

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TAM DEĞİŞMEZ ALTMODÜLLER İLE BAZI MODÜL
AYRIŞIMLARI

Tuğba PAKEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TAM DEĞİŞMEZ ALTMODÜLLER İLE BAZI MODÜL AYRIŞIMLARI

Tuğba PAKEL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı yer almaktadır. İkinci bölümde çalışmada kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmektedir. Üçüncü bölümde F -ters parçalı modül kavramının bir duali olan dual F -ters parçalı modül kavramı tanımlanmaktadır. Dual F -ters parçalı olma özelliği modüllerin direkt toplamalarında, direkt toplananlarında ve halkalarda incelenmektedir. Ayrıca dual $Z^*(M)$ -ters parçalı modüller tanımlanmakta ve araştırılmaktadır. Dördüncü bölümde ise F -ters parçalı modül kavramının bir diğer duali olan F -görüntü parçalı modül tanımı verilmekte ve özellikleri incelenmektedir. F -görüntü parçalı olma özelliği de modüllerin direkt toplamalarında, direkt toplananlarında ve halkalarda çalışılmaktadır. Ayrıca $Z(M)$ -görüntü parçalı modüller ve güçlü F -görüntü parçalı modüller tanımlanarak özellikleri araştırılmaktadır. Bölümün sonunda dual F -ters parçalı modüller ile F -görüntü parçalı modüller karşılaştırılmaktadır. Son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlar özetlenmektedir.

Haziran 2022, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tam değişmez altmodül, Rickart modül, dual Rickart modül, ters parçalı modül, dual ters parçalı modül, görüntü parçalı modül

ABSTRACT

Master Thesis

SOME MODULE DECOMPOSITIONS VIA FULLY INVARIANT SUBMODULES

Tuğba PAKEL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR

This thesis consists of five chapters. The first chapter includes the goal of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems which will be used in the thesis are given. In the third chapter, the concept of dual F -inverse split modules which is a dual notion of the F -inverse split module is defined. Dual F -inverse split property is investigated on direct sum of modules, direct summands of modules and rings. Moreover, dual $Z^*(M)$ -inverse split modules are defined and studied. In the fourth chapter, the concept of F -image split modules which is an another dual notion of the concept of F -inverse split module is defined and its properties are investigated. Also, F -image split property is studied on direct sum of modules, direct summands of modules and rings too. Furthermore, $Z(M)$ -image split modules and strongly F -image split modules are defined and their properties are studied. At the end of the chapter, dual F -image split modules and F -image split modules are compared with each other. In the last chapter, the results obtained in the thesis are summarized.

June 2022, 46 pages

Key Words: Fully invariant submodule, Rickart module, dual Rickart module, inverse split module, dual inverse split module, image split module

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde bana bilgi ve tecrübeleriyle rehberlik eden, kendisinden çok şey öğrendiğim danışmanım Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), yardımları ve önerileri ile bana her zaman yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen hocam, değerli bilim insanı Prof. Dr. Abdullah HARMANCI'ya (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), desteğini her zaman hissettiğim ve bu çalışmada da tavsiyeleri ile bana yardım eden hocam Dr. Öğr. Üyesi Tuğçe ÇALCI'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), 2210 kodlu Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a ve her zaman yanımda olan sevgili aileme yürekten teşekkür ederim.

Tuğba PAKEL
Ankara, Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1 Temel Kavramlar ve Bazı Modül Sınıfları	4
3. DUAL F -TERS PARÇALI MODÜLLER	12
3.1 Dual F -Ters Parçalı Modüllerin Özellikleri	12
3.2 Dual F -Ters Parçalı Halkalar	17
3.3 Dual F -Ters Parçalı Modüllerin Direkt Toplamları	19
3.4 Göreceli Dual F -Ters Parçalı Modüller	21
3.5 Dual $Z^*(\cdot)$ -Ters Parçalı Modüller	24
4. F -GÖRÜNTÜ PARÇALI MODÜLLER	27
4.1 F -Görüntü Parçalı Modüllerin Özellikleri	27
4.2 F -Görüntü Parçalı Halkalar	29
4.3 F -Görüntü Parçalı Modüllerin Direkt Toplamları ve Göreceli F -Görüntü Parçalı Modüller	32
4.4 $Z(\cdot)$ -Görüntü Parçalı Modüller	37
4.5 Güçlü F -Görüntü Parçalı Modüller ve Dual F -Ters Parçalı Mo- düller ile F -Görüntü Parçalı Modüllerin Karşılaştırılması	38
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\text{Ker } f$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im } f$	f homomorfizmasının görüntü kümesi
$f _N$	f homomorfizmasının N modülüne kısıtlaması
$\bigoplus_{i \in I} f_i$	f_i homomorfizmalarının direkt toplamı
π_M	M modülü üzerine olan izdüşüm
$Z^*(M)$	M modülünün eş tekil altmodülü
M/N	M modülünün N altmodülüne göre bölüm modülü
$Z_2(M)$	M modülünün ikinci tekil altmodülü
$E(M)$	M modülünün injektif zarfı
$\text{Rad}(M)$	M modülünün radikali
$S = \text{End}_R(M)$	M modülünün sağ R -modül endomorfizmalarının halkası
$\text{Soc}(M)$	M modülünün sokulu
$Z(M)$	M modülünün tekil altmodülü
M_R	M sağ R -modül
$\text{Hom}_R(M, N)$	$M \rightarrow N$ sağ R -modül homomorfizmalarının kümesi
$\prod_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt çarpımı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt toplamı
$f^{-1}(N)$	$N \leq M$ nin f homomorfizması altındaki ters görüntü kümesi
$l_S(N)$	$N \leq M$ nin S deki sol sıfırlayanı
$N \subseteq M$	N, M kümesinin altkümesi
$N \leq M$	N, M modülünün altmodülü
$N << M$	N, M modülünün dar altmodülü
$N \leq^\oplus M$	N, M modülünün direkt toplananı
$N \leq_e M$	N, M modülünün esas altmodülü
$N \trianglelefteq M$	N, M modülünün tam değişmez altmodülü
$\mathbb{Z}_n$	n pozitif tamsayısına göre kalan sınıflarının halkası
$r_M(I)$	$I \subseteq S$ nin M deki sağ sıfırlayanı
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	Prüfer p -grup
$M_n(R)$	R halkası üzerindeki $n \times n$ tipinde matrislerin halkası
R^n	R halkasının kopyalarının n defa direkt çarpımı
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar cismi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\text{Mod}(R)$	Sağ R -modüllerin kategorisi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar halkası

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, halkalar birimli ve R bir halka olmak üzere modüller sağ R -modül olarak ele alınmaktadır. M bir R -modül olmak üzere, S ile $\text{End}_R(M)$ endomorfizma halkası gösterilmektedir. Ayrıca 0 ve 1 göz önüne alınan halkanın sırası ile sıfırını ve birimini göstermektedir.

Tek üreteçli her sağ (sol) ideali projektif olan veya denk olarak her elemanının sağ (sol) sıfırlayanı bir eşkare (idempotent) eleman tarafından üretilen halkaya bir *sağ (sol) Rickart halka* veya *sağ (sol) temel projektif (principally projective) halka* denir (Hattori 1960, Maeda 1960). Hattori ve Maeda birbirlerinden bağımsız olarak Rickart halkaları çalışmışlardır. 2010 yılında Rickart halka kavramı modül teorisine taşınmıştır ve özellikleri incelenmiştir. Eğer her $f \in S$ için $\text{Ker } f$ altmodülü M modülünün bir direkt toplananı oluyorsa M bir *Rickart modül* olarak adlandırılır (Lee vd. 2010). 2012 yılında, Rickart modüller Agayev vd. tarafından da çalışılmıştır. Daha sonra, ikinci tekil altmodül yardımıyla T-Rickart modüller tanımlanmıştır. Her $f \in S$ için M nin $t_M(f) = \{m \in M \mid f(m) \in Z_2(M)\}$ şeklinde tanımlanan altmodülü bir direkt toplananı oluyorsa M bir *T-Rickart modül* olarak adlandırılmıştır (Ebrahimi Atani vd. 2012).

F bir M modülünün altmodülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $f(F) \subseteq F$ ise, F ye M nin bir *tam değişmez (fully invariant) altmodülü* denir ve $F \trianglelefteq M$ ile gösterilir (Kaplansky 1954). Örneğin R sağ (sol) R -modülünün tam değişmez altmodülleri R halkasının idealleridir. M bir modül olmak üzere M nin $Z(M)$, $Z_2(M)$, $Z^*(M)$, $\overline{Z}(M)$, $\overline{Z}^2(M)$ altmodülleri ile sokulu (socle) ve radikali (radical) M nin tam değişmez altmodüllerine örnektir. Ayrıca tanımdan bir modülün kendisi ve 0 altmodülünün tam değişmez olduğu açıktır. Bu çalışma boyunca F ile göz önüne alınan modülün tam değişmez altmodülü gösterilmektedir. 2016 yılında Üngör vd. tam değişmez altmodüller yardımıyla F -ters parçalı modül kavramını tanımlamıştır. F bir M modülünün tam değişmez bir altmodülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $f^{-1}(F)$ altmo-

dölü M modölünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir F -ters parçalı (F -inverse split) modöl denir (Üngör vd. 2016a). 0 ve $Z_2(M)$ altmodülleri M modölünün tam değışmez altmodülleri olduğundan Rickart ve T-Rickart modüller F -ters parçalı modüllerin özel halleridir.

Dualite (duality) kavramı matematikte önemli bir yere sahiptir. Bilinen bir çok kavramın duali sayesinde yeni kavramları ortaya çıkarmak ve incelemek mümkün hale gelir. Örneğin projektif ve injektif modöl kavramları birbirlerinin dualidir, bir modölde altmodöl ve bölüm modölü kavramları birbirlerinin dualidir. Bazı kavramların duali yine kendisi olabilir. Ayrıca her kavramın duali olmayabileceği gibi bazılarının birden fazla duali olabilir.

2011 yılında, Rickart modöl kavramının bir duali olan d-Rickart modöl kavramı, her $f \in S$ için $\text{Im } f$ altmodölü M modölünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir *dual Rickart* ya da *d-Rickart modöl* denir, şeklinde tanımlanmıştır (Lee vd. 2011). Ayrıca 2016 yılında T-Rickart modöl kavramının duali olan T-dual Rickart modöl kavramı, her $f \in S$ için $f(\overline{Z}^2(M))$ altmodölü M modölünün bir direkt toplananı ise, M ye bir *T-dual Rickart modöl* denir, şeklinde tanımlanmıştır (Ebrahimi Atani vd. 2016). Bu çalışmalardan ilham alınarak F -ters parçalı modöl kavramının dualleri olan dual F -ters parçalı modöl kavramı 2018 yılında Üngör vd. tarafından ve F -görüntü parçalı modöl ise 2021 yılında Çalcı vd. tarafından tanımlanmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı, F tam değışmez bir altmodöl olmak üzere, F -ters parçalı modöl kavramını dual açıdan ele almaktır. Bu doğrultuda dual F -ters parçalı modöl ve F -görüntü parçalı modöl kavramlarının çalışılması hedeflenmektedir. Eğer her $f \in S$ için $\text{Im } f + F$ altmodölü M modölünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir *dual F -ters parçalı (dual F -inverse split) modöl* denir (Üngör vd. 2018). Her $f \in S$ için $f(F)$ altmodölü M modölünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir *F -görüntü parçalı (F -image split) modöl* denir (Çalcı vd. 2021). Bu iki kavram da F -ters parçalı modöl kavramının dualleridir. F -ters parçalı modüllerin Rickart ve T-Rickart modüllerin daha genel hali olması gibi, bu kavramlar da d-Rickart ve

T-dual Rickart modüllerin daha genel halidir.

F -ters parçalı modül kavramında olduğu gibi dual F -ters parçalı modüller ve F -görüntü parçalı modüller yardımıyla, bir modülü altmodüllerinin direkt toplamı olarak yazmak mümkün olmaktadır. Bu sayede ele alınan modülün özelliklerini, direkt toplananları yardımıyla araştırmak kolaylaşmaktadır.

Bu çalışmada, dual F -ters parçalı modül ve F -görüntü parçalı modül kavramlarının modül teorisindeki yerleri belirlenmekte ve yapılarının belirlenmesi yönünde de çalışmalar yapılmaktadır. F -ters parçalı modüllerin sahip olduğu modül ayrışımalarının bu modül sınıfları için nasıl bir değişime uğrayacağı araştırılmaktadır. Bu sayede tam değişmez altmodüller ve dual Rickart modüller aracılığıyla modüllerin bazı ayrışimleri elde edilmektedir. Modüllerin direkt toplananları ve direkt toplamaları bu kavramlar göz önüne alınarak incelenmektedir. Ayrıca göz önüne alınan bir modülün belirli tam değişmez altmodülleri için modül ve halka teorilerinde bazı uygulamalar yapılmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmektedir.

2.1 Temel Kavramlar ve Bazı Modül Sınıfları

Tanım 2.1 M bir modül ve $K \leq H$ olmak üzere M nin H, K, L altmodülleri için $H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$ dir. Bu şarta *modülerite şartı* (*modularity condition*) denir (Anderson ve Fuller 1974).

Önerme 2.1 M ve N birer modül ve $f : M \rightarrow N$ bir modül epimorfizması olsun. Eğer $M = K + L$ ve $K \cap L = \text{Ker} f$ ise, bu durumda $N = fK \oplus fL$ dir (Anderson ve Fuller 1974).

Önerme 2.2 M bir modül olsun. Eğer $M = S \oplus T$ ve $S' \subseteq S$ ise, bu durumda $M/S' = S/S' \oplus (T + S')/S'$ dır (Rotman 1979).

Önerme 2.3 M bir R -modül, $r^2 = r \in R$ ve $f^2 = f \in S$ olsun. Bu durumda $fM \cong \text{Hom}_S(Sf, M)$ ve $Mr \cong \text{Hom}_R(rR, M)$ dir (Anderson ve Fuller 1974).

Sonuç 2.1 R_R modülü için Önerme 2.3 ün bir sonucudur.

Sonuç 2.1 Eğer R bir halka ve $e^2 = e \in R$ ise, $\text{End}_R(Re) \cong eRe \cong \text{End}_R(eR)$ dir (Anderson ve Fuller 1974).

Önerme 2.4 Eğer R bir halka ise, $R \cong \text{End}_R(R)$ dir (Anderson ve Fuller 1974).

Tanım 2.2 M bir modül olsun. Eğer M nin keyfi iki direkt toplananının kesişimi M nin bir direkt toplananı oluyorsa M ye *SIP* (*Summand Intersection Property*) ye sahiptir, herhangi sayıda direkt toplananının kesişimi bir direkt toplananı oluyorsa M ye *SSIP* (*Strong Summand Intersection Property*) ye sahiptir denir (Wilson 1986).

Tanım 2.3 M bir modül olsun. Eğer M nin keyfi iki direkt toplananının toplamı M nin bir direkt toplananı oluyorsa M ye *SSP (Summand Sum Property)* ye sahiptir, herhangi sayıda direkt toplananının toplamı bir direkt toplananı oluyorsa M ye *SSSP (Strong Summand Sum Property)* ye sahiptir denir (Garcia 1989, Vălcan 2002).

Tanım 2.4 Her $f : K \rightarrow N$ modül monomorfizması ve her $g : K \rightarrow M$ modül homomorfizması için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir $h : N \rightarrow M$ modül homomorfizması varsa, M modülüne bir *N -injektif (injective) modül* denir. Eğer M modülü M -injektif ise, M ye bir *yarı-injektif (quasi-injective) modül*, her N modülü için N -injektif ise, M ye bir *injektif (injective) modül* denir (Anderson ve Fuller 1974).

$$\begin{array}{ccccc} & & & & M \\ & & & \nearrow g & \vdots h \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Tanım 2.5 M bir modül ve E bir injektif modül olsun. Eğer $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} E$ bir esas (essential) monomorfizma oluyorsa (E, i) ikilisine M nin *injektif zarfı (injective envelop)* denir ve $E(M)$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1974).

Tanım 2.6 Her $f : N \rightarrow K$ modül epimorfizması ve her $g : M \rightarrow K$ modül homomorfizması için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir $h : M \rightarrow N$ modül homomorfizması varsa, M modülüne bir *N -projektif (projective) modül* denir. Eğer M modülü M -projektif ise, M ye bir *yarı-projektif (quasi-projective) modül*, her N modülü için N -projektif ise, M ye bir *projektif (projective) modül* denir (Anderson ve Fuller 1974).

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow g & & \\ N & \xrightarrow{f} & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Önerme 2.5 M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer M/N bir projektif modül ise, N altmodülü M nin bir direkt toplananıdır (Rotman 1979).

Tanım 2.7 Eğer bir R halkasının her sağ (sol) ideali projektif ise, R halkasına bir *sağ*

(sol) kalıtsal (hereditary) halka denir (Anderson ve Fuller 1974).

Tanım 2.8 F bir R -modül olsun. Eğer her $f : M \rightarrow N$ sol modül monomorfizması için $1 \otimes f : F \otimes M \rightarrow F \otimes N$ bir monomorfizma oluyorsa F modülüne bir *düz (flat)* R -modül denir (Anderson ve Fuller 1974).

Tanım 2.9 R bir halka olsun. Eğer her düz R -modül projektif ise, bu durumda R halkasına bir *sağ mükemmel (perfect) halka* denir (Anderson ve Fuller 1974).

Tanım 2.10 R bir halka olsun. Eğer her $a \in R$ için $a = aba$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa, R ye bir *düzenli (regular) halka* denir (Ware 1971).

Önerme 2.6 Eğer R bir düzenli halka ise, $J(R) = 0$ dır (Ware 1971).

Lemma 2.1 M bir modül ve $f \in S$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $fgf = f$ olacak şekilde bir $g \in S$ vardır.
- (ii) $\text{Ker}f$ ve $\text{Im}f$ altmodülleri M nin birer direkt toplananlarıdır (Ware 1971).

Sonuç 2.2 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) S bir düzenli halkadır.
- (ii) Her $f \in S$ için $\text{Ker}f$ ve $\text{Im}f$ altmodülleri M nin direkt toplananlarıdır (Ware 1971).

Lemma 2.2 M bir R -modül olsun. Eğer S bir düzenli halka ise, M nin her direkt toplananının da endomorfizma halkası düzenlidir (Ware 1971).

Teorem 2.1 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R bir yarı basit (semisimple) halkadır.
- (ii) R halkası endomorfizma halkası düzenli olan bir sonsuz üretilmiş serbest (free) modüle sahiptir (Ware 1971).

Teorem 2.2 M bir sonlu üretilmiş projektif R -modül olsun. Eğer M nin her sonlu üretilmiş altmodülü M nin bir direkt toplananı oluyorsa, S bir düzenli halkadır (Ware 1971).

Sonuç 2.3 R halkasının düzenli olması için gerek ve yeter şart $M_n(R)$ nin bir düzenli halka olmasıdır (Ware 1971).

Tanım 2.11 F bir M modülünün altmodülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $f(F) \subseteq F$ ise, F ye M nin bir *tam değişmez (fully invariant) altmodülü* denir ve $F \trianglelefteq M$ ile gösterilir (Kaplansky 1954).

R_R modülünün tam değişmez altmodülleri R halkasının idealleridir.

Önerme 2.7 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere bir $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü M_i ($i \in \mathcal{I}$) altmodüllerinin direkt toplamı ve $N \trianglelefteq M$ olsun. Bu durumda $N = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (N \cap M_i)$ dir (Özcan vd. 2006).

Uyarı 2.1 M bir modül olmak üzere $F \trianglelefteq M$ ve $I \subseteq S$ olsun. Bu durumda $I(F) = \sum_{f \in I} (\text{Im } f + F)$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.12 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$, $e^2 = e \in S$ ve her $m \in M$ için $fem = efm$ ise, M ye bir *abel (abelian) modül* denir (Ross 1967).

Tanım 2.13 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$ için $\text{Im } f$ altmodülü M modülünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir *dual Rickart* ya da *d-Rickart modül* denir (Lee vd. 2011).

Uyarı 2.2 R_R modülünün d-Rickart olması için gerek ve yeter şart R halkasının düzenli olmasıdır (Lee vd. 2011).

Önerme 2.8 Eğer M bir d-Rickart modül ise, M nin her direkt toplananı da bir d-Rickart modüldür (Lee vd. 2011).

d-Rickart modüllerin direkt toplananları d-Rickart olmasına rağmen Örnek 2.1 de görüldüğü üzere d-Rickart modüllerin direkt toplamaları bu özelliği sağlamayabilir.

Örnek 2.1 p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ve $\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$ -modülleri d-Rickart modüldür. Fakat $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$ -modülü d-Rickart modül değildir (Lee vd. 2011).

Tanım 2.14 M bir modül ve $0 \neq N \leq M$ olsun. Eğer her $0 \neq L \leq M$ için $N \cap L \neq 0$ ise, N ye M nin bir *esas (essential) altmodülü* denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1974).

Tanım 2.15 M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $K \leq M$ için $N + K = M$ olması $K = M$ olmasını gerektiriyorsa, N ye M nin bir *dar (small) altmodülü* denir ve $N \ll M$ ile gösterilir (Leonard 1966).

Tanım 2.16 Bir M modülünün $Z(M) = \{m \in M \mid r_R(m) \leq_e R_R\}$ altmodülüne *tekil (singular) altmodül* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise, M ye bir *tekil (singular) modül*; $Z(M) = 0$ ise, M ye bir *tekil olmayan (nonsingular) modül* adı verilir (Goodearl 1976).

Tanım 2.17 Eğer R halkası kendisi üzerinde modül olarak alınırsa $Z(R_R)$ ideale R nin *sağ tekil (singular) ideali* denir ve $Z(R_R) = 0$ ise, R ye bir *sağ tekil olmayan (nonsingular) halka* denir. Sol tekil olmayan halka da benzer şekilde tanımlanır (Goodearl 1976).

Tanım 2.18 M bir modül olsun. M nin $Z_2(M)$ *ikinci tekil (second singular) altmodülü* $Z(M/Z(M)) = Z_2(M)/Z(M)$ olarak tanımlanır (Goodearl 1976).

Uyarı 2.3 M ve N birer modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer $N \leq M$ ise, $Z(N) = N \cap Z(M)$ dir.
- (ii) Eğer $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ ise, $f(Z(M)) \subseteq Z(N)$ dir.
- (iii) $Z(M \oplus N) = Z(M) \oplus Z(N)$ dir (Goodearl 1976).

Uyarı 2.3 (ii) den görüldüğü üzere $Z(M)$ altmodülü M nin bir tam değişmez altmodülüdür.

Tanım 2.19 Bir R -modül M için $\overline{Z}(M) = \bigcap \{\text{Ker } f \mid f \in \text{Hom}_R(M, N) \text{ ve } N \ll E(N)\}$ ve $\overline{Z}^2(M) = \overline{Z}(\overline{Z}(M))$ şeklinde tanımlıdır (Talebi ve Vanaja 2002).

Önerme 2.9 da (i) ve (ii) den görüldüğü üzere $\overline{Z}(M)$ ve $\overline{Z}^2(M)$ altmodülleri M modülünün tam değişmez altmodülleridir.

Önerme 2.9 M ve N birer R -modül ve $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere her $i \in \mathcal{I}$ için M_i bir modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) Her $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ için $f(\overline{Z}(M)) \subseteq \overline{Z}(N)$ dir.
- (ii) Her $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ için $f(\overline{Z}^2(M)) \subseteq \overline{Z}^2(N)$ dir.
- (iii) $\overline{Z}(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \overline{Z}(M_i)$ dir.
- (iv) $\overline{Z}^2(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \overline{Z}^2(M_i)$ dir (Talebi ve Vanaja 2002).

Tanım 2.20 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$ için $f(\overline{Z}^2(M))$ altmodülü M nin bir direkt toplananı oluyorsa, M ye bir *T-dual Rickart modül* denir (Ebrahimi Atani vd. 2016).

Teorem 2.3 Eğer M bir T-dual Rickart modül ise, M nin her direkt toplananı da bir T-dual Rickart modüldür (Ebrahimi Atani vd. 2016).

Örnek 2.2 den görüldüğü üzere T-dual Rickart modüllerin direkt toplamı T-dual Rickart modül olmayabilir.

Örnek 2.2 F bir cisim ve F üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı V olsun. $J = \{x \in \text{End}_F(V) \mid \text{boy}(xV) \text{ sonlu}\}$ ve $R = F \times J$ şeklinde tanımlansın. R ve J modülleri T-dual Rickart olmalarına rağmen $R \oplus J$ bir T-dual Rickart modül değildir (Goodearl 1979, Ebrahimi Atani vd. 2016).

Tanım 2.21 M bir modül olsun. Eğer M nin her devirli altmodülü M nin bir direkt toplananı oluyorsa M modülüne bir *temel yarı basit (principally semisimple) modül* denir (Acar ve Harmancı 2010).

Tanım 2.22 Eğer M modülü herhangi bir modülün dar altmodülü ise, M modülüne bir *dar (small) modül* denir (Leonard 1966).

Teorem 2.4 Bir M modülünün dar modül olması için gerek ve yeter şart $M \ll E(M)$ olmasıdır (Leonard 1966).

Tanım 2.23 Bir M modülünün $Z^*(M) = \{m \in M \mid mR \text{ bir dar modüldür}\}$ altmodülüne *eş tekil (cosingular) altmodül* denir. Eğer $Z^*(M) = M$ ise, M modülüne bir *eş tekil (cosingular) modül* denir (Harada 1979, Özcan 2002).

Tanım 2.24 R halkası kendisi üzerinde modül olarak alınsın. Eğer $Z^*(R) = R$ ise, R halkasına bir *sağ eş tekil (cosingular) halka* denir (Özcan 2002).

Lemma 2.3 M ve N birer R -modül ve $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ olsun. Bu durumda $f(Z^*(M)) \leq Z^*(N)$ dir (Özcan 2002).

Lemma 2.3 ten görüldüğü üzere $Z^*(M)$ altmodülü M modülünün bir tam değişmez altmodülüdür.

Lemma 2.4 N bir M modülünün altmodülü olsun. Bu durumda $Z^*(N) = N \cap Z^*(M)$ dir (Özcan 2002).

Lemma 2.5 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ olsun. Bu durumda $Z^*(M) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} Z^*(M_i)$ dir (Özcan 2002).

Tanım 2.25 $\underline{X} = \{M \in \text{Mod}(R) \mid Z^*(M) = 0\}$ ve $\underline{X}^* = \{M \in \text{Mod}(R) \mid \text{her } U \subseteq V \subseteq M \text{ için } Z^*(V/U) \neq 0\}$ şeklinde tanımlıdır. $\underline{X}$ kümesinin elemanlarına *eş tekil olmayan (cononsingular) modül* denir (Harmancı vd. 1992, Özcan ve Harmancı 1997).

Uyarı 2.4 Eğer M bir dar modül ise, eş tekildir. Eğer R halkası sağ mükemmel halka ise, bu durumda $\text{Rad}(M)$ altmodülü M nin en büyük dar altmodülüdür. Böylece M nin bir dar modül olması için gerek ve yeter şart M nin eş tekil olmasıdır (Harada 1979, Özcan 2002).

Uyarı 2.5 R halkası bir sağ mükemmel halka ve M bir R -modül olsun. Bu durumda $\text{Rad}(M) \ll M$ dir (Anderson ve Fuller 1974).

Teorem 2.5 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R bir sağ kalıtsal halkadır.
- (ii) Her projektif R -modülün altmodülü projektiftir.
- (iii) Her injektif R -modülün bölüm modülü injektiftir (Rotman 1979).

Tanım 2.26 M bir R -modül olsun. Eğer R halkasının her basit sağ ideali K için her $f \in \text{Hom}_R(K, M)$ homomorfizması bir $g \in \text{Hom}_R(R, M)$ homomorfizmasına genişliyorsa bu durumda M ye bir *mininjektif (mininjective) modül* denir (Nicholson ve Yousif 1997).

Teorem 2.6 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) Her R -modül mininjektiftir.
- (ii) $\text{Soc}(R_R) \cap J(R) = 0$ dır (Nicholson ve Yousif 2003).

Tanım 2.27 F bir M modülünün tam değişmez bir altmodülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $f^{-1}(F)$ altmodülü M modülünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir F -ters parçalı (F -inverse split) modül denir (Üngör vd. 2016a).

Tanım 2.28 R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Eğer R_R modülü I -ters parçalı ise, R ye bir sağ I -ters parçalı halka denir (Üngör vd. 2016a).

Lemma 2.6 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü M_i ($i \in \mathcal{I}$) altmodüllerinin direkt toplamı olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün tam değişmez bir F altmodülü olması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \mathcal{I}$ ve her $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ için M_i modülünün $fF_i \subseteq F_j$ şartını sağlayan tam değişmez bir F_i altmodülü olmasıdır (Üngör vd. 2016a).

Önerme 2.10 R bir sağ kalıtsal ve sağ mükemmel halka olsun. Eğer $\underline{X}^*$ esas genişlemeler altında kapalı ise, bu durumda her $Z^*(M)$ -ters parçalı M modülü Rickart modüldür ve $\text{Rad}(M) = 0$ dır (Üngör vd. 2016b).

İspat. R bir sağ kalıtsal ve sağ mükemmel halka olmak üzere M bir $Z^*(M)$ -ters parçalı modül olsun. Eş tekil altmodülün tanımından $\text{Rad}(M) \subseteq Z^*(M)$ dir. Bu durumda $M = Z^*(M) \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ olduğundan $E(M) = E(Z^*(M)) \oplus E(N)$ olur. R bir sağ mükemmel halka ve $Z^*(Z^*(M)) = Z^*(M)$ olduğundan Uyarı 2.4 gereğince $Z^*(M) \ll E(Z^*(M))$ dir. Böylece $Z^*(M) \in \underline{X}^*$ dır. $\underline{X}^*$ esas genişlemeler altında kapalı olduğundan $E(Z^*(M)) \in \underline{X}^*$ olur. Buradan $E(Z^*(M)) \in Z^*(E(M))$ olup $Z^*(E(M)) = E(Z^*(M)) \oplus (Z^*(E(M)) \cap E(N))$ elde edilir. Ayrıca $N \in \underline{X}$ ve $\underline{X}$ esas genişlemeler altında kapalı olduğundan $E(N) \in \underline{X}$ dir. $\underline{X} \cap \underline{X}^* = 0$ olduğundan $Z^*(E(M)) \cap E(N) = 0$ olur. Buradan $E(Z^*(M)) = Z^*(E(M))$ dir. $E(M)$ injektif olduğundan $Z^*(E(M)) = \text{Rad}(E(M))$ dir. R sağ mükemmel olduğundan Uyarı 2.5 gereğince $\text{Rad}(E(M)) \ll E(M)$ dir. Böylece $Z^*(M) \subseteq Z^*(E(M)) = 0$ olup istenilen elde edilir. ■

3. DUAL F -TERS PARÇALI MODÜLLER

Bu bölümde F -ters parçalı modül kavramının bir duali olan dual F -ters parçalı modül kavramı tanımlanmaktadır. Bir dual F -ters parçalı modülün direkt toplananlarının da bu özelliği sağladığı ancak dual F -ters parçalı modüllerin direkt toplamalarının bu özelliği sağlamak zorunda olmadığı gösterilmektedir. Dual F -ters parçalı modül kavramı bölüm modülleri ve halkalarda incelenmektedir. Ayrıca F tam değişmez alt-modülü olarak $Z^*(M)$ alınarak dual $Z^*(M)$ -ters parçalı modüller tanımlanmaktadır.

3.1 Dual F -Ters Parçalı Modüllerin Özellikleri

Tanım 3.1 F bir M modülünün tam değişmez bir altmodülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $\text{Im}f + F$ altmodülü M modülünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir *dual F -ters parçalı* (*dual F -inverse split*) modül denir (Üngör vd. 2018).

Örnek 3.1 (1) Her M modülü dual M -ters parçalı modüldür.

(2) M bir yarı basit modül olsun. Bu durumda M , her tam değişmez F altmodülü için bir dual F -ters parçalı modüldür.

(3) Bir M modülünün d-Rickart modül olması için gerek ve yeter şart dual 0-ters parçalı modül olmasıdır (Üngör vd. 2018).

Teorem 3.1 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M dual F -ters parçalıdır.

(ii) $M = F \oplus N$ olacak şekilde bir N d-Rickart modülü vardır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) Eğer M dual F -ters parçalı ise, $0 \in S$ için $\text{Im}0 + F = F \leq^\oplus M$ olur. Buradan $M = F \oplus N$ olacak şekilde bir N modülü vardır. $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. $1 \in \text{End}_R(F)$ için $1 \oplus f \in S$ olup $\text{Im}(1 \oplus f) + F = \text{Im}f + F \leq^\oplus M$ dir. Modülerite şartından $\text{Im}f \leq^\oplus N$ olur. Böylece N bir d-Rickart modüldür.

(ii) $\Rightarrow$ (i) N modülü üzerine olan izdüşüm π_N ile gösterilsin ve $f \in S$ olsun. Bu durumda $\pi_N f|_N \in \text{End}_R(N)$ dir. $F \leq M$ olduğundan

$$\text{Im} f + F = f(F) + f(N) + F = f(N) + F = \pi_N f|_N(N) + F$$

elde edilir. N bir d-Rickart modül olduğundan $\pi_N f|_N(N) \leq^\oplus N$ olup buradan $\text{Im} f + F \leq^\oplus M$ olur. Böylece M bir dual F -ters parçalı modüldür. ■

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.1 den kolayca elde edilir.

Sonuç 3.1 M bir parçalanamaz dual F -ters parçalı modül olsun. Bu durumda M bir d-Rickart modüldür veya $F = M$ dir (Üngör vd. 2018).

Teorem 3.2 de dual F -ters parçalı modüller ile d-Rickart modüller arasındaki ilişki incelenmektedir.

Teorem 3.2 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir dual F -ters parçalı modüldür ve her $f \in S$ için $\text{Im} f \leq^\oplus \text{Im} f + F$ dir.
- (ii) M bir d-Rickart modüldür ve $F \leq^\oplus M$ dir (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $f \in S$ olsun. Eğer M bir dual F -ters parçalı modül ise, bu durumda $\text{Im} f + F \leq^\oplus M$ dir. Hipotezden $\text{Im} f \leq^\oplus M$ olup M bir d-Rickart modüldür. Ayrıca Teorem 3.1 gereğince $F \leq^\oplus M$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Eğer $F \leq^\oplus M$ ise, $M = F \oplus N$ olacak şekilde bir N modülü vardır. Önerme 2.8 den N bir d-Rickart modüldür. Böylece Teorem 3.1 den M dual F -ters parçalıdır. $f \in S$ olsun. M bir d-Rickart modül olduğundan $\text{Im} f \leq^\oplus M$ dir. Modülerite şartından $\text{Im} f \leq^\oplus \text{Im} f + F$ elde edilir. ■

Önerme 3.1 dual F -ters parçalı modüllerin direkt toplananlarının da bu özelliği sağladığını göstermektedir.

Önerme 3.1 M bir dual F -ters parçalı modül olsun. Bu durumda her $N \leq^\oplus M$ için N modülü dual $(N \cap F)$ -ters parçalıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. Eğer $N \leq^\oplus M$ ise, $M = N \oplus K$ olacak şekilde M nin bir K altmodülü vardır. $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. $0 \in \text{End}_R(K)$ için $f \oplus 0 \in S$ dir. $f \oplus 0 = g$ ile gösterilsin. $F \leq M$ olduğundan

$$f(N \cap F) = g(N \cap F) \leq g(N) \cap g(F) = f(N) \cap g(F) \leq N \cap F$$

dir. Böylece $N \cap F \leq N$ elde edilir. M dual F -ters parçalı olduğundan $\text{Im}g + F \leq^\oplus M$ dir. Önerme 2.7 den

$$\text{Im}g + F = \text{Im}f + F = (\text{Im}f + (N \cap F)) \oplus (K \cap F)$$

dir. Modülerite şartından $\text{Im}f + (N \cap F) \leq^\oplus N$ elde edilir. Böylece N dual $(N \cap F)$ -ters parçalıdır. ■

Önerme 3.2 Bir M yarı-projektif modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir dual F -ters parçalı modüldür.
- (ii) M nin $K \subseteq F$ olacak şekilde her K altmodülü için M/K modülü bir dual (F/K) -ters parçalı modüldür (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $f \in \text{End}_R(M/K)$ ve $K \subseteq F$ olsun. $\pi : M \rightarrow M/K$ doğal izdüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın. M bir yarı-projektif modül olduğundan diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir $g : M \rightarrow M$ homomorfizması vardır. $F \leq M$ olduğundan

$$f(F/K) = f\pi(F) = \pi g(F) \leq \pi(F) = F/K$$

olup $F/K \leq M/K$ olur. M dual F -ters parçalı olduğundan $M = F \oplus N$ olacak şekilde bir N d-Rickart modülü vardır. Önerme 2.2 den $M/K = (F/K) \oplus ((N + K)/K)$ elde edilir. N bir d-Rickart modül ve $N \cong (N + K)/K$ olduğundan $(N + K)/K$

d-Rickart modül olur. Böylece M/K modülü bir dual (F/K) -ters parçalı modüldür.

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 & \downarrow \pi & \\
 & M/K & \\
 & \downarrow f & \\
 M & \xrightarrow{\pi} & M/K \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır. ■

Önerme 3.3 M bir dual F -ters parçalı modül ve N altmodülü M nin $F \subseteq N$ olacak şekilde bir direkt toplananı olsun. Bu durumda her $f \in S$ için $\text{Im} f + N \leq^\oplus M$ dir (Üngör vd. 2018).

İspat. $f \in S$ olsun. $N \leq^\oplus M$ olduğundan $N = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır. $eM \cap (1 - e)M = 0$, $fM = efM + (1 - e)fM$ ve $F \subseteq eM$ olduğundan

$$eM + fM = eM \oplus (1 - e)fM = eM + (1 - e)fM + F$$

dir. Hipotezden $(1 - e)fM + F = gM$ olacak şekilde bir $g^2 = g \in S$ vardır. $eM + gM = (e - ge + g)M + F$ olduğu iddia edilsin. $(e - ge + g)M + F \subseteq eM + gM$ olduğu açıktır. $em + gm' \in eM + gM$ alınsın. $F \leq M$ olduğundan $egM \subseteq F$ dir. Buradan

$$em + gm' = (e - ge + g)(em + gm') - (1 - g)egm' \in (e - ge + g)M + F$$

olup $eM + gM = (e - ge + g)M + F$ dir. Hipotezden $eM + gM = \text{Im} f + N \leq^\oplus M$ elde edilir. ■

Sonuç 3.2 M bir dual F -ters parçalı modül ve N altmodülü M nin $F \subseteq N$ olacak şekilde bir direkt toplananı olsun. Bu durumda her $K \leq^\oplus M$ için $K + N \leq^\oplus M$ dir (Üngör vd. 2018).

İspat. $K \leq^\oplus M$ olduğundan $M = K \oplus T$ olacak şekilde $T \leq M$ vardır. $1 \in \text{End}_R(K)$ ve $0 \in \text{End}_R(T)$ için $1 \oplus 0 \in S$ olur. Önerme 3.3 ten $\text{Im}(1 \oplus 0) + N = K + N \leq^\oplus M$

dir. ■

Sonuç 3.2 de K altmodülü $F \subseteq K$ olacak şekilde alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.3 Her dual F -ters parçalı M modülü, F altmodülünü içeren direkt toplananları için SSP ye sahiptir (Üngör vd. 2018).

Teorem 3.4 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir dual F -ters parçalı modüldür ve F altmodülünü içeren direkt toplananları için SSSP ye sahiptir.
- (ii) S nin her I sağ ideali için $I(F)$, M nin bir direkt toplananıdır.
- (iii) S nin her I altkümesi için $I(F)$, M nin bir direkt toplananıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (iii) $F \subseteq \text{Im}f + F$ olduğundan hipotezden $I(F) \leq^\oplus M$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $f \in S$ olsun. S nin $I = fS$ sağ ideali için $\text{Im}f + F = I(F)$ olduğundan $\text{Im}f + F \leq^\oplus M$ dir. Böylece M dual F -ters parçalıdır. J bir indeks kümesi olmak üzere $\{e_i M \leq M \mid e_i^2 = e_i \in S, F \subseteq e_i M, i \in J\}$ kümesi göz önüne alınsın. I' , S nin $\sum_{i \in J} e_i S$ sağ idealini göstermek üzere her $i \in J$ için $F \subseteq e_i M$ olduğundan $\sum_{i \in J} e_i S = I'(F)$ dir. $I'(F) \leq^\oplus M$ olduğundan M , F altmodülünü içeren direkt toplananları için SSSP ye sahiptir. ■

Teorem 3.5 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir dual F -ters parçalı modüldür.
- (ii) S nin her sonlu üretilmiş I sağ ideali için $I(F)$, M nin bir direkt toplananıdır.
- (iii) S nin her sonlu I altkümesi için $I(F)$, M nin bir direkt toplananıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) n bir pozitif tamsayı olmak üzere $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$, S nin bir sonlu üretilmiş sağ ideali olsun. İspat tümevarımla yapılır. Eğer $n = 1$ ise, Teorem 3.4 den $I(F) \leq^\oplus M$ dir. $n > 1$ olmak üzere iddia $n - 1$ için doğru olsun. Bu durumda

$J = \langle f_1, f_2, \dots, f_{n-1} \rangle$ için $J(F) \leq^\oplus M$ dir. $I(F) = J(F) + \text{Im} f_n + F$ dir ve M dual F -ters parçalı olduğundan $\text{Im} f_n + F \leq^\oplus M$ dir. Teorem 3.3 ten $n > 1$ için $I(F) \leq^\oplus M$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $f \in S$ olsun. S nin $I = fS$ sonlu üretilmiş sağ ideali için $I(F) = \text{Im} f + F \leq^\oplus M$ olduğundan M dual F -ters parçalıdır.

(i) $\Rightarrow$ (iii) n bir pozitif tamsayı olmak üzere S nin $I = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sonlu altkütmesi için (i) $\Rightarrow$ (ii) nin ispatına benzer olarak yapılır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $f \in S$ olsun. S nin $I = \{f\}$ sonlu altkütmesi için $I(F) = \text{Im} f + F \leq^\oplus M$ olduğundan M dual F -ters parçalıdır. ■

3.2 Dual F -Ters Parçalı Halkalar

R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Bu kısımda R halkasının R -modül yapısıyla dual I -ters parçalı olması tanımlanmakta ve özellikleri incelenmektedir.

Tanım 3.2 R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Eğer R_R modülü dual I -ters parçalı ise, R ye bir sağ *dual I -ters parçalı* (*dual I -inverse split*) halka denir (Üngör vd. 2018).

Uyarı 3.1 Sol dual I -ters parçalı halka, sağ dual I -ters parçalı halkaya benzer şekilde tanımlanır. Aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere halkada dual ters parçalı olma kavramı sol-sağ simetrik değildir (Üngör vd. 2018).

Örnek 3.2 F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F & F \end{bmatrix}$ halkası göz önüne alınsın. R nin $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{bmatrix}$ ideali ve $J = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sağ ideali için $R = I \oplus J$ dir. J basit olduğundan R -modül olarak d-Rickarttır. Böylece Teorem 3.1 den R sağ dual I -ters parçalıdır. Fakat I ideali R nin esas sol ideali olduğundan R_R modülünün bir direkt toplananı olamaz. Dolayısıyla R sol dual I -ters parçalı halka değildir (Üngör vd. 2018).

Teorem 3.6 Bir R halkası ve R nin bir I ideali için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R sağ dual I -ters parçalıdır.
- (ii) $R = I \oplus K$ ve K d-Rickart R -modül olacak şekilde R nin bir K sağ ideali vardır.

(iii) $R = I \oplus K$ ve K temel yarı basit R -modül olacak şekilde R nin bir K sağ ideali vardır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Teorem 3.1 in bir sonucudur.

(i) $\Rightarrow$ (iii) R sağ dual I -ters parçalı olduğundan $R = I \oplus K$ olacak şekilde R nin bir K sağ ideali vardır. $k \in K$ olsun. $R \cong \text{End}_R(R)$ olduğundan k , R nin bir endomorfizması olarak görülebilir. $K \cap I = 0$ olduğundan hipotezden $\text{Im}k \oplus I = kR \oplus I \leq^\oplus R$ dir. Modülerite şartından $kR \leq^\oplus K$ olur. Buradan K temel yarı basit R -modüldür.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $K \leq^\oplus R$ olduğundan $K = eR$ olacak şekilde R nin bir e eşkare elemanı vardır. Buradan $\text{End}_R(K) = eRe$ olur. $f \in \text{End}_R(K)$ olsun $f = efe$ dir. K temel yarı basit R -modül olduğundan $\text{Im}f = efK = efeR \leq^\oplus K$ dir. Böylece K d-Rickart R -modüldür. ■

Teorem 3.7 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R sağ dual I -ters parçalı olacak şekilde R nin bir I ideali vardır.
- (ii) Her devirli projektif R -modül M için M dual F -ters parçalı olacak şekilde M nin bir F tam değişmez altmodülü vardır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) M bir devirli projektif R -modül olsun. Bu durumda $M \cong J$ olacak şekilde, R_R modülünün bir J direkt toplananı vardır. $g : J \rightarrow M$ bu izomorfizmayı gösterebilir. Ayrıca R sağ dual I -ters parçalı olduğundan Önerme 3.1 den J sağ dual $(I \cap J)$ -ters parçalıdır. $g(I \cap J) = N$ ile gösterilsin. Her $f \in S$ için $g^{-1}fg \in \text{End}_R(J)$ olup $I \cap J \trianglelefteq J$ olduğundan $g^{-1}fg(I \cap J) = g^{-1}fN \subseteq I \cap J$ dir. Buradan $fN \subseteq g(I \cap J) = N$ dir. Böylece $N \trianglelefteq M$ olur. İddia M nin dual N -ters parçalı olduğudur. $f \in S$ olsun. J sağ dual $(I \cap J)$ -ters parçalı olduğundan $J = (\text{Im}(g^{-1}fg) + (I \cap J)) \oplus K$ olacak şekilde $K \leq^\oplus J$ vardır. g bir izomorfizma olduğundan Önerme 2.1 den $M = (\text{Im}f + N) \oplus gK$ dir. Böylece istenilen elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır. ■

Önerme 3.4 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R bir düzenli halkadır.

(ii) R sağ dual $J(R)$ -ters parçalıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) R bir düzenli halka olsun. Önerme 2.6 ve Uyarı 2.2 den R bir sağ dual $J(R)$ -ters parçalı halkadır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) R sağ dual $J(R)$ -ters parçalı olsun. Bu durumda $J(R) \leq^\oplus R$ dir. $J(R) \ll R$ olduğundan $J(R) = 0$ olup R_R d-Rickarttır. Böylece Uyarı 2.2 den R halkası düzenlidir. ■

Önerme 3.5 Eğer R bir sağ dual $Soc(R_R)$ -ters parçalı halka ise, bu durumda R düzenlidir (Üngör vd. 2018).

İspat. R sağ dual $Soc(R_R)$ -ters parçalı olsun. Bu durumda $R \cong \text{End}_R(R)$ olduğundan her $a \in R$ için $aR + Soc(R_R) \leq^\oplus R$ dir. $Soc(R_R)$ yarı basit ve $aR \cap Soc(R_R) \leq Soc(R_R)$ olduğundan $Soc(R_R) = (aR \cap Soc(R_R)) \oplus U$ olacak şekilde $U \leq Soc(R_R)$ vardır. Buradan

$$aR + Soc(R_R) = aR + (aR \cap Soc(R_R)) + U = aR \oplus U \leq^\oplus R$$

dir. Böylece R_R d-Rickart olup Uyarı 2.2 gereğince R düzenlidir. ■

3.3 Dual F -Ters Parçalı Modüllerin Direkt Toplamları

Önerme 3.1 den dual F -ters parçalı modüllerin direkt toplananları da bu özelliği sağlar. Ancak Örnek 3.3 te görüldüğü üzere dual F -ters parçalı modüllerin direkt toplamları bu özelliği sağlamayabilir. Bu kısımda hangi şartlar altında dual F -ters parçalı olma özelliğinin direkt toplamda korunduğu araştırılmaktadır.

Örnek 3.3 p bir asal sayı olsun. Örnek 2.1 den $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ve $\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$ -modülleri sırasıyla dual $\{0 + \mathbb{Z}\}$ -ters parçalı ve dual $\{\bar{0}\}$ -ters parçalı olmasına rağmen $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$ -modülü dual $\{0 + \mathbb{Z}\} \oplus \{\bar{0}\}$ -ters parçalı değildir (Üngör vd. 2018).

Önerme 3.6 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü $M_i (i \in \mathcal{I})$ altmodüllerinin direkt toplamı, $F = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ modülü $F_i (i \in \mathcal{I})$ altmodüllerinin direkt toplamı ve her $i \in \mathcal{I}$ için $M_i \trianglelefteq M$ olsun. Bu durumda M nin dual F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual F_i -ters parçalı olmasıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. Önerme 3.1 den M nin dual F -ters parçalı olması her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual F_i -ters parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak $i, j \in \mathcal{I}$ için $f_{ij} \in \text{Hom}_R(M_j, M_i)$ olmak üzere keyfi $f = (f_{ij}) \in S$ endomorfizması göz önüne alınsın. Her $i \in \mathcal{I}$ için $M_i \leq M$ olduğundan $i \neq j$ iken $\text{Hom}_R(M_j, M_i) = 0$ dır. Her $i \in \mathcal{I}$ için $f_{ii} \in \text{End}_R(M_i)$ ve M_i dual F_i -ters parçalı olduğundan

$$\text{Im} f + F = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (\text{Im} f_{ii} + F_i) \leq^{\oplus} \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i = M$$

dir. Böylece M bir dual F -ters parçalı modüldür. ■

Önerme 3.7 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler göz önüne alınsın.

(i) M dual F -ters parçalıdır.

(ii) n bir pozitif tamsayı ve her $i = 1, \dots, n$ için $F_i = F$, $M_i = M$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^n M_i$, dual $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ -ters parçalıdır.

Bu durumda (ii) $\Rightarrow$ (i) dir. Eğer S bir düzenli halka ise, (i) $\Rightarrow$ (ii) dir (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) n bir pozitif tamsayı olmak üzere $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ indeks kümesi göz önüne alınsın. M dual F -ters parçalı olduğundan $M = F \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ vardır. Buradan $\bigoplus_{\mathcal{I}} M = (\bigoplus_{\mathcal{I}} F) \oplus (\bigoplus_{\mathcal{I}} N)$ dir. Ayrıca $F \leq M$ olduğundan $\bigoplus_{\mathcal{I}} F \leq \bigoplus_{\mathcal{I}} M$ olur. S bir düzenli halka olduğundan Lemma 2.2 den $\text{End}_R(N)$ düzenli ve böylece Sonuç 2.3 ten $M_n(\text{End}_R(N)) = \text{End}_R(\bigoplus_{\mathcal{I}} N)$ düzenli olur. Sonuç 2.2 den $\bigoplus_{\mathcal{I}} N$ d-Rickart olup $\bigoplus_{\mathcal{I}} M$ dual $\bigoplus_{\mathcal{I}} F$ -ters parçalıdır. (ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır. ■

Sonuç 3.3 Bir düzenli halka üzerindeki her sonlu üretilmiş projektif modül d-Rickarttır (Üngör vd. 2018).

İspat. R bir düzenli halka ve M sonlu üretilmiş projektif bir R -modül olsun. Bu durumda M sonlu üretilmiş serbest bir N modülünün direkt toplananıdır. Böylece her $i = 1, \dots, n$ için $R_i = R$ olmak üzere $N = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Uyarı 2.2 den R_R dual 0-ters parçalıdır. Önerme 3.7 den N dual 0-ters parçalı olup, Önerme 3.1 den M d-Rickart modüldür. ■

3.4 Göreceli Dual F -Ters Parçalı Modüller

Bu kısımda dual F -ters parçalı modül kavramının daha genel hali olan göreceli dual F -ters parçalı modüller tanımlanmakta ve özellikleri incelenmektedir. Göreceli dual F -ters parçalı modüllerin direkt toplananlarının da bu özelliği sağladığı ispatlanmaktadır.

Tanım 3.3 M ve N birer modül ve $F \leq N$ olsun. Eğer her $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ için $\text{Im} f + F \leq^\oplus N$ oluyorsa M modülüne N ye göre dual F -ters parçalı (dual F -inverse split relative to N) veya kısaca dual N - F -ters parçalı denir (Üngör vd. 2018).

Bir M modülünün dual F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şartın M nin dual M - F -ters parçalı olması olduğu Tanım 3.3 ten açıktır.

Teorem 3.8 M ve N birer R -modül ve $F \leq N$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M dual N - F -ters parçalıdır.
- (ii) Her $M_1 \leq^\oplus M$ ve her $N_1 \leq^\oplus N$ için M_1 dual N_1 -($F \cap N_1$)-ters parçalıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $M_1 \leq^\oplus M$, $N_1 \leq^\oplus N$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_1, N_1)$ olsun. Bu durumda $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde $M_2 \leq M$ ve $N = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde $N_2 \leq N$ vardır. $0 \in \text{Hom}_R(M_2, N_2)$ için $f \oplus 0 \in \text{Hom}_R(M, N)$ ve $\text{Im}(f \oplus 0) = \text{Im} f$ dir. M dual N - F -ters parçalı ve $F \leq N$ olduğundan Önerme 2.7 den

$$\text{Im}(f \oplus 0) + F = \text{Im} f + F = (\text{Im} f + (F \cap N_1)) \oplus (F \cap N_2) \leq^\oplus N$$

dir. $\text{Im} f + (F \cap N_1) \leq N_1$ olduğundan modülerite şartından $\text{Im} f + (F \cap N_1) \leq^\oplus N_1$ olup M_1 dual N_1 -($F \cap N_1$)-ters parçalıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır. ■

Aşağıdaki sonuç $N = M$ alınması durumunda Teorem 3.8 in bir direkt sonucudur.

Sonuç 3.4 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M dual F -ters parçalıdır.

(ii) Her $N, K \leq^\oplus M$ için N dual K -($F \cap K$)-ters parçalıdır.

(iii) Her $N, K \leq^\oplus M$ ve her $f \in \text{Hom}_R(M, K)$ için $\text{Im} f|_N + (F \cap K) \leq^\oplus K$ dir (Üngör vd. 2018).

Önerme 3.8 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, N bir R -modül ve $F \leq N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer N modülü SSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ sonlu ise, bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual N - F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual N - F -ters parçalı olmasıdır.
- (ii) Eğer N modülü SSSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ keyfi ise, bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual N - F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual N - F -ters parçalı olmasıdır.
- (iii) Eğer N modülü SSSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ keyfi ise, bu durumda $\prod_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual N - F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual N - F -ters parçalı olmasıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) N modülü SSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ sonlu olsun. Teorem 3.8 den $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün dual N - F -ters parçalı olması her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin dual N - F -ters parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak $f \in \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i, N)$ olsun, $M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ içerimleri ι_i ve $f \iota_i = f_i$ ile gösterilsin. Bu durumda N modülü SSP ye sahip ve M_i modülleri dual N - F -ters parçalı olduğundan $\text{Im} f + F = \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{Im} f_i + F \leq^\oplus N$ olur. Böylece $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ dual N - F -ters parçalıdır.

(ii) ve (iii) Benzer şekilde ispatlanır. ■

Sonuç 3.5 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve her $i \in \mathcal{I}$ için $F_i \leq M_i$ olsun. Bu durumda her $j \in \mathcal{I}$ için $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual M_j - F_j -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual M_j - F_j -ters parçalı olmasıdır (Üngör vd. 2018).

İspat. Teorem 3.8 den her $j \in \mathcal{I}$ için $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual M_j - F_j -ters parçalı olması her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual M_j - F_j -ters parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak $i \in \mathcal{I}$ ve her $j \in \mathcal{I}$ için M_i dual M_j - F_j -ters parçalı olsun. Bu durumda M_j dual

M_j - F_j -ters parçalıdır ve Teorem 3.3 ten dolayı F_j yi içeren her altmodülü için SSP ye sahiptir. İspat Önerme 3.8 in ispatına benzer şekilde tamamlanır. ■

Teorem 3.9 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun ve her $i, j \in \mathcal{I}$ ve her $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ için M_i modülünün $fF_i \subseteq F_j$ şartını sağlayan bir F_i altmodülü olsun. Bu durumda bir R -modül N için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) N bir dual $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı modüldür.

(ii) Her $i \in \mathcal{I}$ için N dual M_i - F_i -ters parçalıdır.

İspat. Teorem 3.8 den N nin dual $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması her $i \in \mathcal{I}$ için N nin dual M_i - F_i -ters parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak her $i \in \mathcal{I}$ için N modülü dual M_i - F_i -ters parçalı olsun. İspat tümevarımla yapılır. $n = 2$ için $f \in \text{Hom}_R(N, M_1 \oplus M_2)$ alınsın. $\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1$ ve $\pi_2 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2$ sırasıyla M_1 ve M_2 üzerine olan izdüşümler olsun. $M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan $\text{Im} f = f(N) = \pi_1 f(N) \oplus \pi_2 f(N)$ dir. N modülü dual M_1 - F_1 -ters parçalı ve dual M_2 - F_2 -ters parçalı olduğundan $\pi_1 f(N) + F_1 \leq^\oplus M_1$ ve $\pi_2 f(N) + F_2 \leq^\oplus M_2$ dir. Böylece $\pi_1 f(N) + F_1 + \pi_2 f(N) + F_2 = \text{Im} f + (F_1 \oplus F_2) \leq^\oplus M_1 \oplus M_2$ elde edilir. Ayrıca Lemma 2.6 dan $F_1 \oplus F_2 \leq M_1 \oplus M_2$ dir. Buradan N bir dual $(M_1 \oplus M_2)$ -($F_1 \oplus F_2$)-ters parçalı modüldür. N modülünün dual $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ - $\bigoplus_{i=1}^{n-1} F_i$ -ters parçalı olduğu kabul edilsin. Hipotezden N bir dual M_n - F_n -ters parçalı modül olduğundan ve iddia $n = 2$ için doğru olduğundan N modülü dual $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı modüldür. Böylece istenilen elde edilir. ■

Sonuç 3.6 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun ve her $i, j \in \mathcal{I}$ ve her $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ için M_i modülünün F_i altmodülü $fF_i \subseteq F_j$ şartını sağlasın. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual M_j - F_j -ters parçalı olmasıdır.

İspat. Teorem 3.8 den $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin dual M_j - F_j -ters parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i modülleri dual M_j - F_j -ters parçalı olsun. Her $i \in \mathcal{I}$ için $F_i \leq M_i$ olduğundan

Sonuç 3.5 ten $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ dual M_j - F_j -ters parçalıdır. Böylece Teorem 3.9 dan $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ dual $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalıdır. ■

Sonuç 3.7, Teorem 3.9 da $F = 0$ tam değişmez altmodülü için direkt bir sonucudur.

Sonuç 3.7 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve N bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) N modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ -d-Rickarttır.
- (ii) Her $i \in \mathcal{I}$ için N modülü M_i -d-Rickarttır.

3.5 Dual $Z^*(\cdot)$ -Ters Parçalı Modüller

Bu kısımda M modülünün özel olarak $Z^*(M)$ tam değişmez altmodülü alınarak dual $Z^*(M)$ -ters parçalı modüllerin özellikleri incelenmektedir. Sonuç 3.8, Lemma 2.5 ve Teorem 3.1 in bir direkt sonucudur.

Sonuç 3.8 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M dual $Z^*(M)$ -ters parçalıdır.
- (ii) $M = Z^*(M) \oplus N$ olacak şekilde bir N eş tekil olmayan d-Rickart modülü vardır.
- (iii) $M = Z^*(M) \oplus N$ olacak şekilde bir N d-Rickart modülü vardır (Üngör vd. 2018).

Önerme 3.9 M bir dar modül olmak üzere $\mathcal{A} = \{M \oplus N \mid N \text{ d-Rickart modül ve } N \in \underline{X}\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $M \oplus N \in \mathcal{A}$ bir dual $Z^*(M \oplus N)$ -ters parçalı modüldür (Üngör vd. 2018).

İspat. $M \oplus N \in \mathcal{A}$ olsun. $N \in \underline{X}$ ve M bir dar modül olduğundan Lemma 2.5 ten

$$Z^*(M \oplus N) \oplus N = Z^*(M) \oplus Z^*(N) \oplus N = Z^*(M) \oplus N = M \oplus N$$

elde edilir. N d-Rickart olduğundan Sonuç 3.8 den $M \oplus N$ bir dual $Z^*(M \oplus N)$ -ters parçalı modüldür. ■

Önerme 3.10 M bir dual $Z^*(M)$ -ters parçalı modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer N modülü M nin bir direkt toplananı ise, N bir dual $Z^*(N)$ -ters parçalı modüldür.
- (ii) $f \in \text{Hom}_R(M, M')$ bir epimorfizma olsun. Eğer R bir sağ kalıtsal halka ve $\text{Ker} f$ eş tekil ise, bu durumda M' bir dual $Z^*(M')$ -ters parçalı modüldür.
- (iii) Eğer $\underline{X}^*$ esas genişlemeler altında kapalı ve R bir sağ kalıtsal sağ mükemmel halka ise, M d-Rickarttır (Üngör vd. 2018).

İspat. (i) Önerme 3.1 ve Lemma 2.4 ten açıktır.

(ii) $f \in \text{Hom}_R(M, M')$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda Lemma 2.3 ten $Z^*(M) \subseteq f^{-1}(Z^*(M'))$ dir. f homomorfizmasının $f^{-1}(Z^*(M'))$ altmodülüne kısıtlaması g ile gösterilsin. $\text{Ker} f = \text{Ker} g$ olduğundan $f^{-1}(Z^*(M'))/\text{Ker} f \cong Z^*(M')$ olur. $\text{Ker} f$ eş tekil ve $\underline{X} \cap \underline{X}^* = 0$ olduğundan $\text{Ker} f \in \underline{X}^*$ elde edilir. ι içerim homomorfizması olmak üzere,

$$0 \longrightarrow \text{Ker} f \xrightarrow{\iota} f^{-1}(Z^*(M')) \xrightarrow{g} Z^*(M') \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi göz önüne alınsın. $Z^*(M') \in \underline{X}^*$ ve $\underline{X}^*$ genişleme altında kapalı olduğundan $f^{-1}(Z^*(M')) \in \underline{X}^*$ elde edilir. Buradan $f^{-1}(Z^*(M')) \subseteq Z^*(M)$ olur. Böylece $f^{-1}(Z^*(M')) = Z^*(M)$ dir. M dual $Z^*(M)$ -ters parçalı ise, $M = Z^*(M) \oplus K$ olacak şekilde bir K d-Rickart modülü vardır. f epimorfizma olduğundan

$$\begin{aligned} M' = f(M) &= f(Z^*(M) \oplus K) = f(Z^*(M)) + f(K) = f f^{-1}(Z^*(M')) + f(K) \\ &= Z^*(M') \oplus f(K) \end{aligned}$$

dir. f homomorfizmasının K altmodülüne kısıtlaması göz önüne alınırsa $f(K) \cong K$ olur. K d-Rickart olduğundan $f(K)$ d-Rickarttır. Böylece Sonuç 3.8 den M' dual $Z^*(M')$ -ters parçalıdır.

(iii) Önerme 2.10 un ispatına benzer olarak $Z^*(M) = 0$ elde edilir. Sonuç 3.8 den M bir d-Rickart modüldür. ■

Sonuç 3.6 ve Lemma 2.5 ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.9 Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin dual $Z^*(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i)$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin dual M_j - $Z^*(M_j)$ -ters parçalı olmasıdır.

Aşağıdaki teoremden dual $Z^*(M)$ -ters parçalı modül kavramından yararlanılarak sağ kalıtsal halkalar ve sağ mükemmel halkalar arasındaki ilişki incelenmektedir.

Teorem 3.10 R bir sağ mükemmel halka ve her injektif R -modül M dual $Z^*(M)$ -ters parçalı olsun. Bu durumda R halkası sağ kalıtsaldır (Üngör vd. 2018).

İspat. M bir injektif modül ve $N \leq M$ olsun. $E(M/N)$ injektif olduğundan $M \oplus E(M/N)$ injektiftir. Hipotezden $M \oplus E(M/N)$ dual $Z^*(M \oplus E(M/N))$ -ters parçalı olur. Lemma 2.5 ten $E(M/N) \cap (Z^*(M \oplus E(M/N))) = Z^*(E(M/N))$ dir. Teorem 3.8 den M dual $E(M/N)$ - $Z^*(E(M/N))$ -ters parçalıdır. Bu durumda $\pi : M \rightarrow M/N$ doğal izdüşüm olmak üzere $\text{Im}\pi + Z^*(E(M/N)) = M/N + Z^*(E(M/N)) \leq^\oplus E(M/N)$ dir. $E(M/N)$ dual $Z^*(E(M/N))$ -ters parçalı olduğundan $Z^*(E(M/N)) = \text{Rad}E(M/N) \leq^\oplus E(M/N)$ olur. R sağ mükemmel olduğundan Uyarı 2.5 ten $\text{Rad}E(M/N) << E(M/N)$ dir. Böylece $Z^*(E(M/N)) = 0$ olup $M/N \leq^\oplus E(M/N)$ dir. Buradan M/N injektiftir. Teorem 2.5 ten R bir sağ kalıtsal halkadır. ■

4. F -GÖRÜNTÜ PARÇALI MODÜLLER

Bu bölümde F -ters parçalı modül kavramının bir diğer duali olan F -görüntü parçalı modül kavramı tanımlanmaktadır. Bir F -görüntü parçalı modülün direkt toplananlarının da bu özelliği sağladığı ancak F -görüntü parçalı modüllerin direkt toplamalarının bu özelliği sağlamamak zorunda olmadığı gösterilmektedir. F -görüntü parçalı modül kavramı bölüm modülleri ve halkalarda incelenmektedir. Güçlü F -görüntü parçalı modül tanımı yapılmakta ve özelliği incelenmektedir. Ayrıca F tam değişmez altmodülü olarak $Z(M)$ alınarak $Z(M)$ -görüntü parçalı modüller tanımlanmaktadır.

4.1 F -Görüntü Parçalı Modüllerin Özellikleri

Tanım 4.1 F bir M modülünün tam değişmez bir altmodülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $f(F)$ altmodülü M modülünün bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir F -görüntü parçalı (F -image split) modül denir (Çalcı vd. 2021).

Örnek 4.1 (1) Her M modülü 0-görüntü parçalı modüldür.

(2) M bir yarı basit modül olsun. Bu durumda M her tam değişmez F altmodülü için F -görüntü parçalı modüldür.

(3) Bir M modülünün d-Rickart modül olması için gerek ve yeter şart M -görüntü parçalı modül olmasıdır (Çalcı vd. 2021).

Teorem 4.1 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M bir F -görüntü parçalı modüldür.

(ii) F bir d-Rickart modüldür ve M nin bir direkt toplananıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) M modülü F -görüntü parçalı olsun. Bu durumda $1 \in S$ için $1F = F \leq^\oplus M$ olur. Buradan $F = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır. $f \in \text{End}_R(F)$ olsun. Böylece $f = ege$ olacak şekilde bir $g \in S$ vardır. $F \leq M$ ve M modülü F -görüntü parçalı olduğundan

$$f(F) = ege(F) = eg(F) = g(F) \leq^{\oplus} M$$

dir. Modülerite şartından $f(F) \leq^{\oplus} F$ olup F modülü d-Rickarttır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $f \in S$ olsun. $F \leq^{\oplus} M$ olduğundan $F = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır ve $\text{End}_R(F) = eSe$ dir. F modülü d-Rickart ve M nin tam değişmez altmodülü olduğundan

$$efe(F) = ef(F) = f(F) \leq^{\oplus} F \leq^{\oplus} M$$

dir. Böylece M bir F -görüntü parçalı modüldür. ■

Sonuç 4.1 M bir F -görüntü parçalı modül ve N modülü M nin F yi kapsayan bir altmodülü olsun. Eğer N nin her endomorfizması M nin bir endomorfizmasına genişlerse N modülü de F -görüntü parçalıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. Hipotezden $f = g|_N$ olacak şekilde bir $g \in S$ vardır. $F \subseteq N$ ve M modülü F -görüntü parçalı olduğundan $f(F) = g|_N(F) = g(F) \leq^{\oplus} M$ dir. Modülerite şartından $f(F) \leq^{\oplus} N$ olup N modülü F -görüntü parçalıdır. ■

Sonuç 4.2 M bir parçalanamaz F -görüntü parçalı modül olsun. Bu durumda M bir d-Rickart modüldür veya $F = 0$ dir (Çalcı vd. 2021).

İspat. Açıktır. ■

Önerme 4.1 M bir F -görüntü parçalı modül olsun. Bu durumda her $N \leq^{\oplus} M$ için N modülü $(N \cap F)$ -görüntü parçalıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. $N \leq^{\oplus} M$ olsun. $M = N \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. Böylece Önerme 2.7 den $F = (F \cap N) \oplus (F \cap K)$ dir. Ayrıca Önerme 3.1 in ispatından $(N \cap F) \leq N$ dir. N modülü üzerine olan izdüşüm π_N ile gösterilsin ve $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. Bu durumda $f\pi_N \in S$ olarak görülebilir. M modülü F -görüntü parçalı olduğundan $f\pi_N(F) \leq^{\oplus} M$ dir. $F = (F \cap N) \oplus (F \cap K)$ olduğundan

$$f\pi_N(F) = f\pi_N(F \cap N) + f\pi_N(F \cap K) = f\pi_N(F \cap N) = f(F \cap N) \leq^{\oplus} M$$

dir. Modülerite şartından $f(F \cap N) \leq^{\oplus} N$ elde edilir. Böylece N bir $(N \cap F)$ -görüntü parçalı modüldür. ■

Önerme 4.2 Bir M yarı-projektif modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir F -görüntü parçalı modüldür.
- (ii) Her $0 \neq g \in S$ ve $K \subseteq gF$ olacak şekilde her K altmodülü için M/K modülü bir (F/K) -görüntü parçalı modüldür (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $f \in \text{End}_R(M/K)$ olsun. $\pi : M \rightarrow M/K$ doğal izdüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın. M bir yarı-projektif modül olduğundan diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir $g : M \rightarrow M$ homomorfizması vardır. $F \leq M$ olduğundan

$$f(F/K) = f\pi(F) = \pi g(F) \leq \pi(F) = F/K$$

olup $F/K \leq M/K$ olur. M modülü F -görüntü parçalı olduğundan $M = g(F) \oplus N$ olacak şekilde bir N modülü vardır. Önerme 2.2 den $M/K = (g(F)/K) \oplus ((N + K)/K)$ elde edilir. $f(F/K) = g(F)/K$ olduğundan M/K modülü bir (F/K) -görüntü parçalı modüldür.

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow \pi & & \\ & g & M/K & & \\ & \nearrow & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{\pi} & M/K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır. ■

4.2 F -Görüntü Parçalı Halkalar

R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Bu kısımda R halkasının R -modül yapısıyla I -görüntü parçalı olması tanımlanmakta ve özellikleri incelenmektedir.

Tanım 4.2 R bir halka ve R nin bir ideali I olsun. Eğer R_R modülü I -görüntü parçalı ise, R ye bir *sağ I -görüntü parçalı halka* denir (Çalcı vd. 2021).

Uyarı 4.1 Sol I -görüntü parçalı halka, sağ I -görüntü parçalı halkaya benzer şekilde tanımlanır. Aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere halkada görüntü parçalı olma kavramı sol-sağ simetrik değildir (Çalcı vd. 2021).

Örnek 4.2 F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ halkası göz önüne alınsın. R nin $I = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ideali ve $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$ sağ ideali için $R = I \oplus J$ dir. $\text{End}_R(I)$ düzenli olduğundan Sonuç 2.2 den I ideali d-Rickart R -modüldür. Böylece Teorem 4.1 den R sağ I -görüntü parçalıdır. Fakat I ideali R nin esas sol ideali olduğundan R sol R -modülünün bir direkt toplananı olamaz. Dolayısıyla R sol I -görüntü parçalı halka değildir (Çalcı vd. 2021).

Teorem 4.2 Bir R halkası ve R nin bir I ideali için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) Her n pozitif tamsayısı için $M_n(R)$ sağ $M_n(I)$ -görüntü parçalıdır.
- (ii) R sağ I -görüntü parçalıdır.
- (iii) I sağ ideali R nin bir direkt toplananıdır ve $\text{End}_R(I)$ bir düzenli halkadır.
- (iv) Her $e^2 = e \in R$ için eRe sağ eIe -görüntü parçalıdır.
- (v) Her sonlu üretilmiş serbest R -modül bir I -görüntü parçalı modüldür (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iv) $\Rightarrow$ (ii) ve (v) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) R sağ I -görüntü parçalı olduğundan Teorem 4.1 den I sağ ideali bir d-Rickart R -modüldür ve R nin bir direkt toplananıdır. Buradan her $f \in \text{End}_R(I)$ için $\text{Im} f \leq^\oplus I$ dir ve I projektiftir. Böylece $\text{Im} f$ projektif olur. $I/\text{Ker} f \cong \text{Im} f$ olduğundan Önerme 2.5 ten $\text{Ker} f \leq^\oplus I$ elde edilir. Sonuç 2.2 den $\text{End}_R(I)$ bir düzenli halkadır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) R sağ I -görüntü parçalı olduğundan $R = I \oplus J$ olacak şekilde R nin bir J sağ ideali ve $I = eR$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır. Buradan $\text{End}_R(I) \cong eRe$ dir ve $M_n(R) = M_n(I) \oplus M_n(J)$ olacak şekilde $M_n(R)$ nin bir $M_n(J)$ sağ ideali

vardır. $I = eR$ ve $\text{End}_R(I) \cong eRe$ olduğundan

$$\begin{aligned} \text{End}_{M_n(R)}(M_n(I)) &= \text{End}_{M_n(R)}(M_n(eR)) = \text{End}_{M_n(R)}((eI_n)M_n(R)) \\ &\cong (eI_n)M_n(R)(eI_n) \\ &= eM_n(R)e \\ &= M_n(eRe) \\ &\cong M_n(\text{End}_R(I)) \end{aligned}$$

dir. (ii) $\Rightarrow$ (iii) nin ispatına benzer olarak $\text{End}_R(I)$ bir düzenli halkadır. Sonuç 2.3 ten $M_n(\text{End}_R(I))$ düzenlidir. Buradan $\text{End}_{M_n(R)}(M_n(I))$ bir düzenli halka olur. Sonuç 2.2 den $M_n(I)$ d-Rickarttır. Böylece Teorem 4.1 den $M_n(R)$ sağ $M_n(I)$ -görüntü parçalıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) $e^2 = e \in R$ ve $f \in \text{End}_{eRe}(eRe)$ olsun. R sağ I -görüntü parçalı olduğundan Önerme 4.1 den eR sağ eI -görüntü parçalıdır. Ayrıca Sonuç 2.1 den $\text{End}_{eRe}(eRe) \cong eRe \cong \text{End}_R(eR)$ dir. Buradan $f(eI) \leq^\oplus eR$ dir. Bu durumda $eR = f(eI) \oplus J$ olacak şekilde R -modül eR nin bir J direkt toplananı vardır. Böylece $eRe = f(eIe) + Je$ olur ve $f(eIe) \cap Je \subseteq f(eI) \cap J = 0$ olduğundan $eRe = f(eIe) \oplus Je$ dir. Buradan eRe sağ eIe -görüntü parçalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (v) K bir sonlu üretilmiş serbest R -modül olsun. Bu durumda I sağ ideali R nin bir direkt toplananı olduğundan K nın da bir direkt toplananıdır. $\text{End}_R(I)$ düzenli olduğundan Sonuç 2.2 den I d-Rickarttır. Böylece Teorem 4.1 den K sağ I -görüntü parçalıdır. ■

Teorem 4.3 Bir R halkası ve R nin bir I ideali için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $I_i = I$, $R_i = R$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$ bir $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$ -görüntü parçalı modüldür.

(ii) I sağ ideali R nin bir direkt toplananıdır ve $\text{End}_R(I)$ halkası bir yarı basit halkadır (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) Her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $I_i = I$, $R_i = R$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$ bir $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$ -görüntü parçalı modül olsun. Bu durumda Önerme 4.1 den R sağ I -görüntü parçalıdır. Buradan I sağ ideali R nin bir direkt toplananıdır. Teorem 4.2 de (ii) $\Rightarrow$ (iii) nin

ispatına benzer olarak $\text{End}_R(\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i)$ bir düzenli halkadır. $\text{End}_R(I) = K$ ile gösterilsin. $\text{End}_R(I) \cong \text{End}_K(K)$ olduğundan her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $I_i = I$, $K_i = K$ olmak üzere $\text{End}_R(\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i) \cong \text{End}_K(\bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i)$ dir. Teorem 2.1 den K halkası yarı basittir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) I sağ ideali R nin bir direkt toplananı olsun. Bu durumda her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $I_i = I$, $R_i = R$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$ de $\bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$ nin bir direkt toplanıdır. $\text{End}_R(I) = K$ ile gösterilsin. Her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $I_i = I$, $K_i = K$ olmak üzere $\text{End}_R(\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i) \cong \text{End}_K(\bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i)$ olup K bir yarı basit halka olduğundan Teorem 2.1 den $\text{End}_R(\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i)$ düzenlidir. Sonuç 2.2 den $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$ bir d-Rickart modüldür. Böylece Teorem 4.1 den $\bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$ bir $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$ -görüntü parçalı modüldür. ■

Önerme 4.3 Eğer R bir sağ $\text{Soc}(R_R)$ -görüntü parçalı halka ise, bu durumda her sağ R -modül mininjektiftir (Çalcı vd. 2021).

İspat. Eğer R halkası $\text{Soc}(R_R)$ -görüntü parçalı ise, $R = \text{Soc}(R_R) \oplus K$ olacak şekilde K altmodülü vardır. Buradan $J(R) = \text{Rad}(\text{Soc}(R_R)) \oplus \text{Rad}(K) = \text{Rad}(K)$ dir. $J(R) = \text{Rad}(K) \leq K$ olduğundan $\text{Soc}(R_R) \cap J(R) = 0$ dir. Teorem 2.6 dan her R -modül mininjektiftir. ■

4.3 F -Görüntü Parçalı Modüllerin Direkt Toplamları ve Göreceli F -Görüntü Parçalı Modüller

Önerme 4.1 den F -görüntü parçalı modüllerin direkt toplananları da bu özelliği sağlar. Ancak Örnek 4.3 te görüldüğü üzere F -görüntü parçalı modüllerin direkt toplamları bu özelliği sağlamayabilir. Bu kısımda hangi şartlar altında görüntü parçalı olma özelliğinin direkt toplamda korunduğu araştırılmaktadır ve F -görüntü parçalı modül kavramının daha genel hali olan göreceli F -görüntü parçalı modüller tanımlanmakta ve özellikleri incelenmektedir. Göreceli F -görüntü parçalı modüllerin direkt toplananlarının da bu özelliği sağladığı ispatlanmaktadır.

Örnek 4.3 F bir cisim ve F üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı V olsun. $J = \{x \in \text{End}_F(V) \mid \text{boy}(xV) \text{ sonlu}\}$ ve $R = F \times J$ şeklinde tanımlansın. Örnek 2.2 den R

ve J modülleri sırasıyla $\overline{Z}^2(R)$ -görüntü parçalı ve $\overline{Z}^2(J)$ -görüntü parçalıdır. Ancak $R \oplus J$ modülü $\overline{Z}^2(R) \oplus \overline{Z}^2(J)$ -görüntü parçalı değildir (Çalcı vd. 2021).

Önerme 4.4 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü M_i ($i \in \mathcal{I}$) altmodüllerinin direkt toplamı, $F = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ modülü F_i ($i \in \mathcal{I}$) altmodüllerinin direkt toplamı ve her $i \in \mathcal{I}$ için $M_i \trianglelefteq M$ olsun. Bu durumda M nin F -görüntü parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin F_i -görüntü parçalı olmasıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. Önerme 4.1 den M nin F -görüntü parçalı olması her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin F_i -görüntü parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak $i, j \in \mathcal{I}$ için $f_{ij} \in \text{Hom}_R(M_j, M_i)$ olmak üzere keyfi $f = (f_{ij}) \in S$ endomorfizması göz önüne alınsın. Her $i \in \mathcal{I}$ için $M_i \trianglelefteq M$ olduğundan $i \neq j$ iken $\text{Hom}_R(M_j, M_i) = 0$ dır. Her $i \in \mathcal{I}$ için $f_{ii} \in \text{End}_R(M_i)$ ve M_i modülleri F_i -görüntü parçalı olduğundan

$$f(F) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (f_{ii}(F_i)) \leq^{\oplus} \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i = M$$

dir. Böylece M bir F -görüntü parçalı modüldür. ■

Tanım 4.3 M ve N birer modül ve $F \trianglelefteq M$ olsun. Eğer her $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ için $f(F) \leq^{\oplus} N$ oluyorsa M modülüne N ye göre F -görüntü parçalı (F -image split relative to N) veya kısaca N - F -görüntü parçalı denir (Çalcı vd. 2021).

Bir M modülünün F -görüntü parçalı olması için gerek ve yeter şartın M nin M - F -görüntü parçalı olması olduğu Tanım 4.3 ten açıktır.

Teorem 4.4 M ve N birer modül ve $F \trianglelefteq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M modülü N - F -görüntü parçalıdır.
- (ii) Her $M_1 \leq^{\oplus} M$ ve her $N_1 \leq N$ için M_1 modülü N_1 -($F \cap M_1$)-görüntü parçalıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $M_1 \leq^{\oplus} M$, $N_1 \leq N$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_1, N_1)$ olsun. Bu durumda $M_1 = eM$ olacak şekilde $e^2 = e \in S$ vardır ve $fe \in \text{Hom}_R(M, N)$ olur. M modülü N - F -görüntü parçalı olduğundan $fe(F) \leq^{\oplus} N$ dir ve modülerite şartından $fe(F) \leq^{\oplus} N_1$ elde edilir. İddia $fe(F) = f(F \cap M_1)$ olduğudur. $eF \subseteq F \cap M_1$ olduğundan $fe(F) \subseteq f(F \cap M_1)$ dir. $x \in f(F \cap M_1)$ olsun. Bu durumda $x = f(y)$ olacak şekilde

bir $y \in F \cap M_1$ vardır. $y \in M_1$ ve $y \in F$ olduğundan $x = fe(y) \in fe(F)$ olur. Buradan $fe(F) = f(F \cap M_1)$ dir. Böylece M_1 modülü N_1 -($F \cap M_1$)-görüntü parçalı olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır. ■

Önerme 4.5, Teorem 4.4 ün bir sonucudur.

Önerme 4.5 M bir F -görüntü parçalı modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Eğer K ve L altmodülleri M nin direkt toplananları ve $K \subseteq F$ ise, $K + L$ de M nin bir direkt toplananıdır.

(ii) M modülü F nin içerdği direkt toplananları için SSP ye sahiptir (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) K ve L altmodülleri M nin direkt toplananları ve $K \subseteq F$ olsun. $L \leq^\oplus M$ olduğundan $L = eM$ olacak şekilde $e^2 = e \in S$ vardır. $1 - e : M \rightarrow (1 - e)M$ izdüşümü göz önüne alınsın. Teorem 4.4 ten K modülü $(1 - e)M$ - K -görüntü parçalıdır. Buradan $(1 - e)|_K(K) \leq^\oplus K$ dir. $K \leq^\oplus M$ olduğundan $(1 - e)|_K(K) \leq^\oplus M$ elde edilir. İddia $(1 - e)|_K(K) = (K + L) \cap (1 - e)M$ olduğudur. $(1 - e)|_K(K) \subseteq (K + L) \cap (1 - e)M$ olduğu açıktır. $m \in (K + L) \cap (1 - e)M$ olsun. Bu durumda $m = k + l$ olacak şekilde $k \in K$ ve $l \in L$ vardır. $L = eM$ olduğundan

$$m = (1 - e)m = (1 - e)(k + l) = (1 - e)k = (1 - e)|_K(k) \in (1 - e)|_K(K)$$

dir. Böylece $(1 - e)|_K(K) = (K + L) \cap (1 - e)M$ dir. Buradan $M = [(K + L) \cap (1 - e)M] \oplus N$ olacak şekilde $N \leq M$ vardır. Modülerite şartından $(1 - e)M = [(K + L) \cap (1 - e)M] \oplus [(1 - e)M \cap N]$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} M &= eM \oplus (1 - e)M \\ &= L + [(K + L) \cap (1 - e)M] \oplus [(1 - e)M \cap N] \\ &= (K + L) + [(1 - e)M \cap N] \end{aligned}$$

dir. $[(K + L) \cap (1 - e)M] \cap N = 0$ olduğundan $M = (K + L) \oplus [(1 - e)M \cap N]$ olur. Böylece istenilen elde edilir.

(ii) (i) den açıktır. ■

Teorem 4.5 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir F -görüntü parçalı modüldür.
- (ii) S nin her sonlu üretilmiş I sağ ideali için $\sum_{f \in I} f(F) \leq^\oplus M$ dir.
- (iii) S nin her sonlu I altkümesi için $\sum_{f \in I} f(F) \leq^\oplus M$ dir (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) n bir pozitif tamsayı olmak üzere $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$, S nin bir sonlu üretilmiş sağ ideali olsun. M bir F -görüntü parçalı modül olduğundan her $1 \leq i \leq n$ için $f_i(F) \leq^\oplus M$ dir. Önerme 4.5 (ii) den $\sum_{f \in I} f(F) \leq^\oplus M$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $f \in S$ olsun. S nin $I = fS$ sonlu üretilmiş sağ ideali için $\sum_{g \in I} g(F) \leq^\oplus M$ dir. $F \leq M$ olduğundan $\sum_{g \in I} g(F) = f(F)$ dir. Böylece M bir F -görüntü parçalı modüldür.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Açıktır. ■

Önerme 4.6 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, N bir R -modül ve $F \leq \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer N modülü SSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ sonlu ise, bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin N - F -görüntü parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin N -($F \cap M_i$)-görüntü parçalı olmasıdır.
- (ii) Eğer N modülü SSSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ keyfi ise, bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin N - F -görüntü parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin N -($F \cap M_i$)-görüntü parçalı olmasıdır.
- (iii) Eğer N modülü SSSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ keyfi ise, bu durumda $\prod_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin N - F -görüntü parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin N -($F \cap M_i$)-görüntü parçalı olmasıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) N modülü SSP ye sahip ve $\mathcal{I}$ sonlu olsun. $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün N - F -görüntü parçalı olması Teorem 4.4 ten her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin N -($F \cap M_i$)-görüntü parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak $f \in \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i, N)$ olsun, $M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ içerimleri

ι_i ile ve $f\iota_i = f_i$ ile gösterilsin. Bu durumda N modülü SSP ye sahip ve M_i modülleri $N-(F \cap M_i)$ -görüntü parçalı olduğundan $f(F) = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(F \cap M_i) \leq^\oplus N$ dir. Böylece $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü $N-F$ -görüntü parçalıdır. (ii) ve (iii) (i) ye benzer şekilde ispatlanır. ■

Sonuç 4.3 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve $F \leq \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ olsun. Bu durumda her $j \in \mathcal{I}$ için $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin M_j-F -görüntü parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin $M_j-(F \cap M_i)$ -görüntü parçalı olmasıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. Teorem 4.4 ten her $j \in \mathcal{I}$ için $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin M_j-F -görüntü parçalı olması her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modüllerinin $M_j-(F \cap M_i)$ -görüntü parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak $i \in \mathcal{I}$ ve her $j \in \mathcal{I}$ için M_i modülleri $M_j-(F \cap M_i)$ -görüntü parçalı olsun. Bu durumda M_j bir $M_j-(F \cap M_j)$ -görüntü parçalı modül olur ve Önerme 4.5 ten dolayı $F \cap M_j$ nin içerdiği her direkt toplananı için SSP ye sahiptir. İspat Önerme 4.6 nın ispatına benzer şekilde tamamlanır. ■

Teorem 4.6 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve N bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) N bir $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i-F$ -görüntü parçalı modüldür.
- (ii) Her $i \in \mathcal{I}$ için N modülü M_i-F -görüntü parçalıdır.

İspat. Teorem 4.4 ten N nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i-F$ -görüntü parçalı olması her $i \in \mathcal{I}$ için N nin M_i-F -görüntü parçalı olmasını gerektirir. Karşıt olarak her $i \in \mathcal{I}$ için N modülü M_i-F -görüntü parçalı olsun. İspat tümevarımla yapılır. $n = 2$ için $f \in \text{Hom}_R(N, M_1 \oplus M_2)$ alınsın. $\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1$ ve $\pi_2 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2$ sırasıyla M_1 ve M_2 üzerine olan izdüşümler olsun. $M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan $f(F) = \pi_1 f(F) \oplus \pi_2 f(F)$ dir. N modülü M_1-F -görüntü parçalı ve M_2-F -görüntü parçalı olduğundan $\pi_1 f(F) \leq^\oplus M_1$ ve $\pi_2 f(F) \leq^\oplus M_2$ dir. Böylece $\pi_1 f(F) \oplus \pi_2 f(F) = f(F) \leq^\oplus M_1 \oplus M_2$ elde edilir. Buradan N bir $M_1 \oplus M_2-F$ -görüntü parçalı modüldür. N modülünün $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i-F$ -görüntü parçalı olduğu kabul edilsin. Hipotezden N bir M_n-F -görüntü parçalı modül olduğundan ve iddia $n = 2$ için doğru olduğundan N modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i-F$ -görüntü parçalı

olur. ■

Sonuç 4.4, Teorem 4.6 da N modülünün $F = \overline{Z}^2(N)$ tam değişmez altmodülü için direkt bir sonucudur.

Sonuç 4.4 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve N bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) N modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - T -dual Rickarttır.
- (ii) Her $i \in \mathcal{I}$ için N modülü M_i - T -dual Rickarttır.

4.4 $Z(\cdot)$ -Görüntü Parçalı Modüller

Bu kısımda M modülünün özel olarak $Z(M)$ tam değişmez altmodülü alınarak $Z(M)$ -görüntü parçalı modüllerin özellikleri incelenmektedir.

Teorem 4.7 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir $Z(M)$ -görüntü parçalı modüldür.
- (ii) $Z(M)$ d-Rickarttır ve $M = Z(M) \oplus N$ olacak şekilde M nin N tekil olmayan altmodülü vardır.
- (iii) $Z(M)$ altmodülü M nin d-Rickart bir direkt toplananıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) M bir $Z(M)$ -görüntü parçalı modül olsun Teorem 4.1 den $Z(M)$ d-Rickarttır ve $M = Z(M) \oplus N$ olacak şekilde M nin N altmodülü vardır. $Z(M) \leq_e Z_2(M)$ dir ve modülerite şartından $Z(M) \leq^\oplus Z_2(M)$ elde edilir. Buradan $Z(M) = Z_2(M)$ dir. İkinci tekil altmodül tanımından $Z(M/Z(M)) = Z_2(M)/Z(M) = 0$ olur. Böylece $M/Z(M)$ modülü tekil olmayan modüldür. $N \cong M/Z(M)$ olduğundan N altmodülü M nin tekil olmayan bir altmodülüdür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ve (iii) $\Rightarrow$ (i) Tanımdan açıktır. ■

Örnek 4.4 F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F & F \end{bmatrix}$ halkasını kendi üzerinde sağ modül olarak alınsın. Bu durumda $R = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{bmatrix}$ dir. $Z\left(\begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 = Z\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{bmatrix}\right)$ olduğundan $Z(R_R) = 0$ dır. Her modül 0-görüntü parçalı olduğundan R halkası sağ $Z(R_R)$ -görüntü parçalıdır (Çalcı vd. 2021).

Aşağıdaki sonuç Önerme 4.1 in bir sonucudur.

Sonuç 4.5 M bir $Z(M)$ -görüntü parçalı modül olsun. Bu durumda her $N \leq^\oplus M$ için N modülü $Z(N)$ -görüntü parçalıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. $Z(N) = N \cap Z(M)$ olduğundan Önerme 4.1 de M nin tam değişmez altmodülü olarak $Z(M)$ alınarak ispat tamamlanır. ■

Her modül 0-görüntü parçalı olduğundan eğer R halkası sağ tekil olmayan halka ise, bu durumda R sağ $Z(R_R)$ -görüntü parçalıdır. Önerme 4.7 bu ifadenin karşınının da doğru olduğunu söyler.

Önerme 4.7 R bir halka olsun. Eğer R sağ $Z(R_R)$ -görüntü parçalı ise, bu durumda R sağ tekil olmayan halkadır (Çalcı vd. 2021).

İspat. R sağ $Z(R_R)$ -görüntü parçalı halka ve $Z(R_R) \neq 0$ olsun. Bu durumda tanımdan $Z(R_R) \leq^\oplus R$ dir ve buradan $Z(R_R) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır ve $e \neq 0$ dır. Böyle $e \in Z(R_R)$ dir. Ancak $r_R(e) = (1 - e)R \leq^\oplus R$ ve $e \neq 0$ olduğundan $r_R(e)$ altmodülü R de esas değildir. Bu ise $e \in Z(R_R)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $Z(R_R) = 0$ dır. ■

4.5 Güçlü F -Görüntü Parçalı Modüller ve Dual F -Ters Parçalı Modüller ile F -Görüntü Parçalı Modüllerin Karşılaştırılması

Bu kısımda M modülü için $f(F)$ altmodülünün sadece direkt toplanan değil aynı zamanda tam değişmez altmodül olduğu durum incelenmektedir.

Tanım 4.4 F bir M modülünün tam değişmez bir altmodülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $f(F)$ altmodülü M modülünün tam değişmez bir direkt toplananı oluyorsa M ye bir *güçlü (strongly) F -görüntü parçalı modül* denir (Çalcı vd. 2021).

Teorem 4.8 Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M bir güçlü F -görüntü parçalı modüldür.
- (ii) M bir F -görüntü parçalı modüldür ve M nin F tarafından kapsanan direkt toplananları tam değişmezdir.
- (iii) F bir abel modüldür ve M nin d-Rickart bir direkt toplananıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) N modülü M nin F tarafından kapsanan bir direkt toplananı olsun. Bu durumda $N = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır. $N \subseteq F$ olduğundan $e(F) \subseteq N = e(N) \subseteq e(F)$ olup M güçlü F -görüntü parçalı olduğundan $N = e(F) \trianglelefteq M$ elde edilir. M nin F -görüntü parçalı olduğu tanımdan açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) M bir F -görüntü parçalı modül olsun. Teorem 4.1 den F altmodülü M nin d-Rickart bir direkt toplananıdır. $K \leq^\oplus F$ olsun. Bu durumda $K \leq^\oplus M$ olup kabulden $K \trianglelefteq M$ dir. $F \leq^\oplus M$ olduğundan $F = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır ve $\text{End}_R(F) = eSe$ dir. $f \in \text{End}_R(F)$ olsun. Böylece $f = ege$ olacak şekilde bir $g \in S$ vardır. Buradan $f(K) = ege(K) \subseteq K$ olup $K \trianglelefteq F$ elde edilir. Dolayısıyla F bir abel modüldür.

(iii) $\Rightarrow$ (i) F abel d-Rickart modül ve M nin bir direkt toplananı olsun. Bu durumda Teorem 4.1 den M bir F -görüntü parçalı modüldür. $f \in S$ alınsın. $F \leq^\oplus M$ olduğundan $F = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır ve $\text{End}_R(F) = eSe$ dir. F d-Rickart olduğundan $efe(F) \leq^\oplus F$ ve F abel olduğundan $efe(F) \trianglelefteq F$ elde edilir. Böylece $F \trianglelefteq M$ olduğundan $efe(F) = ef(F) = f(F) \trianglelefteq M$ olur. Dolayısıyla M güçlü F -görüntü parçalıdır. ■

Aşağıdaki örnekten görüldüğü üzere bir F -görüntü parçalı modül her zaman güçlü F -görüntü parçalı olmak zorunda değildir.

Örnek 4.5 $n \geq 2$ bir pozitif tamsayı olmak üzere M bir K cismi üzerinde n boyutlu bir

vektör uzayı olsun. Bu durumda M yarı basit modül olduğundan M -görüntü parçalıdır. Ancak M abel olmadığından güçlü M -görüntü parçalı değildir (Çalcı vd. 2021).

Önerme 4.8 M bir güçlü F -görüntü parçalı modül olsun. Bu durumda her $N \leq^\oplus M$ için N modülü güçlü $(N \cap F)$ -görüntü parçalıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. $N \leq^\oplus M$ olsun. Bu durumda $N = eM$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır ve $\text{End}_R(N) = eSe$ dir. M bir güçlü F -görüntü parçalı modül olduğundan Teorem 4.8 den M bir F -görüntü parçalı modüldür. Böylece Önerme 4.1 den N modülü $(N \cap F)$ -görüntü parçalıdır. $K \subseteq (N \cap F)$ ve $K \leq^\oplus N$ olacak şekilde N nin bir K altmodülü alınsın ve $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. Bu durumda $f = ege$ olacak şekilde bir $g \in S$ vardır. $K \subseteq F$ ve $K \leq^\oplus M$ olduğundan Teorem 4.8 den $gK \subseteq K$ dır. Böylece,

$$f(K) = ege(K) = egK \subseteq eK = K$$

dır. Buradan $K \leq N$ olup Teorem 4.8 den N güçlü $(N \cap F)$ -görüntü parçalıdır. ■

Teorem 4.9 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ olsun. M nin güçlü F -görüntü parçalı modül olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin güçlü $(M_i \cap F)$ -görüntü parçalı ve $i \neq j$ olacak şekilde her $i, j \in \mathcal{I}$ için $\text{Hom}_R(M_i \cap F, M_j \cap F) = 0$ olmasıdır (Çalcı vd. 2021).

İspat. M bir güçlü F -görüntü parçalı modül olsun. Bu durumda Önerme 4.8 den her $i \in \mathcal{I}$ için M_i güçlü $(M_i \cap F)$ -görüntü parçalıdır. Buradan her $i \in \mathcal{I}$ için $(M_i \cap F) \leq M_i$ ve $(M_i \cap F) \leq^\oplus M_i$ olur. Ayrıca Önerme 2.7 den $F = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} (M_i \cap F)$ dir. Teorem 4.8 den F abel modüldür. Buradan $i \neq j$ olacak şekilde her $i, j \in \mathcal{I}$ için $\text{Hom}_R(M_i \cap F, M_j \cap F) = 0$ elde edilir. Karşıt olarak $f_{ij} \in \text{Hom}_R(M_j, M_i)$ olmak üzere $f = (f_{ij}) \in S$ olsun. $i \neq j$ için $\text{Hom}_R(M_i \cap F, M_j \cap F) = 0$ olduğundan $f(F) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} f_{ii}(M_i \cap F)$ elde edilir. Böylece $f(F)$ altmodülü M nin tam değişmez direkt toplananı olur. Tanımdan M güçlü F -görüntü parçalı modüldür. ■

Önerme 4.9 M bir abel modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (i) Eğer M dual F -ters parçalı ise, bu durumda M modülü N -görüntü parçalı olacak şekilde $N \leq M$ vardır.

(ii) Eğer M modülü F -görüntü parçalı ise, bu durumda M dual N -ters parçalı olacak şekilde $N \leq M$ vardır.

İspat. (i) M dual F -ters parçalı olsun. Bu durumda $M = F \oplus N$ olacak şekilde N d-Rickart modülü vardır. M abel modül olduğundan N altmodülü M de tam değişmezdir. Böylece M modülü N -görüntü parçalıdır.

(ii) Eğer M modülü F -görüntü parçalı ise, bu durumda F d-Rickarttır ve $M = F \oplus N$ olacak şekilde $N \leq M$ vardır. M abel modül olduğundan N altmodülü M de tam değişmezdir. Böylece M dual N -ters parçalıdır. ■

Önerme 4.10 Eğer M bir dual F -ters parçalı modül ve F d-Rickart ise, bu durumda M modülü F -görüntü parçalıdır.

İspat. M bir dual F -ters parçalı modül ise, $F \leq^\oplus M$ dir. F d-Rickart olduğundan M modülü F -görüntü parçalıdır. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde F bir tam değişmez altmodül olmak üzere dual F -ters parçalı modüller tanımlanmıştır. M bir dual F -ters parçalı modül olmak üzere M modülünün F altmodülü ile bir d-Rickart modülün direkt toplamı olarak yazılabildiği gösterilmiştir. Ayrıca bir M modülünün d-Rickart olması için gerek ve yeter şartın dual 0-ters parçalı olması olduğu görülmüştür. Dual F -ters parçalı olma özelliği bölüm modülünde, bir modülün direkt toplananında ve modüllerin direkt toplamında araştırılmıştır. Bu özelliği sağlayan halkalar incelenmiştir. Bölümün sonunda ise M modülünün tam değişmez altmodülü özel olarak $Z^*(M)$ alınmış ve dual $Z^*(M)$ -ters parçalı modüllerin özellikleri araştırılmıştır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise F -görüntü parçalı modüller tanımlanmıştır. Eğer M modülü F -görüntü parçalı ise F altmodülünün M nin d-Rickart bir direkt toplananı olduğu görülmüştür. Üçüncü bölümde olduğu gibi F -görüntü parçalı olma özelliği bir modülün direkt toplananında, modüllerin direkt toplamında, bölüm modülünde ve halkalarda araştırılmıştır. Bölümün devamında M modülünün $Z(M)$ tam değişmez altmodülü için $Z(M)$ -görüntü parçalı modüller incelenmiştir. Ardından F -görüntü parçalı modüllerin de daha genel hali olan güçlü F -görüntü parçalı modüller tanımlanmıştır. F -görüntü parçalı olmanın güçlü F -görüntü parçalı olmayı gerektirmediğine örnek verilmiştir. Son olarak dual F -ters parçalı modüller ile F -görüntü parçalı modüllerin karşılaştırılması yapılmış, hangi durumlarda birbirlerini gerektirdikleri araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

- Acar, Ü. ve Harmancı, A. 2010. Principally supplemented modules. *Albanian J. Math*, 4, 79-88.
- Agayev, N., Halıcıoğlu, S. ve Harmancı, A. 2012. On Rickart modules. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 38(2), 433-445. 1850148.
- Anderson, F.W. ve Fuller, K.R. 1974. *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, 339, New York.
- Çalcı, T.P., Üngör, B. ve Harmancı, A. 2021. Module decompositions by images of fully invariant submodules. *Filomat* 35(11) 3679–3687.
- Ebrahimi Atani, S., Khoramdel, M. ve Dolati Pish Hesari S. 2012. T-Rickart modules. *Colloq. Math.*, 128(1), 87-100.
- Ebrahimi Atani, S., Khoramdel, M. ve Dolati Pish Hesari S. 2016. T-dual Rickart modules. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 42(3), 627-642.
- Garcia, J.L. 1989. Properties of direct summands of modules. *Comm. Algebra*, 17(1), 73-92.
- Goodearl, K.R. 1976. *Ring theory: Nonsingular rings and modules*. Pure and applied mathematics (Marcel Dekker, Inc.), 206, New York.
- Goodearl, K.R. 1979. *Von Neumann regular rings*. Pitman (Advanced Publishing Program), 369.
- Harada, M. 1979. Nonsmall modules and noncosmall modules. *Ringtheory (Proc. Antwerp Conf.(NATO Adv. StudyInst.), Univ. Antwerp, Antwerp, 1978) Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 51, New York.
- Harmancı, A. ve Smith, P.F. 1992. Relative injectivity and module classes. *Comm. Algebra*, 20(9), 2471-2501.
- Hattori, A. 1960. A foundation of torsion theory for modules over general rings. *Nagoya Math. J.*, 17, 147-158.

- Kaplansky, I. 1954. Infinite abelian groups. University of Michigan Press, Ann Arbor, 91, Michigan.
- Lee, G., Rizvi, S.T ve Roman, C.S. 2010. Rickart modules. *Comm. Algebra*, 38(11), 4005-4027.
- Lee, G., Rizvi, S.T. ve Roman, C.S. 2011. Dual Rickart modules. *Comm. Algebra*, 39, 4036-4058.
- Leonard, W.W. 1966. Small modules. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17, 527-531.
- Maeda, S. 1960. On a ring whose principal right ideals generated by idempotents form a lattice. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 24, 509-525.
- Nicholson, W.K. ve Yousif, M.F. 1997. Mininjective rings. *J. Algebra*, 187(2), 548-578.
- Nicholson, W.K. ve Yousif, M.F. 2003. Quasi-Frobenius rings. Cambridge University Press, 307, Cambridge.
- Özcan, A.C. ve Harmancı, A. 1997. Characterization of some rings by functor $Z^*(\cdot)$. *Turkish J. Math.*, 21(3), 325-331.
- Özcan, A.C. 2002. Modules with small cyclic submodules in their injective hulls. *Comm. Algebra*, 30(4), 1575-1589.
- Özcan, A.C., Harmancı, A. ve Smith, P.F. 2006. Duo modules. *Glasg. Math. J.*, 48(3), 533-545.
- Roos, J.E. 1967. Sur les catégories spectrales localement distributives. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér., A-B* 265, A14-A17.
- Rotman, J.J. 1979. An introduction to homological algebra. Academic Press, 376, San Diego.
- Talebi, Y. ve Vanaja, N. 2002. The torsion theory cogenerated by M-small modules. *Comm. Algebra*, 30, 1449-1460.

- Üngör, B., Halıcıoğlu, S. ve Harmancı, A. 2016a. Modules in which inverse images of some submodules are direct summands. *Comm. Algebra*, 44(4), 1496-1513.
- Üngör, B., Halıcıoğlu, S. ve Harmancı, A. 2016b. Rickart modules relative to singular submodule and dual Goldie torsion theory. *J. Algebra Appl.*, 15(8), 1650142.
- Üngör, B., Halıcıoğlu, S. ve Harmancı, A. 2018. A dual approach to the theory of inverse split modules. *J. Algebra Appl.*, 17(8), 1850148.
- Vălcău, D. 2002. Abelian groups with the direct summand sum property. *Demonstration Math.*, 35(3), 477-491.
- Ware, R. 1971. Endomorphism rings of projective modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 155(1), 233-256.
- Wilson, G.V. 1986. Modules with the summand intersection property. *Comm. Algebra*, 14(1), 21-38.