

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİNANSAL PİYASALAR İÇİN BİR KESİRLİ BASAMAKTAN  
DİFERENSİYEL DENKLEM MODELİ VE NÜMERİK  
SİMÜLASYONLAR

Mehmet Ali HOROZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2021

Her hakkı saklıdır

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## FİNANSAL PİYASALAR İÇİN BİR KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEM MODELİ VE NÜMERİK SİMÜLASYONLAR

Mehmet Ali HOROZ

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ  
Eş Danışman: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Literatürde varlık akışı diferensiyel denklemler olarak da bilinen lineer olmayan adi diferensiyel denklem sistemleri ile tanımlanmış modeller, finansal piyasaların dinamiğini analiz etmek için kullanılmaktadır. Bu modeller teorik çalışmalarda kullanılan kabuller yerine yatırımcılar tarafından hisse senedinin alım-satım sürecinde göz önüne alınan motivasyonlar dikkate alınarak elde edilmiştir. Bu çalışmanın amacı finansal piyasalar için Riemann-Liouville ve Caputo türevlerine dayanan bir diferensiyel denklem modeli oluşturup çözümlerin varlık-teklifi ve kararlılığını incelemektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde finansal piyasalar, temel kavramlar, kesirli türev ve integral operatörleri tanıtılıp bunlarla ilgili özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde literatürde mevcut olan tam sayı basamaktan finansal modeller incelenmiştir. Dördüncü bölümde kesirli basamaktan finansal modeller tanıtılmış olup varlık akışı diferensiyel denklem sistemi modeli ifade edilmiştir. Ele alınan modelin çözümünün varlık-teklifi ispat edilmiştir. Ayrıca kesirli basamaktan model ve tam sayı basamaktan modelin çözümlerinin kararlılık davranışı arasındaki fark nümerik simülasyonlarla incelenmiştir. Son bölümde de elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

**Aralık 2021, 73 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Varlık akışı diferensiyel denklemler, Riemann-Liouville türevi, Caputo türevi, Banach sabit nokta teoremi, finansal modelleme.

# ABSTRACT

Master Thesis

## A FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION MODEL FOR FINANCIAL MARKETS AND NUMERICAL SIMULATIONS

Mehmet Ali HOROZ

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ  
Co-Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Models defined by nonlinear ordinary differential equation systems, also known as asset flow differential equations in the literature, are used to analyze the dynamics of financial markets. These models were obtained by the motivations taken into account by the investors in the buying and selling process of the stock, rather than the assumptions used in theoretical studies. The aim of this work is to construct a fractional order differential equation model based on Riemann-Liouville and Caputo derivatives for financial markets and to investigate existence and uniqueness as well as stability of the solutions.

This thesis consists of five chapters. First chapter includes introduction. In the second chapter financial markets, basic concepts, fractional derivative and integral operators are introduced. In the third chapter financial models with integer order are investigated. In the fourth chapter fractional order financial models are introduced and asset flow differential equations model is proposed. Existence and uniqueness of the solution is proved. Moreover, numerical simulations are given to investigate the difference between the stability properties of fractional order model and integer order model. The obtained results are summarized in the last section.

**December 2021, 73 pages**

**Key Words:** Asset flow differential equations, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative, Banach fixed point theorem, financial modeling.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli fikirleri ile beni yönlendiren, yardımlarını ve önerilerini eksik etmeyen saygıdeğer danışman hocalarım, Sayın Prof . Dr. Fatma KARAKOÇ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) ve Sayın Prof. Dr. Hüseyin MERDAN (TOBB ETÜ Fen Fakültesi)’a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tez çalışmamdaki desteğinden ötürü Sayın Doç. Dr. Veysel Fuat HATİPOĞLU ( Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi) ve Prof. Dr. Nuri ÖZALP (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)’a teşekkür ederim. Her koşulda desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, Ankara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü (BAP) tarafından Lisansüstü Tez Projesi (20L0430008) olarak desteklenmiştir.

Mehmet Ali HOROZ

Ankara, Aralık 2021

## İÇİNDEKİLER

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| TEZ ONAY SAYFASI                                          |     |
| ETİK .....                                                | i   |
| ÖZET .....                                                | ii  |
| ABSTRACT.....                                             | iii |
| TEŞEKKÜR.....                                             | iv  |
| SİMGELER DİZİNİ .....                                     | vi  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                     | vii |
| 1. GİRİŞ .....                                            | 1   |
| 2. ÖN BİLGİLER .....                                      | 3   |
| 2.1 Finansal Piyasalar.....                               | 3   |
| 2.2 Temel Matematiksel Kavramlar.....                     | 4   |
| 2.3 Kesirli Basamaktan İntegral ve Türev.....             | 6   |
| 3. TAM SAYI BASAMAKTAN FİNANSAL MODELLER .....            | 13  |
| 3.1 Literatür Taraması .....                              | 13  |
| 3.2 Varlık Akışı Diferensiyel Denklemler.....             | 15  |
| 4. KESİRLİ BASAMAKTAN FİNANSAL MODELLER .....             | 23  |
| 4.1 Literatür Taraması .....                              | 23  |
| 4.2 Varlık Akışı Diferensiyel Denklem Sistemi Modeli..... | 25  |
| 4.3 Nümerik Simülasyonlar .....                           | 43  |
| 5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....                                | 69  |
| KAYNAKLAR.....                                            | 70  |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                            | 73  |

## SİMGELER DİZİNİ

|                              |                                                        |
|------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                 | Reel sayılar                                           |
| $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ | Pozitif reel sayılar                                   |
| $\mathbb{N}$                 | Doğal sayılar                                          |
| $\mathbb{C}$                 | Kompleks sayılar                                       |
| $\Re(z)$                     | $z$ kompleks sayısının reel kısmı                      |
| $Z_0^-$                      | $Z_0^- = \{0, -1, -2, \dots\}$                         |
| $\Gamma(z)$                  | Gamma fonksiyonu                                       |
| $\beta(z, w)$                | Beta fonksiyonu                                        |
| $[\cdot]$                    | Tam değer fonksiyonu                                   |
| $I^\alpha$                   | Riemann- Liouville kesirli integral operatörü          |
| $D^\alpha$                   | $\alpha$ . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi |
| ${}^C D^\alpha$              | $\alpha$ . basamaktan Caputo kesirli türevi            |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|            |                                                                                         |    |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 3.1  | 2004 CEE değer kaybı - zaman grafiği . . . . .                                          | 21 |
| Şekil 3.2  | Cagımalp & Merdan modeli fiyat - zaman grafiği . . . . .                                | 22 |
| Şekil 4.1  | $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_1(t)$ bileşenleridir. . . . .              | 44 |
| Şekil 4.2  | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ bileşenleridir. . . | 45 |
| Şekil 4.3  | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_4(t)$ ve $x_5(t)$ bileşenleridir. . . | 46 |
| Şekil 4.4  | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_6(t)$ ve $x_7(t)$ bileşenleridir. . . | 47 |
| Şekil 4.5  | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_8(t)$ ve $x_9(t)$ bileşenleridir. . . | 48 |
| Şekil 4.6  | $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_1(t)$ bileşenleridir. . . . .              | 49 |
| Şekil 4.7  | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ bileşenleridir. . . | 50 |
| Şekil 4.8  | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_4(t)$ ve $x_5(t)$ bileşenleridir. . . | 51 |
| Şekil 4.9  | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_6(t)$ ve $x_7(t)$ bileşenleridir. . . | 52 |
| Şekil 4.10 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_8(t)$ ve $x_9(t)$ bileşenleridir. . . | 53 |
| Şekil 4.11 | $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_1(t)$ bileşenleridir. . . . .              | 54 |
| Şekil 4.12 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ bileşenleridir. . . | 55 |
| Şekil 4.13 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_4(t)$ ve $x_5(t)$ bileşenleridir. . . | 56 |
| Şekil 4.14 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_6(t)$ ve $x_7(t)$ bileşenleridir. . . | 57 |
| Şekil 4.15 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_8(t)$ ve $x_9(t)$ bileşenleridir. . . | 58 |
| Şekil 4.16 | $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_1(t)$ bileşenleridir. . . . .              | 59 |
| Şekil 4.17 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ bileşenleridir. . . | 60 |
| Şekil 4.18 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_4(t)$ ve $x_5(t)$ bileşenleridir. . . | 61 |
| Şekil 4.19 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_6(t)$ ve $x_7(t)$ bileşenleridir. . . | 62 |
| Şekil 4.20 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_8(t)$ ve $x_9(t)$ bileşenleridir. . . | 63 |
| Şekil 4.21 | $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_1(t)$ bileşenleridir. . . . .              | 64 |
| Şekil 4.22 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ bileşenleridir. . . | 65 |
| Şekil 4.23 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_4(t)$ ve $x_5(t)$ bileşenleridir. . . | 66 |
| Şekil 4.24 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_6(t)$ ve $x_7(t)$ bileşenleridir. . . | 67 |
| Şekil 4.25 | a, b $\alpha = 1, 0.9$ ve $0.8$ değerleri için $x_8(t)$ ve $x_9(t)$ bileşenleridir. . . | 68 |

## 1. GİRİŞ

Kaynak ihtiyacı olan girişimciler ile birikim sahibi yatırımcılar arasındaki kaynak alışverişini sağlayan kurumlar, yatırım ve finansman araçları ile bunları düzenleyen kurallardan oluşan yapıya finansal piyasa denir. Ekonomik anlamda daha güçlü bir performans için yapılan tasarrufların yatırımlara aktarılması finansal bir sistem ile mümkündür. Finansal sistemlerde gelirlerinin tamamını tüketmeyen, varlık fazlasına sahip bir kesim ile daha fazla harcama yapan, fon ihtiyacı olan iki kesim bulunmaktadır. Bu iki kesim arasındaki varlık akışı ekonominin temelini yani finansal sistemin önemini ön plana çıkarır.

Finansal piyasalarda yapılan yatırımlar gelecekte olacak olayların belirsizliğinden ötürü yatırılan paranın kaybedilme riskini içermektedir. Bu riski minimum seviyeye indirmek ve piyasadaki belirsizlikleri azaltmak amacıyla çeşitli araçlar kullanılmaktadır. Bu araçlardan bir tanesi de yaygın olarak kullanılan modellemedir. Finansal modelleme, gerçek bir finansal durumun soyut bir temsilini (bir model) oluşturmaktır. Finansal modelleme, bir işletmenin, projenin veya başka bir yatırımın bir finansal varlığını veya portföyün performansını temsil etmek (basitleştirilmiş bir versiyonunu) için tasarlanmış matematiksel bir modeldir. Başka bir deyişle, finansal modelleme, piyasaların veya araçların davranışlarıyla ilgili bir dizi hipotezi sayısal tahminlere çevirmekle ilgilidir. Bu sayısal tahminler ışığında piyasa geleceği tahmini yapan matematiksel modeller kullanılmaktadır. Yatırımcı ve girişimcilerin olduğu piyasada maksimum kazanç için kuvvetli tahminlerde bulunan matematiksel modeller bu gruplar için büyük avantaj sağlayacaktır. Son yıllarda matematiksel model, piyasa geleceğinde finansal davranışları tahmin etmeyi planlamak için önemli bir rol oynamıştır. Bu yüzden finansal davranışları tahmin etmek için sayısız matematiksel model kullanılmıştır. Üstelik gelecek olayların daha iyi simülasyonlarını elde etmek için aynı zamanda lineer olmayan sürekli modeller geliştirilmiştir.

Son yıllarda kesirli basamaktan diferensiyel denklemler finans, mühendislik, fizik ve biyoloji gibi bilimlerin de dahil olduğu karmaşık reel durumlardaki modellere uygulanmaktadır. Kesirli model konsepti gerçek hayat durumları için bilgi yapısını ifade

etmekte tam sayı basamaktan modele kıyasla daha yardımcı olmaktadır. Literatürde varlık akışı diferensiyel denklemler olarak da bilinen lineer olmayan adi diferensiyel denklem sistemleri ile tanımlanmış modeller, finansal piyasaların dinamiğini analiz etmek için kullanılmaktadır. Bu modeller teorik çalışmalarda kullanılan kabuller yerine yatırımcılar tarafından hisse senedinin alım-satım sürecinde göz önünde bulundurulmuş motivasyonlar dikkate alınarak elde edilmektedir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak finansal piyasalar ile ilgili temel kavramlar ve incelemelerde ihtiyaç duyulan matematiksel kavramlar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde literatürde yer alan tam sayı basamaktan finansal modeller ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde ise kesirli basamaktan finansal modeller için literatür taraması yapıp ele alınan modelin çözümlerinin varlık-tekliği ispatlanmıştır. Ayrıca nümerik simülasyonlar yapılarak kesirli basamaktan modelin çözümlerinin kararlılığı yorumlanmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezde geçen temel kavramlar açıklanacaktır.

### 2.1 Finansal Piyasalar

Piyasa, alıcı ve satıcılardan meydana gelen ve alıcı ve satıcıların birbirleri arasında mal ve hizmet alıp sattığı bir kanaldır (Ataman ve Kibar 1999). Ekonomide iki çeşit piyasa türü bulunmaktadır. Bunlardan birincisi ürün piyasası, ikincisi ise faktör piyasasıdır. Ürün piyasasında ticari mallar ve hizmetler işlem görürken, faktör piyasalarında iş gücü, sermaye, toprak gibi üretim faktörleri alınıp satılır. Hisse senetlerinin alınıp satıldığı piyasa türü finansal piyasanın konusudur ki finansal piyasa, faktör piyasalarının en önemli kollarından biridir. Finansal piyasalar bireylerin gelirlerini yatırıma dönüştürmek istemeleri sonucu oluşmuştur. Örneğin birey sahip olduğu gelirin hepsini tüketebilir ya da bir kısmını birikim haline getirip yatırıma dönüştürebilir. Gelirlerini yatırım haline dönüştüren birikim sahipleri ile yatırım yapan kişileri bir araya getiren, bu yatırımlara sahip olmak isteyen gerçek ve tüzel kişiler ile bu kişilere yatırım satanların da dahil olduğu, yatırım araçları ve finansal kurumlardan oluşan pazarlara finansal piyasalar denir. Bu piyasaların amacı tasarrufu teşvik etmek ve sürekliliğini sağlamaktır. Böylece sermaye birikimi oluşturmak, gerçek kişi, tüzel kişi ve ülke fonlarının etkin kullanılmasını sağlamaktır. Finansal piyasalar da kendi içlerinde başta para ve sermaye piyasaları olmak üzere döviz piyasası, altın piyasası, tahvil, bono ve türev piyasası gibi farklı bölümlere ayrılır.

**Para Piyasası:** Finansal piyasanın kısa vadeli fonlarının arz ve talep edildiği piyasalardır. Kısa vade ile anlatılmak istenen, bu fonların bir yıldan az süreli olmasıdır. İşletmeler genellikle bankalardan sağladıkları kısa vadeli kredilerle dönen varlıkların finansman ihtiyaçlarını karşılarlar.

**Borsalar:** Borsa, aynı türden menkul kıymetlerin işlem gördüğü piyasalardır. Ticaret ve finansal işlemlerle uğraşan kişilerin bulunduğu açık kurallı finansal organizasyondur. Borsada alım satım işlemleri aracı kurumlar tarafından gerçekleş-

tirilir. Aracılar, faaliyetlerini gerçekleştirirken piyasada iki farklı fonksiyonu yerine getirirler. Bunlar birincil piyasadaki faaliyetler ile ikincil piyasadaki faaliyetlerdir. Yatırımcının borsada işlem yapması için bir aracı kurumda yatırım hesabı açtırması gerekir. Yatırımcı, almak ya da satmak istediği hisse senetleri için aracı kuruma alım satım emirleri verir ve borsanın sistemine alım satım emirlerinin girilmesi ile bu emirlerin eşleşmesiyle ilgili işlemler yapılır. Yani borsada, alıcı ve satıcılar değil, onların emirleri karşı karşıya gelir. Borsanın işlevleri, likidite sağlama, piyasada tek fiyat oluşturma, güvence verme, sermayeye hareketlilik ve ekonomiye kaynak temin etme şeklinde sıralanabilir (Karlı 2004).

**Fiyat:** Fiyat, alım ya da satım bakımından bir mal ya da hizmet için uygun görülen maddi karşılıktır.

**Arz:** Arz kısaca sunmak anlamını taşır. Herhangi bir taşınır veya taşınmaz varlığın, hizmetlerin belirli bir piyasa, zaman ve fiyattan satışa sunulmasıdır. Pazarlarda, marketlerde, mağazalarda, istediğimiz ürünleri satın almaya hazır buluruz. Başka bir deyişle pazarlardaki ürün miktarı arzı tanımlar.

**Talep:** Talep satın alma isteği demektir. Ancak, her istek talep anlamına gelmez. Satın alma isteğinin ekonomik olarak talep niteliği taşıması için asgari satın alma gücü ile desteklenmiş olması gerekir. Araba alma isteğinin talep olarak nitelendirilebilmesi için kişinin alım gücünün yüksek olması gerekmektedir. Alım gücü yüksek olmayan kişiler için araba alma isteği hayal veya bir amaç olabilir. Bu bağlamda talep belirli bir piyasa, zaman ve fiyattan satın alınmak istenen ve satın alma gücü ile desteklenen mal ve hizmetler miktarıdır. Kişisel talep kişilerin tek tek taleplerini ifade ederken piyasa talebi ise bu kişilerin taleplerinin toplamını ifade etmektedir.

**Piyasa Fiyatı:** Bir finansal ürünün sermaye piyasasında, arz ve talebin kesiştiği noktada oluşan fiyattır. Piyasa fiyatı arz ve talep koşullarına göre oluşur.

## 2.2 Temel Matematiksel Kavramlar

Bu kesimde tez içerisinde geçen temel matematiksel kavramların ifadeleri bulunmaktadır.  $\Omega = [a, b]$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  reel eksenin sonlu ya da sonsuz aralığı olsun.  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $L_p(a, b)$  uzayı  $\Omega$  üzerinde  $\|g\|_p = \left\{ \int_a^b |g(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$ ,  $(1 \leq p < \infty)$  ve  $\|g\|_\infty = \text{ess sup}_{a \leq x \leq b} |g(x)|$  normuna sahip kompleks değerli

ölçülebilir  $g$  fonksiyonlarının uzayıdır. Burada  $\|g\|_p < \infty$  ve  $\operatorname{ess\,sup} |g(x)|$ ,  $|g(x)|$  fonksiyonunun maksimum değeridir (Kilbas vd. 2006).  $[a, b]$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , sonlu aralık olsun.  $AC[a, b]$  ile  $[a, b]$  aralığında mutlak sürekli olan  $g$  fonksiyonlarının uzayı gösterilecektir. Bu uzay  $\varphi(t) \in L(a, b)$ ,  $\varphi(t) = g'(t)$  ve  $c = g(a)$  olmak üzere  $g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt$  Lebesgue anlamında toplanabilir fonksiyonların uzayına denktir (Kilbas vd. 2006).  $n \in \mathbb{N}$  ve  $g^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$  olmak üzere,  $AC^n[a, b]$ ,  $[a, b]$  aralığında tanımlı ve  $(n-1)$ . basamaktan sürekli türevelere sahip kompleks değerli  $g(x)$  fonksiyonlarının uzayı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$AC^n[a, b] = \left\{ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ ve } (D^{n-1}g)(x) \in AC[a, b], D = \frac{d}{dx} \right\} \quad (2.1)$$

Özel olarak  $AC^1[a, b] = AC[a, b]$  dir (Kilbas vd. 2006).

**Lemma 2.1** (Kilbas vd. 2006)  $AC^m[a, b]$  uzayı  $\varphi(t) \in L(a, b)$ ,  $c_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m-1$ ) keyfi sabitler ve

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{m-1} \varphi(t) dt$$

olmak üzere

$$g(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k (x-a)^k$$

formundaki  $g(x)$  fonksiyonlarından oluşur. Ayrıca

$$\varphi(t) = g^{(m)}(t), c_k = \frac{g^{(k)}(a)}{k!}, (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

dir.

**Tanım 2.1**  $\Re(z) > 0$  olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

**Tanım 2.2**  $\Re(z) > 0$ ,  $\Re(w) > 0$  olmak üzere

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

**Lemma 2.2**  $z, w \notin \mathbb{Z}_0^-$  olmak üzere

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

dir.

**Teorem 2.1** (Banach Sabit Nokta Teoremi)  $U$  bir  $X$  Banach uzayının boş olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun. Eğer  $T : U \rightarrow U$  bir daralma dönüşümü ise yani her  $u, v \in U$  için

$$d(T_u, T_v) \leq wd(u, v)$$

olacak şekilde  $0 \leq \omega < 1$  mevcutsa,  $T$  operatörü bir tek  $u^* \in U$  sabit noktasına sahiptir. Böylece  $T^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T^1 = T$  ve  $T^k = TT^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  ile tanımlanan operatörlerin dizisidir. Her  $u_0 \in U$  için,  $(T_{u_0}^k)^\infty u^*$  sabit noktasına yaklaşır.

### 2.3 Kesirli Basamaktan İntegral ve Türev

Kesirli analizin tarihçesi 300 yıl öncesine kadar dayanmaktadır. Kesirli analiz fikri Leibnitz'in L'Hospital'a yazdığı "Tam sayı basamaktan türevleri kesirli basamaktan türevlere genişletebilir miyiz?" sorusuyla başlamıştır. Ancak son 30 yıldır kesirli basamaktan diferensiyel denklemler yoğun bir şekilde incelenmektedir. Bu gelişim sürecinde birbirinden farklı kesirli türev ve integral tanımları kullanılarak pek çok farklı kesirli diferensiyel denklem tipi incelenmiştir. Bu tez kapsamında kullanılan kesirli basamaktan türev tanımları Diethelm (Diethelm 1997), Podlubny (Podlubny 1999), Hilfer (Hilfer 2000), Kilbas (Kilbas vd. 2006, Gorenflo vd. 2014) tarafından yazılan kitap ve makalelerden alınmıştır. Kesirli mertebeden türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık-tekliği de pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir (Babakhani ve Geiji 2003, Yu ve Gao 2005, Deng vd. 2007, Kou vd. 2012, Li ve Sarwar 2016, Özaydın ve Karakoç 2019, Karakoç 2020). Bu bölümde kesirli basamaktan integral ve türev kavramları açıklanacaktır.

**Tanım 2.3** Bir  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $0 < \alpha < 1$  basamaktan Riemann-Liouville integrali

$$I^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds$$

dir.

**Tanım 2.4** Bir  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $0 < \alpha < 1$  basamaktan Riemann-Liouville türevi

$${}^R D^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(s)ds}{(t-s)^\alpha}$$

dir.

**Tanım 2.5** Bir  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $0 < \alpha < 1$  basamaktan Caputo türevi

$${}^C D^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{g'(s)ds}{(t-s)^\alpha}$$

dir.

**Lemma 2.3** (Kilbas vd. 2006)  $\mathbb{R}(\alpha) \geq 0$ ,  $n > [\mathbb{R}(\alpha)] + 1$  ve  $g_{n-\alpha}(x) = (I_a^{n-\alpha}g)(x)$ ,  $(n-\alpha)$ . basamaktan integral olsun. Eğer  $g(x) \in L_1(a, b)$  ve  $g_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$  ise

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{g_{n-\alpha}^{n-j}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j}$$

eşitliği  $[a, b]$  aralığı üzerinde hemen hemen her yerde sağlanır.

**Lemma 2.4** (Kilbas vd. 2006)  $\Omega = [a, b]$   $(-\infty < a < b < \infty)$  reel ekseninde bir sonlu aralık olsun.  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere

$$x > a \text{ için, } (I_{a+}^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \quad (2.4)$$

ve

$$x < b \text{ için, } (I_{b-}^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \quad (2.5)$$

ile tanımlı  $I_{a+}^\alpha g$  ve  $I_{b-}^\alpha g$  operatörlerine sırasıyla  $\alpha$ . basamaktan sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri denir. Burada  $\Gamma$  (2.2) ile tanımlanan Gamma fonksiyonudur.  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  olduğunda (2.4) ve (2.5) integralleri

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha g)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} g(t) dt \\ &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} g(t_n) dt_n, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (I_{b-}^\alpha g)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} g(t) dt \\ &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^b g(t_n) dt_n, \end{aligned}$$

integrallerine eşdeğerdir. Özel olarak,  $(I_{a+}^0 g)(x) = g(x)$  kabul edilmektedir.

**Tanım 2.6** (Kilbas vd. 2006)  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$  ve  $n = [\alpha] + 1$  olmak üzere,  $x > a$  için

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha}h)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha}h)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{h(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ve  $x < b$  için

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha}h)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha}h)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{h(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlı  $D_{a+}^{\alpha}g$  ve  $D_{b-}^{\alpha}f$  operatörlerine  $\alpha$ . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi denir. Özel olarak  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  ise bu durumda

$$\begin{aligned} (D_{a+}^0h)(x) &= (D_{b-}^0h)(x) = h(x), \\ (D_{a+}^nh)(x) &= h^{(n)}(x) \text{ ve } (D_{b-}^nh)(x) = (-1)^nh^{(n)}(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. Ayrıca  $\alpha \in \mathbb{R}$  ve  $0 < \alpha < 1$  ise bu durumda (2.6) ve (2.7) sırasıyla

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha}h)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{h(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad x > a, \\ (D_{b-}^{\alpha}h)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{h(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad x < b. \end{aligned}$$

kesirli türevine indirgenir.

**Uyarı 2.1** Sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. Gerçekten (2.6) de  $h(x) = 1$  alınırsa.

$$(D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (2.9)$$

elde edilir.

Aşağıdaki lemmada kuvvet fonksiyonlarının kesirli integral ve türevi hesaplanmıştır.

**Lemma 2.5** (Kilbas vd. 2006)  $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$  olsun. Bu durumda

$$\alpha_1 > 0 \text{ iken } (I_{a+}^{\alpha_1}(t-a)^{\alpha_2-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} (x-a)^{\alpha_2+\alpha_1-1} \quad (2.10)$$

ve

$$\alpha_1 \geq 0 \text{ iken } (D_{a+}^{\alpha_1}(t-a)^{\alpha_2-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} (x-a)^{\alpha_2+\alpha_1-1} \quad (2.11)$$

sağlanır.

**Uyarı 2.2**  $j = 1, 2, \dots, [\alpha] + 1$  ise

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) = 0$$

dır.

Aşağıdaki lemmada (2.1) ile tanımlanan  $AC^n[a, b]$  uzayındaki fonksiyonların  $D_{a+}^{\alpha}$  kesirli türevi ifade edilmiştir.

**Lemma 2.6** (Kilbas vd. 2006)  $\alpha \geq 0$  ve  $n = [\alpha] + 1$  olsun. Eğer  $h(x) \in AC^n[a, b]$  ise bu durumda

$$(D_{a+}^{\alpha}h)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{h^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

dir.

**Lemma 2.7** (Kilbas vd. 2006) Eğer  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  ve  $g(x) \in L_p(a, b)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) ise bu durumda

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} g)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} g)(x) \quad (2.12)$$

sağlanır.

**Lemma 2.8** (Kilbas vd. 2006) Eğer  $\alpha > 0$  ve  $g(x) \in L_p(a, b)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) ise bu durumda

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} g)(x) = g(x)$$

**Lemma 2.9** (Kilbas vd. 2006) Eğer  $\alpha > \beta > 0$  ise, bu durumda  $g(x) \in L_p(a, b)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) için

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} g)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} g)(x) \quad (2.13)$$

sağlanır.

**Lemma 2.10**  $\mathbb{R}(\alpha) \geq 0$ ,  $n > [\mathbb{R}(\alpha)] + 1$  ve  $g_{n-\alpha}(x) = (I_a^{n-\alpha} g)(x)$ ,  $(n-\alpha)$ . basamak-tan integral olsun. Eğer  $g(x) \in L_1(a, b)$  ve  $g_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$  ise

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{g_{n-j}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} \quad (2.14)$$

eşitliği  $[a, b]$  aralığı üzerinde hemen hemen her yerde sağlanır.

**Uyarı 2.3** Lemma 2.9 da  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  ise bu durumda

$$(I_{a+}^n D_{a+}^n g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

sağlanır.

Riemann-Liouville kesirli integral ve türev operatörlerinin özellikleri bu bölümde incelenmiş oldu. Bundan sonra Caputo kesirli türevi tanımlanıp özellikleri incelenecektir.

**Tanım 2.7** (Kilbas vd. 2006)  $[a, b]$  reel ekseninde sonlu bir aralık olsun.  $D_{a+}^\alpha[z(t)](x) = (D_{a+}^\alpha z)(x)$  ve  $D_{b-}^\alpha[z(t)](x) = (D_{b-}^\alpha z)(x)$  sırasıyla (2.6) ve (2.7) ile tanımlı  $\alpha$ . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi ifade etsin.  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $[a, b]$  de  $\alpha$ . basamaktan sol tarafı ve sağ tarafı Caputo kesirli türevleri sırasıyla

$$({}^C D_{a+}^\alpha z)(x) = (D_{a+}^\alpha [z(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k])(x) \quad (2.15)$$

ve

$$({}^C D_{b-}^\alpha z)(x) = (D_{b-}^\alpha [z(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k])(x) \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlıdır, burada

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \text{ için } n = [\alpha] + 1; \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ için } n = [\alpha]$$

dır.

Özel olarak  $0 < \alpha < 1$  olduğunda (2.15) ve (2.16) Caputo türevleri sırasıyla

$$({}^C D_{a+}^\alpha z)(x) = (D_{a+}^\alpha [z(t) - z(a)])(x),$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha z)(x) = (D_{b-}^\alpha [z(t) - z(b)])(x)$$

biçimindedir. Eğer  $\alpha \notin \mathbb{N}_0$  ise bu durumda (2.15) ve (2.16) Caputo türevleri, (2.6) ve (2.7) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli türevi kullanılarak

$$({}^C D_{a+}^\alpha z)(x) = (D_{a+}^\alpha z)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, n = [\alpha] + 1,$$

ve

$$({}^C D_{b-}^\alpha z)(x) = (D_{b-}^\alpha z)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}, n = [\alpha] + 1,$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliklerde  $0 < \alpha < 1$  ise bu durumda

$$({}^C D_{\alpha+}^\alpha z)(x) = (D_{\alpha+}^\alpha z)(x) - \frac{z(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha z)(x) = (D_{b-}^\alpha z)(x) - \frac{z(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}$$

elde edilir.  $\alpha \notin \mathbb{N}_0$  ise aşağıdaki durumlarda (2.15) ve (2.16) Caputo türevleri, (2.6) ve (2.7) Riemann-Liouville kesirli türevleri ile örtüşür:

$$\begin{aligned} z(a) = z'(a) = \dots = z^{(n-1)}(a) = 0 \text{ ise, } ({}^C D_{\alpha+}^\alpha z)(x) &= (D_{\alpha+}^\alpha z)(x), \\ z(b) = z'(b) = \dots = z^{(n-1)}(b) = 0 \text{ ise, } ({}^C D_{b-}^\alpha z)(x) &= (D_{b-}^\alpha z)(x). \end{aligned}$$

Burada özel olarak  $0 < \alpha < 1$  ise

$$z(a) = 0 \text{ durumunda } ({}^C D_{\alpha+}^\alpha z)(x) = (D_{\alpha+}^\alpha z)(x),$$

$$z(b) = 0 \text{ durumunda } ({}^C D_{b-}^\alpha z)(x) = (D_{b-}^\alpha z)(x)$$

elde edilir. Eğer  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  ve  $n$ . basamaktan  $z^{(n)}(x)$  adi türevi mevcutsa, bu durumda

$$({}^C D_{\alpha+}^\alpha z)(x) = z^{(n)}(x) \text{ ve } ({}^C D_{b-}^\alpha z)(x) = (-1)^n z^{(n)}(x)$$

olur.

Caputo kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli türevinin var olduğu durumdaki  $z(x)$  fonksiyonları için tanımlıdır. O halde mutlak sürekli fonksiyonların uzayı olan  $AC^n$   $[a, b]$  uzayındaki  $z(x)$  fonksiyonları için de tanımlı olur. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

**Teorem 2.2** (Kilbas vd. 2006)  $\alpha \geq 0$  olsun ve  $n$  için

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \text{ için } n = [\alpha] + 1; \alpha \in \mathbb{N} \text{ için } n = \alpha \quad (2.17)$$

şartı sağlansın. Ayrıca  $g(x) \in AC^n[a, b]$  olsun.

(i) Eğer  $\alpha \notin \mathbb{N}_0$  ise bu durumda  $({}^C D_{\alpha+}^\alpha g)(x)$  Caputo türevi

$$({}^C D_{\alpha+}^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{g^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: (I_{a+}^{n-\alpha} D_{a+}^n g)(x)$$

şeklinde ifade edilir, burada  $D = \frac{d}{dx}$  dir.

Özel olarak  $0 < \alpha < 1$  ve  $g(x) \in AC^n[a, b]$  ise bu durumda

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{g'(t)dt}{(x-t)^\alpha} =: (I_{a+}^{1-\alpha} Dg)(x)$$

dir.

(ii) Eğer  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  ise bu durumda  $({}^C D_{\alpha+}^\alpha g)(x)$  Caputo türevi

$$({}^C D_{\alpha+}^n g)(x) = g^{(n)}(x) \text{ ve } ({}^C D_{b-}^n g)(x) = (-1)^n g^{(n)}(x)$$

ile ifade edilir.

**Lemma 2.11**  $\alpha > 0, \beta > 0$  olsun ve  $n$  için (2.17) şartı sağlansın. Bu durumda

$$({}^C D_{\alpha+}^\alpha (t-\alpha)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-1}, \beta > n$$

sağlanır. Özel olarak

$$({}^C D_{\alpha+}^\alpha 1)(x) = 0 \tag{2.18}$$

dır.

### 3. TAM SAYI BASAMAKTAN FİNANSAL MODELLER

#### 3.1 Literatür Taraması

Finansal matematik, finansta uygulamaları bulunan bir takım matematiksel tekniklerin toplamıdır. Finansal matematikte iki ana yaklaşım vardır. İlki olasılık ve stokastik süreçler yaklaşımı, ikincisi ise diferensiyel denklemler yaklaşımıdır. Stokastik süreçler yaklaşımı ile yapılan çalışmalar, hisse senedi fiyatının modellenmesi için Brownian metodunun kullanılmasıyla başlamıştır. Brownian metodunun matematiksel olarak modellenmesi için ilk girişimler, birbirinden habersiz üç kişi tarafından yapılmıştır. Birincisi, T.N. Thiele'dir. Thiele, 1880 yılında zaman serilerini çalışırken, Brownian hareketi için etkili bir model kurmuştur (Thiele 1880). İkincisi 1900'de yine Brownian hareketi için bir model oluşturan Louis Bachelier'dur. L. Bachelier, Paris stok piyasasının dinamiğini çalışırken bu modeli bulmuştur. Spekülasyon Teorisi adlı çalışması 1900 yılında yayımlanmıştır (Bachelier 1900). Üçüncüsü ise Albert Einstein'dır. 1905 yılında diğer fizikçileri maddenin moleküler yapıda olduğuna ikna etmek için bulunduğu bir girişimde, bir sıvı içinde asılı duran küçük parçacıkların hareketinin modelini önermiştir (Einstein 1905). Finansal matematikteki ilk etkileyici iş ise, 1952 yılında Harry Markowitz tarafından yapılan "Modern Portfolio Theory" adlı portföy optimizasyonudur (Markowitz 1952). Yapılan çalışmalarda portföy seçme süreci iki aşamaya ayrılmıştır. İlk aşama gözlem ve deneyimle başlar ve mevcut menkul kıymetlerin gelecekteki performanslarına ilişkin beklentilerle sona erer. İkinci aşama, gelecekteki performanslarla ilgili beklentilerle başlar ve portföy seçimi ile sona erer. Markowitz'in çalışması ikinci aşama ile ilgilidir. Beklenen getirilerin varyansı kuralına göre beklentiler ve portföy seçimi arasındaki geometrik ilişki incelenmiştir. Benzer olarak William Sharpe, piyasa ve her bir hisse arasındaki korelasyona karar vermenin matematiğini geliştirmiştir (Sharpe 1970). Öncü çalışmalarından dolayı Markowitz, Sharpe ve Merton Miller 1990 yılında ekonomi alanında Nobel ödülünü kazanmışlardır. Bu ödül finans alanında kazanılan ilk ödüldür. Sonraki büyük gelişme 1973'te Fischer Black ve Myron Scholes'un, Merton'un katkılarıyla yaptıkları çalışmalarla geldi. Bu çalışmada, Black ve Scholes

stokastik süreçler ve kısmi türevli denklemler kullanarak finans piyasaları için bir model geliştirmişlerdir ve 1997 yılında ekonomi alanında Nobel Ödülü kazanmışlardır (Black ve Scholes 1973). Bu kısma kadar anlatılan çalışmalar, stokastik süreçler ve olasılık yaklaşımı kullanılarak yapılmıştır. Bu tez çalışmasında finansal matematikteki ikinci yaklaşım olan diferansiyel denklemler yaklaşımı kullanılmıştır. 1990 yılından günümüze kadar bu tarzda birçok çalışma yapılmıştır. 1990 yılında Caginalp ve Ermentrout tarafından ele alınan çalışmada yatırımcının psikolojisine bağlı finansal piyasa davranışları modellenmiştir (Caginalp ve Ermentrout 1990). Bu makalenin amacı, piyasadaki fiyat dalgalanmalarının deterministik bir yolla modellenebileceğini göstermektir. Birden çok karar verme mekanizmasına bağlı bir finansal sistemin modellenmesi, fiziksel bir sistemin modellenmesine benzetilmiştir. Yatırımcılar alıcı ve satıcılardan oluşan bir topluluk olarak göz önüne alınmıştır. Alış ve satış işlemlerinin gerçekleşmesi olasılığı ise bir geçiş oran fonksiyonu olarak kabul edilmiştir ki bu kimyasal kinetiğe benzerdir. Aynı yazarlar 1991 yılında aynı diferensiyel denklem sistemini nümerik olarak incelemişlerdir (Caginalp ve Ermentrout 1991). Caginalp ve Balenovich 1994 ve 1999 yıllarında yaptıkları çalışmalarda belirli sayıda hisse senedi ve belirli miktarda nakit para içeren bir piyasa için birinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi oluşturmuşlardır (Caginalp ve Balenovich 1994, Caginalp ve Balenovich 1999). Bu sistem bazı basit enerji korunum kuralları ile mikro ekonomik eşitliklerden yola çıkılarak oluşturulmuş olup tek çeşit grup ile tek çeşit hisse senedi içermektedir. Daha sonra Caginalp ve Merdan 2007 yılında yayımlanan çalışmalarında farklı koşullar altındaki hisse senedi fiyat değişimlerini çalışmak için bir diferensiyel denklem sistemi kullanmışlardır (Caginalp ve Merdan 2007). Bu çalışmada tek bir hisse senedi ve iki veya daha fazla farklı grup olduğu varsayılmıştır. Diferensiyel denklemlerle, hisse senedi sayısının sonlu olması durumu ve yatırımcı stratejilerinin etkileri birleştirilmiştir. Sistem daha sonra hisse senedi ve nakit girişinin olduğu kapalı olmayan bir sisteme genişletilmiştir. Tam sayı basamaktan türev içeren bir başka model de 2011 yılında Merdan ve Alisen tarafından incelenmiştir (Merdan ve Alisen 2011).

### 3.2 Varlık Akışı Diferensiyel Denklemler

Matematiksel modellemede kullanılan arz, talep, geçiş oranı, hisse senedi yönü tabanlı eğilim ve hisse senedi değeri gibi mikroekonomik tanımlar Caginalp ve çalışma arkadaşlarının makalelerinde (Caginalp ve Ermentrout 1990, Caginalp ve Ermentrout 1991, Caginalp ve Balenovich 1994, Caginalp ve Balenovich 1999, Caginalp ve Merdan 2007, Merdan ve Alisen 2011) temellendirilmiştir. Bu tanımlar kapalı sistemde aynı motivasyona sahip gruplar arasındaki dinamiği ifade ederken kullanılmıştır. İlk olarak ele alınan piyasaya içeriden dışarıya ve dışarıdan içeriye para ve hisse senedi akışının olmadığı ve yalnızca bir grup yatırımcı tarafından tek bir hisse senedi çeşidinin alınıp satıldığı bir finansal piyasa için matematiksel model geliştirilmiştir. Sistem kapalı bir finansal piyasa olarak kabul edildiğinden dolayı piyasadaki toplam para ve hisse senedi miktarı sabit olacaktır. Sistemde toplamda  $M$  birim nakit para ve  $N$  birim hisse senedi bulunmaktadır. Likidite terimi toplam nakit paranın toplam hisse senedi miktarına oranı olarak tanımlanmış olup bu iki değer kapalı sistem içinde sabit olacağından dolayı  $L := \frac{M}{N}$  şeklinde sabit bir değer olarak ifade edilmiştir.

Hisse senedinin  $t$  anındaki fiyatı  $P(t)$ , yatırımcının hisse senedi için nelirlediği değer  $P_a(t)$ , toplam mal varlığındaki nakit para oranı  $B(t)$  ve hisse senedi oranı  $1 - B(t)$  ile gösterilmektedir. Buna göre

$$\frac{B(t)}{1 - B(t)} = \frac{N}{M} P(t) = \frac{P}{L}$$

dir.

Çalışmalarda kullanılan  $k$  fonksiyonu bir birim paranın hisse senedine dönüşme olasılığını,  $1 - k$  fonksiyonu ise bir birim hisse senedinin bir birim paraya dönüşme olasılığını ifade etmektedir. Buna bağlı olarak  $D$  talep,  $S$  ise arz fonksiyonunu göstermek üzere

$$D := k(t)(1 - B(t)), \quad S := (1 - k(t))B(t), \quad \frac{D}{S} = \frac{k(t)}{1 - k(t)} \frac{1 - B(t)}{B(t)}$$

temel denklemleri yazılabilir.  $k$  geçiş fonksiyonu bir olasılık fonksiyonu olduğundan  $[0, 1]$  aralığında değer almaktadır. Çalışmaların finansal olarak anlamlı olabilmesi için görüntü kümesinin koordinat düzleminde birinci bölgede olması gerektiğinden

yapılan çalışmalarda  $k := \frac{1}{2}(1 + \tanh \xi)$  veya  $\tanh(t) \approx t$  olan lineer yaklaşım kullanılarak

$$k := \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

olarak alınmıştır. Burada  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  yatırımcı motivasyonlarını ifade eden fonksiyonlar olmak üzere

$$\xi := \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 = \frac{q_1 \tau_0}{P(t)} \frac{dP}{dt}, \quad \xi_2 = q_2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_a(t)}\right)$$

olduğu kabul edilmiştir.

Hisse senedi fiyatının bağlı değişim ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$\frac{\tau_0}{P(t)} \frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1 \quad (3.1)$$

Yukarıda tanımlanan tanım ve ifadeler çalışmanın ilerleyen dönemlerinde daha hassas sonuçlar elde edebilmek için genişletilmiştir. Yatırımcıların olası değişimlere hemen tepki vermedikleri göz önüne alınarak yatırımcı motivasyon ve stratejisini temsil eden  $\xi_i$  fonksiyonlarına zaman terimi eklenmiş ve şu şekilde genişletilmiştir:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= q_1 c_1 \int_{-\infty}^t e^{-c_1(t-\tau)} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau, \\ \xi_2(t) &= q_2 c_2 \int_{-\infty}^t e^{-c_2(t-\tau)} \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} dP(\tau). \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_1(t) + \xi_2(t) \\ &= q_1 c_1 \int_{-\infty}^t e^{-c_1(t-\tau)} \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau + q_2 c_2 \int_{-\infty}^t e^{-c_2(t-\tau)} \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} dP(\tau) \end{aligned}$$

tanımlanmıştır.  $\xi_1(t)$  ve  $\xi_2(t)$  fonksiyonlarının zamana bağlı türevleri alınarak aşağıdaki diferensiyel denklemler elde edilmiştir:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = c_1 \left( \frac{q_1}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1 \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = c_2 \left( q_2 \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} - \xi_2 \right) \quad (3.4)$$

Hisse senedindeki varlığın toplam mal varlığına oranının zamana bağlı değişimi ise, yatırımcının hisse senedi almasına, elindeki hisse senedini satmasına ve hisse fiyatındaki değişikliğe bağlıdır. Yani

$$\frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + (\text{hisse senedinin fiyatındaki değişiklik})$$

şeklindedir. Böylece aşağıdaki diferensiyel denklem elde edilmiştir:

$$\frac{dB}{dt} = k(1 - B) + (k - 1)B + B(1 - B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \quad (3.5)$$

Yapılan çalışmalarda (3.1), (3.3), (3.4) ve (3.5) denklemleriyle aşağıdaki lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{P(t)} \frac{dP}{dt} &= \left( \frac{D}{S} - 1 \right) \frac{dB}{dt} \\ \frac{dB}{dt} &= k(1 - B) + (k - 1)B + B(1 - B)\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= c_1 \left( \frac{q_1}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1 \right) \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= c_2 \left( q_2 \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} - \xi_2 \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Caginalp ve Merdan'ın daha sonra yapmış olduğu çalışmada (Caginalp ve Merdan 2007) sistem bir kapalı finansal piyasa olarak, içeriden dışarıya ve dışarıdan içeriye herhangi bir para veya hisse senedi akışı olmadan iki grup yatırımcı tarafından tek bir hisse senedinin alınıp satıldığı şekilde kurulmuştur.  $M_1(t)$  ve  $M_2(t)$  sırasıyla birinci ve ikinci grubun sahip olduğu nakit miktarını,  $N_1(t)$  ve  $N_2(t)$  sırasıyla birinci ve ikinci grubun sahip olduğu hisse senedi sayısını gösterebilir. Piyasadaki toplam nakit miktarı

$$M_1(t) + M_2(t) = M_0 \quad (3.7)$$

ve toplam hisse senedi sayısı

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0 \quad (3.8)$$

ile ifade edilmektedir. Burada  $M_0$  ve  $N_0$  pozitif sabitlerdir. Bu sistemin oluşturulması da Caginalp ve Balenoviç'in çalışmalarına da dayanmaktadır (Caginalp ve Balenovich 1990, Caginalp ve Balenovich 1994).  $P(t)$  hisse senedinin  $t$  anındaki

fiyatını göstermek üzere fiyattaki bağıl değişimin aşırı talep fonksiyonu ile veya aşırı talebin artan bir fonksiyonu ile orantılı olduğu kabul edilirse

$$\frac{\tau}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1 \text{ veya } \tau \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = f\left(\frac{D}{S}\right) \quad (3.9)$$

elde edilir, burada  $D$  talep,  $S$  arz fonksiyonudur,  $f$  ise her  $t > 0$  için  $f(t) > 0$ ,  $f(1) = 0$  ve  $f'(t) > 0$  özelliklerini sağlayan artan bir fonksiyondur. Şartları sağlayan bir fonksiyon olarak  $f(t) = \ln t$  alınabilir. Talep ve arz fonksiyonları ise

$$D = k_1 M_1 + k_2 M_2 \quad (3.10)$$

$$S = (1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) N_2 P \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada,  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $i$ . grup için bir birim nakdin bir birim hisse senedine dönüşme olasılığıdır ve geçiş oran fonksiyonları olarak da adlandırılırlar. (3.7), (3.8), (3.10) ve (3.11) eşitlikleri (3.9) da göz önüne alındığında

$$\frac{\tau}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{k_1 M_1 + k_2 (M_0 - M_1)}{(1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) (N_0 - N_1) P} - 1 \quad (3.12)$$

elde edilir. Sisteme eklenen veya çıkarılan hisse senedi olmadığında, hisse senedi sayısı sadece alım-satıma bağlıdır. Bu durumda

$$P \frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i P \quad (3.13)$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P \quad (3.14)$$

sistemi elde edilir. (3.7) ve (3.8) den

$$\frac{d}{dt}(M_1 + M_2) = 0, \quad \frac{d}{dt}(N_1 + N_2) = 0$$

dır. O halde (3.13) veya (3.14)  $i = 1, 2$  için açılıp taraf tarafa toplanırsa

$$P = \frac{k_1 M_1 + k_2 M_2}{(1 - k_1) N_1 + (1 - k_2) N_2} \quad (3.15)$$

bulunur. Diğer taraftan sisteme nakit ya da hisse senedi akışı olmadığını kabul ettiğimizden (3.13) ve (3.14) den

$$\frac{dM_i}{dt} = P \frac{dN_i}{dt} \quad (3.16)$$

dir.  $k_i$  geçiş fonksiyonları, yatırımcıların eğilimini ifade eden  $\xi_1^{(i)}$  ve  $\xi_2^{(i)}$  fonksiyonları ile tanımlanır.  $(i)$ . yatırımcı grubun hisse senedinin fiyatının yönüne ve gerçek değerine göre kararını etkileyen motivasyon fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1^{(i)}}{dt} &= c_1^{(i)} \left\{ \frac{q_1^{(i)}}{P} \frac{dP}{dt} - \xi_1^{(i)} \right\} \\ \frac{d\xi_2^{(i)}}{dt} &= c_2^{(i)} \left\{ q_2^{(i)} \frac{P_a^{(i)}(t) - P(t)}{P_a^{(i)}(t)} - \xi_2^{(i)} \right\}\end{aligned}$$

dir.  $k_i : (-\infty, \infty) \rightarrow (-1, 1)$  fonksiyonları

$$k_i = \frac{1}{2}(1 + \tanh(\xi_1^i + \xi_2^i)) \quad (3.17)$$

şeklinde alınabilir. Yatırımcı motivasyonları (3.17) içerisine dahil edilebilir ve

$$\xi^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^m \xi_j^{(i)}(t)$$

şeklinde bir yatırımcı duyarlılık fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Yatırımcı duyarlılık fonksiyonunun bu yapısı lineer bir yapıdan ziyade lineer olmayan bir yapıya da sahip olabilir.

Çalışmanın devamında bu kapalı denklem sistemi içeriden dışarıya para ve hisse senedi alan ve dışarıdan içeriye para ve hisse senedi çıkaracak şekilde genişletilmiştir. Oluşan yeni sistemdeki zamana bağlı olarak değışen nakit miktarı ile hisse senedi sayısı aşağıda ifade edilmiştir:

$$M_0(t) = M^{\text{bas}} + M_1^{\text{ek}}(t) + M_2^{\text{ek}}(t) \quad (3.18)$$

$$N_0(t) = N^{\text{bas}} + N_1^{\text{ek}}(t) + N_2^{\text{ek}}(t) \quad (3.19)$$

Burada  $M^{\text{bas}}$  ve  $N^{\text{bas}}$  ile gösterilen sistemde başlangıçta sistem içerisinde bulunan nakit ve hisse senedi miktarıdır.  $M_i^{\text{ek}}(t)$  ve  $N_i^{\text{ek}}(t)$  ile ifade edilmek istenen ise sistemdeki iki grup yatırımcının varlıklarına eklenen veya artık sahip olmadığı nakit ve hisse senedi miktarıdır. Ek nakit miktarının fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

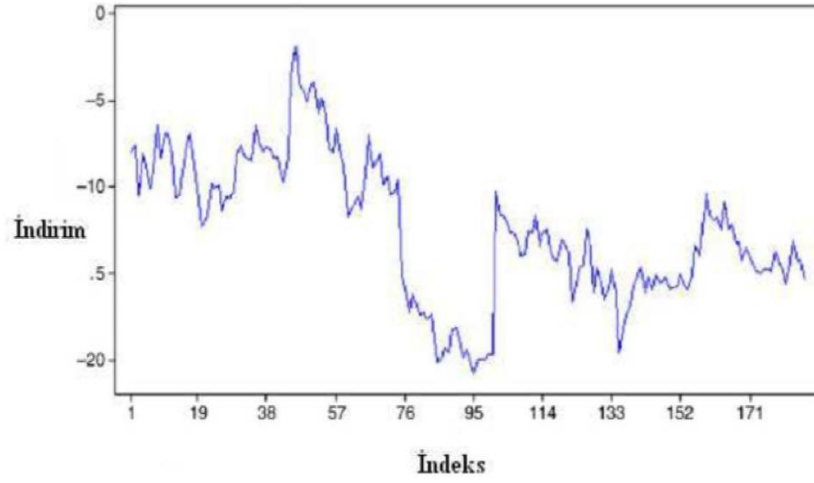
$$M_i^{\text{ek}}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ M_i^{\text{ek}}(t), & t \geq t_1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Buna göre (3.6) ve (3.7) ile ifade edilen nakit ve hisse senedi miktarındaki değişikliği gösteren denklemler aşığıdaki gibi revize edilmiştir:

$$P \frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i P + P \frac{dN_i^{\text{ek}}}{dt} \quad (3.21)$$

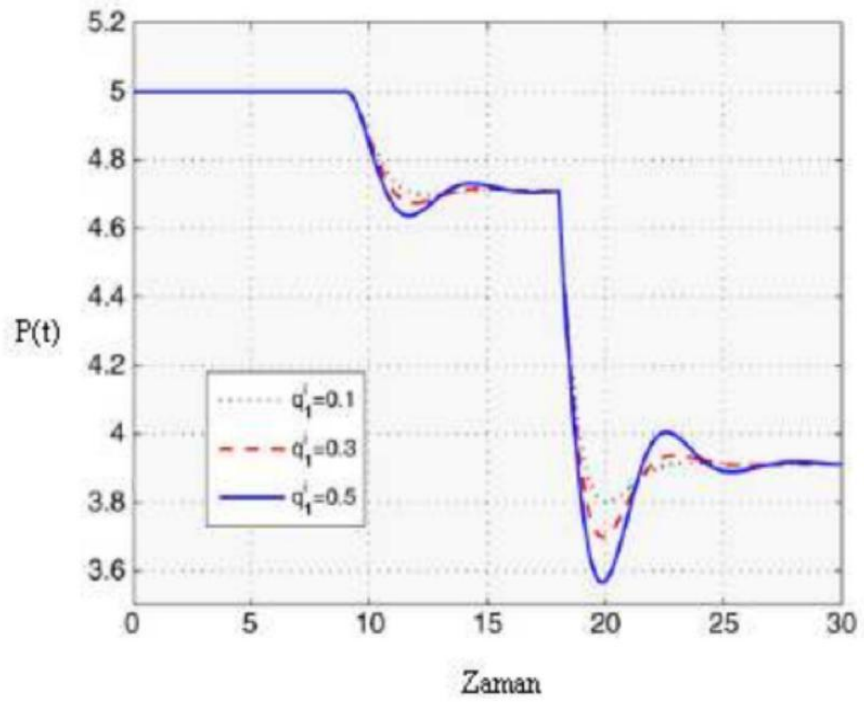
$$P \frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P + P \frac{dM_i^{\text{ek}}}{dt} \quad (3.22)$$

Caginalp ve Merdan çalışmalarında korunumlu olmayan bu sistem için bazı nümerik çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmaları gerçek piyasa olaylarıyla karşılaştırmışlardır. 2004 yılında CEE (Central Europe and Russia) adlı piyasada meydana gelen hisse senetlerinin bölünmesi adı verilen bir olayı incelemişlerdir. Hisse senedi bölünmesi olarak ifade edilen bu olayda, elinde bir A şirketinin hissesini bulunduran yatırımcıya ya elindeki hisse senedi miktarına göre belirli oranda hisse senedi verilir ya da o yatırımcıya daha ucuz fiyattan hisse senedi satılır. Klasik ekonomide bu durum sonucunda hisse senedi fiyatlarının değişmeyeceği konusunda yaygın bir görüş vardır. Ancak bu görüş uygulamada geçerli değildir. Caginalp ve Merdan makalelerinde oluşturdukları sistem ile bu yaygın görüşün geçerli olmadığını ortaya koymuşlardır. Bu örnekte, ilgili şirket 2004 yılı ocak ayında sözü geçen piyasaya  $\frac{1}{3}$  oranında daha fazla hisse senedi süreceğini duyurmuştur ve şubat ayında da bu hisse senetlerini piyasaya sürmüştür. Klasik ekonomiye göre hisse senedi fiyatının değişmemesi gerekmektedir. Ancak durum böyle olmamıştır. Hatta hisse senedi eklenmesi duyurusu bile fiyatları belli bir oranda düşürmüştür. Bunun nedenini Caginalp ve Merdan şöyle açıklamıştır. Çalışmalarında iki farklı görüşe sahip olan yatırımcı gruplarından elinde fazla miktarda hisse senedi bulunan grup fiyatların değişmeyeceğini umut etmişlerdir ve onların zihnindeki hisse senedi değerini düşürmemişlerdir. Ellerinde fazla miktarda para olan grup ise piyasaya daha fazla hisse senedi eklenmesiyle hisse senedi sayısında bir artış olacağını düşündükleri ve likidite değeri düşeceğinden dolayı hisse senedinin gerçek değerini daha düşük belirlemişlerdir. Gerçekten de bir piyasada arz fazla iken talep az ise satılan malın veya hizmetin fiyatı düşer. Nitekim 2004 yılındaki olay da bu şekilde gerçekleşmiştir.



Şekil 3.1 2004 CEE değer kaybı - zaman grafiği

Şekil 3.1 de 47. günde piyasaya hisse senedi sürüleceği duyurusu yapılmış ve fiyatlar düşmeye başlamıştır. 74. günde ise duyuruda sözü geçen hisse senetleri piyasaya sürülmüş ve ardından büyük bir düşüş yaşanmıştır. Şekil 3.2 de Caginalp ve Merdan'ın çalışmalarında nümerik simülasyonla elde edilen grafik yer almaktadır. Bu simülasyonla oluşturulan sistemin tutarlılığı gözlemlenmiştir. Bu makalenin sonucunda farklı motivasyonlara sahip yatırımcı gruplarını ele alarak oluşturulan sistemin tutarlılığı gözlemlenmiştir.



Şekil 3.2 Cagmalp & Merdan modeli fiyat - zaman grafiği

## 4. KESİRLİ BASAMAKTAN FİNANSAL MODELLER

### 4.1 Literatür Taraması

Kesirli basamaktan türevleri içeren finansal modeller tam sayı basamaktan türevleri içerenlere nazaran bir hayli azdır. Bu konuda yapılan çalışmalar (Chen 2008, Wang vd. 2011, Prathumwan vd. 2017) da yer almaktadır. Chen 2008 yılında yaptığı çalışmada temeli tam sayı basamaktan

$$\begin{cases} x' = z + (y - a)x \\ y' = 1 - by - x^2 \\ z' = -x - cz \end{cases}$$

sistemine dayanan kesirli basamaktan

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_1} x(t) = z + (y - a)x \\ D_t^{\alpha_2} y(t) = 1 - by - x^2 \\ D_t^{\alpha_3} z(t) = -x - cz \end{cases} \quad (4.1)$$

modelini incelemiştir (Chen 2008). Burada üç durum değişkeni  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sırasıyla faiz oranını, yatırım talebini ve fiyat endeksini temsil eder.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  negatif olmayan sabitler olup,  $a$  tasarruf miktarıdır (bazen bir kontrol parametresi olarak kabul edilebilir),  $b$  kişi başına maliyettir,  $c$  ise ticari piyasaların talep esnekliğidir. Bu çalışmada sabitler  $a = 3$ ,  $b = 0.1$  ve  $c = 1$  ve başlangıç koşulları  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 2)$  olarak alınmıştır. Diethelm (Diethelm vd. 2002) de ifade edilen nümerik metot uygulanarak  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ve  $\alpha_3$  basamaklarının farklı değerleri için nümerik simülasyonlar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar basamakların 3'ten küçük olduğu durumlarda sistemin kaotik bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

Wang ve çalışma arkadaşları ise (4.1) sisteminin bir genelleştirilmesi olan gecikmeli

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_1} x(t) = z + (y(t - \tau) - a)x \\ D_t^{\alpha_2} y(t) = 1 - by - x^2(t - \tau) \\ D_t^{\alpha_3} z(t) = -x(t - \tau) - cz \end{cases}$$

modelini incelemişlerdir (Wang vd. 2011). Burada  $\tau > 0$  sistemin gecikme terimini ifade eder. Farklı  $\alpha$  değerleri ve sabit  $\tau$  gecikme terimi için yapılan nümerik simülas-

yonlara ek olarak farklı  $\tau$  değerleri için de inceleme yapılmış ve zaman gecikmesinin finansal sistem için hassas bir faktör olduğu gösterilmiştir.

Prathumwan ve arkadaşlarının yaptığı bu çalışmada (Prathumwan vd. 2017) temeli Caginalp ve arkadaşlarının çalışmalarına dayalı olan varlık akışı diferensiyel denklem modeli incelenmiştir (Caginalp ve Ermentrout 1990, Caginalp ve Ermentrout 1991, Caginalp ve Balenovich 1994, Caginalp ve Balenovich 1999). Caginalp ve Balenovich'in 1999 yılında önerdikleri model  $y_1(t)$  hisse senedinin  $t$  anındaki fiyatı,  $y_2(t)$  hisse senedine  $t$  anında yatırılan toplam varlığın oranı,  $y_3(t)$   $t$  anında yatırımcı tercihinin eğilim tabanlı bileşeni ve  $y_4(t)$   $t$  anında yatırımcı tercihinin değer tabanlı bileşeni olmak üzere:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_1(t)F\left(\frac{D}{S}\right) \\ \frac{dy_2}{dt} &= k(t)(1 - y_2(t)) - (1 - k(t))y_2(t)(1 - y_2(t))F\left(\frac{D}{S}\right) \\ \frac{dy_3}{dt} &= a_1(a_2F\left(\frac{D}{S}\right) - y_3(t)) \\ \frac{dy_4}{dt} &= a_3(a_4\frac{P_a - y_4(t)}{P_a})\end{aligned}\tag{4.2}$$

şeklindedir, burada  $P$  hisse senedinin fiyatını,  $P_a$  hisse senedi için yatırımcı tarafından belirlenen değerini (gerçek değer) göstermek üzere talep ve arz fonksiyonları sırasıyla  $D = k(t)(1 - y_2(t))$ ,  $S = (1 - k(t))y_2(t)$  alınabilir.  $k(t)$  geçiş fonksiyonu  $y_3(t)$  ve  $y_4(t)$  ye bağlı olup  $k(t) = 0.5 + 0.5 \tanh(y_3(t) + y_4(t))$  olarak tanımlanmıştır.  $F(t)$  artan sürekli bir fonksiyon olup  $F(1) = 0$  dır.  $P_a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  ve  $a_4$  pozitif sabitlerdir.

Prathuwan ve arkadaşlarının (Prathuwan vd. 2017)  $D_t^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  basamaktan Caputo türevini göstermek üzere (4.2) sisteminin bir genelleştirmesi olan

$$\begin{aligned}D_t^\alpha y_1 &= y_1(t)F(G(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))) \\ D_t^\alpha y_2 &= K(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)) - y_2(t) \\ &\quad + y_2(t)(1 - y_2(t))F(G(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))) \\ D_t^\alpha y_3 &= b_1F(G(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))) - b_2y_3(t) \\ D_t^\alpha y_4 &= b_3 - b_4y_1(t) - b_5y_4(t)\end{aligned}\tag{4.3}$$

sistemini  $y_i(0) = y_{i,0}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  başlangıç koşulu ile birlikte ele almışlardır. Çalış-

mada ele alınan modelin çözümlerinin varlık tekliği araştırılmış daha sonra da sistemin kararlılık analizi için ilk olarak denge noktaları bulunmuştur. Bulunan denge noktaları etrafında nümerik hesaplamalar yapılmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar tam sayı basamaktan model ile kıyaslanmıştır.

#### 4.2 Varlık Akışı Diferensiyel Denklem Sistemi Modeli

Tez çalışmasında temeli Caginalp ve Merdan'ın (Caginalp ve Merdan 2007) çalışmalarına dayanan kesirli basamaktan

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D^\alpha x_1(t) = x_1(t)F(G(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))) \\ {}^C D^\alpha x_2(t) = -K_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_2(t) + x_1(t)x_3(t) \\ \quad - K_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_1(t)x_3(t) \\ {}^C D^\alpha x_3(t) = \frac{K_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_2(t)}{x_1(t)} - x_3(t) \\ \quad + K_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_3(t) \\ {}^C D^\alpha x_4(t) = -K_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_4(t) + x_1(t)x_5(t) \\ \quad - K_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_1(t)x_5(t) \\ {}^C D^\alpha x_5(t) = \frac{K_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_4(t)}{x_1(t)} - x_5(t) \\ \quad + K_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))x_5(t) \\ {}^C D^\alpha x_6(t) = a_5F(G(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))) - a_1x_6(t) \\ {}^C D^\alpha x_7(t) = a_6 - a_7x_1(t) - a_2x_7(t) \\ {}^C D^\alpha x_8(t) = a_8F(G(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t))) - a_3x_8(t) \\ {}^C D^\alpha x_9(t) = a_9 - a_{10}x_1(t) - a_4x_9(t) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

modeli ele alınacaktır. Burada  ${}^C D^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  basamaktan Caputo kesirli türevidir.

$x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$ , değişkenleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$x_1(t)$  : Hisse senedinin  $t$  anındaki fiyatı,

$x_2(t)$  : Birinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı,

$x_3(t)$  : Birinci grubun  $t$  anında sahip olduğu hisse senedi sayısı,

$x_4(t)$  : İkinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı,

$x_5(t)$  : İkinci grubun  $t$  anında sahip olduğu hisse senedi sayısı,

$x_6(t)$  : Hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen,

$x_7(t)$  : Hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen,

$x_8(t)$  : Hisse senedi fiyatının yönüne göre ikinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen,

$x_9(t)$  : Hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre ikinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen.

$a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$ , pozitif sabitler olup,  $F$ ,  $G$ ,  $K_1$  ve  $K_2$  fonksiyonlarının aşağıdaki hipotezleri sağladığı kabul edilmektedir.

(C1)  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , artan ve sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olup

$F(1) = 0$  ve her  $p, q \in (0, \infty)$  için

$$|F(p) - F(q)| \leq L_1 |p - q| \quad (4.5)$$

olacak şekilde pozitif bir  $L_1$  sabiti mevcuttur.

(C2)  $G : (0, \infty) \times X^9 \rightarrow [0, \infty)$  sürekli ve her  $t \geq 0$  için

$$|G(t, x_1, x_2, \dots, x_9) - G(t, y_1, y_2, \dots, y_9)| \leq L_2 \sum_{i=1}^9 |x_i - y_i|, \quad (4.6)$$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} |G(t, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)| \leq L_3 \quad (4.7)$$

olacak şekilde  $L_2$  ve  $L_3$  pozitif sabitleri mevcuttur.

(C3)  $K_1 : (0, \infty) \times X^9 \rightarrow (-1, 1)$  sürekli diferensiyellenebilirdir ve her  $t > 0$  için

$$|K_1(t, x_1, x_2, \dots, x_9) - K_1(t, y_1, y_2, \dots, y_9)| \leq L_4 \sum_{i=1}^9 |x_i - y_i|, \quad (4.8)$$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} |K_1(t, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)| \leq L_5 \quad (4.9)$$

olacak şekilde  $L_4$ ,  $L_5$  pozitif sabitleri mevcuttur.

(C4)  $K_2 : (0, \infty) \times X^9 \rightarrow (-1, 1)$  sürekli diferensiyellenebilirdir ve her  $t > 0$  için

$$|K_2(t, x_1, x_2, \dots, x_9) - K_2(t, y_1, y_2, \dots, y_9)| \leq L_6 \sum_{i=1}^9 |x_i - y_i|, \quad (4.10)$$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} |K_2(t, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)| \leq L_7 \quad (4.11)$$

olacak şekilde  $L_6$ ,  $L_7$  pozitif sabitleri mevcuttur. (4.4) sistemini  $x(0) = x_0$  başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım. Burada  $x = (x_1, x_2, \dots, x_9)$  ve  $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{9,0})$

dır. Ayrıca  $x_1(t) \geq n > 0$  olacak biçimde pozitif bir  $n$  sabitinin mevcut olduğunu kabul edelim.  $x_1(t)$  hisse senedinin  $t$  anındaki fiyatını gösterdiğinden bu kabul genelliği bozmaz.

**Teorem 4.1** (4.4) sistemi  $[0, h]$  üzerinde bir tek sürekli çözüme sahip olacak şekilde sonlu bir  $h$  sabiti mevcuttur.

**İspat**  $M, M \geq 9maks\{|x_{i,0}|, i = 1, 2, \dots, 9\} + 1$  olacak şekilde bir sabit olsun.

$$\begin{aligned} A = & 2(ML_1L_2 + M + 1) + M(L_4 + L_6)(2M + 4 + \frac{1}{n} + \frac{M}{n^2}) \\ & + (L_5 + L_7)(\frac{M}{n^2} + M + 2) + L_1L_2(a_5 + a_8) + |F(L_3)| \\ & + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_7 + a_{10} \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir  $h$  pozitif sabiti seçelim:

$$\begin{aligned} h < \min \left\{ \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9M(|F(L_3)| + L_1L_2M)} \right)^{1/\alpha}, \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9M((M + 1)(L_4M + L_5) + M)} \right)^{1/\alpha}, \right. \\ & \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9M((L_4M + L_5)(1 + \frac{1}{n}) + 1)} \right)^{1/\alpha}, \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9M((M + 1)(L_6M + L_7) + M)} \right)^{1/\alpha}, \\ & \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9M(L_6M + L_7)(1 + \frac{1}{n}) + 1} \right)^{1/\alpha}, \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9(a_5(L_1L_2M + |F(L_3)|) + a_1M)} \right)^{1/\alpha}, \\ & \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9(a_6 + M(a_7 + a_2))} \right)^{1/\alpha}, \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9(a_8(L_1L_2M + |F(L_3)|) + a_3M)} \right)^{1/\alpha}, \\ & \left. \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{9(a_9 + M(a_{10} + a_4))} \right)^{1/\alpha}, \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{A} \right)^{1/\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

$X = C[0, h]$  ve  $\|x_i\|_X = \sup_{t \in [0, h]} |x_i(t)|$  olmak üzere

$$X^9 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_9) : x_i \in X, i = 1, 2, \dots, 9\} \text{ uzayı } \|x\|_{X^9} = \sum_{i=1}^9 \|x_i\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

$$U = \{x \in X^9 : \|x\|_{X^9} \leq M\}$$

kümesini göz önüne alalım.  $U \subset X^9$  kümesi kapalı, sınırlı ve konvektir.

$Tx = (T_1x, T_2x, \dots, T_9x)$  olmak üzere  $T : U \rightarrow X^9$  operatörünü tanımlayalım, burada

$T_i : U \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$ , aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$T_1x = x_{1,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x_1(s) F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) ds,$$

$$T_2x = x_{2,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [-K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_2(s) \\ + x_1(s) x_3(s) - K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_1(s) x_3(s)] ds,$$

$$T_3x = x_{3,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_2(s)}{x_1(s)} - x_3(s) \right. \\ \left. + K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_3(s) \right] ds,$$

$$T_4x = x_{4,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [-K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_4(s) \\ + x_1(s) x_5(s) - K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_1(s) x_5(s)] ds,$$

$$T_5x = x_{5,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_4(s)}{x_1(s)} - x_5(s) \right. \\ \left. + K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_5(s) \right] ds,$$

$$T_6x = x_{6,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a_5 F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) - a_1 x_6(s)] ds,$$

$$T_7x = x_{7,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a_6 - a_7 x_1(s) - a_2 x_7(s)] ds,$$

$$T_8x = x_{8,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a_8 F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) - a_3 x_8(s)] ds,$$

$$T_9x = x_{9,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a_9 - a_{10} x_1(s) - a_4 x_9(s)] ds.$$

İlk adımda  $T : U \rightarrow U$  olduğunu göstereceğiz. Her  $x \in U$  için  $T_1$  in tanımından

$$\begin{aligned}
|T_1x(t)| &\leq |x_{1,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x_1(s)| \\
&\quad \times |F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) - F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) \\
&\quad + F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))| ds
\end{aligned} \tag{4.13}$$

dir.  $F$  artan olduğundan (4.7) hipotezinden

$$|F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))| \leq |F(L_3)| \tag{4.14}$$

dir. (4.5), (4.6) ve  $U$  kümesinin tanımı göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
|F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) - F(G(s, 0, 0, \dots, 0))| &\leq L_1 |G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \\
&\quad - G(s, 0, 0, \dots, 0)| \\
&\leq L_1 L_2 \sum_{i=1}^9 |x_i(s)| \\
&\leq L_1 L_2 M
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) eşitsizlikleri (4.13) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|T_1x(t)| &\leq |x_{1,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x_1(s)| [|F(L_3)| + L_1 L_2 M] ds \\
&\leq |x_{1,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} (|F(L_3)| + L_1 L_2 M) \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad t \in [0, h]
\end{aligned}$$

bulunur. O halde her  $t \in [0, h]$  için

$$\|T_1x\|_X \leq |x_{1,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} (|F(L_3)| + L_1 L_2 M) \frac{h^\alpha}{\alpha}$$

olup  $h$  in (4.12) tanımından

$$\|T_1x\|_X \leq |x_{1,0}| + \frac{1}{9} \tag{4.16}$$

dir.

$T_2$ 'nin tanımından her  $x \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_2x(t)| &\leq |x_{2,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [| -K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))x_2(s) \\
&\quad + x_1(s)x_3(s) - x_1(s)x_3(s)K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))|] ds \\
&\leq |x_{2,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [| -K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| |x_2(s)| \\
&\quad + |x_1(s)| |x_3(s)| + |x_1(s)| |x_3(s)| |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))|] ds \\
&\leq |x_{2,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| (1+M) + M |ds \\
&\leq |x_{2,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |M + (1+M)| [|K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \\
&\quad - K_1(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + K_1(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)|] ds
\end{aligned}$$

dir. (4.8), (4.9) hipotezleri ve  $U$  kümesinin tanımı göz önüne alındığında

$$\|T_2x\|_X \leq |x_{2,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} [(L_4M + L_5)(M+1) + M] \frac{h^\alpha}{\alpha}.$$

$h$  m (4.12) tanımı göz önüne alındığında

$$\|T_2x\|_X \leq |x_{2,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.17)$$

elde edilir. Benzer olarak  $T_3$ 'ü ele alırsak her  $x \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_3x(t)| &\leq |x_{3,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| \frac{x_2(s)}{x_1(s)} K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) - x_3(s) \right. \\
&\quad \left. + x_3(s) K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right| ds \\
&\leq |x_{3,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \left| \frac{x_2(s)}{x_1(s)} K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right| + |x_3(s)| \right. \\
&\quad \left. + |x_3(s) K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|T_3x(t)| &\leq |x_{3,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{M}{n} |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| + M \right. \\
&\quad \left. + M |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \right] ds \\
&\leq |x_{3,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{n} |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| + 1 \right. \\
&\quad \left. + |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \right] ds
\end{aligned}$$

dir. (4.8), (4.9) koşulları ve  $U$  kümesinin tanımı göz önüne alındığında

$$\|T_3x\|_X \leq |x_{3,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[ (L_4M + L_5) \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 \right] \frac{h^\alpha}{\alpha}$$

bulunur.  $h$  in (4.12) tanımından

$$\|T_3x\|_X \leq |x_{3,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.18)$$

elde edilir.  $T_4$  operatörü ele alınıp (4.10), (4.11) eşitsizlikleri ve  $U$  kümesinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|T_4x(t)| &\leq |x_{4,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ -x_4(s)K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right. \\
&\quad \left. + x_1(s)x_5(s) - x_1(s)x_5(s)K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right] ds \\
&\leq |x_{4,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M \left[ |K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| + M \right. \\
&\quad \left. + M |K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \right] ds \\
&\leq |x_{4,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ M + (1+M) |K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \right] ds
\end{aligned}$$

(4.10), (4.11) hipotezleri ve  $U$  kümesinin tanımı göz önüne alındığında

$$\|T_4x\|_X \leq |x_{4,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[ (L_6M + L_7)(M + 1) + M \right] \frac{h^\alpha}{\alpha}$$

bulunur.  $h$  in (4.12) tanımından

$$\|T_4x\|_X \leq |x_{4,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.19)$$

bulunur.  $T_5$  operatörü için benzer işlemler yapıp (4.10), (4.11) eşitsizlikleri,  $U$  kümesinin tanımı ve  $x_1(t) \geq n > 0$  özelliği göz önüne alındığında her  $x \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_5x(t)| &\leq |x_{5,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \left| \frac{x_4(s)}{x_1(s)} K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) - x_5(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + x_5(s) K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right| \right] ds \\
&\leq |x_{5,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \left| \frac{x_4(s)}{x_1(s)} K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right| + |x_5(s)| \right. \\
&\quad \left. + |x_5(s) K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \right] ds \\
&\leq |x_{5,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \left| \frac{M}{n} K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) + M \right| \right. \\
&\quad \left. + M |K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \right] ds \\
&\leq |x_{5,0}| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[ (L_6M + L_7) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + 1 \right] \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad t \in [0, h]
\end{aligned}$$

bulunur.  $h$  in (4.12) tanımından

$$\|T_5x\|_X \leq |x_{5,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.20)$$

elde edilir. Benzer olarak  $T_6$  operatörü için (4.5) - (4.7) eşitsizlikleri ve  $U$  kümesinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|T_6x(t)| &\leq |x_{6,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ |a_5 F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) \right. \\
&\quad \left. - F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) + F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) \right. \\
&\quad \left. + a_1 x_6(s) \right] ds \\
&\leq |x_{6,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [a_5(L_1L_2M + |F(L_3)|) + a_1M] \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad t \in [0, h]
\end{aligned}$$

ve  $h$ 'nin (4.12) tanımından

$$\|T_6x\|_X \leq |x_{6,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.21)$$

bulunur.

$T_7$  operatörü için  $U$  kümesinin tanımı göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
|T_7x(t)| &\leq |x_{7,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a_6 - a_7x_1(s) - a_2x_7(s)| ds \\
&\leq |x_{7,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|a_6| + |a_7|M + |a_2|M] ds \\
&\leq |x_{7,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [a_6 + M(a_7 + a_2)] \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad t \in [0, h]
\end{aligned}$$

ve  $h$  in (4.12) tanımından

$$\|T_7x\|_X \leq |x_{7,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.22)$$

bulunur.  $T_8$  operatörü ele alınıp (4.5) - (4.7) eşitsizlikleri ve  $U$  kümesinin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|T_8x(t)| &\leq |x_{8,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a_8F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) - a_3x_8(s)| ds \\
&\leq |x_{8,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|a_8| |F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)))| \\
&\quad + |-F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) + F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))| \\
&\quad + |a_3||x_8(s)|] ds \\
&\leq |x_{8,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [a_8(L_1L_2M + |F(L_3)|) + a_3M] \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad t \in [0, h]
\end{aligned}$$

ve  $h$  in (4.12) tanımından

$$\|T_8x\|_X \leq |x_{8,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.23)$$

bulunur.  $T_9$  operatörü için  $U$  kümesinin tanımı göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
|T_9x(t)| &\leq |x_{9,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a_9 - a_{10}x_1(s) - a_4x_9(s)| ds \\
&\leq |x_{9,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|a_9| + |a_{10}|M + |a_4|M] ds
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$|T_9x(t)| \leq |x_{9,0}| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[a_9 + M(a_{10} + a_4)]\frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad t \in [0, h]$$

ve  $h$  in (4.12) tanımından

$$\|T_9x\|_X \leq |x_{9,0}| + \frac{1}{9} \quad (4.24)$$

bulunur. Böylece (4.16) - (4.24) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{X^9} &= \sum_{i=1}^9 \|T_i x\|_X \\ &\leq 9maks\{|x_{i,0}|, \quad i = 1, 2, \dots, 9\} + 1 \\ &\leq M \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $T : U \rightarrow U$  tanımlı bir dönüşümdür.

Şimdi  $T$ 'nin bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned} |T_1x(t) - T_1y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x_1(s)F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) \\ &\quad - y_1(s)F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)))| \, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|x_1(s)| |F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) \\ &\quad - F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)))| \\ &\quad + |x_1(s) - y_1(s)| |F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)))|] \, ds \end{aligned}$$

dir. (4.5) - (4.7) hipotezleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} |T_1x(t) - T_1y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x_1(s)| \\ &\quad \times L_1 |G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) - G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))| \\ &\quad + |x_1(s) - y_1(s)| |F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)))| \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|T_1x(t) - T_1y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|x_1(s)|L_1 \\
&\quad \times |(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) - G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))| \\
&\quad + |x_1(s) - y_1(s)| |F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))) \\
&\quad - F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))| \\
&\quad + |F(G(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))|] ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{X^9} (2ML_1L_2 + |F(L_3)|) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (2ML_1L_2 + |F(L_3)|) \|x - y\|_{X^9} \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad t \in [0, h]
\end{aligned}$$

bulunur, buradan

$$L_8 = \frac{2ML_1L_2 + |F(L_3)|}{\Gamma(\alpha + 1)} h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_1x(t) - T_1y(t)\|_X \leq L_8 \|x - y\|_{X^9} \quad (4.25)$$

elde edilir. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_2x(t) - T_2y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |-K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))x_2(s) \\
&\quad + K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))y_2(s) + x_1(s)x_3(s) - y_1(s)y_3(s) \\
&\quad - x_1(s)x_3(s)K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \\
&\quad + y_1(s)y_3(s)K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) \\
&\quad - K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| |y_2(s)| \\
&\quad + |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| |y_2(s) - x_2(s)| \\
&\quad + |x_3(s)(x_1(s) - y_1(s)) + y_1(s)(x_3(s) - y_3(s))| \\
&\quad + |y_1(s)y_3(s)| |K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) - K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \\
&\quad + |K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| |y_1(s)y_3(s) - x_1(s)x_3(s)|] ds
\end{aligned}$$

dir. (4.8) ve (4.9) eşitsizlikleri göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$L_9 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (M(2L_4 + L_5 + 1 + 2L_4M) + L_5) h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_2x(t) - T_2y(t)\|_X \leq L_9 \|x - y\|_{X^9} \quad (4.26)$$

elde edilir. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned} |T_3x(t) - T_3y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| \frac{x_2(s)}{x_1(s)} K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right. \\ &\quad - x_3(s) + x_3(s) K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \\ &\quad - y_3(s) K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) \\ &\quad \left. - \frac{y_2(s)}{y_1(s)} K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) + y_3(s) \right| ds \end{aligned}$$

dir. (4.8) - (4.11) eşitsizlikleri göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} |T_3x(t) - T_3y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{X^9} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{M}{n} L_4 + \frac{2}{n^2} (L_4M + L_5) \right. \\ &\quad \left. + 1 + 2L_4M + L_5 \right] ds \end{aligned}$$

elde edilir, buradan

$$\|T_3x(t) - T_3y(t)\|_X \leq L_{10} \|x - y\|_{X^9} \quad (4.27)$$

$$L_{10} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{M}{n} L_4 + \frac{M}{n^2} (L_4M + L_5) + 1 + 2L_4M + L_5 \right) h^\alpha$$

bulunur. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned} |T_4x(t) - T_4y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| -K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) x_4(s) \right. \\ &\quad + K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_4(s) + x_1(s) x_5(s) - y_1(s) y_5(s) \\ &\quad - x_1(s) x_5(s) K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \\ &\quad \left. + y_1(s) y_5(s) K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) \right| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|T_4x(t) - T_4y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) \\
&\quad - K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| |x_4(s)| \\
&\quad + |K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))| |y_4(s) - x_4(s)| \\
&\quad + |x_5(s)(x_1(s) - y_1(s)) + y_1(s)(x_5(s) - y_5(s))| \\
&\quad + |y_1(s)y_5(s)| |K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) - K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| \\
&\quad + |K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))| |y_1(s)y_5(s) - x_1(s)x_5(s)|] ds
\end{aligned}$$

dir. (4.10) ve (4.11) eşitsizlikleri göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$L_{11} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (M(2L_6 + L_7 + 1 + 2L_6M) + L_7) h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_4x(t) - T_4y(t)\|_X \leq L_{11} \|x - y\|_{X^9} \quad (4.28)$$

elde edilir. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_5x(t) - T_5y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| \frac{x_4(s)}{x_1(s)} K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \right. \\
&\quad - x_5(s) + x_5(s) K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \\
&\quad - y_5(s) K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) \\
&\quad \left. - \frac{y_4(s)}{y_1(s)} K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) + y_5(s) \right| ds
\end{aligned}$$

bulunur. (4.8) - (4.11) eşitsizlikleri göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
|T_5x(t) - T_5y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{X^9} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{M}{n} L_6 + \frac{2}{n^2} (L_6M + L_7) \right. \\
&\quad \left. + 1 + 2L_6M + L_7 \right] ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$L_{12} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{M}{n} L_6 + \frac{M}{n^2} (L_6M + L_7) + 1 + 2L_6M + L_7 \right) h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_5x(t) - T_5y(t)\|_X \leq L_{12} \|x - y\|_{X^9} \quad (4.29)$$

bulunur. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_6x(t) - T_6y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a_5 F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) \\
&\quad - a_1 x_6(s) - a_5 F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))) + a_1 y_6(s)| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|a_5 L_1 G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) \\
&\quad - G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) + a_1 |y_6(s) - x_6(s)|] ds
\end{aligned}$$

dir. (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$|T_6x(t) - T_6y(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{X^9} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a_5 L_1 L_2 + a_1] ds$$

elde edilir. Buradan

$$L_{13} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (a_5 L_1 L_2 + a_1) h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_6x(t) - T_6y(t)\|_X \leq L_{13} \|x - y\|_{X^9} \quad (4.30)$$

bulunur. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_7x(t) - T_7y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a_6 - a_7 x_1(s) - a_2 x_7(s) \\
&\quad - a_6 + a_7 y_1(s) + a_2 y_7(s)| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (a_7 + a_2) h^\alpha \|x - y\|_{X^9}
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$L_{14} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (a_7 + a_2) h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_7x(t) - T_7y(t)\|_X \leq L_{14} \|x - y\|_{X^9} \quad (4.31)$$

elde edilir. Her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned}
|T_8x(t) - T_8y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a_8 F(G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s))) \\
&\quad - a_3 x_8(s) - a_8 F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))) + a_3 y_8(s)| ds
\end{aligned}$$

$$|T_8x(t) - T_8y(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [|a_8L_1G(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) - G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s))| + a_3 |y_8(s) - x_8(s)|] ds$$

dir. (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$|T_8x(t) - T_8y(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{X^9} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [a_8L_1L_2 + a_3] ds$$

elde edilir. O halde

$$L_{15} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (a_8L_1L_2 + a_3) h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_8x(t) - T_8y(t)\|_X \leq L_{15} \|x - y\|_{X^9} \quad (4.32)$$

bulunur. Benzer olarak her  $x, y \in U$  için

$$\begin{aligned} |T_9x(t) - T_9y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |a_9 - a_{10}x_1(s) - a_4x_9(s) \\ &\quad - a_9 + a_{10}y_1(s) + a_4y_9(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (a_{10} + a_4) h^\alpha \|x - y\|_{X^9} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$L_{16} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (a_{10} + a_4) h^\alpha$$

olmak üzere

$$\|T_9x(t) - T_9y(t)\|_X \leq L_{16} \|x - y\|_{X^9} \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.25) - (4.33) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\|Tx - Ty\|_{X^9} \leq (L_8 + L_9 + \dots + L_{16}) \|x - y\|_{X^9}$$

elde edilir.  $h$  ın (4.12) tanımından  $L_8 + L_9 + \dots + L_{16} < 1$  olup  $T$  bir daralma dönüşümüdür. O halde Banach sabit nokta teoreminden (4.4) sistemi  $[0, h]$  üzerinde tanımlı bir tek sürekli çözüme sahiptir.

Aşağıdaki teoremden çözümün varlık aralığı  $[0, \infty)$  aralığına genişletilmektedir.

**Teorem 4.2**  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_9(t)$  bileşenleri sınırlıysa (4.4) sisteminin  $[0, \infty)$  üzerinde tanımlı bir  $x(t)$  çözümü vardır.

**Uyarı 4.1**  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ve  $x_5$  sırasıyla hisse senedinin  $t$  anındaki fiyatı, birinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı, birinci grupta  $t$  anında bulunan hisse senedi sayısı, ikinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve ikinci grupta  $t$  anında bulunan hisse senedi sayısını ifade etmektedir ve bu ifadelerin finansal olarak sınırlı olduklarının kabulü anlamlıdır.  $x_6, x_7, x_8, x_9$  ise sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen, hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen, hisse senedi fiyatının yönüne göre ikinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ve hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre ikinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşendir. Finansal olarak trend ve değerlendirme bileşenleri arz ve talep ile doğrudan bağlantılı olduğundan sınırlı olarak kabul edilebilir. Dolayısıyla (4.4) sisteminin  $x(t)$  çözümü sınırlı kabul edilebilir.

**İspat** (Teorem 4.2) Kabul edelim ki (4.4) sisteminin çözümünün maksimal varlık aralığı  $[0, \beta), \beta < \infty$  olsun.  $x(t)$   $[0, \beta)$  üzerinde sınırlı ve sürekli olduğundan  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$  sonludur.

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) = x(\beta), \quad x(\beta) = (x_1(\beta), x_2(\beta), \dots, x_9(\beta))$$

olsun. Bu durumda  $x(t) \in C^9[0, \beta]$  dır.

Şimdi  $t \in [\beta, \beta + \tilde{h}]$  durumunu ele alalım.  $\tilde{M} > 9\max\{x_i(\beta), i = 1, 2, \dots, 9\} + 1$  tanımlayalım. Teorem 4.1 in ispatına benzer olarak problemimiz  $[\beta, \beta + \tilde{h}]$  üzerinde bir çözüme sahip olacak şekilde  $\tilde{M}$ 'ya bağlı pozitif bir  $\tilde{h} < 1$  sabiti oluşturacağız.

$\tilde{X} = C[\beta, \beta + \tilde{h}]$  uzayı  $\|y\|_{\tilde{X}} = \sup_{t \in [\beta, \beta + \tilde{h}]} |y(t)|$  normu ile bir Banach uzayıdır.

$\tilde{X}^9 = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_9) : y_i \in \tilde{X}, i = 1, 2, \dots, 9\}$  olmak üzere  $\tilde{U} = \{y \in \tilde{X}^9 : \|y\|_{\tilde{X}^9} \leq \tilde{M}\}$  kümesini göz önüne alalım ve  $\tilde{T} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{X}^9, \tilde{T} = (\tilde{T}_1 y, \tilde{T}_2 y, \dots, \tilde{T}_9 y)$  operatörünü tanımlayalım.

Her  $y \in \tilde{U}$  için  $\tilde{T}_i$  operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1 y &= x_1(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta}^t (t-s)^{\alpha-1} [y_1(s) F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)))] ds, \\
x_1(\beta) &= x_{1,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta} (\beta-s)^{\alpha-1} [y_1(s) F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)))] ds, \\
\tilde{T}_2 y &= x_2(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta}^t (t-s)^{\alpha-1} [-K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_2(s) \\
&\quad + y_1(s) y_3(s) - K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_1(s) y_3(s)] ds, \\
x_2(\beta) &= x_{2,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta} (\beta-s)^{\alpha-1} [-K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_2(s) \\
&\quad + y_1(s) y_3(s) - K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_1(s) y_3(s)] ds, \\
\tilde{T}_3 y &= x_3(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta}^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_2(s)}{y_1(s)} - y_3(s) \right. \\
&\quad \left. + K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_3(s) \right] ds \\
x_3(\beta) &= x_{3,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta} (\beta-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_2(s)}{y_1(s)} - y_3(s) \right. \\
&\quad \left. + K_1(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_3(s) \right] ds \\
\tilde{T}_4 x &= x_4(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta}^t (t-s)^{\alpha-1} [-K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_4(s) \\
&\quad + y_1(s) y_5(s) - K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_1(s) y_5(s)] ds, \\
x_4(\beta) &= x_{4,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta} (\beta-s)^{\alpha-1} [-K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_4(s) \\
&\quad + y_1(s) y_5(s) - K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_1(s) y_5(s)] ds, \\
\tilde{T}_5 y &= x_5(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta}^t (t-s)^{\alpha-1} \left[ \frac{K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_2(s)}{y_1(s)} - y_5(s) \right. \\
&\quad \left. + K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_5(s) \right] ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_5(\beta) &= x_{5,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta - s)^{\alpha-1} \left[ \frac{K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_2(s)}{y_1(s)} - y_5(s) \right. \\
&\quad \left. + K_2(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) y_5(s) ds \right] \\
\tilde{T}_6 y &= x_6(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\beta^t (t - s)^{\alpha-1} [a_5 F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) - a_1 y_6(s))] ds, \\
x_6(\beta) &= x_{6,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta - s)^{\alpha-1} [a_5 F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) - a_1 y_6(s))] ds, \\
\tilde{T}_7 y &= x_7(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\beta^t (t - s)^{\alpha-1} [a_6 - a_7 y_1(s) - a_2 y_7(s)] ds, \\
x_7(\beta) &= x_{7,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta - s)^{\alpha-1} [a_6 - a_7 y_1(s) - a_2 y_7(s)] ds, \\
\tilde{T}_8 y &= x_8(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\beta^t (t - s)^{\alpha-1} [a_8 F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) - a_3 y_8(s))] ds, \\
x_8(\beta) &= x_{8,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta - s)^{\alpha-1} [a_8 F(G(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_9(s)) - a_3 y_8(s))] ds, \\
\tilde{T}_9 y &= x_9(\beta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\beta^t (t - s)^{\alpha-1} [a_9 - a_{10} y_1(s) - a_4 y_9(s)] ds, \\
x_9(\beta) &= x_{9,0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta (\beta - s)^{\alpha-1} [a_9 - a_{10} y_1(s) - a_4 y_9(s)] ds.
\end{aligned}$$

Teorem 4.1'in ispatındaki benzer işlemler tekrar edilerek  $\tilde{T}$ 'nin bir daralma dönüşümü olduğu gösterilir. O halde  $t \in [\beta, \beta + \tilde{h}]$  için  $\bar{x}(t) = \tilde{T}\bar{x}(t)$  dir.

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, \beta] \\ \bar{x}(t), & t \in [\beta, \beta + \tilde{h}] \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda  $\tilde{x}$ , (4.4) sisteminin  $[0, \beta + \tilde{h}]$  üzerinde tanımlı sürekli bir çözümüdür. Bu ise ispata başlarken çözümün maksimal varlık aralığının  $[0, \beta)$  olduğu kabulü ile çelişir. O halde, (4.4) sisteminin  $[0, \infty)$  üzerinde tanımlı bir çözümü mevcuttur.

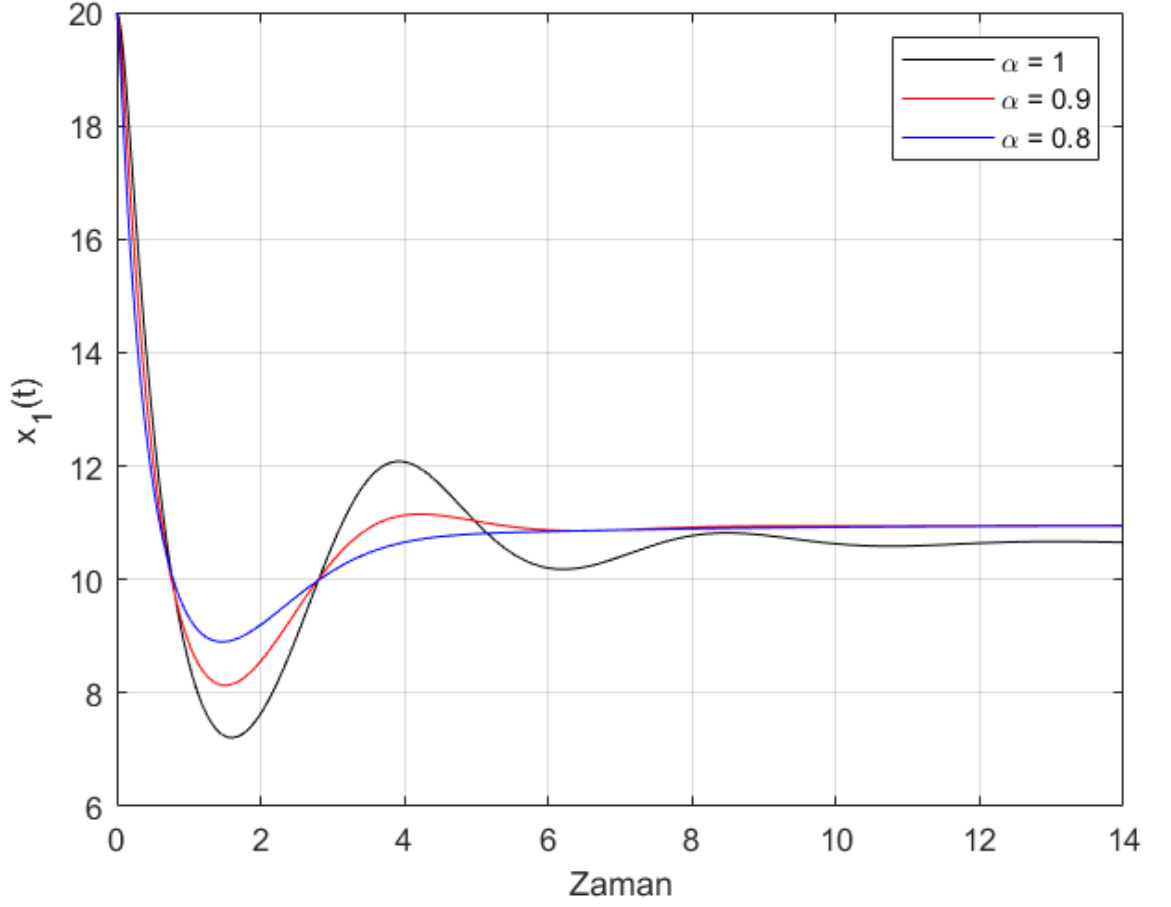
### 4.3 Nümerik Simülasyonlar

Bu tez çalışmasında oluşturulan model Caginalp ve Merdan (2007) modeli ile karşılaştırılmıştır. Bunun için tek bir çeşit hisse senedi bulunan iki grup için farklı senaryolar oluşturulmuştur. Her bir örnekte dokuz bilinmeyenli dokuz kesirli basamaktan diferensiyel denklemden oluşan sistem Adam-Bashforth Moulton Predictor Corrector metodu (Garrappa 2018) kullanılarak çözülmüştür. (4.4) sisteminin nümerik sonuçları  $F(t) = \mu \log t$ ,  $K_1(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) = 0.5 + 0.5 \tanh(x_6(t) + x_8(t))$  ve  $K_2(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_9(s)) = 0.5 + 0.5 \tanh(x_7(t) + x_9(t))$  alınarak hesaplanmıştır. Model parametreleri ise  $c_1^i$ ,  $c_2^i$ ,  $q_1^i$ ,  $q_2^i$  için farklı değerler almaktadır. Fiyat ve hisse senedinin değişimini ele alan üç farklı senaryo üzerinde durulmuştur. (4.4) sisteminde kullanılan  $a_1, a_2, \dots, a_9$  sabitleri ile  $c_1^i, c_2^i, q_1^i, q_2^i$  değişkenleri arasında kurulan ilişki aşağıda verilmiştir:

$$a_1 = c_1^1, a_2 = c_2^1, a_3 = c_1^2, a_4 = c_2^2, a_5 = c_1^1 q_1^1, a_6 = c_2^1 q_2^1, a_7 = \frac{c_2^1 q_2^1}{P_a^1}, a_8 = c_1^2 q_1^2, a_9 = c_2^2 q_2^2, a_{10} = \frac{c_2^2 q_2^2}{P_a^2}.$$

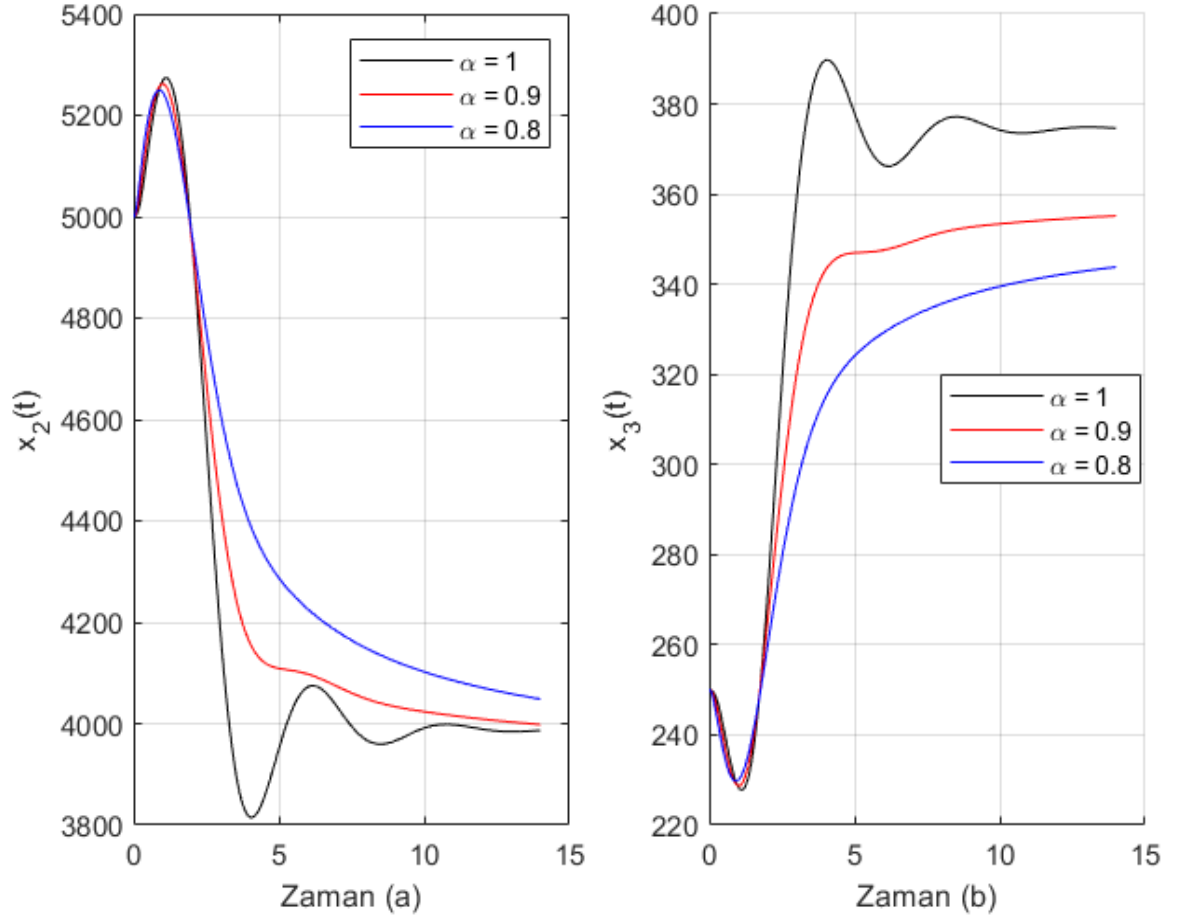
**Senaryo 1.** Aynı miktarda nakit ve hisse senedine sahip iki grubun hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı izlediği bir yatırım stratejisi varsayılmıştır. Bu durum için hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı zaman parametreleri  $c_1^i = c_2^i = 1$  olarak alınmıştır. Hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı parametreler ise  $q_1^i = 0.5$ ,  $q_2^i = 0.5$  olarak seçilmiştir ve başlangıç değerleri aşağıda verilmiştir:

$P_a^1 = P_a^2 = x_1(0)$ ,  $x_1(0) = 20$ ,  $x_2(0) = 5000$ ,  $x_3(0) = 250$ ,  $x_4(0) = 5000$ ,  $x_5(0) = 250$ ,  $x_6(0) = 0$ ,  $x_7(0) = 0$ ,  $x_8(0) = 0$ ,  $x_9(0) = 0$ . Alınan başlangıç değerleri ve parametreleri kullanarak elde edilen nümerik simülasyonlar aşağıdaki gibidir. Şekil 4.1 de  $\alpha = 1$  olarak seçildiğinde fiyatın salımm ile denge fiyatına ulaştığı görülmektedir. Bu Caginalp ve Merdan'ın 2007'de yapmış olduğu simülasyon ile uyumludur.  $\alpha = 0.9$  ve  $\alpha = 0.8$  olarak seçildiğinde ise fiyat hareketinin daha az bir salımm ile hareket ettiği görülmektedir. Ayrıca  $\alpha$  değeri azaldıkça fiyatın denge noktasına yaklaşma süresi de azalmaktadır.



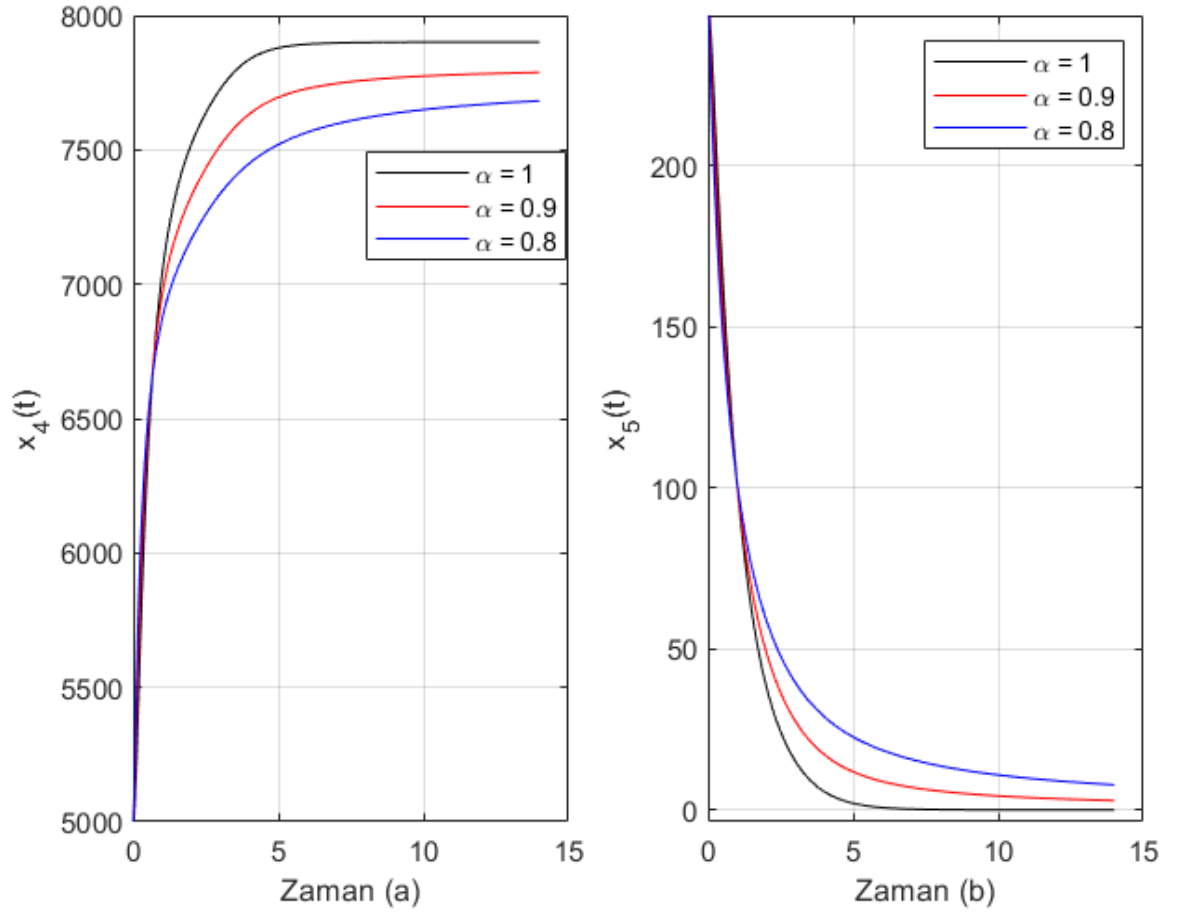
Şekil 4.1  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_1(t)$  bileşenidir.

Şekil 4.2 de birinci gruptaki nakit miktarı azaldığında hisse senedi sayısı artmaktadır.  $\alpha = 1$  için salınımlar görülürken  $\alpha = 0.9$  ve  $\alpha = 0.8$  için daha erken sürede denge noktasına ulaşılmaktadır. Şekil 4.3 de ikinci grubun sahip olduğu nakit miktarı artarken hisse senedi miktarı ise azalmaktadır. Şekil 4.5 te  $\alpha = 1$  için salınımlar mevcut iken  $\alpha = 0.9$  ve  $\alpha = 0.8$  için bu hareketinin görece sınırlı olduğu görülmektedir. İlk durum için aynı  $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, q_1^{(i)}, q_2^{(i)}$  seçildiğinden Şekil 4.4 teki gibi benzer hareketler elde edilmiştir. Tüm yatırımcıların eşit olarak sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedinin grup dinamiklerine olan etkisi, yatırımcı motivasyonuna etki eden bileşenlerin  $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1, q_1^{(i)} = 0.5, q_2^{(i)} = 0.5$  seçilerek elde edilen grafikler ile gösterilmiştir.  $\alpha$  nın seçilen üç değeri için bir denge noktasına yaklaştığı grafiklerden gözlemlenmektedir.



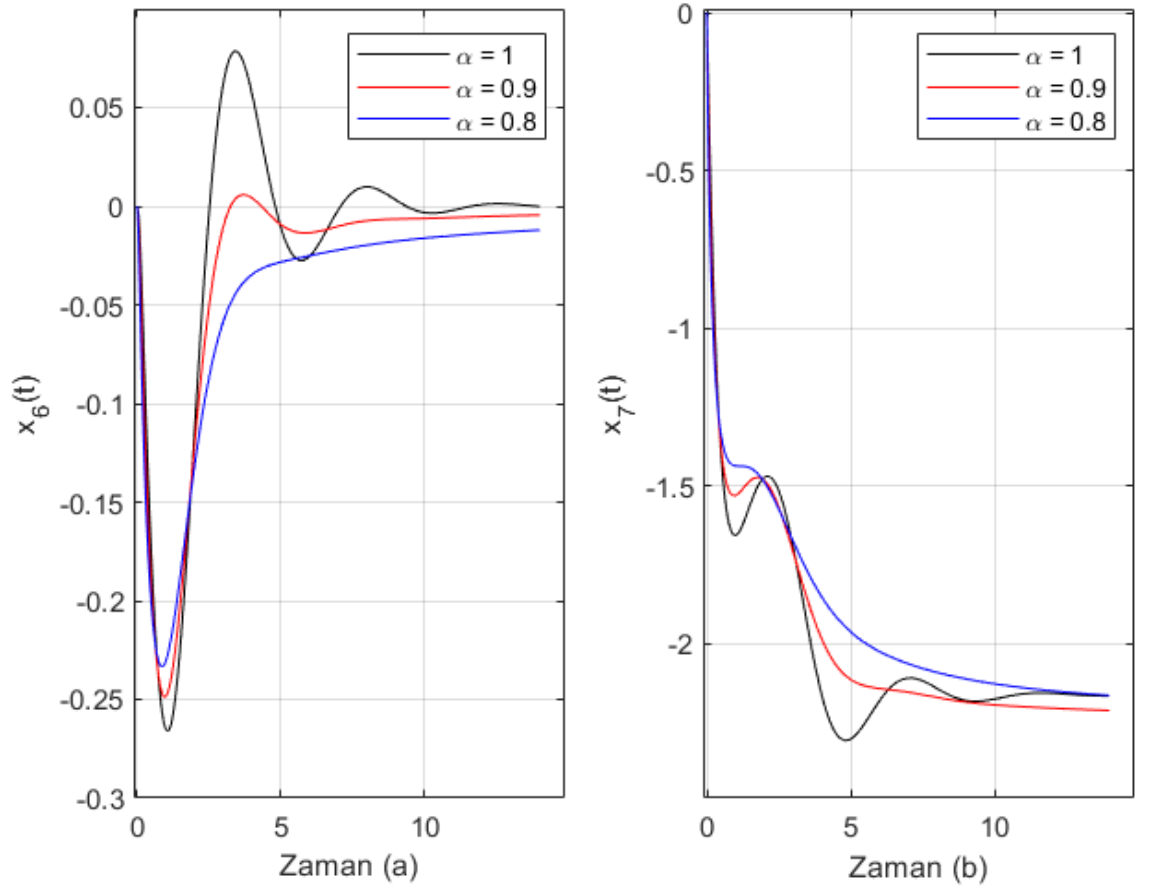
Şekil 4.2 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_2(t)$  ve  $x_3(t)$  bileşenleridir.

**Senaryo 2. i.** İlk durum için iki gruptaki yatırımcıların sadece hisse senedinin değerlenmesine bağlı olarak bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır. Şekil 4.6 da hisse senedi fiyatının  $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1$ ,  $q_1^{(i)} = 0.1$ ,  $q_2^{(i)} = 0.5$  parametreleri ile  $P_a^1 = P_a^2 = x_1(0)$ ,  $x_1(0) = 20$ ,  $x_2(0) = 5000$ ,  $x_3(0) = 250$ ,  $x_4(0) = 5000$ ,  $x_5(0) = 250$ ,  $x_6(0) = 0$ ,  $x_7(0) = 0$ ,  $x_8(0) = 0$ ,  $x_9(0) = 0$  başlangıç değerleri alınarak elde edilen grafik gösterilmektedir.  $\alpha = 0.9$  ve  $\alpha = 0.8$  seçildiğinde fiyatın daha kısa sürede dengeye ulaştığı görülmektedir. Şekil 4.7 a, b sırasıyla birinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayısını ifade etmektedir. Birinci gruptaki nakit miktarı azaldığında hisse senedi sayısı artmaktadır.



Şekil 4.3 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_4(t)$  ve  $x_5(t)$  bileşenleridir.

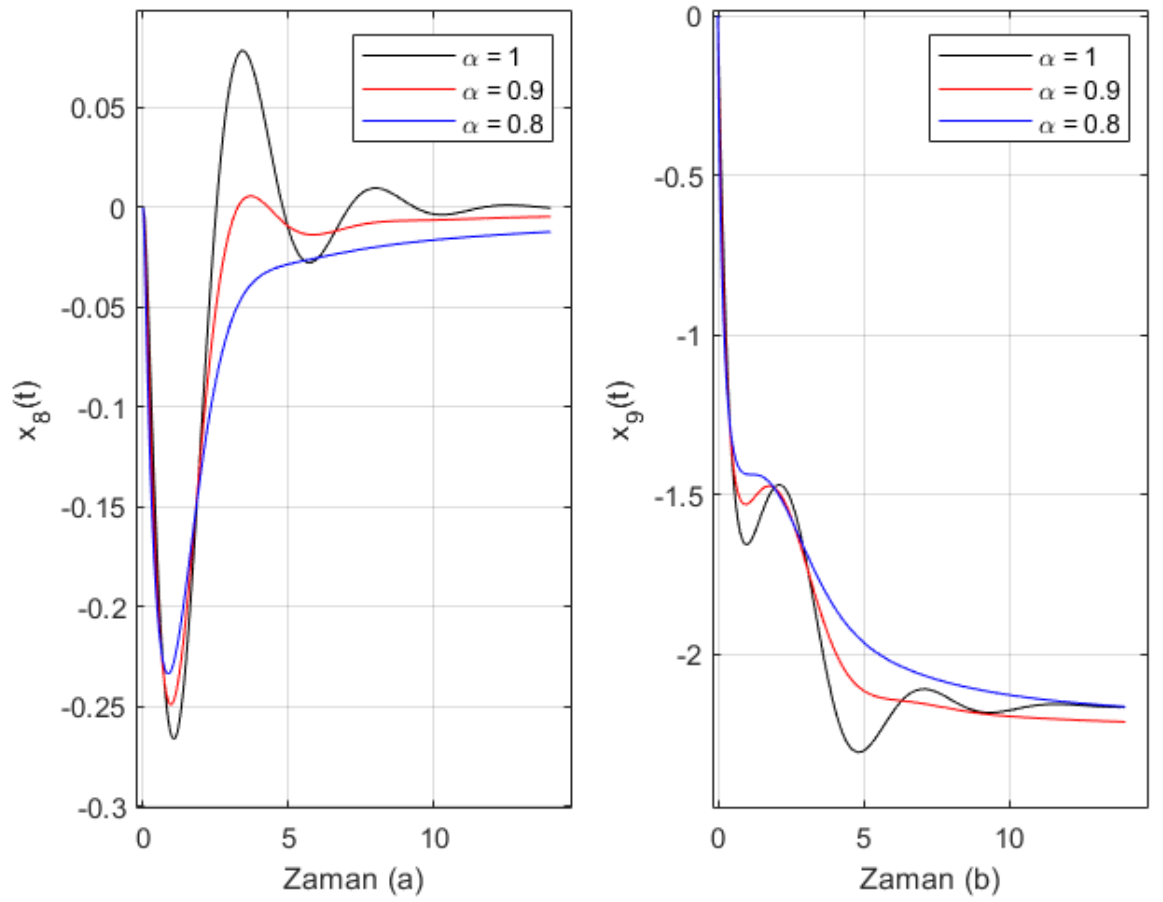
Şekil 4.8 a, b sırasıyla ikinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayısını göstermektedir. İkinci grubun sahip olduğu nakit miktarı artarken hisse senedi miktarı ise azalmaktadır. Şekil 4.9 a, b sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşenlerdir. Şekil 4.10 a, b hisse senedi fiyatının yönüne göre ikinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre ikinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşenlerdir. İlk durum için aynı  $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, q_1^{(i)}, q_2^{(i)}$  seçildiğinden Şekil 4.9 ile benzer hareketler elde edilmiştir.  $\alpha$  nın seçilen üç değeri için bir denge noktasına yaklaştığı grafiklerden gözlemlenmektedir.



Şekil 4.4 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_6(t)$  ve  $x_7(t)$  bileşenleridir.

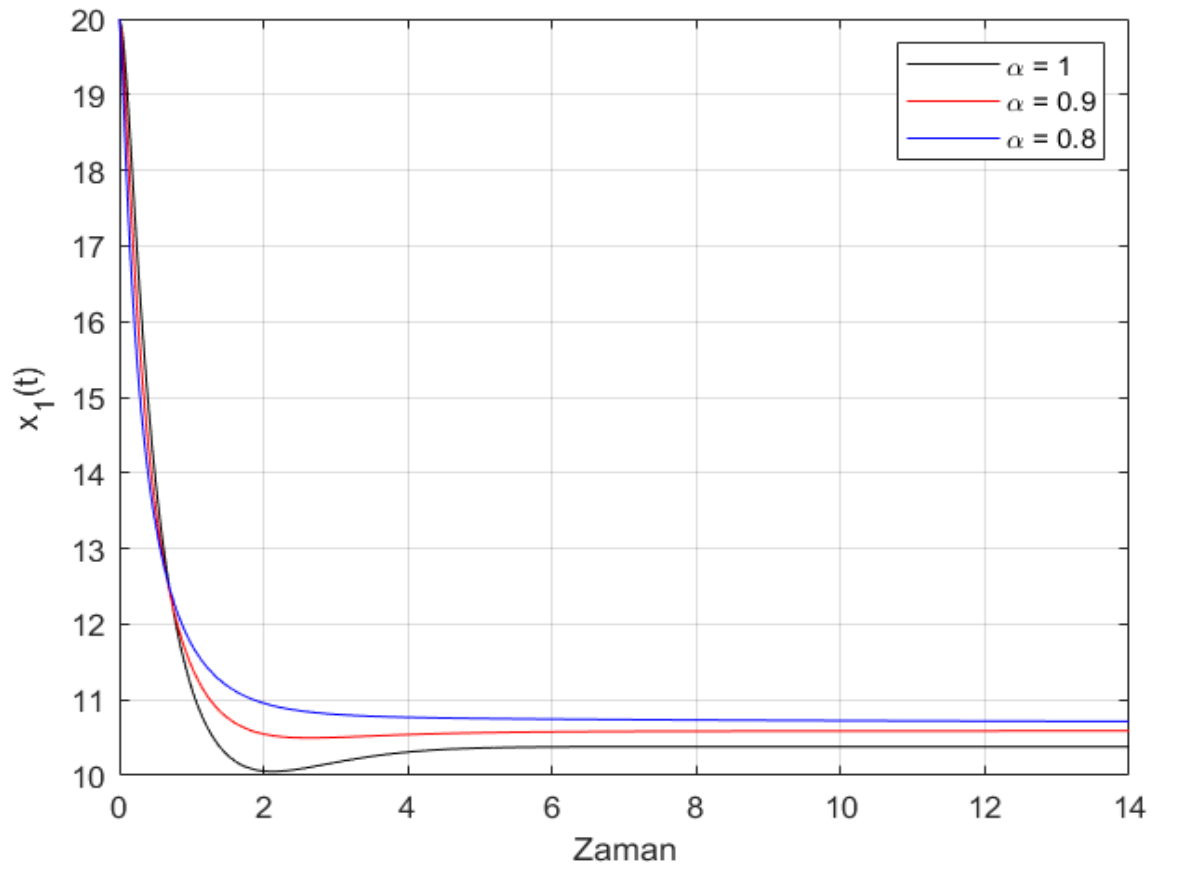
ii. İkinci durum için, hisse senedinin değerlenmesine bağlı zaman parametreleri  $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1$  hisse senedinin değerlenmesine bağlı parametreler ise  $q_1^{(i)} = 0.3$ ,  $q_2^{(i)} = 0.5$  olarak seçilmiştir ve başlangıç değerleri aşağıda verilmiştir:

$P_a^1 = P_a^2 = x_1(0)$ ,  $x_1(0) = 20$ ,  $x_2(0) = 5000$ ,  $x_3(0) = 250$ ,  $x_4(0) = 5000$ ,  $x_5(0) = 250$ ,  $x_6(0) = 0$ ,  $x_7(0) = 0$ ,  $x_8(0) = 0$ ,  $x_9(0) = 0$ . Şekil 4.11 hisse senedi fiyatının  $\alpha = 1, 0.9, 0.8$  değerleri için zamana bağlı grafiğidir.  $\alpha$  değeri azaldıkça görece düz hareketler yapıp denge noktasına görece hızlı yaklaşmıştır. Şekil 4.12 a, b sırasıyla birinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayını ifade etmektedir. Birinci gruptaki nakit miktarı azaldığında hisse senedi sayısı artmaktadır.

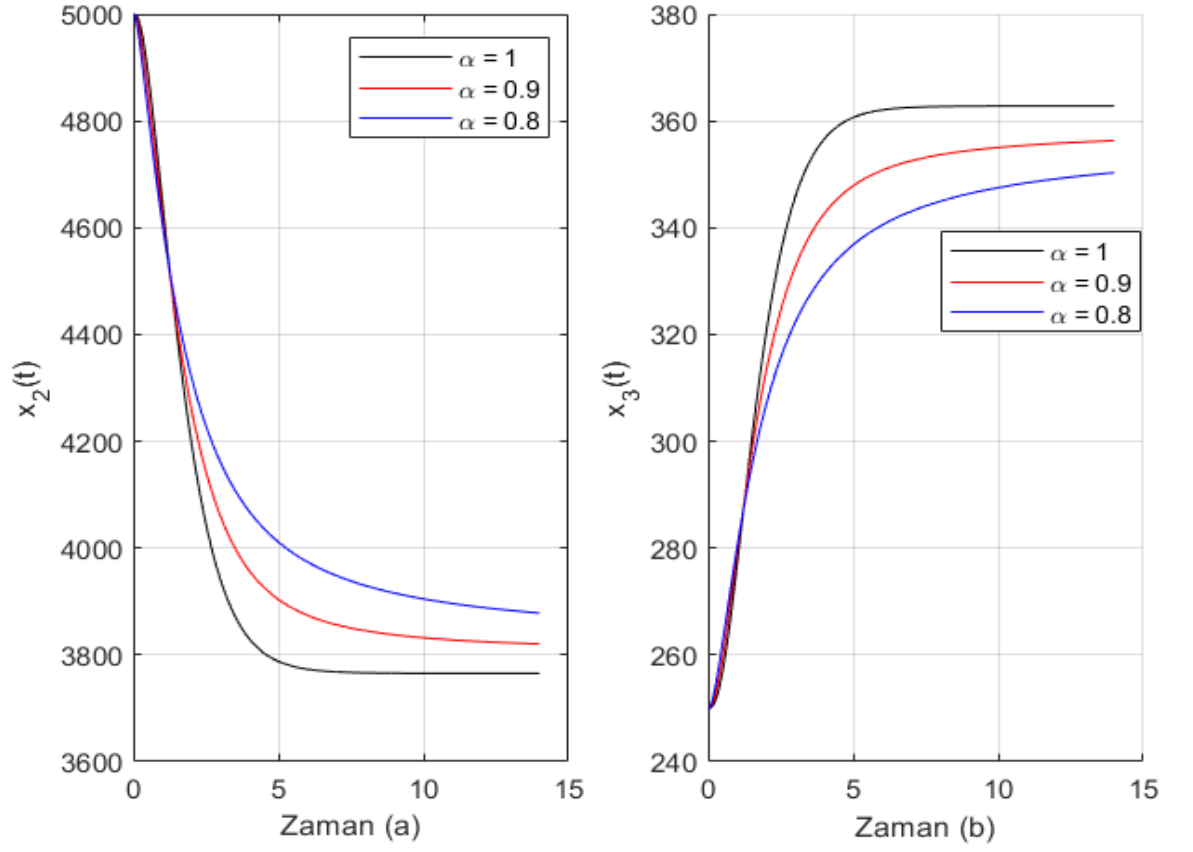


Şekil 4.5 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_8(t)$  ve  $x_9(t)$  bileşenleridir.

Şekil 4.13 a, b sırasıyla ikinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayımı ifade etmektedir. İkinci grubun sahip olduğu nakit miktarı artarken hisse senedi miktarı ise azalmaktadır. Şekil 4.14 a, b sırasıyla sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşenlerdir. Şekil 4.15 a, b sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşenlerdir.

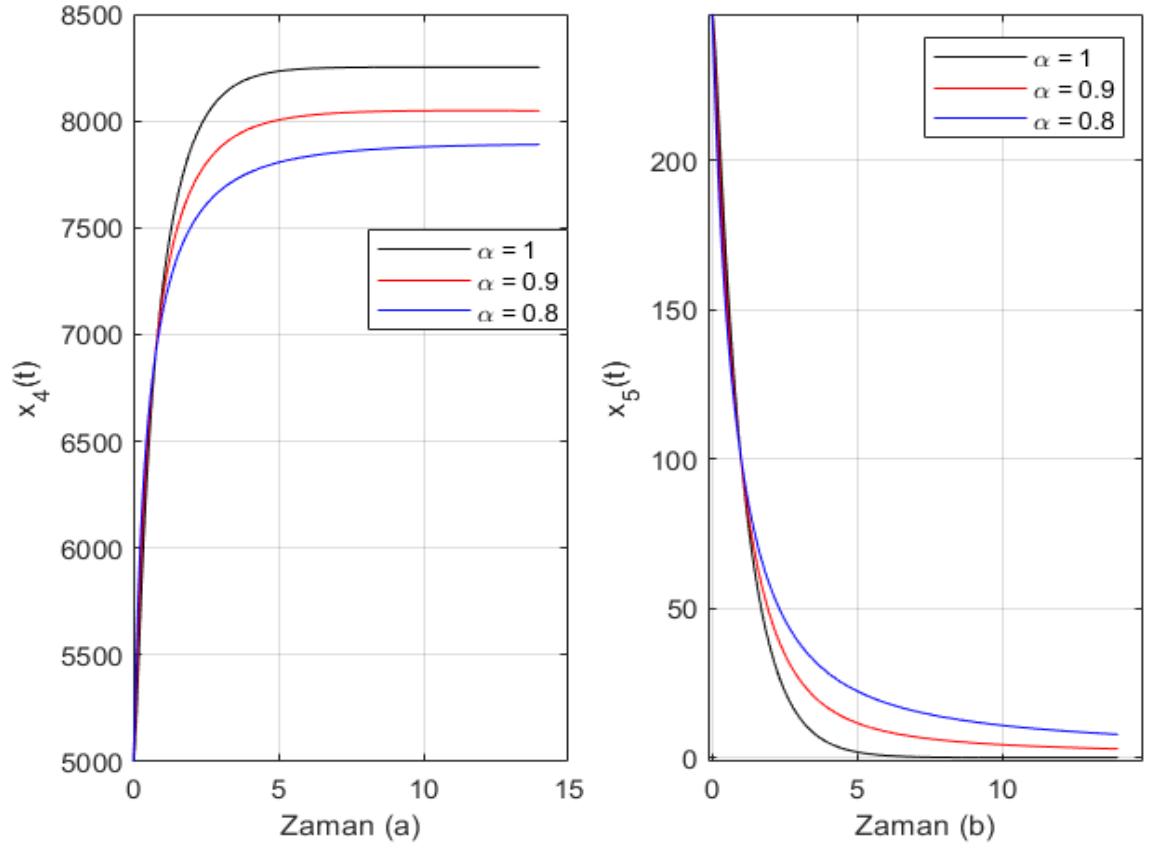


Şekil 4.6  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_1(t)$  bileşenidir.



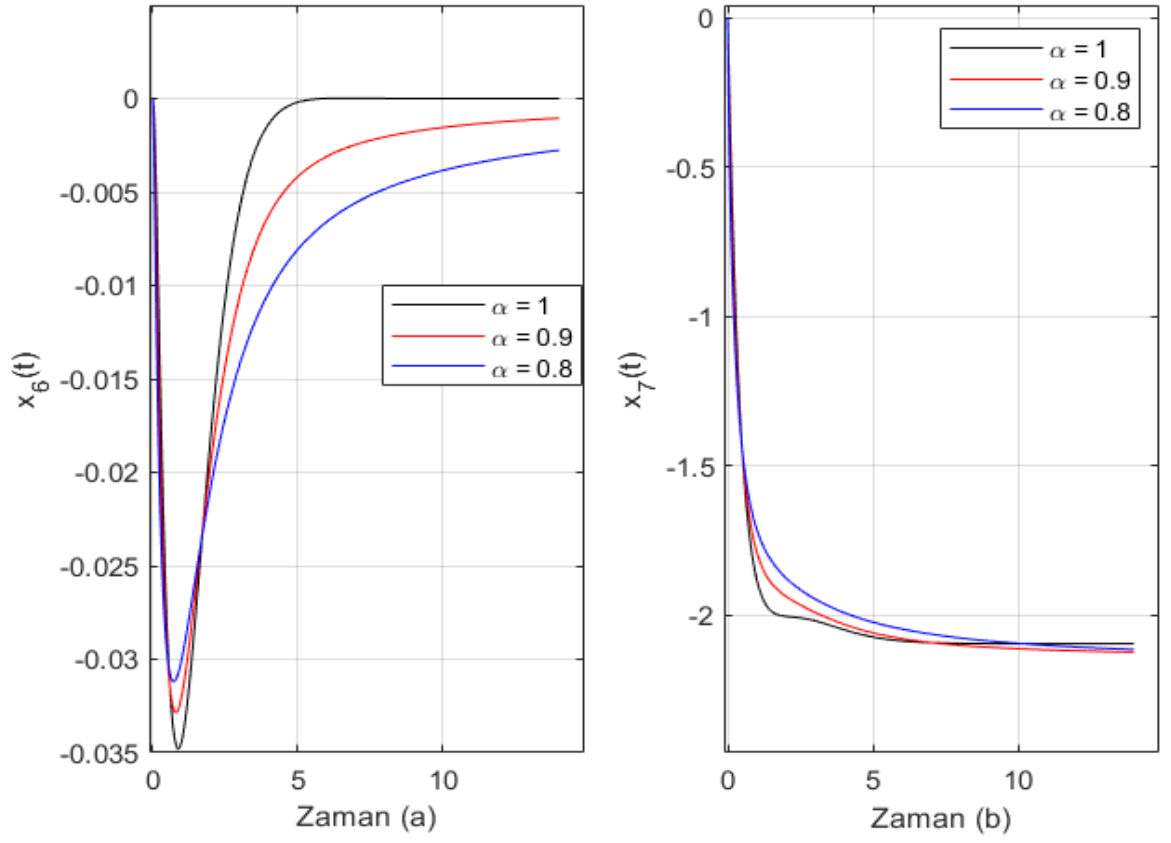
Şekil 4.7 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_2(t)$  ve  $x_3(t)$  bileşenleridir.

**iii.** Üçüncü durum için, hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı zaman parametreleri  $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1$  olarak alınmıştır. Hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı parametreler ise  $q_1^{(i)} = 0.6$ ,  $q_2^{(i)} = 0.5$  olarak seçilmiştir. Şekil 4.16 hisse senedi fiyatının zamana göre değişim grafiğidir.  $\alpha$  değeri azaldıkça salınımın da azaldığı görülmektedir.



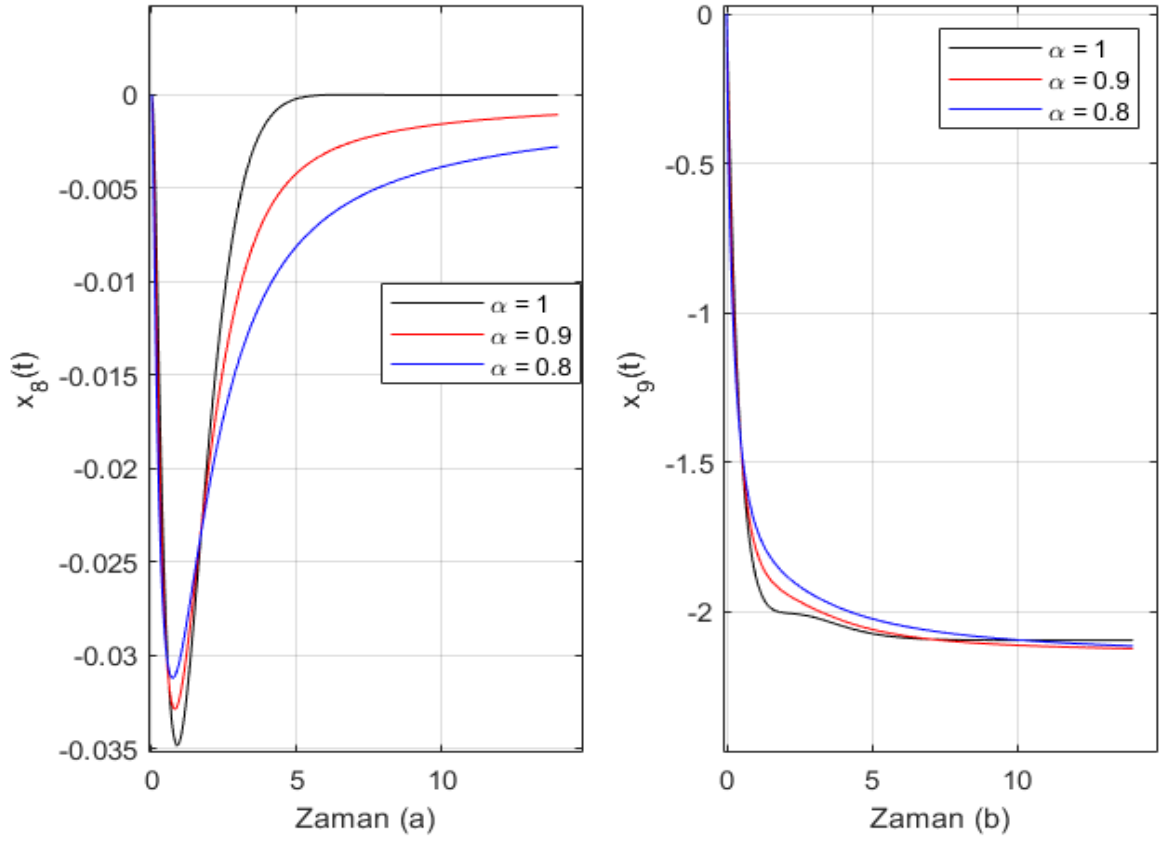
Şekil 4.8 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_4(t)$  ve  $x_5(t)$  bileşenleridir.

Şekil 4.17 a, b sırasıyla birinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayını ifade etmektedir. Birinci gruptaki nakit miktarı azaldığında hisse senedi sayısı artmaktadır. Şekil 4.18 a, b sırasıyla ikinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayını ifade etmektedir. İkinci grubun sahip olduğu nakit miktarı artarken hisse senedi miktarı ise azalmaktadır. Şekil 4.19 a, b sırasıyla sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararı etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararı etkileyen bileşenlerdir.



Şekil 4.9 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_6(t)$  ve  $x_7(t)$  bileşenleridir.

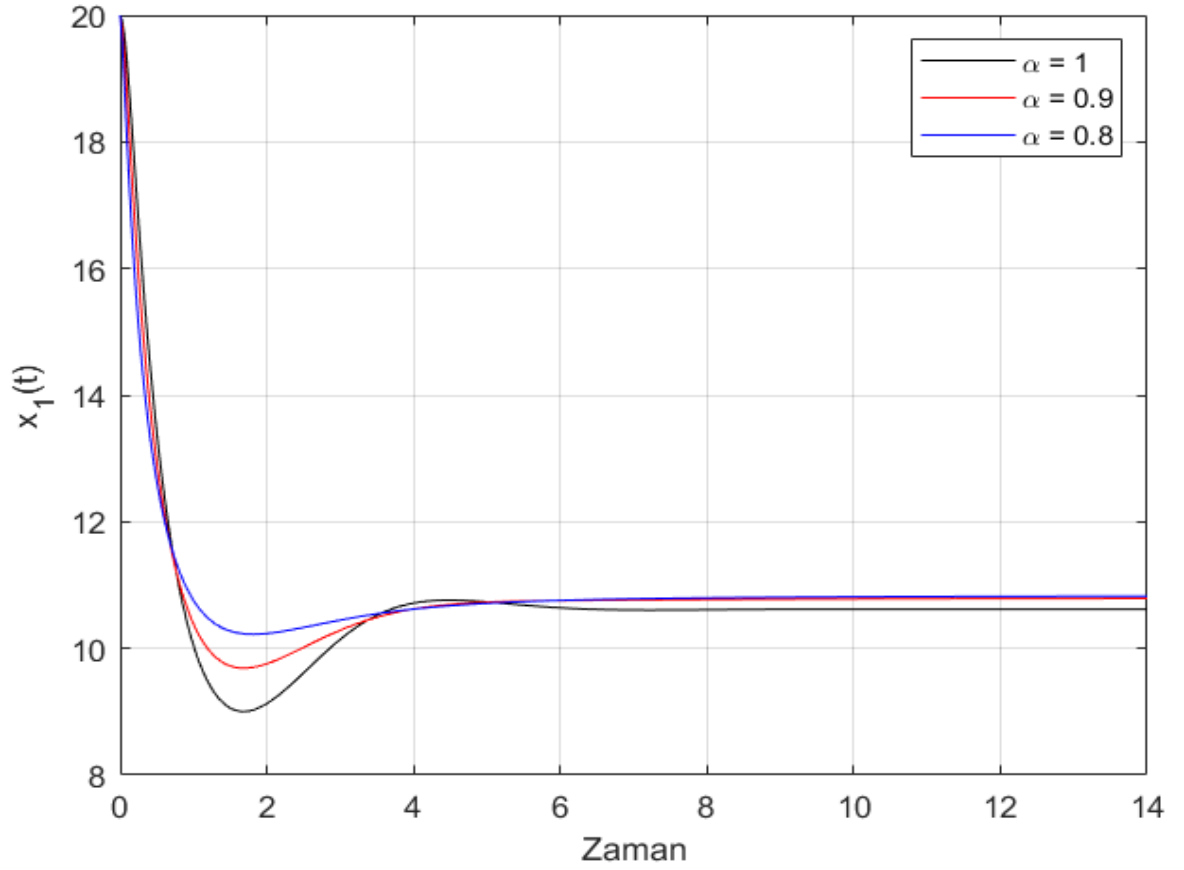
Şekil 4.20 a, b sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşenlerdir. Şekil 4.6 - 4.20 arasındaki grafikler  $q_1^{(i)}$  parametresinin artan değerleri karşısında fiyatın nasıl değiştiğini göstermektedir.  $q_1^{(i)}$  değeri arttıkça hisse senedi fiyatındaki dalgalanmalar artmıştır. Buna rağmen  $q_2^{(i)}$  parametresinin her bir değeri için elde edilen sonuçlar denge noktasına yaklaşmaktadır.



Şekil 4.10 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_8(t)$  ve  $x_9(t)$  bileşenleridir.

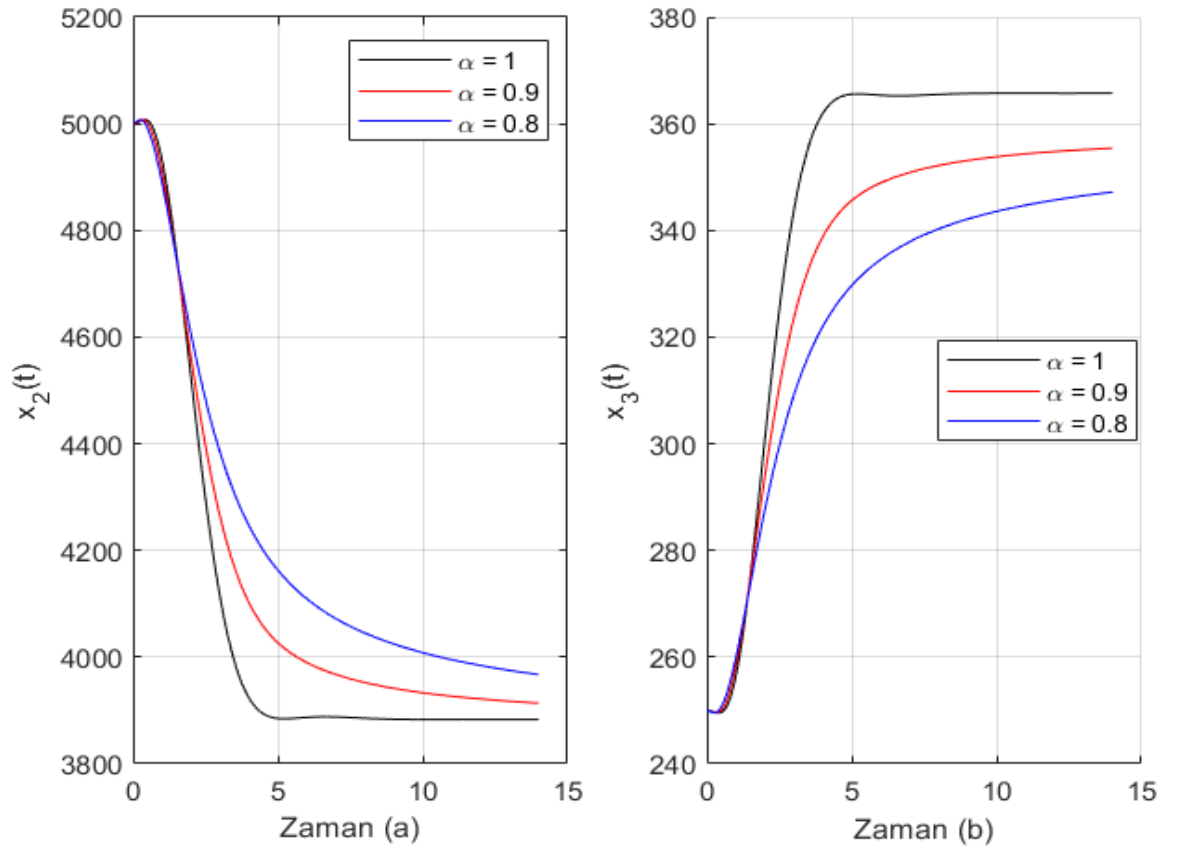
**Senaryo 3.** İlk gruptaki yatırımcıların toplam nakit miktarının  $\frac{4}{5}$  üne, toplam hisse senedinin ise  $\frac{1}{5}$  ine sahip olduğu durumda iki grubun hisse senedinin alım satımına bağlı olarak bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır. Ele alınan durum için, hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı zaman parametreleri  $c_1^{(i)} = c_2^{(i)} = 1$  olarak alınmıştır. Hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı parametreler ise  $q_1^{(i)} = 0.5$ ,  $q_2^{(i)} = 0.5$  olarak seçilmiştir ve başlangıç değerleri aşağıda verilmiştir:

$P_a^1 = P_a^2 = x_1(0)$ ,  $x_1(0) = 20$ ,  $x_2(0) = 8000$ ,  $x_3(0) = 100$ ,  $x_4(0) = 2000$ ,  $x_5(0) = 400$ ,  $x_6(0) = 0$ ,  $x_7(0) = 0$ ,  $x_8(0) = 0$ ,  $x_9(0) = 0$ . Şekil 4.21 hisse senedi fiyatının zamana göre değişim grafiğidir.  $\alpha$  değeri azaldıkça salınımlar azalmış ve fiyat dengeye erken sürede ulaşmıştır. Şekil 4.22 a, b sırasıyla birinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayımı ifade etmektedir. Birinci gruptaki nakit miktarı azaldığında hisse senedi sayısı artmaktadır.

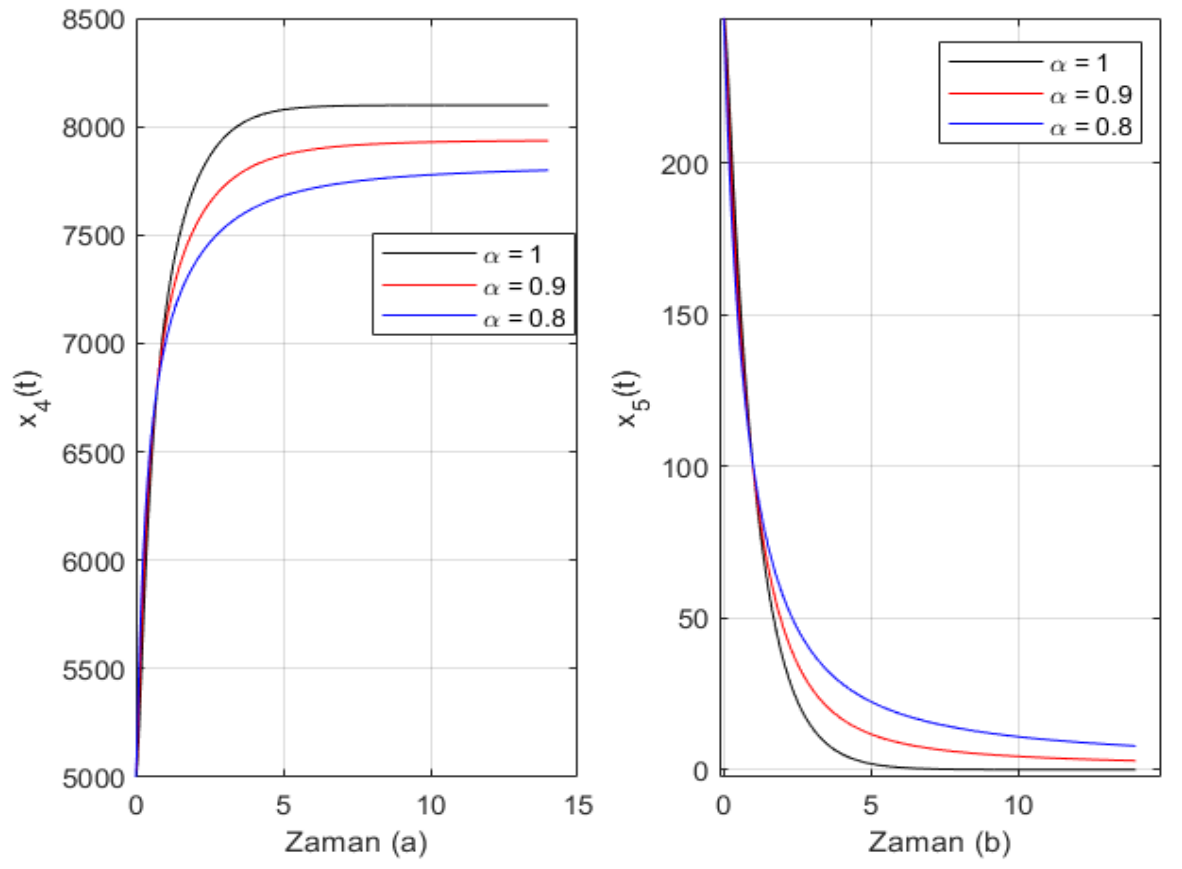


Şekil 4.11  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_1(t)$  bileşenidir.

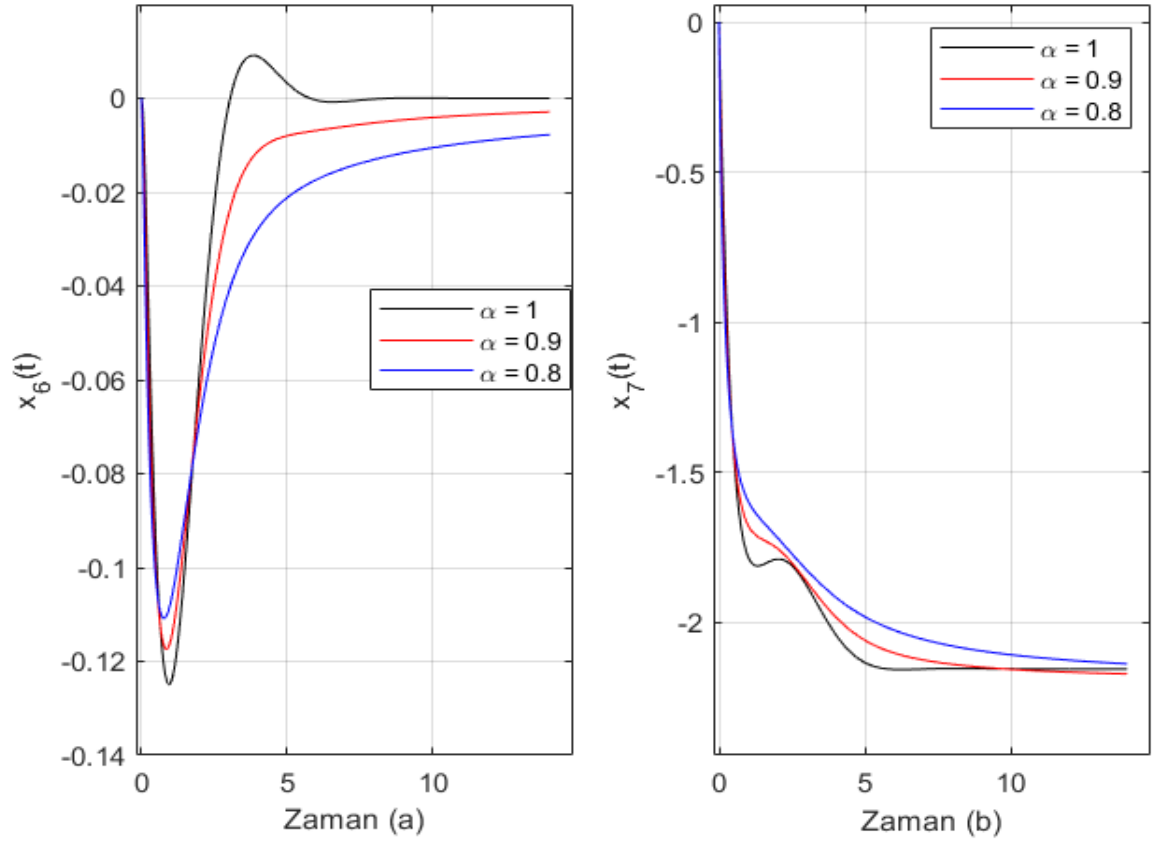
Şekil 4.23 a, b sırasıyla ikinci grubun  $t$  anında sahip olduğu nakit miktarı ve hisse senedi sayımı ifade etmektedir. İkinci grubun sahip olduğu nakit miktarı artarken hisse senedi miktarı ise azalmaktadır. Şekil 4.24 a, b sırasıyla sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşenlerdir. Şekil 4.25 a, b sırasıyla hisse senedi fiyatının yönüne göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşen ile hisse senedi fiyatının gerçek değerine göre birinci gruptaki yatırımcı kararını etkileyen bileşenlerdir. Şekil 4.21 - 25 farklı miktarda hisse senedi ve nakit bulunduran iki grubun aynı katsayılar kullanıldığında fiyatın hangi yönde etkilendiğini göstermiştir. Hisse senedi fiyatına ve değerlendirilmesine bağlı parametreler değiştikçe elde edilen sonuçların denge noktasına yaklaştığı görülmektedir.



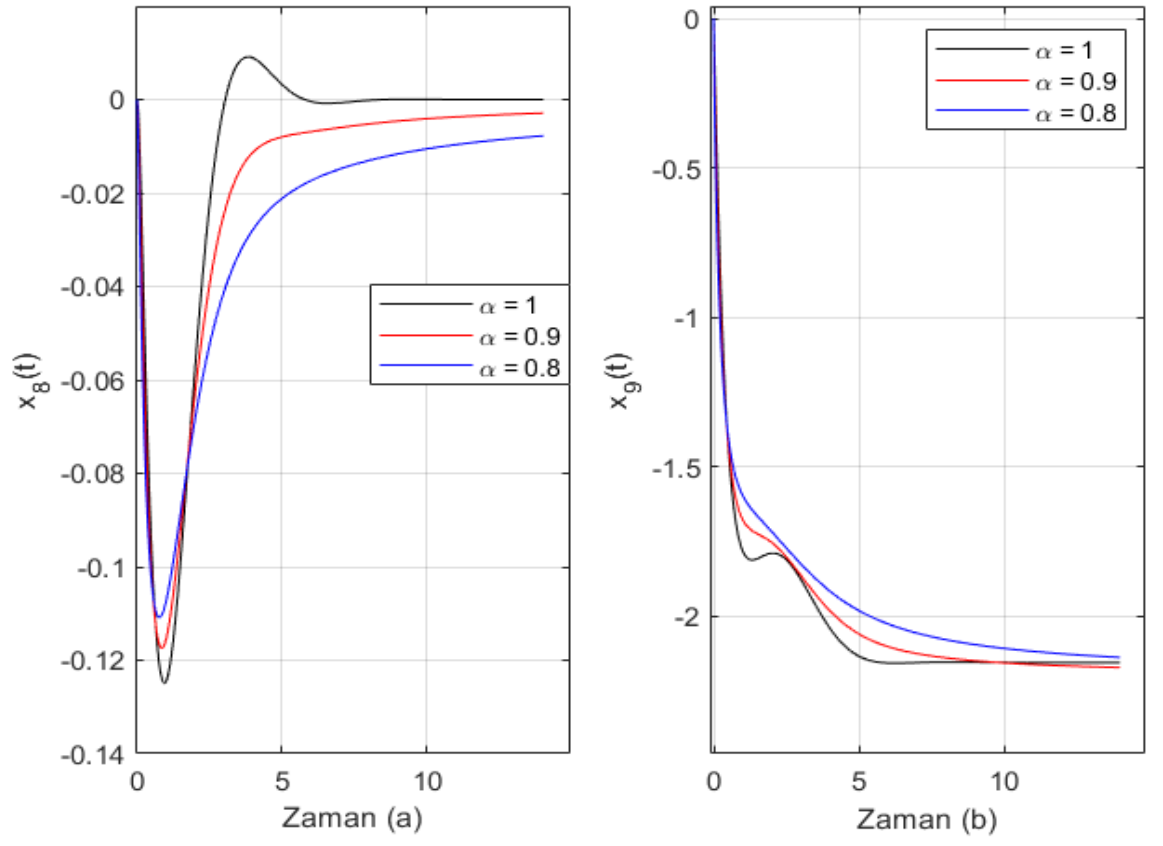
Şekil 4.12 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_2(t)$  ve  $x_3(t)$  bileşenleridir.



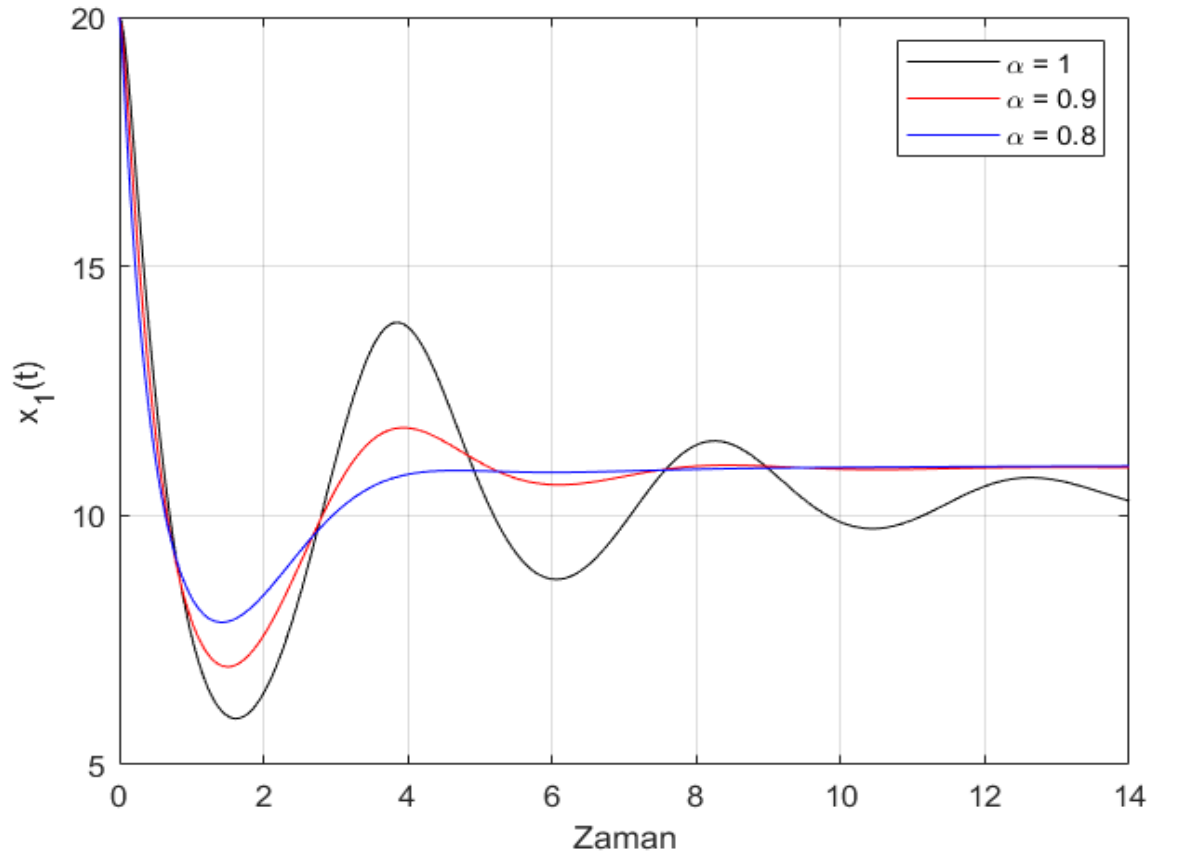
Şekil 4.13 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_4(t)$  ve  $x_5(t)$  bileşenleridir.



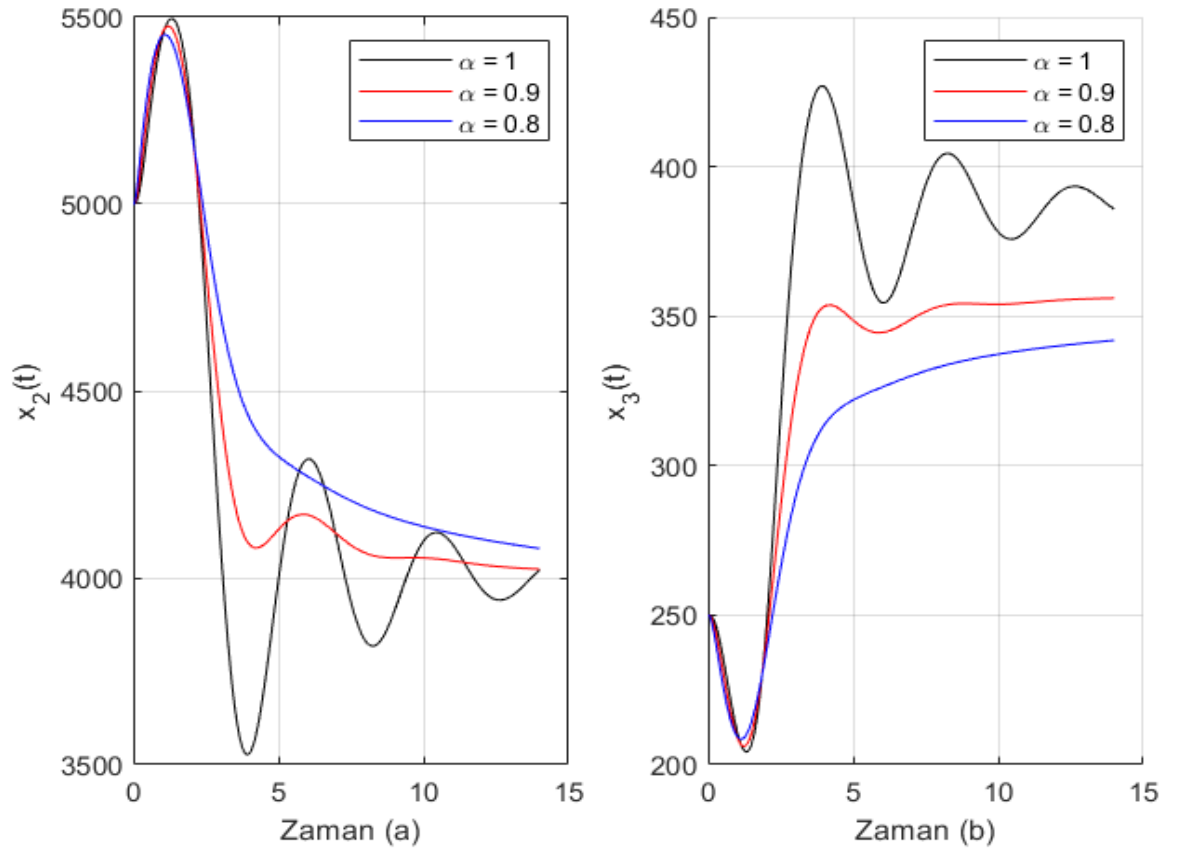
Şekil 4.14 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_6(t)$  ve  $x_7(t)$  bileşenleridir.



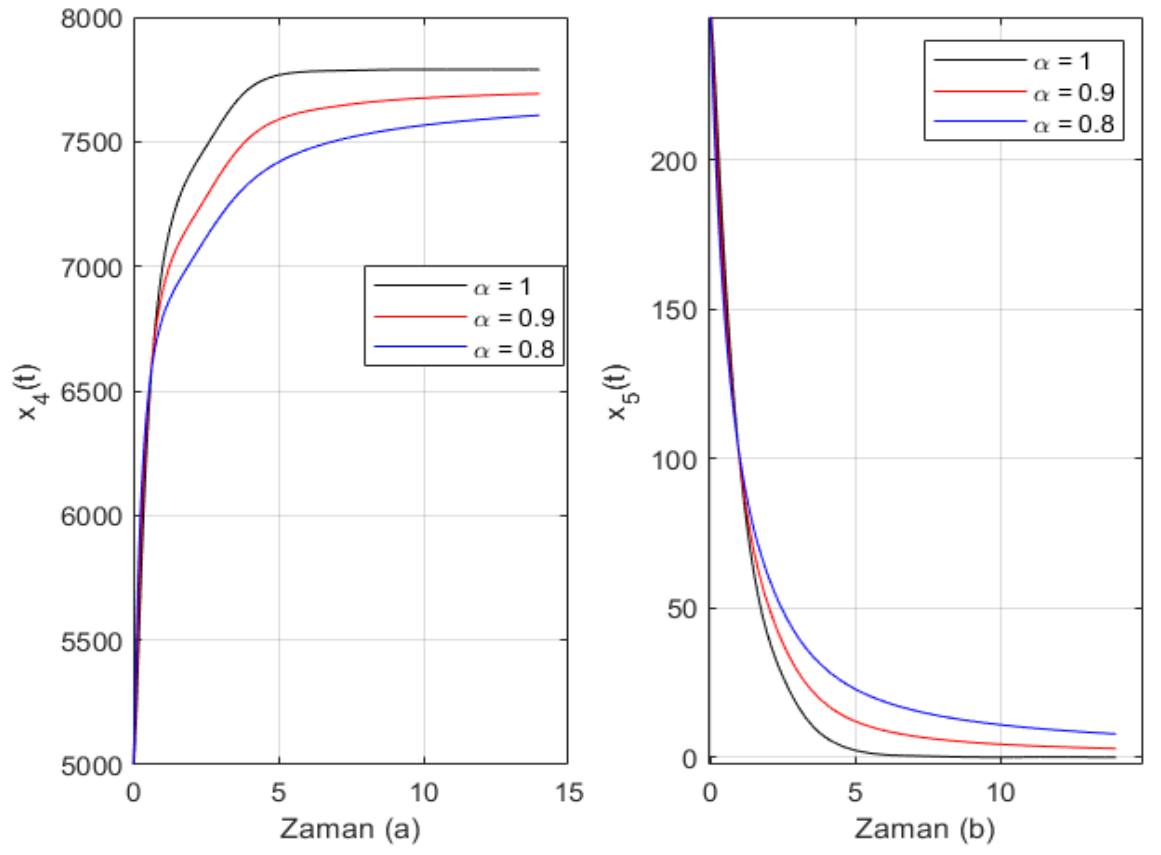
Şekil 4.15 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_8(t)$  ve  $x_9(t)$  bileşenleridir.



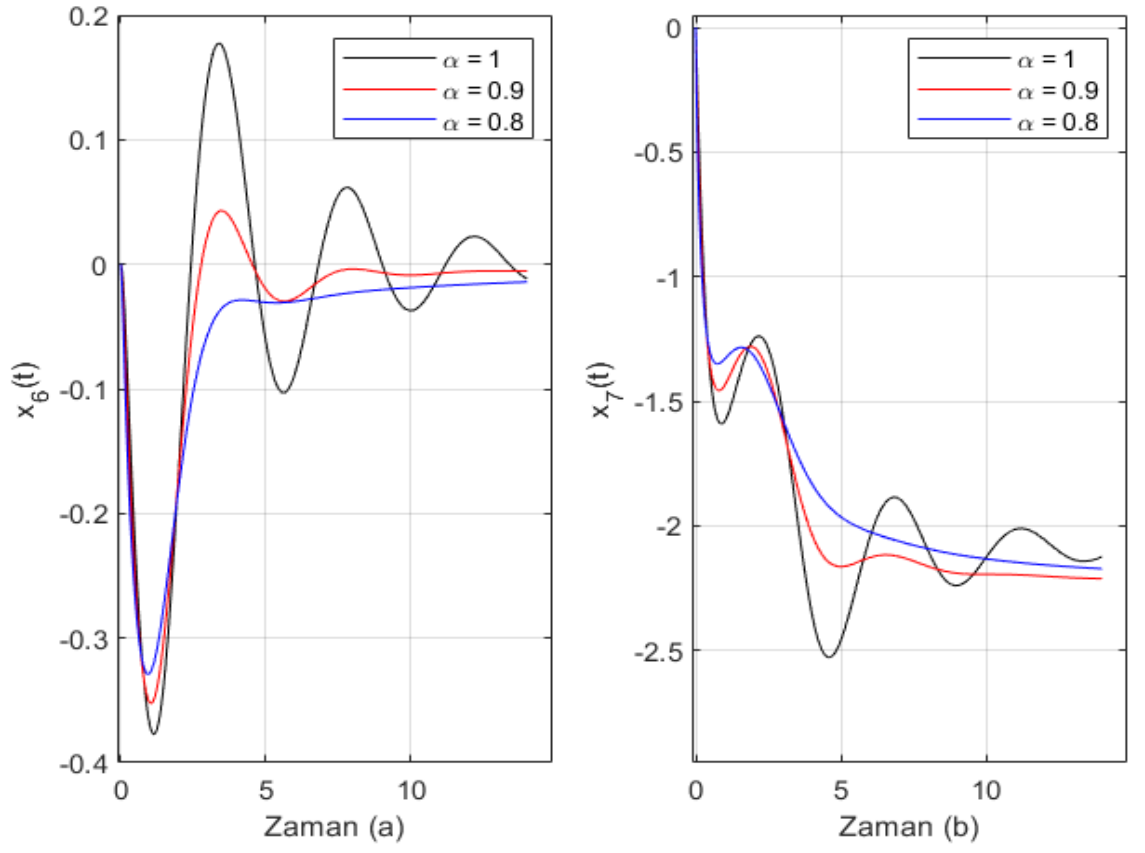
Şekil 4.16  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_1(t)$  bileşenidir.



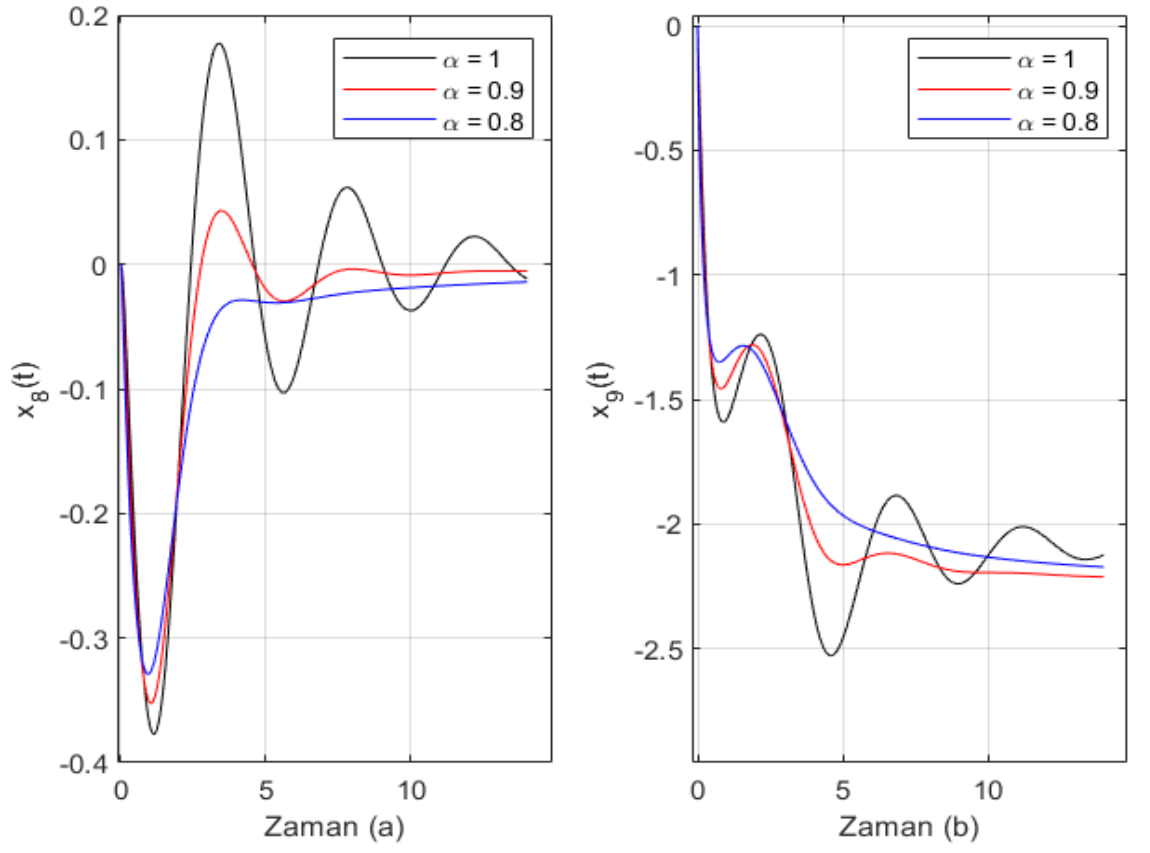
Şekil 4.17 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_2(t)$  ve  $x_3(t)$  bileşenleridir.



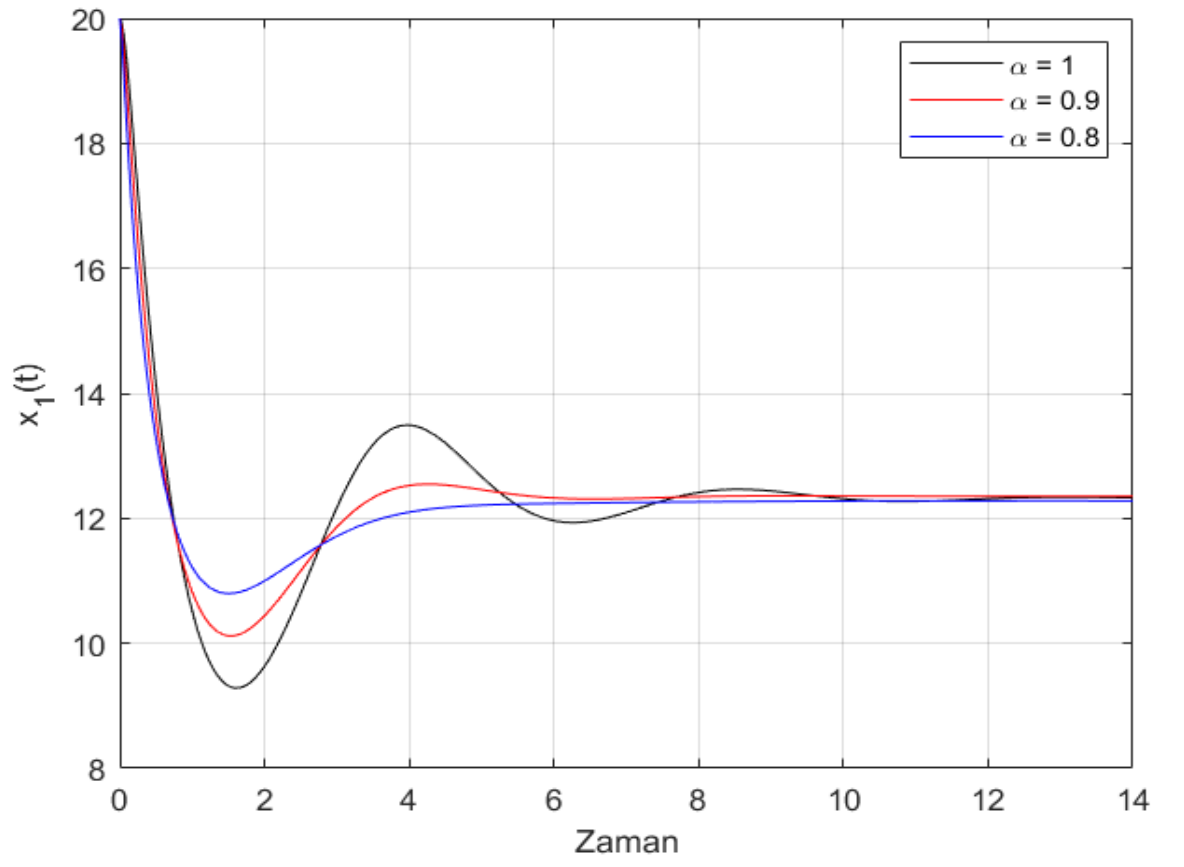
Şekil 4.18 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_4(t)$  ve  $x_5(t)$  bileşenleridir.



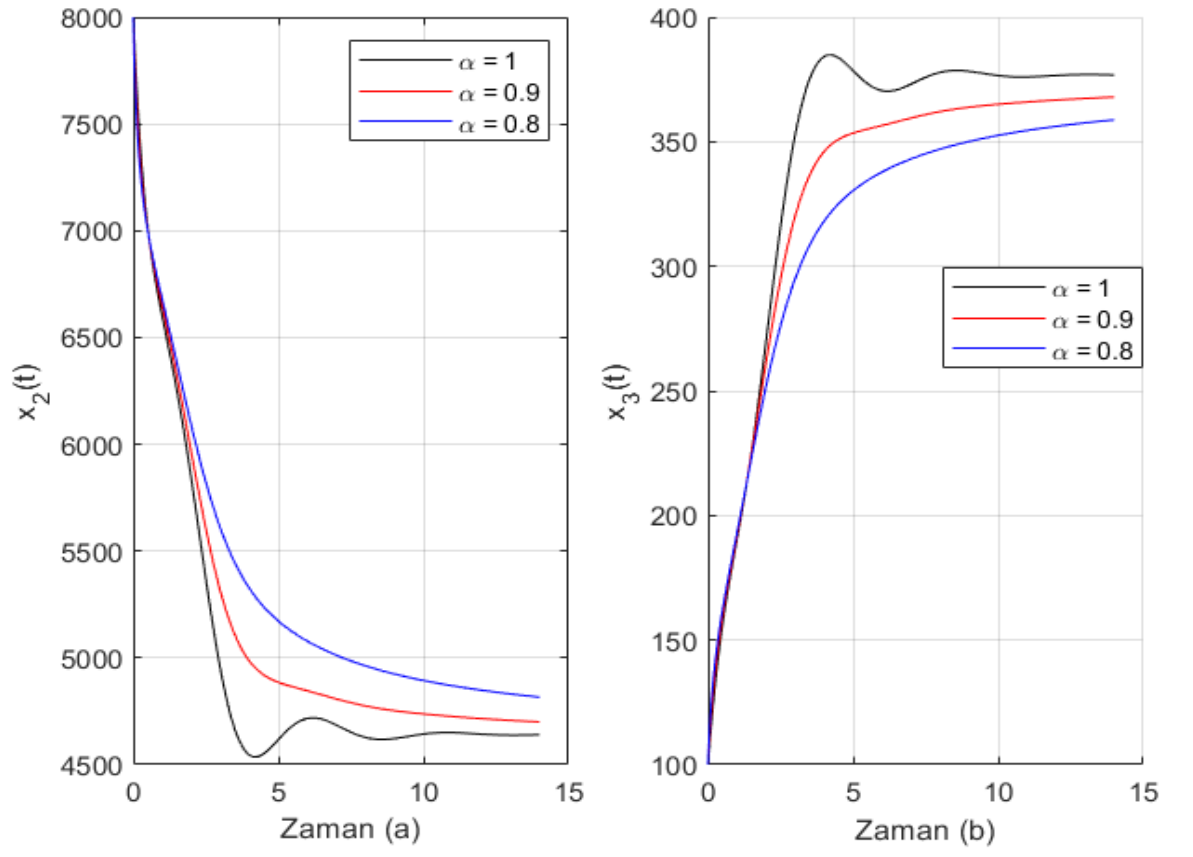
Şekil 4.19 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_6(t)$  ve  $x_7(t)$  bileşenleridir.



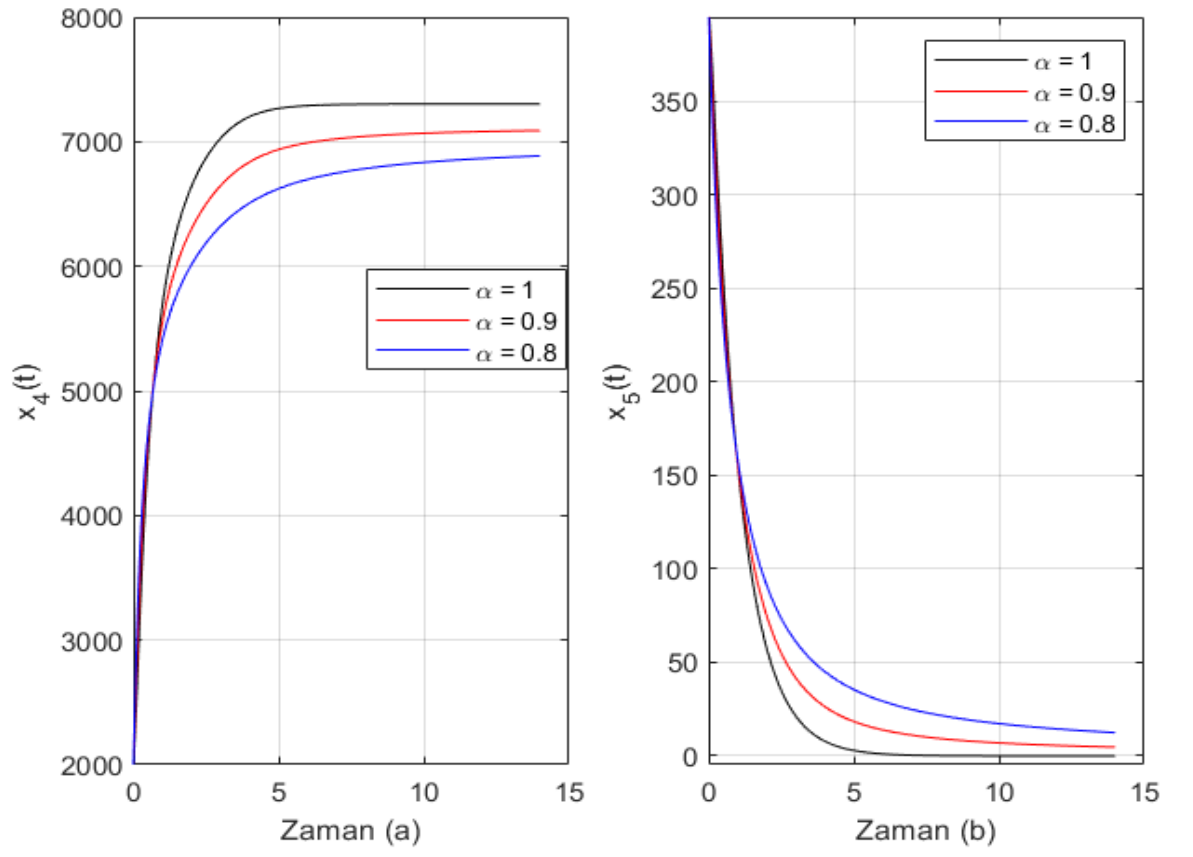
Şekil 4.20 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_8(t)$  ve  $x_9(t)$  bileşenleridir.



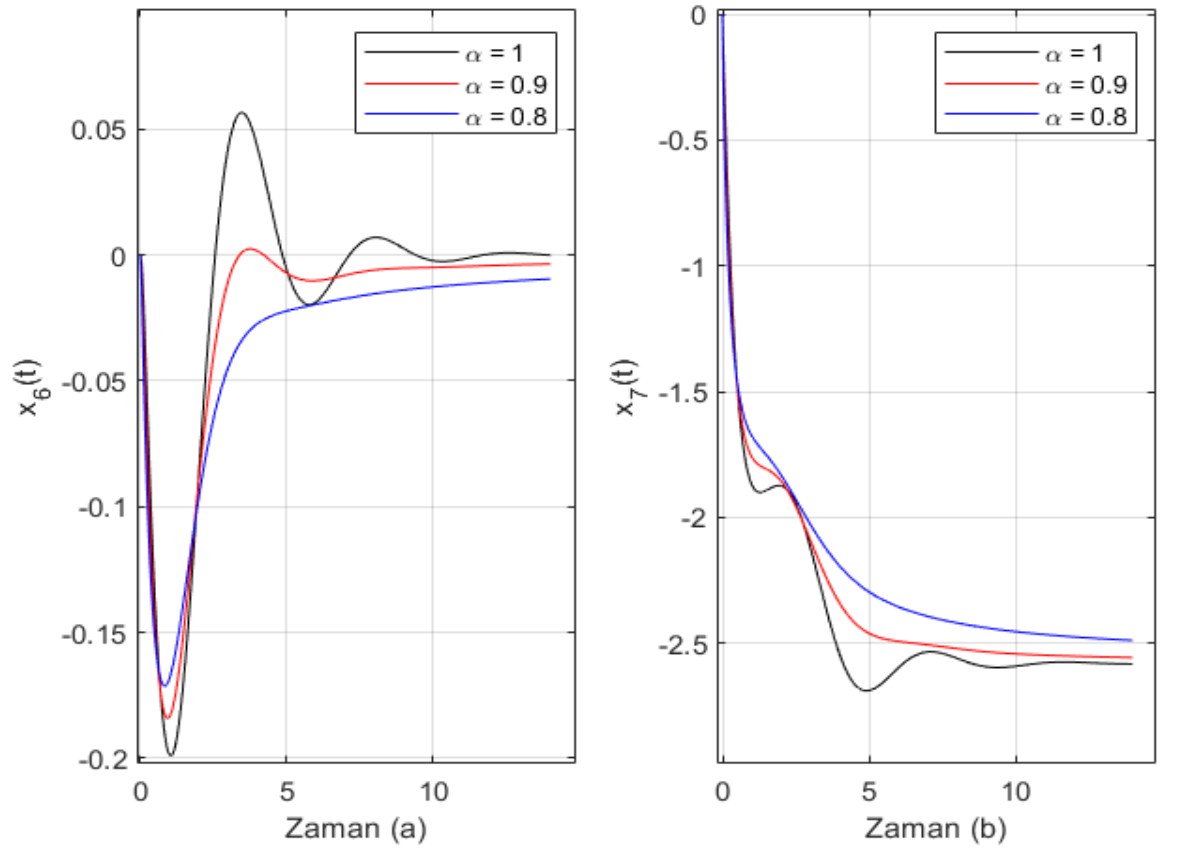
Şekil 4.21  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_1(t)$  bileşenidir.



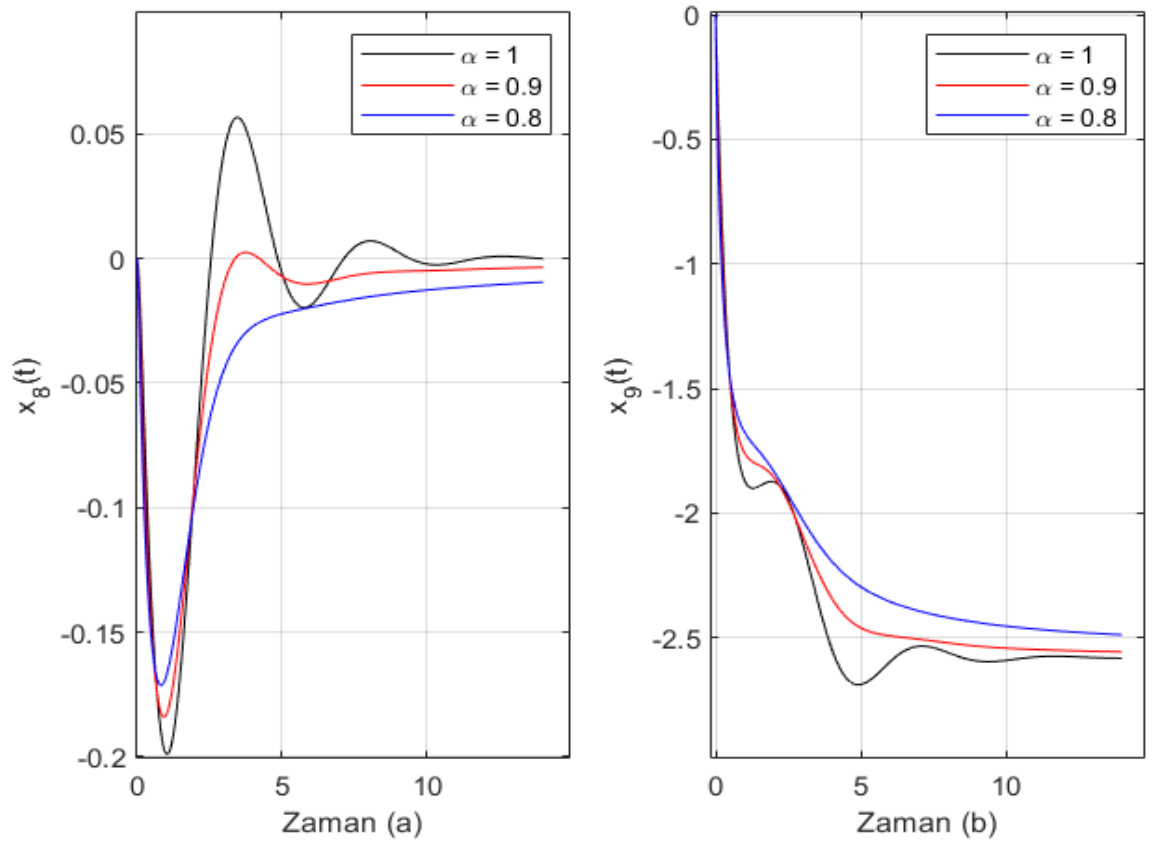
Şekil 4.22 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_2(t)$  ve  $x_3(t)$  bileşenleridir.



Şekil 4.23 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_4(t)$  ve  $x_5(t)$  bileşenleridir.



Şekil 4.24 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_6(t)$  ve  $x_7(t)$  bileşenleridir.



Şekil 4.25 a, b  $\alpha = 1, 0.9$  ve  $0.8$  değerleri için  $x_8(t)$  ve  $x_9(t)$  bileşenleridir.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Caginalp (Caginalp ve Merdan 2007) tarafından tam sayı basamaktan diferensiyel denklemler ile oluşturulan bir finansal model, kesirli basamaktan diferensiyel denklemler ile genişletilerek incelenmiştir. Ele alınan varlık akışı diferensiyel denklem modelinin lokal varlık-teklifi Banach sabit nokta teoremi uygulanarak ispatlanmıştır. Ardından elde edilen lokal çözümler  $t \in (0, h]$  aralığından  $t \in (0, \infty)$  aralığına sürdürülebilme teoremleri ile genişletilmiştir. Oluşturulan modelin nümerik hesaplamaları uygun parametreler ve başlangıç koşulları seçilerek araştırılmıştır. Tüm grafiklerde  $\alpha = 1$  için salınımların daha belirgin olduğu  $\alpha = 0.9$  ve  $\alpha = 0.8$  durumlarında ise salınımların azaldığı ve denge noktalarına daha hızlı yaklaştığı görülmektedir. Kesirli basamaktan diferensiyel denklemler ile kurulan matematiksel model ve adi diferensiyel denklemler ile kurulan matematiksel model arasındaki fark burada daha belirginleşmektedir. Yatırımcılar, yatırım stratejisi oluştururken pozisyon almadan önce kesirli basamaktan diferensiyel denklemler ile kurulan model ile daha doğru tahminlerde bulunabilirler.

## KAYNAKLAR

- Ataman, Ü. ve Kibar H. 1999. Hisse Senetleri'nin Gerçek Değerinin Hesaplanması. Türkmen Kitapevi, 172, İstanbul.
- Babakhani, D. ve Geiji, V.D. 2003. Existence of positive solutions of nonlinear fractional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 278, 434-442.
- Bachelier, L. 1900. Théorie de la spéculation, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 3, Tome 17, 21-86.
- Black, F. ve Scholes, M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. The Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.
- Caginalp, G. ve Ermentrout, G.B. 1990. A kinetic thermodynamics approach to the psychology of fluctuations in financial market. Appl. Math. Lett., 3, 17-19.
- Caginalp, G. ve Ermentrout, G.B. 1991. Numerical studies of differential equations related to theoretical financial markets. Appl. Math. Lett., 4, 35-38.
- Caginalp, G. ve Balenovich, D. 1994. Market oscillations induced by the competition between value-based and trend-based investment strategies. Appl. Math. Finance, 1, 129-164.
- Caginalp, G. ve Balenovich, D. 1999. Asset flow and momentum: deterministic and stochastic equations. Philos. Trans. R. Soc., 357, 2119-2133.
- Caginalp, G. ve Merdan, H. 2007 Asset price dynamics with heterogeneous groups. Physica D, 225, 43-54.
- Chen, W.C. 2008 Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system. Chaos Solutions Fractals, 36, 1305-1314.
- Deng, W.H., Li, C.P. ve Guo, Q. 2007 Analysis of fractional differential equations with multi orders. Fractals, 15, 173-182.
- Dielthelm K., Ford, N.J. ve Freed, A.D. 2002. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, Nonlinear Dynamics, 29, 3-22.
- Dielthelm, K. 1997. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. Electron. Trans. Numer. Anal., 5, 1-6.
- Dielthelm, K. ve Ford, N.J. 2002. Analysis of fractional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 265, 229-248.
- Einstein, A. 1905. On the movement of small particles suspended in stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. {In Investigations of the theory of Brownian movement, edited by R.Fürth} Dover Publications, New York, 1956.

- Garrappa, R. 2018. Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics*, 6, 16.
- Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F. ve Rogosin, S.V. 2014. Mittag-Leffler Function, Related Topics and Applications. Springer, 441, New York.
- Hilfer, R. 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific Pub. Co.: Hackensack, 472, New Jersey.
- Karakoç, F. 2020. Existence and uniqueness for fractional order functional differential equations with Hilfer derivative. *Differential Equations & Applications*, 12(4), 323-336.
- Karşlı, M. 2004. Sermaye Piyasası Borsa Menkul Kıymetler (5. Baskı). Alfa Basım Yayın Dağıtım, 670, İstanbul.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. ve Trujillo J.J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science, 204, Amsterdam.
- Kou, C., Zhou, H. ve Li, C.P. 2012 Existence and continuation theorems of fractional Riemann–Liouville type fractional differential equations. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 22, 1-12.
- Li, C. ve Sarwar, S. 2016. Existence and continuation of solution for Caputo type fractional differential equations. *Electron. J. Differ. Equ.*, 1–14.
- Markowitz, H. 1952. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Merdan, H. ve Alisen, M. 2011. A mathematical model for asset pricing. *Appl. Math. Comput.*, 218, 1449–1456.
- Merton, R.C. ve Samuelson, P.A. 1974. Fallacy of the log-normal approximation to optimal portfolio decision-making over many periods. *Journal of Financial Economics*, 1(1), 67-94.
- Özaydın, A.B. ve Karakoç, F. 2019. Global attractivity for nonlinear differential equations with Hadamard fractional derivative. *J. Fractional Calculus and Applications*, 10(1), 46-54.
- Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations: Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 198, San Diego.
- Prathumwan, D., Sawangtong, W. ve Sawangtong, P. 2017. An analysis on the fractional asset flow differential equations. *Mathematics*, 5, 33.
- Sharpe, W. 1970. Portfolio Theory and Capital Markets. McGraw-Hill, 316, New York.
- Thiele, T.N. 1880. Sur la Compensation de Quelques Erreurs Quasi-Systématiques par la Méthode des Moindres Carrés., 29, C.A. Reitzel, Copenhagen.

- Wang, Z., Huang, X. ve Shi, G. 2011. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay. *Comput. Math. Appl.*, 62, 1531–1539.
- Yu, C. ve Gao, G. 2005. Existence of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 310, 26–29.

