

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE EĞRİLER VE MANYETİK
YÖRÜNGELER**

Osman ATEŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2020**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE EĞRİLER VE MANYETİK YÖRÜNGELER

Osman ATEŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail GÖK

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanacağımız temel kavramlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım uzayında J -yörünge eğrilerinin hareket denklemleri elde edilmiştir. 3-küre üzerindeki izdüşüm eğrileri, Legendre eğri olan J -yörüngelerin periyodikliği çalışılmıştır ve bir periyodik olma kriteri belirlenmiştir. Ayrıca, bir J -yörüngenin 3-küre üzerine izdüşüm eğrisinin kontak açısı elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde; $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerindeki J -yörünge eğrilerinin, 3-küre üzerinde yatan bileşenin dinamikleri araştırılmıştır. Hopf fibrasyon yardımıyla, 2-küre üzerindeki izdüşüm eğrilerinin çok sayıda geometrik özelliği elde edilmiştir ve Mathematica programıyla izdüşüm eğrilerinin bazı örnekleri verilmiştir. Bu izdüşüm eğrileri 3-boyutlu Öklid uzayında ele alınmıştır ve izdüşüm eğrilerinin eğriligi ve torsiyonu belirlenmiştir. Ayrıca uzay eğrilerinin temel teoreminden, bu iki karakteristik bir eğri tanımlar ve Mathematica programıyla, bu izdüşüm eğrilerin bazı örnekleri çizilmiştir. Son olarak, 2-küre üzerindeki izdüşüm eğrilerinin Hopf dönüşümü yardımıyla tam lift olarak tanımlanan, 3-küre üzerindeki Hopf tüpler incelenmiştir. 3-küre üzerindeki eğrilerin, izdüşüm eğrileri tarafından tanımlanan Hopf tüp üzerinde geodezik olması için gerek ve yeter şartın bu eğrilerin Legendre eğri olması olduğu ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde; yapılan çalışmalar ile ilgili sonuçların analizine yer verilmiştir.

Haziran 2020, 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: Manyetik eğri, Legendre eğri, Kontak manifold, Hopf fibrasyon, Hopf tüp, J -yörünge

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CURVES AND MAGNETIC TRAJECTORIES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

Osman ATEŞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsmail GÖK

This thesis consist of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic concepts that we will use throughout the work are recalled.

In chapter three; the equations of motion for a J-trajectory are founded in the product space $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. The periodicity of J-trajectories whose projection on the 3-sphere is a Legendre curve are studied and a periodicity criterion is founded. Moreover, the contact angle for the projection on 3-sphere of a J-trajectory is obtained.

In chapter four; the dynamics of the 3-sphere-component of a J-trajectory are investigated in product manifolds $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Several geometric properties are obtained for the projection curve on 2-sphere via the Hopf fibration and some examples of the projection curve are generated with Mathematica. The projection curve is regarded in 3-dimension Euclidean space and determined its curvature and torsion. Using the fundamental theorem of curves in space, these two characteristics define a curve and some examples of the projection curve are plotted with a Mathematica program. Finally, The Hopf tubes on the 3-sphere, defined as the complete lift via the Hopf map of the projection curve on the 2-sphere, are investigated. It is also proved that the curves in 3-sphere are geodesics on the Hopf tubes over the projection curve on the 2-sphere if and only if they are Legendre curves.

In chapter five; the analysis of the results considered in previous chapters are given.

June 2020, 64 pages

Key Words: Magnetic curve, Legendre curve, Contact manifold, Hopf fibration, Hopf tube, J-trajectory

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan, tez çalışmam boyunca yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen, duyduğu güvenle; karşılaştığım her türlü zorluğun üstesinden gelebileceğime beni inandıran, sürecin her aşamasında gösterdiği anlayış ve sabır için minnettar olduğum saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, fikirleriyle beni yönlendiren değerli hocalarım Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, Prof. Dr. F.Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye ve Doç. Dr. Çetin CAMCI (Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya ve değerli zamanımı ayıran tez savunma juri üyem Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Romanya'da kaldığım süre boyunca, çalışmalarına farklı bakış açıları kazandıran ve önemli katkılarda bulunan, ayrıca göstermiş olduğu ilgiden ve misafirperverlikten dolayı Sayın Prof. Dr. Marian Ioan MUNTEANU (Alexandru Ioan Cuza Üniversitesi)'ya ve kıymetli ailesine en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu uzun ve yorucu süreçte beraber yol aldığım kardeşim Erdem KOCAKUŞAKLI'ya, her zaman yanımda olan ve kardeşi olmaktan gurur ve mutluluk duyduğum sevgili abim Raif NALBANT'a teşekkür ederim.

Ayrıca uzun eğitim yaşamım boyunca hep yanımda olan, desteklerini hiç bir zaman eksik etmeyen canım annem Aynur ATEŞ'e ve canım babam Yener ATEŞ'e, sevgili abim Tanser ATEŞ'e ve kardeşlerime en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Her zaman olduğu gibi bu süreçte de anlayışı, bilgisi, sevgisi, güler yüzü ve yardımlarıyla bana destek olan sevgili eşim Meryem ATEŞ'e çok teşekkür ederim.

Bu tez " 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TUBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Osman ATEŞ
Ankara, Haziran 2020

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR	5
2.1 Kontak Metrik Manifold	7
2.2 S^3 Küre ve $\mathbb{R} \times S^3$ Çarpım Manifold	12
3. $\mathbb{R} \times S^3$ ÇARPIM MANİFOLDUNDA J-YÖRÜNGELER	17
3.1 $\mathbb{R} \times S^3$ Çarpım Manifoldunda Periyodik J-yörüngeler	37
3.2 S^3 Küresi Üzerinde Tanımlı c Eğrisi İçin Kontak Açısı	39
4. HOPF FİBRASYON	41
4.1 Hopf Fibrasyon Altında Geometrik Özellikler	41
4.2 Mathematica Örnekleri	55
4.3 Hopf Tüp	57
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGELER DİZİNİ

Φ	Lorentz kuvveti fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Reel uzay
$\mathbb{E}$	Öklid uzay
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar cümlesi
$\mathbb{C}^n$	Kompleks uzay
$\mathbb{S}^n$	n-boyutlu küre
$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$	Çarpım manifold
φ	(1,1)-tensör alanı
ξ	Karakteristik (Reeb) vektör alanı
η	Kontak 1-form
$g, \bar{g}, \hat{g}$	Metrik tensörler
$\nabla, \bar{\nabla}, \hat{\nabla}, \dot{\nabla}$	Koneksiyonlar
(M, η)	Kontak manifold
(φ, ξ, η)	Hemen hemen kontak yapı
(M, φ, ξ, η)	Hemen hemen kontak manifold
(φ, ξ, η, g)	Hemen hemen kontak metrik yapı
$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$	Hemen hemen kontak metrik manifold
J	Hemen hemen kompleks yapı
(J, g)	Hermityen yapı
(M, J, g)	Hermityen manifold
N	Nijenhuis torsiyon tensörü
$S(X, Y)$	Normal tensör alanı
Ω	Temel 2-form
$\bar{\Omega}$	Kähler form
$\left(f \frac{d}{dt}, X\right)$	$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ uzayında vektör alanı
π	Hopf fibrasyon
H_β	Hopf tüp
γ	J -yörünge
c	$\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki eğri
$\hat{c}$	$\mathbb{S}^2$ küresi üzerine izdüşüm eğrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Hopf Fibrasyon	3
Şekil 3.1	J-Yörünge, $q = 1$, $a = \frac{1}{2}$ ve $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$	24
Şekil 3.2	J-Yörünge, $q = 2$, $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$ ve $b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$	25
Şekil 3.3	c Eğrisinin Stereografik İzdüşümleri, $q = \frac{4}{\sqrt{5}}$ (sol) ve $q = 2$ (sağ)	29
Şekil 3.4	c Eğrisinin S^3 Küresinde Tüp Yüzeyine Stereografik İzdüşümü, $q = 2$	29
Şekil 3.5	c Eğrisinin S^3 Küresinde Tüp Yüzeyine Stereografik İzdüşümü, $q = \frac{4}{\sqrt{5}}$	30
Şekil 4.1	$\hat{c}$ Eğrisi, $q = 2$ ve $\mu = \frac{1}{4}$	51
Şekil 4.2	$\hat{c}$ Eğrisi, $q = 2$ ve $\mu = \frac{\sqrt{2}}{3}$	51
Şekil 4.3	$\hat{c}$ Eğrisi, $q = 2$ ve $\mu = \frac{\sqrt{6}}{5}$	52
Şekil 4.4	Sabit Torsiyonlu $\hat{c}$ Eğrisi, $s_0 = 1$	53

1. GİRİŞ

Manyetik alanların ve farklı manifoldlar üzerinde tanımlanan manyetik alanlarla ilişkili manyetik eğrilerin incelenmesi, diferensiyel geometri ve fizik alanlarındaki önemli araştırma konularındandır. Riemann manifoldları üzerindeki manyetik eğriler, manyetik alan etkisiyle bu manifold üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Özel olarak; manyetik alanın yokluğunda, manyetik eğriler serbest düşme hareketi yapan parçacıkların yörüngeleridir. Diğer bir ifadeyle, içinde bulundukları uzayın geodezikleridir. Manifold üzerinde tanımlı olan kapalı 2-form, q yüklü parçacığı etkileyen Lorentz kuvveti ile ilişkili bir manyetik alan tanımlar. Dinamik sistemin bir manyetik yörüngesi

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = q\Phi\gamma'$$

Lorentz denkleminin bir çözümüdür.

Farklı uzaylardaki, manyetik eğrilerin geometrisi, birçok araştırmacı tarafından yoğun bir şekilde incelenmiştir. 2-boyutlu uzayda, paralel Lorentz kuvvetine karşılık gelen manyetik yörüngeler, Comtet ve Sunada tarafından elde edilmiştir. Comtet, sabit bir manyetik alan içerisinde hiperbolik düzlemde hareket eden yüklü bir parçacığın klasik ve quantum mekanizmasını incelemiştir (Comtet 1987). Sunada, S^2 küresi ve hiperbolik yüzeyler üzerinde manyetik alan etkisi altındaki yüklü parçacıkların yörüngelerini belirlemiş ve karakterizasyonlarını vermiştir (Sunada 1993). Adachi, Kähler manifoldlarında Kähler manyetik eğrileri sınıflandırmıştır (Adachi 1994). Cabrerizo ise 3-boyutlu Sasaki manifoldlarında manyetik alanları araştırmıştır (Cabrerizo vd. 2009). 3-boyutlu Minkowski uzayında ve kontak manifoldlarda Killing vektör alanıyla verilen manyetik eğrilerin sınıflandırılması Calvaruso, Druta-Romaniuc ve Munteanu tarafından yapılmıştır (Calvaruso vd. 2015), (Druta-Romaniuc ve Munteanu 2013). Diğer taraftan Barros vd. 3-boyutlu manifoldlarda, Killing manyetik alanları ile ilgili manyetik yörüngeleri, varyasyonel problemin sonucu olarak elde etmiştir (Barros vd. 2007). Ayrıca, Killing manyetik yörüngelerin sınıflandırılması, Druta-Romaniuc ve Munteanu tarafından sırasıyla E^3 ve $S^2 \times \mathbb{R}$ uzaylarında verilmiştir (Druta-Romaniuc ve Munteanu 2011), (Munteanu ve Nistor 2012).

Bu konsepti, diğer uzaylara genişletmek istiyorsak, manifoldlar ve bu manifoldların teğet vektör uzayları arasındaki ilişki göz önüne alınmalıdır. Bu bağlamda, küre yüzeyleri bu manifoldlar arasında önemli rol oynar. Küre yüzeylerinin normal vektörlerinin, orjin boyunca olması ve aynı topolojiye sahip sabit ortalama eğrilik yüzeyleri boyunca düzgün bir deformasyona sahip olması, küre yüzeylerini önemli kılmıştır. Farklı uzaylarda, manyetik alanlara karşılık gelen manyetik yörüngelerin sınıflandırılmasından elde edilen tüm bu sonuçlara bakıldığında, 3-boyutlu küre yüzeyi üzerinde manyetik eğriler hakkında çok az bilgiye sahip olunduğu görülmektedir.

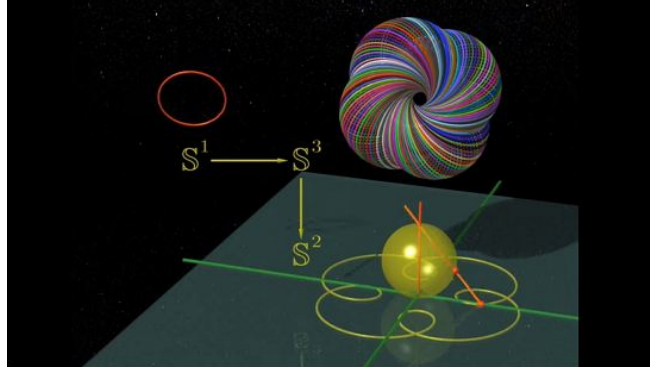
$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ uzayı, teorik fizik alanında büyük ilgi gören, aynı zamanda Lorentz metriği ile donatılmış olan bir uzaydır. Örneğin; Adam, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldunda $\mathbb{S}^2$ değerli birim vektör alanını içeren alan teorilerini incelemiştir (Adam 2006). Dariescu, çalışmasında $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ uzayı içindeki fiziksel sistemlerin önemini vurgulamıştır. Ayrıca, alan teorilerinin incelenmesinde ve $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ uzayının diğer özelliklerinin etkileri hakkında daha fazla ayrıntı verilmiştir (Dariescu 1996).

Bir (M, g, J) Kähler manifoldu üzerinde tanımlanan $\Omega_J(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ ikinci temel formu kapalıdır ve böylece bu temel form bir Kähler manyetik alan tanımlar. Ω_J ikinci temel formuna göre, Lorentz kuvveti J olduğundan, $q \neq 0$ olmak üzere, M manifoldu üzerinde bir Kähler manyetik eğri

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = qJ\gamma' \quad (1.1)$$

Lorentz denkleminin bir çözümüdür.

$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu ise bir Kähler manifold değildir. Yani, g metriği ve J kompleks yapısı ile verilen ikinci temel form Ω_J kapalı olmadığından $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde bir manyetik alan tanımlamaz, fakat $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde J -yörünge eğrileri (1.1) diferensiyel denklemini sağlayan eğriler olarak tanımlanabilir.



Şekil 1.1 Hopf fibrasyon

$\mathbb{S}^3$ küresinin 4-boyutlu uzayda daha iyi anlaşılması için uzayın dairelerle nasıl doldurulduğunu açıklayalım ve fibrasyon kavramından bahsedelim; 4-boyutlu uzayda orijine birim uzaklıkta olan noktalar kümesinin geometrik yeri $\mathbb{S}^3$ küresini verir. $\mathbb{S}^3$ birim küresi, 4-boyutlu uzayda 2-boyutlu kompleks düzlemde, orijinden geçen her bir kompleks doğru için dairelerle doldurulmuştur ve bu dairelerin kesiştiği düşünülse de 4-boyutta bu düşünce yanlıştır. Kürenin dairelere bölündüğü Hopf tarafından keşfedilmiştir ve buna *Hopf fibrasyon* adı verilir. Hopf fibrasyonun görüntülenmesi Alvarez tarafından ayrıntılı bir şekilde araştırılmıştır. Bunun bir örneği Şekil 1.1 de verilmiştir (Alvarez vd. 2008).

Hopf fibrasyon kavramı, ilk olarak 1931 yılında Hopf tarafından tanımlanmıştır. Hopf, $\mathbb{S}^2$ küresinin üçüncü homotopi grubunu belirlemek istemiş ve günümüzde Hopf fibrasyon olarak adlandırılan, $\mathbb{S}^3$ küresinden $\mathbb{S}^2$ küresine tanımladığı, bir dönüşüm yardımıyla bu grubun boş kümeden farklı olduğunu göstermiştir. Aynı fikir, dalga mekaniği üzerinde çalışan Dirac tarafından da ortaya atılmıştır. Dirac manyetik bir tek kutup alanında kuantum mekanik hareketini incelemiştir. Hopf fibrasyonun bazı teorik fizik konularındaki uygulamaları; iki seviyeli kuantum sistemleri, iki boyutlu izotropik harmonik osilatör, Taub-nut uzayı, Twistor teorisi, helisite gösterimleri, Dirac'ın tek kutup kuantizasyonu veya Dirac eşitliği ve Dirac operatörü olarak gösterilebilir (Urbantke 2003).

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^3 &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\} \\ &= (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{S}^3$ küreyi görselleştirmek için stereografik izdüşümü kullanabiliriz. $\mathbb{R}^4$ reel uzayında $N = (0, 0, 1, 0)$ noktasını $\mathbb{S}^3$ küresinin kuzey kutubu olarak göz önüne alalım. $(0, 0, -1, 0)$ güney kutup noktasındaki teğet düzleme N noktasından izdüşüm alınırsa $(x, y, u, v) \in \mathbb{S}^3$ noktası, $(a, b, -1, c)$ izdüşüm noktası ve N noktası doğrusal olur. Dolayısıyla,

$$\pi : \mathbb{S}^3 \setminus N \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi(x, y, u, v) = \left(\frac{2x}{1-u}, \frac{2y}{1-u}, \frac{2v}{1-u} \right),$$

elde edilir. $\mathbb{S}^3$ küresinden bir nokta çıkarılırsa 3-boyutlu uzayla temsil edilebilir.

Kompleks doğrular, $\mathbb{S}^2$ küresindeki noktalarla tanımlanmak üzere $\mathbb{S}^2$ küresindeki her nokta için bir çember elde edilir. Tüm bu çemberler $\mathbb{S}^3$ küresini doldururlar ve $\mathbb{S}^3$ küresindeki her nokta yalnız bir çembere ait olup $\mathbb{S}^2$ küresindeki bir noktayı belirler. Böylece $\mathbb{S}^2$ küresinin üzerinde, $\mathbb{S}^3$ küresinin izdüşümüne benzer bir şekil elde edilir. Sonuç olarak $\mathbb{S}^2$ üzerindeki her noktanın, $\mathbb{S}^1$ çemberi olan bir lif(fibre) olduğunu ve bu fibrasyonun tüm uzayın $\mathbb{S}^3$ küresi olduğu söylenebilir.

$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerindeki J -yörünge eğrileri, matematik ve teorik fizik etkileşimi içerisinde yer alır. Aynı zamanda, hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J -yörünge eğrileri manyetik alanları, dolayısıyla geodezikleri genelleştirir. Bu tez çalışmasında; $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım uzayında J -yörünge eğrilerinin hareket denklemleri elde edilmiştir. $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki izdüşüm eğrileri Legendre eğri olan J -yörüngelerin, periyodik olma kriterleri belirlenmiştir. Ayrıca J -yörüngelerin $\mathbb{S}^3$ küresi üzerine izdüşüm eğrilerinin kontak açıları incelenmiştir. Diğer taraftan; $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerindeki J -yörünge eğrilerinin, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde yatan bileşenin dinamikleri araştırılmıştır. Hopf fibrasyon yardımıyla, $\mathbb{S}^2$ küresi üzerindeki izdüşüm eğrilerinin çok sayıda geometrik özeliği elde edilmiştir. Bu izdüşüm eğrileri $\mathbb{E}^3$ uzayında ele alınmıştır ve izdüşüm eğrilerinin eğriligi ve torsiyonu belirlenmiştir. Ayrıca, uzay eğrilerinin temel teoreminden, bu iki karakteristik, bir eğri tanımlar ve Mathematica programıyla bu izdüşüm eğrilerin bazı örnekleri çizilmiştir. Son olarak, $\mathbb{S}^2$ küresi üzerindeki izdüşüm eğrilerinin Hopf dönüşümü yardımıyla tam lift olarak tanımlanan $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki Hopf tüpler incelenmiştir. $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki eğrilerin, izdüşüm eğrileri üzerine tanımlanan Hopf tüp üzerinde geodezik olması için gerek ve yeter şartın bu eğrilerin Legendre eğri olması olduğu ispatlanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1 Bir M manifoldu üzerinde tanımlı $(0,2)$ tipinde bir

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

metrik tensör, simetrik, bi-lineer ve pozitif tanımlılık özelliklerini sağlıyor ise g metrik tensörüne M manifoldu üzerinde tanımlı bir *Riemann metriği* denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.2 M , bir manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanabiliyor ise (M, g) ikilisine bir "*Riemann manifoldu*" adı verilir. Eğer, g Riemann metriği pozitif tanımlılık aksiyomu yerine non-dejenere aksiyomunu sağlıyor ise (M, g) ikilisine bir *yarı Riemann manifoldu* denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.3 M bir Riemann manifoldu ve M manifoldu üzerinde tanımlı bir Riemann koneksiyonu ∇ olsun. ∇ koneksiyonunun M manifolduna ait bir bölge üzerinde tanımlı olan

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

bi-lineer dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

- i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- ii) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- iii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$
- iv) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ dönüşümüne M manifoldu üzerinde tanımlı bir *afin koneksiyon* veya *kovaryant türev* adı verilir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.4 (M, g) bir Riemann manifoldu ve M manifoldu üzerinde tanımlı olan bir afın koneksiyon ∇ olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü,

- i) Sıfır torsiyon özeliği: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii) Koneksiyonun metrikle bağdaşabilme özeliği: $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ koşullarını sağlıyor ise, ∇ dönüşümüne M manifoldu üzerinde tanımlı bir *Riemann koneksiyonu* veya M manifoldunun *Levi – Civita koneksiyonu* adı verilir (Hacısalihoglu 2003).

Tanım 2.5 M bir C^∞ manifold ve $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun.

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise γ eğrisine M manifoldu üzerinde bir *diferensiyellenebilir eğri* denir (Hacısalihoglu 2003).

Tanım 2.6 $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir γ eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \gamma(t) \in M \\ \gamma'(t) &= \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

biçimindedir. $\gamma'(t)$ tanjant vektörüne, γ eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\gamma(t)$ noktasında, (I, γ) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir.

$\|\gamma'(s)\| = 1$ olması durumunda ise γ eğrisine (I, γ) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine *yay parametresi* adı verilir (Hacısalihoglu 2003).

Tanım 2.7 $r \geq 1$ bir olmak üzere γ eğrisi M manifoldu üzerinde oskülatör mertebesi r olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda γ eğrisinin Frenet elemanları $\{T = \dot{\gamma}, \nu_1, \dots, \nu_{r-1}\}$

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa_1 \nu_1, \\ \nabla_T \nu_1 &= -\kappa_1 T + \kappa_2 \nu_2, \\ \nabla_T \nu_j &= -\kappa_j \nu_{j-1} + \kappa_{j+1} \nu_{j+1} \quad j = 2, \dots, r-2, \\ \nabla_T \nu_{r-1} &= -\kappa_{r-1} \nu_{r-2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilir. Burada $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{r-1}$ pozitif C^∞ fonksiyonlardır ve κ_j ile γ eğrisinin j -inci eğriliği gösterilmektedir (Hacısalihoglu 2003).

2.1 Kontak Metrik Manifold

Tanım 2.8 M manifoldu, $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bu manifold üzerinde alınan her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlayan bir η diferensiyel 1-formu mevcut ise η formuna *kontak form*, (M, η) ikilisine ise *kontak manifold* denir (Blair 1976).

Tanım 2.9 $(2n+1)$ -boyutlu bir (M, η) kontak manifoldu verilsin. Bu durumda,

$$D = \{X \in \chi(M) : \eta(X) = 0\}$$

şeklinde tanımlı D cümlesine M kontak manifoldunun *kontak dağılımı* (*distribution*) adı verilir (Blair 1976).

Tanım 2.10 $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu verilsin.

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$(1,1)$ tipinden bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{dif.bilir}} C^\infty(M, \mathbb{R})$$

formu da M manifoldu üzerinde tanımlı bir diferensiyel form olmak üzere,
 $\forall X \in \chi(M)$ için (φ, ξ, η) yapısı;

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \quad (2.2)$$

şartlarını sağlıyor ise (φ, ξ, η) yapısına bir *hemen hemen kontak yapı*, (M, φ, ξ, η) manifolduna ise *hemen hemen kontak manifold* denir (Blair 1976).

Tanım 2.11 M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ vektör alanı için,

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(\xi, X) = 0 \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı mevcut ise ξ vektör alanına *karakteristik vektör alanı* ya da *Reeb vektör alanı* adı verilir (Blair 1976).

Sonuç 2.1 $(2n+1)$ -boyutlu (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontak manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= 0 \\ \eta \circ \varphi &= 0 \\ \text{rank} \varphi &= 2n\end{aligned}\tag{2.4}$$

eşitlikleri sağlanır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.12 $(2n+1)$ -boyutlu bir M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde tanımlı, $\forall X, Y, \xi \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi)\tag{2.5}$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\tag{2.6}$$

şartlarını sağlayan bir g metriği mevcut ise (φ, ξ, η, g) yapısına *hemen hemen kontak metrik yapı*, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna ise *hemen hemen kontak metrik manifold* adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1 $(2n+1)$ -boyutlu M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

biçiminde bir g Riemann metriği daima tanımlanabilir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2 M , $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y)\tag{2.7}$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitlik ise, φ tensör alanının g metrik tensörüne göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.13 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu olsun.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\Omega(X, Y) = g(\varphi X, Y)$$

biçiminde tanımlı Ω -formuna (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapının *Temel 2 - formu* denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.14 $(2n+1)$ -boyutlu bir M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$2d\eta(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y]) \quad (2.8)$$

eşitliği gerçekleşir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.15 $(2n+1)$ -boyutlu bir M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\Omega(X, Y) = d\eta(X, Y) \quad (2.9)$$

eşitliği sağlanıyor ise (φ, ξ, η, g) yapısına *kontak metrik yapı*, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna ise *kontak metrik manifold* denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.16 M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer $\forall p \in M$ noktası için $J^2 = -I$ olacak biçimde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizmi mevcut ise, M manifoldu üzerindeki J tensör alanına *hemen hemen kompleks yapı* denir. J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen M manifolduna ise *hemen hemen kompleks manifold* adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.17 M manifoldu, J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen hemen hemen kompleks manifold ve g ise M manifoldu üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

ise (J, g) yapısına *hemen hemen Hermityen yapı*, M manifolduna ise *hemen hemen Hermityen manifold* adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.18 (M, J, g) hemen hemen Hermityen manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\bar{\Omega}(X, Y) = g(X, JY)$$

biçiminde tanımlı $\bar{\Omega}$ -formuna M hemen hemen Hermityen manifold üzerinde bir *Kähler form* adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.19 (M, J, g) hemen hemen Hermityen manifold olsun. M üzerinde tanımlı $\bar{\Omega}$ Kähler form kapalı, yani $d\bar{\Omega} = 0$ ise M manifolduna Kähler manifold adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.2 M manifoldu, J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen hemen hemen kompleks manifold olsun. g metriği M manifoldu üzerinde bir Riemann metrik ve ∇ , M manifoldu üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere aşağıda verilen önermeler

i) g bir Kähler metriktir.

ii) $d\bar{\Omega} = 0$.

iii) $\nabla J = 0$.

denktir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.20 $\bar{F}$, M manifoldu üzerinde (1,1)-tipinde tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} N_{\bar{F}} : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow N_{\bar{F}}(X, Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\bar{F}}(X, Y) &= \bar{F}^2[X, Y] + [\bar{F}X, \bar{F}Y] \\ &\quad - \bar{F}[\bar{F}X, Y] - \bar{F}[X, \bar{F}Y] \end{aligned}$$

şeklinde bir (1,2)-tensör alanı tanımlanabilir. Bu $N_{\bar{F}}$ tensör alanına *Nijenhuis tensör alanı* denir.

$\bar{F} = \varphi$ alınırsa ise φ tensör alanının

$$N_{\varphi}(X, Y) = -[X, Y] + \eta[X, Y]\xi + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \quad (2.10)$$

Nijenhuis torsiyon tensörü tanımlanır.

$\bar{F} = J$ alınırsa ise J hemen hemen kompleks yapısının

$$N_J(X, Y) = -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \quad (2.11)$$

Nijenhuis torsiyon tensörü tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.21 $(2n+1)$ -boyutlu bir M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için normal tensör alanı

$$S(X, Y) = N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)$$

sıfıra eşit ise (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısına *normal* denir (Yano ve Kon 1976).

Tanım 2.22 $(2n+1)$ -boyutlu bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldu verilsin. M manifoldunun (φ, ξ, η, g) kontak metrik yapısı normal ise (φ, ξ, η, g) kontak metrik yapısına *Sasaki yapı* ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna ise *Sasaki manifold* denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun, Sasaki manifold olması için gerek ve yeter şart ∇ koneksiyonu, M manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere; $\forall X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \quad (2.12)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.3 $(2n+1)$ -boyutlu bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasaki manifoldunda $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$\nabla_X \xi = \varphi X \quad (2.13)$$

eşitliği sağlanır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.23 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir Sasaki manifoldu ve

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^3$ bu manifold üzerinde s yay parametresi ile verilen bir eğri olsun. γ eğrisinin teğet vektör alanı $T(s) = \gamma'(s)$ olmak üzere

$$\cos \theta(s) = g(T(s), \xi)$$

biçiminde tanımlanan $\theta(s)$ fonksiyonuna γ eğrisinin teğet vektör alanı ile Reeb vektör alanı arasındaki *kontak açı* adı verilir. Kontak açısı sabit olan eğriye bir *slant eğri* denir. Özel olarak bu sabit kontak açı $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise, bu durumda γ eğrisine bir *Legendre eğri* denir (Cho vd. 2006).

2.2 $\mathbb{S}^3$ Küre ve $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ Çarpım Manifoldu

Bu bölümde, $\mathbb{S}^3$ küresinin bazı geometrik özellikleri verilmiştir ve $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldun yapısından bahsedilmiştir.

$\mathbb{S}^3$ küresi bir kontak manifold olup, üzerindeki bir hemen hemen kontak metrik yapı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\mathbb{S}^3 = \{p = (z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ küresi $\mathbb{C}^2$ uzayının Kähler yapısı tarafından indirgenmiş $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısıyla donatılmış olsun. $\bar{g}$ metriği de $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$ uzayının Öklidyen metriği olmak üzere $\mathbb{S}^3$ manifoldunun $p \in \mathbb{S}^3$ noktasındaki ξ karakteristik vektör alanı

$$\xi_p = J_0 p = ip = (iz, iw) \in T_p \mathbb{S}^3$$

eşitliğiyle tanımlanır. J_0 ise $\mathbb{C}^2$ üzerinde imajiner $i = \sqrt{-1}$ ile çarpıma eşdeğerdir. $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde φ , (1-1)-tensör alanı ve η , 1-form aşağıdaki gibi tanımlıdır. Burada, $J_o X$ herhangi bir $X \in T_p \mathbb{S}^3$ vektör alanını sırasıyla teğet ve normal bileşenlere ayırır ve

$$J_o X = \varphi X - \eta(X)p$$

şeklinde tanımlanır.

$\forall p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için

$$J_o = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımıyla

$$J_o(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_2, p_1, -p_4, p_3) = \xi_p$$

elde edilir. p noktasındaki karakteristik vektör alanı

$$\xi_p = \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır.

$$\bar{g}(X, \xi_p)\xi_p = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\bar{g}(X, \xi_p)\xi_p = (-x_1p_2 + x_2p_1 - x_3p_4 - x_4p_3) \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıda verilen eşitlikte

$\lambda = (-x_1p_2 + x_2p_1 - x_3p_4 - x_4p_3)$ alınması durumunda ise

$$\eta(X) = \bar{g}(X, \xi_p) = \lambda$$

olarak elde edilir. φ tensör alanı için,

$$\begin{aligned} \varphi^2(X) &= \varphi(\varphi X), \\ &= J_o(\varphi X) + \eta(\varphi X)p, \\ &= J_o(J_oX + \eta(X)p) + \eta(J_oX + \eta(X)p)p, \\ &= J_o \left[\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \right] + \bar{g}(J_oX + \eta(X)p, \xi)p, \\ &= J_o \begin{bmatrix} -x_2 + \lambda p_1 \\ x_1 + \lambda p_2 \\ -x_4 + \lambda p_3 \\ x_3 + \lambda p_4 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} -x_2 + \lambda p_1 \\ x_1 + \lambda p_2 \\ -x_4 + \lambda p_3 \\ x_3 + \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}, \\ &= J_o \begin{bmatrix} -x_2 + \lambda p_1 \\ x_1 + \lambda p_2 \\ -x_4 + \lambda p_3 \\ x_3 + \lambda p_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi X) &= \begin{bmatrix} -x_1 - \lambda p_2 \\ -x_2 + \lambda p_1 \\ -x_3 - \lambda p_4 \\ -x_4 + \lambda p_3 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi_p$$

eşitliği de gerçekleşir. Diğer taraftan

$$\varphi\xi_p = J_o\xi_p + \eta(\xi)p$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi\xi_p &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \\ -p_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}, \\ &= 0\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, $\mathbb{S}^3$ küresinin özeliğinden dolayı,

$$\begin{aligned}\eta(\varphi X) &= \bar{g}(\varphi X, \xi_p), \\ &= \bar{g}(J_o X + \eta(X)p, \xi_p), \\ &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4, \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısı $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı oluşturur. Aynı zamanda, $\mathbb{S}^3$ küresi $\mathbb{C}^2$ uzayının Kähler yapısı tarafından indirgenmiş $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ kanonik Sasaki yapısıyla donatılmıştır.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu ile ilişkili ve tez boyunca kullanacağımız bazı notasyonları belirleyelim :

X vektör alanı $\mathbb{S}^3$ küresinin teğet uzayında bir vektör alanı ve f ise manifold üzerinde C^∞ fonksiyon olmak üzere $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldunda bir vektör alanı

$$\left(f \frac{d}{dt}, X\right) \quad (2.14)$$

ikilisi ile tanımlanır.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerindeki metrik ise $g = dt^2 + \bar{g}$ şeklinde tanımlıdır. Tez boyunca, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ve $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ise ∇ ile gösterilmiştir.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerindeki hemen hemen kompleks yapı ise

$$J \left(f \frac{d}{dt}, X\right) = \left(\eta(X) \frac{d}{dt}, \varphi X - f\xi\right) \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlıdır.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde tanımlı hemen hemen kompleks J yapının integrallenebilir olduğunu gösterelim;

$[J, J]$ tensör alanı, (1-2) tipinde tensör alanı olduğundan, J yapısının integrallenebilir olması için

$$[J, J]((0, X), (0, Y)) \text{ ve } [J, J]\left(\left(\frac{d}{dt}, 0\right), (0, X)\right)$$

değerleri sıfıra eşit olmalıdır.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldunda X ve Y birer vektör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
[J, J]((0, X), (0, Y)) &= -[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] + \varphi X(\eta(Y)) \frac{d}{dt} - \varphi Y(\eta(X)) \frac{d}{dt} \\
&\quad - Y\eta(X)\xi - \eta[\varphi X, Y] \frac{d}{dt} - \varphi[\varphi X, Y] \\
&\quad + X\eta(Y)\xi - \eta[X, \varphi Y] \frac{d}{dt} - \varphi[X, \varphi Y], \\
&= \left(\varphi X(\eta(Y)) - \eta[\varphi X, Y] - \varphi Y(\eta(X)) + \eta[X, \varphi Y] \right) \frac{d}{dt} \\
&\quad - [X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \\
&\quad + (X\eta(Y) - Y\eta(X))\xi, \\
&= \left(\varphi X(\eta(Y)) - \eta[\varphi X, Y] - \varphi Y(\eta(X)) + \eta[X, \varphi Y] \right) \frac{d}{dt} \\
&\quad + [\varphi, \varphi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Normallik şartından ve $\mathbb{S}^3$ küresi Sasaki manifold olduğundan, sırasıyla

$$[\varphi, \varphi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$$

ve

$$\varphi X(\eta(Y)) - \eta[\varphi X, Y] - \varphi Y(\eta(X)) + \eta[X, \varphi Y] = 0$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
[J, J]\left(\left(\frac{d}{dt}, 0\right), (0, X)\right) &= (\eta([\xi, X]) - \xi\eta(X)) \frac{d}{dt} \\
&\quad + ([\xi, \varphi X] - \varphi[\xi, X]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, J kompleks yapısı integrallenebilirdir fakat (M, g, J) yapısı bir Kähler yapı oluşturmaz.

3. $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ ÇARPIM MANİFOLDUNDA J-YÖRÜNGELER

Bir (M, g, J) Kähler manifoldu üzerinde tanımlanan $\Omega_J(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ ikinci temel formu kapalıdır ve böylece bu temel form bir Kähler manyetik vektör alanı tanımlar. Ω_J ikinci temel formuna göre Lorentz kuvveti J olduğundan, $q \neq 0$ olmak üzere M manifoldu üzerindeki bir Kähler manyetik yörünge

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = qJ\dot{\gamma}$$

Lorentz denkleminin bir çözümüdür.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu Kähler manifold değildir, yani ikinci temel form Ω_J kapalı olmadığından dolayı M manifoldu üzerinde bir manyetik alan tanımlamaz; fakat M manifoldu üzerinde J -yörünge aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$, $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ eğrisi M manifoldu üzerinde ve c eğrisi de $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde tanımlı bir eğri olsun. γ eğrisinin

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = qJ\dot{\gamma} \tag{3.1}$$

diferensiyel denklemini sağlaması durumunda γ eğrisine J -yörünge denir.

(3.1) denkleminin bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde verilen bir J -yörünge sabit hıza, dolayısıyla sabit enerjiye sahiptir.

İspat. $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ bir J -yörünge olmak üzere

$$\frac{d}{ds} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(qJ\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$$

olduğundan $\dot{\gamma}$ sabit uzunluğa sahiptir. ■

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde s yay parametrelili bir J -yörünge olsun. Böylece $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ eğrisi

$$\dot{t}(s)^2 + |\dot{c}(s)|^2 = 1, \quad \forall s \in I \tag{3.2}$$

eşitliğini sağlar.

Uyarı 3.1 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in T(\mathbb{S}^3)$ için

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} J \right) \frac{d}{dt} &= \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} J \right) X = 0, \\ (\nabla_X J) \frac{d}{dt} &= -\varphi X, \\ (\nabla_X J) Y &= -\bar{g}(\varphi X, Y) \frac{d}{dt} - \bar{g}(X, Y) \xi + \eta(Y) X \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldunda X ve Y birer vektör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} J \right) \frac{d}{dt} &= \nabla_{\frac{d}{dt}} J \left(\frac{d}{dt} \right) - J \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} \right), \\ &= \nabla_{\frac{d}{dt}} J \left(\frac{d}{dt} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. (2.15) eşitliğinden $J \left(\frac{d}{dt} \right) = -\xi$ olduğundan

$$\left(\nabla_{\frac{d}{dt}} J \right) \frac{d}{dt} = \nabla_{\frac{d}{dt}} (-\xi) = 0$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} J \right) X &= \nabla_{\frac{d}{dt}} J(X) - J \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} X \right), \\ &= \nabla_{\frac{d}{dt}} \left(\eta(X) \frac{d}{dt} + \varphi X \right), \\ &= \eta(X) \nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} + \frac{d}{dt} [\eta(X)] \frac{d}{dt} + \nabla_{\frac{d}{dt}} (\varphi X), \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} (\nabla_X J) \frac{d}{dt} &= \nabla_X J \left(\frac{d}{dt} \right) - J \left(\nabla_X \frac{d}{dt} \right), \\ &= -\bar{\nabla}_X \xi, \\ &= -\varphi X \end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşir. Son olarak;

$$\begin{aligned}
(\nabla_X J) Y &= \nabla_X JY - J(\nabla_X Y), \\
&= \nabla_X \eta(Y) \frac{d}{dt} + \nabla_X (\varphi Y) - J(\nabla_X Y), \\
&= \eta(Y) \nabla_X \frac{d}{dt} + X[\eta(Y)] \frac{d}{dt} + \nabla_X (\varphi Y) - J(\nabla_X Y), \\
&= X[\eta(Y)] \frac{d}{dt} + \bar{\nabla}_X (\varphi Y) - J(\bar{\nabla}_X Y)
\end{aligned}$$

eşitliği edilir.

$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldunun J hemen hemen kompleks yapısı tanımından dolayı

$$\begin{aligned}
(\nabla_X J) Y &= X[\eta(Y)] \frac{d}{dt} + \bar{\nabla}_X (\varphi Y) - \eta(\bar{\nabla}_X Y) \frac{d}{dt} - \varphi \bar{\nabla}_X Y, \\
&= (X\eta(Y) - \eta(\bar{\nabla}_X Y)) \frac{d}{dt} + (\bar{\nabla}_X (\varphi Y) - \varphi \bar{\nabla}_X Y), \\
&= (X\bar{g}(\xi, Y) - \bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_X Y)) \frac{d}{dt} + (\bar{\nabla}_X \varphi) Y.
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca, (2.12) eşitliğinden $(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = -\bar{g}(X, Y)\xi + \eta(Y)X$ olduğu bilindiğinden,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X J) Y &= (\bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, Y) + \bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_X Y) - \bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_X Y)) \frac{d}{dt} \\
&\quad - \bar{g}(X, Y)\xi + \eta(Y)X, \\
&= -\bar{g}(\varphi X, Y) \frac{d}{dt} - \bar{g}(X, Y)\xi + \eta(Y)X
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. ■

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi, $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde s yay parametrelili bir eğri olsun. c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde bir eğri ve t de $\mathbb{R}$ üzerinde global koordinat sistemi olmak üzere, $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ biçiminde gösterilen J -yörünge eğrisi için

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\dot{\gamma}} J) \dot{\gamma} &= \left(\nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} J \right) \left(i \frac{d}{dt} + \dot{c} \right), \\
&= \left(\nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} J \right) i \frac{d}{dt} + \left(\nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} J \right) \dot{c}, \\
&= \left(\nabla_{i \frac{d}{dt}} J \right) i \frac{d}{dt} + (\nabla_{\dot{c}} J) i \frac{d}{dt} + \left(\nabla_{i \frac{d}{dt}} J \right) \dot{c} + (\nabla_{\dot{c}} J) \dot{c}, \\
&= (\nabla_{\dot{c}} J) i \frac{d}{dt} + (\nabla_{\dot{c}} J) \dot{c}
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır.

(3.3) eşitlikleri yardımıyla J -yörüngeyi karakterize etmek için kullanacağımız

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\dot{\gamma}} J) \dot{\gamma} &= -\dot{t}\varphi\dot{c} - \bar{g}(\varphi\dot{c}, \dot{c}) \frac{d}{dt} - \bar{g}(\dot{c}, \dot{c}) \xi + \eta(\dot{c}) \dot{c}, \\
&= -\dot{t}\varphi\dot{c} - \bar{g}(\dot{c}, \dot{c}) \xi + \eta(\dot{c}) \dot{c}, \\
&= -\dot{t}\varphi\dot{c} - |\dot{c}|^2 \xi + \eta(\dot{c}) \dot{c}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir.

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde tanımlanan bir J -yörüngesi boyunca ilerleyen bir parçacığın hareket denklemleri yazılabilir.

Teorem 3.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde s yay parametrelili bir eğri olsun. c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde bir eğri ve t de $\mathbb{R}$ üzerinde global koordinat sistemi olmak üzere γ eğrisin J -yörünge olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin

$$\ddot{t} = q\eta(\dot{c}), \tag{3.5}$$

$$\bar{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c} = q(-\dot{t}\xi + \varphi\dot{c}) \tag{3.6}$$

diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır.

(3.5) ve (3.6) eşitliklerine, q yüklü parçacığıyla verilen J -yörünge *hareket denklemleri* denir.

İspat. γ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde s yay parametrelili bir J -yörünge ve c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde bir eğri olmak üzere, $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ eğrisi için

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} \left(i \frac{d}{dt} + \dot{c} \right) = \nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} \left(i \frac{d}{dt} \right) + \nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} \dot{c} \tag{3.7}$$

şeklinde hesaplanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} \left(i \frac{d}{dt} \right) &= \ddot{t} \frac{d}{dt} + i \left(\nabla_{i \frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} + \nabla_{\dot{c}} \frac{d}{dt} \right), \\
&= \ddot{t} \frac{d}{dt} + i^2 \left(\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} \right), \\
&= \ddot{t} \frac{d}{dt}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\nabla_{i \frac{d}{dt} + \dot{c}} \dot{c} = i \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} + \nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \bar{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.8) ve (3.9) eşitlikleri (3.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \ddot{t} \frac{d}{dt} + \nabla_{\dot{c}} \dot{c} \quad (3.10)$$

bulunur. $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde J -yörünge tanımından,

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= qJ\dot{\gamma}, \\ &= qJ \left(\dot{t} \frac{d}{dt} + \dot{c} \right), \\ &= q \left(-\dot{t}\xi + \eta(\dot{c}) \frac{d}{dt} + \varphi\dot{c} \right), \\ &= q\eta(\dot{c}) \frac{d}{dt} + q(-\dot{t}\xi + \varphi\dot{c}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak hesaplanır. Son olarak, (3.10) ve (3.11) eşitlikleri birlikte kullanılırsa J -yörüngelerin hareket denklemleri elde edilir. ■

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde, genel durumda J -yörüngenin geometrisini incelemeden önce bazı özel durumları tartışalım:

Durum 1. $\dot{c}$ ile ξ Karakteristik vektör alanının paralel olması durumu, yani λ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\dot{c}(s) = \lambda(s)\xi(c(s)), \quad \forall s \in I, \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda

$$\eta(\dot{c}) = \lambda(s) \text{ ve } \varphi(\dot{c}) = 0$$

olmak üzere $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde bulunan J -yörüngenin hareket denklemlerinden

$$\ddot{t} = q\lambda, \quad (3.13)$$

$$\overline{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c} = -q\dot{t}\xi \quad (3.14)$$

eşitlikleri elde edilir.

Yay parametresi koşulu ve (3.12) eşitliği birlikte göz önüne alınırsa

$$\dot{t}^2(s) + \lambda(s)^2 = 1 \quad (3.15)$$

olarak hesaplanır. (3.15) denkleminin türevi alınır ve (3.13) eşitliği kullanılırsa

$$\ddot{t}\dot{t} + \lambda\dot{\lambda} = \dot{t}q\lambda + \lambda\dot{\lambda} = 0$$

eşitliğinden

$$\lambda(\dot{\lambda} + q\dot{t}) = 0$$

olarak hesaplanır.

$\lambda = 0$ olması durumunda $\dot{c} = 0$ ve $\dot{t} = 1$ olur. Böylece p_0 noktası $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde sabit bir nokta olmak üzere $\gamma(s) = (s, p_0)$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda γ eğrisi bir geodezik eğridir. Dolayısıyla $q = 0$ olur, bu ise bir çelişkidir.

$\lambda \neq 0$ olması durumunda $\dot{\lambda} + q\dot{t} = 0$ olur. Son eşitliğin integrali alınırsa

$$\lambda + qt = aq, \quad a \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

elde edilir.

(3.13) ve (3.16) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\ddot{t} + q^2 t = aq^2$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin genel çözümü de

$$t(s) = a + \mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \quad (3.17)$$

biçimindedir. Son eşitlik yardımıyla

$$\lambda(s) = -q(\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs)), \quad (3.18)$$

olarak elde edilir. Yay parametresi koşulu

$$\begin{aligned} |\dot{c}(s)|^2 + \dot{t}(s)^2 &= \lambda(s)^2 + \dot{t}(s)^2, \\ &= \frac{1}{q^2}(\mu_1^2 + \mu_2^2), \\ &= 1 \end{aligned}$$

olmak üzere $q^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) = 1$ olarak hesaplanır.

Bu noktadaki amacımız elde ettiğimiz λ ifadesiyle birlikte (3.12) eşitliğini çözmektir.

Kompleks koordinat sistemde $c(s) = (z(s), w(s))$ olarak parametrelendirilmiş c eğrisi

$$|z(s)|^2 + |w(s)|^2 = 1$$

şartını sağlar.

$\dot{c}(s) = (\dot{z}(s), \dot{w}(s))$ ve $\xi(c(s)) = (iz(s), iw(s))$ olduğundan (3.12) denklemi ile

$$\begin{cases} \dot{z}(s) = i\lambda(s)z(s), \\ \dot{w}(s) = i\lambda(s)w(s) \end{cases} \quad (3.19)$$

denklemleri birbirine denktir.

Diğer taraftan $p_0 = (z_0, w_0) \in \mathbb{S}^3$, $\xi_0 = J_0 p_0 = (iz_0, iw_0)$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q^2(a^2 + b^2) = 1$ eşitliği ve

$$\gamma(0) = (0, p_0) \quad \text{ve} \quad \dot{\gamma}(0) = q(b, a\xi_0),$$

başlangıç koşulları altında $\mu_1 = -a$ ve $\mu_2 = b$ olarak elde edilir.

(3.18) eşitliğinde elde edilen λ değeri sayesinde,

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= -iq(\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs))z(s), \\ \dot{w}(s) &= -iq(\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs))w(s) \end{aligned}$$

olmak üzere, (3.19) diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$$\begin{aligned} z(s) &= z_0 e^{-i(b(\cos(qs)-1)+a\sin(qs))} \\ w(s) &= w_0 e^{-i(b(\cos(qs)-1)+a\sin(qs))} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak, $\varpi(s) = b(\cos(qs) - 1) + a\sin(qs)$ olmak üzere istenilen genel çözüm

$$z(s) = z_0 e^{i\varpi(s)} \quad \text{ve} \quad w(s) = w_0 e^{i\varpi(s)},$$

biçiminde yazılabilir. $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$ ve $p_0 = (z_0, w_0) = (x_0, y_0, u_0, v_0) \in \mathbb{S}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z(s) &= (x_0 + iy_0)(\cos \varpi(s) + i \sin \varpi(s)), \\ &= (x_0 \cos \varpi(s) - y_0 \sin \varpi(s)) + i(x_0 \sin \varpi(s) + y_0 \cos \varpi(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(s) &= (u_0 + iv_0)(\cos \varpi(s) + i \sin \varpi(s)), \\ &= (u_0 \cos \varpi(s) - v_0 \sin \varpi(s)) + i(u_0 \sin \varpi(s) + v_0 \cos \varpi(s)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c(s) &= \cos \varpi(s)(x_0, y_0, u_0, v_0) + \sin \varpi(s)(y_0, -x_0, v_0, -u_0), \\ &= \cos \varpi(s)p_0 + \sin \varpi(s)J_0p_0, \\ &= \cos \varpi(s)p_0 + \sin \varpi(s)\xi_0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Son olarak J -yörünge γ eğrisinin parametrizasyonu

$$\begin{cases} t(s) = a(1 - \cos(qs)) + b \sin(qs), \\ c(s) = \cos \varpi(s)p_0 + \sin \varpi(s)\xi_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

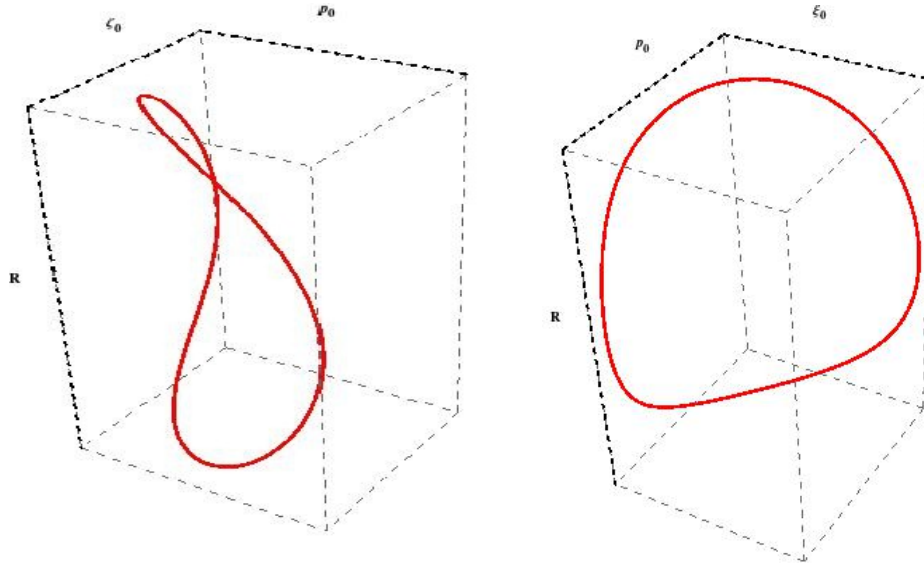
şeklinde verilir.

Uyarı 3.2 (3.20) eşitliğiyle verilen J -yörünge γ eğrisi M manifoldu üzerinde bir Riemann çemberidir.

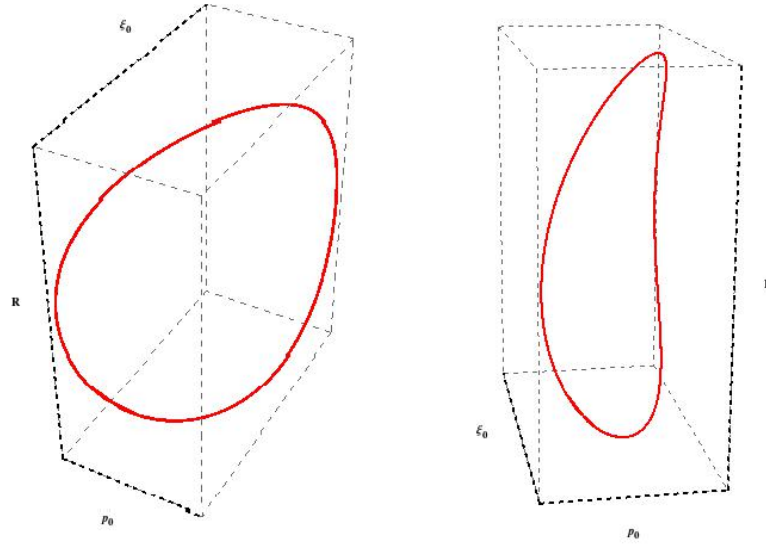
İspat. γ eğrisi, eğriligi $\kappa_1 = |q| = \text{sabit}$ ve $\kappa_2 = |\varphi\dot{c}| = 0$ olduğundan M manifoldu üzerinde bir Riemann çemberidir. ■

Uyarı 3.3 c eğrisi, $w_0z - z_0w = 0$ düzleminde yatan düzlemsel bir eğridir. Böylece $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki büyük çemberlere karşılık gelir.

$\{p_0, \xi_0, \mathbb{R}\}$ tarafından tanımlanan J -yörünge γ eğrilerinin grafikleri Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 de görülmektedir.



Şekil 3.1 J -yörünge, $q = 1$, $a = \frac{1}{2}$ ve $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Şekil 3.2 J -yörünge, $q = 2$, $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$ ve $b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}$

Durum 2. c eğrisinin $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde Legendre eğrisi olması, yani $\dot{c}(s) \in \ker \eta|_{c(s)}$ olması durumunda J -yörünge hareket denklemlerinden

$$t(s) = a_0 s, \quad (3.21)$$

ve

$$\bar{\nabla}_c \dot{c} = q (-a_0 \xi + \varphi \dot{c}), \quad (3.22)$$

olarak elde edilir. a_0 sabit bir reel sayı olmak üzere yay parametre şartı ve (3.21) eşitliği yardımıyla

$$|\dot{c}|^2 + a_0^2 = 1.$$

denklemi bulunur. Böylece $|a_0| \leq 1$ ve $|\dot{c}| = \sqrt{1 - a_0^2}$ olmak zorundadır. Kolayca gösterilebilir ki $a_0 = \pm 1$ olması durumunda $q = 0$ olduğundan bir çelişkidir. Sonuç olarak $a_0 \in (-1, 1)$ olmalıdır.

c eğrisi, $\bar{s} = \sqrt{1 - a_0^2} s$ yay parametresi ile parametrelendirilir ve c eğrisinin $\bar{s}$ parametresine göre türevi c' olarak alınırsa, $\mathbb{S}^3$ küresi, $\mathbb{E}^4$ Öklidyen uzayına gömülü olduğundan, (3.22) diferensiyel denklemi

$$(1 - a_0^2)(c'' + c) = q \left(-a_0 J_0 c + \sqrt{1 - a_0^2} J_0 c' \right) \quad (3.23)$$

olarak tekrar düzenlenir.

Son denklemin $J_0 c$ ile çarpılması ve $\langle c, J_0 c \rangle = 0$, $\langle c', J_0 c \rangle = 0$ ve $\langle c'', J_0 c \rangle = 0$

eşitlikleri yardımıyla

$$qa_0(1 - a_0^2) = 0$$

denklemini elde edilir.

$q \neq 0$ ve $a_0 \neq \pm 1$ olduğundan dolayı $a_0 = 0$ olmak zorundadır ve sonuç olarak

$$c'' + c = qJ_0c' \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilir.

Uyarı 3.4 c eğrisi $\overline{\nabla}_c c' = q\varphi c'$ Lorentz denklemini sağladığı için c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde aynı q yükü ile verilen bir normal manyetik eğridir. Bunun anlamı ise $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerindeki J -yörünge, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki manyetik eğrilerin genellemesidir.

(3.24) eşitliği ile verilen $c'' + c = qJ_0c'$ denkleminin çözümünü elde etmek için **Durum 1** de olduğu gibi, c eğrisini $\mathbb{C}^2$ uzayında bir eğri olarak düşünmek ve kompleks koordinat sisteminde çalışmak daha uygun olacaktır.

Yani c eğrisi, $|z(s)|^2 + |w(s)|^2 = 1$ olmak üzere

$$c(s) = (z(s), w(s)),$$

şeklinde parametrelendirilmiş olsun. Dikkat edilmelidir ki $a_0 = 0$ olduğundan $\bar{s} = s$ olarak elde edilir.

(3.24) eşitliği

$$(z''(s), w''(s)) + (z(s), w(s)) = q(iz'(s), iw'(s))$$

$$z''(s) - qiz'(s) + z(s) = 0, \quad w''(s) - qiw'(s) + w(s) = 0.$$

olarak yeniden düzenlenebilir.

Başlangıç koşullarının

$$c(0) = (1, 0, 0, 0) \text{ ve } c'(0) = (0, 0, 1, 0) \quad (3.25)$$

olarak belirlenmesi durumunda (3.24) eşitliğin genel çözümünü elde edilebilir.

$$z''(s) - qiz'(s) + z(s) = 0$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned}
z(s) &= c_1 \left(\cos \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \sin \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) + c_2 \left(\cos \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \sin \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s \right), \\
&= c_1 \left(\cos \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s - \sin \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) + i c_1 \left(\sin \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + \cos \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) \\
&\quad + c_2 \left(\cos \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + \sin \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) + i c_2 \left(\sin \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s - \cos \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
z(s) &= (c_1 + c_2) \cos \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + (c_2 - c_1) \sin \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \\
&\quad + i(c_1 + c_2) \sin \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + i(c_1 - c_2) \cos \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
z'(s) &= c_1 \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2} \left(-\sin \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \cos \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) \\
&\quad + c_2 \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2} \left(-\sin \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \cos \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3.25) denklemi ile verilen başlangıç koşulları dikkate alınırsa

$$z(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$z'(0) = c_1 \frac{q + \sqrt{q^2+4}}{2} + c_2 \frac{q - \sqrt{q^2+4}}{2} = 0$$

eşitliklerinden

$$c_1 = \frac{\sqrt{q^2+4} - q}{2\sqrt{q^2+4}}$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{q^2+4} + q}{2\sqrt{q^2+4}}$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde;

$$w''(s) - qi w'(s) + w(s) = 0,$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned}
w(s) &= d_1 \left(\cos \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \sin \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) + d_2 \left(\cos \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \sin \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s \right), \\
&= d_1 \left(\cos \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s - \sin \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) + i d_1 \left(\sin \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + \cos \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right)
\end{aligned}$$

$$+d_2 \left(\cos \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + \sin \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) + id_2 \left(\sin \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s - \cos \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w(s) &= (d_1 + d_2) \cos \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + (d_2 - d_1) \sin \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \\ &+ i(d_1 + d_2) \sin \frac{q}{2}s \cos \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s + i(d_1 - d_2) \cos \frac{q}{2}s \sin \frac{\sqrt{q^2+4}}{2}s \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} w'(s) &= d_1 \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2} \left(-\sin \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \cos \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) \\ &+ d_2 \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2} \left(-\sin \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s + i \cos \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}s \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3.25) denklemi ile verilen başlangıç koşulları dikkate alınırsa

$$w(0) = d_1 + d_2 = 0$$

$$w'(0) = d_1 \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2} + d_2 \frac{q-\sqrt{q^2+4}}{2} = -i$$

eşitliklerinden

$$d_1 = \frac{-i}{\sqrt{q^2+4}}$$

$$d_2 = \frac{i}{\sqrt{q^2+4}}$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıda yapılan hesaplamalar yardımıyla (3.24) eşitliğin genel çözümü

$$\begin{aligned} z(s) &= e^{iqs/2} \left(\cos \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} - \frac{iq}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \right), \\ w(s) &= \frac{2e^{iqs/2}}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2}. \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak J -yörünge γ eğrisinin parametrizasyonu

$$t(s) = 0,$$

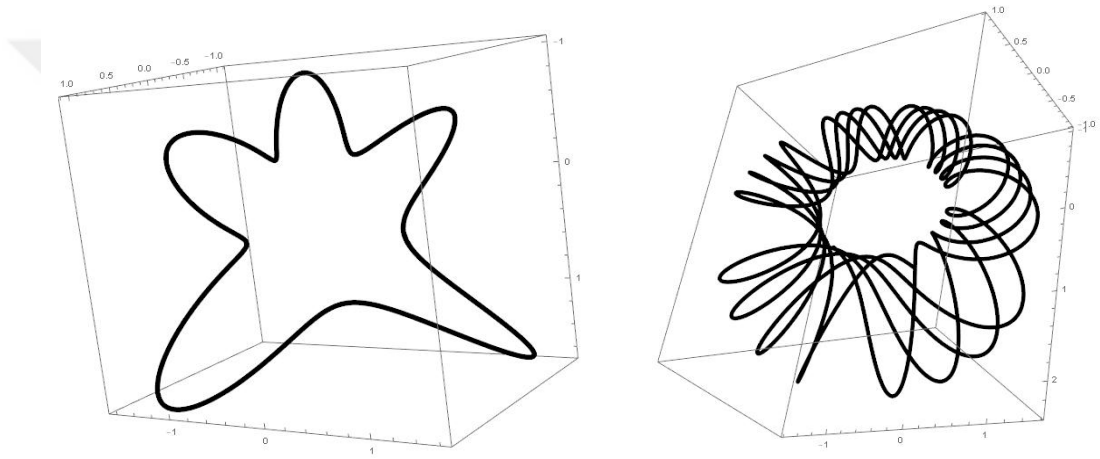
$$c(s) = e^{iqs/2} \left(\cos \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} - \frac{iq}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2}, \frac{2}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \right) \quad (3.26)$$

biçiminde verilir.

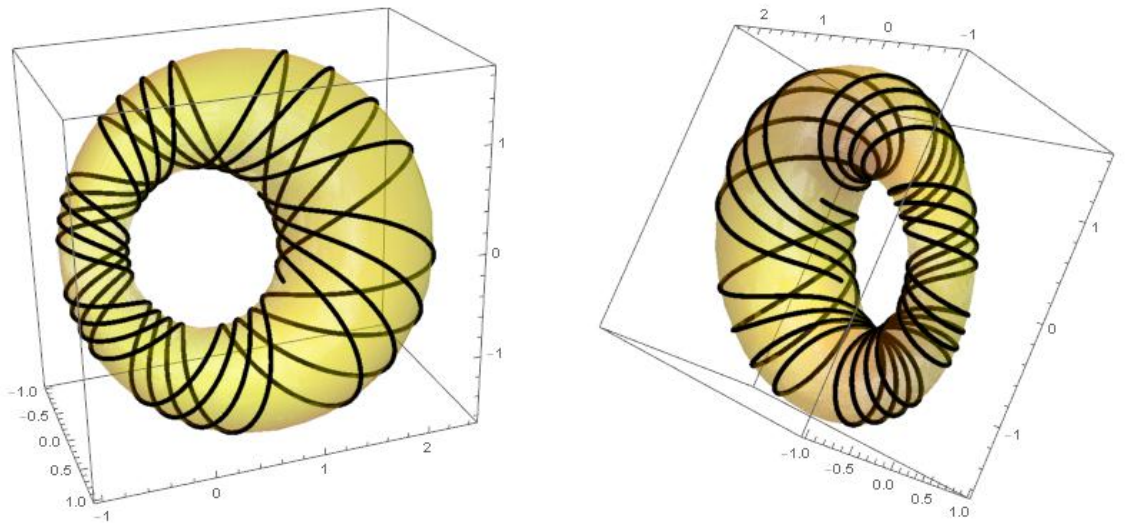
Uyarı 3.5 (3.26) eşitliğiyle verilen J -yörünge γ eğrisi $\kappa_1 = |q|$, $\kappa_2 = 1$ ve $\kappa_3 = 0$ eğriliklerine sahiptir.

Uyarı 3.6 $c(s) = e^{iqs/2}\beta(s)$ eğrisi $\mathbb{S}^3(1)$ küresinin büyük çemberleridir. Burada β eğrisi $2x^2 + qx^3 = 0$, $x^4 = 0$ düzleminde yatar, x^1, x^2, x^3 ve x^4 ise $\mathbb{E}^4$ uzayının kartezyen koordinatlarıdır.

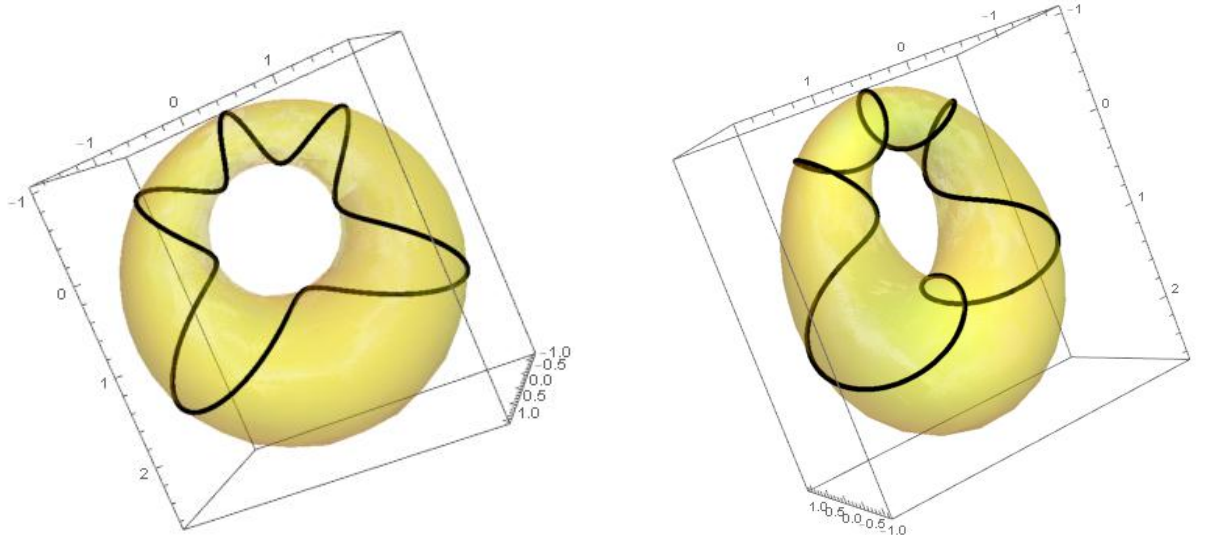
c eğrisinin iki özel durumda stereografik izdüşümlerinin grafikleri Şekil 3.3 - Şekil 3.5 de görülmektedir;



Şekil 3.3 c eğrisinin stereografik izdüşümleri, $q = \frac{4}{\sqrt{5}}$ (sol) ve $q = 2$ (sağ)



Şekil 3.4 c eğrisinin $\mathbb{S}^3$ küresinde tüp yüzeyine stereografik izdüşümü, $q = 2$



Şekil 3.5 c eğrisinin $\mathbb{S}^3$ küresinde tüp yüzeyine stereografik izdüşümü, $q = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde J -yörüngeleri, genel durumda aşağıda verilen özelliklere sahiptirler.

Daha önce de gördüğümüz gibi, $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerindeki J -yörüngeleri $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki manyetik eğrilerle ilişkilidir.

$(2n+1)$ - boyutlu Sasaki uzayında bir manyetik eğrinin mertebesi 3 ve ilk iki eğriliğinin sabit olduğu biliniyor. J -yörünge eğrisinin eğrilikleri hesaplanırsa maksimum 4. mertebeden olduğu görülmektedir.

Teorem 3.2 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile tanımlı birim hızlı J -yörünge olsun. γ eğrisinin ilk iki eğriliği sabit olmak üzere $\kappa_1 = |q|$, $\kappa_2 = |\varphi\dot{c}|$ ve $\kappa_3 = |\eta(\dot{c})|$ şeklindedir.

Önerme 3.2 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde bir J -yörünge γ eğrisinin $\{\dot{\gamma}, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ tarafından üretilen Frenet çatısı

$$\nu_1 = \epsilon \left(\eta(\dot{c}) \frac{d}{dt} - \dot{t} \xi + \varphi \dot{c} \right), \quad (3.27)$$

$$|\varphi \dot{c}| \nu_2 = \epsilon \left(-|\dot{c}|^2 \xi + \eta(\dot{c}) \dot{c} - \dot{t} \varphi \dot{c} \right), \quad (3.28)$$

$$|\varphi \dot{c}| \nu_3 = \epsilon \bar{\epsilon} \left(|\varphi \dot{c}|^2 \frac{d}{dt} + \dot{t} \eta(\dot{c}) \xi - \dot{t} \dot{c} - \eta(\dot{c}) \varphi \dot{c} \right) \quad (3.29)$$

olarak elde edilir. Burada $sgn(x)$ bir x reel sayısının işareti olmak üzere $\epsilon = sgn(q)$ ve $\bar{\epsilon} = sgn(\eta(\dot{c}))$ şeklinde tanımlıdır.

İspat. γ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerinde s yay parametrelili geodezik olmayan bir J -yörünge ve c eğrisi de $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde bir eğri olmak üzere,
 $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ eğrisi için J -yörünge tanımından $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = qJ\dot{\gamma}$ eşitliği sağlanır.
 γ eğrisinin Serret-Frenet formülleri yardımıyla

$$\kappa_1\nu_1 = qJ\dot{\gamma} \quad (3.30)$$

şeklinde yazılır. Son eşitlikte her iki tarafın normu alınırsa

$$\begin{aligned} g(\kappa_1\nu_1, \kappa_1\nu_1) &= g(qJ\dot{\gamma}, qJ\dot{\gamma}), \\ &= q^2g(J\dot{\gamma}, J\dot{\gamma}), \\ &= q^2g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \\ &= q^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\kappa_1 = |q| \quad (3.31)$$

olarak elde edilir. (2.15) eşitliği kullanılırsa ve (3.31) değeri (3.30) denkleminde yerine yazılırsa γ eğrisinin ν_1 birinci normal vektör alanı

$$\nu_1 = \epsilon \left(\eta(\dot{c}) \frac{d}{dt} - \dot{t}\xi + \varphi\dot{c} \right)$$

şeklinde elde edilir.

(3.30) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\kappa_1\nu_1 = -\kappa_1^2\dot{\gamma} + \kappa_1\kappa_2\nu_2$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}}qJ\dot{\gamma} &= q((\nabla_{\dot{\gamma}}J)\dot{\gamma} + J\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}), \\ &= q(\nabla_{\dot{\gamma}}J)\dot{\gamma} + q^2J^2\dot{\gamma}, \\ &= q(\nabla_{\dot{\gamma}}J)\dot{\gamma} - \kappa_1^2\dot{\gamma} \end{aligned}$$

eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\kappa_2\nu_2 = \epsilon q(\nabla_{\dot{\gamma}}J)\dot{\gamma}$$

şeklinde hesaplanır. (3.4) eşitliği yardımıyla son eşitlik

$$\kappa_2 \nu_2 = \epsilon(-\dot{t}\varphi\dot{c} - |\dot{c}|^2\xi + \eta(\dot{c})\dot{c}) \quad (3.32)$$

olarak yazılabilir. (3.32) denkleminde norm alınırsa

$$\begin{aligned} \kappa_2^2 &= |-\dot{t}\varphi\dot{c} - |\dot{c}|^2\xi + \eta(\dot{c})\dot{c}|^2, \\ &= \dot{t}^2 g(\varphi\dot{c}, \varphi\dot{c}) + |\dot{c}|^4 - \eta(\dot{c})^2 |\dot{c}|^2, \\ &= \dot{t}^2 (|\dot{c}|^2 - \eta(\dot{c})^2) + |\dot{c}|^4 - \eta(\dot{c})^2 |\dot{c}|^2, \\ &= |\dot{c}|^2 (\dot{t}^2 + |\dot{c}|^2) - \eta(\dot{c})^2 (\dot{t}^2 + |\dot{c}|^2), \\ &= (|\dot{c}|^2 - \eta(\dot{c})^2) (\dot{t}^2 + |\dot{c}|^2), \\ &= |\varphi\dot{c}|^2 (\dot{t}^2 + |\dot{c}|^2) \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. γ eğrisi yay parametreli bir eğri olduğundan

$$\kappa_2 = |\varphi\dot{c}|$$

eşitliği elde edilir. κ_2 ifadesinin (3.32) eşitliğinde yazılmasıyla

$$|\varphi\dot{c}|\nu_2 = \epsilon(-|\dot{c}|^2\xi + \eta(\dot{c})\dot{c} - \dot{t}\varphi\dot{c})$$

denklemi elde edilir. Ayrıca,

$$\dot{t}(s)^2 + |\dot{c}(s)|^2 = 1$$

eşitliğinin türevi alınır ve J -yörüngenin hareket denklemlerinden (3.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\dot{t}^2 + |\dot{c}|^2) &= \frac{d}{ds} |\dot{c}|^2 + 2\dot{t} \ddot{t}, \\ &= \frac{d}{ds} |\dot{c}|^2 + 2\dot{t}q\eta(\dot{c}), \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan

$$\kappa_2^2 = |\varphi\dot{c}|^2$$

eşitliğinin türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}g(\varphi\dot{c}, \varphi\dot{c}) &= \frac{d}{ds}\bar{g}(\dot{c}, \dot{c}) - \frac{d}{ds}(\bar{g}(\dot{c}, \xi)^2), \\
&= \frac{d}{ds}|\dot{c}|^2 - 2\bar{g}(\dot{c}, \xi)\frac{d}{ds}\bar{g}(\dot{c}, \xi), \\
&= \frac{d}{ds}|\dot{c}|^2 - 2\eta(\dot{c})(\bar{g}(\nabla_{\dot{c}}\dot{c}, \xi) + \bar{g}(\dot{c}, \nabla_{\dot{c}}\xi)), \\
&= \frac{d}{ds}|\dot{c}|^2 - 2\eta(\dot{c})\eta(\nabla_{\dot{c}}\dot{c}), \\
&= \frac{d}{ds}|\dot{c}|^2 - 2\eta(\dot{c})\eta(-tq\xi + q|\varphi\dot{c}|), \\
&= \frac{d}{ds}|\dot{c}|^2 + 2tq\eta(\dot{c}) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\kappa_2 = |\varphi\dot{c}|$ eğriliğinin sabit olduğu gösterilmiştir.

κ_3 eğriliğini ve ν_3 üçüncü normal vektör alanını elde etmek için (3.32) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}}\kappa_2\nu_2 &= \kappa_2(-\kappa_2\nu_1 + \kappa_3\nu_3), \\
&= -\kappa_2^2\nu_1 + \kappa_2\kappa_3\nu_3, \\
&= \epsilon(-\kappa_2^2\eta(\dot{c})\frac{d}{dt} + \kappa_2^2\dot{t}\xi - \kappa_2^2\varphi\dot{c}) + \kappa_2\kappa_3\nu_3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}}(-\dot{t}\varphi\dot{c} - |\dot{c}|^2\xi + \eta(\dot{c})\dot{c}) &= -\ddot{t}\varphi\dot{c} - \left(\frac{d}{ds}|\dot{c}|^2\right)\xi + \left(\frac{d}{ds}\eta(\dot{c})\right)\dot{c} - \dot{t}\bar{\nabla}_{\dot{c}}\varphi\dot{c} - |\dot{c}|^2\bar{\nabla}_{\dot{c}}\xi \\
&\quad + \eta(\dot{c})\bar{\nabla}_{\dot{c}}\dot{c}, \\
&= -q\eta(\dot{c})\varphi\dot{c} - \left(\frac{d}{ds}|\dot{c}|^2\right)\xi + \left(\frac{d}{ds}\eta(\dot{c})\right)\dot{c} - \dot{t}((\bar{\nabla}_{\dot{c}}\varphi)\dot{c} + \varphi\bar{\nabla}_{\dot{c}}\dot{c}) \\
&\quad - |\dot{c}|^2\varphi\dot{c} + \eta(\dot{c})(-qt\xi + q\varphi\dot{c}), \\
&= -\left(\frac{d}{ds}|\dot{c}|^2\right)\xi - \dot{t}(-\bar{g}(\dot{c}, \dot{c})\xi + \eta(\dot{c})\dot{c} + \varphi(-qt\xi + q\varphi\dot{c})) \\
&\quad - |\dot{c}|^2\varphi\dot{c} - qt\eta(\dot{c})\xi + \left(\frac{d}{ds}\eta(\dot{c})\right)\dot{c}, \\
&= -\left(\frac{d}{ds}|\dot{c}|^2\right)\xi - \dot{t}(-|\dot{c}|^2\xi + \eta(\dot{c})\dot{c} - q\dot{c} + q\eta(\dot{c})\xi) \\
&\quad - |\dot{c}|^2\varphi\dot{c} - qt\eta(\dot{c})\xi + \left(\frac{d}{ds}\eta(\dot{c})\right)\dot{c}, \\
&= \left(-\left(\frac{d}{ds}|\dot{c}|^2\right) + \dot{t}|\dot{c}|^2 - 2qt\eta(\dot{c})\right)\xi \\
&\quad + \left(-\dot{t}\eta(\dot{c}) + \dot{t}q + \frac{d}{ds}\eta(\dot{c})\right)\dot{c} - |\dot{c}|^2\varphi\dot{c}, \\
&= (2qt\eta(\dot{c}) + \dot{t}|\dot{c}|^2 - 2qt\eta(\dot{c}))\xi + (-\dot{t}\eta(\dot{c}) + \dot{t}q - qt)\dot{c} \\
&\quad - |\dot{c}|^2\varphi\dot{c}, \\
&= \dot{t}|\dot{c}|^2\xi - \dot{t}\eta(\dot{c})\dot{c} - |\dot{c}|^2\varphi\dot{c}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitlikler yardımıyla,

$$\begin{aligned}
k_2k_3\nu_3 &= \epsilon \left(k_2^2\eta(\dot{c})\frac{d}{dt} + (-k_2\dot{t} + |\dot{c}|^2\dot{t})\xi - \dot{t}\eta(\dot{c})\dot{c} + (k_2^2 - |\dot{c}|^2)\varphi\dot{c} \right), \\
&= \epsilon \left(k_2^2\eta(\dot{c})\frac{d}{dt} + \dot{t}\eta(\dot{c})^2\xi - \dot{t}\eta(\dot{c})\dot{c} - \eta(\dot{c})^2\varphi\dot{c} \right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

sonucuna ulaşılır. Son eşitlik düzenlenirse

$$\frac{k_2k_3}{\eta(\dot{c})}\nu_3 = \epsilon \left(k_2^2\frac{d}{dt} + \dot{t}\eta(\dot{c})\xi - \dot{t}\dot{c} - \eta(\dot{c})\varphi\dot{c} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{|\varphi(\dot{c})|^2 k_3^2}{\eta(\dot{c})^2} &= |\varphi(\dot{c})|^4 + \dot{t}^2 \eta(\dot{c})^2 + \dot{t}^2 \bar{g}(\dot{c}, \dot{c}) + \eta(\dot{c})^2 \bar{g}(\varphi \dot{c}, \varphi \dot{c}) - 2\dot{t}^2 \eta(\dot{c})^2, \\
&= |\varphi(\dot{c})|^4 + \dot{t}^2 \eta(\dot{c})^2 + \dot{t}^2 |\dot{c}|^2 + \eta(\dot{c})^2 (|\dot{c}|^2 - \eta(\dot{c})^2) - 2\dot{t}^2 \eta(\dot{c})^2, \\
&= |\varphi(\dot{c})|^4 - \dot{t}^2 \eta(\dot{c})^2 + \dot{t}^2 |\dot{c}|^2 + \eta(\dot{c})^2 (|\dot{c}|^2 - \eta(\dot{c})^2), \\
&= (|\varphi(\dot{c})|^2 + \eta(\dot{c})^2)(|\varphi(\dot{c})|^2 - \eta(\dot{c})^2) - \dot{t}^2 \eta(\dot{c})^2 + \dot{t}^2 |\dot{c}|^2 + \eta(\dot{c})^2 |\dot{c}|^2, \\
&= |\dot{c}|^2 |\varphi(\dot{c})|^2 + \dot{t}^2 (-\eta(\dot{c})^2 + |\dot{c}|^2), \\
&= |\varphi(\dot{c})|^2 (\dot{t}^2 + |\dot{c}|^2)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. γ eğrisi yay parametrelili bir eğri olduğundan

$$\kappa_3 = |\eta \dot{c}|$$

olarak elde edilir. κ_3 ifadesinin (3.33) eşitliğinde yazılmasıyla

$$|\varphi \dot{c}| \nu_3 = \epsilon \bar{\epsilon} \left(|\varphi \dot{c}|^2 \frac{d}{dt} + \dot{t} \eta(\dot{c}) \xi - \dot{t} \dot{c} - \eta(\dot{c}) \varphi \dot{c} \right)$$

eşitliği elde edilir. ■

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde J -yörüngenin üçüncü eğriliğinin genel olarak sabit olmadığına dikkat edilmelidir. Bu durum ise J -yörüngeleri ile Sasaki ya da kosimplektik manifoldlardaki kontak manyetik eğriler arasındaki önemli bir farktır. κ_3 eğriliğinin sabit olması durumunda $0 = \frac{d}{ds} \eta(\dot{c}) = -q\dot{t}$ olmalıdır. Sonuç olarak, hareket denklemlerinin birincisinden $\eta(\dot{c}) = 0$ elde edilir. Bu nedenle γ eğrisi $\{t_0\} \times \mathbb{S}^3$, $t_0 \in \mathbb{R}$ küresi üzerinde tanımlı bir Legendre kontak manyetik eğrisinden başka bir şey değildir ve **Durum 2** de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Sonuç olarak; J -yörünge eğrileri için genel durumda aşağıdaki önermeler verilebilir:

Önerme 3.3 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile tanımlı birim hızlı J -yörünge olsun. γ eğrisinin 3. mertebeden bir helis olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde bir Legendre kontak manyetik eğri olmasıdır.

Önerme 3.4 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile tanımlı birim hızlı J -yörünge olsun. γ eğrisinin bir Riemann çember olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin (3.20) eşitliğiyle parametrelendirilen bir J -yörünge olmasıdır.

İspat. γ eğrisinin Riemann çemberi olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin birinci eğriliğinin sabit ve ikinci eğriliğinin özdeş olarak sıfır olması gereklidir. Bu durum c eğrisinin ξ Reeb vektör alanının integral eğrisi olduğu anlamına gelir. Yani γ eğrisi daha önce belirtilen **Durum 1** ile örtüşür. ■

Uyarı 3.7

- J -yörünge γ eğrisinin ν_2 ikinci normal vektör alanı daima $T\mathbb{S}^3$ teğet uzayında yatar.
- c eğrisinin, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde Legendre eğri olması durumunda γ eğrisinin ν_1 birinci normal vektör alanı $T\mathbb{S}^3$ teğet uzayında yatar.

Önerme 3.5 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ şeklinde tanımlı birim hızlı J -yörünge olsun. c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde $c(s) = (z(s), w(s))$ olarak parametrelendirilmiş bir eğri ve t de $\mathbb{R}$ üzerinde global koordinat sistemi olmak üzere, $t(0) = 0$ ve $\dot{t}(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$t(s) = a(1 - \cos(qs)), \quad (3.34)$$

olarak elde edilir. z ve w kompleks fonksiyonları da $|z(s)|^2 + |w(s)|^2 = 1$ eşitliği altında

$$\ddot{Z}(s) - qi \dot{Z}(s) + f(s)Z(s) = 0, \quad (3.35)$$

diferensiyel denklemini sağlar. Burada a reel sayı, $|aq| \leq 1$ ve

$$f(s) = 1 - a^2 q^2 \sin^2(qs) - aq^2 \cos(qs) + iaq^2 \sin(qs)$$

olarak tanımlıdır.

İspat. J -yörünge hareket denklemlerinden (3.5) eşitliğinin türevi alınır

$$\ddot{t} = q \frac{d}{ds} \eta(\dot{c})$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \eta(\dot{c}) &= \frac{d}{ds} \bar{g}(\dot{c}, \xi), \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_c \dot{c}, \xi) + \bar{g}(\dot{c}, \bar{\nabla}_c \xi), \\ &= q\bar{g}(\xi, -\dot{t}\xi + \varphi\dot{c}), \\ &= -q\dot{t} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla

$$\ddot{t} + q^2 t = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin genel çözümü de

$$t(s) = a + \mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

biçimindedir. $t(0) = 0$ ve $\dot{t}(0) = 0$ başlangıç koşulları altında

$$t(s) = a (1 - \cos(qs)), \quad |aq| \leq 1$$

şeklinde elde edilir. $\mathbb{S}^3$ küresi $\mathbb{E}^4$ Öklidyen uzayına gömülü olduğundan, $\xi = J_0 c$ ve $\varphi \dot{c} = J_0 \dot{c} + \eta(\dot{c})c$ eşitlikleri yardımıyla J -yörüngenin hareket denklemlerinden (3.6) eşitliği

$$\ddot{c} + (1 - \dot{t}^2)c = -q\dot{t}J_0 c + qJ_0 \dot{c} + q\eta(\dot{c})c \quad (3.36)$$

olarak yazılabilir. $\ddot{t} = q\eta(\dot{c})$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.36) eşitliği de

$$\ddot{z}(s) - qi \dot{z}(s) + f(s)z(s) = 0 \quad \text{ve} \quad \ddot{w}(s) - qi \dot{w}(s) + f(s)w(s) = 0$$

eşitliklerine denktir. ■

3.1 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ Çarpım Manifoldunda Periyodik J -yörüngeler

Dinamik sistemlerde güzel bir problem şu şekildedir:

Belirli bir hareket denklemi için, eğer varsa, periyodik çözümler üzerinde çalışmak.

Bu bölümde, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerine izdüşümleri Legendre eğri olan, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerindeki J -yörüngelerin periyodik olma şartları gösterilmiştir.

Önerme 3.6 $\dot{c}$ ile ξ karakteristik vektör alanı paralel olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile verilen birim hızlı J -yörünge olsun. Bu durumda γ eğrisi daima periyodik bir eğridir ve temel periyodu $\frac{2\pi}{q}$ ya eşittir.

İspat. Kabul edelim ki $\dot{c}$ ile ξ karakteristik vektör alanı paralel olsun. Bu durumda γ eğrisi (3.20) eşitliği ile parametrelendirilebilir. γ eğrisi periyodik bir eğri olması için $\gamma(s + T) = \gamma(s)$ eşitliğini sağlayan bir $T > 0$ pozitif sayısının olması gereklidir.

Kolay bir hesaplamayla γ eğrisinin temel periyodu $\frac{2\pi}{q}$ olan periyodik bir eğri olduğu gösterilebilir. ■

Aşağıda verilen teorem, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerine izdüşümleri Legendre eğri olan $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ manifoldu üzerindeki J -yörüngelerin periyodikliği için eşdeğer bir koşul sağlar.

Teorem 3.3 c eğrisi, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde Legendre eğri olmak üzere $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile tanımlı birim hızlı J -yörünge olsun. γ eğrisinin periyodik olması için gerek ve yeter şart $\frac{q}{\sqrt{q^2 + 4}}$ ifadesinin bir rasyonel sayı olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki c eğrisi, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde Legendre eğri olmak üzere $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile tanımlı J -yörünge olsun. Bu durumda γ eğrisi (3.26) eşitliği ile parametrelendirilebilir.

γ eğrisin periyodu $T > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z(s+T) - z(s) &= e^{iqs/2} \left[e^{iqT/2} \left(\cos \frac{(s+T)\sqrt{q^2+4}}{2} - \frac{iq}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{(s+T)\sqrt{q^2+4}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} + \frac{iq}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \right], \\ w(s+T) - w(s) &= \frac{2e^{iqs/2}}{\sqrt{q^2+4}} \left[e^{iqT/2} \left(\sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \cos \frac{T\sqrt{q^2+4}}{2} + \cos \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \sin \frac{T\sqrt{q^2+4}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \right], \end{aligned}$$

elde edilir.

γ eğrisinin periyodik olması için $k, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{T\sqrt{q^2+4}}{2} = 2k\pi$ ve $\frac{Tq}{2} = 2m\pi$ koşulları sağlanmalıdır. Sonuç olarak $\frac{q}{\sqrt{q^2+4}}$ ifadesi bir rasyonel sayı olmalıdır.

Diğer taraftan, kabul edelim ki $\frac{q}{\sqrt{q^2+4}} = \frac{m}{k}$ olmak üzere $m \neq 0$, k pozitif bir tam-

sayı ve $\text{ebob}(m, k) = 1$ olsun. $T = 2\pi\sqrt{k^2 - m^2}$ olması durumunda $\frac{T\sqrt{q^2+4}}{2} = 2k\pi$ ve $\frac{Tq}{2} = 2m\pi$ elde edilir. Dolayısıyla γ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde bir periyodik eğridir. ■

3.2 $\mathbb{S}^3$ Küresi Üzerinde Tanımlı c Eğrisi İçin Kontak Açısı

$\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde tanımlanan bir c eğrisinin kontak açısı θ olsun. Diğer bir ifadeyle θ açısı $\dot{c}(s)$ ve $\xi(c(s))$ arasındaki açı olsun. Bu durumda

$$\cos \theta(s) = \frac{\langle \dot{c}(s), \xi(c(s)) \rangle}{|\dot{c}(s)|} \quad (3.37)$$

eşitliği sağlanır.

(3.37) eşitliğinden $\eta(\dot{c}) = |\dot{c}(s)| \cos \theta(s)$ elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds} \eta(\dot{c}) = \left(\frac{d}{ds} |\dot{c}(s)| \right) \cos \theta(s) - |\dot{c}(s)| \dot{\theta}(s) \sin \theta(s) \quad (3.38)$$

denklemi elde edilir. Diğer taraftan biliyoruz ki

$$\frac{d}{ds} \eta(\dot{c}) = -q\dot{t} \text{ ve } \frac{d}{ds} |\dot{c}(s)| = -q\dot{t} \cos \theta(s) \quad (3.39)$$

eşitlikleri sağlanır. (3.38) ve (3.39) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} -q\dot{t} &= -q\dot{t} \cos^2 \theta(s) - |\dot{c}(s)| \dot{\theta}(s) \sin \theta(s) \\ q\dot{t} \sin^2 \theta(s) &= |\dot{c}(s)| \dot{\theta}(s) \sin \theta(s) \end{aligned}$$

ve son eşitliğin düzenlenmesiyle

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin \theta(s)} = \frac{q\dot{t}}{|\dot{c}(s)|} \quad (3.40)$$

eşitliği elde edilir.

Dikkat edilmelidir ki θ açısının sabit olması yani c eğrisinin bir slant eğri olması için gerek ve yeter şart $q\dot{t} \sin^2 \theta = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bunun için de aşağıdaki iki durumdan en az birinin sağlanması gerekmektedir.

- $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$, yani c eğrisi ξ vektör alanına teğettir,
- $\dot{t} = 0$, bu durumda $\theta = \frac{\pi}{2}$ olmalıdır, yani c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde bir Legendre eğri olmalıdır.

θ açısının $0, \frac{\pi}{2}$ ve π den farklı olması durumunda hareket denklemlerinin birincisinden dolayı

$$\ddot{t} = q|\dot{c}(s)| \cos \theta(s) \quad (3.41)$$

yazılabilir.

Diğer taraftan Önerme 3.5 yardımıyla (t için aynı başlangıç koşulları altında)

$$t(s) = a + \mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs), \quad (3.42)$$

a, μ_1 ve μ_2 birer reel sayı olmak üzere $q^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) \leq 1$ eşitsizliği sağlanır.

(3.40) ve (3.41) denklemleri birlikte kullanılırsa

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin \theta(s) \cos \theta(s)} = -\frac{q(\mu_2 \cos(qs) - \mu_1 \sin(qs))}{\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs)} \quad (3.43)$$

elde edilir. (3.43) eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$\tan \theta(s) = \frac{\mu_0}{\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs)}$$

olarak hesaplanır. Burada $\mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{1}{q^2}$ olmak üzere μ_0 sabit bir reel sayıdır.

Dikkat edilmelidir ki $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ durumunda $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$ olmak zorundadır.

Önerme 3.7 c eğrisi, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde Legendre eğri olmayan bir eğri olmak üzere $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile tanımlı birim hızlı J -yörünge olsun. Bu durumda c eğrisinin kontakt açısı

$$\theta(s) = \arctan \left(\frac{\mu_0}{\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs)} \right), \quad (3.44)$$

olarak elde edilir. μ_0, μ_1 ve μ_2 reel sayılar olmak üzere $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$ eşitsizliği sağlanır.

4. HOPF FİBRASYON

Bu bölümde, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ uzayındaki bir J -yörünge'nin $\mathbb{S}^3$ bileşeninin dinamikleri ile ilgileniyoruz. Hopf fibrasyonu yardımıyla, $\mathbb{S}^2$ küresi üzerindeki izdüşüm eğrisinin geometrik özellikleri ele alınmaktadır. İzdüşüm eğrisinin $\mathbb{E}^3$ uzayında olduğu göz önüne alınarak bu eğrinin eğriliğini ve torsiyonu belirlenmiştir. Uzay eğrilerin temel teoremini kullanarak ve Mathematica programı yardımıyla bazı örnekler verilmiştir. Hopf dönüşüm yaklaşımının diğer diferansiyel geometri problemlerinde de kullanıldığını belirtmekte fayda var. Bunlardan biri Onnis, Passamani ve Piu tarafından verilen Lorentzian Berger küresi üzerinde sabit açılı yüzeyler üzerine yapılan çalışmadır (Onnis vd. 2018). Hopf tüpleri farklı alanlarda da ele alınmıştır. Örneğin, Tamura tarafından $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki iki helisel geodezikler ($\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde sabit eğrilik ve burulmaya sahip olan ve aynı zamanda yüzey üzerinde geodezik olan bir eğri) ile verilen yüzeylerin çalışmasında da incelenmiştir (Tamura 2004).

4.1 Hopf Fibrasyon Altında Geometrik Özellikler

$\pi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow \mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ şeklinde tanımlanan Hopf fibrasyonun bazı temel özelliklerini verelim.

$\mathbb{C}^2$ uzayının Kähler yapısından indirgenen $(\varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ kanonik Sasaki yapısına sahip olan birim küre

$$\mathbb{S}^3(1) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

olmak üzere Hopf fibrasyonu

$$\pi(z, w) = \left(z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{S}^3(1)$ birim küresi üzerindeki metrik $\bar{g}$ ve $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerindeki metrik $\hat{g}$ ile verilsin.

$\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ küresinin standart kompleks yapısı $\hat{J}$ olmak üzere

$$\pi_* \circ \varphi = \hat{J} \circ \pi_* \quad (4.2)$$

eşitliği gerçekleşir.

Diğer taraftan $\mathbb{S}^3(1)$ birim küresi

$$\mathbb{S}^3(1) \equiv \{p = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{R}^4$ uzayının kuaterniyonik yapısı yardımıyla $p = a + ib + jc + kd$ olarak yazılabilir. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ eşitlikleri yardımıyla da i, j ve k nin mümkün olan tüm çarpımları belirlenir. Böylece, $\mathbb{S}^3$ küresi birim kuaterniyonların kümesi olarak $\mathbb{S}^3 \equiv \{p \in \mathbb{H} : \|p\| = 1\}$ şeklinde ifade edilebilir. Herhangi bir $p \in \mathbb{S}^3$ için

$$\begin{aligned} ip &= -b + ia - jd + kc, \\ jp &= -c + id + ja - kb, \\ kp &= -d - ic + jb + ka. \end{aligned} \tag{4.3}$$

vektörleri elde edilir.

$\mathbb{R}^4$ uzayının Öklidyen bazına göre bileşenleri ip , jp ve kp ile aynı olacak şekilde aşağıdaki üç vektör alanını tanımlayalım,

$$\begin{aligned} \xi = ip &= (-b, a, -d, c), \\ e_1 = jp &= (-c, d, a, -b), \\ e_2 = kp &= (-d, -c, b, a). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Verilen vektör alanlarının birer diferensiyellenebilir birim vektör alanı olduğu ve $\mathbb{S}^3$ küresinde verilen $p = (a, b, c, d)$ birim pozisyon vektörüne ortogonal olduğu aşikardır. Bunun anlamı ise ξ, e_1 ve e_2 vektör alanları $(\mathbb{S}^3, \bar{g})$ manifoldu üzerindeki birim teğet vektör alanlarıdır.

Böylece herhangi bir $p \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H} \setminus \{0\}$ için $T_p \mathbb{S}^3$ teğet uzayı $\{\xi, e_1, e_2\}$ ortonormal bazları tarafından gerilir.

$p = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ için aşağıda verilen dönüşümü göz önüne alalım,

$$\pi_0 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi_0(a, b, c, d) = (ac + bd, bc - ad, \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)), \tag{4.5}$$

$p \in \mathbb{R}^4$ bir kuaterniyon olarak düşünülmesi durumunda $\mathbb{R}^3$ uzayında $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ permütasyonu ile birlikte

$$\pi_0(p) = \bar{p} \frac{i}{2} p \quad (4.6)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $\pi_0(p) \in \text{Im}(\mathbb{H})$ bir imajiner kuaterniyondur ve böylece $\mathbb{R}^3$ uzayının bir elamanı olarak tanımlanabilir.

Dolayısıyla π_0 dönüşümü $\mathbb{H}$ kuaterniyon uzayından imajiner kuaterniyonlara tanımlı bir dönüşümdür ve $\pi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow \mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ olarak kısıtlanabilir. $\mathbb{S}^3(1)$ küresinin π_0 dönüşümü altındaki resmi $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ olarak elde edilir.

π_0 dönüşümünün türev dönüşümü $X \in T_p\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\pi_{0,*} : \mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^3 \equiv \text{Im}(\mathbb{R}^3), \quad \pi_{0,*}(X) = \text{Im}(\bar{X}ip),$$

şeklinde hesaplanır.

Keyfi $p \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H} \setminus \{0\}$ noktasında π_0 dönüşümünün diferensiyelini hesaplayalım.

İlk olarak

$$\pi_{0,*}(p) = 2\pi_0(p)$$

eşitliği elde edilir. Bunun anlamı ise p pozisyon vektörü $\pi_{0,*}$ dönüşümü yardımıyla $\pi_0(p)$ pozisyon vektörüne resmedilir.

Ayrıca, X vektör alanı p pozisyon vektörüne ortogonal ise $\pi_{0,*}(X)$ da $\pi_0(p)$ pozisyon vektörüne ortogonaldır.

Tersine bir q kuaterniyonu, $\bar{p} \frac{i}{2} p$ imajiner kuaterniyonuna ortogonal ise p pozisyon vektörüne ortogonal olan bazı X vektör alanları için $q = \bar{X} \frac{i}{2} p + \bar{p} \frac{i}{2} X$ olarak yazılabilir. Örneğin, $p = 1$ için q vektörü j ve k vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde olmalıdır. Kolay bir hesaplama ile $X = \langle q, k \rangle j - \langle q, j \rangle k$ şeklinde tek türlü olmayacağı gösterilebilir.

Herhangi bir $p \in \mathbb{S}^3$ için $\{\xi, e_1, e_2\}$ ortonormal çatısı göz önüne alınırsa σ_0 permütasyonuyla

$$\pi_{0,*}(\xi) = 0, \quad \pi_{0,*}(e_1) = \bar{p}kp := \hat{e}_1, \quad \pi_{0,*}(e_2) = -\bar{p}jp := \hat{e}_2, \quad (4.7)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak $T_{\pi(p)}\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ uzayı $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ bazları tarafından gerilir.

$\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $\overline{\nabla}$ ve $\mathbb{R}^4$ üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $\overset{\circ}{\nabla}$ olmak üzere $X, Y \in T_p\mathbb{S}^3$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \overline{g}(X, Y)p$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece $\{\xi, e_1, e_2\}$ bazları tarafından $\overline{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonu

$$\overline{\nabla}_X \xi = iX + \eta(X)p, \quad \overline{\nabla}_X e_1 = jX + \overline{g}(X, e_1)p, \quad \overline{\nabla}_X e_2 = kX + \overline{g}(X, e_2)p,$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_\xi \xi &= 0 & \overline{\nabla}_\xi e_1 &= -e_2 & \overline{\nabla}_\xi e_2 &= e_1 \\ \overline{\nabla}_{e_1} \xi &= e_2 & \overline{\nabla}_{e_1} e_1 &= 0 & \overline{\nabla}_{e_1} e_2 &= -\xi \\ \overline{\nabla}_{e_2} \xi &= -e_1 & \overline{\nabla}_{e_2} e_1 &= \xi & \overline{\nabla}_{e_2} e_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklindedir.

$\mathbb{S}^3$ üzerindeki hemen hemen kontak yapı (φ, ξ, η)

$$\begin{aligned} \varphi \xi &= 0 & \varphi e_1 &= e_2 & \varphi e_2 &= -e_1 \\ \eta(\xi) &= 1 & \eta(e_1) &= 0 & \eta(e_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

ile verilir.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ şeklinde tanımlı birim hızlı J -yörünge olsun. c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde parametrelendirilmiş bir eğri olmak üzere

$$\hat{c} = \pi(c) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$$

eğrisi c eğrisinin Hopf dönüşümü altında izdüşüm eğrisi olsun.

Öncelikle, c eğrisinin iki özel durum için Hopf fibrasyon altında nasıl davrandığı incelenecektir. Daha sonra genel durumda c eğrisinin bazı geometrik özellikleri verilecektir.

Durum 1 : c eğrisinin Reeb vektör alanına paralel olması durumunda, c eğrisinin π dönüşümü altındaki $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi $\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$ küresi üzerinde bir nokta belirtir.

Aynı zamanda (3.20) eşitliğinden $\varpi(s) = b(\cos(qs) - 1) + a \sin(qs)$ sürekli bir fonksiyon, $p_0 \in \mathbb{S}^3$ ve $\xi_0 = ip_0 \in T_{p_0}\mathbb{S}^3$ olmak üzere

$$c(s) = \cos \varpi(s)p_0 + \sin \varpi(s)\xi_0$$

olduğu biliniyor. Sonuç olarak,

$$\dot{c}(s) = i\dot{\omega}(s)c(s) = \dot{\omega}(s)\xi(c(s))$$

elde edilir ve böylece c eğrisi Reeb vektör alanına paraleldir.

Diğer taraftan, $p_0 \in \mathbb{S}^3$ belirli sabit bir nokta olsun. $\forall p \in \mathbb{S}^3$ noktasında

$\pi_0(p) = \pi_0(p_0)$ eşitliğinin sağlanması için $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p = e^{it}p_0$ şeklinde olmalıdır. p_0 noktası boyunca $\mathbb{S}^1 = \{e^{it}p_0 : t \in \mathbb{R}\}$ fibresi de $\pi_0(p_0) \in \mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ noktasına izdüşüm sağlar. Son olarak; bu fibrenin $p = e^{it}p_0$ noktasındaki teğet vektör alanı, p noktasında tanımlı olan $\xi_0 = ip_0$ Reeb vektör alanıdır.

Durum 2 : c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde Legendre eğrisi olsun, yani $\dot{c}(s) \in \ker \eta|_{c(s)}$.

Bu durumda (3.26) eşitliğinden

$$c(s) = e^{iqs/2} \left(\cos \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} - \frac{iq}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2}, \frac{2}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \right)$$

olmak üzere c eğrisinin π dönüşümü altındaki $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi

$$\begin{aligned} \hat{c}(s) := \pi(c(s)) = & \left(\frac{2}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \left(\cos \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} - \frac{iq}{\sqrt{q^2+4}} \sin \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \right), \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} + \frac{q^2-4}{q^2+4} \sin^2 \frac{s\sqrt{q^2+4}}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak elde edilir.

$\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ uzayının Öklidyen koordinatları X , Y ve Z olmak üzere, $\hat{c}$ eğrisi $\frac{1}{q} Y - \frac{1}{2} Z + \frac{1}{4} = 0$ düzlemi ile $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ küresinin arakesiti olan bir küçük çember olarak elde edilir. Bu özelliğin eliptik Sasakian uzay formlarındaki kontak manyetik eğrileri için elde edilenlere benzer olduğuna dikkat edilmelidir (Cabrerizo vd. 2009).

Bundan sonra verilen tüm sonuçlar c eğrisinin genel durumunda sağlanır.

Önerme 4.1 $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ eğrisi (3.5) ve (3.6) eşitliklikleri ile verilen hareket denklemini sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda $\alpha(s) = T_0(s)i + T_1(s)j + T_2(s)k$ imajiner kuaterniyonun bileşenleri

$$\begin{aligned} T_0(s) &= -q(\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs)), \\ T_1(s) &= \lambda_1 \cos(qs) + \lambda_2 \sin(qs), \\ T_2(s) &= \lambda_1 \sin(qs) - \lambda_2 \cos(qs) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\dot{c}(s) = \alpha(s)c(s),$$

lineer kuaterniyonik diferensiyel denklemi sağlanır ve $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ reel sabitleri $q^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ eşitliğini sağlar.

İspat. $\dot{c}(s)$ hız vektörü

$$\dot{c}(s) = T_0(s)\xi_{|c(s)} + T_1(s)e_{1|c(s)} + T_2(s)e_{2|c(s)}$$

şeklinde tanımlanırsa (4.8) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s) &= \dot{T}_0(s)\xi_{|c(s)} + \dot{T}_1(s)e_{1|c(s)} + \dot{T}_2(s)e_{2|c(s)} \\ &\quad + T_0(s)(T_0(s)\overline{\nabla}_{\xi_{|c(s)}}\xi_{|c(s)} + T_1(s)\overline{\nabla}_{e_{1|c(s)}}\xi_{|c(s)} + T_2(s)\overline{\nabla}_{e_{2|c(s)}}\xi_{|c(s)}) \\ &\quad + T_1(s)(T_0(s)\overline{\nabla}_{\xi_{|c(s)}}e_{1|c(s)} + T_1(s)\overline{\nabla}_{e_{1|c(s)}}e_{1|c(s)} + T_2(s)\overline{\nabla}_{e_{2|c(s)}}e_{1|c(s)}) \\ &\quad + T_2(s)(T_0(s)\overline{\nabla}_{\xi_{|c(s)}}e_{2|c(s)} + T_1(s)\overline{\nabla}_{e_{1|c(s)}}e_{2|c(s)} + T_2(s)\overline{\nabla}_{e_{2|c(s)}}e_{2|c(s)}), \\ &= \dot{T}_0(s)\xi_{|c(s)} + \dot{T}_1(s)e_{1|c(s)} + \dot{T}_2(s)e_{2|c(s)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. (3.5) hareket denklemi ve $t(s) = a + \mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs)$ eşitliği birlikte göz önüne alınırsa

$$T_0(s) = \eta(\dot{c}(s)) = -q(\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs)) \quad (4.12)$$

şeklinde hesaplanır. Diğer taraftan (3.6) hareket denklemi ve (2.3) yardımıyla

$$\overline{\nabla}_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s) = q(q(\mu_1 \sin(qs) - \mu_2 \cos(qs))\xi_{|c(s)} - T_2(s)e_{1|c(s)} + T_1(s)e_{2|c(s)}) \quad (4.13)$$

eşitliği bulunur.

(4.11) ve (4.13) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} \dot{T}_1(s) &= -qT_2(s), \\ \dot{T}_2(s) &= qT_1(s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

olarak bulunur. Yukarıda verilen denklemlerin çözümü sonucu

$$\begin{aligned} T_1(s) &= \lambda_1 \cos(qs) + \lambda_2 \sin(qs) \\ T_2(s) &= \lambda_1 \sin(qs) - \lambda_2 \cos(qs) \end{aligned} \quad (4.15)$$

değerleri hesaplanır ve $q^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ eşitliği sağlanır. ■

$\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ Hopf dönüşümü altında, $\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki c eğrisinin izdüşüm eğrisi olan $\hat{c} = \pi(c) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ eğrisinin bazı geometrik özelliklerini verelim:

Teorem 4.1 $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ eğrisi (3.5) ve (3.6) denklemleri ile verilen hareket denklemlerini sağlasın. Hopf dönüşümü yardımıyla elde edilen $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin $\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerindeki geodezik eğriliği

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\lambda} \left| q(1 + 2\mu_1 \cos(qs) + 2\mu_2 \sin(qs)) \right|, \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlanır. λ, μ_1, μ_2 ve q reel sabitler olmak üzere $\lambda > 0$ ve $q^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \lambda^2 = 1$ eşitliği gerçekleşir.

Teorem 4.2 $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ eğrisi (3.5) ve (3.6) denklemleri ile verilen hareket denklemlerini sağlasın. Hopf dönüşümü yardımıyla elde edilen $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi $\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerinde bir Kähler manyetik eğridir.

İspat. $\hat{c} = \pi(c) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ eğrisi c eğrisinin Hopf dönüşümü yardımıyla elde edilen izdüşüm eğrisi olsun.

$$\begin{aligned} \hat{c}'(s) &= \pi_{c(s),*} \dot{c}(s) \\ &= \pi_{c(s),*} (T_0(s)\xi_{|c(s)} + T_1(s)e_{1|c(s)} + T_2(s)e_{2|c(s)}) \\ &= T_1(s)\hat{e}_1 + T_2(s)\hat{e}_2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde elde edilir ve (4.7) eşitliği yardımıyla

$$\mathcal{J}(s) := -\text{Im}(\alpha(s)i) = T_1(s)k - T_2(s)j$$

olmak üzere

$$\hat{c}'(s) = \bar{c}(s)\mathcal{J}(s)c(s)$$

olarak yazılır.

Aynı zamanda

$$\left| \hat{c}'(s) \right|^2 = T_1^2(s) + T_2^2(s) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 := \lambda^2 \quad (4.18)$$

elde edilir. Kolayca gösterilebilir ki;

$$\alpha(s) = (T_0(s) + \mathcal{J}(s))i, \quad \mathcal{J}(s)i = -i\mathcal{J}(s), \quad (4.19)$$

$$\mathcal{J}(s)^2 = -|\mathcal{J}(s)|^2, \quad \mathcal{J}'(s) = qi\mathcal{J}(s) \quad (4.20)$$

eşitlikleri sağlanır.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\hat{c}''(s) &= (\bar{c}(s)\mathcal{J}(s)c(s))', \\
&= \bar{c}(s)[- \alpha(s)\mathcal{J}(s) + \mathcal{J}'(s) + \mathcal{J}(s)\alpha(s)]c(s), \\
&= \bar{c}(s)[-2|\mathcal{J}(s)|^2 + (2T_0(s) - q)\mathcal{J}(s)]ic(s)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olur ve bu eşitlik sayesinde

$$|\hat{c}''(s)|^2 = \lambda^2 [4\lambda^2 + (2T_0(s) - q)^2]$$

olarak hesaplanır. $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresi üzerindeki $\hat{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonu,

$$\hat{\nabla}_U V = \overset{\circ}{\nabla}_U V + 4\hat{g}(U, V)x \tag{4.22}$$

şeklinde tanımlıdır. U, V vektör alanları $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresinin tanjant uzayında, x noktası $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresi üzerinde keyfi bir nokta ve $\overset{\circ}{\nabla}$ ise $\mathbb{R}^3$ küresi üzerindeki Öklidyen koneksiyondur.

Yukarıda verilen koneksiyon özellikleri yardımıyla

$$\hat{\nabla}_{\hat{c}(s)'} \hat{c}(s)' = \hat{c}''(s) + 4|\hat{c}'(s)|^2 \hat{c}(s)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.21) eşitliğinden ve $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin imajiner kuaterniyon ile verilen tanımından $\hat{c}(s) = \bar{c}(s)\frac{i}{2}c(s)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_{\hat{c}(s)'} \hat{c}(s)' &= (2T_0(s) - q)\bar{c}(s)(T_1(s)j + T_2(s)k)c(s), \\
&= (2T_0(s) - q)\bar{c}(s)\mathcal{J}(s)ic(s)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklinde hesaplanır.

(4.18) eşitliği göz önüne alınırsa $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi yay parametrelili bir eğri değildir. $\hat{c}$ eğrisinin yay parametresi $\hat{s}$ olmak üzere $\hat{s} = \lambda s$ eşitliği gerçekleşir. Böylece $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin birim normal vektör alanı $\hat{\nu}$ olmak üzere (4.23) eşitliği

$$\lambda^2 \kappa(\hat{s})\hat{\nu}(\hat{s}) = (2T_0(s) - q)\bar{c}(s)\mathcal{J}(s)ic(s) \tag{4.24}$$

şeklinde yazılabilir. $T_0(s) = -q(\mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs))$ değeri (4.24) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.16) eşitliği elde edilir.

$\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresinin standart kompleks yapısı $\hat{J}$ olmak üzere, (4.7) ve $\hat{c}'(s) = T_1(s)\hat{e}_1 + T_2(s)\hat{e}_2$ eşitlikleri yardımıyla

$$\hat{J}\hat{c}'(s) = -\bar{c}(s)\mathcal{J}(s)ic(s) \quad (4.25)$$

olarak elde edilir. (4.23) ve (4.25) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\hat{\nabla}_{\hat{c}(s)'}\hat{c}(s)' = (q - 2T_0(s))\hat{J}\hat{c}'(s)$$

bulunur. Sonuç olarak $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresi üzerinde Kähler manyetik eğridir. ■

Not: $\mathbb{S}^2$ küresi üzerindeki Kähler manyetik eğriler çemberlerdir. Dolayısıyla sabit geodezik eğriliğe sahiptir; fakat $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresi üzerindeki $\hat{c}$ eğrisinin geodezik eğriliği $\hat{\kappa} = \frac{1}{\lambda} |q(1 + 2\mu_1 \cos(qs) + 2\mu_2 \sin(qs))|$ genel olarak sabit değildir.

Önerme 4.2 $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresi üzerindeki $\hat{c}$ eğrisinin $\hat{\kappa}$ geodezik eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter şart $\mu_1 = \mu_2 = 0$ olmasıdır. Bu durum için gerek ve yeter şart $\mathbb{S}^3(1)$ küresi üzerindeki c eğrisinin bir Legendre eğri olmasıdır.

Önerme 4.3 $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ eğrisi (3.5) ve (3.6) denklemleri ile verilen hareket denklemlerini sağlasın. Hopf dönüşümü yardımıyla elde edilen $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresi üzerindeki eğriliği κ ve torsiyonu τ arasında

$$\tau = \frac{2\kappa'}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 4}}, \quad (4.26)$$

ilişkisi mevcuttur. λ, μ_1, μ_2 ve q reel sabitler, $\lambda > 0$ ve $q^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \lambda^2 = 1$ olmak üzere

$$\kappa = \sqrt{4 + \frac{q^2(1 + 2\mu_1 \cos(qs) + 2\mu_2 \sin(qs))^2}{\lambda^2}}, \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. $\hat{c} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2(\frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi $\hat{c}(s) = \bar{c}(s)\frac{i}{2}c(s)$ olmak üzere $\hat{c}'(s)$ ve $\hat{c}''(s)$ vektörleri

$$\begin{aligned} \hat{c}'(s) &= T_1(s)\hat{e}_1 + T_2(s)\hat{e}_2, \\ \hat{c}''(s) &= \bar{c}(s)[-2|\mathcal{J}(s)|^2 + (2T_0(s) - q)\mathcal{J}(s)]ic(s) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\left| \hat{c}''(s) \right|^2 = \lambda^2 [4\lambda^2 + (2T_o(s) - q)^2]$$

$\hat{c}$ eğrisinin yay parametresi $\hat{u}$ olmak üzere $\hat{u} = \lambda s$ eşitliği gerçekleşir. $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin $\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$ küresi üzerindeki eğriligi κ olmak üzere

$$\left| \ddot{\hat{c}}(s) \right|^2 = \frac{\left| \hat{c}''(s) \right|^2}{\lambda^4} = 4 + \left(\frac{2T_o(s) - q}{\lambda} \right)^2 = \kappa^2$$

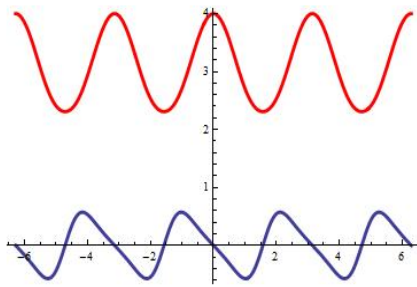
şeklinde hesaplanır. Böylece (4.27) eşitliği elde edilir. Uzun eğrilerinin temel teoreminden $R > 0$ olmak üzere bir küre üzerinde yatan küresel eğrinin κ eğriligi ve τ torsiyonu arasında

$$\tau^2 \left(R^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2 \quad (4.28)$$

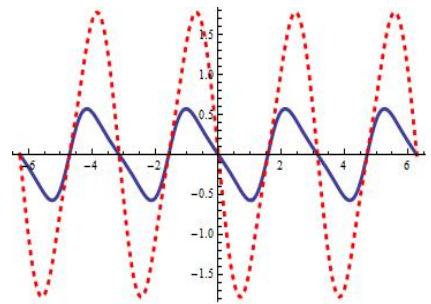
ilişkisi mevcuttur (Gray vd. 2006). κ eğriliginin değeri son eşitlikte yerine yazılırsa, (4.26) eşitliği elde edilir. ■

Aynı zamanda $\hat{\kappa}$ geodezik eğriligi ile κ eğriligi arasında $\kappa = \sqrt{4 + \hat{\kappa}^2}$ ilişkisi mevcuttur.

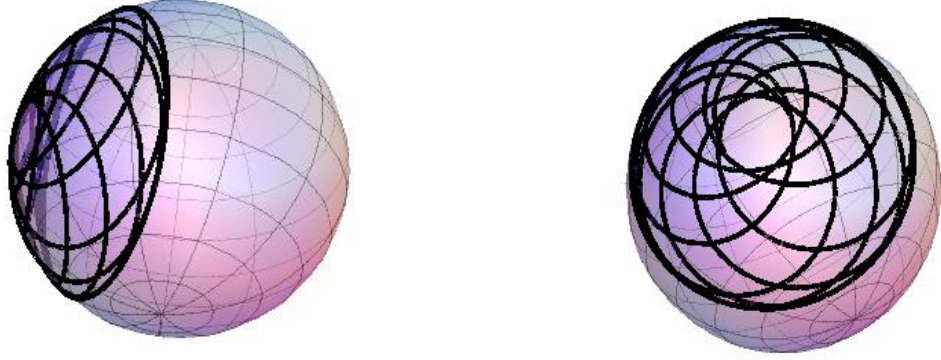
Bir önceki önerme, $\hat{c}$ izdüşüm eğrilerini daha iyi anlamak için bazı resimler çizmemize yardımcı olacaktır. Eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarının davranışını inceleyerek, τ ve κ' değerlerinin aynı sıfırlara sahip olduğunu anlaşılmıştır.



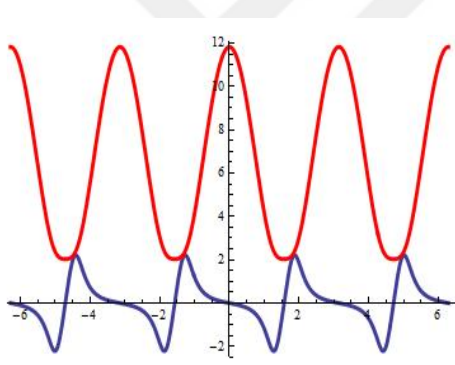
a) κ (kırmızı) ve τ (mavi)



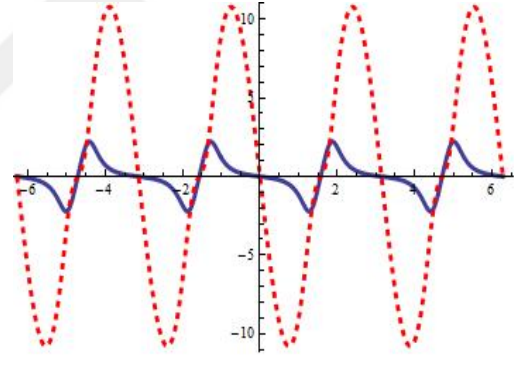
b) κ' (kırmızı) ve τ (mavi)



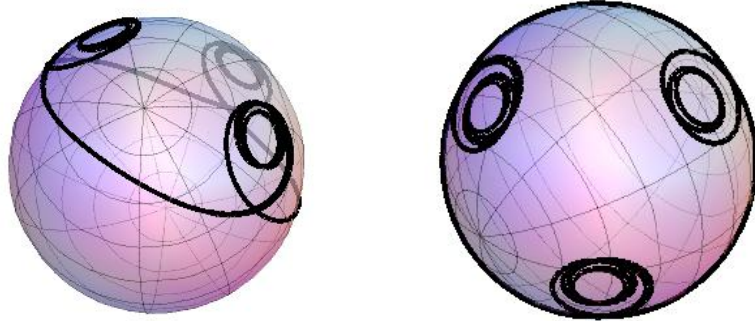
Şekil 4.1 $\hat{c}$ eğrisi, $q = 2$ ve $\mu = \frac{1}{4}$



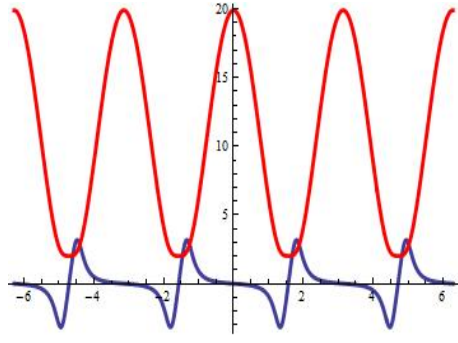
a) κ (kırmızı) ve τ (mavi)



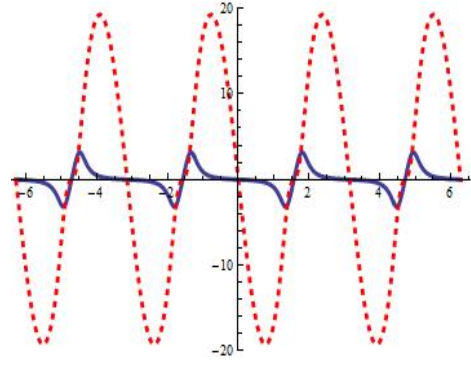
b) κ' (kırmızı) ve τ (mavi)



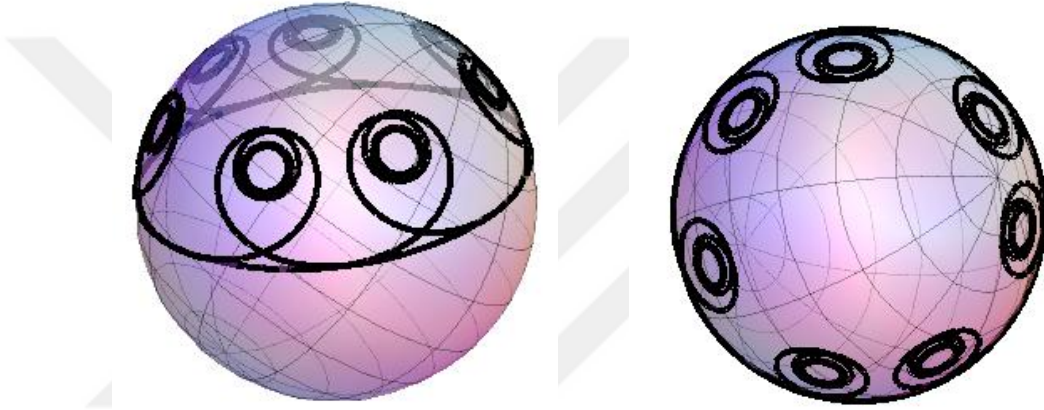
Şekil 4.2 $\hat{c}$ eğrisi, $q = 2$ ve $\mu = \frac{\sqrt{2}}{3}$



a) κ (kırmızı) ve τ (mavi)



b) κ' (kırmızı) ve τ (mavi)



Şekil 4.3 $\hat{c}$ eğrisi, $q = 2$ ve $\mu = \frac{\sqrt{6}}{5}$

Önerme 4.4 $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ eğrisi (3.5) ve (3.6) denklemleri ile verilen hareket denklemlerini sağlasın. Hopf dönüştürme yardımıyla elde edilen $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin $\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$ küresi üzerindeki κ eğriliği ve τ torsiyonu

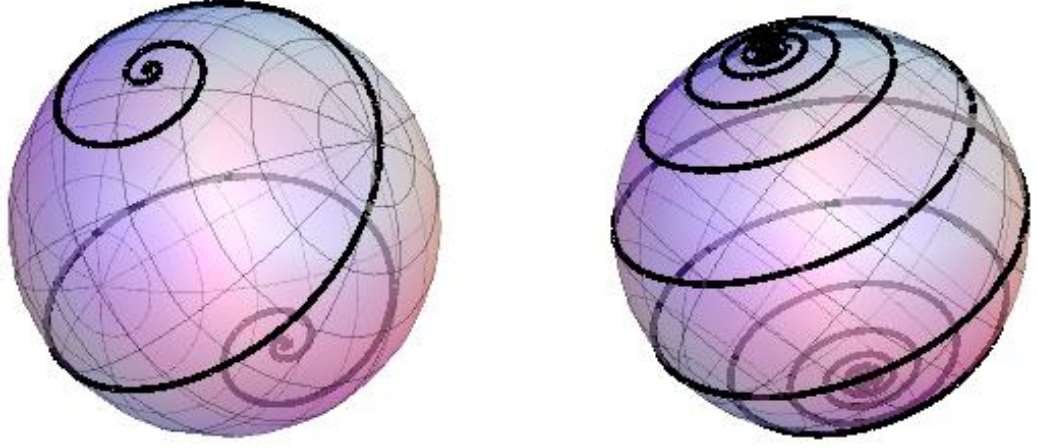
$$\lambda^2 \tau^2 \kappa^4 + 4q^2 (\lambda \sqrt{\kappa^2 - 4} - \varepsilon q)^2 = 16q^2 (1 - \lambda^2),$$

arasında lineer olmayan bir ilişki vardır. Burada ε ile $q(1 + 2\mu_1 \cos(qs) + 2\mu_2 \sin(qs))$ ifadesinin işareti belirtilmektedir.

$\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$ küresinde yatan $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin sabit torsiyona sahip olması durumunda özel bir durum ortaya çıkar. Kabul edelim ki $\tau = \tau_0$ reel sabit olsun, s_0 farklı bir sabit olmak üzere (4.26) denklemi yardımıyla

$$\kappa = \frac{2}{\cos(\tau_0 s + s_0)}, \quad (4.29)$$

elde edilir.



a) $\tau_0 = 1/2$

b) $\tau_0 = 1/5$

Şekil 4.4 sabit torsiyonlu $\hat{c}$ eğrisi, $s_0 = 1$

Bir sonraki önermemizi ispatlamak için aşağıdaki lemmayı verelim :

Lemma 4.1 $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n a_i \cos(\lambda_i s) + \sum_{i=1}^n b_i \sin(\lambda_i s) = c, \quad \forall s \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (4.30)$$

denklemini sağlanıyor ise, $a_i = b_i = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, ve $c = 0$ olmak zorundadır.

İspat. (4.30) eşitliğinin s parametresine göre terim terime türevi alınır,

$$(\lambda_n^2 - \lambda_1^2)(\lambda_{n-1}^2 - \lambda_1^2) \dots (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) (a_1 \cos(\lambda_1 s) + b_1 \sin(\lambda_1 s)) = c \lambda_n^2 \lambda_{n-1}^2 \dots \lambda_2^2.$$

elde edilir. Böylece, $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ için

$$a_1 \cos(\lambda_1 s) + b_1 \sin(\lambda_1 s) = \tilde{c}, \quad \forall s \in I \quad (4.31)$$

eşitliği gerçekleşir. (4.31) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır ve aynı eşitlikte yerine yazılırsa

$$\lambda_1(a_1^2 + b_1^2) \cos(\lambda_1 s) = a_1 \tilde{c} \lambda_1, \quad \forall s \in I,$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak $a_1 = b_1 = \tilde{c} = 0$ olduğundan $a_i = b_i = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$ ve böylece $c = 0$ olmak zorundadır. ■

Önerme 4.5 $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$ eğrisi (3.5) ve (3.6) denklemleri ile verilen hareket denklemlerini sağlasın ve $\hat{c}$ eğrisi de $\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerinde yatan, Hopf dönüşümü yardımıyla elde edilen izdüşüm eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktirler.

- (i) $\hat{c}$ eğrisi sabit torsiyona sahiptir.
- (ii) $\hat{c}$ eğrisi düzlemsel eğridir.
- (iii) c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde yatan Legendre eğridir.

İspat. $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin sabit torsiyona sahip olması durumunda (4.27) ve (4.29) eşitlikleri yardımıyla

$$\frac{4\lambda^2}{q^2} \tan^2(\tau_0 s + s_0) = \left(1 + 2\mu_1 \cos(qs) + 2\mu_2 \sin(qs)\right)^2$$

olarak hesaplanır. $\mu := \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\sin \theta_0 = \frac{\mu_1}{\mu}$ ve $\cos \theta_0 = \frac{\mu_2}{\mu}$ olacak şekilde bir θ_0 değeri mevcuttur. Bir önceki eşitlik

$$\begin{aligned} & -q^2 + 4\lambda^2 - 2q^2\mu^2 + 2q^2\mu^2 \cos(2qs + 2\theta_0) + q^2\mu^2 \cos\left((2q - 2\tau_0)s - (2\theta_0 - 2\tau_0)\right) \\ & + (q^2 - 4\lambda^2 + 2q^2\mu^2) \cos(2\tau_0 s + 2s_0) + q^2\mu^2 \cos\left((2q + 2\tau_0)s + (2\theta_0 + 2s_0)\right) \\ & - 4q^2\mu \sin(qs + \theta_0) - 2q^2\mu \sin\left((q - 2\tau_0)s + (\theta_0 - 2s_0)\right) \\ & - 2q^2\mu \sin\left((q + 2\tau_0)s + (\theta_0 + 2s_0)\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 4.1 de λ_i indisleri değiştirilerek

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2q, \quad \lambda_2 = 2q - 2\tau_0, \quad \lambda_3 = 2\tau_0, \quad \lambda_4 = 2q + 2\tau_0, \\ \lambda_5 &= q, \quad \lambda_6 = q - 2\tau_0, \quad \lambda_7 = q + 2\tau_0 \end{aligned}$$

notasyonları kullanılırsa $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2, \forall i, j = \overline{1, 7}$ elde edilir. Böylece, (4.32) eşitliğinin tüm bileşenleri sıfır olmak zorundadır. Özel olarak,

$$2q^2\mu \cos(\theta_0 + 2s_0) = 0 \quad \text{ve} \quad 2q^2\mu \sin(\theta_0 + 2s_0) = 0,$$

olmalıdır. $\mu \neq 0$ kabulümüzden dolayı bu bir çelişkidir. ■

Lemma 4.2 Sonuç olarak, $\lambda_i^2 = \lambda_j^2, \forall i, j = \overline{1, 7}$ eşitliğini sağlayan tüm eşitlik durumları göz önüne alınırsa, τ_0 sabit torsiyonu için

$$\tau_0 \in \left\{ \pm \frac{3q}{4}, \pm \frac{q}{4}, \pm \frac{q}{2}, \pm q, \pm \frac{3q}{2}, \pm 2q \right\}$$

durumları mevcuttur. Fakat bu 12 durum da çelişki yaratır.

Örneğin; (4.32) eşitliğinde $\tau_0 = q$ alınırsa, $\cos(4qs)$ ve $\sin(4qs)$ ifadelerinin bileşenleri sıfır olmak zorundadır. Yani, $q^2\mu^2 \cos(2s_0 + 2\theta_0) = 0$ ve $q^2\mu^2 \sin(2s_0 + 2\theta_0) = 0$ eşitlikleri sağlanmalıdır. $q \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ olduğundan bu durum gerçekleşmez.

Yukarıda bahsedilen tüm durumların çelişkili olmasının sebebi, $\mu \neq 0$ olarak kabul edilmesidir. Bu yüzden, $\mu = 0$ olmak zorundadır. Bunun anlamı ise, c eğrisi $\mathbb{S}^3(1)$ küresi üzerinde bir Legendre eğridir. Aynı zamanda $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresinde bir çemberdir. Böylece bir düzlemsel eğridir ve $\tau_0 = 0$ olmalıdır.

Sonuç olarak; (i), (ii) ve (iii) durumları birbirlerine denktirler ve böylece ispat tamamlanır.

4.2 Mathematica Örnekleri

Bu bölümde Mathematica yazılımı kullanılarak, $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ küresi üzerindeki $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi çizilecektir. Bir önceki bölümden, $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin eğriliği ve torsiyonu bilinmektedir. Burada izlenen yöntem, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında eğriliği ve torsiyonu bilinen eğriler için eğrilerin temel teoremini kullanmaktır (Anonymous 2013).

Genelliği kaybetmeden T_0 ifadesinde $\mu_1 = \mu \neq 0$ ve $\mu_2 = 0$ olarak alalım.

Klasik olmasına rağmen, programın nasıl çalıştığını kısaca açıklayalım:

```
"Clear[r, s, t, n, b, κ, τ, r0, t0, n0, b0];
eqns = {t'[s] == κ[s] n[s],
n'[s] == -κ[s] t[s] + τ[s] b[s],
b'[s] == -τ[s] n[s],
r'[s] == t[s],
t[0] == t0, n[0] == n0, b[0] == b0, r[0] == r0};"
```

$\hat{c}'(s) = r'(s)$ olmak üzere t , n ve b vektör alanları, sırasıyla $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanlarıdır.

q , μ ve λ sabitlerini belirleyerek $T_0(s)$ ifadesini tanımlayalım:

```
q = 2;
μ = 1/4;
λ = Sqrt[1 - q^2 μ^2];
```

$$T0[s] := -q\mu \text{ Cos}[q s];$$

$\hat{c}$ izdüşüm eğrisini eğriliği ve torsiyonu aşağıdaki gibi verilsin,

$$\kappa[s] := \text{Sqrt}[4 + ((2T0[s] - q)/\lambda)^2];$$

$$\tau[s] := 2(D[\kappa[ss], ss] /. ss -> s)/$$

$$(\kappa[s] \text{ Sqrt}[\kappa[s]^2 - 4]);$$

r, t, n ve b ifadelerinin başlangıç değerlerini belirleyelim:

$$r0 = \{0, 1/2, 0\};$$

$$t0 = \{1, 0, 0\};$$

$$n0 = 1/\kappa[0] (-4 r0 + 2 \text{ Sqrt}[\kappa[0]^2 - 4] \text{ Cross}[r0, t0]);$$

$$b0 = \text{Cross}[t0, n0];$$

Böylece NDSolve komutuyla kısmi diferensiyel denklem çözülür:

$$\text{"solution} = \text{First@NDSolve[eqns, r, t, n, b, s, 0, 25 Pi]; "}$$

$\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ küresini çizelim:

$$\text{"S2} = \text{ParametricPlot3D}[0.5 \text{ Cos}[u] \text{ Sin}[v], 0.5 \text{ Sin}[u] \text{ Sin}[v], 0.5 \text{ Cos}[v],$$

$$u, -\text{Pi}/2, 3 \text{ Pi}/2, v, 0, \text{Pi}, \text{Axes} -> \text{None}, \text{Boxed} -> \text{False},$$

$$\text{PlotStyle} -> \text{Directive}[\text{White}, \text{Opacity}[0.5], \text{Specularity}[\text{White}, 10]],$$

$$\text{Mesh} -> 10, \text{MeshStyle} -> \text{Opacity}[0.3]]; "$$

$\hat{c}$ izdüşüm eğrisini $\mathbb{S}^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerinde gösterelim:

$$\text{"With}[s1 = (r /. \text{solution})["\text{Domain}"][[1, 1]],$$

$$s2 = (r /. \text{solution})["\text{Domain}"][[1, 2]],$$

$$\text{Show}[S2, \text{ParametricPlot3D}[\text{Evaluate}[r[s] /. \text{solution}], s, s1, s2,$$

$$\text{PlotStyle} -> \text{Thickness}[0.01], \text{Black}, \text{Boxed} -> \text{False}]]] "$$

Mathematica yazılımında, yukarıda verilen program farklı durumlar için kullanılmıştır.

Bu durumlara karşılık gelen $\hat{c}$ izdüşüm eğrileri Şekil 4.1 - Şekil 4.4 de çizilmiştir.

4.3 Hopf Tüp

$\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerinde verilen bir $\beta(s)$ eğrisinin, π dönüşümü ile verilen tam lifti $\mathbb{S}^3(1)$ küresi üzerinde bir yüzeydir. $H_\beta = \pi^{-1}(\beta)$ şeklinde tanımlanır ve β üzerine Hopf tüp diye adlandırılır. Ayrıca, H_β Hopf tüpü bir düz yüzeydir. $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerindeki β eğrisinin, kapalı bir eğri olması durumunda ise H_β Hopf tüpü bir Hopf tordur. Özel olarak, küre üzerindeki küçük çemberlere karşılık gelen Hopf tüp, bir düz minimal olmayan sabit ortalama eğrilikli Hopf tordur. Diğer taraftan, büyük çembere karşılık gelen Hopf tüp ise minimal Clifford tordur.

β eğrisinin yatay lifti β_h ile gösterilmek üzere, tüm bu tüpler

$$F : \mathbb{R} \times I \rightarrow H_\beta \subset \mathbb{S}^3 \text{ ve } F(s, u) = e^{iu}\beta_h(s) \quad (4.33)$$

Riemann dönüşümü ile parametrelendirilir.

Böylece, β eğrilerinin koordinat fonksiyonları fibreler ($s = \text{sbt.}, u \in \mathbb{R}$) ve yatay liftlerdir ($u = \text{sbt.}, s \in I \subset \mathbb{R}$).

Ayrıca, (4.33) eşitliğinden

$$F_s(s, u) = e^{iu}\beta'_h(s) \quad F_u(s, u) = iF(s, u) = \xi_{F(s, u)} \quad (4.34)$$

elde edilir.

β_h yatay lifti, fibreleri dik olarak kestiğinden, H_β Hopf tüpü üzerindeki uyumlu metrik $ds^2 + du^2$ olarak tanımlıdır.

H_β Hopf tüpünün bir $F(s, u)$ noktasındaki normal vektörü N olmak üzere

$$N(s, u) = e^{iu}\nu_h(s),$$

şeklinde tanımlıdır. Burada ν_h ile β eğrisinin normal vektör alanının yatay lifti tanımlanmıştır.

N normal vektör alanı, F_u ve F_s ye dik olduğundan yukarıda verilen formül (4.34) eşitliğinden kolayca elde edilebilir.

Uyarı 4.1 Manyetik eğriler ile ilgili çalışmalara bakılacak olunursa; $\mathbb{S}^3(1)$ küresi üzerindeki manyetik eğriler, $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerindeki geodezik çemberlerden inşa edilen Hopf torun geodezikleridir.

Bu gerçeğe rağmen, J -yörüngeleri için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3 c eğrisinin, $\hat{c}$ izdüşüm eğrileri tarafından inşa edilen $H_{\hat{c}}$ Hopf tüp üzerinde geodezik olması için gerek ve yeter şart c eğrisi, $\mathbb{S}^3$ küresinde bir Legendre eğri olması veya c eğrisinin, $\xi_{|c(s)}$ Reeb vektör alanına teğet olmasıdır.

İspat. c eğrisi $\beta(s) = \hat{c}(s)$ eğrisi ile ilişkili $H_{\hat{c}}$ Hopf tüp üzerinde bir eğri olsun. H_{β} Hopf tüp üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $\dot{\nabla}$ olmak üzere

$$\bar{\nabla}_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s) = \dot{\nabla}_{\dot{c}(s)}\dot{c}(s) + h(\dot{c}(s), \dot{c}(s))\nu_h(s), \quad (4.35)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\hat{c}'(s) = \bar{c}(s)\zeta(s)c(s) \quad \text{ve} \quad \nu(s) = \bar{c}(s)i\zeta(s)c(s)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.12), (4.14) ifadeleri ve $\nu_h(s) = -T_2(s)e_{1|c(s)} + T_1(s)e_{2|c(s)}$ eşitliği birlikte kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_{\dot{c}}\dot{c} = \dot{T}_0(s)\xi_{|c(s)} + q(-T_2(s)e_{1|c(s)} + T_1(s)e_{2|c(s)}) = \dot{T}_0(s)\xi_{|c(s)} + q\nu_h(s) \quad (4.36)$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak, (4.35) ve (4.36) eşitliklerinden

$$\dot{\nabla}_{\dot{c}}\dot{c} = \dot{T}_0(s)\xi_{|c(s)}.$$

Böylece, c eğrisi $H_{\hat{c}}$ Hopf tüp üzerinde geodezik olması için gerek ve yeter şart c eğrisi, $\mathbb{S}^3$ küresinde bir Legendre eğridir veya c eğrisi $\xi_{|c(s)}$ Reeb vektör alanına teğettir. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ eğrisi $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım manifoldu üzerinde $q \neq 0$ yükü ile $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ şeklinde tanımlı birim hızlı J -yörünge, c eğrisi $\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde $c(s) = (z(s), w(s))$ olarak parametrelendirilmiş bir eğri ve t de $\mathbb{R}$ üzerinde global koordinat sistemi olmak üzere c eğrisi için herhangi bir kısıtlama olmaksızın

$$t(s) = a + \mu_1 \cos(qs) + \mu_2 \sin(qs), \quad a, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir ve $q^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. Fakat, c eğrisi genel durumda açık bir şekilde elde edilememiştir. Bunun nedenini açıklamak için en uygun yaklaşım; $\mathbb{S}^3$ küresinin $\mathbb{R}^4$ uzayında gömülü olduğunu ele almak ve $\mathbb{R}^4$ uzayını kuaterniyonlar yardımıyla tanımlamaktır. Böylece, (3.6) eşitliği ile verilen J -yörüngenin hareket denkleminde, σ kuaterniyon değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\dot{c}(s) = \sigma(s)c(s)$$

lineer kuaterniyonik diferensiyel denklemi sağlanır. Kuaterniyonik diferensiyel denklemler ile; kinematik, navigasyon ve rehberlik, akışkanlar mekaniği ve kuantum mekaniği gibi uygulamalı matematiğin rol oynadığı çeşitli çalışma alanlarda karşılaşırız. Kuaterniyonik diferensiyel denklem çözümünün elde edilmesi sırasında karşılaşılan tüm bu zorlukların sebebi ise kuaterniyonlar cebirinin değişme özelliğine sahip olmamasıdır. Leo ve Kou kuaterniyonik çözümler elde etmek için bazı kuaterniyonik diferensiyel denklem sınıflarını araştırmışlardır (Kou 2018), (Leo 2003). Ayrıca, kuaterniyonik diferensiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin fiziğin çeşitli alanlarında önemli rol oynamasından dolayı Campos başta olmak üzere bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır (Campos 2006).

$\mathbb{S}^3$ küresi üzerindeki Legendre eğriler, çalışmamız boyunca önemli bir rol oynamıştır. $\mathbb{S}^3(1)$ küresi üzerinde Legendre eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir. Bu karakterizasyonlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$\hat{c}$ eğrisi, $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ küresi üzerinde yatan, Hopf dönüşümü yardımıyla elde edilen izdüşüm eğrisi olmak üzere,

- $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ üzerinde tanımlı olan $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin sabit geodezik eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter şart c eğrisinin $\mathbb{S}^3(1)$ küresi üzerinde bir Legendre eğri olmasıdır.
- $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ üzerinde tanımlı olan $\hat{c}$ izdüşüm eğrisinin sabit torsiyona sahiptir $\Leftrightarrow$ $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\right)$ üzerinde tanımlı olan $\hat{c}$ izdüşüm eğrisi düzlemsel bir eğridir $\Leftrightarrow c$ eğrisi $\mathbb{S}^3(1)$ küresi üzerinde bir Legendre eğridir.
- c eğrisinin, $\hat{c}$ izdüşüm eğrileri tarafından inşa edilen $H_{\hat{c}}$ Hopf tüp üzerinde geodezik olması için gerek ve yeter şart c eğrisi, $\mathbb{S}^3$ küresinde bir Legendre eğri olması veya c eğrisinin, $\xi_{|c(s)}$ Reeb vektör alanına teğet olmasıdır.

$\mathbb{S}^3$ küresi üzerinde tanımlı olan Legendre eğriler, Bang-Yen Chen tarafından ikinci dereceden kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri olarak elde edilmiştir (Chen 1997). Ayrıca, aynı çalışmada Legendre eğriler, $\mathbb{C}P^n$ uzayında Lagrange H -umbilik alt manifoldların tanımlanmasında kullanılmıştır. Yani; $\mathbb{S}^3(c)$ üzerinde tanımlı olan her bir Legendre eğri için, bu eğriye karşılık gelen $\mathbb{C}P^n(4c)$ uzayının kanonik Lagrange H -umbilik alt manifoldu inşa edilmiştir. Böylece, Legendre eğriler ve Lagrange alt manifoldları arasında önemli bir bağlantı kurulmuştur.

Sonuç olarak; Legendre eğrilerin çeşitli alanlarda büyük öneme sahip olduğu görülmektedir. Bu çalışmada, Hopf dönüşümleri ve $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ çarpım uzayında J -yörüngelerin hareket denklemleri yardımıyla Legendre eğriler için yeni karakterizasyonlar elde edilmiştir (Ateş ve Muntenau 2018), (Ateş vd 2019). Farklı uzaylarda da benzer çalışmalar yapılarak, Legendre eğriler için yeni karakterizasyonlar verilebilir.

KAYNAKLAR

- Adachi, T. 1994. *Kähler magnetic field on a complex projective space*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **70**, 12–13.
- Adam, C., Sánchez-Guillén J. and Wereszczyński, A. 2006. *Hopf solitons and Hopf q -balls on S^3* . Eur. Phys. J. C **47**, 513–524.
- Alvarez, A., Leys, J. and Ghys, E. 2008. Film “Dimensions”, Web Sitesi: <http://www.dimensions-math.org>. Erişim Tarihi: 18.01.2020.
- Anonymous. 2013. Web Sitesi: <http://www.mathematica.stackexchange.com/questions/39137/finding-a-3~d-curve-from-torsion-and-curvature-with-ndsolve/39142>. Erişim Tarihi: 14.09.2019.
- Ateş, O. and Munteanu, M. I. 2018. *Periodic J -trajectories on $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$* . J. Geom. Phys., **133**, 141–152.
- Ateş, O., Munteanu, M. I. and Nistor, A. I. 2019. *Dynamics on $\mathbb{S}^3$ and the Hopf fibration*. Applied Mathematics and Computation, **347**, 429–441.
- Barros, M., Cabrerizo, J.L., Fernández M. and Romero, A. 2007. *Magnetic vortex filament flows*. J. Math. Phys. **48**, 1–27.
- Blair, D.E. 1976. *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Lecture Notes in Math. 509, Springer, Berlin, Hiedelberg, New York.
- Cabrerizo, J.L., Fernández, M. and Gómez, J. S. 2009. *The contact magnetic flow in 3D Sasakian manifolds*. J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 19, 195201.
- Calvaruso, G., Munteanu, M.I. and Perrone, A. 2015. *Killing magnetic curves in three-dimensional almost paracontact manifolds*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. **426**, no. 1, pp. 423–439.
- Campos, J. and Mawhin, J. 2006. *Periodic solutions of quaternionic-valued ordinary differential equations*. Annali di Matematica **185**, S109–S127.
- Chen, B-Y. 1997. *Interaction of Legendre curves and Lagrangian submanifolds*. Israel J. Math., **99**, 69–108.
- Cho, J., Inoguchi, J. and Lee, J. 2006. *On slant curves in Sasakian 3-manifolds*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, **74**(3), 359–367.
- Comtet, A. 1987. *On the Landau levels on the hyperbolic plane*. Annals of Physics, vol. **173**, no. 1, pp. 185–209.
- Druta-Romaniuc, S.L. and Munteanu, M.I. 2011. *Magnetic curves corresponding to killing magnetic fields in $\mathbb{E}^3$* . Journal of Mathematical Physics, vol. **52**, no. 11, pp. 1–14.

- Druta-Romaniuc, S.L. and Munteanu, M.I. 2013. *Killing magnetic curves in a Minkowski 3-space*. Nonlinear Analysis: RealWorld Applications, vol. **14**, no. 1, pp. 383–396.
- Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S. 2006. *Modern Diferential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC.
- Hacısalihoglu, H.H. 1980. *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Elazığ.
- Hacısalihoglu, H.H. 2003. *Tensör Geometri*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
- Kou, K. I. and Xia, Y.-H. 2017. *Linear Quaternion Differential Equations: Basic Theory and Fundamental Results*, arXiv:1510.02224v5 [math.CA].
- Leo, S. and Ducati, G. 2003. *Solving simple quaternionic differential equations*, J. Math. Phys. **44** 5, 2224–2233.
- Munteanu, M.I. and Nistor, A.-I. 2012. *The classification of Killing magnetic curves in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* . Journal of Geometry and Physics, vol.**62**, no. 2, pp. 170–182.
- Onnis, I.I., Passos Passamani, A. and Piu, P. 2018. *Constant Angle Surfaces in Lorentzian Berger Spheres*. Journal of Geometric Analysis.
- Sunada, T. 1993. *Magnetic flows on a Riemann surface*. Proc. KAIST Mathematics Workshop: Analysis and Geometry, (KAIST, Taejeon, Korea), 93–108.
- Tamura, M. 2004. *Surfaces which contain helical geodesics in the 3-sphere*. Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ., Series B: Mathematical Science, **37**, 59-65.
- Urbantke, H.K. 2003. *The hopf fibration - seven times in physics*. J. Geom. Phys. **46**, 3125–3150.
- Yano, K. and Kon, M. 1984. *Structures on Manifolds*. Series in Pure Mathematics, vol: 3, World Scientific Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Osman ATEŞ

Doğum Yeri : Ordu

Doğum Tarihi : 20/01/1989

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Ordu Anadolu Lisesi (2006)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü (2012)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı (Şubat 2013 - Temmuz 2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Milli Savunma Üniversitesi, Kara Harp
Okulu, Temel Bilimler Bölümü (2019 - ...)

Yayınları: Ateş, O. and Munteanu, M.I. 2018. Periodic J-trajectories on $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$.
Journal of Geometry and Physics, 133, 141-152. (**SCI**)

Kaya, S., Ateş, O., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2018. Timelike clad helices and
developable surfaces in Minkowski 3-space. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 68,
259-273. (**ESCI**)

Ateş, O., Munteanu, M.I. and Nistor, A.-I. 2019. Dynamics on $\mathbb{S}^3$ and Hopf
fibration. Applied Mathematics and Computation. 347, 429-491. (**SCI**)

Uluslararası Kongreler

Ateş, O., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2014. Karatekin Mathematic Days 2014. Curves
of constant slope and curves of constant precession in contact 3-manifolds. Çankırı
Karatekin University. (Oral presentation)

Gök, İ., **Ateş, O.** and Yaylı, Y. 2014. Notes on slant curves in Sasakian 3- manifolds. 19th International Summer School on Global Analysis and its Applications, Lednice Czech Republic. (Oral presentation)

Ateş, O., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2016. 14th International Geometry Symposium. Pamukkale University. Rectifying curves in Minkowski n-space. Denizli, Turkey. (Poster)

Gök, İ., **Ateş, O.** and Yaylı, Y. 2016. A curve whose position vector lies on the orthogonal complement of its any Frenet vector in Minkowski n-space. 8th International Meeting on Lorentzian Geometry. Málaga, Spain. (Poster)

Ateş, O., Kaya, S., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2018. Some Characterizations of Timelike Clad Helices in Minkowski 3-space. 2018. International Geometry Symposium. Celal Bayar University. Manisa, Turkey. (Poster)

Kaya, S., **Ateş, O.**, Gök, İ. and Yaylı, Y. 2018. Develople Surfaces and Timelike Clad Helices in Minkowski 3-space. 5th International IFS and Contemporary Mathematics Conference – IFSCOM2018, Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, Turkey. (Poster)

International Conference on Applied and Pure Mathematics, Alexandru Ioan Cuza University, (2-5 November 2017) Iaşi, Romania.

Ulusal Kongreler

8. Ankara Matematik Günleri (4-5 Haziran 2013), Çankaya Üniversitesi.

11. Ulusal Geometri Sempozyumu (1-5 Temmuz 2013), Ordu Üniversitesi.

9. Ankara Matematik Günleri (12-13 Haziran 2014), Atılım Üniversitesi.

10. Ankara Matematik Günleri (11-12 Haziran 2015), ODTÜ.

12. Ankara Matematik Günleri (25-26 Mayıs 2017), Hacettepe Üniversitesi.