

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MORREY TİPLİ UZAYLARDA TRİGONOMETRİK
POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Zeynep BIÇAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

MORREY TİPLİ UZAYLARDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Zeynep BIÇAK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

Tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Morrey uzaylarının tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiş ve bu uzaylarda trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım araştırılmıştır. Morrey uzaylarında yaklaşımın düz ve ters teoremlerinin ispatlanabilmesi için gerekli olan bazı yardımcı lemmalar ispatlanmıştır. Bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilmiştir. Ayrıca Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde ağırlıklı Morrey uzayları tanımlanmış ve bu uzaylarda trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımın araştırılabilmesi için ihtiyaç duyulan yardımcı lemmalar ispatlanmıştır. Ayrıca ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilmiş, yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları tanımlanmış, yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremlerinin ispatı için gerekli olan yardımcı lemmalar ispatlanmıştır. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği ve trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Temmuz 2022, 69 sayfa

Anahtar Kelimeler: Morrey uzayları, ağırlıklı Morrey uzayları, değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları, düzgünlük modülü, trigonometrik polinomlarla yaklaşım, Bernstein eşitsizliği, düz ve ters teoremler.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Approximation by Trigonometric Polynomials in Morrey Type Spaces

Zeynep BIÇAK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic concepts and theorems are given.

In the third chapter, the definition and some basic properties of Morrey spaces are given and the best approximation by trigonometric polynomials is investigated in these spaces. Some auxiliary lemmas have been proved in order to prove the direct and inverse theorems of approximation in Morrey spaces. Bernstein's inequality is obtained for trigonometric polynomials in these spaces. Also, direct and inverse theorems of approximation by trigonometric polynomials in Morrey spaces are proved.

In the fourth chapter, weighted Morrey spaces are defined and the auxiliary lemmas needed to investigate the best approximation by trigonometric polynomials in these spaces are proved. In addition, Bernstein's inequality for trigonometric polynomials in weighted Morrey spaces has been obtained, and the direct and inverse theorems of approximation have been proved.

In the fifth chapter, variable exponent weighted Morrey spaces are defined, and auxiliary lemmas required for the proof of direct and inverse theorems of approximation theory are proved. In addition, Bernstein's inequality for trigonometric polynomials in these spaces and direct and inverse theorems of approximation by trigonometric polynomials have been proved.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the obtained results.

July 2022, 69 pages

Key Words: Morrey spaces, weighted Morrey spaces, variable exponent weighted Morrey spaces, modulus of smoothness, approximation by trigonometric polynomials, Bernstein inequality, direct and inverse theorems.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan, engin fikirleriyle gelişmeme katkıda bulunan sayın hocalarım Doç. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), ve Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında olduğu gibi çalışmalarım sırasında da büyük fedakârlıklarla hep yanımda olan, beni destekleyip bana anlayış gösteren, emeklerini asla ödeyemeyeceğim canım annem Fatma ÇAKIR ve canım babam Sezai ÇAKIR'a, bu süreçte mutluluğumu ve hüznümü benimle paylaşan canım kardeşlerim Hasan ÇAKIR ve İsra Gülsüm ÇAKIR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yoğun çalışmalarım boyunca sevgisini ve sabrını esirgemeyen ve beni motive edip başarıma her anlamda katkıda bulunan sevgili eşim Ersin BIÇAK ve kıymetli ailesine, bu zorlu serüvenimde beni hiçbir zaman yalnız bırakmayıp her konuda destekçim olan biricik ablam Hayriye YÜCEL ve eşi Mesut YÜCEL'e, neşe kaynağım canım yeğenim Selman YÜCEL'e, tez savunmamda benimle beraber olup heyecanıma ortak olan minik kuzum Ömer BIÇAK'a ve bana yardım eden, yanımda olan ailem gibi gördüğüm dostlarıma en içten duygularla teşekkür ederim.

Bu tez "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Doktora çalışmalarımı destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep BIÇAK
Ankara, Temmuz 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
3. MORREY UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOM- LARLA YAKLAŞIM	11
3.1 Morrey Uzayları ve Temel Özellikleri	11
3.2 Morrey Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Düz ve Ters Teoremleri	18
4. AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLARLA YAKLAŞIM	27
4.1 Ağırlıklı Morrey Uzayları.....	27
4.2 Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Düz ve Ters Teoremleri	30
5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLARLA YAKLAŞIM	42
5.1 Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzayları.....	42
5.2 Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Düz ve Ters Teoremleri	46
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	58
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ	68

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
I_0	$[0, 2\pi]$ kapalı aralığı
$I(x, r)$	$(x - r, x + r)$ açık aralığı
$I_0(x, r)$	$I(x, r) \cap I_0$
w	Ağırlık fonksiyonu
A_p	Muckenhoupt sınıfı
ω	Süreklilik modülü
Ω^r	Düzgünlük modülü
E_n	En iyi yaklaşım
$\mathcal{P}_n$	Cebirsel polinomların sınıfı
$\mathcal{T}_n$	Trigonometrik polinomların sınıfı
$\tilde{f}$	Eşlenik fonksiyon
L_p	Lebesgue uzayları
L_p^{loc}	Lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayı
C^k	her $ \alpha \leq k$ için $\partial^\alpha f$ sürekli olacak biçimdeki f fonksiyonlarının uzayı
C^∞	$\bigcup_{k=1}^\infty C^k$ düzgün fonksiyonlarının uzayı
$\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$	Morrey uzayları
$\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$	Ağırlıklı Morrey uzayları
$\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$	Değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları
$\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$	$C^\infty(I_0)$ ın $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarındaki kapanışı
$\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$	$C^\infty(I_0)$ uzayının $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarındaki kapanışı
$\widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$	$\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomların kapanışı
$\dot{W}_p^r$	Homojen Sobolev uzayları
W_p^r	Homojen olmayan Sobolev uzayları
$\dot{W}_{p,\lambda}^r$	Homojen Sobolev-Morrey uzayları
$W_{p,\lambda}^r$	Homojen olmayan Sobolev-Morrey uzayları

1. GİRİŞ

$$I_0 = [0, 2\pi], \quad I(x, r) = (x - r, x + r) \subset \mathbb{R} \text{ ve } I_0(x, r) = I(x, r) \cap I_0$$

olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} = \sup\{r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(I_0(x,r))} : x \in I_0, 0 < r < 2\pi\}$$

normu sonlu olacak biçimdeki $f \in L_p(I_0)$ fonksiyonlarının sınıfına Morrey uzayları denir. Bu uzaylar 1938 yılında Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışılması ve kesin ön eşitsizliklerinin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Daha sonra Morrey uzaylarının Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

Yaklaşım teorisi son yıllarda birçok matematikçinin ilgisini çeken oldukça güncel ve popüler bir konudur. Bilgisayarların gelişmesiyle bu alandaki araştırmalar daha da güçlenmiştir. Son zamanlarda bu teori o kadar çok genişlemiştir ki analizin diğer tüm dalları ile önemli ölçüde kesişir hale gelmiştir. Ayrıca birçok uygulamalı bilimler ve mühendislik dallarındaki uygulamalarda yaklaşım teorisi önemli bir rol oynamaktadır. Bu alandaki temel problem normlu bir uzaydaki karışık bir fonksiyona yakınsayan daha basit ve daha iyi özelliklere sahip (türevlenebilen, integralenebilen, polinom veya rasyonel fonksiyon gibi) bir fonksiyon bulmaktır. Bu problemin çözümü verilen bir fonksiyonla bu fonksiyona en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın hesaplanması, fonksiyonun belli karakteristik özelliklerinin (örneğin, düzgünlük modülü yardımıyla) belirlenmesi gibi bazı problemlerin çözümü için bir temel oluşturmaktadır. En iyi yaklaşım hatasının üstten değerlendirildiği problemlere yaklaşım teorisinin düz problemleri, elde edilen teoremlere ise düz teoremler denir. Eşitsizliğin ters yönlü incelendiği problemlere ise yaklaşım teorisinin ters problemleri denilmektedir.

1853 yılında Chebyshev, buhar motorunun lineer hareketini bir tekerleğin dairesel hareketine dönüştürme amaçlı yapılacak olan mekanizma problemi üzerinde çalışırken aşağıdaki problemi dikkate almıştır:

" $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı f sürekli fonksiyonu ve n pozitif tamsayısı için

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|$$

ifadesini minimum yapacak şekilde derecesi en fazla n olan

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

polinomu bulunabilir mi?"

Chebyshev (1854) bu problemin çözümünün birden fazla $P(x)$ polinomu için gerçekleştiğini ispatlamıştır.

Weierstrass 1885 yılında, yaklaşım teorisinin ilk teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.1 Cebirsel polinomlar $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsar. Yani her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b$$

olacak biçimde $P \in \mathcal{P}_n$ vardır, burada $\mathcal{P}_n$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

şeklinde derecesi n -yi geçmeyen cebirsel polinomların sınıfıdır (Weierstrass 1885).

Teorem 1.2 $I_0 = [0, 2\pi]$ ve $C(I_0)$, I_0 da tanımlı sürekli fonksiyonların sınıfı olmak üzere her $f \in C(I_0)$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad x \in I_0$$

olacak biçimde $T \in \mathcal{T}_n$ vardır, burada $\mathcal{T}_n$

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

şeklinde derecesi n -yi geçmeyen trigonometrik polinomların sınıfıdır.

Weierstrass teoreminin nicel durumu

$$E_n(f) \leq C\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

Jackson eşitsizliğidir, burada $\delta > 0$ olmak üzere $\omega(f, \delta)$, f fonksiyonunun süreklilik modülüdür (Devore ve Lorentz 1993). Weierstrass teoremi ve Jackson eşitsizliği yaklaşım teorisinin temel araçlarıdır. Jackson eşitsizliğinin benzeri ortalama yaklaşım ve daha yüksek dereceli süreklilik modülü için de geçerlidir (Timan 1963). S. Bernstein (Bernstein 1912) sürekli fonksiyon uzaylarında bazı özel durumlar için Jackson eşitsizliğinin tersini elde etmiştir. Daha sonra E.S. Quade (Quade 1937), S.B. Stechkin (Stechkin 1951), A.F. Timan (Timan 1963), A.F. ve M.F. Timan (Timan, A.F. ve Timan, M.F. 1950) vb. $1 < p < \infty$ için L_p uzayları da dâhil olmak üzere Jackson eşitsizliğinin ters tip eşitsizliklerini ispatladılar. Bu tip eşitsizlikler eşlenik fonksiyonların özelliklerinin araştırılmasında, mutlak yakınsak Fourier serilerinin çalışılmasında (Stechkin 1951) ve ilgili problemlerde önemli rol oynamıştır. Lebesgue uzayları, ağırlıklı Lebesgue uzayları, değişken üslü Lebesgue uzayları, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları, ağırlıklı Lorentz uzayları, Smirnov-Orlicz uzaylarında yaklaşım teorisi için yapılan bazı önemli çalışmalar Akgun 2011a, Akgun 2011b, Akgun ve Kokilashvili 2011a, Akgun ve Kokilashvili 2011b, Ephremidze vd. 2007, Guliyev vd. 2019, Guven ve Israfilov 2010, Israfilov ve Akgun 2006, Israfilov ve Guven 2006, Israfilov vd. 2007, Israfilov ve Testici 2018a, Israfilov ve Testici 2018b, Kokilashvili 1968, Kokilashvili ve Yildirim 2007, Ky 1993, Ky 1997, Shakh-Emirov 2014 olarak verilebilir. Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzayları ve Morrey-Smirnov uzaylarında yaklaşım teorisinin yakınsaklık problemleri Almeida ve Samko 2017, Almeida ve Samko 2018, Burenkov vd. 2014, Israfilov ve Tozman 2008, Israfilov ve Tozman 2011, Jafarov 2019a, Jafarov 2019b, Kinj vd. 2017, Ali vd. 2018 tarafından ele alınmıştır.

$\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayları ve $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım Z. Çakır, C. Aykol, D. Söylemez, A. Şerbetçi tarafından çalışılmıştır (Çakır vd. 2019, Çakır vd. 2020).

Yaklaşım teorisinde değişken üslü uzaylar yaklaşımın lokal olduğunu göstermek için

kullanılmıştır. V.S. Guliyev, A. Ghorbanalizadeh ve Y. Sawano tarafından $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$ değişken üslü Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenmiş, düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilmiş ve Bernstein eşitsizliği elde edilmiştir (Guliyev vd. 2019). Ayrıca $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremleri de Z. Çakır, C. Aykol, V.S. Guliyev ve A. Şerbetçi tarafından ispatlanmıştır (Çakır vd. 2021).

Bu tezde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayları, $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzayları ve $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları gibi Morrey tipli uzaylarda trigonometrik polinomlarla yaklaşım incelenecektir. Tezin ikinci bölümünde temel tanım ve kavramlara yer verilecektir. Üçüncü bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarının tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca Morrey uzaylarında düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım ve K -fonksiyonellerinin tanımı yapılacaktır. Bu bölümün ikinci kesiminde ise Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım araştırılacaktır. Morrey uzaylarında yaklaşımın düz ve ters teoremlerinin ispatlanabilmesi için gerekli olan bazı yardımcı lemmalar verilecektir. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilip, bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir. Ayrıca Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanacaktır. Dördüncü bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarının tanımı ve bu uzaylarda düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım ve K -fonksiyonellerinin tanımı verilecektir. Bu bölümün ikinci kesiminde ise ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımın araştırılabilmesi için ihtiyaç duyulan yardımcı lemmalar ispatlanacaktır. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilecektir. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir. Ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenecektir. Beşinci bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları tanımlanacaktır. Bu uzaylarda düzgünlük modülü ve en iyi yaklaşımın tanımı verilecektir. Bu bölümün ikinci kesiminde ise yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremlerinin ispatı için

gerekli olan yardımcı lemmalar verilecektir. K -fonksiyonelleri tanımlanıp, düzgünlük modülü yardımıyla karakterize edilecektir. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir. Değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenecektir. Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılacaktır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{K} \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in \mathbb{K}$ için

$$(N1) \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N2) \|ax\| = |a|\|x\|$$

$$(N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu bir vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2 (Cebir ve σ - Cebir) X bir küme olmak üzere X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için

$$(i) X \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \text{ Her } E \in \mathcal{A} \text{ için } E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$(iii) k = 1, 2, \dots, n \text{ için } E_k \in \mathcal{A} \text{ ise } \bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A}$$

özellikleri sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir. Eğer

(iii) şartı yerine

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir σ - cebiri adı verilir.

Tanım 2.3 (Ölçü) $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \text{ Her } A \in \mathcal{A} \text{ için } \mu(A) \geq 0$$

$$(iii) \text{ Her ayrık } (A_n) \text{ dizisi için } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.4 (Ölçü Uzayı) X bir küme, $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir σ -cebiri ve μ ölçü olmak üzere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$ -ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.5 (Ölçülebilir Fonksiyon) $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}([\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 (Lebesgue Uzayı) (X, μ) bir ölçü uzayı ve $\mathcal{M}$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlı μ -ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(X) = \left\{ f \in \mathcal{M} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p -inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir. f fonksiyonunun L^p normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L^p ye Lebesgue uzayı denir, burada

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0 \}$$

dir.

Teorem 2.1 (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L^p$, $g \in L^q$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1$ ve

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

sağlanır (Neri 1971).

Teorem 2.2 (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ için eğer $f, g \in L^p$ ise $(f + g) \in L^p$ ve

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

dir (Neri 1971).

Teorem 2.3 (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) ölçü uzayları olsun. $f, (X, \mu) \times (Y, \nu)$ çarpım uzayı üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \right)^p \leq \int_X \left(\int_Y |f(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

eşitsizliği sağlanır (Grafakos 2004)

Tanım 2.7 (Trigonometrik Polinom) $0 \leq k \leq n$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

n -inci dereceden kompleks trigonometrik polinomdur. (2.1) de Euler formülü kullanılırsa

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ink}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

olarak yazılabilir (Rudin 1987).

Benzer biçimde $0 \leq k \leq n$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ve $a_n \neq 0$ ya da $b_n \neq 0$ olmak üzere

$$t(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

n -inci dereceden reel trigonometrik polinomdur (Powell 1981).

Tanım 2.8 (En İyi Yaklaşım) $I_0 = [0, 2\pi]$ olmak üzere $\mathcal{T}_n$ derecesi n -yi geçmeyen trigonometrik polinomların sınıfı, $C(I_0)$, 2π -periyodik sürekli fonksiyonların sınıfı ve $f \in C(I_0)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonuna trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı

$$E_n(f) = \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_{C(I_0)} \quad (2.3)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.9 (Süreklilik Modülü) Herhangi bir X metrik uzayında verilen bir f fonksiyonunun süreklilik modülü

$$\omega(t) := \omega(f, t) := \sup_{\substack{|x-y| \leq t \\ x, y \in X}} |f(x) - f(y)|, \quad t \geq 0$$

şeklinde tanımlanır, burada $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, I_0$ ya da $[a, b]$ olarak sınırlandırılabilir (Devore ve Lorentz 1993).

Eğer I_0 aralığında sürekli bir f fonksiyonu için $\omega(f, t) = o(t)$ oluyorsa bu durumda f fonksiyonu sabittir. Bundan dolayı süreklilik modülü daha yüksek düzgünlüğü ölçmek için kullanışlı değildir. Düzgünlük modülü, en iyi yaklaşımın oranını, ters teoremleri ve diğer bazı benzer problemleri ele almak için bize daha iyi bir araç sağlamaktadır. Şimdi $L_p(I_0)$ uzayında düzgünlük modülünü tanımlayalım.

Tanım 2.10 (Düzgünlük Modülü) $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere $f \in L_p(I_0)$, $p \geq 1$ ve

$$\Delta_t^r f(x) := \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(x+st), \quad r \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

olsun. Bu durumda $\Omega^r(f, \cdot, L_p(I_0)) : [0, \infty] \rightarrow [0, +\infty)$, f fonksiyonunun $L_p(I_0)$ daki r -inci mertebeden düzgünlük modülü

$$\Omega^r(f, h, L_p(I_0)) := \sup_{0 < t \leq \min\{2\pi, h\}} \|\Delta_t^r f\|_{L_p(I_0)}, \quad h \geq 0 \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır.

$f, f_1, f_2 \in L_p(I_0)$, $1 \leq p \leq \infty$, olmak üzere düzgünlük modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. (Üçgen eşitsizliği) $\Omega^r(f_1 + f_2, h, L_p(I_0)) \leq \Omega^r(f_1, h, L_p(I_0)) + \Omega^r(f_2, h, L_p(I_0))$.
2. $\Omega^r(cf, h, L_p(I_0)) = |c| \Omega^r(f, h, L_p(I_0))$.
3. $\Omega^r(f, nh, L_p(I_0)) \leq n^r \Omega^r(f, h, L_p(I_0))$.
4. $\lambda > 0$ olmak üzere $\Omega^r(f, \lambda h, L_p(I_0)) \leq (\lambda + 1)^r \Omega^r(f, h, L_p(I_0))$ gerçekleşir.

Tanım 2.11 (Maksimal Fonksiyon) f fonksiyonunun I_0 daki Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|I(x,r)|} \int_{I_0(x,r)} |f(t)| dt, \quad x \in I_0$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.12 (Muckenhoupt Sınıfı) Eğer herhangi bir $I \subset I_0$ aralığı için

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq C \quad (2.6)$$

olacak biçimde $C > 1$ varsa w ağırlık fonksiyonu $1 < p < \infty$ olmak üzere $A_p(I_0)$ Muckenhoupt sınıfındandır denir, burada $1/p + 1/p' = 1$ şeklindedir. Ayrıca $p = 1$ ise her $x \in I_0$ için

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad (2.7)$$

olacak biçimde $C > 1$ varsa $w \in A_1(I_0)$ olur, $p = \infty$ ise $A_\infty(I_0) = \bigcup_{1 < p < \infty} A_p(I_0)$ olarak tanımlanır.

3. MORREY UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Bu bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarının tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca Morrey uzaylarında düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım ve K -fonksiyonlarının tanımı yapılacaktır. Bu bölümün ikinci kesiminde ise Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım araştırılacaktır. Morrey uzaylarında yaklaşımın düz ve ters teoremlerinin ispatlanabilmesi için gerekli olan bazı yardımcı lemmalar verilecektir. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonları karakterize edilip, bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir. Ayrıca $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanacaktır.

$C^\infty(I_0)$, $C^\infty(\mathbb{R})$ deki elemanların I_0 a kısıtlaması ile elde edilen tüm fonksiyonların kümesi ve $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$, $C^\infty(I_0)$ ın $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarındaki kapanışı olsun. Trigonometrik polinomların sınıfı $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayında yoğun olmadığı için Morrey uzaylarındaki fonksiyonların trigonometrik polinomlara yaklaşımı kolay değildir (Guliyev vd. 2019, Triebel 2014). Eğer $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ yerine $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ alınırsa bu durumda f fonksiyonun $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ uzayındaki en iyi yaklaşımı olan $T_n \in \mathcal{T}_n$ trigonometrik polinomunun varlığı garanti edilemez. Bundan dolayı $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ uzayında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanacaktır.

3.1 Morrey Uzayları ve Temel Özellikleri

Bu kesimde Morrey uzaylarının tanımı ve bazı temel özellikleri verilecektir. Ayrıca Morrey uzaylarında düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım ve K -fonksiyonlarının tanımı yapılacaktır.

Tanım 3.1 (Morrey Uzayları)

$$I_0 = [0, 2\pi], \quad I(x, r) = (x - r, x + r) \subset \mathbb{R}, \quad I_0(x, r) = I(x, r) \cap I_0$$

olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} = \sup\{r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(I_0(x,r))} : x \in I_0, 0 < r < 2\pi\}$$

normu sonlu olacak biçimdeki $f \in L_p(I_0)$ fonksiyonlarının sınıfına Morrey uzayları denir (Morrey 1938).

1. $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayları bir Banach uzayıdır.
2. $\lambda = 0$ ise

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,0}(I_0)} &= \sup_{\substack{0 < r < 2\pi \\ x \in I_0}} \left(\int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_{L_p(I_0)}\end{aligned}$$

olup $\mathcal{M}_{p,0}(I_0) = L_p(I_0)$ elde edilir.

3. $\lambda = 1$ ise $\mathcal{M}_{p,1}(I_0) = L_\infty(I_0)$ olur. Gerçekten,
 $f \in L_\infty(I_0)$ olsun. Bu durumda

$$r^{-1/p} \left(\int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L_\infty}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Böylece

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,1}(I_0)} \leq \|f\|_{L_\infty}$$

olur. Buradan $f \in \mathcal{M}_{p,1}(I_0)$ elde edilir.

$f \in \mathcal{M}_{p,1}(I_0)$ olsun. Temel Lebesgue Teoremi'ne göre

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|I_0(x,r)|} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

dir. Bu durumda

$$|f(x)| = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|I_0(x,r)|} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,1}(I_0)}$$

elde edilir. Böylece

$$\|f\|_{L_\infty(I_0)} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,1}(I_0)}$$

sağlanır. Dolayısıyla $f \in L_\infty(I_0)$ dir.

4. Eğer $\lambda < 0$ ya da $\lambda > 1$, ise $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0) = \Theta(I_0)$ olur, burada $\Theta(I_0)$, I_0 üzerinde sıfıra denk fonksiyonların sınıfıdır (Stein 1970). Gerçekten;

$\lambda < 0$ ve $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ olsun. Bu durumda

$$\left(\int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq \sup_{\substack{0 < r < 2\pi \\ x \in I_0}} \left(r^{-\lambda} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} r^{\frac{\lambda}{p}}$$

gerçeklenir, burdan

$$0 \leq \|f\|_{L_p(I_0(x,r))} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} r^{\frac{\lambda}{p}}$$

elde edilir. $r \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{\lambda}{p}}$$

olur. $\lambda < 0$ ve $\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} < \infty$ olduğundan $f(x) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda < 0$ iken $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0) = \Theta(I_0)$ gerçekleşir.

$\lambda > 1$ ve $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|I_0(x,r)|} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{\lambda-1}{p}} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{\lambda-1}{p}} \\ &= \sup_{\substack{0 < r < 2\pi \\ x \in I_0}} \left(r^{-\lambda} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{\lambda-1}{p}} = \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{\lambda-1}{p}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda > 1$ ve $\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} < \infty$ olduğundan $f(x) = 0$ elde edilir.

Dolayısıyla $\lambda > 1$ iken $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0) = \Theta(I_0)$ gerçekleşir.

5. Eğer $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$, ise bu durumda $\mathcal{M}_{p,\lambda_2}(I_0) \subset \mathcal{M}_{p,\lambda_1}(I_0)$ sağlanır. Ayrıca $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, ise $f \in L_p(I_0)$ olur. Böylece $f \in L_1(I_0)$ dır.

Lebesgue uzayları ile karşılaştırıldığında Morrey uzayları aşağıdaki dikkat çekici özelliklere sahiptir.

1. $f(x) = x^{-(1-\lambda)/p}$ fonksiyonu $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayındadır.
2. $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayı yansımali değildir (Sawano ve Tanaka 2015, Örnek 5.2; Yang ve Yuan 2011, Teorem 1.3).
3. $C^\infty(I_0)$, $C^\infty(\mathbb{R})$ nin I_0 a kısıtlaması olmak üzere $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayı $C^\infty(I_0)$ uzayını kapalı ve yoğun bir alt uzay olarak içermez (Triebel 2014, Önerme 2.16).
4. $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayı ayrılabilir değildir (Triebel 2014, Önerme 2.16).

Yukarıdaki özellikler $\lambda = 0$ için $\mathcal{M}_{p,0}(I_0) = L_p(I_0)$ olduğundan sağlanmaz. Bu özellikler temel alınarak $C^\infty(I_0)$ ın $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarındaki kapanışı olarak $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ uzayını tanımlayabiliriz.

Lemma 3.1 $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ olmak üzere her $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, için Chiarenza ve Frasca 1987 deki uygun sonuç kullanılarak,

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \quad (3.1)$$

eşitsizliği elde edilir, burada pozitif C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır.

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\Delta_t^r f(x) := \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(x+st)$, $r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$, $p \geq 1$ olmak üzere her $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ için

$$\sigma_\delta^r(f)(x) := \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(x)| dt$$

olsun. Şimdi $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayında düzgünlük modülünü tanımlayalım.

Tanım 3.2 (Morrey Uzaylarında Düzgünlük Modülü) $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$ ve $h > 0$ olmak üzere $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ olsun. Bu durumda $\Omega^r(f, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) : [0, \infty] \rightarrow [0, +\infty)$ f fonksiyonunun $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayındaki r -inci mertebeden düzgünlük modülü

$$\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) := \sup_{0 < \delta \leq \min\{2\pi, h\}} \|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}, \quad r \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.3 (Homojen Sobolev-Morrey Uzayı) $\dot{W}_p^r(I_0)$ homogen Sobolev-Morrey uzayı, I_0 da $f^{(r)}$ türevi mevcut ve

$$\|f\|_{\dot{W}_{p,\lambda}^r(I_0)} = \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}$$

normu sonlu olacak biçimdeki $f \in L_1^{loc}(I_0)$ fonksiyonlarının sınıfıdır.

Tanım 3.4 (Homojen Olmayan Sobolev-Morrey Uzayı) $W_{p,\lambda}^r(I_0)$ homojen olmayan Sobolev-Morrey uzayı

$$\|f\|_{W_{p,\lambda}^r(I_0)} := \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}$$

normu sonlu olacak biçimdeki $f \in \dot{W}_{p,\lambda}^r(I_0)$ fonksiyonlarından oluşan homojen Sobolev-Morrey uzayının alt sınıfıdır.

Tanım 3.3 ve Tanım 3.4 te $\lambda = 0$ alınırsa sırasıyla homojen Sobolev uzayı ve homojen olmayan Sobolev uzayı elde edilir.

Lemma 3.2 $f \in \dot{W}^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $C > 0$ sabiti ile

$$\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \delta^r \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. $f \in \dot{W}^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ olsun. Bu durumda $f^{(r)} \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ ve

$$\Delta_t^r f(x) = \int_0^t \cdots \int_0^t f^{(r)}(x + t_1 + t_2 + \dots + t_r) dt_1 \dots dt_r$$

olur.

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_0^t \cdots \int_0^t |f^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \delta^r \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta |f^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \delta^r \left\| \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\{ \frac{1}{\delta} \int_{t_1+\dots+t_{r-1}}^{t_1+\dots+t_{r-1}+\delta} |f^{(r)}(\cdot + t)| dt \right\} dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \delta^r \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta+(r-1)\delta} |f^{(r)}(\cdot + t)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} dt_1 \dots dt_{r-1} \\
&= \delta^r \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{r\delta} |f^{(r)}(\cdot + t)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq C \delta^r \|Mf^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq C \delta^r \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.3 $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $C > 0$ sabiti ile

$$\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(\cdot + st) \right| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot + st)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot + st)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{s\delta} \int_0^{s\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{r\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + r2^r \left\| \frac{1}{r\delta} \int_0^{r\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbb{R}$ de f fonksiyonu 2π -periyodik olduğundan genelliği bozmadan $r\delta < 2\pi$ alabiliriz ve (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &\leq \|f(\cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + r2^r C \|f(\cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&= C \|f(\cdot)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 3.3 ten $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$ olmak üzere her $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ için $\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}$ ve her $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ için

$$\Omega^r(f_1 + f_2, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) \leq \Omega^r(f_1, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) + \Omega^r(f_2, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0))$$

elde edilir. Ayrıca $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ için $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega^r(f, h, \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)) = 0$ gerçekleşir (Guliyev vd. 2019).

Tanım 3.5 (Morrey Uzaylarında En İyi Yaklaşım) $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $p \geq 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ fonksiyonu için $\mathcal{T}_n$ derecesi n yi geçmeyen trigonometrik polinomların sınıfında en iyi yaklaşım

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} := \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.6 (K -fonksiyoneli) $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$ ve $r \geq 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ fonksiyonu için K -fonksiyoneli

$$K_r(f, t)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} = \inf_{g \in W^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \{ \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + t^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \}, t > 0$$

olarak tanımlanır.

3.2 Morrey Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Düz ve Ters Teoremleri

Bu kesimde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım araştırılacaktır. Ana sonuçların ispatında kullanılacak lemma ve ispatları verilecektir. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilip, bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir. Ayrıca Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanacaktır.

Aşağıdaki lemmada $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayında K -fonksiyonellerinin düzgünlük modülü yardımıyla karakterizasyonu elde edilecektir.

Lemma 3.4 $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $c, C > 0$ sabitleri ile

$$c \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) \leq K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)), \quad 0 < h \leq c$$

sağlanır.

İspat. $g \in W^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ olsun. Bu durumda $g^{(r)} \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ ve böylece $g^{(r)} \in L_1(I_0)$ olur. Dolayısıyla

$$\Delta_t^r g(x) = \int_0^t \cdots \int_0^t g^{(r)}(x + t_1 + t_2 + \dots + t_r) dt_1 \dots dt_r$$

yazabiliriz. Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği ve (3.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Omega^r(g, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) &:= \sup_{0 < \delta \leq \min\{2\pi, h\}} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r g(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \sup_{0 < \delta \leq \min\{2\pi, h\}} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left\| \int_0^t \cdots \int_0^t |g^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} dt \\
&\leq h^r \left\| \frac{1}{h^r} \int_0^h \cdots \int_0^h |g^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&= h^r \left\| \frac{1}{h^{r-1}} \int_0^h \cdots \int_0^h \left\{ \frac{1}{h} \int_{t_1+\dots+t_{r-1}}^{t_1+\dots+t_{r-1}+h} |g^{(r)}(\cdot + t)| dt \right\} dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq h^r \frac{1}{h^{r-1}} \int_0^h \cdots \int_0^h \left\| \frac{1}{h} \int_0^{h+(r-1)h} |g^{(r)}(\cdot + t)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} dt_1 \dots dt_{r-1} \\
&= h^r \left\| \frac{1}{h} \int_0^{rh} |g^{(r)}(\cdot + t)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq c_r h^r \|Mg^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq c_r h^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}$ fonksiyonelinin tanımından herhangi bir $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ için

$$\begin{aligned}
\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) &\leq \Omega^r(f - g, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) + \Omega^r(g, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) \\
&\leq c (\|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + h^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}) \\
&\leq c K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}
\end{aligned}$$

olur. Ters eşitsizliği ispatlamak için $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, $r \geq 1$, $h > 0$ olmak üzere Steklov tipi dönüşümü tanımlayacağız:

$$\begin{aligned}
&f_{r,h}(x) \\
&:= \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f \left(x + \frac{r-s}{r} (t_1 + \dots + t_r) \right) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta.
\end{aligned}$$

Basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
& |f_{r,h}(x) - f(x)| \\
&= \left| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f\left(x + \frac{r-s}{r}(t_1 + \dots + t_r)\right) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta \right| \\
&= \left| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f\left(x + \frac{s}{r}(t_1 + \dots + t_r)\right) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta \right| \\
&= \left| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \Delta_{\frac{t_1 + \dots + t_r}{r}}^r f(x) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|f_{r,h} - f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &\leq \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \Delta_{\frac{t_1 + \dots + t_r}{r}}^r f(x) dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} d\delta \\
&\leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \Delta_{\frac{t_1 + \dots + t_r}{r}}^r f(x) dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&= \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left(\frac{1}{\delta} \int_{t_1 + \dots + t_{r-1}}^{\delta + t_1 + \dots + t_{r-1}} \Delta_{\frac{t}{r}}^r f(x) dt \right) dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta + (r-1)\delta} |\Delta_{\frac{t}{r}}^r f(x)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} dt_1 \dots dt_{r-1} \\
&\leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{r\delta} |\Delta_{\frac{t}{r}}^r f(x)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq r \sup_{0 \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_u^r f(x)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq r \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0))
\end{aligned}$$

elde edilir. $f_{r,h}$ dönüşümünün diferensiyellenmesiyle

$$f_{r,h}^{(r)}(x) = \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x) d\delta$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|f_{r,h}^{(r)}(x)| &\leq \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s}\right)^r |\Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x)| d\delta \\
&\leq \frac{c_r}{h^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s}\right)^r \frac{1}{h} \int_0^h |\Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x)| d\delta \\
&= \frac{c_r}{h^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s}\right)^r \frac{1}{\frac{r-s}{r}h} \int_0^{\frac{r-s}{r}h} |\Delta_u^r f(x)| du
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|f_{r,h}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &\leq c_r h^{-r} \|\sigma_{\frac{r-s}{r}h}^r f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq c_r h^{-r} \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0))
\end{aligned}$$

elde edilir, buradan

$$\begin{aligned}
K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &\leq \|f - f_{r,h}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + h^r \|f_{r,h}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
&\leq C \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0))
\end{aligned}$$

olur. ■

$0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} a_t \cos tx + b_t \sin tx$$

ve $S_n(x, g)$ de n -inci kısmi toplamı olsun. $g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ olmak üzere Lemma 3.2 nin ispat yöntemi kullanılarak

$$\|g - S_n(\cdot, f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}, \quad (3.2)$$

$$E_n(\tilde{g})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}, \quad (3.3)$$

elde edilir, burada $\tilde{g}$, g fonksiyonunun eşleniğidir.

Lemma 3.5 $r \geq 1$ olsun. Bu durumda $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ olmak üzere $g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ için $C = C(p, \lambda, r)$ sabiti ile

$$E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir.

İspat. $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$g(x) \sim \sum_{t=0}^{\infty} a_t \cos tx + b_t \sin tx$$

ve $S_n(x, g)$ de n -inci kısmi toplamı olsun. Bu durumda

$$\tilde{g}(x) \sim \sum_{t=0}^{\infty} b_t \cos tx - a_t \sin tx$$

olur.

$$B_t(x, g) := a_t \cos tx + b_t \sin tx, \quad t \in \mathbb{N}$$

diyelim. $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ normunda $g(x) = \sum_{t=0}^{\infty} B_t(x, g)$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} B_t(x, g) &= a_t \cos tx + b_t \sin tx \\ &= a_t \cos \left(tx + \frac{r\pi}{2} - \frac{r\pi}{2} \right) + b_t \sin \left(tx + \frac{r\pi}{2} - \frac{r\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left(\frac{r\pi}{2} \right) \left[a_t \cos t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) + b_t \sin t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) \right] \\ &\quad + \sin \left(\frac{r\pi}{2} \right) \left[a_t \sin t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) - b_t \cos t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) \right] \\ &= B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right) \cos \left(\frac{r\pi}{2} \right) + B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, \tilde{g} \right) \sin \left(\frac{r\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

ve

$$B_t(x, g^{(r)}) = t^r B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right)$$

olduğundan

$$\sum_{t=0}^{\infty} B_t(x, g) = B_0(x, g) + \cos \left(\frac{r\pi}{2} \right) \sum_{t=1}^{\infty} B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right)$$

$$+ \sin \left(\frac{r\pi}{2} \right) \sum_{t=1}^{\infty} B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, \tilde{g} \right)$$

$$= B_0(x, g) + \cos\left(\frac{r\pi}{2}\right) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) + \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)})$$

gerçeklenir. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(x) - S_n(x, g) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} B_t(x, g) \\ &= \cos\left(\frac{r\pi}{2}\right) \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) + \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)}) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} [S_t(x, g^{(r)}) - S_{t-1}(x, g^{(r)})] \\ &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} \{ [S_t(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] - [S_{t-1}(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] \} \\ &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) [S_t(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] - \frac{1}{(n+1)^r} [S_n(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)}) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) [S_t(x, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}(x)] \\ &\quad - \frac{1}{(n+1)^r} [S_n(x, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}(x)], \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınıp (3.2) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &\leq \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \|S_t(\cdot, g^{(r)}) - g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &+ \frac{1}{(n+1)^r} \|S_n(\cdot, g^{(r)}) - g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \|S_t(\cdot, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^r} \|S_n(\cdot, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\leq C \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) E_t(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \frac{1}{(n+1)^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \\ &\quad + C \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) E_t(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \frac{1}{(n+1)^r} E_n(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) + \frac{1}{(n+1)^r} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +CE_n(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) + \frac{1}{(n+1)^r} \right\} \\
& \leq \frac{C}{(n+1)^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} & \leq \|f - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
& \leq \frac{C}{n^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\
& \leq \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}
\end{aligned}$$

olur. ■

S.N. Bernstein 1912 yılında polinomların L_∞ normlarını hesaplayarak kendi adıyla anılan eşitsizliği ispatladı. $1 < p < \infty$ olmak üzere derecesi $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olan herhangi bir T polinomu için Zygmund tarafından elde edilen

$$\|T_n^{(k)}\|_{L_p(I_0)} \leq Cn^k \|T_n\|_{L_p(I_0)}$$

Bernstein eşitsizliğinin genel hali Devore ve Lorentz 1993 te bulunabilir. Aşağıdaki lemma Morrey uzayında Bernstein eşitsizliğini ifade etmektedir.

Lemma 3.6 (Morrey Uzaylarında Bernstein Eşitsizliği) $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$,

$0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her T_n trigonometrik polinomu ve $k \in \mathbb{N}$ için C , n den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\|T_n^{(k)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq Cn^k \|T_n\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. İstenilen sonuç Guliyev vd. 2019, Lemma 5.2 deki eşitsizlikte iterasyon yapılarak elde edilir. ■

Teorem 3.1 (Düz Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)\right), \quad n \geq r$$

gerçeklenir, burada $C > 0$, n den bağımsız bir sabittir.

İspat. $g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ olsun. Lemma 3.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &\leq E_n(f - g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\leq \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ için sağlandığından, K -fonksiyonelinin tanımından ve Lemma 3.4 ten

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C K_r \left(f, \frac{1}{n} \right)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \Omega^r \left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0) \right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.2 (Ters Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega^r \left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0) \right) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sağlanır, burada $C > 0$, n den bağımsız bir sabittir.

İspat. $T_n \in \mathcal{T}_n$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$ da f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun. $j = 1, 2, \dots$, tamsayıları için

$$\begin{aligned} K_r \left(f, \frac{1}{n} \right)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &= \inf_{g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)} \left\{ \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \frac{1}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \\ &\leq \|f - T_{2^{j+1}}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \frac{1}{n^r} \|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.6 kullanılarak

$$\begin{aligned} \|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &\leq \|T_1^{(r)} - T_0^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{i=0}^j \|T_{2^{i+1}}^{(r)} - T_{2^i}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\leq C \left\{ \|T_1 - T_0\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} \|T_{2^{i+1}} - T_{2^i}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \\ &\leq C \left\{ E_1(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} \{ E_{2^{i+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \} \right\} \\ &\leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \\ &= C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + 2^r E_1(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{i=1}^j 2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\}. \end{aligned}$$

elde edilir.

$$2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq 2^{2r} \sum_{m=2^{i-1}+1}^{2^i} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \quad (3.4)$$

olduğundan $i \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & \|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ & \leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + 2^r E_1(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + 2^{2r} \sum_{m=2}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \\ & \leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{m=1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir. $2^j \leq n < 2^{j+1}$ olacak biçimde j seçilerek (3.4) ten

$$\begin{aligned} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} &= \frac{2^{(j+1)r} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}}{2^{(j+1)r}} \\ &\leq \frac{1}{n^r} 2^{(j+1)r} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\leq \frac{1}{n^r} \sum_{m=2^{j-1}+1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}. \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.4 ten

$$\begin{aligned} \Omega^r(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) &\leq CK_r \left(f, \frac{1}{n} \right)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\leq C E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \frac{1}{n^r} \|T_{2^{j+1}}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\leq \frac{C}{n^r} \sum_{m=2^{j-1}+1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \\ &\quad + \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{m=1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \\ &\leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4. AĞIRLIKLI MORREY UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİ- NOMLARLA YAKLAŞIM

Bu bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarının tanımı ve bu uzaylarda düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım ve K -fonksiyonlarının tanımı verilecektir. Bu bölümün ikinci kesiminde ise ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımın araştırılabilmesi için gerekli olan yardımcı lemmalar ispatlanacaktır. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonları karakterize edilecektir. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir. Ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenecektir.

$\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzayları $C^\infty(I_0)$ uzayını kapalı yoğun altuzay olarak içermez, bu $w = 1$ durumunda Triebel 2014 tarafından ispatlanmıştır. $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ yı $C^\infty(I_0)$ uzayının $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarındaki kapanışı olarak tanımlayalım. $1 < p < \infty$, $w \in A_p(I_0)$ ve $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$, trigonometrik polinomların $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarındaki kapanışı olmak üzere $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ uzayında yaklaşım teoreminin düz ve ters teoremleri ispatlanacaktır.

4.1 Ağırlıklı Morrey Uzayları

$$I_0 = [0, 2\pi], \quad I(x, r) = (x - r, x + r) \subset \mathbb{R}, \quad I_0(x, r) = I(x, r) \cap I_0$$

gösterimini kullanacağız. Ayrıca w pozitif, 2π -periyodik ve I_0 da lokal integralenebilir bir ağırlık fonksiyonudur.

w, I_0 üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. I_0 üzerinde

$$\|f\|_{L_{p,w}(I_0)} = \left(\int_{I_0} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

normu sonlu olacak biçimdeki tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L_p(I_0, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı denir.

Tanım 4.1 (Ağırlıklı Morrey Uzayları)

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} = \sup_{\substack{x \in I_0 \\ 0 < r < 2\pi}} w(I(x,r))^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_{p,w}(I_0(x,r))}$$

normu sonlu olacak biçimdeki $f \in L_p(I_0, w)$ fonksiyonlarının sınıfına ağırlıklı Morrey uzayı denir, burada

$$\|f\|_{L_{p,w}(I_0(x,r))} = \left(\int_{I_0(x,r)} |f(t)|^p w(t) dt \right)^{1/p}$$

şeklindedir.

Bu tanım ile $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzayı bir Banach uzayıdır. Eğer $w = 1$ ve $0 < \lambda < 1$ ise bu durumda $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w) = \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ olur. Eğer $\lambda = 0$ ise $L_{p,w}(I_0)$ ağırlıklı Lebesgue uzayları elde edilir. Eğer $\lambda = 1$ ise w ağırlık fonksiyonuna göre Lebesgue diferensiyellenebilme teoreminden $\mathcal{M}_{p,1}(I_0, w) = L_{\infty,w}(I_0)$ elde edilir (Torchinsky 1986).

Komori ve Shirai tarafından ispatlanan $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ uzayında M maksimal fonksiyonun sınırlılığını ifade eden aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyacağız.

Teorem 4.1 $1 < p < \infty, 0 \leq \lambda < 1$ ve $w \in A_p(I_0)$ olmak üzere $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarında M Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu sınırlıdır (Komori ve Shirai 2009).

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\Delta_t^r f(x) := \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(x + st)$, $r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1, p \geq 1$ olmak üzere her $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ için

$$\sigma_\delta^r(f)(x) := \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(x)| dt$$

olsun. Şimdi $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarında düzgünlük modülünü tanımlayalım.

Tanım 4.2 (Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Düzgünlük Modülü) $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$ ve $h > 0$ olsun. Bu durumda

$$\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) := \sup_{0 < \delta \leq \min\{2\pi, h\}} \|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}, \quad r \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanan $\Omega^r(f, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) : [0, \infty] \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ uzayındaki r -inci mertebeden düzgünlük modülü denir.

$0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$ olmak üzere Sonuç 4.3 ten her $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ için $\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) \leq c\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}$ ve her $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ için

$$\Omega^r(f_1 + f_2, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) \leq \Omega^r(f_1, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) + \Omega^r(f_2, \cdot, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w))$$

elde edilir.

Tanım 4.3 (Ağırlıklı Morrey Uzaylarında En İyi Yaklaşım) $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $p \geq 1$ için f fonksiyonunun $\mathcal{P}_n$ sınıfındaki en iyi yaklaşımı

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} := \inf_{T_n \in \mathcal{P}_n} \|f - T_n\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}$$

şeklindedir.

Tanım 4.4 (Homojen Ağırlıklı Sobolev-Morrey Uzayı) $\dot{W}^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ homojen ağırlıklı Sobolev-Morrey uzayı, I_0 da $f^{(r)}$ türevi mevcut ve

$$\|f\|_{\dot{W}^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} = \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}$$

normu sonlu olacak biçimdeki $f \in L_1^{loc}(I_0)$ fonksiyonlarının sınıfıdır.

Tanım 4.5 (Homojen Olmayan Ağırlıklı Sobolev-Morrey Uzayı) $W^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ homojen olmayan ağırlıklı Sobolev-Morrey uzayı

$$\|f\|_{W^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} := \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}$$

normu sonlu olacak biçimdeki $f \in \dot{W}^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ fonksiyonlarından oluşan homojen ağırlıklı Sobolev-Morrey uzayının alt sınıfıdır.

Eğer $\lambda = 0$ ise bu durumda $W^r \mathcal{M}_{p,0}(I_0, w) \equiv W_{p,w}^r(I_0)$ ağırlıklı Sobolev uzayına denktir ve eğer $w = 1$ ise bu durumda $W^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, 1) \equiv W_{p,\lambda}^r(I_0)$ Sobolev-Morrey uzayına denktir.

Tanım 4.6 (K -fonksiyoneli) $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p(I_0)$ ve $r \geq 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ fonksiyonu için K - fonksiyoneli

$$K_r(f, t)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} = \inf_{g \in W^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \{ \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + t^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \}, t > 0$$

olarak tanımlanır.

4.2 Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Düz ve Ters Teoremleri

Bu kesimde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımın araştırılabilmesi için gerekli olan yardımcı lemmalar ispatlanacaktır. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilecektir. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir. Ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenecektir.

Lemma 4.1 $f \in \dot{W}^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için f fonksiyonundan bağımsız $C > 0$ sabiti ile

$$\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \leq C \delta^r \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}$$

elde edilir.

İspat. $f \in \dot{W}_{p,\lambda}^r \mathcal{M}(I_0, w)$ olsun. Bu durumda $f^{(r)} \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ve

$$\Delta_t^r f(x) = \int_0^t \cdots \int_0^t f^{(r)}(x + t_1 + t_2 + \dots + t_r) dt_1 \dots dt_r$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\| \sigma_\delta^r(f) \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_0^t \cdots \int_0^t |f^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \delta^r \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta |f^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \delta^r \left\| \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\{ \frac{1}{\delta} \int_{t_1+\dots+t_{r-1}}^{t_1+\dots+t_{r-1}+\delta} |f^{(r)}(\cdot + u)| du \right\} dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \delta^r \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta+(r-1)\delta} |f^{(r)}(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} dt_1 \dots dt_{r-1} \\
&= \delta^r \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{r\delta} |f^{(r)}(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq C \delta^r \|M f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq C \delta^r \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}.
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.1 $f \in \dot{W}_{p,w}^r(I_0)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için f fonksiyonundan bağımsız $C > 0$ sabiti ile

$$\|\sigma_\delta^r(f)\|_{L_{p,w}(I_0)} \leq C \delta^r \|f\|_{\dot{W}_{p,w}^r(I_0)}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2 $f \in \dot{W}_{p,\lambda}^r(I_0)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olur. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için f fonksiyonundan bağımsız $C > 0$ sabiti ile

$$\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \delta^r \|f\|_{\dot{W}_{p,\lambda}^r(I_0)}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3 $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için f fonksiyonundan bağımsız $C > 0$ sabiti ile

$$\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}$$

elde edilir.

İspat. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(\cdot + st) \right| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot + st)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot + st)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{s\delta} \int_0^{s\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{r\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + r2^r \left\| \frac{1}{r\delta} \int_0^{r\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathbb{R}$ de f fonksiyonu 2π -periyodik olduğundan genelliği bozmaksızın $r\delta < 2\pi$ alabiliriz.

Teorem 4.1 den

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)} + r2^r C(p) \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&= C(p, r) \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki lemma $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarında K -fonksiyonelinin düzgünlük modülü yardımıyla karakterizasyonunu ifade eder.

Lemma 4.2 $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ ve $0 < h \leq c$ için $c, C > 0$ sabiti ile

$$c \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) \leq K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w))$$

elde edilir.

İspat. $g \in W^r \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ olsun. Bu durumda $g^{(r)} \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ve $g^{(r)} \in L_1(I_0)$ olur. Böylece

$$\Delta_t^r g(x) = \int_0^t \cdots \int_0^t g^{(r)}(x + t_1 + t_2 + \dots + t_r) dt_1 \dots dt_r$$

yazabiliriz. Minkowski eşitsizliği ve Teorem 4.1 den

$$\begin{aligned}
\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) &:= \sup_{|\delta| \leq h} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r g(x)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \\
&\leq \sup_{|\delta| \leq h} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left\| \int_0^t \cdots \int_0^t |g^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} dt \\
&\leq h^r \left\| \frac{1}{h^r} \int_0^h \cdots \int_0^h |g^{(r)}(\cdot + t_1 + t_2 + \dots + t_r)| dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \\
&= h^r \left\| \frac{1}{h^{r-1}} \int_0^h \cdots \int_0^h \left\{ \frac{1}{h} \int_{t_1+\dots+t_{r-1}}^{t_1+\dots+t_{r-1}+h} |g^{(r)}(\cdot + u)| du \right\} dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \\
&\leq h^r \frac{1}{h^{r-1}} \int_0^h \cdots \int_0^h \left\| \frac{1}{h} \int_0^{h+(r-1)h} |g^{(r)}(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} dt_1 \dots dt_{r-1} \\
&= h^r \left\| \frac{1}{h} \int_0^{rh} |g^{(r)}(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \\
&\leq c_r h^r \|Mg^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \leq c_r h^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla herhangi bir $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ için $K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}$ fonksiyonelinin tanımından

$$\begin{aligned}
\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) &\leq \Omega^r(f - g, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) + \Omega^r(g, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) \\
&\leq c(\|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + h^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}) \\
&\leq cK_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ters eşitsizliği ispatlamak için Steklov tipi dönüşümü tanımlayalım. $r \geq 1$, $h > 0$ olmak üzere her $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ için Steklov tipi dönüşüm

$$\begin{aligned}
f_{r,h}(x) : \\
= \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f\left(x + \frac{r-s}{r}(t_1 + \dots + t_r)\right) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
& |f_{r,h}(x) - f(x)| \\
&= \left| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f\left(x + \frac{r-s}{r}(t_1 + \dots + t_r)\right) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta \right| \\
&= \left| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f\left(x + \frac{s}{r}(t_1 + \dots + t_r)\right) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta \right| \\
&= \left| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(\frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \Delta_{\frac{t_1+\dots+t_r}{r}}^r f(x) dt_1 \dots dt_r \right) d\delta \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Norm alarak genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|f_{r,h} - f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \Delta_{\frac{t_1+\dots+t_r}{r}}^r f(x) dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} d\delta \\
&\leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \Delta_{\frac{t_1+\dots+t_r}{r}}^r f(x) dt_1 \dots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&= \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left(\frac{1}{\delta} \int_{t_1+\dots+t_{r-1}}^{\delta+t_1+\dots+t_{r-1}} \Delta_{\frac{t}{r}}^r f(x) dt \right) dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta+(r-1)\delta} |\Delta_{\frac{t}{r}}^r f(x)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} dt_1 \dots dt_{r-1} \\
&\leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{r\delta} |\Delta_{\frac{t}{r}}^r f(x)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq r \sup_{0 \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_u^r f(x)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&= r\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w))
\end{aligned}$$

olur. $f_{r,h}$ fonksiyonun diferensiyellenmesiyle

$$f_{r,h}^{(r)}(x) = \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x) d\delta.$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
|f_{r,h}^{(r)}(x)| &\leq \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r |\Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x)| d\delta \\
&= \frac{c_r}{h^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \frac{1}{h} \int_0^h |\Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x)| d\delta \\
&= \frac{c_r}{h^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \frac{1}{\frac{r-s}{r}h} \int_0^{\frac{r-s}{r}h} |\Delta_u^r f(x)| du.
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\|f_{r,h}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq c_r h^{-r} \|\sigma_{\frac{r-s}{r}h}^r f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\leq c_r h^{-r} \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w))\end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece

$$\begin{aligned}K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq \|f - f_{r,h}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + h^r \|f_{r,h}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\leq C \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w))\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} a_t \cos tx + b_t \sin tx \quad (4.1)$$

ve $S_n(x, g)$ de n -inci kısmi toplamı olsun. $w \in A_1(I_0)$ koşulu altında Lemma 4.1 in ispat yöntemi kullanılarak ve Hunt vd. 1973, Hunt ve Young 1974 te ağırlıklı Lebesgue uzaylarında verilen uygun sonuçlar uygulanarak

$$\|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}, \quad (4.2)$$

$$E_n(\tilde{g})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}, \quad (4.3)$$

elde edilir, burada $\tilde{g}$, g fonksiyonunun eşleniğidir.

Lemma 4.3 $w \in A_p(I_0)$ ve $r \geq 1$ olsun. Bu durumda $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir $g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ için $C = C(p, \lambda, w, r)$ sabiti ile

$$E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir.

İspat. $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$g(x) \sim \sum_{t=0}^{\infty} a_t \cos tx + b_t \sin tx$$

ve $S_n(x, f)$ de n -inci kısmi toplamı olsun. Bu durumda

$$\tilde{g}(x) \sim \sum_{t=0}^{\infty} b_t \cos tx - a_t \sin tx$$

olur.

$$B_t(x, g) := a_t \cos tx + b_t \sin tx, \quad t \in \mathbb{N}$$

dersek $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ normunda $g(x) = \sum_{t=0}^{\infty} B_t(x, g)$ olur.

$$\begin{aligned} B_t(x, g) &= a_t \cos tx + b_t \sin tx \\ &= a_t \cos \left(tx + \frac{r\pi}{2} - \frac{r\pi}{2} \right) + b_t \sin \left(tx + \frac{r\pi}{2} - \frac{r\pi}{2} \right) \\ &= \cos \frac{r\pi}{2} \left[a_t \cos t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) + b_t \sin t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) \right] \\ &\quad + \sin \frac{r\pi}{2} \left[a_t \sin t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) - b_t \cos t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) \right] \\ &= B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right) \cos \frac{r\pi}{2} + B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, \tilde{g} \right) \sin \frac{r\pi}{2} \end{aligned}$$

ve

$$B_t(x, g^{(r)}) = t^r B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} B_t(x, g) &= B_0(x, g) + \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right) + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, \tilde{g} \right) \\ &= B_0(x, g) + \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(x) - S_n(x, g) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} B_t(x, g) \\ &= \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)}) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} \left[S_t(x, g^{(r)}) - S_{t-1}(x, g^{(r)}) \right] \\ &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} \left\{ \left[S_t(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x) \right] - \left[S_{t-1}(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \left[S_t(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x) \right] - \frac{1}{(n+1)^r} \left[S_n(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x) \right]$$

olması ve

$$\begin{aligned} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)}) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \left[S_t(x, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}(x) \right] \\ &\quad - \frac{1}{(n+1)^r} \left[S_n(x, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}(x) \right], \end{aligned}$$

göz önüne alınırsa (4.2) den

$$\begin{aligned} \|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \|S_t(\cdot, g^{(r)}) - g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^r} \|S_n(\cdot, g^{(r)}) - g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\quad + \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \|S_t(\cdot, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^r} \|S_n(\cdot, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\leq C \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) E_t(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \frac{1}{(n+1)^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\} \\ &\quad + C \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) E_t(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \frac{1}{(n+1)^r} E_n(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Basit hesaplamalar ve (4.3) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\leq C E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) + \frac{1}{(n+1)^r} \right\} \\ &\quad + C E_n(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) + \frac{1}{(n+1)^r} \right\} \\ &\leq \frac{C}{(n+1)^r} E_n(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}. \end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece

$$\begin{aligned} E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq \|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\leq \frac{C}{n^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki lemma ağırlıklı Morrey uzaylarında Bernstein eşitsizliğini ifade etmektedir.

Lemma 4.4 (Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Bernstein Eşitsizliği) $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $w \in A_p(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda herhangi bir T_n trigonometrik polinomu ve $k \in \mathbb{N}$ için n den bağımsız C sabiti ile

$$\|T_n^{(k)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C n^k \|T_n\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

elde edilir.

İspat. İspat Ky 1993 teki $L_p(I_0, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Bernstein eşitsizliğinin ispatı kullanılarak Lemma 4.1 in ispatına benzer biçimde elde edilir. ■

Teorem 4.2 (Düz Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için f ve n den bağımsız $C > 0$ ile

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C \Omega^r \left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w) \right), \quad n \geq r$$

elde edilir.

İspat. $g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ olsun. Lemma 4.3 ten

$$\begin{aligned} E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq E_n(f - g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + E_n(g)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\ &\leq \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik her $g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ için sağlandığından K -fonksiyonelinin tanımından ve Lemma 4.2 den

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C K_r \left(f, \frac{1}{n} \right)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq C \Omega^r \left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w) \right)$$

gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.4 $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)\right), \quad n \geq r$$

gerçeklenir, burada $C > 0$, n den bağımsız bir sabittir (Çakır vd. 2019).

$L_p(I_0)$ Lebesgue uzaylarında

$$\sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^r f(x)\|_{L_p(I_0)}, \quad h > 0, \quad r \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanan düzgünlük modülü için benzer sonuç Stechkin (Stechkin 1951) tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca $w \in A_p(I_0)$ olmak üzere $L_p(I_0, w) \equiv L_{p,w}(I_0)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında benzer sonuç Ky (Ky 1993) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.3 (Ters Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için f ve n den bağımsız $C > 0$ sabiti ile

$$\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)\right) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir.

İspat. $T_n \in \mathcal{P}_n$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$ uzayında f fonksiyonuna en iyi yakınsayan polinom olsun. Herhangi bir $j = 1, 2, \dots$, tamsayısı için

$$\begin{aligned} K_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} &= \inf_{g \in W^{(r)} \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \left\{ \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \frac{1}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \right\} \\ &\leq \|f - T_{2^{j+1}}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \frac{1}{n^r} \|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \end{aligned}$$

olur. Lemma 4.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq \|T_1^{(r)} - T_0^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{i=0}^j \|T_{2^{i+1}}^{(r)} - T_{2^i}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \\
&\leq C \left\{ \|T_1 - T_0\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} \|T_{2^{i+1}} - T_{2^i}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\} \\
&\leq C \left\{ E_1(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} \left\{ E_{2^{i+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\} \right\} \\
&\leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\} \\
&= C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + 2^r E_1(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{i=1}^j 2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq 2^{2r} \sum_{m=2^{i-1}+1}^{2^i} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \quad (4.4)$$

olduğundan $i \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &\leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + 2^r E_1(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + 2^{2r} \sum_{m=2}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\} \\
&\leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} + \sum_{m=1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \right\}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. $2^j \leq n < 2^{j+1}$ olacak biçimde j seçerek 4.4 ten

$$\begin{aligned}
E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} &= \frac{2^{(j+1)r} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}}{2^{(j+1)r}} \\
&\leq \frac{1}{n^r} 2^{(j+1)r} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)} \leq \frac{1}{n^r} \sum_{m=2^{j-1}+1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0,w)}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned}
\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)\right) &\leq CK_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \\
&\leq CE_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \frac{1}{n^r} \|T_{2^{j+1}}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \\
&\leq \frac{C}{n^r} \sum_{m=2^{j-1}+1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \\
&\quad + \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \right\} \\
&\leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.5 $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$, $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)\right) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir, burada $C > 0$ f ve n den bağımsız bir sabittir (Çakır vd. 2019).

Sonuç 4.6 $f \in L_{p,w}(I_0)$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, L_{p,w}(I_0)\right) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{L_{p,w}(I_0)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{L_{p,w}(I_0)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir, burada $C > 0$ f ve n den bağımsız bir sabittir (Ky 1993).

$L_p(I_0)$ Lebesgue uzaylarında benzer sonuç A.F. Timan (Timan 1963), A.F. Timan ve M.F. Timan (Timan, A.F. ve Timan, M.F. 1950) tarafından ispatlanmıştır. $w \in A_p$ olmak üzere $L_p(I_0, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarında benzer sonuç farklı düzgünlük modülü kullanılarak Hacıyeva (Hacıyeva 1986) tarafından ispatlanmıştır.

5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Bu bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları tanımlanacaktır. Bu uzaylarda düzgünlük modülü ve en iyi yaklaşımın tanımı ile bazı temel kavramlar verilecektir. İkinci kesiminde ise yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremlerinin ispatı için ihtiyaç duyulan bazı lemmalar verilecektir. K -fonksiyonellerini tanımlanıp, düzgünlük modülü yardımıyla karakterize edilecektir. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilecektir.

Trigonometrik polinomların sınıfı $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında yoğun değildir. Bundan dolayı bu uzaylarda yaklaşım teorisinin temel problemlerinin çözümü mümkün değildir. Bu yüzden bu bölümün ikinci kesiminde yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremlerinin ispatı $\widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$, $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomların kapanışı olmak üzere $\widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ uzaylarında ispatlanacaktır.

5.1 Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzayları

$I_0 = [0, 2\pi]$ ve $p(\cdot) : I_0 \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyon olsun.

$p_- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in I_0} p(x) > 1$, $p_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in I_0} p(x) < \infty$ olmak üzere

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty \quad (5.1)$$

şeklindedir.

Tanım 5.1 Eğer

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{-\log |x - y|}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2} \quad x, y \in I_0 \quad (5.2)$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa bu durumda $p(x)$ lokal logaritmik Hölder şartını sağlıyor denir, burada $A = A(p) > 0$, x ve y den bağımsızdır.

Tanım 5.2 w , I_0 da pozitif 2π -periyodik ve lokal integrallenebilen ağırlık fonksiyonudur. Eğer

$$\sup_{I_0} |I_0|^{-1} \|w\|_{L_{p(\cdot)}(I_0(x,r))} \|w^{-1}\|_{L_{p'(\cdot)}(I_0(x,r))} < \infty$$

eşitsizliği sağlanıyorsa w ağırlık fonksiyonu $A_{p(\cdot)}(I_0)$ Muckenhoupt sınıfındandır denir (Diening 2005, Kopaliani 2007), burada $L_{p(\cdot)}(I_0)$

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)}I_0} := \inf_{\eta > 0} \left\{ \int_{I_0} \left| \frac{f(x)}{\eta} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

normu ile değişken üslü Lebesgue uzaylarıdır ve $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$ dir.

$L_{p(\cdot)}(I_0, w)$ ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)}(I_0, w)} = \|fw\|_{L_{p(\cdot)}(I_0)}$$

olacak biçimdeki 2π -periyodik ölçülebilir fonksiyonların sınıfıdır.

$\lambda(\cdot) : I_0 \rightarrow [0, 1]$ ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$0 \leq \lambda_- \equiv \inf_{x \in I_0} \lambda(x) \leq \sup_{x \in I_0} \lambda(x) \equiv \lambda_+ \leq 1 \quad (5.3)$$

biçimindedir.

İki parametre ile donatılmış Morrey uzayları, lokal regülerliği ve global regülerliği Lebesgue uzaylarından daha kesin olarak tanımlar. p lokal regülerliği, λ ise global regülerliği tanımlar. $f \in L^1[0, 2\pi]$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$\int_{[x-1, x+1] \cap [0, 2\pi]} \frac{|f(t)|}{|x-t|} dt < \infty \quad (5.4)$$

Dini koşulunu sağlayan x noktalarında $f(x)$ e yakınsar. Fourier serisinin yakınsaması da dahil olmak üzere birçok yaklaşım problemi, Dini kriterinden görüldüğü gibi fonksiyonların lokal özelliğine dayanır. Fourier serisi örneğinden de anlaşılacağı gibi, p nin önemli bir rol oynadığı görülmektedir. Bu bölümde $(\cdot)$ gösterimini parametrenin bulunduğu yere göre değişiklik gösterdiğini ifade etmek için kullanacağız. $p(\cdot)$ nın sürekli olması gerekirken $\lambda(\cdot)$ nın sadece ölçülebilir ve sınırlı

olması gerekmektedir, bu ise lokal regülerliğin yaklaşım teoride gerekli olduğunu gösterir (Maeda vd. 2013, Teorem 4.4, Sawano ve Shimomura 2013, Teorem 4.1, Sawano ve Shimomura 2014, Teorem 3.3).

Tanım 5.3 (Değişken Üslü Morrey Uzayları) $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$ değişken üslü Morrey uzayları

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) = \sup_{\substack{x \in I_0 \\ 0 < t < 2\pi}} t^{-\lambda(x)} \int_{I_0(x,r)} |f(y)|^{p(y)} dy \quad (5.5)$$

modülü sonlu olacak biçimde tüm 2π -periyodik ölçülebilir fonksiyonların kümesidir, bu uzaydaki norm ise

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)} = \|f\|_1 = \inf \left\{ \eta > 0 : I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) < 1 \right\} \quad (5.6)$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$ uzaylarındaki bir diğer norm ise

$$\|f\|_2 = \sup_{\substack{x \in I_0 \\ 0 < t < 2\pi}} t^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \|f \chi_{I_0(x,r)}\|_{L_{p(\cdot)}(I_0)} \quad (5.7)$$

şeklindedir.

Lemma 5.1 $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$ için

$$\|f\|_1 = \|f\|_2$$

sağlanır (Almeida vd. 2008, Lemma 3).

Değişken üslü Morrey uzayları ile ilgili daha fazla bilgi Almeida vd. 2008, Guliyev vd. 2010, Izuki 2014, Rafeiro 2013 makalelerinde yer almaktadır.

Tanım 5.4 (Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzayları) $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları I_0 da

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0,w)} = \sup_{\substack{x \in I_0 \\ 0 < r < 2\pi}} r^{\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \|w\|_{L_{p(\cdot)}(I_0(x,r))}^{-1} \|f \chi_{I_0(x,r)}\|_{L_{p(\cdot)}(I_0,w)} \quad (5.8)$$

normu sonlu olacak biçimde 2π -periyodik integrallenebilen f fonksiyonlarının kümesidir.

Lemma 5.2 $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \quad (5.9)$$

eşitsizliği gerçekleşir, burada C , f fonksiyonundan bağımsız pozitif sabittir (Guliyev vd. 2018, Sonuç 3.1).

Tanım 5.5 (Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Düzgünlük Modülü) $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ olsun, $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. $r \in \mathbb{N}$ ve $\delta, h > 0$ olmak üzere

$$\Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) = \sup_{0 < \delta \leq \min\{2\pi, h\}} \|\sigma_\delta^r(f)\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \quad (5.10)$$

biçiminde tanımlanan $\Omega^r(f, \cdot; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) : [0, \infty] \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonuna $\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ uzayında f fonksiyonun r -inci mertebeden düzgünlük modülü denir, burada

$$\Delta_t^r f(x) := \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(x + st) \quad (5.11)$$

olmak üzere

$$\sigma_\delta^r(f)(x) := \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(x)| dt \quad (5.12)$$

şeklindedir. Böylece

$$\Omega^1(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) = \omega(f, h)$$

olur.

$\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda Lemma 5.4 ten her $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ için

$$\Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \leq c\|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \quad (5.13)$$

ve her $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ için

$$\Omega^r(f_1 + f_2, \cdot, \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \leq \Omega^r(f_1, \cdot, \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) + \Omega^r(f_2, \cdot, \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \quad (5.14)$$

elde edilir.

Tanım 5.6 (En İyi Yaklaşım) $\lambda(\cdot)$, (5.3) ve $p(\cdot)$ (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlamak üzere $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ için

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} = \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}$$

şeklinde tanımlanır.

5.2 Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Yaklaşım Teorisinin Düz ve Ters Teoremleri

Bu kesimde yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremlerinin ispatı için ihtiyaç duyulan bazı lemmalar verilecektir. $\widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$, $\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomların kapamış olmak üzere $\widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ uzaylarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri ispatlanacaktır.

Tanım 5.7 $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ ve $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. $\dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)$ homojen Sobolev-Morrey uzayı

$$\|f\|_{\dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)} = \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} < \infty$$

olacak biçimde I_0 da $f^{(r)}$ zayıf türevi mevcut olan tüm $f \in L_1^{loc}(I_0, w)$ fonksiyonlarının sınıfıdır.

$W_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0)$ homojen olmayan Sobolev-Morrey uzayı

$$\|f\|_{W_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)} := \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} < \infty$$

olacak biçimde tüm $f \in \dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)$ fonksiyonlarından oluşan Sobolev-Morrey uzayının alt sınıfıdır.

$f \in \dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0)$ olsun. Her $x \in I_0$, $r \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$\Delta_t^r f(x) = \int_0^t \cdots \int_0^t f^{(r)}(x + t_1 + \cdots + t_r) dt_1 \cdots dt_r \quad (5.15)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki lemmayı ispatlamak için (5.15) i kullanacağız.

Lemma 5.3 $f \in \dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. Eğer $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlıyorsa bu durumda $h > 0$ için

$$\Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \leq C\delta^r \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}, \quad \delta > 0$$

gerçeklenir.

İspat. $f \in \dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)$ olsun, bu durumda $f^{(r)} \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ olur.

$\Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w))$ tanımında (5.15) kullanılarak ve r kere genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \Delta_t^r f(\cdot) \right| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ & \leq \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_0^t \cdots \int_0^t \left| f^{(r)}(\cdot + t_1 + \cdots + t_r) \right| dt_1 \cdots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ & \leq \delta^r \left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left| f^{(r)}(\cdot + t_1 + \cdots + t_r) \right| dt_1 \cdots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \end{aligned}$$

gerçeklenir. $u = t_1 + t_2 + \cdots + t_r$ dersek, bu durumda

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \Delta_t^r f(\cdot) \right| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ & \leq \delta^r \left\| \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\{ \frac{1}{\delta} \int_{t_2+\cdots+t_r}^{\delta+t_2+\cdots+t_r} \left| f^{(r)}(\cdot + u) \right| du \right\} dt_2 \cdots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ & \leq r \delta^r \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \left\| \frac{1}{r\delta} \int_0^{r\delta} \left| f^{(r)}(\cdot + u) \right| du \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} dt_2 \cdots dt_r \\ & = \delta^r \left\| \frac{1}{r\delta} \int_0^{r\delta} \left| f^{(r)}(\cdot + u) \right| du \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ & \leq r \delta^r \left\| M f^{(r)} \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \end{aligned}$$

sağlanır. Maksimal fonksiyonun değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığını ifade eden (5.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \Delta_t^r f(\cdot) \right| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C(r) \delta^r \|f^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 5.4 $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. Eğer $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $h > 0$ için

$$\Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \leq 2^r \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}$$

elde edilir.

İspat. (5.10) ve (5.11) den üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \\ &= \sup_{0 < \delta \leq \min(2\pi, h)} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left| \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(\cdot + st) \right| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq \sup_{0 < \delta \leq \min(2\pi, h)} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot + st)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq \sup_{0 < \delta \leq \min(2\pi, h)} \left\{ \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |f(\cdot + st)| dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &= \sup_{0 < \delta \leq \min(2\pi, h)} \left\{ \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{s\delta} \int_0^{s\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &\leq \sup_{0 < \delta \leq \min(2\pi, h)} \left\{ \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^{r\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &\leq \sup_{0 < \delta \leq \min(2\pi, h)} \left\{ \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + r 2^r \left\| \frac{1}{r\delta} \int_0^{r\delta} |f(\cdot + u)| du \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbb{R}$ de f fonksiyonu 2π -periyodik olduğundan genelliği bozmaksızın $r\delta < 2\pi$ alabiliriz ve maksimal fonksiyonun değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığını ifade eden (5.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) &\leq \sup_{0 < \delta \leq \min(2\pi, h)} \left\{ \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + r 2^r C \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 5.8 (K -fonksiyoneli) $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $r \geq 1$ için K -fonksiyoneli

$$K_r(f, t)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} := \inf_{g \in W_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)} \left\{ \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + t^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıdaki lemma $h > 0$ için K -fonksiyoneli $K_r(f, t)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}$ ile $\Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w))$ düzgünlük modülünün denk olduğunu göstermektedir.

Lemma 5.5 $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. Eğer $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlıyorsa bu durumda $h > 0$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} c \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \\ \leq K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)), \end{aligned}$$

sağlanır, burada $c, C > 0$ sabitleri f ve h den bağımsızdır.

İspat. $g \in W_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)$ olsun. $K_r(f, t)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}$ fonksiyonelinin tanımı göz önüne alındığında, her $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ için Lemma 5.3 ve Lemma 5.4 ten

$$\begin{aligned} \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) &\leq \Omega^r(f - g, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) + \Omega^r(g, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \\ &\leq C(p(\cdot)) \left(\|f - g\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \delta^r \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right) \\ &\leq 2C(p(\cdot)) K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Eşitsizliğin diğer tarafını ispatlamak için Steklov tipi dönüşümü tanımlayalım. Her $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $h > 0$ için

$$f_{r,h}(x) := \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \underbrace{\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta}_{r\text{-kez}} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f\left(x + \frac{r-s}{r}(t_1 + \cdots + t_r)\right) dt_1 \cdots dt_r d\delta$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\|f_{r,h} - f\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &= \left\| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \underbrace{\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta}_{r\text{-kez}} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f\left(x + \frac{r-s}{r}(t_1 + \cdots + t_r)\right) dt_1 \cdots dt_r d\delta \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &= \left\| \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \underbrace{\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta}_{r\text{-kez}} \Delta_{\frac{t_1 + \cdots + t_r}{r}}^r f(\cdot) dt_1 \cdots dt_r d\delta \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^r} \underbrace{\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta}_{r\text{-kez}} \Delta_{\frac{t_1 + \cdots + t_r}{r}}^r f(\cdot) dt_1 \cdots dt_r \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $t = t_1 + \dots + t_r$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left\| f_{r,h} - f \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
& \leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^r} \underbrace{\int_0^\delta \dots \int_{t_1 + \dots + t_{r-1}}^{\delta + t_1 + \dots + t_{r-1}} \Delta_{\frac{t}{r}}^r f(\cdot) dt}_{r\text{-kez}} dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
& \leq \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^r} \underbrace{\int_0^\delta \dots \int_0^{\delta} \Delta_{\frac{t}{r}}^r f(\cdot) dt}_{r\text{-kez}} dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
& = r \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \left\| \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \dots \int_0^\delta \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Delta_t^r f(\cdot) dt \right\} dt_1 \dots dt_{r-1} \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

Değişken üslü Lebesgue uzayı için Minkowski integral eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left\| f_{r,h} - f \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
& \leq rC(p(\cdot)) \sup_{\frac{h}{2} \leq \delta \leq h} \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_0^\delta \dots \int_0^\delta \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Delta_t^r f(\cdot) dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} dt_1 \dots dt_{r-1} \\
& \leq C(r, p(\cdot)) \sup_{0 < \delta < \min(2\pi, h)} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Delta_t^r f(\cdot) dt \right\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
& \leq C(r, p(\cdot)) \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Aynı zamanda, $f_{r,h}(x)$, x e göre diferensiyellenirse

$$\begin{aligned}
f_{r,h}^{(r-1)}(x) &= \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} \int_0^\delta \left(\frac{r}{r-s} \right)^{r-1} \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^{r-1} f\left(x + \frac{r-s}{r}t_r\right) dt_r d\delta \\
&= \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} \int_0^{\frac{r-s}{r}\delta} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^{r-1} f(x+t) dt d\delta \\
&= \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} \int_x^{x+\frac{r-s}{r}\delta} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^{r-1} f(u) du d\delta
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$f_{r,h}^{(r)}(x) = \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x) d\delta$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\left| f_{r,h}^{(r)}(x) \right| &\leq \frac{2}{h} \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{1}{\delta^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \left| \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x) \right| d\delta \\
&\leq \frac{2^{r+1}}{h^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \frac{1}{h} \int_0^h \left| \Delta_{\frac{r-s}{r}\delta}^r f(x) \right| d\delta \\
&\leq \frac{2^{r+1}}{h^r} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \left(\frac{r}{r-s} \right)^r \frac{1}{\frac{r-s}{r}h} \int_0^{\frac{r-s}{r}h} \left| \Delta_t^r f(x) \right| dt
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

$\Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w))$ tanımından

$$\|f_{r,h}^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C(p, r) h^{-r} \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w))$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} &\leq \|f - f_{r,h}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + h^r \|f_{r,h}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
&\leq C \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w))
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} a_t \cos tx + b_t \sin tx \quad (5.16)$$

$g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ fonksiyonun Fourier serisi olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın ve $S_n(x, g)$ n -inci kısmi toplamlar dizisi olsun. $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ koşulu altında Lemma 5.3 ün ispat metodu kullanılarak ve değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzaylarında verilen Israfilov ve Testici 2018b deki uygun sonuç uygulanarak

$$\|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq c E_n(g)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \quad (5.17)$$

$$E_n(\tilde{g})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq c E_n(g)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \quad (5.18)$$

elde edilir, burada $\tilde{g}$, g fonksiyonunun eşlenik fonksiyonudur.

Lemma 5.6 $g \in \dot{W}^r \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$, $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ ve $r \geq 1$ olsun. Eğer $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlıyorsa bu durumda

$$E_n(g)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gerçeklenir, burada C sabiti g ve n den bağımsızdır.

İspat.

$$g(x) \sim \sum_{t=0}^{\infty} a_t \cos tx + b_t \sin tx$$

$g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ nın Fourier serisi ve $S_n(x, g)$ de kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda

$$\tilde{g}(x) \sim \sum_{t=0}^{\infty} b_t \cos tx - a_t \sin tx$$

olur.

$$B_t(x, g) := a_t \cos tx + b_t \sin tx, \quad t \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlayalım. O halde $\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ normu ile $g(x) = \sum_{t=0}^{\infty} B_t(x, g)$ olur.

$$\begin{aligned} B_t(x, g) &= a_t \cos tx + b_t \sin tx \\ &= a_t \cos \left(tx + \frac{r\pi}{2} - \frac{r\pi}{2} \right) + b_t \sin \left(tx + \frac{r\pi}{2} - \frac{r\pi}{2} \right) \\ &= \cos \frac{r\pi}{2} \left[a_t \cos t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) + b_t \sin t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) \right] \\ &\quad + \sin \frac{r\pi}{2} \left[a_t \sin t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) - b_t \cos t \left(x + \frac{r\pi}{2t} \right) \right] \\ &= B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right) \cos \frac{r\pi}{2} + B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, \tilde{g} \right) \sin \frac{r\pi}{2} \end{aligned}$$

ve

$$B_t \left(x, g^{(r)} \right) = t^r B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} B_t(x, g) &= B_0(x, g) + \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, g \right) + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} B_t \left(x + \frac{r\pi}{2t}, \tilde{g} \right) \\ &= B_0(x, g) + \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t \left(x, g^{(r)} \right) + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t \left(x, \tilde{g}^{(r)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(x) - S_n(x, g) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} B_t(x, g) \\ &= \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)}) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, g^{(r)}) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} [S_t(x, g^{(r)}) - S_{t-1}(x, g^{(r)})] \\ &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} \left\{ [S_t(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] - [S_{t-1}(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] \right\} \\ &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) [S_t(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] - \frac{1}{(n+1)^r} [S_n(x, g^{(r)}) - g^{(r)}(x)] \end{aligned}$$

olması ve

$$\begin{aligned} \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{t^r} B_t(x, \tilde{g}^{(r)}) &= \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) [S_t(x, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}(x)] \\ &\quad - \frac{1}{(n+1)^r} [S_n(x, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}(x)] \end{aligned}$$

olması göz önüne alınırsa (5.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} &\leq \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \|S_t(\cdot, g^{(r)}) - g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^r} \|S_n(\cdot, g^{(r)}) - g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\quad + \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) \|S_t(\cdot, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^r} \|S_n(\cdot, \tilde{g}^{(r)}) - \tilde{g}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq C \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) E_t(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \frac{1}{(n+1)^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &\quad + C \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) E_t(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \frac{1}{(n+1)^r} E_n(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. (5.18) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
& \leq C E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) + \frac{1}{(n+1)^r} \right\} \\
& + C E_n(\tilde{g}^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{t^r} - \frac{1}{(t+1)^r} \right) + \frac{1}{(n+1)^r} \right\} \\
& \leq \frac{C}{(n+1)^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece

$$\begin{aligned}
E_n(g)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} & \leq \|g - S_n(\cdot, g)\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\
& \leq \frac{C}{n^r} E_n(g^{(r)})_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında Bernstein eşitsizliğini vereceğiz.

S.N. Bernstein 1912 yılında trigonometrik polinomların L_∞ normları için kendi adıyla anılan eşitsizliklerin ilkinin ispatlamıştır. Akgun 2011b de yer alan eşitsizliğin genel hali herhangi bir $T_n \in \mathcal{T}_n$ için

$$\|T_n^{(k)}\|_{L_{p(\cdot)}(I_0, w)} \leq C n^k \|T_n\|_{L_{p(\cdot)}(I_0, w)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

şeklindedir, burada $p(\cdot)$, (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlamaktadır.

Aşağıdaki Lemmada değişken üslü ağırlıklı Morrey uzaylarında Bernstein eşitsizliği ifade edilecektir:

Lemma 5.7 (Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Bernstein Eşitsizliği) $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. Bu durumda her $T_n \in \mathcal{T}_n$ trigonometrik polinomu ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|T_n^{(k)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C n^k \|T_n\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gerçeklenir, burada C sabiti n den bağımsızdır.

İspat. İspat Israfilov ve Testici 2018b, Lemma 5 te ispatlanan $L_{p(\cdot)}(I_0, w)$ da Bernstein eşitsizliği kullanılarak Lemma 5.3 dekinde benzer şekilde elde edilir. ■

Teorem 5.1 (Düz Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C \Omega^r\left(f, \frac{1}{n}; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

gerçeklenir, burada $C > 0$ sabiti f ve n den bağımsızdır.

İspat. $g \in \dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)$ olsun. Lemma 5.6 ten

$$\begin{aligned} E_n(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} &\leq E_n(f - g)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + E_n(g)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \frac{C}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $g \in \dot{W}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)$ için sağlandığından K -fonksiyonelinin tanımından ve Lemma 5.5 ten

$$\begin{aligned} E_n(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} &\leq CK_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq C\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)\right) \end{aligned}$$

geçerlenir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.1 $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0)$ olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0)} \leq C\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir, burada $C > 0$, f ve n den bağımsız bir sabittir (Guliyev vd. 2019).

Teorem 5.2 (Ters Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)\right) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\}$$

elde edilir, burada $n \in \mathbb{N}$ ve $C > 0$ sabiti f ve n den bağımsızdır.

İspat. $T_n \in \mathcal{T}_n$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ uzayında f fonksiyonuna en iyi yakınsayan polinom olsun. Herhangi bir $j = 1, 2, \dots$, tamsayısı için K -fonksiyonelinin tanımından

$$\begin{aligned} & K_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &= \inf_{g \in W_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^r(I_0, w)} \left\{ \|f - g\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \frac{1}{n^r} \|g^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &\leq \|f - T_{2^{j+1}}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \frac{1}{n^r} \|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 5.7 kullanılarak

$$\begin{aligned} \|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} &\leq \|T_1^{(r)} - T_0^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{i=0}^j \|T_{2^{i+1}}^{(r)} - T_{2^i}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq C \left\{ \|T_1 - T_0\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} \|T_{2^{i+1}} - T_{2^i}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &\leq C \left\{ E_1(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} \left\{ E_{2^{i+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \right\} \\ &\leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{i=0}^j 2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &= C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + 2^r E_1(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{i=1}^j 2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$2^{(i+1)r} E_{2^i}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq 2^{2r} \sum_{m=2^{i-1}+1}^{2^i} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \quad (5.19)$$

olduğundan her $i \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & \|T_{2^{j+1}}^{(r)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + 2^r E_1(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + 2^{2r} \sum_{m=2}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &\leq C \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir. $2^j \leq n < 2^{j+1}$ olacak biçimde j seçerek 5.19 dan

$$\begin{aligned} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} &= \frac{2^{(j+1)r} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}}{2^{(j+1)r}} \\ &\leq \frac{1}{n^r} 2^{(j+1)r} E_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq \frac{1}{n^r} \sum_{m=2^{j-1}+1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)}. \end{aligned}$$

sağlanır. Lemma 5.5 ten

$$\begin{aligned} \Omega^r\left(f, \frac{1}{n}; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)\right) &\leq CK_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq CE_{2^{j+1}}(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \frac{1}{n^r} \|T_{2^{j+1}}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\leq \frac{C}{n^r} \sum_{2^{j-1}+1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \\ &\quad + \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^{2^j} m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\} \\ &\leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\}. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.2 $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0)$ olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0)\right) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0)} \right\}$$

sağlanır, burada $n \in \mathbb{N}$ ve $C > 0$ sabiti f ve n den bağımsızdır (Guliyev vd. 2019).

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezin üçüncü bölümünün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarında düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım ve K -fonksiyonellerinin tanımı yapılmıştır. Bu bölümün ikinci kesiminde ise Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşım araştırılmıştır. Morrey uzaylarında yaklaşımın düz ve ters teoremlerinin ispatlanabilmesi için gerekli olan bazı yardımcı lemmalar verilmiştir. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilip, bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilmiştir. Ayrıca $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremleri ispatlanmıştır.

Lemma 6.1 $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $c, C > 0$ sabitleri ile

$$c \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) \leq K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)), \quad 0 < h \leq c(r, \lambda)$$

sağlanır.

Lemma 6.2 (Morrey Uzaylarında Bernstein Eşitsizliği) $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda C , n den bağımsız bir sabit olmak üzere her T_n trigonometrik polinomu ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|T_n^{(k)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C n^k \|T_n\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 6.1 (Düz Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \leq C \Omega^r(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)), \quad n \geq r$$

gerçeklenir, burada $C > 0$, n den bağımsız bir sabittir.

Teorem 6.2 (Ters Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega^r(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sağlanır, burada $C > 0$, n den bağımsız bir sabittir.

Dördüncü bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarının tanımı ve bu uzaylarda düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım ve K -fonksiyonellerinin tanımı verilmiştir. Bu bölümün ikinci kesiminde ise ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımın araştırılabilmesi için gerekli olan yardımcı lemmalar ispatlanmıştır. Düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilmiştir. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilmiştir. Ağırlıklı Morrey uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşımın düz ve ters problemleri incelenmiştir.

Lemma 6.3 $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ ve $0 < h \leq c(r, \lambda, w)$ için $c, C > 0$ sabiti ile

$$c \Omega^r(g, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)) \leq K_r(f, h)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \leq C \Omega^r(f, h, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w))$$

elde edilir.

Lemma 6.4 (Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Bernstein Eşitsizliği) $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $w \in A_p(I_0)$, $0 \leq \lambda < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda herhangi bir T_n trigonometrik polinomu ve $k \in \mathbb{N}$ için n den bağımsız C sabiti ile

$$\|T_n^{(k)}\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \leq C n^k \|T_n\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

elde edilir.

Teorem 6.3 (Düz Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için f ve n den bağımsız $C > 0$ ile

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \leq C \Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)\right), \quad n \geq r$$

elde edilir.

Teorem 6.4 (Ters Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p,\lambda}(I_0, w)$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p(I_0)$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için i ile

$$\Omega^r\left(f, \frac{1}{n}, \mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)\right) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir, burada $C > 0$, f ve n den bağımsız bir sabittir.

Beşinci bölümün birinci kesiminde $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları tanımlamıştır. Bu uzaylarda düzgünlük modülü ve en iyi yaklaşımın tanımı ile bazı temel kavramlar verilmiştir. İkinci kesiminde ise yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremlerinin ispatı için ihtiyaç duyulan bazı lemmalar verilmiştir. K -fonksiyonellerini tanımlanıp, düzgünlük modülü yardımıyla K -fonksiyonelleri karakterize edilmiştir. Ayrıca bu uzaylarda trigonometrik polinomlar için Bernstein eşitsizliği elde edilmiştir.

Lemma 6.5 $f \in \mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. Eğer $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlıyorsa bu durumda $h > 0$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} c \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)) \\ \leq K_r\left(f, h\right)_{\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C \Omega^r(f, h; \mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)), \end{aligned}$$

sağlanır, burada $c, C > 0$ sabitleri f ve h den bağımsızdır.

Lemma 6.6 (Değişken Üslü Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Bernstein Eşitsizliği) $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. Bu durumda her $T_n \in \mathcal{T}_n$ trigonometrik polinomu ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|T_n^{(k)}\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C n^k \|T_n\|_{\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gerçeklenir, burada C sabiti n den bağımsızdır.

Teorem 6.5 (Düz Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$E_n(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)} \leq C \Omega^r\left(f, \frac{1}{n}; \mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

gerçeklenir, burada $C > 0$ sabiti f ve n den bağımsızdır.

Teorem 6.6 (Ters Teorem) $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)$ ve $w \in A_{p(\cdot)}(I_0)$ olsun. $\lambda(\cdot)$, (5.3) koşulunu, $p(\cdot)$ de (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\Omega^r(f, \frac{1}{n}; \mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)) \leq \frac{C}{n^r} \left\{ E_0(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} + \sum_{m=1}^n m^{r-1} E_m(f)_{\mathcal{M}_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I_0, w)} \right\}$$

elde edilir, burada $n \in \mathbb{N}$ ve $C > 0$ sabiti f ve n den bağımsızdır.

$\mathcal{M}_{p, \lambda}(I_0)$ Morrey uzayları 1938 yılında Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışılması ve kesin ön eşitsizliklerinin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Daha sonra Morrey uzaylarının Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

Yaklaşım teorisi son yıllarda birçok matematikçinin ilgisini çeken oldukça güncel ve popüler bir konudur. Bilgisayarların gelişmesiyle bu alandaki araştırmalar daha da güçlenmiştir. Son zamanlarda bu teori o kadar çok genişlemiştir ki analizin diğer tüm dalları ile önemli ölçüde kesişir hale gelmiştir. Ayrıca birçok uygulamalı bilimler ve mühendislik dallarındaki uygulamalarda yaklaşım teorisi önemli bir rol oynamaktadır. Bu alandaki temel problem normlu bir uzaydaki karışık bir fonksiyona yakınsayan daha basit ve daha iyi özelliklere sahip (türevlenebilen, integralenebilen, polinom veya rasyonel fonksiyon gibi) bir fonksiyon bulmaktır. Bu problemin çözümü verilen bir fonksiyonla bu fonksiyona en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın hesaplanması, fonksiyonun belli karakteristik özelliklerinin (örneğin, düzgünlük modülü yardımıyla) değerlendirilmesi gibi bazı problemlerin çözümü için bir temel oluşturmaktadır.

Weierstrass teoremi ve Jackson eşitsizliği yaklaşım teorisinin temel araçlarıdır. Jackson eşitsizliğinin benzeri ortalama yaklaşım ve daha yüksek dereceli süreklilik modülü için de geçerlidir (Timan 1963). S. Bernstein (Bernstein 1912) sürekli fonksiyon uzaylarında bazı özel durumlar için Jackson eşitsizliğinin tersini elde etmiştir.

Daha sonra E.S. Quade (Quade 1937), S.B. Stechkin (Stechkin 1951), A.F. Timan (Timan 1963), A.F. ve M.F. Timan (Timan, A.F. ve Timan, M.F. 1950) vb. L_p Lebesgue uzayları da dâhil olmak üzere Jackson eşitsizliğinin ters tip eşitsizliklerini ispatladılar. Bu tip eşitsizlikler eşlenik fonksiyonların özelliklerinin araştırılmasında, mutlak yakınsak Fourier serilerinin çalışılmasında (Stechkin 1951) ve ilgili problemlerde önemli rol oynamıştır. Lebesgue uzayları, ağırlıklı Lebesgue uzayları, değişken üslü Lebesgue uzayları, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları, ağırlıklı Lorentz uzayları, Smirnov-Orlicz uzayları, Morrey uzayları, genelleştirilmiş Morrey uzayları ve Morrey-Smirnov uzayları gibi bir çok uzayda yaklaşım teorisi çalışılmıştır. Yaklaşımın lokal olduğunu gösteren değişken üslü Morrey uzaylarında da yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri incelenmiştir. Dolayısıyla bu tezde $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0)$ Morrey uzayları, $\mathcal{M}_{p,\lambda}(I_0, w)$ ağırlıklı Morrey uzayları ve $\mathcal{M}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0, w)$ değişken üslü ağırlıklı Morrey uzayları gibi Morrey tipli uzaylarda elde edilen sonuçların hem teori hem de uygulama alanında önemli gelişmeler ortaya çıkarması beklenmektedir.

KAYNAKLAR

- Akgun, R. 2011a. Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent, *Ukrainian Math. J.*, 63 (1), 3-23.
- Akgun, R. 2011b. Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth, *Georgian Math. J.*, 18, 203-235.
- Akgun, R. and Kokilashvili, V.M. 2011a. On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces, *Banach J. Math. Anal.*, 5 (1), 70-82.
- Akgun, R. and Kokilashvili, V.M. 2011b. The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces, *Georgian Math. J.* 18, 399-423.
- Ali M., Mahmoud S. and Kinj A. 2018. Approximation by rational functions in Morrey-Smirnov classes, *Kuwait J. Sci.* 45 (2), 1-7.
- Almeida, A., Hasanov, J., and Samko, S. 2008. Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces, *Georgian Math. J.*, 15 (2), 195-208.
- Almeida A. and Samko S. 2017. Approximation in Morrey spaces, *J. Funct. Anal.* 272 (6), 2392-2411.
- Almeida A. and Samko S. 2018, Approximation in generalized Morrey spaces, *Georgian Math. J.* 25 (2), 155-168.
- Bernstein, S. 1912. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mem. Acad. Roy. Belgique*, 2 me serie, 4, 1-104.
- Burenkov V.I., Laza De Crutoforis M. and Kydyrmina N. A. 2014, Approximation by C^∞ functions in Morrey spaces, *Math. J.* 14 (52) 2, 66-75.
- Cakir, Z., Aykol, C., Soylemez, D. and Serbetci, A. 2019. Approximation by trigonometric polynomials in Morrey spaces, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 39 (1), 1-17.
- Cakir, Z., Aykol, C., Soylemez, D. and Serbetci, A. 2020. Approximation by trigonometric polynomials in weighted Morrey spaces, *Tbilisi Math. J.*, 13 (1), 123-138.
- Cakir, Z., Aykol, C., Guliyev V.S. and Serbetci, A. 2021. Approximation by trigonometric polynomials in variable exponent weighted Morrey spaces, *Carpathian Math. Publ.*, 13 (3), 750-763.
- Chiarenza, F. and Frasca, M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, *Rend. Math.*, 7, 273-279.
- Coifman, R. and Rochberg R. 1980. Another characterization of BMO, *Proc. Amer. Math. Soc.* 79, 249-254.

- Devore, R.A. and Lorentz, G.G. 1993. Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Diening, L., Hästö, P. and Nekvinda, A. 2005. Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Proceedings of the Conference held in Milovy, Bohemian-Moravian Uplands, May 28-June 2, 2004, Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, Praha, 38-58.
- Duoandikoetxea, J. Weights for maximal functions and singular integrals, NCTH 2005 Summer School on Harmonic Analysis in Taiwan.
- Ephremidze, L., Kokilashvili, V.M. and Yildirim, Y.E. 2007. On the inverse inequalities for trigonometric polynomial approximations in weighted Lorentz spaces, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 144, 132-136.
- Grafakos, L. 2004. Classical and modern Fourier analysis. Dearson Education. Inc. Upper Saddle River, 931 p., New Jersey.
- Guliyev, V.S., Hasanov, J. and Samko, S. 2010. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces, Math. Scand., 107, 285-304.
- Guliyev, V.S., Hasanov, J. and Badalov, X.A. 2018. Maximal and singular integral operators and their commutators on generalized weighted Morrey spaces with variable exponent, Math. Ineq. Appl., 21 (1), 41-61.
- Guliyev, V.S., Ghorbanalizadeh, A. and Sawano, Y. 2019. Approximation by trigonometric polynomials in variable exponent Morrey spaces, Anal. Math. Phys., 1-21. <https://doi.org/10.1007/s13324-018-0231-y>
- Güven, A. and Israfilov, D.M. 2010. Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$, Journal of Math. Inequalities, 4 (2), 285-299.
- Hacıyeva, E.A. 1986. Investigation of the properties of functions with quasimonotone Fourier coefficients in generalized Nikolskii-Besov spaces, Authors summary of candidate dissertation, Tbilisi (in Russian).
- Hunt, R., Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. 1973. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, Trans. Amer. Math. Soc. 176, 227-251.
- Hunt, R.A. and Young, W. 1974. A weighted norm inequality for Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 274-277.
- Ibragimov, I.I. and Mamedhanov, D.I. 1975. A constructive characterization of a certain class of functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 223 (1975), 35-37, Soviet Math. Dokl., 4, 320-323.
- Israfilov, D.M. and Akgun, R. 2006. Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes. J. Math. Kyoto Univ. 46 (4), 755-770.

- Israfilov, D.M. and Guven, A. 2006. Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces. *Studia Math.* 174 (2), 147-168.
- Israfilov, D., Kokilashvili, V. and Samko, S. 2007. Approximation in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with variable exponents, *Proc. A.Razmadze Math. Inst.*, 143, 25-35.
- Israfilov, D.M. and Testici, A. 2018a. Approximation problems in the Lebesgue spaces with variable exponent, *J. Math. Anal. Appl.*, 459 (1), 112-123.
- Israfilov, D.M. and Testici, A. 2018b. Some inverse and simultaneous approximation theorems in weighted variable exponent Lebesgue spaces, *Analysis Math.*, 44 (4), 475-492.
- Israfilov D.M. and Tozman N. P. 2008. Approximation by polynomials in Morrey-Smirnov classes, *East J. Approx.*, 14 (3), 255-269.
- Israfilov D.M. and Tozman N.P. 2011. Approximation in Morrey-Smirnov classes, *Azerbaijan J. Math.* 1 (2), 99-113.
- Izuki, M., Nakai, E. and Sawano, Y. 2014. Function spaces with variable exponents -an introduction-, *Sci. Math. Jpn.*, 77 (2), 187-315.
- Jafarov S. Z. 2019a. Derivatives of trigonometric polynomials and converse theorem of the constructive theory of functions in Morrey spaces, *Proceedings of IAM*, 5 (1), 137-145.
- Jafarov S. Z. 2019b. Direct and converse theorems of the theory of approximation in Morrey spaces, *Proceedings of IAM* 9, N.I, 83-94.
- Johnen, H. 1972. Inequalities connected with moduli of smoothness. *Mat. Vesnik* 3, 389-303.
- Kasumov M.G. 2014. On the basicity of Haar systems in the weighted variable exponent Lebesgue spaces, *Vladikavkaz. Math. Journal*, 16 (3), 38-46.
- Kinj A., Ali M. and Mahmoud S. 2017. Approximation properties of de la Vallée-Poussin sums in Morrey spaces, *SQU J. Sci.* 22 (2), 89-95.
- Kokilashvili, V.M. 1968. Approximation on Smirnov-Orlicz classes. *Studia Math.* 31, 43-59.
- Kokilashvili, V.M. and Yildirim, Y. E. 2007. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 143, 103-113.
- Kokilashvili, V. and Samko, S. G. 2009. A refined inverse inequality of approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces, *Proc A Razmadze Math Inst.*, 151, 134-138.
- Komori, Y. and Shirai, S. 2009. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, *Math. Nachr.* 282 (2), 219-231.

- Kopaliani, T.S. 2007. Infimal convolution and Muckenhoupt $A_{p(\cdot)}$ condition in variable L_p spaces, Arch. Math. 89 (2), 185-192.
- Ky, N.X. 1993. On approximation by trigonometric polynomials in $L_{p,u}$ -spaces, Studia Sci. Math. Hungar., 28, 183-188.
- Ky, N.X. 1997. Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights, Ann. Univ. Sci., 40, 37-48.
- Lanzhe, L. 2007. Sharp and weighted inequalities for multilinear integral operators, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. 101 (1), 99-111.
- Maeda, F.Y., Mizuta, Y., Ohno T. and Shimomura, T. 2013. Trudinger's inequality and continuity of potentials on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Potential Anal. 38 (2), 515-535.
- Mhaskar, H.N. 1996. Introduction to the theory of weighted polynomial approximation, Series in Approximation and Decompositions 7, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ.
- Morrey, C.B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 43, 126-166.
- Muckenhoupt, B. 1972. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165, 207-226.
- Neri, U. 1971. Singular integrals. Springer Verlag, New York.
- Powell, M. J. D. 1981. Approximation Theory and Methods, Cambridge University Press.
- Quade, E.S. 1937. Trigonometric approximation in the mean, Duke Math. J., 3 (3), 529-543.
- Rafeiro, H., Samko, N. and Samko, S. 2013. Morrey-Campanato spaces: an overview. (English summary) Operator theory, pseudo-differential equations, and mathematical physics, 293-323, Oper. Theory Adv. Appl., 228, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel.
- Rudin, W. 1987. Real and Complex Analysis (3rd ed.), New York: McGraw-Hill.
- Sawano, Y. and Shimomura, T. 2013. Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in non-doubling Morrey spaces of variable exponents, Collect. Math., 64 (3), 313-350.
- Sawano, Y. and Shimomura, T. 2014. Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz-Morrey spaces over non-doubling measure spaces, Integral Transforms Spec. Funct., 25 (12), 976-991.
- Sawano, Y. and Tanaka, H. 2015. The Fatou property of block spaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 22, 663-683.

- Shakh-Emirov, T.N. 2014. On Uniform Boundedness of some Families of Integral Convolution Operators in Weighted Variable Exponent Lebesgue Spaces, *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Mathematica, Mechanics, Informatica*, 14 4 (1), 422-427.
- Stechkin, S.B. 1951. On the order of the best approximations of continuous functions, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* 15, 219-242. (Russian)
- Stein, E.M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- Timan, A.F. 1963. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable, English translation, Pergamon Press, The MacMillan Co., Russian original published in Moscow by Fizmatgiz 1960.
- Timan, A.F. and Timan, M.F. 1950. The generalized modulus of continuity and best mean approximation, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 71 (1), 17-20.
- Triebel, H. 2014. Hybrid Function Spaces, Heat and Navier-Stokes Equations, *Tracts in Mathematics* 24, European Mathematical Society.
- Torchinsky, A. 1986. Real Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, San Diego.
- Walsh, J.L. and Russel, H.C. 1959. Integrated continuity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92, 355-370.
- Yang, D. and Yuan, W. 2011. Dual properties of Triebel-Lizorkin-type spaces and their applications, *Z. Anal. Anwend.* 30, 29-58.