) = (tr(A))^{-2}det(A) \in J(R)$ elde edilir. Bu ise $AP \in (M_2(R))^{qnil}$ olması ile çelişir. Böylece $tr(A) \in J(R)$ bulunur.

Örnek 5.1.5. R değişmeli yerel bir halka ve $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olsun. Bu durumda $det(A) \in J(R)$ ve $det(A - I) \in U(R)$ olacak şekilde her $A \in M_2(R)$ yarı kutupludur (Cui ve Chen 2011).

İspat: $A \in M_2(R)$, $det(A) \in J(R)$ ve $det(A - I) \in U(R)$ olsun. $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan Lemma 5.1.3 den $tr(A) = 1 + det(A) - det(A - I_2) \in J(R)$ olur. Böylece Teorem 5.1.4 gereğince A matrisi I_2 spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

Uyarı 5.1.6. Örnek 5.1.5 deki $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ şartı kaldırılamaz. $R = \mathbb{Z}_{(5)}$ değişmeli yerel halkası için $J(R) = 5R$ dir. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ için $det(A) = 5 \in J(R)$ ve $det(A - I) = 2 \in U(R)$ olmasına rağmen $tr(A) = 4 \in U(R)$ olup Sonuç 5.1.14 ten A yarı kutuplu değildir (Cui ve Chen 2011).

Önerme 5.1.7. R değişmeli yerel bir halka, $A \in M_2(R)$ ve $det(A) \in J(R)$ olsun. A nın karakteristik polinomu olan $x^2 - tr(A)x + det(A)$, R de köke sahip ise A yarı kutupludur. Eğer $tr(A) \in U(R)$ ise ifadenin karşıtı da doğrudur (Cui ve Chen 2011).

İspat: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(R)$ ve $\det(A) \in J(R)$ ve $\lambda_1 \in R$, $x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) = 0$ eşitliğinin bir çözümü olsun. Bu durumda $\lambda_2 = \operatorname{tr}(A) - \lambda_1$ de çözüm olur. $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) \in J(R)$ ve R yerel halka olduğundan λ_1 ve λ_2 den biri $U(R)$ nin elemanı ya da $\lambda_1, \lambda_2 \in J(R)$ dir.

1. *Durum:* $\lambda_1 \in J(R)$, $\lambda_2 \in U(R)$ olsun. Bu durumda $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A) = a + d \in U(R)$ olur. $a \in U(R)$ ve $V = \begin{bmatrix} b & a - \lambda_1 \\ \lambda_1 - a & c \end{bmatrix}$ alalım. $\det(V) = a(\operatorname{tr}(A)) + (\lambda_1^2 - 2a\lambda_1 - \det(A)) \in U(R)$ olduğundan $V \in U(M_2(R))$ dir. Böylece $\lambda_1^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda_1 + \det(A) = 0$ olduğundan $V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ bulunur ve Lemma 5.1.1 gereğince A yarı kutuplu olur.

2. *Durum:* $\lambda_1, \lambda_2 \in J(R)$ olsun. Bu durumda $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A) \in J(R)$ olduğundan Teorem 5.1.4 gereğince A yarı kutupludur.

Karşıt olarak $A \in M_2(R)$ yarı kutuplu ve $\operatorname{tr}(A) \in U(R)$ olsun. Bu durumda Lemma 4.3.16 ve Teorem 5.1.4 gereğince $yz = x - x^2$ olmak üzere $E = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 - x \end{bmatrix} \in M_2(R)$ A nın spektral eşkare elemanıdır. R yerel olduğundan $x \in U(R)$ veya $1 - x \in U(R)$ dir. $V_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$ ve $V_2 = \begin{bmatrix} y & x - 1 \\ 1 - x & z \end{bmatrix}$ olsun. $\det(V_1) = -x$ ve $\det(V_2) = 1 - x$ olduğundan $V_1 \in U(M_2(R))$ veya $V_2 \in U(M_2(R))$ dir. $\det(V) \in U(M_2(R))$ olacak şekilde $i = 1, 2$ için $V = V_i$ ve $B = (b_{ij}) = V^{-1}AV$ alınsın. Bu durumda Önerme 5.1.1 ve Uyarı 5.1.2 gereğince $B, P = V^{-1}EV$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur. Buradan $BP = PB$ olup $b_{12} = b_{21} = 0$ elde edilir. Böylece $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ olduğundan $\operatorname{tr}(B) = b_{11} + b_{22}$ ve $\det(B) = b_{11}b_{22}$ bulunur. Sonuç olarak $x^2 - \operatorname{tr}(B)x + \det(B) = 0$ denkleminin kökleri b_{11} ve b_{22} olur. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ ve $\det(A) = \det(B)$ olduğundan $x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) = 0$ denklemi de R de çözüme sahiptir.

Uyarı 5.1.8.

(1) $R = \mathbb{Z}_{(2)}$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ olsun. $\det(A) = 2 \in J(R)$ ve $\operatorname{tr}(A) = 2 \in J(R)$ dir. Teorem 5.1.4 gereğince A yarı kutuplu olmasına rağmen $x^2 -$

$tr(A)x + det(A)$ polinomu R de bir köke sahip değildir.

- (2) Önerme 5.1.7 nin ispatında görüldüğü gibi $det(A) \in J(R)$ ve $tr(A) \in U(R)$ olması halinde $x^2 - tr(A)x + det(A)$ polinomunun R de köke sahip olması için gerek ve yeter şart A nın köşegenleşebilir olmasıdır (Cui ve Chen 2011).

Teorem 5.1.9. R değişmeli yerel bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $M_2(R)$ yarı kutupludur.
- (2) $det(A) \in J(R)$ olacak şekildeki her $A \in M_2(R)$ için aşağıdakilerden biri sağlanır.
 - (a) $tr(A) \in J(R)$
 - (b) $x^2 - tr(A)x + det(A)$ polinomu R de köke sahiptir.
- (3) $det(A) \in J(R)$ olacak şekildeki her $A \in M_2(R)$ için aşağıdakilerden biri sağlanır.
 - (a) $tr(A) \in J(R)$
 - (b) A matrisi $M_2(R)$ de köşegenleşebilir (Cui ve Chen 2011).

İspat: Her $A \in M_2(R)$ için eğer $det(A) \in U(R)$ ise Örnek 4.1.3 gereğince A yarı kutupludur. Bu nedenle $det(A) \in J(R)$ kabul edilebilir. Önerme 5.1.7 gereğince eğer $tr(A) \in U(R)$ ise A nın yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $x^2 - tr(A)x + det(A)$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) Teorem 5.1.4 ve Önerme 5.1.7 den elde edilir.
- (2) $\Leftrightarrow$ (3) Uyarı 5.1.8 (2) den elde edilir.

Tanım 5.1.10. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a = b^2$ olacak şekilde $b \in R$ mevcut ise a ya *karesel (square) eleman* denir (Cui ve Chen 2011).

Lemma 5.1.11. R değişmeli yerel bir halka olmak üzere $p, q \in R$ için $t = p^2 - 4q$ olsun.

- (1) Eğer $x^2 - px + q$ polinomu R de köke sahip ise t kareseldir. $2 \in U(R)$ ise ifadenin karşıtı da doğrudur.

- (2) $J(R) = 2R$ ve R tamlik bölgesi olsun. t karesel olacak şekilde $p \in U(R)$ ve $q \in J(R)$ ise $x^2 - px + q$ polinomu R de köke sahiptir (Cui ve Chen 2011).

İspat:

- (1) $x^2 - px + q$ polinomunun R de bir kökü λ olsun. Bu durumda $4\lambda^2 - 4p\lambda + 4q = 0$ olur. Böylece $t = p^2 - 4q = (2\lambda - p)^2$ olduğundan t kareseldir. Karşıt olarak $2 \in U(R)$ ve $u \in R$ için $t = u^2$ olsun. Bu durumda $\frac{p+u}{2}$ $x^2 - px + q$ polinomunun bir kökü olur.
- (2) $J(R) = 2R = 0$ olsun. Bu durumda hipotezden $q = 0$ olup $x^2 - px = 0$ R de köke sahiptir. $J(R) = 2R$ ve $2 \neq 0$ olsun. Hipotezden $4x^2 - 4px + 4q = 0$ dir. $u \in R$ için $t = u^2$ olsun. $(p+u)^2 = p^2 + 2pu + u^2 = p^2 + 2pu + p^2 - 4q = 2p^2 + 2pu - 4q \in J(R)$ olur ve R yerel olduğundan $p+u \in J(R)$ dir. Bu nedenle $p+u = 2r$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Böylece $4(r^2 - pr + q) = (2r-p)^2 - (p^2 - 4q) = u^2 - t = t - t = 0$ elde edilir. R tamlik bölgesi ve $4 \neq 0$ olduğundan $r^2 - pr + q = 0$ bulunur. Sonuç olarak $x^2 - px + q$ polinomunun bir kökü r olur.

Önerme 5.1.12. R değişmeli yerel bir halka olsun. Eğer $A \in M_2(R)$ yarı kutuplu ise aşağıdakilerden biri sağlanır.

- (1) $A \in U(M_2(R))$ dir.
- (2) $\det(A) \in J(R)$ ve $\text{tr}(A) \in J(R)$ dir.
- (3) $\det(A) \in J(R)$, $\text{tr}(A) \in U(R)$ ve $u \in U(R)$ olmak üzere $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) = u^2$ dir (Cui ve Chen 2011).

İspat: A yarı kutuplu olsun. Örnek 4.1.3 ve Teorem 5.1.4 gereğince $\det(A) \in J(R)$, $\text{tr}(A) \in U(R)$ kabul edilebilir. Bu durumda $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) \in U(R)$ elde edilir. Önerme 5.1.7 den $x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = 0$ eşitliği R de çözülebilirdir. Böylece Lemma 5.1.11 (1) den $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) = u^2$ olacak şekilde $u \in U(R)$ vardır.

Teorem 5.1.13. R bir değişmeli yerel halka olmak üzere $J(R) = 2R$ ve R tamlik bölgesi ya da $2 \in U(R)$ olsun. Bu durumda $A \in M_2(R)$ nin yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

- (1) $A \in U(M_2(R))$ dir.
- (2) $\det(A) \in J(R)$ ve $\text{tr}(A) \in J(R)$ dir.
- (3) $\det(A) \in J(R)$, $\text{tr}(A) \in U(R)$ ve $u \in U(R)$ için $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) = u^2$ dir (Cui ve Chen 2011).

İspat: A yarı kutuplu olsun. Bu durumda Önerme 5.1.12 gereğince ispat tamamlanır. Karşıt olarak $A \in M_2(R)$ olsun. Eğer (1) sağlanır ise Örnek 4.1.3 gereğince A yarı kutuplu olur. Eğer (2) sağlanır ise Teorem 5.1.4 gereğince A nın yarı kutuplu olduğu açıktır. (3) sağlansın. Bu durumda $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) = u^2$ olduğundan Lemma 5.1.11 den $x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = 0$ eşitliği R de çözülebilirdir. Böylece Önerme 5.1.7 den A yarı kutuplu olur.

Sonuç 5.1.14. $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ olsun. Bu durumda $A \in M_2(R)$ nin yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

- (1) $A \in U(M_2(R))$ dir.
- (2) $\det(A) \in J(R)$ ve $\text{tr}(A) \in J(R)$ dir.
- (3) $\det(A) \in J(R)$, $\text{tr}(A) \in U(R)$ ve $u \in U(R)$ için $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) = u^2$ dir (Cui ve Chen 2011).

Örnek 5.1.15. Sonuç 5.1.14 gereğince $\begin{bmatrix} p+1 & -p \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{(p)})$ yarı kutupludur.

Fakat $\begin{bmatrix} 2p-1 & p \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{(p)})$, Sonuç 5.1.14 ün şartlarını sağlamadığından yarı kutuplu değildir.

Teorem 5.1.16. R bir değişmeli yerel halka ve $A \in M_2(R)$ olsun. $\det A \in J(R)$ ve $\det(A - I) \in J(R)$ verilsin. Aşağıdakiler denktir.

- (1) A kuvvetli temizdir.
- (2) $x^2 - x - \frac{\det(A)}{(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)}$ polinomu R de köke sahiptir.
- (3) $x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$ polinomu R de köke sahiptir.

(4) A matrisi $M_2(R)$ de köşegenleşebilir.

(5) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\det(A)}{(tr(A))^2 - 4\det(A)} & 0 \end{bmatrix}$ kuvvetli temizdir (Li 2007).

Lemma 5.1.17. R değişmeli yerel bir halka olsun. $\det(A) \in J(R)$ ve $\det(A - I) \in J(R)$ olacak şekildeki $A \in M_2(R)$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) A yarı kutupludur.

(2) A kuvvetli temizdir.

(3) $x^2 - tr(A)x + \det(A)$ polinomu R de köke sahiptir.

(4) A köşegenleşebilir (Cui ve Chen 2011).

İspat: $\det(A) \in J(R)$ ve $\det(A - I) \in J(R)$ olacak şekildeki $A \in M_2(R)$ olsun. Bu durumda Teorem 5.1.16 gereğince (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) olduğu açıktır. $tr(A) = 1 + \det(A) - \det(A - I_2) \in U(R)$ olduğundan Önerme 5.1.7 ve Uyarı 5.1.8(2) den (1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) elde edilir.

R değişmeli yerel bir halka olsun. $\det(A) \in J(R)$ ve $\det(A - I_2) \in U(R)$ olacak şekilde $A \in M_2(R)$ alınsın. Bu durumda A kuvvetli temizdir. Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bu şartlar altında A her zaman yarı kutuplu değildir.

Örnek 5.1.18. $\mathbb{Z}_{(3)}$ halkası göz önüne alınsın. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{(3)})$ kuvvetli temiz olmasına rağmen yarı kutuplu değildir (Cui ve Chen 2011).

İspat:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ olup kuvvetli temizdir. $tr(A) = 5 \in U(\mathbb{Z}_{(3)})$ ve $\det(A) = 12 \in J(\mathbb{Z}_{(3)})$ dir. Fakat $(tr(A))^2 - 4\det(A) = -23$ karesel olmadığından Sonuç 5.1.14 gereğince A yarı kutuplu değildir.

Tanım 5.1.19. R bir halka ve $\delta(R) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} : x, y \in R \right\}$ olmak üzere $\delta(R)$ halkası $M_2(R)$ nin alt halkasıdır.

Teorem 5.1.20. R değişmeli yerel bir halka olsun. Bu durumda $\delta(R)$ yarı kutupludur (Cui ve Chen 2011).

İspat: R değişmeli olduğundan $\delta(R)$ halkası da değişmelidir. Bu nedenle $J(\delta(R)) = (\delta(R))^{qnil}$ dir. $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \delta(R)$ olsun.

1.*Durum:* $2 \in J(R)$ olsun. Eğer $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \notin U(\delta(R))$ ise o zaman $\det(A) \in J(R)$ dir. Bu durumda $\det(A - I_2) = 1 - 2x + \det(A) \in U(R)$ olup $A - I_2 \in U(R)$ bulunur. Buradan $\delta(R)$ yerel olup yarı kutupludur.

2.*Durum:* $2 \in U(R)$ olsun. $\det(A) \in J(R)$ kabul edilebilir. Eğer $x, y \in J(R)$ ($A \in J(\delta(R))$) ya da $\det(A) \in U(R)$ ise Örnek 4.1.3 ten A yarı kutupludur. $x \in U(R)$, $y \in U(R)$ ve $\det(A) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \in J(R)$ olsun. Eğer $x - y \in J(R)$ ve $x + y \in J(R)$ olursa o zaman $2x \in J(R)$ bulunur. Fakat $2, x \in U(R)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $x - y \in U(R)$ ve $x + y \in J(R)$ ya da $x - y \in J(R)$ ve $x + y \in U(R)$ olmalıdır.

(i) Eğer $x - y \in J(R)$ ve $x + y \in U(R)$ ise $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$\det(P + A) = (x + y) + (x^2 - y^2) \in U(R)$$

ve

$$PA = \begin{bmatrix} \frac{x-y}{2} & \frac{y-x}{2} \\ \frac{y-x}{2} & \frac{x-y}{2} \end{bmatrix} \in J(\delta(R))$$

elde edilir. Böylece $P + A \in U(R)$ ve $PA \in (\delta(R))^{qnil}$ olup $A \in \delta(R)$, P spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

(ii) $x - y \in U(R)$ ve $x + y \in J(R)$ ise $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$\det(P + A) = (x - y) + (x^2 - y^2) \in U(R)$$

ve

$$PA = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} & \frac{y+x}{2} \\ \frac{y+x}{2} & \frac{x+y}{2} \end{bmatrix} \in J(\delta(R))$$

elde edilir. Böylece $P + A \in U(R)$ ve $PA \in (\delta(R))^{qnil}$ olup $A \in \delta(R)$, P spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

Uyarı 5.1.21. $R = \mathbb{Z}_2$ olsun. Bu durumda Teorem 5.1.20 gereğince $\delta(R)$ yarı kutupludur. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \delta(R)$ olsun. Eğer $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \delta(R)$ ve $m \geq 1$ tamsayıları için $A^m = A^{m+1}X$ ise $2^m = 2^{m+1}x$ olup $2^m(1 - 2x) = 0$ dır. $2 \in J(R)$ olduğundan $1 - 2x \in U(R)$ dir. Böylece $2^m = 0$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\delta(R)$ kuvvetli π -düzenli değildir.

5.2 $T_n(R)$ Halkasında Yarı Kutupluluk

Teorem 5.2.1. R değişmeli tek türlü temiz bir halka olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ yarı kutupludur (Ying ve Chen 2012).

Teorem 5.2.2. R değişmeli yerel bir halka olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ yarı kutupludur (Ying ve Chen 2012).

Sonuç 5.2.3. R değişmeli yerel bir halka olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ kuvvetli temizdir (Ying ve Chen 2012).

Lemma 5.2.4. R bir halka ve $E, A, B \in T_n(R)$ olsun.

- (1) Eğer $E^2 = E$ ise her $i = 1, \dots, n$ için $(E_{ii})^2 = E_{ii}$ sağlanır.
- (2) $A \in U(T_n(R))$ olması için gerek ve yeter şart her $i = 1, \dots, n$ için $A_{ii} \in U(R)$ olmasıdır.
- (3) $B \in J(T_n(R))$ olması için gerek ve yeter şart her $i = 1, \dots, n$ için $B_{ii} \in J(R)$ olmasıdır (Cui ve Chen 2012b).

Sonuç 5.2.5. R bir halka ve $E, A, B \in T_2(R)$ olsun.

- (1) Eğer $E^2 = E$ ise $(E_{11})^2 = E_{11}$ ve $(E_{22})^2 = E_{22}$ sağlanır.
- (2) $A \in U(T_2(R))$ olması için gerek ve yeter şart $A_{11}, A_{22} \in U(R)$ olmasıdır.
- (3) $B \in J(T_2(R))$ olması için gerek ve yeter şart $B_{11}, B_{22} \in J(R)$ olmasıdır.

İspat:

(1) $E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & e_{22} \end{bmatrix} \in T_2(R)$ için $E^2 = E$ olsun. Bu durumda

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11}e_{11} & e_{11}e_{12} + e_{12}e_{22} \\ 0 & e_{22}e_{22} \end{bmatrix} \text{ ve buradan } (e_{11})^2 = e_{11},$$

$(e_{22})^2 = e_{22}$ elde edilir.

(2) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in U(T_n(R))$ ve $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ 0 & b_{22}a_{22} \end{bmatrix} \text{ bulunur}$$

ve $a_{11}, a_{22} \in U(R)$ olur.

Karşıt olarak $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in T_2(R)$ için $a_{11}, a_{22} \in U(R)$ olsun. Bu durumda $b_{11} = (a_{11})^{-1}$, $b_{22} = (a_{22})^{-1}$ ve $b_{12} = -(a_{11})^{-1}a_{12}(a_{22})^{-1}$ olacak şekilde

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \text{ matrisi alınırsa } B = A^{-1} \text{ olup } A \in U(T_2(R)) \text{ bulunur.}$$

(3) $B \in J(T_2(R))$ olsun. Bu durumda her $A \in T_2(R)$ için $I_2 - AB \in U(T_2(R))$ olur. (2) den $1 - A_{11}B_{11}, 1 - A_{22}B_{22} \in U(R)$ sağlanır ve buradan $B_{11}, B_{22} \in J(R)$ elde edilir.

Karşıt olarak $B_{11}, B_{22} \in J(R)$ olsun. Bu durumda her $A_{11}, A_{22} \in R$ için $1 - A_{11}B_{11}, 1 - A_{22}B_{22} \in U(R)$ olup (2) den $I_2 - AB \in U(T_2(R))$ yani $B \in J(T_2(R))$ bulunur.

Lemma 5.2.6. Eğer $T_n(R)$ yarı kutuplu ise her $m \leq n$ için $T_m(R)$ yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012b)

İspat: $E = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_n(R)$ olsun. Bu durumda $T_m(R) \cong ET_n(R)E$ dır.

Önerme 4.2.8 gereğince $T_m(R)$ yarı kutupludur.

Tanım 5.2.7. R bir yerel halka olsun. Eğer her $j \in J(R)$ ve her $u \in U(R)$ için $l_u - r_j$ ve $l_j - r_u$ abel grup endomorfizmaları örten ise R ye ağaran (bleached) halka denir (Borooah vd. 2007).

Tanım 5.2.8. R yerel bir halka olsun. Eğer her $j \in J(R)$ ve her $u \in U(R)$ için $l_u - r_j$ ve $l_j - r_u$ abel grup endomorfizmaları izomorfizma ise R halkasına *tek türlü ağaran* (*uniquely bleached*) denir (Cui ve Chen 2012b).

Tek türlü ağaran halka sınıfları çok sayıda örnek içerir. Değişmeli yerel halkalar, bölümlü halkalar bunlardan bazılarıdır.

Lemma 5.2.9. R yerel bir halka, $u \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $l_u - r_j$ endomorfizması izomorfizmadır.

(2) Her $r \in R$ için $\begin{bmatrix} u & r \\ 0 & j \end{bmatrix} \in T_2(R)$, $e_{12} \in R$ olmak üzere $\begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $r \in R$ olsun. Hipotezden $ue_{12} - e_{12}j = -r$ olacak şekilde bir tek $e_{12} \in R$ vardır. $A = \begin{bmatrix} u & r \\ 0 & j \end{bmatrix} \in T_2(R)$ ve $E = \begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $E^2 = E$, $A + E = \begin{bmatrix} u & r + e_{12} \\ 0 & j + 1 \end{bmatrix} \in U(T_2(R))$ ve $AE = \begin{bmatrix} 0 & ue_{12} + r \\ 0 & j \end{bmatrix} \in J(T_2(R)) \subseteq (T_2(R))^{qnil}$ sağlanır. Son olarak $E \in comm^2(A)$ olduğu gösterilmelidir. $C = (c_{ij}) \in T_2(R)$ ve $C \in comm(A)$ olsun. Bu durumda,

$$uc_{11} = c_{11}u, \quad jc_{22} = c_{22}j \quad (5.8)$$

ve

$$uc_{12} + rc_{22} = c_{11}r + c_{12}j \quad (5.9)$$

eşitlikleri elde edilir. (5.9) da $r = e_{12}j - ue_{12}$ yazılırsa (5.8) den $u[c_{12} + (c_{11}e_{12} - e_{12}c_{22})] - [c_{12} + (c_{11}e_{12} - e_{12}c_{22})]j = 0$ bulunur. $l_u - r_j$ birebir olduğundan $c_{11}e_{12} - e_{12}c_{22} = -c_{12}$ elde edilir. Bu durumda $EC = CE$ olup $E \in comm^2(A)$ olur. Sonuç olarak A matrisi, E spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Her $r \in R$ için $e_{12} \in R$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} u & r \\ 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & r \\ 0 & j \end{bmatrix}$ olduğundan $u(-e_{12}) - (-e_{12})j = r$ sağlanır. Böylece $l_u - r_j$ endomorfizması örten

olur. $l_u - r_j$ endomorfizmasının birebir olduğunu göstermek için $ux - xj = 0$ alınsın. $A = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \in T_2(R)$ ve hipotezden $E = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ A matrisinin spektral eşkare elemanı olsun. $C = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alınırsa kabul gereğince $ux - xj = 0$ olduğundan $AC = CA$ elde edilir. $E \in comm^2(A)$ olduğundan $EC = CE$ sağlanır. Buradan $x = 0$ olup $l_u - r_j$ endomorfizması birebirdir.

Lemma 5.2.9 a benzer olarak aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 5.2.10. R yerel bir halka, $u \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $l_j - r_u$ endomorfizması bir izomorfizmadır.

(2) Her $r \in R$ için $\begin{bmatrix} j & r \\ 0 & u \end{bmatrix} \in T_2(R)$, $e_{12} \in R$ olmak üzere $\begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012b).

Sonuç 5.2.11. R yerel bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R halkası tek türlü ağarandır.

(2) Her $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in T_2(R)$, $\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & e_{22} \end{bmatrix}$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutupludur. Burada $a_{ii} \in U(R)$ iken $e_{ii} = 0$ ve $a_{ii} \in J(R)$ iken $e_{ii} = 1$ dir (Cui ve Chen 2012b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R tek türlü ağaran halka ve $A = (a_{ij}) \in T_2(R)$ olsun. Eğer $i = 1, 2$ için $a_{ii} \in U(R)$ ise $A \in U(T_2(R))$ dir ve $E = 0$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur. Eğer $i = 1, 2$ için $a_{ii} \in J(R)$ ise $A \in J(T_2(R))$ dir ve $E = I_2$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur. $a_{11} \in U(R)$ ve $a_{22} \in J(R)$ olsun. R tek türlü ağaran halka olduğundan $l_u - r_j$ izomorfizmadır. Bu durumda Lemma 5.2.9 gereğince ispat tamamlanır. $a_{11} \in J(R)$ ve $a_{22} \in U(R)$ olsun. R tek türlü ağaran halka olduğundan $l_u - r_j$ izomorfizmadır. Böylece Lemma 5.2.10 dan istenilen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Lemma 5.2.9 ve Lemma 5.2.10 gereğince R halkasının tek türlü ağaran olduğu elde edilir.

Teorem 5.2.12. R bir yerel halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R halkası tek türlü ağarandır.
- (2) Her $(a_{ij}) \in T_n(R)$, $(e_{ij}) \in T_n(R)$ spektral eşkare elemanıyla yarı kutupludur.
Burada her $n \geq 1$ için $a_{ii} \in U(R)$ iken $e_{ii} = 0$ ve $a_{ii} \in J(R)$ iken $e_{ii} = 1$ dir.
- (3) Her $(a_{ij}) \in T_n(R)$, $(e_{ij}) \in T_n(R)$ spektral eşkare elemanıyla yarı kutupludur.
Burada bazı $n \geq 2$ için $a_{ii} \in U(R)$ iken $e_{ii} = 0$ ve $a_{ii} \in J(R)$ iken $e_{ii} = 1$ dir
(Cui ve Chen 2012b).

Sonuç 5.2.13. Eğer R tek türlü ağaran yerel bir halka ise her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ halkası yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012b).

Önerme 5.2.14. R bir ağaran yerel halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R tek türlü ağarandır.
- (2) Her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ halkası yarı kutupludur.
- (3) Bazı $n > 1$ için $T_n(R)$ halkası yarı kutupludur (Cui ve Chen 2012b).

Önerme 5.2.15. R bir değişmeli yakın yerel halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) R halkası yakın mükemmeldir.
- (2) Her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ halkası yarı kutupludur.
- (3) Bazı $n \geq 1$ için $T_n(R)$ halkası yarı kutupludur.
- (4) Her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ halkası kuvvetli temizdir (Cui ve Chen 2012b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R yakın mükemmel olduğundan $1 = e_1 + \dots + e_m$ olacak şekilde $i = 1, \dots, m$ için e_i dik eşkare elemanlar mevcuttur. Bu durumda $R = e_1 R e_1 \times \dots \times e_m R e_m$ şeklinde değişmeli yerel halkaların direkt çarpımı şeklinde

yazılır. Bu durumda her i için $e_i Re_i$ değişmeli yerel olduğundan her $n \geq 1$ için $T_n(e_i Re_i)$ yarı kutupludur. $T_n(R) = T_n(e_1 Re_1) \times \dots \times T_n(e_m Re_m)$ olduğundan $T_n(R)$ yarı kutuplu halkaların direkt çarpımı şeklindedir. Böylece her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ yarı kutuplu olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Lemma 5.2.6 gereğince R yarı kutupludur. Böylece kuvvetli temiz olur. Bu durumda eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir ve hipotezden R yakın yerel olduğundan R yakın mükemmel bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (4) Yarı kutuplu halkalar kuvvetli temiz olduğundan açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1) Her $n \geq 1$ için $T_n(R)$ kuvvetli temiz olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cong R$$

olduğundan R kuvvetli temiz olur. Böylece eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. Ayrıca hipotezden R halkası yakın yerel olduğundan R yakın mükemmel olur.

Uyarı 5.2.16. R bir halka olmak üzere $a \in R$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart $1 - a$ nın kuvvetli temiz olmasıdır. Fakat yarı kutuplu halkalar için bu doğru değildir.

5.3 $K_s(R)$ Halkasında Yarı Kutupluluk

Tanım 5.3.1. A, B iki halka, ${}_A N_B$ ve ${}_B M_A$ ikili modüller olsun. $\Psi : N \otimes_B M \rightarrow A$ ve $\Phi : M \otimes_A N \rightarrow B$ modül homomorfizmaları olmak üzere $m, m' \in M, n, n' \in N$ için $\Psi(n \otimes m)n' = n\Phi(m \otimes n')$ ve $\Phi(m \otimes n)m' = m\Psi(n \otimes m')$ olsun. Bu durumda (A, B, M, N, Ψ, Φ) yapısına *Morita yapısı* (*Morita context*) denir.

$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & n \\ m & b \end{bmatrix} : a \in A, b \in B, m \in M, n \in N \right\}$ kümesinin yukarıdaki eşitlikler yardımıyla bir halka yapısı vardır. Bu halkaya *Morita içeriğinin halkası* denir (Tang ve Zhou 2012).

Uyarı 5.3.2. R bir değişmeli halka ve $s \in R$ olsun. $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in K_s(R)$ için $\det_s(A) = ab - sxy$ ve $\text{tr}(A) = a + b$ şeklinde tanımlıdır (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.3.3. R bir halka ve $s \in C(R)$ olsun.

(1) $(s : J(R)) = \{r \in R : rs \in J(R)\}$ olmak üzere $J(K_s(R)) = \begin{bmatrix} J(R) & (s : J(R)) \\ (s : J(R)) & J(R) \end{bmatrix}$ dir.

(2) R halkası yerel ve $s \in J(R)$ ise $J(K_s(R)) = \begin{bmatrix} J(R) & R \\ R & J(R) \end{bmatrix}$ dir.

(3) R yerel ve $s \in J(R)$ olsun. $\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in K_s(R)$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart $a, b \in R$ nin tersinir olmasıdır (Krylov ve Tuganbaev 2010).

Lemma 5.3.4. R bir halka olsun. $f : \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b & y \\ x & a \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlı f $K_s(R)$ üzerinde birebir homomorfizmadır (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.3.5. R bir halka olsun. $s \in C(R) \cap U(R)$ olmak üzere $f : \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & x \\ sy & b \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $K_s(R)$ den $K_1(R)$ ye bir izomorfizmadır (Krylov 2008).

Lemma 5.3.6. $\sigma : R \rightarrow S$ bir halka izomorfizması, $a \in R$ ve $e^2 = e \in R$ olsun. a nın e spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $\sigma(a) \in S$ nin $\sigma(e) \in S$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olmasıdır (Huang vd. 2012).

Tanım 5.3.7. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $b = uav$ olacak şekilde $u, v \in U(R)$ mevcut ise a ve b *denktir (equivalent)* denir (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.3.8. $E \in K_s(R)$ eşkare olsun. E bir köşegensel matrise denk ise E köşegensel bir matrise benzerdir (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.3.9. R bir değişmeli halka ve $s \in R$ olmak üzere $A, B \in K_s(R)$ için aşağıdakiler sağlanır.

(1) $\det_s(AB) = \det_s(A)\det_s(B)$.

(2) $A \in U(K_s(R))$ olması için gerek ve yeter şart $\det_s(A) \in U(R)$ olmasıdır.

Ayrıca $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$ tersinir ise $A^{-1} = \det_s(A)^{-1} \begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$ şeklindedir.

(3) $A \sim B$ ise $\det_s(A) = \det_s(B)$ ve $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ dir (Tang ve Zhou 2012).

Teorem 5.3.10. R değişmeli yerel bir halka ve $s \in R$ olsun. $A \in K_s(R)$ için aşağıdakiler denktir.

(1) A aşikar olmayan kuvvetli temizdir.

(2) $ab \in J(R)$ ve $a + b \in 1 + J(R)$ olmak üzere $A \sim \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dir.

(3) $\det_s(A) \in J(R)$, $\text{tr} A \in 1 + J(R)$ ve A köşegensel bir matrise benzerdir.

(4) $\det_s(A) \in J(R)$, $\text{tr} A \in 1 + J(R)$ ve $t^2 - (\text{tr} A)t + \det_s(A)$ polinomu R de köke sahiptir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) Lemma 5.3.16 ve Lemma 5.3.9 gereğince açıkça görülmektedir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $A \sim \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ olsun. Lemma 5.3.9 gereğince $\det_s(A) = ab \in J(R)$ ve $\text{tr}(A) = a + b \in 1 + J(R)$ dir. Bu durumda $t^2 - (\text{tr}(A))t + \det_s(A)$ polinomunun kökleri a ve b olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) $t^2 - (\text{tr}(A))t + \det_s(A)$ polinomunun kökü $a \in R$ olsun. Buradan $b = \text{tr}(A) - a \in R$ polinomun diğer köküdür. Böylece $\det_s(A) = ab$ ve $\text{tr}(A) = a + b$ dir. $\text{tr}(A) \in 1 + J(R) \subseteq U(R)$ ve $\det_s(A) \in J(R)$ olduğundan $a \in U(R)$, $b \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$, $b \in U(R)$ dir. Genelliği bozmaksızın $a \in U(R)$ ve $b \in J(R)$ olsun. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ alınsın. $a_{11} + a_{22} = \text{tr}(A) \in U(R)$ olduğundan $a_{11} \in U(R)$ ya da $a_{22} \in$

$U(R)$ dir. $A' = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ olsun. Buradan $\text{tr}(A) = \text{tr}(A')$ ve $\det_s(A) = \det_s(A')$ olup Lemma 5.3.4 den A nın kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart A' nın kuvvetli temiz olmasıdır. Genelliği bozmaksızın $a_{11} \in U(R)$ olsun. $a + b = a_{11} + a_{22} = \text{tr}(A) \in U(R)$ olduğundan $a - a_{22} = a_{11} - b \in U(R)$ dir. $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{(b-a_{11})} \\ \frac{a_{21}}{(a-a_{22})} & 1 \end{bmatrix}$

olarak seçilsin. Bu durumda $\det_s(P) = \frac{-aa_{11} + (a - a_{22})b + \det_s(A)}{(a - a_{22})(b - a_{11})} \in U(R)$ olup

Lemma 5.3.9 gereğince P tersinirdir. Buradan

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{\det_s(P)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{b-a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a-a_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{b-a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a-a_{22}} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det_s(P)} \begin{bmatrix} * & \frac{a_{12}(b^2 - \text{tr}(A)b + \det_s(A))}{(b-a_{11})^2} \\ \frac{a_{21}(a^2 - \text{tr}(A)a + \det_s(A))}{(a-a_{22})^2} & * \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Hipotezden A ve $A - I$ nin tersinir olmadığı görülmektedir. Lemma 5.3.16 gereğince A kuvvetli temiz olup (1) elde edilir.

Sonuç 5.3.11. R değişmeli yerel bir halka ve $s \in U(R)$ olsun. $K_s(R)$ halkasının kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart her $w \in J(R)$ için $t^2 - t - w$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır (Tang ve Zhou 2012).

İspat: $w \in J(R)$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s^{-1}w & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $\det_s(A) = \det_s(A - I) = -w \in J(R)$ dir. Böylece A aşikar olmayan kuvvetli temizdir. Teorem 5.3.10 gereğince $t^2 - (\text{tr}(A))t + \det_s(A)$ polinomu R de köke sahiptir. A için $\text{tr}(A) = 1$ ve $\det_s(A) = -w$ olduğundan ispat tamamlanır. Karşıt olarak her $w \in J(R)$ için $t^2 - t - w$ polinomu R de köke sahip olsun. $A \in K_s(R)$ için $\det_s(A) \in J(R)$ ve $\text{tr}(A) \in 1 + J(R)$ alınsın. Hipotez gereği $r^2 - r - \frac{\det_s(A)}{(\text{tr}(A))^2} = 0$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $(\text{tr}(A)r)^2 - \text{tr}(A)(\text{tr}(A)r) + \det_s(A) = 0$ olup $t = \text{tr}(A)r \in R$ $t^2 - \text{tr}(A)t + \det_s(A) = 0$ n bir çözümüdür. Böylece Teorem 5.3.10 gereğince A kuvvetli temiz olur.

Tanım 5.3.12. R bir halka ve $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \in R[t]$ olsun. Eğer $r \in R$ için $a_0 + ra_1 + r^2a_2 + \dots + r^na_n = 0$ oluyorsa r ye $f(t)$ nin *sol kökü* (left root) denir. Benzer şekilde $s \in R$ için $a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n = 0$ oluyorsa s ye $f(t)$ nin *sağ kökü* (right root) denir (Tang ve Zhou 2012).

Lemma 5.3.13. R bir halka olsun. Bu durumda $f(t) = t^2 - at + b \in R[t]$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- (1) $c \in R$ nin, $f(t)$ nin sol kökü olması için gerek ve yeter şart $a - c \in R$ nin, $f(t)$ nin sağ kökü olmasıdır.
- (2) $a \in 1 + J(R)$ olsun. $f(t)$ nin, $1 + J(R)$ de sol (sağ) köke sahip olması için gerek ve yeter şart $f(t)$ nin, $J(R)$ de sağ (sol) köke sahip olmasıdır (Tang ve Zhou 2012).

İspat:

- (1) $f(t)$ nin sol kökü $c \in R$ olsun. Bu durumda $c^2 - ca + b = 0$ dır. $c^2 - ca + b = (c - a)^2 - a(a - c) + b = 0$ olduğundan $c - a \in R$, $f(t)$ nin sağ köküdür.
- (2) $c \in 1 + J(R)$, $f(t)$ nin sol kökü ve $a \in 1 + J(R)$ olsun. (1) den $a - c \in J(R)$ sağ kök olur. Karşıt olarak $d \in J(R)$, $f(t)$ nin sağ kökü olsun. Bu durumda (1) den $a - d \in 1 + J(R)$ sol kök olur.

Uyarı 5.3.14. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K_s(R)$ ve $r \in R$ olsun. Bu durumda $rA = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$ ve $Ar = \begin{bmatrix} ar & br \\ cr & dr \end{bmatrix}$ dir.

Teorem 5.3.15. $\bar{f}, f$ nin $(R/J)[t]$ deki görüntüsü olmak üzere $W = \{f \in R[t] : \deg(f) = 2, f \text{ monik ve } \bar{f}(0) = \bar{f}(1) = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f \in W$ olması için gerek ve yeter şart $f(t) = t^2 - (1 + w_1)t + w_0$ için $w_0, w_1 \in J(R)$ olmasıdır. R bir yerel halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $M_2(R)$ kuvvetli temizdir.
- (2) Her $A \in M_2(R)$ için $A \in U(M_2(R))$ veya $I_2 - A \in U(M_2(R))$ veya $a, b \in R$ olmak üzere $A \sim \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dir.
- (3) Her $w_0, w_1 \in J(R)$ için $\begin{bmatrix} 0 & w_0 \\ 1 & 1 + w_1 \end{bmatrix}$ kuvvetli temizdir.
- (4) Her $f \in W$ nin $J(R)$ de ve $1 + J(R)$ de sol kökü vardır.
- (5) Her $f \in W$ nin $J(R)$ de sol kökü vardır.

(6) Her $f \in W$ nin $1 + J(R)$ de sol kökü vardır.

(7) Her $f \in W$ nin $J(R)$ de ve $1 + J(R)$ de sağ kökü vardır.

(8) Her $f \in W$ nin $J(R)$ de sağ kökü vardır.

(9) Her $f \in W$ nin $1 + J(R)$ de sağ kökü vardır (Yang ve Zhou 2008).

Lemma 5.3.16. R bir yerel halka ve $s \in C(R)$ olsun. $A \in K_s(R)$ nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

(1) A veya $A - I$ tersinirdir.

(2) $a, b \in R$ için $A \sim \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: A veya $A - I$ tersinir olsun. Bu durumda A kuvvetli temizdir. Eğer $a, b \in R$ için $A \sim \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ise R yerel olduğundan kuvvetli temizdir. Bu durumda $a = e_1 + u_1$ ve $b = e_2 + u_2$ olacak şekilde $e_i^2 = e_i$, $u_i \in U(R)$ var olup $e_i u_i = u_i e_i$ sağlanır. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$ olarak yazılırsa A nın kuvvetli temiz olduğu görülür. Karşıt olarak A kuvvetli temiz olsun ve (1) sağlanmasın. Bu durumda $A = E + U$ olacak şekilde $E^2 = E \in K_s(R)$, $U \in U(K_s(R))$ vardır ve $EU = UE$ sağlanır. $E = \begin{bmatrix} c & x \\ y & d \end{bmatrix}$ alınsın. Eğer $c \in U(R)$ ise, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -yc^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & x \\ y & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{-1} & -c^{-1}x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d - syc^{-1}x \end{bmatrix}$ olur. Böylece E bir köşegensel matrise denk olur. Eğer $d \in U(R)$ ise Lemma 5.3.4 kullanılıp benzer şekilde E köşegensel bir matrise denk bulunur. Eğer $c, d \in J(R)$ ise Lemma 5.3.3 gereğince $E \in J(K_s(R))$ olur. $J(K_s(R))$ sıfırdan farklı eşkare içermeyeceğinden $E = 0$ olmalıdır. Bu ise A nın tersinir olmasını gerektirdiğinden çelişki oluşur. Bu durumda $s \in U(R)$ olup $x \in U(R)$ veya $y \in U(R)$ dir. Genelliği bozmaksızın $x \in U(R)$ olsun. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in U(K_s(R))$ olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tersinirdir. Ayrıca $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & x \\ y & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & c \\ d & sy \end{bmatrix}$ ve $sx \in U(R)$ olduğundan E köşegensel bir

matrise denk olur. $y \in U(R)$ olması halinde Lemma 5.3.4 gereğince benzer işlemler yapılarak E köşegensel olarak bulunur. Böylece Lemma 5.3.8 gereğince $PEP^{-1} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir $P \in U(K_s(R))$ vardır. R bir yerel halka ve E aşıkâr olmayan eşkare olduğundan $f = 0$ ve $g = 1$ ya da $f = 1$ ve $g = 0$ olmalıdır. Kuvvetli temiz olma özelliği benzerlik altında korunduğundan $PAP^{-1} = PEP^{-1} + PUP^{-1}$ kuvvetli temizdir. Burada PEP^{-1} ile PUP^{-1} in değişmeli olması kontrol edildiğinde PUP^{-1} in köşegensel bir matris olduğu görülür. Sonuçta iki köşegensel matrisin toplamı da köşegensel olacağından PAP^{-1} köşegenseldir.

Lemma 5.3.17. R bir yerel halka ve $s \in C(R) \cap J(R)$ olsun. $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olmak üzere $A = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \in K_s(R)$ için aşağıdakiler denktir.

(1) A kuvvetli temizdir.

(2) $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) A kuvvetli temiz, $A \notin U(K_s(R))$ ve $I - A \notin U(K_s(R))$ olduğundan Lemma 5.3.16 gereğince A bir köşegensel matrise benzerdir. Buradan $\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in$

$U(K_s(R))$ ve $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \in K_s(R)$ için $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ dir. Matris eşitliği tanımından

$$ua + sy = a\lambda_1 \tag{5.10}$$

$$va + wy = y\lambda_1 \tag{5.11}$$

$$ux + b = x\lambda_2 \tag{5.12}$$

$$svx + wb = b\lambda_2 \tag{5.13}$$

olur. Lemma 5.3.3 gereğince $a, b \in U(R)$ olacağından (5.10) ve (5.13) eşitliklerinden $\lambda_1 \in U(R)$, $\lambda_2 \in J(R)$ dir. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \notin U(K_s(R))$ olduğundan Lemma 5.3.3 gereği $\lambda_1 \in 1 + J(R)$ dir. Ayrıca (5.11) ve (5.12) eşitliklerinden $x, y \in U(R)$ olarak bulunur. Buradan $\lambda'_1 = y\lambda_1y^{-1} = w + vay^{-1} \in 1 + J(R)$ ve $\lambda'_2 = x\lambda_2x^{-1} = u + bx^{-1} \in J(R)$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} (\lambda'_1)^2 - (vuv^{-1} + w)\lambda'_1 + vuv^{-1}w &= (w + vay^{-1})^2 - (vuv^{-1} + w)(w + vay^{-1}) + vuv^{-1}w \\ &= (vay^{-1})(vay^{-1} + w) - vuay^{-1} \\ &= (vay^{-1})y\lambda_1y^{-1} - vuay^{-1} \\ &= va\lambda_1y^{-1} - vuay^{-1} \\ &= v(ua + sy)y^{-1} - vuay^{-1} \\ &= sv \text{ olur. Ayrıca} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda'_2)^2 - (u + w)\lambda'_2 + wu &= (u + bx^{-1})^2 - (u + w)(u + bx^{-1}) + wu \\ &= bx^{-1}(bx^{-1} + u) - wbx^{-1} \\ &= (bx^{-1})x\lambda_2x^{-1} - wbx^{-1} \\ &= b\lambda_2x^{-1} - wbx^{-1} \\ &= (svx + wb)x^{-1} - wbx^{-1} = sv \text{ olur. Buradan } t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv) \text{ polinomunun sağ kökü } \lambda'_1 \in 1 + J(R) \text{ ve } t^2 - (u + w)t + (wu - sv) \text{ polinomunun sağ kökü } \lambda'_2 \in J(R) \text{ olduğu açıkça görülmektedir.} \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomunun sağ kökü $\lambda'_1 \in 1 + J(R)$ ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomunun sağ kökü $\lambda'_2 \in J(R)$ olsun. Lemma 5.3.3 gereği $P = \begin{bmatrix} v^{-1}(\lambda_1 - w) & 1 \\ 1 & \lambda_2 - u \end{bmatrix} \in U(K_s(R))$ olup $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ dir. Buradan Lemma 5.3.16 gereğince A kuvvetli temizdir.

Lemma 5.3.18. R bir yerel halka, $u \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

$$(1) \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}, K_s(R) \text{ de yarı kutupludur.}$$

$$(2) \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, K_s(R) \text{ de yarı kutupludur.}$$

(3) $l_u - r_j$ ve $l_j - r_u$ grup endomorfizmaları birebirdir (Huang vd. 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) $A = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ spektral eşkare elemanı ile $K_s(R)$ de yarı kutuplu olsun. Bu durumda $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in comm(A)$ olduğundan $EX = XE$ sağlanır. Buradan $b = c = 0$, $a = a^2$ ve $d = d^2$ bulunur. Ayrıca $A + E \in U(K_s(R))$ olduğundan $d = 1$ dir. $B = \begin{bmatrix} -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alınırsa $B \in comm(AE)$ olur. O zaman $AE = \begin{bmatrix} ua & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \in (K_s(R))^{qnil}$ olduğundan $I_2 + AEB = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U(K_s(R))$ dir. Buradan $1 - a \in U(R)$ ve $a^2 = a$ olduğundan $a = 0$ bulunur. Böylece $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Şimdi $x, y \in R$ olmak üzere $(l_u - r_j)(x) = 0$ ve $(l_j - r_u)(y) = 0$ olsun. Buradan $ux = xj$ ve $jy = yu$ sağlanır. Böylece $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \in comm(A) \subseteq comm(E)$ olur. O zaman $\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan $x = y = 0$ bulunur ve $l_u - r_j, l_j - r_u$ grup endomorfizmaları birebir olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) $A = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in comm(A)$ alınırsa $ub = bj$ ve $jc = cu$ bulunur. Hipotezden $l_u - r_j$ ve $l_j - r_u$ birebir olduğundan $b = c = 0$ ve $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ şeklinde köşegen matris olur. Buradan $EX = XE$ olduğundan $E \in comm^2(A)$ elde edilir. $A + E \in U(K_s(R))$ ve $AE = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \in J(K_s(R)) \subseteq (K_s(R))^{qnil}$ olduğundan A matrisi $K_s(R)$ de yarı kutupludur.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Lemma 5.3.4 ve Lemma 5.3.6 gereğince ispat tamamlanır.

Tanım 5.3.19. R bir yerel halka olsun. Eğer her $j \in J(R)$ ve her $u \in U(R)$ için $l_u - r_j$ ve $l_j - r_u$ abel grup endomorfizmaları birebir ise R ye eş-ağaran (co-bleached) halka denir (Huang vd. 2012).

Sonuç 5.3.20. R bir yerel halka olsun. Eğer $K_s(R)$ yarı kutuplu ise R eş-ağarandır (Huang vd. 2012).

Lemma 5.3.21. R bir yerel halka ve $s \in C(R) \cap U(R)$ olsun. $a \in U(R)$, $d \in J(R)$ olmak üzere eğer $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise A matrisi $a_1 \in U(R)$, $b_1, c_1, d_1 \in J(R)$ için $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ matrisine benzerdir (Huang vd. 2012).

$$\begin{aligned} \text{İspat: } A &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -sca^{-1}b + d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + sbca^{-1} & b \\ (-sca^{-1}b + d)ca^{-1} & -sca^{-1}b + d \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} a_0 & b \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$a \in U(R)$, $s \in J(R)$ olduğundan $a_0 \in U(R)$ ve $s \in J(R)$, $d \in J(R)$ olduğundan $c_0, d_0 \in J(R)$ dir. Eğer $b \in J(R)$ ise o zaman $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ olur. Eğer

$b \in U(R)$ ise o zaman

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{bmatrix} 1 & a_0^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & b \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a_0^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + sa_0^{-1}bc_0 & b + a_0^{-1}bd_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a_0^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + sa_0^{-1}bc_0 & (a_0 + sa_0^{-1}bc_0)(-a_0^{-1}b) + b + a_0^{-1}bd_0 \\ c_0 & -sc_0a_0^{-1}b + d_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + sa_0^{-1}bc_0 & -b - sa_0^{-1}bc_0a_0^{-1}b + b + a_0^{-1}bd_0 \\ c_0 & -sc_0a_0^{-1}b + d_0 \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur ve istenilen ispatlanır.

Teorem 5.3.22. R bir yerel halka ve $U(R) \subseteq C(J(R)) + J(R)$ olsun. $K_s(R)$ nin yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $K_s(R)$ nin kuvvetli temiz ve R nin eş-ağaran olmasıdır (Huang vd. 2012).

İspat: $K_s(R)$ yarı kutuplu olsun. Bu durumda Sonuç 4.2.12 ve Sonuç 5.3.20 gereğince $K_s(R)$ kuvvetli temiz ve R eş-ağarandır. Karşıt olarak $K_s(R)$ kuvvetli

temiz ve R eş-ağaran olsun. $A \in K_s(R)$ alınsın. Örnek 4.1.3 gereğince $A \notin U(R) \cup J(R)$ alınabilir.

1. *Durum:* $s \in J(R)$ olsun. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alınırsa Lemma 5.3.4 ve Lemma 5.3.6 gereğince $a \in U(R)$ ve $d \in J(R)$ alınabilir. Ayrıca Lemma 5.3.21 gereğince $a \in U(R)$ ve $b, c, d \in J(R)$ kabul edilsin. $U(R) \subseteq C(J(R)) + J(R)$ olduğundan $h \in C(J(R))$ ve $j \in J(R)$ olacak şekilde $a = h + j$ şeklindedir. $r = h^{-1}$ ve $B = rA = \begin{bmatrix} 1 + rj & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$

olsun. $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ alınırsa $rP_1 = P_1r$ olur.

$C := P_1BP_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + r(j - sb) & rb \\ 1 + r(j + c - sb - d) & r(sb + d) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 + a_1 & b_1 \\ 1 + c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu

durumda $a_1, b_1, c_1, d_1 \in J(R)$ dir. $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alınırsa $rP_2 = P_2r$ sağlanır.

$D := P_2CP_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + a_1 + s(1 + c_1) & -1 - a_1 - s(1 + c_1) + b_1 + d_1 \\ 1 + c_1 & -s(1 + c_1) + d_1 \end{bmatrix}$
 $:= \begin{bmatrix} 1 + a_2 & -1 + b_2 \\ 1 + c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $a_2, b_2, c_2, d_2 \in J(R)$ dir.

$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 + b_2 \end{bmatrix}$ alınırsa $P_3r = rP_3$ sağlanır ve $u \in 1 + J(R)$, $v \in -1 + J(R)$,

$w \in J(R)$ olmak üzere $P_3DP_3^{-1} = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ dir. $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \in K_s(R)$ kuvvetli temiz

olduğundan Lemma 5.3.17 gereğince $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomu

$\lambda_1 \in 1 + J(R)$ sağ köküne ve $t^2 - (u + w)t + (wu - sv)$ polinomu $\lambda_2 \in J(R)$ sağ

köküne sahiptir. $P_4 = \begin{bmatrix} v^{-1}(\lambda_1 - w) & 1 \\ 1 & \lambda_2 - u \end{bmatrix}$ olsun. O zaman $rP_4 = P_4r$ sağlanır.

Ayrıca $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} P_4 = P_4 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ olduğundan $P_4^{-1} \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} P_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

elde edilir. $P = P_4^{-1}P_3P_2P_1$ olsun. Bu durumda $rP = Pr$ ve $r(PAP^{-1}) =$

$$P(rA)P^{-1} = PBP^{-1} = P_4^{-1}P_3P_2P_1BP_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}P_4$$

$$= P_4^{-1}P_3P_2CP_2^{-1}P_3^{-1}P_4$$

$$= P_4^{-1}P_3DP_3^{-1}P_4$$

$$\begin{aligned}
&= P_4^{-1} \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} P_4 \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $PAP^{-1} = r^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{-1}\lambda_1 & 0 \\ 0 & r^{-1}\lambda_2 \end{bmatrix}$ bulunur. $r^{-1}\lambda_1 \in U(R)$ ve $r^{-1}\lambda_2 \in J(R)$ olduğundan Lemma 5.3.18 gereğince PAP^{-1} yarı kutuplu olur. Böylece Lemma 5.3.6 gereğince A yarı kutupludur.

2. *Durum:* $s \in U(R)$ olsun. Bu durumda Lemma 5.3.5 gereğince $K_s(R) \cong K_1(R)$ dir. Lemma 5.3.6 gereğince $s = 1$ alınabilir. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve n , A nın $U(R)$ deki girdilerinin sayısı olsun. $1 \leq n \leq 4$ olduğu açıktır. $A \notin K_1(R)$ olduğundan $n \neq 3$ tür.

Eğer $n = 4$ ise $b \in U(R)$ dir. Bu durumda

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b^{-1}a & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b^{-1}a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ * & * \end{bmatrix}$ olup en fazla iki girdisi $U(R)$ nin elemanıdır. Fakat $n = 4$ kabul edildiğinden bu bir çelişkidir. Yani $n \neq 4$ olur.

Eğer $n = 2$ ise A matrisinin bir satırı veya bir sütunu tersinir eleman içerir. Lemma 5.3.4 ve Lemma 5.3.6 gereğince $a, b \in U(R)$ ve $c, d \in J(R)$ ya da $a, c \in U(R)$ ve $b, d \in J(R)$ kabul edilebilir. Eğer $c \in J(R)$ ise

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a^{-1}bc & a^{-1}b(d - ca^{-1}b) \\ c & -ca^{-1}b + d \end{bmatrix}$ olup sadece $a + a^{-1}bc \in U(R)$ dir. $n = 2$ kabul edildiği için bu bir çelişkidir. Benzer şekilde eğer $b \in J(R)$ ise

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + bca^{-1} & b \\ (-ca^{-1}b + d)ca^{-1} & -ca^{-1}b + d \end{bmatrix}$ olup sadece $a + bca^{-1} \in U(R)$ dir ve $n = 2$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece Lemma 5.3.6 gereğince $n = 1$ alınabilir. Tekrar Lemma 5.3.4 ve Lemma 5.3.6 gereğince $a \in U(R)$ ya da $b \in U(R)$ alınabilir.

Eğer $b \in U(R)$ ise $a, c, d \in J(R)$ dir. $X := \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in comm(A)$ olsun. Bu du-

rumda $AX = XA = \begin{bmatrix} xa + yc & ay + bw \\ za + wc & cy + dw \end{bmatrix}$ olur. Buradan

$I_2 + AX = \begin{bmatrix} 1 + xa + yc & ay + bw \\ za + wc & 1 + cy + dw \end{bmatrix}$ ve $\det(I_2 + AX) \in U(R)$ olduğundan $I_2 + AX \in U(K_1(R))$ elde edilir. Böylece $A \in (K_1(R))^{qnil}$ olur. Ayrıca $A + I_2 = \begin{bmatrix} 1 + a & b \\ c & 1 + d \end{bmatrix} \in U(K_1(R))$ olup A matrisi I_2 spektral eşkare elemanı ile yarı ku-tupludur.

Eğer $a \in U(R)$ ise $b, c, d \in J(R)$ dir. $U(R) \subseteq C(J(R)) + J(R)$ olduğundan $h \in C(J(R))$ ve $j \in J(R)$ olacak şekilde $a = h + j$ şeklindedir. $r = h^{-1}$ ve

$B = rA = \begin{bmatrix} 1 + rj & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$ olsun. $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ alınırsa $rP_1 = P_1r$ olur.

$C := P_1BP_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + r(j - b) & rb \\ 1 + r(j + c - b - d) & r(b + d) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 + a_1 & b_1 \\ 1 + c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu

durumda $a_1, b_1, c_1, d_1 \in J(R)$ dir. $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a_1(1 + c_1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alınırsa $rP_2 = P_2r$ sağlanır.

$D := P_2CP_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1(1 + c_1)^{-1} + b_1 - a_1(1 + c_1)^{-1}d_1 \\ 1 + c_1 & (1 + c_1)a_1(1 + c_1)^{-1} + d_1 \end{bmatrix}$
 $:= \begin{bmatrix} 1 & v \\ u & w \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $u \in 1 + J(R)$ ve $v, w \in J(R)$ dir.

Teorem 5.3.15 den $t^2 - (1 - u^{-1}wu)t - vu$ polinomu $\lambda_1 \in 1 + J(R)$ sol köküne ve $t^2 - (1 - w)t - uv$ polinomu $\lambda_2 \in 1 + J(R)$ sağ köküne sahiptir. $P_3 = \begin{bmatrix} 1 & v\lambda_2^{-1} \\ u\lambda_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}$

olsun. Bu durumda $P_3^{-1} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -v\lambda_2^{-1} \\ -u\lambda_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}$ ve $rP_3 = P_3r$ olduğundan

$P_3^{-1}r = rP_3^{-1}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} P_3^{-1}DP_3 &= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -v\lambda_2^{-1} \\ -u\lambda_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v \\ u & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v\lambda_2^{-1} \\ u\lambda_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & v\lambda_2^{-1}[\lambda_2^2 - (1 - w)\lambda_2 - uv]\lambda_2^{-1} \\ u\lambda_1^{-1}[\lambda_1^2 - \lambda_1(1 - u^{-1}wu) - vu]\lambda_1^{-1} & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$P = P_3^{-1}P_2P_1$ olsun. Bu durumda $rP = Pr$ ve $r(PAP^{-1}) = P(rA)P^{-1} = P_3^{-1}P_2P_1BP_1^{-1}P_2^{-1}P_3 = P_3^{-1}P_2CP_2^{-1}P_3 = P_3^{-1}DP_3 = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$ elde edilir. Buradan

$$PAP^{-1} = r^{-1} \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \text{ olup esas köşegende girdilerden biri tersinir diğerleri } J(R)$$

de ve R eş-ağaran olduğundan Lemma 5.3.18 gereğince PAP^{-1} yarı kutupludur. Böylece Lemma 5.3.6 gereğince A yarı kutupludur.

Sonuç 5.3.23. R bir yerel halka olmak üzere $R/J(R) \cong \mathbb{Q}$ ya da bir p asalı için $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_p$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $K_s(R)$ yarı kutupludur.
- (2) $K_s(R)$ kuvvetli temizdir ve R eş-ağarandır (Huang vd. 2012).

İspat: $\varphi : R/J(R) \rightarrow \mathbb{Z}_p$ izomorfizma olsun. Bu durumda $u \in U(R)$ olmak üzere $\varphi(u + J(R)) = \bar{a}$ şeklinde tanımlansın. Böylece $\bar{a} \in U(\mathbb{Z}_p)$ olur. Buradan $ax + py = 1$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. O zaman $\bar{a} \bar{x} = \bar{1}$ olur. φ örten olduğundan $\varphi(k + J(R)) = \bar{x}$ olacak şekilde $k \in U(R)$ vardır. Bu durumda $\bar{1} - \bar{a} \bar{x} = \varphi(1 + J(R)) - \varphi(u + J(R))\varphi(k + J(R)) = \varphi(1 - uk + J(R)) = \bar{0}$ olup $1 - uk + J(R) \in \text{Ker}\varphi = J(R)$ dir. Böylece $1 - uk \in J(R)$ dir. Yani $1 - uk = j$ olacak şekilde $j \in J(R)$ vardır. $u = k^{-1} + J(R)$ olup $U(R) \subseteq C(R) + J(R)$ bulunur. Teorem 5.3.22 den denklik ispatlanır. Benzer şekilde $R/J(R) \cong \mathbb{Q}$ olursa her $u \in U(R)$ için $1 - (mn^{-1})u \in J(R)$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $u \in nm^{-1} + J(R)$ olup $U(R) \subseteq C(R) + J(R)$ bulunur ve Teorem 5.3.22 den denklik ispatlanır.

Teorem 5.3.24. R bir yerel halka ve $J(R) \subseteq C(R)$ olsun. Bu durumda $K_s(R)$ nin yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $K_s(R)$ nin kuvvetli temiz olmasıdır (Huang vd 2012).

İspat: $K_s(R)$ yarı kutuplu ise Sonuç 4.2.12 den $K_s(R)$ kuvvetli temizdir. Karşıt olarak $K_s(R)$ kuvvetli temiz ve $J(R) \subseteq C(R)$ olsun. $u \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ olmak üzere $x \in R$ için $(l_u - r_j)(x) = 0$ alınırsa $ux - xj = ux - jx = (u - j)x = 0$ olur.

$u - j \in U(R)$ olduğundan $x = 0$ dir. Böylece $l_u - r_j$ birebirdir. Benzer şekilde $l_j - r_u$ nun da birebir olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak R eş-ağaran olur. Ayrıca $v \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ için hipotezden $J(R) \subseteq C(R)$ olduğundan $vj = jv$ olup $v = v + 0 \in C(J(R)) + J(R)$ yani $U(R) \subseteq C(J(R)) + J(R)$ elde edilir. Böylece Teorem 5.3.22 den $K_s(R)$ yarı kutupludur.

Sonuç 5.3.25. R bir değişmeli yerel halka ve $s \in U(R)$ olsun. $K_s(R)$ nin yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart her $w \in J(R)$ için $t^2 - t - w$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır (Huang vd. 2012).

İspat: Teorem 5.3.24 ve Sonuç 5.3.11 gereğince ispat açıktır.

Lemma 5.3.26. R yerel bir halka ve $s \in C(R) \cap U(R)$ olsun. Ayrıca $A \in K_s(R)$ olmak üzere A ve $A - I$ tersinir olmasın. Bu durumda $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $A \sim \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ ya da $A \sim \begin{bmatrix} w & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$ dir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. A ya da $I - A$ tersinir olmadığından Lemma 5.3.3 gereği $a \in 1 + J(R)$, $d \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$, $d \in 1 + J(R)$ olur.

1.Durum: $a \in 1 + J(R)$ ve $d \in J(R)$ olsun. Bu durumda $P = \begin{bmatrix} 1 & a^{-1}(b-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & a^{-1}(b-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a^{-1}(b-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + sa^{-1}(b-1)c & 1 - sa^{-1}(b-1)ca^{-1}(b-1) + a^{-1}(b-1)d \\ c & -sca^{-1}(b-1) + d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d_1 \end{bmatrix} \text{ olsun.} \end{aligned}$$

Bu durumda $a_1 \in U(R)$, $b_1 \in 1 + J(R) \subseteq U(R)$ ve $d_1 \in J(R)$ olmak üzere

$A \sim \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d_1 \end{bmatrix}$ dir. Böylece $b \in 1 + J(R)$ alınırsa

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ bc & bdb^{-1} \end{bmatrix} := B$ olup $A \sim B$ dir. Eğer $c \in U(R)$ ise istenilen elde edilir. Eğer $c \in J(R)$ ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ bc & bdb^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-s & 1 \\ a+bc-s-bdb^{-1} & s+bdb^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \text{ olup}$$

$u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ dir. Böylece $B \sim \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ bulunur. $A \sim B$

olduğundan $A \sim \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ elde edilir.

2.Durum: $a \in J(R)$ ve $d \in 1 + J(R)$ olması durumunda Lemma 5.3.4 gereğince benzer ispat yapılarak sonuca ulaşılır.

Teorem 5.3.27. R bir yerel halka ve $s \in C(R) \cap U(R)$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.
- (2) Her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u+w)t + (uw - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u+w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir.
- (3) Her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u+w)t + (uw - sv)$ polinomu $J(R)$ de sol köke sahiptir ve $t^2 - (u+w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir.
- (4) Her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix} \in K_s(R)$ kuvvetli temizdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Açıkça görülmektedir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Lemma 5.3.13 gereğince açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (4) $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olsun. $vuv^{-1} \in 1 + J(R)$ olduğundan (2) gereğince $t^2 - (vuv^{-1} + w)t + (vuv^{-1}w - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u+w)t + (wu - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir. Buradan Lemma 5.3.17 gereğince $\begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ kuvvetli temizdir.

(4) $\Rightarrow$ (2) $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$, $w \in J(R)$ olmak üzere $A = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ ve

$B = \begin{bmatrix} vuv^{-1} & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ alınsın. $vuv^{-1} \in 1 + J(R)$ olduğundan hipotez gereği A ve B kuvvetli temizdir. Lemma 5.3.17 gereğince $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomu $1 + J(R)$ de sağ köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + (vuv^{-1} - sv)$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir.

(1) $\Rightarrow$ (4) Açıkça görülmektedir.

(4) $\Rightarrow$ (1) $A \in K_s(R)$ olmak üzere A ve $A - I$ tersinir olmasın. Lemma 5.3.26 gereğince $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olmak üzere $A \sim \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & w \end{bmatrix}$ ya da $A \sim \begin{bmatrix} w & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$ dir. Hipotezden ilk durum aşıkard olduğundan $A = \begin{bmatrix} w & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$

olması durumu incelensin. Lemma 5.3.4 gereğince $B = \begin{bmatrix} u & v \\ 1 & w \end{bmatrix}$ nın kuvvetli temiz olduğunu kontrol etmek yeterlidir. Lemma 5.3.26 nın ispatından $u' \in 1 + J(R)$, $v' \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ olmak üzere $\begin{bmatrix} u & v \\ 1 & w \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u' & 1 \\ v' & w' \end{bmatrix} := C$ dir. Hipotezden C kuvvetli temizdir. Kuvvetli temiz olmak benzerlik altında korunduğundan B kuvvetli temizdir.

Lemma 5.3.28. R değişmeli bir halka ve $s \in J(R)$ olsun. $a \in U(R)$, $d \in J(R)$, $I = (sc)R + dR$ ve $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n \in U(R)$, $b_n \in I^n$, $d_n \in I$ olmak üzere $A \sim \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c & d_n \end{bmatrix}$ vardır (Tang ve Zhou 2012).

İspat: n üzerinden tümevarım uygulanırsa $n = 0$ için $I^0 = R$ olup $a_0 = a$, $b_0 = b$ ve $d_0 = d$ için sonuç açıktır. $n \geq 1$ için $a_{n-1} \in U(R)$, $b_{n-1} \in I^{n-1}$, $d_{n-1} \in I$ ve A ile benzer olacak şekilde $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c & d_n \end{bmatrix}$ var olsun. Bu durumda $P = \begin{bmatrix} 1 & -a_{n-1}^{-1}b_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c & d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{n-1} + \frac{scb_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}(d_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}) \\ c & d_{n-1} - \frac{scb_{n-1}}{a_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c & d_n \end{bmatrix} \text{ ve } a_n \in U(R), b_n \in I^n, d_n \in I \text{ olup istenilen elde edilir.}$$

Teorem 5.3.29. R değişmeli yerel bir halka, $s \in J(R)$ ve $n \geq 0$ tamsayısı için aşığıdakiler denktir.

(1) $K_s(R)$ kuvvetli temizdir.

(2) Her $w_0 \in U(R)$ ve $w_1 \in J(R)$ için $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomu R de köke sahiptir.

(3) Her $w_0 \in J(R)^n$ ve $w_1 \in J(R)$ için $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomu R de köke sahiptir.

(4) Her $w_0 \in J(R)^n$ ve $w_1 \in J(R)$ için $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ w_0 & w_1 \end{bmatrix}$ kuvvetli temizdir (Tang ve Zhou 2012).

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomunun köke sahip olması için gerek ve yeter şart $(\frac{t}{u})^2 - (1 + \frac{w}{u})(\frac{t}{u}) + (\frac{w}{u} - s\frac{v}{u^2})$ polinomunun köke sahip olmasıdır. Teorem 5.3.27(3) gereğince her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u + w)t + (uw - sv)$ polinomunun $J(R)$ de köke sahip olması için gerek ve yeter şart her $w_0, w_1 \in J(R)$ için $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomunun $J(R)$ de köke sahip olmasıdır. Lemma 5.3.13 (2) den denklik açıkça görölmektedir.

(1) $\Rightarrow$ (4) Açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (3) $w_1 \in J(R)$, $w_0 \in J(R)^n$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ w_0 & w_1 \end{bmatrix}$ olsun. Buradan $\det_s(A) = w_1 - sw_0 \in J(R)$ ve $\det_s(A - I) = -sw_0 \in J(R)$ dir. Böylece A aşıkarmaym kuvvetli temizdir. Teorem 5.3.10 gereğince $t^2 - (tr A)t + \det_s(A)$ polinomu R de köke sahiptir. $tr A = 1 + w_1$ ve $\det_s(A) = w_1 - sw_0$ olduğundan istenilen elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$ olsun. A ve $A - I$ tersinir olmasın. Bu durumda $\det_s(A) = ab - sxy \in J(R)$ ve $\det_s(A - I) \in J(R)$ olduğundan $tr A = a + b = 1 - \det_s(A - I) - \det_s(A) \in 1 + J(R)$ dir. Böylece $a \in U(R)$, $b \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$, $b \in U(R)$ dir. Lemma 5.3.4 gereği $a \in U(R)$ ve $b \in J(R)$ alınsın. Buradan $(sy)R + bR \subseteq J(R)$ dir.

Lemma 5.3.28 gereğince $u \in U(R)$, $w \in J(R)^n$ ve $d \in J(R)$ için A ile benzer olan $B = \begin{bmatrix} u & v \\ y & d \end{bmatrix}$ mevcuttur. Hipotezden $r^2 - (1 + \frac{d}{u})r + (\frac{d}{u} - s(\frac{wy}{u^2})) = 0$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $(ur)^2 - (trB)(ur) - det_s(B) = 0$ olup $t^2 - (trB)t + det_s(B) = 0$ dır. $trB \in 1 + J(R)$ ve $det_s(B) \in J(R)$ olduğundan Teorem 5.3.10 gereğince B kuvvetli temizdir. Kuvvetli temiz olmak benzerlik altında korunduğundan A da kuvvetli temiz olur.

Sonuç 5.3.30. R bir değişmeli yerel halka ve $s \in J(R)$ olsun. $K_s(R)$ nin yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart her $w_0, w_1 \in J(R)$ için $t^2 - (1 + w_1)t + (w_1 - sw_0)$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır (Huang vd. 2012).

İspat: Teorem 5.3.24 ve Teorem 5.3.29 gereğince ispat açıktır.

Bundan sonraki bölümde $s = 0$ olduğu durum incelenecektir.

Tanım 5.3.31. R bir yerel halka olsun. Eğer her $u \in 1 + J(R)$ ve her $j \in J(R)$ için R nin $l_u - r_j, l_j - r_u$ abel grup endomorfizmaları örten ise R ye *zayıf ağaran (weakly bleached) halka* denir (Yang ve Zhou 2008).

Örnek 5.3.32. A, B yerel halka ve ${}_A V_B$ bir ikili modül olsun. $R = \begin{bmatrix} A & V \\ 0 & B \end{bmatrix}$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- (1) R kuvvetli temizdir.
- (2) Eğer $a - 1 \in J(A)$, $b \in J(B)$ ve $v \in V$ ise o zaman $v = xb - ax$ olacak şekilde $x \in V$ vardır (Nicholson 1999).

Teorem 5.3.33. R bir yerel halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (1) $K_0(R)$ kuvvetli temizdir.
- (2) $T_2(R)$ kuvvetli temizdir.
- (3) R zayıf ağarandır.
- (4) Her $u \in 1 + J(R)$ ve her $j \in J(R)$ için $(l_u - r_j)(x) = 1$, $(l_j - r_u)(y) = 1$ olacak şekilde $x, y \in R$ mevcuttur.

- (5) Her $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $w \in J(R)$ için $t^2 - (u + w)t + uw$ polinomu $J(R)$ de sol köke sahiptir ve $t^2 - (u + w)t + wu$ polinomu $J(R)$ de sağ köke sahiptir (Huang vd. 2012).

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (5) Teorem 5.3.27 gereğince ispat açıktır.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Örnek 5.3.32 gereğince ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Tanım 5.3.31 gereğince ispat açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K_0(R)$ olsun. $A \in U(K_0(R))$ veya $I_2 - A \in U(K_0(R))$ olduğunda A nın kuvvetli temiz olduğu açıktır. Bu nedenle $A \notin U(K_0(R))$ ve $I_2 - A \notin U(K_0(R))$ alınabilir. Buradan $a \in 1 + J(R)$ ve $d \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$ ve $d \in 1 + J(R)$ dir. Lemma 5.3.4 gereğince $a \in 1 + J(R)$ ve $d \in J(R)$ olsun. Lemma 5.3.26 nin ispatına benzer ispat yapılırsa $u \in 1 + J(R)$, $v \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ olmak üzere $A \sim \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & j \end{bmatrix}$ bulunur. Hipotezden $ux - xj = 1$ olacak şekilde $x \in R$ vardır.

$P = \begin{bmatrix} v & vx \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U(K_0(R))$ olup $P^{-1} = \begin{bmatrix} v^{-1} & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Böylece

$A \sim P \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & j \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} vuv^{-1} & 0 \\ 1 & j \end{bmatrix}$ elde edilir. Hipotezden $jy - y(vuv^{-1}) = 1$ ola-

cak şekilde $y \in R$ vardır. O zaman $A \sim B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} vuv^{-1} & 0 \\ 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vuv^{-1} & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$ bulunur. Lemma 5.3.16 den B kuvvetli temiz olduğundan A da kuvvetli temizdir.

(1) $\Rightarrow$ (3) $u \in 1 + J(R)$, $j \in J(R)$ ve $x, y \in R$ olsun. (1) den $A = \begin{bmatrix} u & -x \\ 0 & j \end{bmatrix} \in K_0(R)$ kuvvetli temizdir. O zaman $A = U + E$, $AE = EA$ olacak şekilde $E^2 = E \in K_0(R)$ ve $U \in U(K_0(R))$ vardır. $a, b \in U(R)$ ve $c^2 = c$, $d^2 = d \in R$ olmak üzere $U = \begin{bmatrix} a & * \\ * & b \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} c & z \\ * & d \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $u = a + c$ ve $j = b + d$

olup $c = 0$ ve $d = 1$ dir. Böylece $E = \begin{bmatrix} 0 & z \\ * & 1 \end{bmatrix}$ olur. Şimdi $AE = EA$ olduğundan $uz - x = zj$ yani $(l_u - r_j)(z) = x$ elde edilir. Böylece $l_u - r_j$ örten olur. Benzer

şekilde $\begin{bmatrix} j & y \\ 0 & u \end{bmatrix} \in K_0(R)$ nin kuvvetli temiz olduğu kullanılırsa $(l_j - r_u)(z') = y$ olacak şekilde $z' \in R$ nin var olduğu görülür. Buradan $l_j - r_u$ örten olur. Böylece R zayıf ağaran bulunur.

Uyarı 5.3.34. $1_R = 1_S$ ve $R \cap U(S) = U(R)$ olmak üzere R halkası S halkasının bir alt halkası olsun. $a \in R$ ve $e^2 = e \in R$ alınsın. Eğer a, e spektral eşkare elemanı ile S de yarı kutuplu ise a, e spektral eşkare elemanı ile R de yarı kutupludur (Huang vd. 2012).

Teorem 5.3.35. R bir yerel halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (1) $K_0(R)$ yarı kutupludur.
- (2) $T_2(R)$ halkasının her elemanı $K_0(R)$ halkasında yarı kutupludur.
- (3) $T_2(R)$ yarı kutupludur (Huang vd. 2012).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in T := T_2(R)$ olsun. Örnek 4.1.3 gereğince $A \notin U(T) \cup J(T)$ alınabilir. Böylece $a \in U(R)$ ve $d \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$ ve $d \in U(R)$ dir. (2) den A $K_0(R)$ de yarı kutupludur. A nın spektral eşkare elemanı $E = \begin{bmatrix} * & * \\ e & * \end{bmatrix}$ olsun. $AE = EA$ olduğundan $de - ea = 0 = (l_d - r_a)(e)$ bulunur. Lemma 5.3.18 gereğince $l_d - r_a$ birebir olup $e = 0$ elde edilir. Böylece $E \in T_2(R)$ olur. Uyarı 5.3.34 gereğince A matrisi E spektral eşkare elemanı ile $T_2(R)$ de yarı kutupludur.

(3) $\Rightarrow$ (1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K_0(R)$ olsun. Örnek 4.1.3 gereğince $A \notin U(K_0(R)) \cup J(K_0(R))$ alınabilir. Böylece $a \in U(R)$ ve $d \in J(R)$ ya da $a \in J(R)$ ve $d \in U(R)$ dir. Lemma 5.3.4 gereğince $a \in U(R)$ ve $d \in J(R)$ durumunu incelemek yeterlidir. $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} d & c \\ 0 & a \end{bmatrix} \in T := T_2(R)$ olsun. (3) den A_1 ve A_2 , T de

yarı kutupludur. A_1 in spektral eşkare elemanı $E_1 = \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve A_2 nin spektral

eşkare elemanı $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & g \end{bmatrix}$ olsun. $E_1 = I_2$ alınsın. Bu durumda $A_1 + I_2 \in U(T)$ olduğundan $a + 1, d + 1 \in U(R)$ olur ve $A + I_2 \in U(K_0(R))$ bulunur. Eğer $X = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in comm(A)$ ise $X_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in comm(A_1)$ olur. Böylece $I_2 + X_1 A_1 \in U(T)$ bulunur ve $1 + xa, 1 + zd \in U(R)$ elde edilir. Buradan $I_2 + XA \in U(K_0(R))$ olup A matrisi I_2 spektral eşkare elemanı ile $K_0(R)$ de yarı kutuplu olur. Eğer $E_2 = I_2$ olursa $A_2 + I_2 \in U(T)$ olduğundan $d + 1, a + 1 \in U(R)$ dir. Böylece $A + I_2 \in U(K_0(R))$ sağlanır. Eğer $X = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in comm(A)$ ise $X_2 = \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & x \end{bmatrix} \in comm(A_2)$ olur. Böylece $I_2 + X_2 A_2 \in U(T)$ bulunur ve $1 + zd, 1 + xa \in U(R)$ elde edilir. Buradan $I_2 + XA \in U(K_0(R))$ olup A matrisi I_2 spektral eşkare elemanı ile $K_0(R)$ de yarı kutuplu olur. Bu nedenle $E_1 \neq I_2$ ve $E_2 \neq I_2$ alınabilir. Bu durumda $e = 0$ ve $g = 0$ dir. Böylece $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. Şimdi $E = \begin{bmatrix} 0 & f \\ h & 1 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman $s = 0$ olduğundan $E^2 = E \in K_0(R)$, $A + E = \begin{bmatrix} a & b + f \\ c + h & d + 1 \end{bmatrix} \in U(K_0(R))$ ve $AE = \begin{bmatrix} 0 & af + b \\ dh & d \end{bmatrix} \in J(K_0(R)) \subseteq (K_0(R))^{qnil}$ elde edilir. Son olarak $X = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in comm(A)$ olsun. Bu durumda $X_1 = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in comm(A_1)$ ve $X_2 = \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & x \end{bmatrix} \in comm(A_2)$ olduğundan $E_1 X_1 = X_1 E_1$ ve $E_2 X_2 = X_2 E_2$ dir. Buradan $fz = xf + y$ ve $w + hx = zh$ elde edilir. Böylece $EX = XE$ olur ve A nın E spektral eşkare elemanı ile $K_0(R)$ de yarı kutuplu olduğu ispatlanır.

Lemma 5.3.36. R bir halka olsun. $u \in U(R)$, $j \in J(R)$ ve $x \in R$ olarak verilsin.

Bu durumda $T_2(R)$ halkasında $j', j'' \in J(R)$ olmak üzere $\begin{bmatrix} u & x \\ 0 & j \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u & 1 \\ 0 & j' \end{bmatrix}$ ve

$$\begin{bmatrix} j & x \\ 0 & u \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} j'' & 1 \\ 0 & u \end{bmatrix} \text{ dir (Huang vd. 2012)}$$

$$\begin{aligned}
\text{İspat: } \begin{bmatrix} u & x \\ 0 & j \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & u^{-1}(x-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x \\ 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -u^{-1}(x-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u & x_1 \\ 0 & j \end{bmatrix} \quad (\text{burada } x_1 = 1 + u^{-1}(x-1)j \in 1 + J(R) \text{ dir.}) \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x_1 \\ 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 1 \\ 0 & x_1 j x_1^{-1} \end{bmatrix} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} j & x \\ 0 & u \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & (1-x)u^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & x \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -(1-x)u^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j & x_1 \\ 0 & u \end{bmatrix} \quad (\text{burada } x_1 = 1 + j(x-1)u^{-1} \in 1 + J(R) \text{ dir.}) \\
&\sim \begin{bmatrix} x_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & x_1 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{-1} j x_1 & 1 \\ 0 & u \end{bmatrix} \text{ bulunur ve istenilen elde}
\end{aligned}$$

edilir.

Lemma 5.3.37. R bir eş-ağaran yerel halka, $u \in U(R)$ ve $j \in J(R)$ olsun.

- (1) Eğer $bj - ub = 1$ ise $\begin{bmatrix} u & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix}$ matrisi, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ spektral eşkare elemanı ile $K_0(R)$ de yarı kutupludur.
- (2) Eğer $jb - bu = 1$ ise $\begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ matrisi, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ spektral eşkare elemanı ile $K_0(R)$ de yarı kutupludur (Huang vd. 2012).

İspat:

- (1) $A = \begin{bmatrix} u & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $A + E \in U(K_0(R))$ ve $AE = \begin{bmatrix} 0 & ub+1 \\ 0 & j \end{bmatrix} \in J(K_0(R)) \subseteq (K_0(R))^{qnil}$ elde edilir. Şimdi $X = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in comm(A)$ olsun. Buradan $wu - jw = 0$ olur ve R eş-ağaran olduğundan $w = 0$ bulunur. Böylece $XA = AX$ den $xu = ux$, $zj = jz$, $x + yj = uy + z$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
u(xb + y - bz) &= xub + uy - ubz \\
&= x(bj - 1) + (x + yj - z) - (bj - 1)z \\
&= xbj + yj - bjz \\
&= (xb + y - bz)j
\end{aligned}$$

bulunur ve R eş-ağaran olduğundan $xb + y - bz = 0$ elde edilir. Bu durumda

$$XE = \begin{bmatrix} 0 & xb + y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bz \\ 0 & z \end{bmatrix} = EX \text{ olup } E \in comm^2(A) \text{ elde edilir.}$$

Böylece A nın E spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olduğu ispatlanır.

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & u \end{bmatrix} \text{ ve } E = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olsun. Bu durumda } A + E \in U(K_0(R))$$

$$\text{ve } AE = \begin{bmatrix} j & jb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in J(K_0(R)) \subseteq (K_0(R))^{qnil} \text{ elde edilir. } X = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in$$

$comm(A)$ olsun. O zaman $wj - uw = 0$ olur ve R eş-ağaran olduğundan $w = 0$

dır. Böylece $AX = XA$ eşitliğinden $xj = jx$, $x + yu = jy + z$ ve $uz = zu$ elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}
j(y + bz - xb) &= jy + jbz - xjb \\
&= x + yu - z + (1 + bu)z - x(1 + bu) \\
&= yu + bzu - xbu \\
&= (y + bz - xb)u
\end{aligned}$$

bulunur ve R eş-ağaran olduğundan $y + bz - xb = 0$ dır. Bu durumda $XE =$

$$\begin{bmatrix} x & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y + bz \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = EX \text{ olup } E \in comm^2(A) \text{ elde edilir. Böylece } A$$

nın E spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olduğu ispatlanır.

Sonuç 5.3.38. R bir yerel halka olmak üzere her $u \in U(R)$ ve her $j \in J(R)$ için $(l_u - r_j)(x) = 1$, $(l_j - r_u)(x) = 1$ olacak şekilde $x, y \in R$ mevcut olsun. Bu durumda

- (1) $T_2(R)$ nin her elemanının $K_s(R)$ de yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart R nin eş-ağaran olmasıdır.
- (2) $K_0(R)$ nin yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart R nin eş-ağaran olmasıdır (Huang vd. 2012).

İspat:

(1) $T_2(R)$ nin her elemanı $K_s(R)$ de yarı kutuplu olsun. Bu durumda Lemma 5.3.18 gereğince R eş-ağarandır. Karşıt olarak R eş-ağaran olsun. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in T_2(R)$ alınsın. $a, d \in U(R)$ ya da $a, d \in J(R)$ olduğu durumda A nın yarı kutuplu olduğu açıktır. Bu nedenle $a \in U(R)$ ve $d \in J(R)$ ya da $d \in U(R)$ ve $a \in J(R)$ olduğu durumlara bakmak yeterlidir. Bu durumda Lemma 5.3.36 gereğince $b = 1$ kabul edilebilir. Böylece Lemma 5.3.37 gereğince $A \in T_2(R)$, $K_s(R)$ de yarı kutuplu olur.

(2) Teorem 5.3.35 ve (1) den açıkça görülmektedir.

Teorem 5.3.39. R bir değişmeli yerel halka ve $\det_s(A) \in J(R)$ olacak şekilde $A \in K_s(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (1) $\text{tr}(A) \in J(R)$ olması için gerek ve yeter şart A nın, I_2 spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olmasıdır.
- (2) $\text{tr}(A) \in U(R)$ olmak üzere A nın yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart $t^2 - \text{tr}(A)t + \det_s(A)$ polinomunun R de köke sahip olmasıdır (Huang vd. 2012).

İspat:

(1) $\text{tr}(A) \in U(R)$ olsun. $Y = \begin{bmatrix} -\text{tr}(A)^{-1} & 0 \\ 0 & -\text{tr}(A)^{-1} \end{bmatrix}$ alınırsa $Y \in \text{comm}(AI_2)$ olur. Bu durumda $\det(I_2 + AI_2Y) = \text{tr}(A)^{-2} \det_s(A) \in J(R)$ olduğundan $I_2 + AI_2Y \notin U(K_s(R))$ dir. Bu ise $AI_2 \in (K_s(R))^{qnil}$ olması ile çelişir. Bu nedenle $\text{tr}(A) \in J(R)$ dir. Karşıt olarak $\text{tr}(A) \in J(R)$ olsun. Eğer $s \in U(R)$ ise Lemma 5.3.5 den $f : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ sc & d \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu

$K_s(R)$ den $K_1(R)$ ye bir izomorfizmadır. Bu durumda $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere $\text{tr}(A) = \text{tr}(f(A)) \in J(R)$ ve $\det_s(A) = \det(f(A)) \in J(R)$ bulunur. Böylece Teorem 5.1.4 gereğince $f(A)$ matrisi, I_2 spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olur. Sonuç olarak $f(I_2) = I_2$ olduğundan Lemma 5.3.5 gereğince A nın, I_2 spektral eşkare elemanı ile $K_s(R)$ de yarı kutuplu olduğu ispatlanır.

$s \in J(R)$ olsun. $tr(A) \in J(R)$ ve $det_s(A) \in J(R)$ olduğundan $a, d \in J(R)$ dir. Bu durumda $A \in J(K_s(R))$ olup Örnek 4.1.3 den I_2 spektral eşkare elemanı ile $K_s(R)$ de yarı kutupludur.

- (2) $\lambda_1 \in R, t^2 - tr(A)t + det_s(A) = 0$ in bir çözümü olsun. O zaman $\lambda_2 = tr(A) - \lambda_1$ diğer çözümdür. Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in J(R)$ ise $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \in J(R)$ olup (1) den A yarı kutupludur. λ_1 ve λ_2 aynı anda $J(R)$ de olmasın. $det_s(A) = \lambda_1 \lambda_2 \in J(R)$ olduğundan $\lambda_1 \in U(R)$ ve $\lambda_2 \in J(R)$ ya da $\lambda_1 \in J(R)$ ve $\lambda_2 \in U(R)$ dir. Genelliği bozmaksızın $\lambda_1 \in U(R)$ ve $\lambda_2 \in J(R)$ alınsın. Bu durumda $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere $a + d = tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \in U(R)$ dir. Lemma 5.3.4 ve Lemma 5.3.6 gereğince $a \in U(R)$ kabul edilebilir. Böylece $\lambda_1 - d = a - \lambda_2 \in U(R)$ olur. $P = \begin{bmatrix} 1 & b(\lambda_2 - a)^{-1} \\ c(\lambda_1 - d)^{-1} & 1 \end{bmatrix}$ olsun.
- $$det_s(P) = 1 - sbc(\lambda_1 - d)^{-1}(\lambda_2 - a)^{-1}$$
- $$= (\lambda_1 - d)^{-1}(\lambda_2 - a)^{-1}[(\lambda_1 - d)(\lambda_2 - a) - sbc]$$
- $$= (\lambda_1 - d)^{-1}(\lambda_2 - a)^{-1}(-\lambda_1 a - d\lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 + det_s(A)) \in U(R)$$
- olduğundan $P \in U(K_s(R))$ dir. Ayrıca $AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ olduğundan
- $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
- dir. Böylece Lemma 5.3.6 gereğince A yarı kutuplu olur. Karşıt olarak $tr(A) \in U(R)$ ve A matrisi, E spektral eşkare elemanı ile yarı kutuplu olsun. Lemma 5.3.8 den ve Lemma 5.3.16 nın ispatından $E \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ya da $E \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Fakat $A \notin U(K_s(R))$ olduğundan E matrisi $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile benzer değildir. Ayrıca $tr(A) \in U(R)$ olduğundan $E \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Dolayısıyla E matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ile benzer değildir. Bu nedenle aşağıdaki iki durumu incelemek yeterlidir.
- 1.Durum: $E \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $P^{-1}EP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak şekilde $P \in U(K_s(R))$ vardır. Böylece Lemma 5.3.6 gereğince $B := P^{-1}AP$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ spektral eşkare elemanı ile yarı kutupludur. Buradan $B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ B olup $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ şeklinde köşegensel matristir. Lemma 5.3.9
 gereğince $\det_s(A) = \det_s(B) = \lambda_1\lambda_2$ ve $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2$ dir. Böylece
 $t^2 - \text{tr}(A)t + \det_s(A) = 0$ nin R de çözümü sahip olduğu açıktır.
 2.Durum: $E \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. İspat 1. Duruma benzerdir.

Sonuç 5.3.40. R değişmeli yerel bir halka ve $A \in K_s(R)$ olsun. Bu durumda A nın yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

- (1) $\det_s(A) \in U(R)$ dir.
- (2) $\det_s(A) \in J(R)$ ve $\text{tr}(A) \in J(R)$ dir.
- (3) $\det_s(A) \in J(R)$, $\text{tr}(A) \in U(R)$ ve $t^2 - \text{tr}(A)t + \det_s(A)$ polinomu R de köke sahiptir (Huang vd. 2012).

Lemma 5.3.41. $R = S + K$ olacak şekilde R bir halka, R nin alt halkası S ve R nin üstel sıfır bir ideali K olsun. Bu durumda S nin kuvvetli π -düzenli olması için gerek ve yeter şart R nin kuvvetli π -düzenli olmasıdır (Tang vd. 2012).

Teorem 5.3.42. MN ve NM sırasıyla A ve B nin üstel sıfır idealleri olacak şekilde $R := \begin{bmatrix} A & M \\ N & B \end{bmatrix}$ Morita yapısı olsun. Bu durumda R nin kuvvetli π -düzenli olması için gerek ve yeter şart A ve B nin kuvvetli π -düzenli olmasıdır (Tang vd. 2012).

Önerme 5.3.43. R bir yerel halka ve $s \in J(R)$ olsun. $K_s(R)$ nin kuvvetli π -düzenli olması için gerek ve yeter şart $J(R)$ nin üstel ideal olmasıdır (Huang vd. 2012).

İspat: $K_s(R)$ kuvvetli π -düzenli olsun. Bu durumda $J(K_s(R))$ üstel ideal olur. O zaman Lemma 5.3.3 den $J(R)$ üstel idealdir. Karşıt olarak R yerel olduğundan $J(R)$ üstel ideal ise R kuvvetli π -düzenlidir ve s üstel sıfır elemandır. Böylece Teorem 5.3.42 den $K_s(R)$ kuvvetli π -düzenlidir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada genelleştirilmiş Drazin-ters tanımından yola çıkılarak yarı kutuplu halka tanımı yapılmıştır. Genelleştirilmiş Drazin-tersinir eleman tanımı ile yarı kutuplu eleman tanımının denk olduğu ispatlanmıştır. Bazı halka sınıflarının hangi şartlar altında yarı kutuplu olduklarını gösteren teoremler verilmiştir. $M_2(R)$, $T_n(R)$ matris halkalarının yarı kutupluluğu incelenmiştir. Morita içeriğinin halkasının özel bir hali olan $K_s(R)$ matris halkası tanımlanmış ve yarı kutuplu olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır.

Bunlara ek olarak yarı kutuplu halka tanımından yola çıkarak üstel yarı kutuplu halka tanımı yapılmıştır. Üstel yarı kutuplu halkaların yarı kutuplu olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $M_2(R)$ nin hangi şartlar altında üstel yarı kutuplu olduğu da araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

- Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer-Verlag, 376 p., Berlin.
- Armendariz, E.P., Fisher, J.W. and Snider, R.L. 1978. On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules. Comm. Algebra, Vol. (6); pp. 659-672.
- Azumaya, G. 1954. Strongly π -regular rings. J. Fac. Sci. Hokkaido U., Vol. (13); 34-39.
- Borooah, G., Diesl, A.J. and Dorsey, T.J. 2007. Strongly clean triangular matrix rings over local rings. J. Algebra, Vol.(312); 773-797.
- Borooah, G., Diesl, A.J. and Dorsey, T.J. 2008. Strongly clean matrix rings over commutative local rings. J. Pure Appl. Algebra, Vol.(212); 281-296.
- Chen, J., Yang, X. and Zhou, Y. 2006. On strongly clean matrix and triangular matrix rings. Comm. Algebra, Vol.(34); 3659-3674.
- Chen, H. 2010. On strongly J -clean rings. Comm. Algebra, Vol. (38); 3790-3804.
- Chen, H. 2013. On strongly nil clean matrices. Comm. Algebra, Vol. (41)(3); 1074-1086.
- Chen, J., Yang, X. and Zhou, Y. 2006. When is 2×2 matrix ring over a commutative local ring strongly clean? J. Algebra, 301 ; 280-293.
- Cui, J. and Chen, J. 2011. When is a 2×2 matrix ring over a commutative local ring quasipolar? Comm. Algebra, Vol.(39); 3212-3221.
- Cui, J. and Chen, J. 2012a. Notes on quasipolar rings. J. Math. Study, Vol.(45)(2); 167-174.
- Cui, J. and Chen, J. 2012b. Quasipolar triangular matrix rings over local rings. Comm. Algebra, Vol.(40); 784-794.
- Dischinger, M.F. 1976. Sur les anneaux fortement π -reguliers. C. R. Acad. Sc. Paris, Vol. (283); 571-573.

- Diesl, A.J. 2006. Classes of strongly clean rings. Ph.D. Thesis,
University of California, Berkeley.
- Dorsey, T.J. 2006. Cleanness and strong cleanness of rings of matrices.
Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.
- Drazin, M.P 1958. Pseudo-inverses in associative rings and semigroups. Amer.
Math. Monthly, Vol. (65); 506-514.
- Gürgün, O., Halıcıoğlu, S. and Harmancı A. 2014. Nil-quasipolar rings. Bol.
Soc. Math. Mex., Vol.(20); 29-38.
- Harte, R.E. 1991. On quasinilpotents in rings. Panam. Math. J., Vol.(1);
10-16.
- Huang, Q., Tang, G. and Zhou, Y. 2014. Quasipolar property of generalized
matrix rings. Comm. Algebra., Vol.(42); 3883-3894.
- Koliha, J.J. and Patricio, P. 2002. Elements of rings with equal spectral
idempotents. J. Austral. Math. Soc., Vol.(72); 137-152.
- Krylov, P.A. 2008. Isomorphism of generalized matrix rings. Algebra Logic,
Vol. (47)4; 258-262.
- Krylov, P.A. and Tuganbaev, A.A. 2010. Modules over formal matrix rings.
J. Math. Sci., Vol. (171)2; 248-295.
- Lam, T.Y. 1998. Lectures on Modules and Rings. Springer-Verlag, 557 s., Berlin.
- Lam, T.Y. 2001. A First Course in Noncommutative Rings. Springer-Verlag,
441 s., Berlin.
- Li, Y. 2007. Strongly clean matrix ring over local rings. J. Algebra, Vol. (1)312;
397-404.
- Nicholson, W. K. 1977. Lifting idempotents and exchange rings. Trans. Amer.
Math. Soc., Vol. (229); pp. 269-278.
- Nicholson, W.K. and Zhou, Y. 2004. Rings which elements are uniquely
the sum of an idempotent and a unit. Glasgow Math. J.,
Vol.(46); 227-236.
- Nicholson, W.K. 1999. Strongly clean rings and Fitting's lemma. Comm.
Algebra, Vol.(27); 3583-3592.
- Tang, G. and Zhou, Y. 2012. Strongly cleanness of generalized matrix rings

- over a local ring. Linear Algebra Appl., Vol.(437); 2546-2559.
- Tang, G. Li, C. and Zhou, Y. 2014. Study of Morita contexts Comm. Algebra., Vol.(42); 1668-1681.
- Yang, X. and Zhou, Y. 2008. Strongly cleanness of the 2×2 matrix ring over a general local ring. J. Algebra, Vol.(320); 2280-2290.
- Ying Z. and Chen J. 2012. On quasipolar rings. Algebra Colloq., Vol.(4); 683-692.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğçe ÇALCI
Doğum Yeri : İzmir
Doğum Tarihi : 10.04.1989
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Menemen Anadolu Lisesi, İzmir (2007)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Eylül 2012-Temmuz 2014)