

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

ALTIN MANİFOLDLAR VE ALT MANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ

Elif Hatice ILGAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

22/05/2014

Elif Hatice ILGAZ

ÖZET

Doktora Tezi

ALTIN MANİFOLDLAR VE ALT MANİFOLDLARININ GEOMETİSİ

Elif Hatice ILGAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanımlar ve ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, altın oran ve özelliklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, manifoldlar üstünde altın yapı ve özellikleri hatırlatıldı.

Beşinci bölümde, altın Riemann manifoldların alt manifoldlarının üstüne indirgenmiş yapıların özellikleri verilir; lokal çarpım altın Riemann manifoldun alt manifoldlarının üstüne indirgenmiş yapının normal olması için gerek şartlar incelenmiştir. Normal yapılı $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ alt manifoldlar üstünde φ ve A_α değişimli olmaları durumu incelenmiştir. Ayrıca 1 eşboyutlu alt manifoldlar üstünde $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ indirgenmiş yapıların bazı özellikleri gösterilmiştir.

Son olarak altıncı bölümde, altın Riemann manifoldlarının slant alt manifoldları, slant dağılımları, bi-slant ve semi-slant alt manifoldları tanımlanmış ve bunlar üstünde çalışmalar yapılmıştır.

Mayıs 2014, 84 sayfa

Anahtar Kelimeler : Altın oran, Altın yapı, Altın Riemannian manifoldlar, Normal yapı, Slant alt manifoldlar.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

GOLDEN MANIFOLDS AND GEOMETRY OF THEIR SUBMANIFOLDS

Elif Hatice ILGAZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is allocated to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and required information are given.

In the third chapter, golden ratio and its features are mentioned.

In the forth chapter, golden structure on manifolds and its features are reviewed.

In the fifth chapter, some fundamental features of the induced structures on submanifolds immersed in golden Riemann manifolds are given and we study the necessary conditions for an induced structure on a submanifold $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ immersed in a local product golden Riemann manifold to be normal. Then, the commutativity of the endomorphism φ and the Weingarten operators A_α on manifolds with normal structure is studied. Also, we show some features of induced structures $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ on the submanifold of codimension 1 in golden Riemann manifold.

Finally in the sixth chapter, we define and study slant and semi slant submanifolds and bi slant distributions of a golden Riemann manifold.

May 2014, 84 pages

Key Words: Golden ratio, Golden structure, Golden Riemann manifolds, Normal structure, Slant submanifolds.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, bana araştırma olanağı sağlayan ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), fikirleriyle ve önerileriyle beni yönlendiren Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. Baki KARLIĞA'ya (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmalarım sırasında önemli katkılarda bulunan Arş. Gör. Esma DEMİR ÇETİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme ve eşime en derin duygularla teşekkür ederim.

Elif Hatice ILGAZ

Ankara, Mayıs 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar	3
2.2 Diferensiyellenebilir Lif Demet Yapıları	11
3. ALTIN ORAN	19
3.1 Altın Oranın Değeri	21
4. RIEMANN MANİFOLDLARI ÜSTÜNDE ALTIN YAPI	23
5. ALTIN RIEMANN MANİFOLDLARININ ALT MANİFOLDLARI	27
5.1 Altın Riemann Manifoldların Alt Manifoldlarının Üstüne İndirgenmiş Yapıların Özellikleri	27
5.2 $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ Yapısının Normallik Durumu	42
5.3 Lokal Çarpım Altın Riemann Manifoldlarının Normal Yapılı $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ Alt Manifoldlar Üstünde φ ve A_α Değişimli Olmaları Durumu	47
5.4 1 Eşboyutlu Alt Manifoldlar Üstünde $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ İndirgenmiş Yapı ..	51
6. ALTIN MANİFOLDLARIN SLANT ALT MANİFOLDLARI	60
6.1 Altın Riemann Manifoldlarının Slant Alt Manifoldları	62
6.2 Slant Dağılımlar ve Bi-Slant Alt Manifoldlar	70
6.3 Altın Manifoldların Semi-slant Alt Manifoldları	73

7. TARTIŞMA VE SONUÇ	79
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	84

SİMGELER DİZİNİ

E, M, F	C^∞ - manifoldlar
$T_p M$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
TM	M manifoldunun tanjant manifoldu
$\chi(M)$	M üzerinde tanımlı C^∞ vektör alanlarının modülü
φ	Altın oran
Φ	Altın yapı
g	Riemannian metriği
$[,]$	Lie parantez operatörü
$\tilde{\nabla}$	$\tilde{M}$ manifoldunun üstünde Levi-Civita Konneksiyonu
∇	M altmanifoldunun üstünde Levi-Civita Konneksiyonu
N_Φ	Φ Altın yapısının Nijenhuis Torsiyon Tensör Alanı
A_α	Şekil Operatörü
$\otimes$	Tensör Çarpımı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Koordinat Fonksiyonları	4
Şekil 2.2 $\pi = \pi_1 \circ \Psi_\alpha$ Diyagramı	13
Şekil 2.3 M manifoldu Üstünde Lokal Kesit	15
Şekil 3.1 Aşıt ve Ortalama Oran	20

1. GİRİŞ

İnsanlık tarihinde rasyonel sayılar kadar irrasyonel sayılarda büyüleyici bir etkiye sahiptir. Bu sayılardan biri ve belki de en önemlilerinden biri $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısıyla tanımlanan altın orandır. Eski çağlardan beri bu oranla matematikçiler, fizikçiler, mimarlar, ressamalar hatta müzisyenler yoğun bir şekilde ilgilendiler.

Altın orana ilişkin matematik bilgisinin ilk kez M.Ö. 3. yüzyılda Euclid'in (M.Ö. 325 – 265?) “Elementler” isimli 13 kitaptan oluşan çalışmalarında ilk kez ortaya atıldığı düşünülmektedir. Euclid burada bir doğruyu 0.618... noktasından bölmekten bahsetmiş ve bunu bir doğruyu ekstrem ve önemli oranda bölmek diye adlandırmıştır. Bununla birlikte, bu bilginin geçmişinin eski Mısır’da M.Ö. 3 bin yıl öncesine dayandığını gösteren bilgilere rastlanmıştır. Eski Yunan dünyasına da Pythagoras (M.Ö. 569 – 475) ve izleyenleri tarafından tanıtıldığı ileri sürülmektedir (Akdeniz 2007).

Kentaro Yano (1983) bir manifold üzerinde f -yapıyı tanımlamıştır daha sonra Goldberg ve Yano (1970) bu yapıyı geliştirerek bir manifold üzerinde polinom yapı kavramını tanımlamışlardır. Bu polinom yapısından yola çıkarak Crasmareanu ve Hretcanu (2008) diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde yapı polinomu $Q(x) = x^2 - x - I$ olan altın yapı denilen bir polinom yapı tanımlayarak altın oranın diferensiyel geometriye girmesini sağlamışlardır. Diferensiyel geometride altın yapı çok yeni bir kavramdır. Bu konu üzerinde yapılmış çalışmalar çok az sayıdadır.

Slant alt manifoldlar, ilk kez Chen (1990) tarafından hemen hemen Hermitian bir manifoldun hem holomorphic hem de total real alt manifoldlarının bir genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır. Daha sonra birçok matematikçi farklı uzaylarda bu alt manifoldları inceleyerek, slant alt manifoldlar diferensiyel geometride hızla ilerlemiştir. Özellikle Papaghiuc (1994) tarafından hemen hemen Hermitian bir manifoldun alt manifoldunun bir sınıfı olarak semi-slant alt manifoldları tanımlanmıştır. Lotta (1996) hemen hemen kontakt metrik bir manifoldda Riemannian bir mani-

foldun slant immersion kavramını tanımlamıştır.

Çalışmamızı kısaca şöyle özetleyebiliriz: Çalışmamızın birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. ikinci bölümünde temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde altın oranın tarihçesinden, tanım ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde manifoldlar üstünde altın yapı ve özellikleri hatırlatıldı. Beşinci bölümde altın Riemann manifoldların alt manifoldlarının üstüne indirgenmiş yapıların özellikleri verildi. Lokal çarpım altın Riemann manifoldların alt manifoldların üstüne indirgenmiş yapının normal olması için gerek şartlar incelenmiştir. Normal yapı $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ alt manifoldlar üstünde φ ve A_α değişimli olmaları durumu incelenmiştir. Ayrıca 1 eşboyutlu alt manifoldlar üstünde $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ indirgenmiş yapı incelenmiştir. Son olarak altıncı bölümde altın Riemann manifoldlarının slant alt manifoldları ve slant dağılımlar ile bi-slant alt manifoldlar incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı temel tanım ve sembollerini tanıttacağız.

Tanım 2.1: (Oran) Aynı türden iki şeyin nicelik açısından karşılaştırılması olarak tanımlayabiliriz. Örneğin doğru parçalarıyla ilgileniyorsak, AB ve CD gibi iki doğru parçasının oranını $\frac{AB}{CD}$ ya da bunların aynı birimle ölçülmüş uzunlukları, sırasıyla, a ve b ise $\frac{a}{b}$ ile sembolize ederiz (Çakar 1992).

2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: (Topolojik Manifold) M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir **n-boyutlu topolojik manifold** (veya kısaca topolojik n -manifold) denir.

(i) M bir Hausdorff uzayıdır.

(ii) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

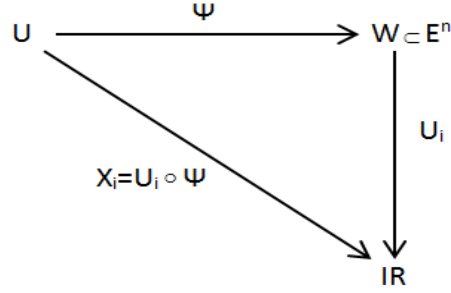
(iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.2: (Koordinat komşuluğu=Harita) M bir n boyutlu topolojik manifold ve U da M nin bir açık bir alt cümlesi olsun. Eğer U bir Ψ homeomorfizmi ile E^n nin bir W alt cümlesine eşlenebiliyorsa:

$$\Psi : U \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} W \subset E^n$$

(U, Ψ) ikilisine M de bir **koordinat komşuluğu (harita)** denir. $p \in U$ için $\Psi(p) \in E^n$ dir ve $\Psi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, $x_i(p) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ dir. Burada $x_i(p)$

reel sayısına $\Psi(p)$ noktasının i -yinci koordinatı ve $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da **koordinat fonksiyonu** denir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Koordinat Fonksiyonları

Ψ fonksiyonu bir homeomorfizm olduğundan süreklidir ve dolayısıyla $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ fonksiyonları da süreklidirler.

$x_1(p), \dots, x_n(p)$ reel sayılarına $p \in U$ noktasının, (U, Ψ) koordinat komşuluğuna göre, **lokal koordinatları** ve U üzerinde tanımlı olan $(x_1, \dots, x_n)$ reel değerli fonksiyon n -lisine de (U, Ψ) üzerindeki **lokal koordinat sistemi** denir (Hacısalihoglu 2006).

Haritanın bir başka tanımı da şu şekilde yapılmaktadır:

Boş olmayan bir küme M , M nin boş olmayan bir alt kümesi U ve

$$\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

bir dönüşümü olsun. Eğer

(i) Ψ bire-bir

(ii) $\Psi(U)$, $\mathbb{R}^n$ de bir açık alt cümle

ise, (U, Ψ) ikilisine, M için bir n -boyutlu bir harita denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.3: (Atlas) M bir n boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}$ $\alpha \in A$ yazalım. E^n de U_α ya homeorf olan bir açık cümle E_α ve

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E_\alpha$$

olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir **atlas (koordinat komşuluğu sistemi)** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.4: (Diferensiyellenebilir Yapı) Bir topolojik n -manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye C^r , $r \geq 1$, sınıfındandır denir. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\Phi_{\alpha\beta} : \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\Phi_{\beta\alpha} : \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfındandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıfından ise S ye M üzerinde bir C^r **sınıfından diferensiyellenebilir yapı** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.5: (Diferensiyellenebilir Manifold) M bir n boyutlu topolojik manifold ve M nin S atlası C^r sınıfından olsun. O zaman M ye bir n -boyutlu **diferensiyellenebilir manifolddur** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

Tanım 2.1.6: (Diffeomorfizm) Aynı boyutlu iki C^∞ manifold M, N ve $F : M \rightarrow N$ birebir ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer:

$$i) F \in C^k(M, N)$$

ii) $F^{-1} \in C^k(M, N)$

ise, F dönüşümüne bir C^k diffeomorfizm ve bu durumda M ile N manifoldlarına da C^k diffeomorfiktirler denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.7: (M Diferensiyellenebilir manifoldunun tanjant vektörü) M diferensiyellenebilir manifold ve bir noktası $p \in M$ olsun. Bir

$$X_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin p noktasındaki tanjant vektörü ise X_p ye M nin p noktasındaki bir tanjant vektörü denir (Hacısalıhoğlu 2000).

M üstündeki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_p M$ ile gösterilir. $T_p M$, bir reel vektör uzayıdır. Bu $T_p M$ vektör uzayına, M nin p noktasında ki tanjant uzayı denir (Hacısalıhoğlu 2000).

p noktasında bir harita $(U, \Psi = (x_i))$, $1 \leq i \leq n$ ise $T_p M$ nin bir bazı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : 1 \leq i \leq n \right\}$$

kümesidir. Bu baza $T_p M$ nin doğal (veya koordinat) bazı denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.8: (Vektör Alanı) M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $p \in V$ noktasında ki tanjant uzayı $T_p V$ olsun. V nin bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzaylarının birleşimi $\bigcup_{p \in V} T_p V$ ile gösterilsin. Bir

$$\pi : \bigcup_{p \in V} T_p V \rightarrow V$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_p V$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_p) = p$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X : V \rightarrow \bigcup_{p \in V} T_p V$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I : V \rightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur. M üzerindeki vektör alanlarının cümlesini $\chi(M)$ ile göstereceğiz (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.9: (Çok Lineer Dönüşümler) $V_1, V_2, \dots, V_n$ ve W uzayları aynı K cismi üzerinde tanımlı birer vektör uzayı ve kartezyen çarpımlarında $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ olsun. Bir

$$L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

dönüşümü için aşağıda ki özellik varsa bu dönüşüme **i -yinci yere göre lineerdir** denir.

$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2, \dots, \alpha_{i-1} \in V_{i-1}, \varepsilon, \mu \in V_i, \alpha_{i+1} \in V_{i+1}, \dots, \alpha_n \in V_n$ ve $\forall a, b \in K$ için

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, a\varepsilon + b\mu, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) &= aL(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \varepsilon, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \\ &+ bL(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \mu, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ için bu özellik sağlanıyorsa L fonksiyonuna **n -lineer dönüşüm** denir (Hacısalihoglu 2006).

$L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ şeklindeki bütün n -lineerdönüşümlerin cümlesini

$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ ile gösterelim.

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = \left\{ L \mid L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \xrightarrow{n\text{-linear}} W \right\}$$

n -lineer dönüşümlerinin cümlesi bir vektör uzayı olup,

$$\text{boy}\mathcal{L}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = \text{boy}V_1 \cdot \text{boy}V_2 \cdot \dots \cdot \text{boy}V_n \cdot \text{boy}W$$

dır (Hacısalihoglu 2006).

Tanım 2.1.10: (Riemann Metriği) M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde bir $p \in M$ noktası için

$$\begin{aligned} g & : M \rightarrow \mathcal{L}(T_p M, T_p M; \mathbb{R}) \\ p & \rightarrow g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

şeklinde simetrik, pozitif tanımlı bir lineer form tanımlanmış ise g ye M de **Riemann metriği** denir (Hacısalihoglu 2006).

Tanım 2.1.11: (Riemann manifoldu) Bir M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanmış ise bu (M, g) iklisine bir **Riemann manifoldu** denir (Hacısalihoglu 2006).

Tanım 2.1.12: (Vektör Uzayı üzerinde Tensör) Bir reel vektör uzayı V ve V nin dual uzayı V^* olsun.

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-tan e}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-tan e}} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde herbir $(r + s)$ -lineer dönüşümüne V üzerinde r . **dereceden kovaryant ve s . dereceden kontravaryant tensör (veya kısaca (s, r) tipinde bir tensör)** denir (Okubo 1987).

Bir vektör uzayı üzerinde tanımlı (s, r) tipinde tensörlerin kümesi $T_s^r(V)$ ile göster-

ilir. $T_s^r(V)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup $\text{boy}V = n$ ise $\text{boy}T_s^r(V) = n^{r+s}$ dir (Hacısalihoglu ve Ekmekçi 2003).

Teorem 2.1.1: $T_1^s(V)$ uzayı $\mathcal{L}(\underbrace{V, V, \dots, V}_s; V)$ uzayına izomorftur (Hacısalihoglu ve Ekmekçi 2003).

V vektör uzayı yerine M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ alınır, M nin p noktasında bir tensör uzayı $T_s^r(T_p(M))$ elde edilir ve bu uzayın her bir elemanına p **noktasında bir** (s, r) **tipinde tensör** denir (Okubo 1987).

Tanım 2.1.13: (Tensör Alanı) Bir C^∞ manifold M olsun. M nin her bir noktasına (s, r) tipinde tensör karşılık getiren dönüşüme M üzerinde (s, r) tipinden bir **tensör alanı** denilir (Okubo 1987).

O halde M üzerinde tanımlı bir tensör alanı,

$$\begin{aligned} T &: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_p(M)) \\ p &\rightarrow T(p) \in T_s^r(T_p(M)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür.

Ayrıca $w_1, \dots, w_s \in \chi^*(M)$, $X_1, \dots, X_r \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olmak üzere;

$$(T(X_1, \dots, X_r, w_1, \dots, w_s))(p) = T_p(X_{1p}, \dots, X_{rp}, w_{1p}, \dots, w_{sp})$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$T : \underbrace{\chi(M) \times \dots \times \chi(M)}_{r-\text{tan } e} \times \underbrace{\chi^*(M) \times \dots \times \chi^*(M)}_{s-\text{tan } e} \rightarrow C^\infty(M)$$

şeklinde $C^\infty(M)$ değerli bir $(r + s)$ lineer dönüşüm olur (Lee 1997).

M üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesi, $\mathfrak{S}_s^r(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{S}_s^r(M)$, $C^\infty(M)$ üzerinde bir modüldür.

Özel olarak

$$\mathfrak{S}_0^0 = C^\infty(M)$$

$$\mathfrak{S}_0^1 = \chi^*(M)$$

$$\mathfrak{S}_1^0 = \chi(M)$$

dir.

Dolayısıyla $(1, 1)$ tipindeki bir tensör alanını Teorem 2.1.1 den

$$T : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

şeklinde bir dönüşüm olarak görebiliriz.

Tanım 2.1.14: (Nijenhuis torsiyon tensörü) M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere F , $(1, 1)$ tipinde tensör alanı olsun.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} N_F : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow N_F(X, Y) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$N_F(X, Y) = F^2([X, Y]) + [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)])$$

şeklinde tanımlanan $(1, 2)$ tipindeki N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsiyon tensörü** denir (Yano ve Kon 1983).

Sonuç 2.1.1: N_F Nijenhuis torsiyon tensörü bi-lineer ve anti-simetrik tensördür

(Öztürk 2006).

Tanım 2.1.15 : (Lineer Konneksiyon) M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\begin{aligned}\nabla & : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) & \rightarrow \nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(i) \quad & \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \\ (ii) \quad & \nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y \\ (iii) \quad & \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z\end{aligned}$$

özelliklerini sağlıyorsa, ∇ dönüşümüne M üzerinde bir **lineer konneksiyon** denir (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 2.1.16: (Lie parantez operatörü) Bir C^∞ manifold M olsun. $X, Y \in \chi(M)$, $p \in M$ ve $\forall f \in C^\infty(M)$ için

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

şeklinde tanımlı

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne **Lie parantez operatörü** denir (Brickell ve Clark 1970).

2.2 Diferensiyellenebilir Lif Demet Yapıları

Tanım 2.2.1: (Çarpım Manifoldları) M ve N sırasıyla m ve n boyutlu birer C^r manifoldlar ve

$$S_m = \{(U_i, \Psi_i)\}_{i \in I} \text{ ile } S_n = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$$

de, sırası ile, M ve N manifoldlarının atlasları olsunlar.

(i) $\{U_i\}_{i \in I}$ ve $\{V_j\}_{j \in J}$, sırası ile, M ve N nin birer açık örtüsü iseler $\{U_i \times V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ de $M \times N$ nin bir açık örtüsüdür.

$$(ii) \quad \begin{array}{ccc} \Psi_i \times \psi_j & : & U_i \times V_j \rightarrow E^{m+n} \\ & & (p, q) \rightarrow (\Psi_i(p), \psi_j(q)) \end{array}$$

olarak tanımlanan $\Psi_i \times \psi_j$ dönüşümü

$$\begin{array}{ccc} \Psi_i \times \psi_j & : & U_i \times V_j \rightarrow \Psi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \\ \text{açık cümle} & & \text{açık cümle} \end{array}$$

şeklinde bir homeomorfizmdir.

Dolayısıyla $M \times N$ nin bir atlası

$$S_{m+n} = \{(U_i \times V_j), (\Psi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$$

olur ve S_{m+n} de C^r sınıfındandır. Böylece $M \times N$ cümlesi de bir $(m+n)$ boyutlu topolojik manifold olur. Bu manifoldda M ve N manifoldlarının **çarpım manifoldu** denir (Hacısalıhoğlu 2006).

$M \times N$ çarpım manifoldundaki bir nokta (p, q) şeklinde ifade edilir ve $p \in M$ ve $q \in N$ dir (Nakahara 2003).

Önerme 2.2.1: $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ ve $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ projeksiyonları diferensiyellenebilirdir (Greub vd. 1972).

Tanım 2.2.2: (Lokal çarpım özelliği ve lokal trivialisation) E, M, F sırasıyla $(m+n), m, n$ boyutlu C^∞ manifoldlar, $\pi : E \rightarrow M$ örten, C^∞ bir dönüşüm ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ve $\forall U_\alpha$ için

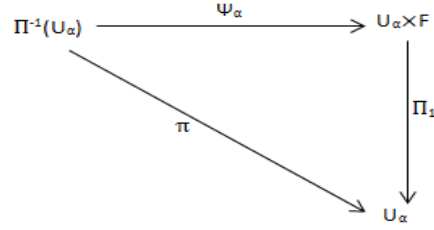
$$\pi = \pi_1 \circ \Psi_\alpha, \quad \pi_1 : U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$$

olacak biçimde

$$\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$$

diffeomorfizimlerinin bir $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sınıfı varsa, (F ye göre) π **lokal çarpım özelliğine veya lokal trivialisationa sahiptir** denir (Greub vd. 1972, Morita 2001) (Şekil 2.2).

$\pi = \pi_1 \circ \Psi_\alpha$ koşulu,



Şekil 2.2 $\pi = \pi_1 \circ \Psi_\alpha$ diyagramı

diyagramının değişmeli olması ile aynı anlama sahiptir.

Tanım 2.2.3: (Diferensiyellenebilir lif demeti) Bir $\pi : E \rightarrow M$ örten, C^∞ dönüşümü lokal trivialisation özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\xi = (E, \pi, M, F)$ dörtlüsüne M manifoldu üzerinde F lif modeli ile bir **diferensiyellenebilir lif demeti** denir (Greub vd. 1972).

Tanım 2.2.4: $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir C^∞ lif demeti olsun. O zaman $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine ξ lif demetinin bir **lokal koordinat gösterimi** veya **chartı** denir (Greub vd. 1972).

Bir $\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demetinde E ye ξ lif demetinin **total (demet) uzayı**, M ye **baz (taban) uzayı**, F ye **lif modeli (veya standart lif)** ve π ye **projeksiyon** adı verilir. Ayrıca, $rank\xi = boyF$ olarak tanımlanır (Greub vd. 1972).

$\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti bazen E total uzayı ile, bazen de $\pi : E \rightarrow M, C^\infty$ dönüşümü ile gösterilir.

Tanım 2.2.5: (**Lif**) $\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti olsun. $\forall x \in M$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{p \in E | \pi(p) = x\}$$

kümesine $x \in M$ üzerinde bir **lif** denir (Greub vd. 1972).

Tüm F_x lerin ayrık birleşimi E total (demet) uzayını verir; yani,

$$E = \bigcup_{x \in M} F_x$$

dir (Greub vd. 1972).

$\text{boy}F_x = \text{boy}E - \text{boy}M$ sayısına ξ **lif demetinin boyutu** denir (Greub vd. 1972).

$\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demeti ve $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi olsun. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha & : \quad \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F \text{ olmak üzere} \\ \Psi_{\alpha,x} & = \quad \phi_\alpha|_x : F_x \rightarrow \{x\} \times F \equiv F \\ \text{ve } \Psi_{\alpha,x} & : \quad F_x \rightarrow F \end{aligned}$$

diffeomorfizmini elde ederiz (Nicola 2000).

Tanım 2.2.6: (**Lif demetinin (diferensiyellenebilir) çapraz kesiti**) $\xi = (E, \pi, M, F)$ herhangi bir lif demeti olsun.

$$\pi \circ \sigma = I_M$$

olacak biçimde tanımlı $\sigma : M \rightarrow E$, C^∞ dönüşümüne ξ lif demetinin bir **çapraz kesiti** denir (Lee 2009).

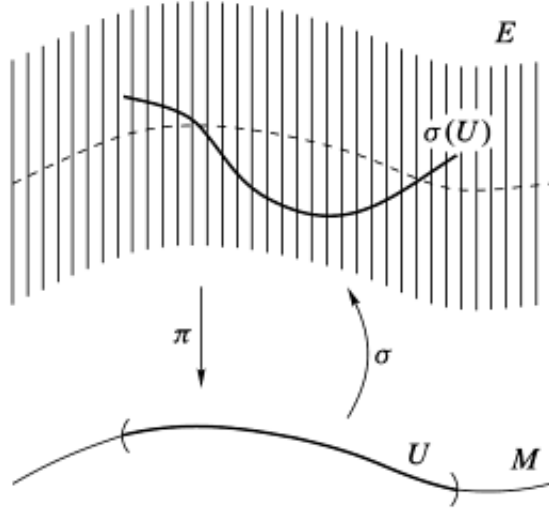
Yani, $\forall x \in M$ için $\sigma(x) \in F_x$ dir (Lee 2009).

$U \subset M$ açık bir alt küme

$$\pi \circ \sigma = I_U$$

olacak biçimde tanımlı $\sigma : U \rightarrow E$, C^∞ dönüşümüne U açık alt kümesi üzerinde ξ lif demetinin lokal diferensiyellenebilir kesiti denir (Lee 2009) (Şekil 2.3).

ξ lif demetinin (diferensiyellenebilir) çapraz kesitlerinin kümesi $\Gamma(\xi)$, $\Gamma(E)$ veya $\Gamma(\pi)$ şeklinde gösterilir (Lee 2009).



Şekil 2.3 M manifoldu üzerinde lokal kesit

Tanım 2.2.7: (Vektör demeti) $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir C^∞ lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa, ξ ye bir **vektör demeti** denir.

(i) $\forall x \in M$ için $\pi^{-1}(x) = F_x$ ve F reel vektör uzayıdır.

(ii) $\forall x \in M$, $\phi_{\alpha,x} : F_x \rightarrow F$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak biçimde ξ nin $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat gösterimi vardır (Greub vd. 1972).

M , m boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M nin tüm noktaların-

daki tanjant uzaylarının ayrık birleşimi $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ ve TM üzerinde

$$\pi : TM \rightarrow M$$

dönüşümü, $\pi(v_p) = p, (v_p \in T_p M)$ şeklinde tanımlansın. $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m)$ dörtlünün bir vektör demeti olduğu kolayca gösterilebilir. Bu demete M nin **tanjant demeti**, $\pi : TM \rightarrow M$ sürekli, örten, C^∞ dönüşümüne de **doğal (kanonik) projeksiyon** denir (Özkan 2006).

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu için TM tanjant demetinin kesitleri, M manifoldu üzerinde vektör alanlarıdır (Lee 2003).

Tanım 2.2.8: (Altvektör demeti) $\xi_E = (E, \pi, M, F)$ ve $\xi_{E'} = (E', \pi|_{E'}, M, F')$ iki vektör demeti olsun. Eğer,

(i) $\forall x \in M$ için F'_x lifi F_x lifinin bir alt vektör uzayı,

(ii) U_α, M nin bir açığı olmak üzere

$$\Psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap E') = U_\alpha \times F' \subset U_\alpha \times F$$

olacak şekilde (U_α, Ψ_α) haritası var ve bu özellik ile $E' \subset E$ bir alt manifold ise $\xi_{E'}$ vektör demetine ξ_E vektör demetinin bir altvektör demeti denir. $(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap E' = \pi|_{E'}^{-1}(U_\alpha))$ (Lee 2009).

Tanım 2.2.9: (Whitney Toplamı) Vektör uzaylarının (ya da modüllerin) direkt toplamına benzer bir kavramda vektör demetlerinin Whitney toplamı adı verilen toplamıdır. ξ_1 ve ξ_2 bir M manifoldu üzerinde iki vektör demeti ve ξ de bu iki demetin Whitney toplamı olan

$$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$$

M manifoldu üzerinde yeni bir vektör demetidir. Bu durumda $F_\xi, F_{\xi_1}, F_{\xi_2}$ sırasıyla

ξ, ξ_1, ξ_2 nin lifleri olmak üzere

$$F_\xi = F_{\xi_1} \oplus F_{\xi_2} \quad (2.2.1)$$

dir. Burada (2.2.1) ifadesindeki $\oplus$ işareti adi direkt toplamı göstermektedir (Turgut 1989).

Tanım 2.2.10: (Dağılım) $m = (n+k)$ –boyutlu M manifoldu üzerinde n –boyutlu **diferensiyellenebilir bir dağılım**, TM tanjant demetinin *rank* n olan bir E altvektör demetidir (Lee 2009).

O halde M manifoldu üzerindeki n –boyutlu diferensiyellenebilir bir dağılım, $\forall x \in M$ ye karşılık n –boyutlu bir $\Delta_x \subset T_x M$ altvektör uzayını karşılık getirir (Lee 2009).

$$\begin{aligned} \Delta & : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} T_x M \\ x & \rightarrow \Delta_x \subset T_x M \end{aligned}$$

E , M manifoldu üzerinde bir dağılım ve X de $U \subset M$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. Eğer, $\forall p \in U$ için $X_p \in \Delta_p$ ise X vektör alanı E dağılımına aittir denir ve X in E dağılımına ait olduğunu göstermek için $X \in \Gamma(E)$ şeklinde gösterilir (Bazı kaynaklarda $X \in E$ şeklinde de gösterilir) (Bejancu ve Farran 2006).

Tanım 2.2.11: (İnvolutive) TM nin bir E altvektör demetinde $X, Y \in \Gamma(E)$ için $[X, Y] \in \Gamma(E)$ ise E altvektör demetine **involutive** denir (Bejancu ve Farran 2006).

E dağılımı integrallenebilir $\Leftrightarrow E$ dağılımı involutive (Bejancu ve Farran 2006).

Tanım 2.2.12: (Tamamlayan dağılım) M diferensiyellenebilir bir manifold ve R, S de M manifoldu üstünde iki tamamlayan dağılım, yani $\forall x \in M$ için

$$\begin{aligned} T_x M &= R_x \oplus S_x \\ &\text{yani} \\ TM &= R \oplus S \end{aligned}$$

dir (Özdemir 2010).

r ve s sırasıyla R ve S dağılımlarına karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere r ve s yi $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olarak görebiliriz. Ayrıca,

$$\begin{aligned} r^2 &= r & s^2 &= s \\ rs &= sr = 0 & \text{ve} & \quad r + s = I_{TM} \end{aligned}$$

özellikleri vardır (Özdemir 2010).

Tanım 2.2.13: (Hemen hemen paracontact yapı) Bir M manifoldu üstündeki hemen hemen paracontact yapı (Ψ, ξ, η) üçlüsüdür. Burada

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Psi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \Psi = 0, \quad \Psi^2 = I - \eta \otimes \xi$$

olacak şekilde Ψ , M manifoldu üstünde $(1, 1)$ tipinde bir vektör alanı, ξ bir vektör alanı ve η de bir formdur (I , M manifoldu üstünde vektör alanlarının özdeşlik dönüşümüdür.) (Peyghan ve Tayebi 2011).

3. ALTIN ORAN

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Altın Oran, pi (π) gibi irrasyonel bir sayıdır ve ondalık sistemde yazılışı; 1,618033988749894...'tür. Bu oranın kısaca gösterimi: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olur. Altın Oranın ifade edilmesi için kullanılan sembol, Fi yani Φ veya φ dir.

Altın Oran, matematikte ve fiziksel evrende ezelden beri var olmasına rağmen, insanlar tarafından ne zaman keşfedildiğine ve kullanılmaya başlandığına dair kesin bir bilgi mevcut değildir. Tarih boyunca birçok defa yeniden keşfedilmiş olma olasılığı kuvvetlidir. Euclid (M.Ö. 365 – M.Ö. 300), "Elementler" adlı kitabında, bir doğruyu 1.6180339... noktasından bölmekten bahsetmiş ve bunu, bir doğruyu ekstrem ve önemli oranda bölmek diye adlandırmıştır. Mısırlılar keops Piramidi'nin tasarımında hem pi sayısını hem de altın oranı kullanmışlardır. Yunanlılar, Parthenon'un tüm tasarımını Altın Oran'a dayandırmışlardır. Bu oran, ünlü Yunanlı heykeltıraş Phidias tarafından da kullanılmıştır. Leonardo Fibonacci adındaki İtalyan matematikçi, adıyla anılan nümerik serinin olağanüstü özelliklerini keşfetmiştir fakat bunun Altın Oran ile ilişkisini kavrayıp kavramadığı bilinmemektedir. Altın Oran'ın Latince karşılığını ilk kullanan muhtemelen Leonardo da Vinci 'dir. Rönesans sanatçıları Altın Oran'ı tablolarında ve heykellerinde denge ve güzelliği elde etmek amacıyla sıklıkla kullanmışlardır. Örneğin Leonardo da Vinci, Son Yemek adlı tablosunda, İsa'nın ve havarilerin oturduğu masanın boyutlarından, arkadaki duvar ve pencerelere kadar Altın Oran'ı uygulamıştır. Güneş etrafındaki gezegenlerin yörüngelerinin eliptik yapısını keşfeden Johannes Kepler (1571-1630), Altın Oran'ı şu şekilde belirtmiştir: "Geometrinin iki büyük hazinesi vardır; biri Pythagoras'ın teoremi, diğeri, bir doğrunun Altın Oran'a göre bölünmesidir."

Altın oran, doğada sayısız canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında bulunan özel bir orandır. Doğada en belirgin örneklerine insan vücudunda, deniz kabuklarında, DNA sarmalllarında, galaksilerde, ağaç dallarında, tavşanların üremesinde, Mısır piramit-

lerinde, geometrik şekillerde (dikdörtgen, üçgen, beşgen), fraktallarda... görülmektedir.

Altın oran, bir sayının insanlık, bilim ve sanat tarihinde oynadığı inanılmaz bir roldür. Altın oran, evren ve yaşamı anlama konusunda bizlere yeni kapılar açmaya devam etmektedir. 1970'lerde Roger Penrose, o güne kadar imkânsız olduğu düşünülen, "yüzeylerin beşli simetri ile katlanması"nı Altın oran sayesinde bulmuştur (vikipedi).

Altın oranın tarihçesine değindikten sonra şimdi de altın oranın tanımına ve değerine göz atalım.

Tanım 3.1: Herhangi bir AB doğru parçasının üzerindeki bir C noktası için $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranına **aşıt oran**, $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranına da **ortalama oran** denir (Yağcı 2005).



Şekil 3.1 Aşıt ve Ortalama Oran

Tanım 3.2: Eğer AB doğru parçasının üzerindeki bir C noktası için aşıt oran ile ortalama oran eşit oluyorsa, yani

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

ise C ye AB doğru parçasının **altın bölümü** veya **altın noktası** denir. Bu oranı oluşturan $\frac{|AB|}{|AC|}$ veya $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranına da **altın oran** denir (Yağcı 2005).

3.1 Altın Oranın Değeri

Yukarıda çizdiğimiz (Şekil 3.1) AB doğru parçasında $|AC| = x$ ve $|CB| = y$ olsun. Şimdi $\frac{|AB|}{|AC|}$ ve $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranlarını x ve y cinsinden hesaplayıp bu oranları eşitleyelim, bakalım ne zaman eşit çıkacaklar. Şekilden hemen

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{x+y}{x} \\ \frac{|AC|}{|CB|} &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$

eşitlikleri çıkar. Demek ki, bu iki oranın eşit olmaları için x ve y uzunlukları

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

denklemini sağlamalı. Paydaları eşitlersek

$$xy + y^2 = x^2$$

denklemini elde ederiz. Şimdi de denklemin her iki tarafını y^2 ye bölelim:

$$\frac{x}{y} + 1 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \quad (3.1)$$

Bu aşamada $\frac{x}{y} = \phi$ tanımını yaparsak (3.1) denklemi

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

dönüştür. Bu denklemin kökleri ise

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } \phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir. x ve $y > 0$ olduğundan $\phi = \frac{x}{y} > 0$. Dolayısıyla ϕ için negatif olan ifadeyi değil, pozitif olan ifadeyi almalıyız. O halde

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339...$$

$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{x}{y} = \phi$ olduğundan altın oranı buluruz (Yağcı 2005).

4. RIEMANN MANİFOLDLARI ÜSTÜNDE ALTIN YAPI

Tanım 4.1: M , diferensiyellenebilir bir reel manifold ve F , M üstünde $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer F tensör alanı

$$Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 I = 0$$

cebirsel denklemini sağlarsa ve $\forall p \in M$ için $F^{n-1}(p), F^{n-2}(p), \dots, F(p), I$ lineer bağımsız ise F ye bir **polinom yapı** denir. Burada I , $(1, 1)$ tipli özdeşlik tensör alanıdır.

$Q(x)$ polinomuna ise **yapı polinomu** denir. Örneğin;

(i) $Q(x) = x^2 + I = 0$ yapı polinomunu sağlayan F tensör alanı J ile gösterilir ve J ye **hemen hemen kompleks yapı** adı verilir. Buna göre $J^2 + I = 0 \Leftrightarrow J^2 = -I$ olur.

(ii) $Q(x) = x^2 - I = 0$ yapı polinomunu sağlayan F tensör alanı P ile gösterilir ve P ye **hemen hemen çarpım yapı** adı verilir. Buna göre $P^2 - I = 0 \Leftrightarrow P^2 = I$ olur.

(iii) $Q(x) = x^2 - x - I = 0$ yapı polinomunu sağlayan F tensör alanı Φ ile gösterilir ve Φ ye **altın yapı** adı verilir. Buna göre $\Phi^2 - \Phi - I = 0 \Leftrightarrow \Phi^2 = \Phi + I$ olur (Crasmareanu ve Hretcanu 2008).

Tanım 4.2: (M, g) m -boyutlu bir Riemann manifoldu ve P de M üstünde sıfırdan farklı $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer $P^2 = I$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$g(PX, PY) = g(X, Y)$$

ise P ye M üstünde bir **Riemann hemen hemen çarpım yapı** ve (M, g, P) üçlüsüne de **Riemannian hemen hemen çarpım manifoldu** denir (Hretcanu ve

Crasmareanu 2009)

Tanım 4.3: (M, g) bir Riemann manifoldu ve M üstünde tanımlı $(1, 1)$ tipli tensör alanı Φ olsun. Eğer Φ tensör alanı, $Q(x) = x^2 - x - I = 0$ yapı polinomunu sağlarsa Φ tensör alanına (M, g) **Riemann manifoldu üstünde bir altın yapı** denir. Burada I , $(1, 1)$ tipli özdeşlik tensör alanıdır (Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

Teorem 4.1: (M, g) m -boyutlu bir Riemann manifoldu üstündeki her P hemen hemen çarpım yapısından (M, g) üstünde aşağıdaki gibi iki altın yapı elde edilir.

$$\Phi_1 = \frac{I + \sqrt{5}P}{2}, \quad \Phi_2 = \frac{I - \sqrt{5}P}{2}$$

Tersine (M, g) üstündeki her Φ altın yapısından hemen hemen çarpım yapısı elde edilir (Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

Tanım 4.4: (M, g) bir Riemann manifoldu ve Φ de M üstünde bir altın yapı olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\Phi X, Y) = g(X, \Phi Y)$$

eşitliği sağlanıyorsa Φ ye g **Riemann metriği ile uyumludur** denir. Bu durumda (g, Φ) ikilisine M **manifoldu üstünde bir altın yapı**, (M, g, Φ) üçlüsüne de **altın Riemannian manifoldu** denir (Crasmareanu ve Hretcanu 2008, Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

Bu tanıma denk olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.1: (M, g, Φ) bir altın Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(\Phi X, Y) + g(X, Y)$$

eşitliği sağlanır (Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

Önerme 4.2: (M, g, Φ) bir altın Riemann manifoldu olsun. Bu durumda Φ altın yapısı $\forall p \in M$ noktası için $T_p M$ tanjant uzayı üstünde bir izomorfizmdir (Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

Önerme 4.3: (M, g, Φ) bir altın Riemann manifoldu olsun. Φ altın yapısının eigen (öz) değerleri ϕ ve $(1 - \phi)$ dir (Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

Örnek 4.1: $(p + q)$ boyutlu E^{p+q} Öklid uzayını düşünelim $(p, q \in \mathbb{N}^*)$. $\Phi : E^{p+q} \rightarrow E^{p+q}$ aşağıdaki gibi tanımlı $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olsun.

$$\Phi(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) = (\phi x^1, \dots, \phi x^p, (1 - \phi)y^1, \dots, (1 - \phi)y^q)$$

burada $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $(1 - \phi) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x^2 = x + 1$ denkleminin kökleridir.

Diğer taraftan, $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q), (z^1, \dots, z^p, t^1, \dots, t^q) \in E^{p+q}$ için,

$$\begin{aligned} \Phi^2(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) &= (\phi^2 x^1, \dots, \phi^2 x^p, (1 - \phi)^2 y^1, \dots, (1 - \phi)^2 y^q) \\ &= (\phi x^1, \dots, \phi x^p, (1 - \phi)y^1, \dots, (1 - \phi)y^q) \\ &\quad + (x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) \\ &= \Phi(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) + I(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) \end{aligned}$$

sahip oluruz. Böylece $\Phi^2 = \Phi + I$ elde edilir. Ayrıca $\forall (x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q), (z^1, \dots, z^p, t^1, \dots, t^q) \in E^{p+q}$ için,

$$\begin{aligned} &\langle \Phi(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q), (z^1, \dots, z^p, t^1, \dots, t^q) \rangle \\ &= \langle (\phi x^1, \dots, \phi x^p, (1 - \phi)y^1, \dots, (1 - \phi)y^q), (z^1, \dots, z^p, t^1, \dots, t^q) \rangle \\ &= \phi x^1 z^1 + \dots + \phi x^p z^p + (1 - \phi)y^1 t^1 + \dots + (1 - \phi)y^q t^q \end{aligned} \tag{4.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \langle (x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q), \Phi(z^1, \dots, z^p, t^1, \dots, t^q) \rangle \\
&= \langle (x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q), (\phi z^1, \dots, \phi z^p, (1 - \phi)t^1, \dots, (1 - \phi)t^q) \rangle \\
&= \phi x^1 z^1 + \dots + \phi x^p z^p + (1 - \phi)y^1 t^1 + \dots + (1 - \phi)y^q t^q \tag{4.2}
\end{aligned}$$

dir. Buradan (4.1) = (4.2) olduğunu görürüz. Böylece, E^{p+q} üstündeki $\langle, \rangle$ skalar çarpım Φ ile uyumludur. Bu sebeple, $(E^{p+q}, \langle, \rangle)$ üstünde Φ bir altın yapı ve $(E^{p+q}, \langle, \rangle, \Phi)$ bir altın Riemannian manifolddur (Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

5. ALTIN RIEMANN MANİFOLDLARIN ALT MANİFOLDLARI

5.1 Altın Riemann Manifolddarın Alt Manifolddarının Üstüne İndirgenmiş Yapıların Özellikleri

M bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun, r -eşboyutlu n -boyutlu bir alt manifoldu olsun. $\forall x \in M$ için $x \in M$ de sırasıyla M nin tanjant uzayını $T_x M$ ve normal uzayını da $(T_x M)^\perp$ ile gösterelim. M üstüne indirgenmiş Riemann metriği $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\widetilde{g}(X, Y) = g(X, Y) \quad (5.1)$$

ile verilir. $\forall x \in M$ noktasında $(T_x M)^\perp$ normal uzayının bir $\{N_1, \dots, N_r\}$ ortonormal bazını düşünelim. $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \dots, r\}$ ve $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Herhangi bir $X \in \chi(M)$ için ΦX ve ΦN_α nın M de sırasıyla teğet ve normal bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\Phi X = \varphi X + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) N_{\alpha}, \quad \forall X \in \chi(M) \quad (5.2)$$

$$\Phi N_{\alpha} = \xi_{\alpha} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_{\beta}, \quad (5.3)$$

burada φ , M üstünde $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı, ξ_{α} , M alt manifoldu üstünde teğet vektör alanları, u_{α} , M üstünde 1-formlar ve $a := (a_{\alpha\beta})_r$, M üstünde reel fonksiyonların $r \times r$ tipinde bir matrisidir. Böylece, $(\Phi, \widetilde{g})$ ile M üstünde $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$ indirgenmiş yapısı elde edilir (Hretcanu ve Crasmareanu 2007).

Örnek 5.1.1: $\Phi : E^{p+q} \rightarrow E^{p+q}$ aşağıdaki gibi tanımlı $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olsun.

$$\Phi(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) = (\phi x^1, \dots, \phi x^p, (1 - \phi)y^1, \dots, (1 - \phi)y^q)$$

burada $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $(1 - \phi) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x^2 = x + 1$ denkleminin kökleridir. $E^{p+q} =$

$E^p \times E^q$ olduğu açıktır ve sırasıyla E^p ve E^q uzaylarındaki hiperküreler

$$S^{p-1} = \left\{ (x^1, \dots, x^p) \mid \sum_{i=1}^p (x^i)^2 = r_1^2 \right\}$$

ve

$$S^{q-1} = \left\{ (y^1, \dots, y^q) \mid \sum_{j=1}^q (y^j)^2 = r_2^2 \right\}$$

şeklindedir. Burada $r_1^2 + r_2^2 = r^2$ dir.

$S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ çarpım manifoldları

$$\sum_{i=1}^p (x^i)^2 + \sum_{j=1}^q (y^j)^2 = r^2 \quad (5.4)$$

olacak şekilde $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) := (x^i, y^j) \quad (i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q\})$ koordinatlara sahiptir. Böylece, $S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ çarpım manifoldu E^{p+q} da 2 eşboyutlu bir alt manifold ve $S^{p+q-1}(r)$ de 1 eşboyutlu bir alt manifolddur. Ayrıca; $S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ çarpım kürelerinde bir noktadaki $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) := (x^i, y^j)$ tanjant uzay,

$$T_{(x^1, \dots, x^p, \underbrace{0, \dots, 0}_{q-\text{tane}})} S^{p-1}(r_1) \oplus T_{(\underbrace{0, \dots, 0}_{p-\text{tane}}, y^1, \dots, y^q)} S^{q-1}(r_2) \quad (5.5)$$

şeklindedir.

$T_{(x^1, \dots, x^p)} E^p$ den bir $(X^1, \dots, X^p)$ vektör $S^{p-1}(r_1)$ teğettir $\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^p x^i X^i = 0. \quad (5.6)$$

$(X^1, \dots, X^p)$ vektörünü E^{p+q} den $(x^1, \dots, x^p, \underbrace{0, \dots, 0}_{q-\text{tane}})$ ile özdeşleştirebiliriz.

$T_{(y^1, \dots, y^q)} E^q$ den bir $(Y^1, \dots, Y^q)$ vektör $S^{q-1}(r_2)$ teğettir $\iff$

$$\sum_{j=1}^q y^j Y^j = 0. \quad (5.7)$$

$(Y^1, \dots, Y^q)$ vektörünü E^{p+q} den $(\underbrace{0, \dots, 0}_{p\text{-tane}}, y^1, \dots, y^q)$ ile özdeşleştirebiliriz.

Sonuç olarak $\forall (x^i, y^j) \in S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ noktası için (5.6) ve (5.7) denklemleri sağlanıyorsa

$$(X^1, \dots, X^p, Y^1, \dots, Y^q) := (X^i, Y^j) \in T_{(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)}(S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2))$$

dır.

$\forall (x^i, y^j) \in S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ noktasında $T_{(x^i, y^j)}^\perp(S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2))$ uzayının bir lokal ortonormal bazını (N_1, N_2)

$$N_1 = \frac{1}{r}(x^i, y^j), \quad N_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{r_2}{r_1}x^i, -\frac{r_1}{r_2}y^j\right)$$

düşünelim. $S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ da $\Phi(N_\alpha)$ ($\alpha \in \{1, 2\}$) nın tanjant ve normal bileşenlerini

$$\Phi(N_\alpha) = \xi_\alpha + a_{\alpha 1}N_1 + a_{\alpha 2}N_2, \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (5.8)$$

formülünden elde ederiz. $a_{\alpha\beta} = \langle \Phi(N_\alpha), N_\beta \rangle$ ($\alpha \in \{1, 2\}$) den

$$a_{11} = \frac{\phi r_1^2 + (1-\phi)r_2^2}{r^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{r_1 r_2 (2\phi - 1)}{r^2}, \quad a_{22} = \frac{\phi r_2^2 + (1-\phi)r_1^2}{r^2}$$

elde ederiz. Böylece

$$\mathcal{A} := (a_{\alpha\beta})_2$$

matrisi

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\phi r_1^2 + (1-\phi)r_2^2}{r^2} & \frac{r_1 r_2 (2\phi - 1)}{r^2} \\ \frac{r_1 r_2 (2\phi - 1)}{r^2} & \frac{\phi r_2^2 + (1-\phi)r_1^2}{r^2} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

olur. (5.8) den

$$\xi_1 = \xi_2 = 0_{p+q} \quad (5.10)$$

dır. (5.9) ve (5.10) dan

$$\Phi(N_\alpha) = a_{\alpha 1}N_1 + a_{\alpha 2}N_2, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

sahibiz. Ayrıca, $\Phi(T_{(x^i, y^j)}^\perp(S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2))) \subseteq T_{(x^i, y^j)}^\perp(S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2))$ dır.

$S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ da $(X^1, \dots, X^p, Y^1, \dots, Y^q) := (X^i, Y^j)$ teğet vektör alanı için $\Phi(X^i, Y^j)$ nin $S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ da teğet ve normal bileşenlerini

$$\Phi(X^i, Y^j) = \varphi(X^i, Y^j) + u_1(X^i, Y^j)N_1 + u_2(X^i, Y^j)N_2 \quad (5.11)$$

formülünden elde ederiz. $u_\alpha(X_i, Y_j) = \langle (X_i, Y_j), \xi_\alpha \rangle$ ($\alpha \in \{1, 2\}$) ve (5.10) dan

$$u_1(X_i, Y_j) = u_2(X_i, Y_j) = 0 \quad (5.12)$$

elde ederiz. (5.11) ve (5.12) den

$$\Phi(X^i, Y^j) = \varphi(X^i, Y^j) \quad (5.13)$$

dir. O halde $\Phi(T_{(x^i, y^j)}^\perp(S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2))) \subseteq T_{(x^i, y^j)}^\perp(S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2))$ ve $\Phi^2 = \Phi + I$ dır. Böylece E^{p+q} üstünde $(\Phi, \langle, \rangle)$ altın yapısı ile $S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ çarpım küreleri üstünde (5.9), (5.10), (5.12) ve (5.13) den $(\varphi, \langle, \rangle, \xi_\alpha = 0_{p+q}, u_\alpha = 0, \mathcal{A})$ indirgenmiş yapıyı elde ederiz. Hemde burada $S^{p-1}(r_1) \times S^{q-1}(r_2)$ üstünde $(\varphi, \langle, \rangle)$ altın Riemann yapısıdır (Hretcanu ve Crasmareanu 2007).

Önerme 5.1.1: Bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunda M , r codimension- l n -boyutlu bir alt manifold ise, (5.2) ve (5.3) den Φ altın yapısı ile M üstüne

indirgenmiş yapının $\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r$ elemanları aşağıdaki denklemleri sağlarlar:

$$\varphi^2 X = \varphi X + X - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}, \quad (5.14)$$

$$u_{\alpha}(\varphi X) = (1 - a_{\alpha\alpha}) u_{\alpha}(X), \quad (5.15)$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad (5.16)$$

$$u_{\beta}(\xi_{\alpha}) = \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}, \quad (5.17)$$

$$\varphi \xi_{\alpha} = \xi_{\alpha} - \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \xi_{\beta}, \quad (5.18)$$

ve M üstündeki $(1, 1)$ tensör alanı φ ile M Alt manifoldu üstündeki indirgenmiş g metriği arasındaki özellikler $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki gibidir (Hretcanu ve Crasmareanu 2007).

$$u_{\alpha}(X) = g(X, \xi_{\alpha}), \quad (5.19)$$

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y), \quad (5.20)$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(\varphi X, Y) + g(X, Y) - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) u_{\alpha}(Y). \quad (5.21)$$

İspat: (5.2) eşitliğine Φ yi uygulayarak $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\Phi^2 X = \Phi(\varphi X) + \sum_{\alpha=1}^r u_{\alpha}(X) \Phi(N_{\alpha})$$

$$\Phi X + X = \varphi^2 X + \sum_{\beta} u_{\beta}(\varphi X) N_{\beta} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) \left[\xi_{\alpha} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_{\beta} \right]$$

$$\varphi X + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) N_{\alpha} + X = \varphi^2 X + \sum_{\beta} u_{\beta}(\varphi X) N_{\beta} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) \xi_{\alpha}$$

$$+ \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_{\beta}$$

$$\varphi^2 X = \varphi X + X - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) \xi_{\alpha} + \sum_{\beta} \left[u_{\beta}(X) - u_{\beta}(\varphi X) - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) a_{\alpha\beta} \right] N_{\beta}$$

$$\Rightarrow \varphi^2 X = \varphi X + X - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X) \xi_{\alpha},$$

$$\varphi^2 = \varphi + I - \sum_{\alpha} u_{\alpha} \otimes \xi_{\alpha}$$

dır. O halde (5.14) eşitliği ispatlanmış olur. Ayrıca;

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(\varphi X) &= u_{\alpha}(X) - \sum_{\beta} u_{\beta}(X) a_{\beta\alpha} \\ &= (1 - a_{\alpha\alpha}) u_{\alpha}(X) \end{aligned}$$

olur. Böylece (5.15) eşitliği ispatlanmış olur.

N_{α} ve N_{β} normal vektör alanları olmak üzere $\tilde{g}(\Phi N_{\alpha}, N_{\beta}) = \tilde{g}(N_{\alpha}, \Phi N_{\beta})$ olduğunu biliyoruz. Sırasıyla (5.3) eşitliğini kullanırsak

$$\tilde{g}(\xi_{\alpha} + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} N_{\gamma}, N_{\beta}) = \tilde{g}(N_{\alpha}, \xi_{\beta} + \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} N_{\gamma})$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} \underbrace{\tilde{g}(\xi_{\alpha}, N_{\beta})}_{=0} + \tilde{g}\left(\sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} N_{\gamma}, N_{\beta}\right) &= \underbrace{\tilde{g}(N_{\alpha}, \xi_{\beta})}_{=0} + \tilde{g}\left(N_{\alpha}, \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} N_{\gamma}\right), \\ \Rightarrow \tilde{g}\left(\sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} N_{\gamma}, N_{\beta}\right) &= \tilde{g}\left(N_{\alpha}, \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} N_{\gamma}\right) \\ \Rightarrow \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} \tilde{g}(N_{\gamma}, N_{\beta}) &= \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} \tilde{g}(N_{\alpha}, N_{\gamma}) \\ \Rightarrow a_{\alpha\beta} &= a_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

olur ve böylece (5.16) eşitliği elde edilmiş olur.

$\Phi^2 N_\alpha = \Phi N_\alpha + N_\alpha$ dan (5.2) ve (5.3) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\Phi N_\alpha + N_\alpha &= \Phi^2 N_\alpha = \Phi(\xi_\alpha + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_\beta) = \Phi(\xi_\alpha) + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \Phi(N_\beta) \\
&= \varphi(\xi_\alpha) + \sum_{\beta} u_\beta(\xi_\alpha) N_\beta + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \left[\xi_\beta + \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} N_\gamma \right] \\
&= \left(\varphi(\xi_\alpha) + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \xi_\beta \right) + \sum_{\beta} \left[u_\beta(\xi_\alpha) + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} \right] N_\beta \\
\xi_\alpha + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_\beta + N_\alpha &= \left(\varphi(\xi_\alpha) + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \xi_\beta \right) + \sum_{\beta} \left[u_\beta(\xi_\alpha) + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} \right] N_\beta
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan;

$$\begin{aligned}
N_\alpha &= \sum_{\beta} \left[u_\beta(\xi_\alpha) + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} \right] N_\beta - \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_\beta, \\
N_\alpha &= \sum_{\beta} \left[u_\beta(\xi_\alpha) + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} - a_{\alpha\beta} \right] N_\beta, \\
\Rightarrow u_\beta(\xi_\alpha) &= \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}
\end{aligned}$$

ve

$$\varphi(\xi_\alpha) = \xi_\alpha - \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \xi_\beta$$

elde etmiş oluruz. O halde (5.17) ve (5.18) eşitliklerini ispatlamış oluruz.

X ve N_α vektör alanları için

$$\tilde{g}(\Phi X, N_\alpha) = \tilde{g}(X, \Phi N_\alpha)$$

olduğunu biliyoruz. Burada sırasıyla (5.2) ve (5.3) eşitliklerini kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\varphi X + \sum_{\beta} u_{\beta}(X)N_{\beta}, N_{\alpha}) &= \tilde{g}(X, \xi_{\alpha} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}N_{\beta}) \\
\underbrace{\tilde{g}(\varphi X, N_{\alpha})}_{=0} + \tilde{g}(\sum_{\beta} u_{\beta}(X)N_{\beta}, N_{\alpha}) &= \tilde{g}(X, \xi_{\alpha}) + \underbrace{\tilde{g}(X, \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}N_{\beta})}_{=0} \\
&\Rightarrow \tilde{g}(\sum_{\beta} u_{\beta}(X)N_{\beta}, N_{\alpha}) = \tilde{g}(X, \xi_{\alpha}) \\
&\Rightarrow \sum_{\beta} u_{\beta}(X)\tilde{g}(N_{\beta}, N_{\alpha}) = \tilde{g}(X, \xi_{\alpha}) \\
&\Rightarrow u_{\alpha}(X) = \tilde{g}(X, \xi_{\alpha})
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız ki (5.19) eşitliğine ulaşırız.

$X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X, Y) = \tilde{g}(\varphi X, Y) = \tilde{g}(\Phi X, Y) = \tilde{g}(X, \Phi Y) = \tilde{g}(X, \varphi Y) = g(X, \varphi Y)$$

olur böylece (5.20) eşitliği elde edilir. Ayrıca (5.14) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, \varphi^2 Y) = g(X, \varphi Y + Y - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha}) \\
&= \underbrace{g(X, \varphi Y)}_{=g(\varphi X, Y)} + g(X, Y) - g(X, \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha}) \\
&= g(\varphi X, Y) + g(X, Y) - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y) \underbrace{g(X, \xi_{\alpha})}_{=u_{\alpha}(X)} \\
&= g(\varphi X, Y) + g(X, Y) - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X)u_{\alpha}(Y)
\end{aligned}$$

(5.21) eşitliğini ispatlamış oluruz.

Önerme 5.1.2: $\xi_1, \dots, \xi_r$, M üstünde lineer bağımsız vektör alanları ise $u_1, \dots, u_r$ 1-formlarında lineer bağımsızdır (Hretcanu ve Crasmareanu 2007).

İspat: $\sum_{\alpha=1}^r \mu^{\alpha} u_{\alpha}(X) = 0 \Rightarrow \mu^{\alpha} = 0 \quad (?)$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^r \mu^\alpha g(X, \xi_\alpha) = g(X, \sum_{\alpha=1}^r \mu^\alpha \xi_\alpha), \quad \forall X \in \chi(M)$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^r \mu^\alpha \xi_\alpha = 0 \Rightarrow \mu^\alpha = 0 \Rightarrow u_1, \dots, u_r \text{ 1-formlarında lineer bağımsızdır.}$$

Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \sum_{\alpha=1}^r h_\alpha(X, Y) N_\alpha, \\ \tilde{\nabla}_X N_\alpha &= -A_\alpha X + \nabla_X^\perp N_\alpha, \end{aligned} \quad (5.22)$$

burada $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, $h_\alpha(X, Y) = g(A_\alpha X, Y)$ dir. $\tilde{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\tilde{M}$ ve M üstündeki Levi-civita konneksiyonlarıdır.

Açıklama 5.1.1: $\nabla_X^\perp N_\alpha$ normal konneksiyonu için $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X^\perp N_\alpha = \sum_{\beta=1}^r l_{\alpha\beta}(X) N_\beta, \quad (5.23)$$

dir. $\tilde{g}(N_\alpha, N_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ dan $\tilde{g}(\nabla_X^\perp N_\alpha, N_\beta) + \tilde{g}(N_\alpha, \nabla_X^\perp N_\beta) = 0$ olur (5.23) eşitliğini de kullanırsak $\forall X \in \chi(M)$ için $\tilde{g}(\sum_{\gamma=1}^r l_{\alpha\gamma}(X) N_\gamma, N_\beta) + \tilde{g}(N_\alpha, \sum_{\gamma=1}^r l_{\beta\gamma}(X) N_\gamma) = 0$ elde ederiz. Böylece; buradan $\alpha, \beta \in \{1, \dots, r\}$ için

$$l_{\alpha\beta} = -l_{\beta\alpha} \quad (5.24)$$

olduğunu görürüz (Hretcanu ve Crasmareanu 2007).

Φ nin Nijenhuis torsiyon tensör alanı $N_\Phi(X, Y)$ olsun. $N_\Phi(X, Y)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$N_\Phi(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] \quad (5.25)$$

dir (Hretcanu ve Crasmareanu 2008).

Açıklama 5.1.2: $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, $(1, 1)$ tipindeki Φ tensör alanına sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(\widetilde{M})$ için Φ nin Nijenhuis tensörü

$$N_{\Phi}(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_{\Phi X}\Phi)(Y) - (\widetilde{\nabla}_{\Phi Y}\Phi)(X) - \Phi \left[(\widetilde{\nabla}_X\Phi)(Y) - (\widetilde{\nabla}_Y\Phi)(X) \right], \quad (5.26)$$

şeklindedir. Burada $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üstündeki Levi-Civita konneksiyonudur (Crasmareanu ve Hretcanu 2007).

Tanım 5.1.1: Bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunda Φ tensör alanı Levi Civita konneksiyonuna göre paralel ise yani; $\forall X, Y \in \chi(\widetilde{M})$ için $(\widetilde{\nabla}_X\Phi)Y = 0$ ($\widetilde{\nabla}\Phi = 0$) ise, $\widetilde{M}$ ya **lokal çarpım altın Riemann manifoldu** denir (Crasmareanu ve Hretcanu 2007).

Açıklama 5.1.3: Bir lokal çarpım altın Riemann manifoldunda $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$, Φ altın yapısı integrallenebilirdir yani; $N_{\Phi} = 0$ dır.

Ayrıca;

$$\Phi(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X\Phi)(Y) := (\widetilde{\nabla}_X\Phi Y) - \Phi(\widetilde{\nabla}_X Y) \quad (5.27)$$

olacak şekilde $\widetilde{M}$ üstünde $(1, 2)$ tipindeki tensör alanını Φ ile göstereyim.

$\Phi(X, Y)^{\top}$ ve $\Phi(X, Y)^{\perp}$ sırası ile $\forall X, Y \in \chi(\widetilde{M})$ için $\Phi(X, Y)$ nin teğet ve normal bileşenleridir (Crasmareanu ve Hretcanu 2007).

Teorem 5.1.1: Bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunda M , r -eşboyutlu, n -boyutlu bir alt manifold ise bu takdirde Φ yapısı ile M üstüne indirgenmiş yapı $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlarlar (Crasmareanu ve Hretcanu 2007).

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) (\nabla_X \varphi)Y = \Phi(X, Y)^\top + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y)\xi_{\alpha} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)A_{\alpha}X, \\ (ii) (\nabla_X u_{\alpha})(Y) = \tilde{g}(\Phi(X, Y), N_{\alpha}) - h_{\alpha}(X, \varphi Y) + \\ \quad \sum_{\beta} (u_{\beta}(Y)l_{\alpha\beta}(X) + h_{\beta}(X, Y)a_{\beta\alpha}), \\ (iii) \nabla_X \xi_{\alpha} = \Phi(X, N_{\alpha})^\top - \varphi(A_{\alpha}X) + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}A_{\beta}X + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X)\xi_{\beta}, \\ (iv) X(a_{\alpha\beta}) = \tilde{g}(\Phi(X, N_{\alpha}), N_{\beta}) - u_{\alpha}(A_{\beta}X) - u_{\beta}(A_{\alpha}X) + \\ \quad \sum_{\gamma} [l_{\alpha\gamma}(X)a_{\gamma\beta} + l_{\beta\gamma}(X)a_{\alpha\gamma}], \end{array} \right. \quad (5.28)$$

İspat: $(\tilde{\nabla}_X \Phi Y) = (\tilde{\nabla}_X(\varphi Y + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)N_{\alpha}))$

$$\begin{aligned} &= \tilde{\nabla}_X \varphi Y + \sum_{\alpha} X(u_{\alpha}(Y))N_{\alpha} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)\tilde{\nabla}_X N_{\alpha} \\ &= \nabla_X \varphi Y + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, \varphi Y)N_{\alpha} + \sum_{\alpha} X(u_{\alpha}(Y))N_{\alpha} \\ &\quad + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)(-A_{\alpha}X + \nabla_X^{\perp} N_{\alpha}) \\ &= \nabla_X \varphi Y + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, \varphi Y)N_{\alpha} + \sum_{\alpha} X(u_{\alpha}(Y))N_{\alpha} - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)A_{\alpha}X \\ &\quad + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y) \underbrace{\nabla_X^{\perp} N_{\alpha}}_{=\sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X)N_{\beta}} \\ &= \nabla_X \varphi Y - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)A_{\alpha}X \\ &\quad + \sum_{\alpha} \left[h_{\alpha}(X, \varphi Y) + X(u_{\alpha}(Y)) + \sum_{\beta} u_{\beta}(Y)l_{\beta\alpha}(X) \right] N_{\alpha} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Phi(\widetilde{\nabla}_X Y) &= \Phi(\nabla_X Y + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) N_{\alpha}) \\
&= \Phi \nabla_X Y + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) \Phi(N_{\alpha}) \\
&= \varphi \nabla_X Y + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(\nabla_X Y) N_{\alpha} + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) (\xi_{\alpha} + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_{\beta}) \\
&= \varphi \nabla_X Y + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) \xi_{\alpha} + \sum_{\alpha} \left[u_{\alpha}(\nabla_X Y) + \sum_{\beta} h_{\beta}(X, Y) a_{\beta\alpha} \right] N_{\alpha}
\end{aligned}$$

dır. Böylece;

$$\begin{aligned}
\Phi(X, Y) &= \nabla_X \varphi Y - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y) A_{\alpha} X \\
&\quad + \sum_{\alpha} \left[h_{\alpha}(X, \varphi Y) + X(u_{\alpha}(Y)) + \sum_{\beta} u_{\beta}(Y) l_{\beta\alpha}(X) \right] N_{\alpha} \\
&\quad - \varphi \nabla_X Y - \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) \xi_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left[u_{\alpha}(\nabla_X Y) + \sum_{\beta} h_{\beta}(X, Y) a_{\beta\alpha} \right] N_{\alpha} \\
&= (\nabla_X \varphi) Y - \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y) A_{\alpha} X - \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) \xi_{\alpha} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{\alpha} \left[h_{\alpha}(X, \varphi Y) + (\nabla_X u_{\alpha}) Y + \sum_{\beta} u_{\beta}(Y) l_{\beta\alpha}(X) - \sum_{\beta} h_{\beta}(X, Y) a_{\beta\alpha} \right] N_{\alpha}}_{=\Phi(X, Y)^{\perp}} \\
(\nabla_X \varphi) Y &= \underbrace{\Phi(X, Y) - \Phi(X, Y)^{\perp}}_{=\Phi(X, Y)^{\top}} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y) A_{\alpha} X + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) \xi_{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da (5.28) (i) eşitliğini

$$(\nabla_X \varphi) Y = \Phi(X, Y)^{\top} + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y) \xi_{\alpha} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y) A_{\alpha} X$$

ve yukarıdaki ifade de $\Phi(X, Y)$ nin her iki tarafını N_{α} ile iç çarpıma sokarsak (5.28) (ii) eşitliğini

$$(\nabla_X u_{\alpha}) Y = \widetilde{g}(\Phi(X, Y), N_{\alpha}) - h_{\alpha}(X, \varphi Y) + \sum_{\beta} (u_{\beta}(Y) l_{\alpha\beta}(X) + h_{\beta}(X, Y) a_{\beta\alpha})$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X(\Phi N_\alpha) &= \tilde{\nabla}_X(\xi_\alpha + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} N_\beta) \\
&= \tilde{\nabla}_X \xi_\alpha + \sum_{\beta} X(a_{\alpha\beta}) N_\beta + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_X N_\beta \\
&= \nabla_X \xi_\alpha + \sum_{\beta} h_\beta(X, \xi_\alpha) N_\beta + \sum_{\beta} X(a_{\alpha\beta}) N_\beta \\
&\quad + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \left[-A_\beta X + \underbrace{\nabla_X^\perp N_\beta}_{=\sum_{\gamma} l_{\beta\gamma}(X) N_\gamma} \right] \\
&= \nabla_X \xi_\alpha - \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} A_\beta X \\
&\quad + \sum_{\beta} \left[X(a_{\alpha\beta}) + h_\beta(X, \xi_\alpha) + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\beta}(X) \right] N_\beta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{\nabla}_X N_\alpha) &= \Phi(-A_\alpha X + \nabla_X^\perp N_\alpha) \\
&= -\Phi(A_\alpha X) + \Phi(\nabla_X^\perp N_\alpha) \\
&= -\varphi A_\alpha X - \sum_{\beta} u_\beta(A_\alpha X) N_\beta + \Phi(\sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) N_\beta) \\
&= -\varphi A_\alpha X - \sum_{\beta} u_\beta(A_\alpha X) N_\beta + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \left[\xi_\beta + \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} N_\gamma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\varphi A_\alpha X - \sum_{\beta} u_\beta(A_\alpha X) N_\beta + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \xi_\beta + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} N_\gamma \\
&= -\varphi A_\alpha X + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \xi_\beta - \sum_{\beta} \left[u_\beta(A_\alpha X) - \sum_{\gamma} a_{\gamma\beta} l_{\alpha\gamma}(X) \right] N_\beta
\end{aligned}$$

dır. Böylece;

$$\begin{aligned}
\Phi(X, N_\alpha) &= \nabla_X \xi_\alpha - \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} A_\beta X \\
&\quad + \sum_{\beta} \left[X(a_{\alpha\beta}) + h_\beta(X, \xi_\alpha) + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\beta}(X) \right] N_\beta + \\
&\quad + \varphi A_\alpha X - \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \xi_\beta + \sum_{\beta} \left[u_\beta(A_\alpha X) - \sum_{\gamma} a_{\gamma\beta} l_{\alpha\gamma}(X) \right] N_\beta \\
&= \nabla_X \xi_\alpha + \varphi A_\alpha X - \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \xi_\beta - \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} A_\beta X \\
&\quad + \underbrace{\sum_{\beta} \left[X(a_{\alpha\beta}) + h_\beta(X, \xi_\alpha) + u_\beta(A_\alpha X) - \sum_{\gamma} a_{\gamma\beta} l_{\alpha\gamma}(X) - a_{\alpha\gamma} l_{\gamma\beta}(X) \right] N_\beta}_{=\Phi(X, N_\alpha)^\perp} \\
\nabla_X \xi_\alpha &= \underbrace{\Phi(X, N_\alpha) - \Phi(X, N_\alpha)^\perp}_{=\Phi(X, N_\alpha)^\top} - \varphi A_\alpha X + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \xi_\beta + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} A_\beta X
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da (5.28) (iii) eşitliği

$$\nabla_X \xi_\alpha = \Phi(X, N_\alpha)^\top - \varphi(A_\alpha X) + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} A_\beta X + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X) \xi_\beta$$

ve yukarıdaki $\Phi(X, N_\alpha)$ nın her iki tarafını N_β ile iç çarpıma sokarsak da (5.28) (iv) eşitliğini

$$X(a_{\alpha\beta}) = \widetilde{g}(\Phi(X, N_\alpha), N_\beta) - u_\alpha(A_\beta X) - u_\beta(A_\alpha X) + \sum_{\gamma} [l_{\alpha\gamma}(X) a_{\gamma\beta} + l_{\beta\gamma}(X) a_{\alpha\gamma}]$$

elde etmiş oluruz.

Teorem 5.1.2: Bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunda M , r -eşboyutlu, n -boyutlu

bir alt manifold olsun. $\Phi, \tilde{g}$ nın Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise yani; $\tilde{\nabla}\Phi = 0$, bu takdirde M üstüne indirgenmiş yapı $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r), \forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) (\nabla_X \varphi)Y = \sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y)\xi_{\alpha} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)A_{\alpha}X, \\ (ii) (\nabla_X u_{\alpha})(Y) = -h_{\alpha}(X, \varphi Y) + \sum_{\beta} (u_{\beta}(Y)l_{\alpha\beta}(X) + h_{\beta}(X, Y)a_{\beta\alpha}), \\ (iii) \nabla_X \xi_{\alpha} = -\varphi(A_{\alpha}X) + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}A_{\beta}X + \sum_{\beta} l_{\alpha\beta}(X)\xi_{\beta}, \\ (iv) X(a_{\alpha\beta}) = -u_{\alpha}(A_{\beta}X) - u_{\beta}(A_{\alpha}X) + \sum_{\gamma} [l_{\alpha\gamma}(X)a_{\gamma\beta} + l_{\beta\gamma}(X)a_{\alpha\gamma}]. \end{array} \right. \quad (5.29)$$

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 5.1.1 in ispatından kolayca yapılabilir.

Rahatlıkla görüleceği üzere $\tilde{\nabla}\Phi = 0$ olacak şekilde bir $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir M alt manifoldu total geodezik ise ($h = 0$), $\nabla\varphi = 0$ olacağı aşıkardır. Karşıt olarak aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz:

Teorem 5.1.3: M , bir $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu, $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapı ve $\Phi, \tilde{g}$ nın Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise yani; $\tilde{\nabla}\Phi = 0$, olsun. Eğer ξ_{α} ($\alpha = 1, \dots, r$) lineer bağımsız ve $\nabla\varphi = 0$ ise, M total geodeziktir.

İspat: (5.29) (i) den $\nabla\varphi = 0$ olduğundan $\sum_{\alpha} h_{\alpha}(X, Y)\xi_{\alpha} + \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)A_{\alpha}X = 0$ olur ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\sum_{\alpha} [h_{\alpha}(X, Y)g(\xi_{\alpha}, Z) + u_{\alpha}(Y)g(A_{\alpha}X, Z)] = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)h_{\alpha}(X, Z) = -\sum_{\alpha} u_{\alpha}(Z)h_{\alpha}(X, Y)$$

sonucuna ulaşılır ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)h_{\alpha}(X, Z) &= -\sum_{\alpha} u_{\alpha}(Z)h_{\alpha}(X, Y) = -\sum_{\alpha} u_{\alpha}(Z)h_{\alpha}(Y, X) \\
&= \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X)h_{\alpha}(Y, Z) = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(X)h_{\alpha}(Z, Y) \\
&= -\sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)h_{\alpha}(Z, X) = -\sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)h_{\alpha}(X, Z) \\
&\Rightarrow \sum_{\alpha} u_{\alpha}(Y)h_{\alpha}(X, Z) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezde ξ_{α} ($\alpha = 1, \dots, r$) lineer bağımsız verildiğinden Önerme 5.1.2 den u_{α} ($\alpha = 1, \dots, r$) da lineer bağımsızdır. Dolayısıyla ($\alpha = 1, \dots, r$) için $h_{\alpha}(X, Z) = 0$ olur ve M total geodeziktir.

5.2 $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$ Yapısının Normallik Durumu

M bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun, r -codimension lı n -boyutlu bir alt manifoldu olsun.

Tanım 5.2.1: Eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_{\varphi}(X, Y) - 2 \sum_{\alpha} du_{\alpha}(X, Y)\xi_{\alpha} = 0, \quad (5.30)$$

eşitliği var ise $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunda M alt manifoldu üstüne indirgenmiş yapıya $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$ **normal** denir.

Önerme 5.2.1: $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemannian manifold ve $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapı ise, bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için φ nin Nijenhuis tensör alanı

$$N_{\varphi}(X, Y) = (\nabla_{\varphi X}\varphi)(Y) - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)(X) - \varphi[(\nabla_X\varphi)(Y) - (\nabla_Y\varphi)(X)] \quad (5.31)$$

şeklindedir.

Teorem 5.2.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu, ∇ , M üstünde g ye göre Levi-Civita konneksiyonu ve $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapı ise, bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için φ nin Nijenhuis tensör alanı

$$\begin{aligned} N_\varphi(X, Y) = & - \sum_{\alpha} g((\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(X), Y) \xi_\alpha \\ & - \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(X) \\ & + \sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(Y) \end{aligned} \quad (5.32)$$

formundadır (Hretcanu ve Crasmareanu 2007).

İspat: Teorem 5.1.2 (i) den

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{\alpha} g(A_\alpha X, Y) \xi_\alpha + \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) A_\alpha X \quad (5.33)$$

eşitliğine sahibiz ve X ile Y yi yer değiştirirsek

$$(\nabla_Y \varphi)X = \sum_{\alpha} g(A_\alpha Y, X) \xi_\alpha + \sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) A_\alpha Y \quad (5.33')$$

eşitliğini elde ederiz. (5.33) eşitliğinde X yerine φX i koyarsak

$$(\nabla_{\varphi X} \varphi)Y = \sum_{\alpha} g(A_\alpha(\varphi X), Y) \xi_\alpha + \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) A_\alpha(\varphi X) \quad (5.34)$$

elde ederiz. (5.34) eşitliğinde X ve Y yi yer değiştirirsek

$$(\nabla_{\varphi Y} \varphi)X = \sum_{\alpha} g(A_\alpha(\varphi Y), X) \xi_\alpha + \sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) A_\alpha(\varphi Y) \quad (5.34')$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece, (5.31) denkleminde (5.33), (5.33'), (5.34), (5.34')

eşitliklerini yerleştirecek

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X, Y) &= \sum_{\alpha} [g(A_\alpha(\varphi X), Y) - g(A_\alpha(\varphi Y), X)] \xi_\alpha \\
&+ \sum_{\alpha} \left[\begin{aligned} &g(Y, \xi_\alpha) A_\alpha(\varphi X) - g(X, \xi_\alpha) A_\alpha(\varphi Y) \\ &\underbrace{-(g(A_\alpha X, Y) - g(A_\alpha Y, X))}_{=0} \varphi \xi_\alpha \end{aligned} \right] \\
&- \sum_{\alpha} [g(Y, \xi_\alpha) \varphi A_\alpha(X) - g(X, \xi_\alpha) \varphi A_\alpha(Y)]
\end{aligned} \tag{5.35}$$

sonucuna varırız. Ayrıca

$$g(A_\alpha \varphi Y, X) = g(\varphi Y, A_\alpha X) = g(Y, \varphi A_\alpha X) = g(\varphi A_\alpha X, Y) \tag{5.36}$$

olduğundan (5.35) ve (5.36) denklemlerini kullanarak (5.32) denklemini yani;

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X, Y) &= - \sum_{\alpha} g((\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(X), Y) \xi_\alpha - \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(X) \\
&+ \sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(Y)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç 5.2.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun n -boyutlu r -codimension lı bir alt manifoldu olsun. M üstünde $(1, 1)$ tipindeki φ tensör alanı A_α Weingarten operatörü ile değişmeli ise yani; $\varphi A_\alpha = A_\alpha \varphi$, $\alpha \in \{1, \dots, r\}$, φ nin Nijenhuis tensör alanı $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $N_\varphi(X, Y) = 0$ dır (Hretcanu ve Crasmareanu 2007).

Önerme 5.2.2: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapısı ve ∇ , $\widetilde{M}$ dan $\widetilde{\nabla}$ ile M üstüne indirgenmiş Levi-Civita konneksiyonu ise, u_α , 1-formları $\forall X, Y \in$

$\chi(M)$ için aşağıdaki denklemi doğrular.

$$\begin{aligned} 2du_\alpha(X, Y) &= -g((\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(X), Y) \\ &+ \sum_{\beta} [l_{\alpha\beta}(X)g(Y, \xi_\beta) - l_{\alpha\beta}(Y)g(X, \xi_\beta)] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Burada, $l_{\alpha\beta}$ lar $T^\perp(M)$ normal demetinde normal konneksiyonun bileşenleridir.

İspat: Bu teoremin ispatı Cristina-Elena Hretcanu'nun "Induced structures on submanifolds in almost product Riemannian manifolds" makalesinde Proposition 3.2. nin ispatı ile aynıdır.

Sonuç 5.2.2: Önerme 5.2.2 nin kabulleri altında M nin normal konneksiyonu sıfır ise yani; $l_{\alpha\beta} = 0$,

$$du_\alpha = 0 \Leftrightarrow \varphi A_\alpha = A_\alpha \varphi$$

dır.

Önerme 5.2.3: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapısı ve ∇ , $\widetilde{M}$ dan $\widetilde{\nabla}$ ile M üstüne indirgenmiş Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} N_\varphi(X, Y) - 2 \sum_{\alpha} du_\alpha(X, Y) \xi_\alpha &= \sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(Y) \\ &- \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(X) \\ &+ \sum_{\beta} (l_{\alpha\beta}(Y)g(X, \xi_\beta) - l_{\alpha\beta}(X)g(Y, \xi_\beta)) \xi_\alpha \end{aligned} \quad (5.38)$$

dır.

İspat: Teorem 5.2.1 ve Önerme 5.2.2 ile ispat rahatlıkla yapılır.

Sonuç 5.2.3: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapısı normal ise,

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} g(X, \xi_{\alpha})(\varphi A_{\alpha} - A_{\alpha} \varphi)(Y) - \sum_{\alpha} g(Y, \xi_{\alpha})(\varphi A_{\alpha} - A_{\alpha} \varphi)(X) \\ + \sum_{\beta} (l_{\alpha\beta}(Y)g(X, \xi_{\beta}) - l_{\alpha\beta}(X)g(Y, \xi_{\beta}))\xi_{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

dır.

Sonuç 5.2.4: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapısı normal ve M nin normal konneksiyonu sıfır ise yani; $l_{\alpha\beta} = 0$, bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\sum_{\alpha} g(X, \xi_{\alpha})(\varphi A_{\alpha} - A_{\alpha} \varphi)(Y) = \sum_{\alpha} g(Y, \xi_{\alpha})(\varphi A_{\alpha} - A_{\alpha} \varphi)(X) \quad (5.40)$$

dır.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{cases} (i) B_{\alpha} = \varphi A_{\alpha} - A_{\alpha} \varphi \\ (ii) C_{\alpha}(X, Y) = g(B_{\alpha} X, Y) \end{cases} \quad (5.41)$$

ile gösterelim.

Lemma 5.2.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapısı olsun. O halde M üstündeki $(1, 1)$ tipindeki C_{α} tensör alanı antisimetriktir (Crasmareanu ve Hretcanu 2007).

$$C_{\alpha}(X, Y) = -C_{\alpha}(Y, X), \quad \forall X, Y \in \chi(M). \quad (5.42)$$

5.3 Lokal Çarpım Altın Riemann Manifoldlarının Normal Yapılı

$(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ Alt Manifoldlar Üstünde φ ve A_α Değişimli Olmaları

Önerme 5.3.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun n -boyutlu r -codimension lı ($r \geq 2$) bir alt manifoldu olsun.

$$\{\xi_1, \dots, \xi_r\} \text{ teğet vektör alanları lineer bağımsız} \Leftrightarrow \det(I_r + A - A^2) \neq 0$$

dır.

İspat: Herhangi bir $x \in M$ noktasında

$$k_1\xi_1 + \dots + k_r\xi_r = 0 \quad (5.43)$$

olacak şekilde $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$ olsun. (5.17) eşitliğinden

$$g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} \quad (5.44)$$

olduğunu biliyoruz. (5.43) eşitliğini ξ_α ($\alpha \in \{1, \dots, r\}$) ile iç çarpımını alırsak ve (5.44) eşitliğini kullanırsak

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(1 + a_{11} - \sum_{\gamma} a_{1\gamma}a_{\gamma 1}) + k_2(a_{12} - \sum_{\gamma} a_{1\gamma}a_{\gamma 2}) + \dots + k_r(a_{1r} - \sum_{\gamma} a_{1\gamma}a_{\gamma r}) = 0 \\ k_1(a_{21} - \sum_{\gamma} a_{2\gamma}a_{\gamma 1}) + k_2(1 + a_{22} - \sum_{\gamma} a_{2\gamma}a_{\gamma 2}) + \dots + k_r(a_{2r} - \sum_{\gamma} a_{2\gamma}a_{\gamma r}) = 0 \\ \vdots \\ k_1(a_{r1} - \sum_{\gamma} a_{r\gamma}a_{\gamma 1}) + k_2(a_{r2} - \sum_{\gamma} a_{r\gamma}a_{\gamma 2}) + \dots + k_r(1 + a_{rr} - \sum_{\gamma} a_{r\gamma}a_{\gamma r}) = 0 \end{array} \right. \quad (5.45)$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu lineer denklem sisteminin $k_1 = \dots = k_r = 0$ olacak şekilde bir tek aşıkaz çözümünün olması için gerek ve yeter koşul katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır. (5.45) lineer denklem sisteminin

katsayılar matrisi de

$$I_r + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \\ & & \vdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \\ & & \vdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r} \\ & & \vdots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. O halde $\det(I_r + A - A^2)$ olmalı.

Teorem 5.3.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun n -boyutlu r -codimension lı bir alt manifoldu ve $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapısı normal olsun. Eğer M nin normal konneksiyonu sıfır yani; $l_{\alpha\beta} = 0$, ve herhangi bir $x \in M$ noktasında $\det(I_r + A - A^2) \neq 0$ ise bu takdirde $(1, 1)$ tipindeki φ tensör alanı herhangi bir $X \in \chi(M)$ ve $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ için A_α Weingarten operatörü ile değişmelidir; yani

$$\varphi A_\alpha = A_\alpha \varphi \quad (5.46)$$

dır.

İspat: Eğer $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$, M üstüne indirgenmiş yapısı normal ve normal konneksiyon sıfır ise yani; $l_{\alpha\beta} = 0$, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Sonuç 5.2.4 den

$$\sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(Y) = \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) (\varphi A_\alpha - A_\alpha \varphi)(X)$$

olduğunu biliyoruz. (5.41) (i) kullanırsak,

$$\sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) B_\alpha(Y) = \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) B_\alpha(X) \quad (5.47)$$

elde ederiz. (5.47) denkleminde $Z \in \chi(M)$ ile iç çarpımını alırsak ve (5.12) (ii) yi kullanırsak

$$\sum_{\alpha} g(X, \xi_\alpha) C_\alpha(Y, Z) = \sum_{\alpha} g(Y, \xi_\alpha) C_\alpha(X, Z) \quad (5.48)$$

elde ederiz. (5.48) eşitliğinde Y ve Z yi yer değiştirirsek,

$$\sum_{\alpha} g(X, \xi_{\alpha}) C_{\alpha}(Z, Y) = \sum_{\alpha} g(Z, \xi_{\alpha}) C_{\alpha}(X, Y) \quad (5.48')$$

sahip oluruz. (5.48) ve (5.48') denklemlerini taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{\alpha} g(Y, \xi_{\alpha}) C_{\alpha}(X, Z) + \sum_{\alpha} g(Z, \xi_{\alpha}) C_{\alpha}(X, Y) = 0 \quad (5.49)$$

olur. ($C_{\alpha}(Y, Z) + C_{\alpha}(Z, Y) = 0$, C_{α} antisimetrik olduğundan) (5.49) eşitliği

$$\sum_{\alpha} g(g(Y, \xi_{\alpha}) B_{\alpha}(X) + g(B_{\alpha}(X), Y) \xi_{\alpha}, Z) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M)$$

bu ifadeye denktir. Böylece

$$\sum_{\alpha} g(Y, \xi_{\alpha}) B_{\alpha}(X) + \sum_{\alpha} \underbrace{g(B_{\alpha}(X), Y) \xi_{\alpha}}_{=C_{\alpha}(X, Y)} = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M) \quad (5.50)$$

dır ve (5.50) eşitliği

$$\sum_{\alpha} g(Y, \xi_{\alpha}) B_{\alpha}(X) + \sum_{\alpha} C_{\alpha}(X, Y) \xi_{\alpha} = 0 \quad (5.51)$$

eşitliğine dönüştür. (5.51) eşitliğinde X ve Y yi yer değiştirirsek

$$\sum_{\alpha} g(X, \xi_{\alpha}) B_{\alpha}(Y) + \sum_{\alpha} C_{\alpha}(Y, X) \xi_{\alpha} = 0 \quad (5.51')$$

elde ederiz. (5.51) ve (5.51') taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{\alpha} g(Y, \xi_{\alpha}) B_{\alpha}(X) + \sum_{\alpha} g(X, \xi_{\alpha}) B_{\alpha}(Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M) \quad (5.52)$$

sonucuna ulaşırız. ($C_{\alpha}(Y, Z) + C_{\alpha}(Z, Y) = 0$, C_{α} antisimetrik olduğundan)

Böylece (5.47) ve (5.52) bağıntılarından

$$\sum_{\alpha} g(Y, \xi_{\alpha}) B_{\alpha}(X) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M) \quad (5.53)$$

sonucuna ulaşırız. $\det(I_r + A - A^2) \neq 0$ olduğundan $r \geq 2$ için $\xi_1, \dots, \xi_r$ tanjant vektörleri herhangi bir $x \in \chi(M)$ noktası için lineer bağımsızdır. M üstünde r tane lineer bağımsız tanjant vektör alanı olduğundan $r \leq n$ bilgisine sahibiz ve bu da şunu ifade eder öyle bir $Y \in \chi(M)$ vektör alanı vardır ki $Y \in \chi(M)$ vektör alanı $\{\xi_1, \dots, \xi_r\} - \{\xi_{\alpha}\}$ tarafından gerilen uzaya dik ve $g(Y, \xi_{\alpha}) \neq 0$. O halde (5.53) eşitliğinden $\forall X \in \chi(M)$ için $B_{\alpha}(X) = 0$ ve $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ ($r > 1$) olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla

$$\varphi A_{\alpha} - A_{\alpha} \varphi = 0$$

olup,

$$\varphi A_{\alpha} = A_{\alpha} \varphi$$

dır.

$r = 1$ için, (5.53) denkleminde $g(Y, \xi) B(X) = 0$ sahibiz. $Y = \xi$ için $g(\xi, \xi) B(X) = 0$ elde ederiz. Fakat $g(\xi, \xi) = 1 + a - a^2$ ve $1 + a - a^2 \neq 0$ olduğundan $B(X) = 0$ olur. O halde,

$$\varphi A = A \varphi$$

sonucuna ulaşırız.

Sonuç 5.2.4 ve Teorem 5.3.1 den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.3.2: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun n -boyutlu r -codimension lı, normal konneksiyonu sıfır yani; $l_{\alpha\beta} = 0$ olan bir Alt manifoldu olsun. Eğer herhangi bir $x \in M$ noktasında $\det(I_r + A - A^2) \neq 0$ ise, bu takdirde M üstüne indirgenmiş yapı $(\varphi, g, u_{\alpha}, \xi_{\alpha}, (a_{\alpha\beta})_r)$ normaldir $\Leftrightarrow (1, 1)$ tipindeki φ tensör alanı A_{α} Weingarten operatörü ile değişmelidir.

5.4 1 Eşboyutlu Alt Manifolddlar Üstünde $(\varphi, g, u_\alpha, \xi_\alpha, (a_{\alpha\beta})_r)$ İndirgenmiş Yapı

M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun 1 eşboyutlu bir alt manifoldu olsun.

$$\begin{aligned} A_N &:= A, & u_1 &:= u \\ \xi_1 &:= \xi, & a_{\alpha\beta} &= a \end{aligned}$$

ile gösterelim.

(5.2) ve (5.3) den $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\Phi X = \varphi X + u(X)N, \quad (5.54)$$

ve

$$\Phi N = \xi + aN \quad (5.55)$$

elde ederiz. Burada φ , M üstünde $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı, u , M üstünde 1-form, a , M üstünde reel bir fonksiyon ve ξ , M üstünde bir teğet vektör alanıdır. M üstüne indirgenmiş yapı da bir (φ, g, u, ξ, a) Riemannian yapıdır.

Önerme 5.1.1 den $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \varphi^2 X = \varphi X + X - u(X)\xi, \\ (ii) \quad u(\varphi X) = (1 - a)u(X), \\ (iii) \quad u(\xi) = 1 + a - a^2 = 1 - (-a + a^2), \\ (iv) \quad \varphi\xi = \xi - a\xi = (1 - a)\xi, \end{array} \right. \quad (5.56)$$

sahip oluruz. Ayrıca; $\forall X, Y \in \chi(M)$ için de

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad u(X) = g(X, \xi) \\ (ii) \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(\varphi X, Y) + g(X, Y) - u(X)u(Y) \end{array} \right. \quad (5.57)$$

elde ederiz.

Açıklama 5.4.1: ($a = 0$ veya $a = 1$ ve φ sıfır dönüşümü olduğu takdirde (φ, u, ξ) , M üstünde bir hemen hemen parakontakt yapı, (φ, u, ξ, g) de Riemannian hemen hemen parakontakt yapıdır. Yani; $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \varphi^2 X = X - u(X)\xi \Rightarrow X = u(X)\xi \\ (ii) u(\varphi X) = 0 \\ (iii) u(\xi) = 1 \\ (iv) \varphi(\xi) = 0 \end{array} \right. \quad (5.58)$$

dır.

Teorem 5.4.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir hiperyüzeyi olsun. Eğer ΦN , M ye teğet ve φ sıfır dönüşümü ise, (φ, u, ξ, g) de Riemannian hemen hemen parakontakt yapıdır.

$\widetilde{M}$ de M hiperyüzeyi üstünde Gauss ve Weingarten dönüşümleri $\forall X, Y \in \chi(M)$ için sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)N, \quad (5.59)$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_X N = -AX \quad (5.60)$$

dır.

Eğer, $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldu ise Teorem 5.1.2 den $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) (\nabla_X \varphi)Y = u(Y)AX + g(AX, Y)\xi \\ (ii) (\nabla_X u)Y = -g(AX, \varphi Y) + ag(AX, Y) \\ (iii) \nabla_X \xi = -\varphi(AX) + aAX \\ (iv) X(a) = -2u(AX) = -2g(AX, \xi) = -2g(X, A\xi) \end{array} \right. \quad (5.61)$$

elde ederiz.

Açıklama 5.4.2: (5.56) (iii) ve (5.57) (i) bağıntılarından $\xi \neq 0$ için

$$\begin{aligned} g(\xi, \xi) &= 1 - (-a + a^2) \neq 0 \\ \Rightarrow a &\in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

dir.

Açıklama 5.4.3: $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunda M bir hiperyüzey olsun. $a^2 - a = 1$ için (5.56) (iii) ve (5.57) (i) bağıntılarından $u(\xi) = g(\xi, \xi) = 0$ olur. Dolayısıyla, $\xi = 0$ dır. O halde (5.55) bağıntısından $\Phi N = aN$ ve $\varphi^2 X = \varphi X + X$ elde ederiz. Böylece, M üstüne indirgenmiş φ yapısı bir altın yapı ve Φ nin bir eigen değeri de a olur.

Açıklama 5.4.4: $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunda M bir hiperyüzey olsun. (5.56) (iv) den ξ , φ nin $(1 - a)$ eigen değerine karşılık gelen eigen vektörü olur.

$$\xi^\perp = \{X \in \chi(M) \mid X \perp \xi\}$$

ile gösterelim.

Açıklama 5.4.5: $u(\varphi X) = g(\varphi X, \xi)$ ve (5.56) (ii) den

$$u(\varphi X) = (1 - a)u(X) = (1 - a)g(X, \xi)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \xi) &= (1 - a)g(X, \xi) \\ g(\varphi X + (a - 1)X, \xi) &= 0 \\ \Rightarrow (\varphi X + (a - 1)X) &\perp \xi, \quad \forall X \in \chi(M) \end{aligned}$$

dır. O halde;

$$\varphi X = V + (1 - a)X$$

olacak şekilde $V \in \xi^\perp$ vardır.

Önerme 5.4.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı olsun. Bu takdirde aşağıdaki denklemler denktir

$$\nabla_X u = 0 \Leftrightarrow \nabla_X \xi = 0.$$

İspat: $\nabla_X u = 0$ ise (5.61) (ii) den $g(AX, \varphi Y) = ag(AX, Y)$ elde ederiz. $g(AX, \varphi Y) = g(\varphi(AX), Y)$ dir. O halde, $g(\varphi(AX), Y) = ag(AX, Y)$ olur ki $g(\varphi(AX) - aAX, Y) = 0$ sahip oluruz. Böylece $\varphi(AX) - aAX = 0$ olur (5.61) (iii) den de $\nabla_X \xi = 0$ sonucuna ulaşırız.

Karşıt olarak, $\nabla_X \xi = 0$ olsun. O halde $g(\nabla_X \xi, Y) = 0$ olur. (5.61) (iii) den $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi(AX) - aAX, Y) = 0 \Leftrightarrow g(AX, \varphi Y) - ag(AX, Y) = 0$$

dır. Böylece, (5.61) (ii) den $\nabla_X u = 0$ elde etmiş oluruz.

Teorem 5.3.2 den aşağıdaki önermeye sahibiz:

Önerme 5.4.2: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı olsun. $a \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\varphi \text{ normal} \Leftrightarrow \varphi A = A\varphi.$$

Sonuç 5.2.2 den aşağıda ki Önermeyi elde edebiliriz.

Önerme 5.4.3: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı olsun.

$$du = 0 \Leftrightarrow \varphi A = A\varphi.$$

Önerme 5.4.4: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı olsun. M üstünde g ye göre ξ vektör alanı bir killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow$

$$2aA = \varphi A + A\varphi. \quad (5.62)$$

İspat: M üstünde ξ , bir killing vektör alanı $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(Y, Z) &= 0, \quad \forall Y, Z \in \chi(M) \\ \Leftrightarrow \quad \xi g(Y, Z) - g([\xi, Y], Z) - g(Y, [\xi, Z]) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \xi g(Y, Z) - g(\nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi, Z) - g(Y, \nabla_\xi Z - \nabla_Z \xi) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{\xi g(Y, Z) - g(\nabla_\xi Y, Z) - g(Y, \nabla_\xi Z)}_{=0} + g(\nabla_Y \xi, Z) \\ + g(Y, \nabla_Z \xi) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad g(\nabla_Y \xi, Z) + g(Y, \nabla_Z \xi) &= 0, \quad \forall Y, Z \in \chi(M) \end{aligned}$$

dır. (5.61) (iii) kullanırsak

$$\begin{aligned} g(-\varphi AY + aAY, Z) + g(-\varphi AZ + aAZ, Y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad g(2aAY - \varphi AY - A(\varphi Y), Z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2aAY - \varphi AY - A(\varphi Y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2aA = \varphi A + A\varphi \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.4.3 ve Önerme 5.4.5 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.4.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde **normal** indirgenmiş yapı olsun. Öyleyse M üstünde g ye göre ξ Killing vektör alanı $\Leftrightarrow$

$$aA = \varphi A = A\varphi$$

dır.

Önerme 5.4.5: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir hiperyüzey, (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde **normal** indirgenmiş yapı ve ξ , Killing vektör alanı olsun. $a^2 - a \neq 1$ ise $\text{rank} A = 1$ ve ξ , A Weingarten operatörünün $\frac{\xi(a)}{2(a^2-a-1)}$ eigen değerine karşılık gelen eigen vektörüdür.

İspat: Sonuç 5.4.1 den $\varphi A = aA$ dır. Böylece, $\varphi^2 A = a\varphi A = a^2 A$ ve

$$\varphi^2(AX) = a^2 AX, \quad \forall X \in \chi(M)$$

olup, ayrıca (5.56) (i) den

$$\varphi^2 X = \varphi X + X - u(X)\xi$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\varphi(AX) + AX - u(AX)\xi = a^2 AX$$

dır. Buradan da

$$\begin{aligned} -u(AX)\xi &= (a^2 - 1)AX - \varphi(AX), \quad \varphi A = aA \\ \Rightarrow -u(AX)\xi &= (a^2 - a - 1)AX \end{aligned} \quad (5.63)$$

olur. (5.63) denkleminde (5.61) (iv) kullanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{X(a)}{2}\xi &= (a^2 - a - 1)AX, \quad a^2 - a \neq 1 \\ \Rightarrow AX &= \frac{X(a)}{2(a^2 - a - 1)}\xi, \end{aligned} \quad (5.64)$$

elde ederiz. Burada şunu söyleyebiliriz ki, $\text{rank} A = 1$ dir. Ayrıca, (5.64) denkle-

minde $X = \xi$ alırsak

$$A(\xi) = \frac{\xi(a)}{2(a^2 - a - 1)}\xi, \quad \forall X \in \chi(M)$$

elde ederiz. O halde, ξ , A Weingarten operatörünün bir eigen vektörü ve $\frac{\xi(a)}{2(a^2 - a - 1)}$ da bir eigen değeri olur.

Açıklama 5.4.7: Önerme 5.4.5 in kabulleri altında

$$e_1 = \frac{\xi}{\sqrt{1 + a - a^2}}, \quad (5.65)$$

ise

$$\begin{aligned} A(e_1) &= A\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + a - a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + a - a^2}}A(\xi) = \frac{\xi(a)}{2(a^2 - a - 1)}\frac{\xi}{\sqrt{1 + a - a^2}} \\ &= \frac{\xi(a)}{2(a^2 - a - 1)}e_1 \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden, e_1 , A nın bir eigen vektörü ve $\frac{\xi(a)}{2(a^2 - a - 1)}$ bir eigen değeridir.

Herhangi bir $x \in M$ için $T_x M$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. (5.64) den $\text{Ker} A = n - 1$ ve $i \in \{2, \dots, n\}$ için $A(e_i) = 0$ dir. Böylece Weingarten operatörünün ilk eigen değeri

$$k_1 = \frac{\xi(a)}{2(a^2 - a - 1)}, \quad (5.66)$$

ve diğerleri

$$k_2 = \dots = k_n = 0 \quad (5.67)$$

dır. Ayrıca, $\widetilde{M}$ da M hiperyüzeyinin ortalama vektör alanı H

$$H = \frac{1}{n} \text{trace} A \cdot N = \frac{1}{n} k_1 N$$

ve

$$H = \frac{1}{n} \frac{\xi(a)}{2(a^2 - a - 1)} N \quad (5.68)$$

dır.

Önerme 5.4.6: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde **normal** indirgenmiş yapı olsun. $a^2 - a \neq 1$ ve $\xi(a) = 0$ ise M , $\widetilde{M}$ da total geodeziktir.

İspat: (5.66) den $(\xi(a) = 0)$ ve (5.67) den

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0,$$

olur böylece Weingarten operatörü $A = 0$ ve M , $\widetilde{M}$ da total geodezik olur.

Önerme 5.4.7: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir total umbilik hiperyüzey ($A = \lambda I$) ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) (\nabla_X \varphi)(Y) = \lambda g(Y, \xi)X + \lambda g(X, Y)\xi, \\ (ii) (\nabla_X u)(Y) = -\lambda g(X, \varphi Y) + a\lambda g(X, Y), \\ (iii) \nabla_X(\xi) = -\lambda \varphi X + a\lambda X, \quad \nabla_\xi(\xi) = 2a\lambda \xi, \\ (iv) X(a) = -2\lambda g(X, \xi) \end{array} \right. \quad (5.69)$$

dır.

Önerme 5.4.8: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir total umbilik hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı ise u , 1-formu kapalıdır.

İspat: $du(X, Y) = (\nabla_X u)(Y) - (\nabla_Y u)(X)$ dir. (5.69) (ii) eşitliğini kullanırsak,

$$du(X, Y) = (\nabla_X u)(Y) - (\nabla_Y u)(X) = \lambda(g(\varphi X, Y) - g(X, \varphi Y)) = 0$$

olur. Bu ise u , 1-formunun kapalı olması demektir.

Sonuç 5.4.2: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir total umbilik hiperyüzey ve (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı olsun. Bu takdirde $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{cases} (ii) (\nabla_{\xi}\varphi)(X) = 2\lambda g(X, \xi)\xi, \\ (iii) (\nabla_X u)(\xi) = \lambda(2a - 1)g(X, \xi), \end{cases} \quad (5.70)$$

elde ederiz.

Sonuç 5.4.3: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunda bir total umbilik hiperyüzey, (φ, g, ξ, u, a) , M üstünde indirgenmiş yapı ve $X \in \xi^{\perp}$ olsun. O halde aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\begin{cases} (i) (\nabla_{\xi}\varphi)(X) = 0 \\ (ii) (\nabla_X u)(\xi) = 0 \\ (iii) X(a) = 0 \Rightarrow a, \text{ sbt} \end{cases} \quad (5.71)$$

6. ALTIN MANİFOLDLARIN SLANT ALT MANİFOLDLARI

Bir altın Riemann manifoldunun $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ bir alt manifoldu M olsun. $\widetilde{M}$ üstünde Riemann metriği $\widetilde{g}$ ve Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olmak üzere Gauss ve Weingarten formülleri; $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall N \in \chi(M)^\perp$ için,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (6.1)$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N \quad (6.2)$$

dir. Burada ∇ , M üstüne indirgenmiş konneksiyon, $\nabla^\perp$, M nin $TM^\perp$ normal demet üstündeki konneksiyon, h ve A_N sırasıyla M nin ikinci temel formu ve şekil operatörüdür. İkinci temel tensör h ve şekil operatörü A_N arasında

$$g(A_N X, Y) = \widetilde{g}(h(X, Y), N) \quad (6.3)$$

bağıntısı vardır. Herhangi bir $X \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X) = \varphi(X) + w(X) \quad (6.4)$$

yazabiliriz. Burada $\varphi(X)$ ($\varphi : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$) $\Phi(X)$ in teğet bileşeni, $w(X)$ ($w : \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp$) $\Phi(X)$ in normal bileşenidir. Ayrıca; (6.4) ve $\widetilde{g}(\Phi X, Y) = \widetilde{g}(X, \Phi Y)$ eşitliklerinden $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

denklemini elde edilir.

Benzer şekilde, herhangi bir $N \in \chi(M)^\perp$ içinde

$$\Phi(N) = t(N) + n(N) \quad (6.5)$$

dir. Burada da $t(N)$ ($t : \chi(M)^\perp \rightarrow \chi(M)$) $\Phi(N)$ nin teğet bileşeni, $n(N)$

$(n : \chi(M)^\perp \rightarrow \chi(M)^\perp)$ $\Phi(N)$ nin normal bileşenidir.

Herhangi bir $X \in \chi(M)$ için (6.4) denkleminde yararlanırsak,

$$\varphi(X) + X = \varphi^2(X) + tw(X), \quad (6.6)$$

$$w(X) = w\varphi(X) + nw(X) \quad (6.7)$$

ve $N \in \chi(M)^\perp$ için ise, (6.5) denkleminde yararlanırsak,

$$t(N) = \varphi t(N) + tn(N) \quad (6.8)$$

$$n(N) + N = wt(N) + n^2(N) \quad (6.9)$$

denklemleri sağlanır.

Bir altın Riemann manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ ve $\widetilde{M}$ üstünde Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olmak üzere Φ nin kovaryant türevi, $\forall X, Y \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$(\widetilde{\nabla}_X \Phi)Y = (\widetilde{\nabla}_X \Phi Y) - \Phi(\widetilde{\nabla}_X Y) \quad (6.10)$$

olarak tanımlanmaktadır (Hretcanu ve Crasmareanu 2009).

Eğer $(\widetilde{\nabla}_X \Phi)Y = 0$ ise $\Phi(\widetilde{\nabla}_X Y) = \widetilde{\nabla}_X(\Phi Y)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \Phi(\nabla_X Y + h(X, Y)) &= \widetilde{\nabla}_X(\varphi Y + wY) \\ \Phi(\nabla_X Y) + \Phi(h(X, Y)) &= \widetilde{\nabla}_X(\varphi Y) + \widetilde{\nabla}_X(wY) \\ \varphi(\nabla_X Y) + w(\nabla_X Y) + t(h(X, Y)) + n(h(X, Y)) &= \nabla_X \varphi Y \\ &+ h(X, \varphi Y) \\ &- A_{wY} X \\ &+ \nabla_X^\perp wY \end{aligned} \quad (6.11)$$

dır. (6.11) ifadesinin teğet ve normal kısımlarını sırasıyla ayırırsak,

$$(\nabla_X \varphi)Y = A_{wY}X + t(h(X, Y)) \quad (6.12)$$

$$(\nabla_X w)Y = n(h(X, Y)) - h(X, \varphi Y) \quad (6.13)$$

olur. Burada φ ve w nın kovaryant türevleri sırası ile,

$$(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X(\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y) \quad (6.14)$$

$$(\nabla_X w)Y = \nabla_X^\perp(wY) - w(\nabla_X Y) \quad (6.15)$$

dır.

6.1 Altın Riemann Manifoldların Slant Alt Manifoldları

Tanım 6.1.1: Bir altın Riemann manifoldunun $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ bir alt manifoldu M olsun. $x \in M$ noktasında M ye teğet sıfırdan farklı herbir X vektör alanı için, ΦX ile $T_x M$ arasındaki açığa θ , $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, X in **wirtinger açısı**, M nin **slant açısı** denir. Eğer bu θ açısı sabit ise M ye **slant** denilir. Burada θ açısı $x \in M$ den ve $X \in \chi(M)$ den bağımsızdır.

Özel olarak, $\theta = 0$ ise M slant alt manifoldu, **invariant alt manifold**, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise **anti-invariant Alt manifold** olarak adlandırılır. Ne invariant, ne de anti-invariant Alt manifold olmayan bir slant alt manifoldda **aşık olmayan slant alt manifold** adı verilir (Chen 1990).

$m = n_1 + n_2$ boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ olsun. $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ üstünde Φ altın yapısı

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left(\phi \frac{\partial}{\partial x_i}, (1 - \phi) \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad i \in \{1, \dots, n_1\}, \quad j \in \{n_1 + 1, \dots, m\}$$

olsun.

Örnek 6.1.1: $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de

$$X(u, v) = (u + v, u - v, u, v)$$

denklemleri ile verilen M manifoldunu düşünelim. M manifoldu $\arccos(\frac{1+\phi}{\sqrt{3(\sqrt{\phi+4})}})$ açılı slant Alt manifolddur.

İspat: $X(u, v) = (u + v, u - v, u, v)$

$$X_u = (1, 1, 1, 0) \quad \text{ve} \quad X_v = (1, -1, 0, 1)$$

ve

$$\Phi(X_u) = (\phi, \phi, 1 - \phi, 0)$$

$$\Phi(X_v) = (\phi, -\phi, 0, 1 - \phi)$$

dir.

$$\Phi(X_u) = aX_u + bX_v + w(X_u), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\langle \Phi(X_u), X_u \rangle = a \langle X_u, X_u \rangle$$

$$1 + \phi = 3a \Rightarrow a = \frac{1 + \phi}{3}$$

ve

$$\langle \Phi(X_u), X_v \rangle = b \langle X_v, X_v \rangle = 0 \Rightarrow b = 0$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \Phi(X_u) &= \varphi X_u + w X_u \\ &= \underbrace{\frac{1 + \phi}{3} X_u}_{=\varphi(X_u)} + w X_u \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle \Phi(X_u), \varphi(X_u) \rangle}{\|\Phi(X_u)\| \|\varphi(X_u)\|} = \frac{\frac{1+\phi}{3} \langle \Phi(X_u), X_u \rangle}{\frac{1+\phi}{3} \|X_u\| \|\Phi(X_u)\|} \\ &= \frac{1+\phi}{\sqrt{3}(\sqrt{\phi+4})}\end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}\Phi(X_v) &= cX_u + dX_v + w(X_v), \quad c, d \in \mathbb{R} \\ \langle \Phi(X_v), X_u \rangle &= c \langle X_u, X_u \rangle = 0 \Rightarrow c = 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\langle \Phi(X_v), X_v \rangle &= d \langle X_v, X_v \rangle \\ 1+\phi &= 3d \Rightarrow d = \frac{1+\phi}{3}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\Phi(X_v) &= \varphi X_v + wX_v \\ &= \underbrace{\frac{1+\phi}{3} X_v}_{=\varphi(X_v)} + wX_v\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle \Phi(X_v), \varphi(X_v) \rangle}{\|\Phi(X_v)\| \|\varphi(X_v)\|} = \frac{\frac{1+\phi}{3} \langle \Phi(X_v), X_v \rangle}{\frac{1+\phi}{3} \|X_v\| \|\Phi(X_v)\|} \\ &= \frac{1+\phi}{\sqrt{3}(\sqrt{\phi+4})}\end{aligned}$$

olur. O halde M manifoldu $\arccos(\frac{1+\phi}{\sqrt{3}(\sqrt{\phi+4})})$ açılı bir slant alt manifolddur.

Teorem 6.1.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu

olsun. O halde M slant Alt manifolddur $\Leftrightarrow$

$$\varphi^2 = \lambda(\varphi + I) \quad (6.16)$$

olacak şekilde bir sabit $\lambda \in [0, 1]$ sayısı vardır. Ayrıca bu durumda M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2 \theta$ dır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M slant bir alt manifold olsun. O halde herhangi bir $X \in \chi(M)$ için ve $\cos \theta = \frac{\|\varphi X\|}{\|\Phi X\|}$ ve $\tilde{g}(\Phi X, \Phi X) = \tilde{g}(\Phi X, X) + \tilde{g}(X, X)$ kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\varphi^2 X, X) &= \tilde{g}(\varphi X, \varphi X) = \cos^2 \theta(X) \tilde{g}(\Phi X, \Phi X) = \cos^2 \theta \tilde{g}(\Phi X + X, X) \\ &= \cos^2 \theta [\tilde{g}(\Phi X, X) + \tilde{g}(X, X)] = \cos^2 \theta [\tilde{g}(\varphi X, X) + \tilde{g}(X, X)] \\ &= \cos^2 \theta \tilde{g}(\varphi X + X, X) \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\tilde{g}(\varphi^2 X, X) = \cos^2 \theta \tilde{g}(\varphi X + X, X)$$

dır. $\lambda = \cos^2 \theta$ dersek, $\lambda \in [0, 1]$ ve $\varphi^2 = \lambda(\varphi + I)$ olur. M slant alt manifold olduğundan $\cos \theta$ sbt olup, λ da da sabittir.

$(\Leftarrow)$ Karşıt olarak $\varphi^2 = \lambda(\varphi + I)$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ sabiti olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \cos \theta(X) &= \frac{\tilde{g}(\Phi X, \varphi X)}{\|\Phi X\| \|\varphi X\|} = \frac{\tilde{g}(X, \Phi \varphi X)}{\|\Phi X\| \|\varphi X\|} = \frac{\tilde{g}(X, \varphi^2 X)}{\|\Phi X\| \|\varphi X\|} = \lambda \frac{\tilde{g}(X, (\varphi X + X))}{\|\Phi X\| \|\varphi X\|} \\ &= \lambda \frac{\tilde{g}(X, (\Phi X + X))}{\|\Phi X\| \|\varphi X\|} = \lambda \frac{\tilde{g}(\Phi X, \Phi X)}{\|\Phi X\| \|\varphi X\|} = \lambda \frac{\|\Phi X\|^2}{\|\Phi X\| \|\varphi X\|} = \lambda \frac{\|\Phi X\|}{\|\varphi X\|}, \end{aligned}$$

olup $\cos \theta = \frac{\|\varphi X\|}{\|\Phi X\|}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \lambda \frac{1}{\cos \theta}, \\ \lambda &= \cos^2 \theta \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, λ sabit olduğundan θ sbt olup M slant bir alt manifolddur.

Sonuç 6.1.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun slant bir alt manifoldu olsun. O halde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\widetilde{g}(\varphi X, \varphi Y) = \cos^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi Y) + \widetilde{g}(X, Y)], \quad (6.17)$$

$$\widetilde{g}(wX, wY) = \sin^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi Y) + \widetilde{g}(X, Y)] \quad (6.18)$$

dir.

İspat: $\widetilde{g}(\varphi X, Y) = \widetilde{g}(X, \varphi Y)$ olduğunu biliyoruz. Burada $Y = \varphi Y$ alırsak

$$\widetilde{g}(\varphi X, \varphi Y) = \widetilde{g}(X, \varphi^2 Y)$$

olur. M , slant bir alt manifold olduğundan Teorem 6.1.1 den $\varphi^2 = \cos^2 \theta (\varphi + I)$ dir.

O halde,

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\varphi X, \varphi Y) &= \widetilde{g}(X, \varphi^2 Y) \\ &= \widetilde{g}(X, \cos^2 \theta (\varphi Y + Y)) \\ &= \cos^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi Y) + \widetilde{g}(X, Y)] \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(wX, wY) &= \widetilde{g}(\Phi X - \varphi X, \Phi Y - \varphi Y) \\ &= \widetilde{g}(\Phi X, \Phi Y) - \widetilde{g}(\Phi X, \varphi Y) - \widetilde{g}(\varphi X, \Phi Y) + \widetilde{g}(\varphi X, \varphi Y) \\ &= \widetilde{g}(X, \Phi^2 Y) - \widetilde{g}(\varphi X, \varphi Y) - \widetilde{g}(\varphi X, \varphi Y) + \widetilde{g}(\varphi X, \varphi Y) \\ &= \underbrace{\widetilde{g}(X, \Phi Y)}_{=\widetilde{g}(X, \varphi Y)} + \widetilde{g}(X, Y) - \cos^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi Y) + \widetilde{g}(X, Y)] \\ &= (1 - \cos^2 \theta) [\widetilde{g}(X, \varphi Y) + \widetilde{g}(X, Y)] \\ &= \sin^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi Y) + \widetilde{g}(X, Y)] \end{aligned}$$

Sonuç 6.1.2: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun.

O halde M slanttır $\Leftrightarrow$

$$tw = \lambda(\varphi + I), \quad (6.19)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ bir sabiti vardır. Eğer θ , $\widetilde{M}$ de M nin slant açısı ise $\lambda = \sin^2 \theta$ dır.

İspat: M slant olsun o halde (6.6) dan

$$\varphi X + X = \varphi^2 X + twX$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} twX &= -\varphi^2 X + \varphi X + X, \quad (\text{Teorem 6.1.1 den}) \\ &= -\cos^2 \theta (\varphi X + X) + \varphi X + X \\ &= (1 - \cos^2 \theta)(\varphi X + X) \\ &= \sin^2 \theta (\varphi X + X) \end{aligned}$$

olup, bu ifade $\forall X \in \chi(M)$ için doğru olduğundan ve $\sin^2 \theta = \lambda$ dersek

$$tw = \lambda(\varphi + I),$$

olur. Burada θ , M nin slant açısı olduğundan sabit olduğundan λ sabittir.

Karşıt olarak $tw = \lambda(\varphi + I)$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ bir sabiti olsun. O halde (6.6) denkleminde yararlanırsak,

$$\begin{aligned} \varphi X + X &= \varphi^2 X + twX \\ \varphi X + X &= \varphi^2 X + \lambda(\varphi X + X) \\ \varphi^2 X &= (1 - \lambda)(\varphi X + X) \end{aligned}$$

olur. $(1 - \lambda) \in [0, 1]$ sabit olduğundan, bu ise M nin slant olduğunu gösteriyor.

Teorem 6.1.2: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun slant bir alt manifoldu ve $(\nabla_X \varphi)Y \neq 0$ olsun. O halde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\nabla Q = 0 \Leftrightarrow M$, bir anti-invarayant alt manifolddur. Burada $Q = \varphi^2$ dir.

İspat: θ , M nin slant açısını göstermek üzere Terorem 6.1.1 den yararlanırsak,

$$Q(\nabla_X Y) = \cos^2 \theta (\varphi(\nabla_X Y) + \nabla_X Y) \quad (6.20)$$

ve

$$QY = \cos^2 \theta (\varphi Y + Y) \quad (6.21)$$

olur. (6.21) denklemini X e göre kovaryant türevini alırsak,

$$\nabla_X QY = \cos^2 \theta (\nabla_X \varphi Y + \nabla_X Y) \quad (6.22)$$

elde ederiz. (6.20) denkleminde (6.22) denklemini çıkarırsak,

$$\begin{aligned} (\nabla_X Q)Y &= \cos^2 \theta (\varphi(\nabla_X Y) - \nabla_X \varphi Y) \\ &= \cos^2 \theta ((\nabla_X \varphi)Y) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Hipotezden $(\nabla_X \varphi)Y \neq 0$ olduğundan $\nabla Q = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 6.1.1: M , bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun slant bir alt manifoldu ve slant açısı θ olsun. O halde α , φ nin eigen değeri olmak üzere $\varphi^2 = Q$ nun eigen değerleri $\cos^2 \theta (\alpha + 1)$ dir.

İspat: φ nin eigen değerleri α olsun. M de slant alt manifold olduğundan $Q =$

$\varphi^2 = \cos^2 \theta (\varphi + I)$ dir ve

$$\begin{aligned} Q(X) &= \cos^2 \theta (\alpha X + X) \\ &= (\cos^2 \theta (\alpha + 1))X \end{aligned}$$

olur. Buradan da Q nun eigen değerleri $\cos^2 \theta (\alpha + 1)$ olduğunu söyleyebiliriz.

6.2 Slant Dağılımlar ve Bi-Slant Alt Manifoldlar

$M, (\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun.

Tanım 6.2.1: M üstündeki diferensiyellenebilir bir dağılıma D **slant dağılım** denir eğer herbir $x \in M$ için ve sıfırdan farklı herbir $X \in D_x$ için ΦX ve D_x vektör uzayı arasındaki açı θ_D sabit ise. Burada ki θ_D açısı $x \in M$ ve $X \in D_x$ seçilişinden bağımsızdır (Lı ve Liu 2005).

D, M üstünde bir dağılım olsun. D nin ortogonal dağılımını $D^\perp$ ile gösterelim. P_1 ve P_2 ile de D ve $D^\perp$ üstüne izdüşüm fonksiyonları olsun. O halde $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\Phi X = \varphi X + wX = P_1\varphi X + P_2\varphi X + wX$$

dir.

İlk önce bir dağılımın slant bir dağılım olması için gerekli ve yeterli koşulları verelim.

Teorem 6.2.1: D, M üstünde bir dağılım olsun. Bu takdirde D slant bir dağılımdır $\Leftrightarrow$ Herhangi bir $X \in \chi(D)$ için

$$(P_1\varphi)^2 X = \lambda(\varphi X + X)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ bir sabiti vardır. θ_D, D nin slant açısı ise $\lambda = \cos^2 \theta_D$ dir.

İspat: Kabul edelim ki D, M üstünde slant bir dağılım olsun. $X \in \chi(D)$ olmak üzere $\|P_1\varphi X\| = \cos \theta_D \|\Phi X\|$ kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}((P_1\varphi)^2X, X) &= \tilde{g}(\Phi P_1\varphi X, X) \\
&= \tilde{g}(P_1\varphi X, \Phi X) \\
&= \|P_1\varphi X\| \|\Phi X\| \cos \theta_D \\
&= \cos \theta_D \|\Phi X\| \|\Phi X\| \cos \theta_D \\
&= \cos^2 \theta_D \tilde{g}(\Phi X, \Phi X) \\
&= \cos^2 \theta_D \left[\underbrace{\tilde{g}(\Phi X, X)}_{=\tilde{g}(\varphi X, X)} + \tilde{g}(X, X) \right] \\
&= \cos^2 \theta_D [\tilde{g}(\varphi X + X, X)]
\end{aligned}$$

Bu eşitlik $\forall X \in \chi(D)$ için sağlandığından $(P_1\varphi)^2X = \cos^2 \theta_D(\varphi X + X)$ dır. D slant bir dağılım olduğundan $\cos \theta_D$ sabit olup λ da da sabittir.

Karşıt olarak, $\forall X \in \chi(D)$ için $(P_1\varphi)^2X = \lambda(\varphi X + X)$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ bir sabiti olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\cos \theta_D &= \frac{\tilde{g}(\Phi X, P_1\varphi X)}{\|\Phi X\| \|P_1\varphi X\|} = \frac{\tilde{g}(X, \Phi P_1\varphi X)}{\|\Phi X\| \|P_1\varphi X\|} = \frac{\tilde{g}(X, (P_1\varphi)^2X)}{\|\Phi X\| \|P_1\varphi X\|} \\
&= \lambda \frac{\tilde{g}(X, \varphi X + X)}{\|\Phi X\| \|P_1\varphi X\|} = \lambda \frac{\tilde{g}(X, \Phi X + X)}{\|\Phi X\| \|P_1\varphi X\|} = \lambda \frac{\tilde{g}(\Phi X, \Phi X)}{\|\Phi X\| \|P_1\varphi X\|} = \lambda \frac{\|\Phi X\|}{\|P_1\varphi X\|}
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca $\|P_1\varphi X\| = \cos \theta_D \|\Phi X\|$ olduğundan $\cos^2 \theta_D = \lambda$ elde ederiz. λ sabit olduğundan θ_D sabit olup, D slant bir dağılımdır.

Tanım 6.2.2: M üstünde D_1 ve D_2 iki dik dağılımı aşağıdaki koşulları sağlarsa M ye $\widetilde{M}$ nin **bi-slant alt manifoldu** denir (Lı ve Lıu 2005).

i) $TM = D_1 \oplus D_2$

ii) $i = 1, 2$ için D_i, θ_i slant açılı bir slant dağılımdır.

Teorem 6.2.2: M , $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ slant açılı bir bi-slant alt manifold olsun. $X \in D_1$, $Y \in D_2$ için $\tilde{g}(\Phi X, Y) = 0$ ise M , θ açılı slant bir Alt manifolddur (L1 ve L1u 2005).

İspat: $X \in D_1$, $Y \in D_2$ için $\tilde{g}(\Phi X, Y) = 0$ olduğundan

$$\tilde{g}(\Phi X, Y) = \tilde{g}(\varphi X, Y) = 0$$

dır. Böylece $\varphi X \in D_1$ dir. Benzer şekilde $\varphi Y \in D_2$ olduğunu görürüz. Herhangi bir $Z \in \chi(M)$ için

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad Z_1 \in D_1, \quad Z_2 \in D_2$$

yazabiliriz. Öte yandan, $\cos^2 \theta_1 = \frac{\|\varphi Z_1\|^2}{\|\Phi Z_1\|^2}$, $\cos^2 \theta_2 = \frac{\|\varphi Z_2\|^2}{\|\Phi Z_2\|^2}$ dir. $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ olduğundan

$$\frac{\|\varphi Z\|^2}{\|\Phi Z\|^2} = \frac{\tilde{g}(\varphi Z, \varphi Z)}{\tilde{g}(\Phi Z, \Phi Z)} = \frac{\tilde{g}(\varphi Z_1, \varphi Z_1) + \tilde{g}(\varphi Z_2, \varphi Z_2)}{\tilde{g}(\Phi Z_1, \Phi Z_1) + \tilde{g}(\Phi Z_2, \Phi Z_2)} = \cos^2 \theta$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 6.2.1: M üstünde $TM = D_1 \oplus D_2$ olacak şekilde D_1 ve D_2 iki ortogonal dağılım olsun. O halde D_1 invaryanttır $\Leftrightarrow D_1$, $\theta_1 = 0$ açılı slant dağılımdır. Hatta, bu durumda $X \in D_2$ için $\varphi X = P_2 \varphi X$ dir (L1 ve L1u 2005).

İspat: D_1 invaryant ise bu takdirde D_1 sıfır açılı bir slanttır. Tersine, $\theta_1 = 0$ olsun. O halde $\cos \theta = 1 = \frac{\|P_1 \varphi X\|}{\|\Phi X\|}$ olur ve

$$\|P_1 \varphi X\| = \|\Phi X\| = \sqrt{\|P_1 \varphi X\|^2 + \|P_2 \varphi X\|^2 + \|wX\|^2},$$

olup, buradan $\forall X \in \chi(D_1)$ için $\|P_2 \varphi X\| = \|wX\| = 0$ olduğu anlaşılır. Sonuç olarak $\Phi X = P_1 \varphi X \in D_1$ olup D_1 invaryanttır. Öte yandan D_1 invaryant ise $X \in D_2$ ve $Y \in D_1$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\varphi X, Y) &= \tilde{g}(X, \varphi Y) = \tilde{g}(\underbrace{X}_{\in D_2}, \underbrace{\Phi Y}_{\in D_1}) = 0 \\
&\Rightarrow \tilde{g}(\varphi X, Y) = 0 \\
&\Rightarrow \tilde{g}(P_1 \varphi X + P_2 \varphi X, Y) = 0 \\
&\Rightarrow \tilde{g}(P_1 \varphi X, Y) = 0 \\
&\Rightarrow P_1 \varphi X = 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

6.3 Altın Manifoldların Semi-Slant Alt Manifoldları

Tanım 6.3.1: M üstündeki iki ortogonal D_1 ve D_2 dağılımları aşağıdaki koşulları sağlarsa M ye $\widetilde{M}$ nin **semi-slant alt manifoldu** denir (Lı ve Lıu 2005).

i) $TM = D_1 \oplus D_2$

ii) D_1 dağılımı invaryant bir dağılımdır yani $\Phi(D_1) = D_1$ dir.

iii) D_2 dağılımı $\theta \neq 0$ açılı slant bir dağılımdır.

Bu durumda θ ya M alt manifoldunun slant açısı denir. $i = 1, 2$ için D_i dağılımlarının boyutlarını d_i ile gösterirsek;

i) $d_2 = 0$ ise M invaryant alt manifolddur,

ii) $d_1 = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M anti-invaryant Alt manifolddur,

iii) $d_1 = 0$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ise M , θ slant açılı aşıkır olmayan bir slant alt manifolddur,

iv) $d_1 d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ise M aşıkır olmayan semi-slant alt manifolddur.

$M, \widetilde{M}$ nin semi-slant alt manifoldu olsun. $i = 1, 2$ için D_i dağılımları üstüne dik izdüşüm fonksiyonları P_i ile gösterelim. Herhangi bir $X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\Phi X &= \Phi P_1 X + \Phi P_2 X = \varphi P_1 X + w P_1 X + \varphi P_2 X + w P_2 X \\ &= \varphi P_1 X + \varphi P_2 X + w P_2 X, \quad w P_1 X = 0\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\Phi P_1 X = \varphi P_1 X, \quad w P_1 X = 0, \quad (6.23)$$

$$\varphi P_2 X \in D_2 \quad (6.24)$$

olup,

$$\varphi X = \Phi P_1 X + \varphi P_2 X = \varphi P_1 X + \varphi P_2 X$$

dir.

Ayrıca, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için (6.23) ve (6.24) den

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\varphi X, \varphi P_2 Y) &= \widetilde{g}(X, \varphi^2 P_2 Y) \\ &= \cos^2 \theta \widetilde{g}(X, \varphi P_2 Y + P_2 Y) \\ &= \cos^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi P_2 Y) + \widetilde{g}(X, P_2 Y)]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(wX, wP_2 Y) &= \widetilde{g}(\Phi X - \varphi X, \Phi P_2 Y - \varphi P_2 Y) \\ &= \widetilde{g}(\Phi X, \Phi P_2 Y) - \widetilde{g}(\Phi X, \varphi P_2 Y) - \widetilde{g}(\varphi X, \Phi P_2 Y) + \widetilde{g}(\varphi X, \varphi P_2 Y) \\ &= \widetilde{g}(\Phi X, P_2 Y) + \widetilde{g}(X, P_2 Y) - \widetilde{g}(\varphi X, \varphi P_2 Y) - \widetilde{g}(\varphi X, \varphi P_2 Y) \\ &\quad + \widetilde{g}(\varphi X, \varphi P_2 Y) \\ &= \widetilde{g}(\varphi X, P_2 Y) + \widetilde{g}(X, P_2 Y) - \cos^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi P_2 Y) + \widetilde{g}(X, P_2 Y)] \\ &= (1 - \cos^2 \theta) [\widetilde{g}(X, \varphi P_2 Y) + \widetilde{g}(X, P_2 Y)] \\ &= \sin^2 \theta [\widetilde{g}(X, \varphi P_2 Y) + \widetilde{g}(X, P_2 Y)]\end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki teoremle semi-slant alt manifoldları karakterize etmeye çalışalım.

Teorem 6.3.1: $M, (\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O halde M semi-slant Alt manifolddur $\Leftrightarrow \mathcal{D} = \{X \in \chi(M) \mid \varphi^2 X = \lambda(\varphi X + X)\}$ dağılımı olacak şekilde $\lambda \in [0, 1)$ bir sabiti vardır. Burada $\lambda = \cos^2 \theta$ olup θ , M nin slant açısını göstermektedir.

İspat: M semi-slant alt manifold ve $TM = D_1 \oplus D_2$, burada D_1 invaryant ve D_2 slant olsun. $\lambda = \cos^2 \theta$ dersek θ burada M nin slant açısını göstermektedir. Herhangi bir $X \in \mathcal{D}$ için eğer $X \in D_1$ ise bu takdirde

$$X = \Phi^2(X) - \Phi(X) = \varphi^2(X) - \varphi(X) = \lambda(\varphi X + X) - \varphi(X) = (\lambda - 1)\varphi(X) + \lambda X$$

olur bu ise $\lambda = 1$ demektir. $\theta \neq 0$ olduğundan $\lambda = \cos^2 \theta \neq 1$ dir. Böylece, $X \notin D_1$, $X \in D_2$ ve $\mathcal{D} \subseteq D_2$ dir. Öte yandan D_2 slant bir dağılım olduğundan $X \in D_2$ için Lemma 6.2.1. ve Teorem 6.2.1 den

$$\varphi^2 X = (P_2 \varphi)^2 X = \lambda(\varphi X + X)$$

olup, bu ise $D_2 \subseteq \mathcal{D}$ olduğunu gösterir. O halde $D_2 = \mathcal{D}$ dir.

Karşıt olarak $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$ olduğunu düşünelim. $\varphi \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ olduğu aşıkardır.

$$\left(\begin{array}{l} \varphi(\mathcal{D}) = \{\varphi(x) \mid x \in \mathcal{D}\} \\ \varphi \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \forall \varphi(x) \in \varphi(\mathcal{D}) \text{ için } \varphi(x) \in \mathcal{D} (?) \\ \varphi(x) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \varphi^2(\varphi(x)) = \lambda \varphi^2(x) + \lambda \varphi(x) (?) \\ \varphi^2(\varphi(x)) = \varphi(\varphi^2(x)), (x \in \mathcal{D}) \\ = \varphi(\lambda \varphi(x) + \lambda x), (\varphi \text{ lineer}) \\ = \lambda \varphi^2(x) + \lambda \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{D} \end{array} \right)$$

O halde herhangi bir $X \in \mathcal{D}^\perp$ ve $Y \in \mathcal{D}$ için

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\Phi X, Y) &= \tilde{g}(X, \Phi Y) = \tilde{g}(X, \varphi Y) = 0 \\ \Rightarrow \tilde{g}(\Phi X, Y) &= 0 \\ \Rightarrow \Phi X &\in \mathcal{D}^\perp\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathcal{D}^\perp$ dağılımı invaryant bir dağılımdır. Lemma 6.2.1 ve Teorem 6.2.1 den $\mathcal{D}$, θ açılı slant bir dağılımdır. O halde M semi-slant Alt manifolddur.

Teorem 6.3.2: $M, (\widetilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldunun bir semi-slant alt manifoldu olsun. O halde D_1 dağılımı integrallenebilir $\Leftrightarrow \forall X, Y \in D_1$ için

$$h(X, \varphi Y) = h(\varphi X, Y).$$

İspat: $(\widetilde{M}, \tilde{g}, \Phi)$ lokal çarpım altın Riemann manifoldu olduğundan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $(\tilde{\nabla}_X \Phi)Y = 0$ dir. Dolayısıyla $\tilde{\nabla}_X(\Phi Y) = \Phi(\tilde{\nabla}_X Y)$ dir. Herhangi bir $X, Y \in D_1$ için

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X(\Phi Y) &= \Phi(\tilde{\nabla}_X Y) \\ \tilde{\nabla}_X(\varphi Y) + \underbrace{\tilde{\nabla}_X(wY)}_{=0} &= \Phi(\nabla_X Y) + \Phi(h(X, Y)), \quad (Y \in D_1 \Rightarrow wY = 0) \\ \nabla_X \varphi Y + h(X, \varphi Y) &= \varphi \nabla_X Y + w \nabla_X Y + th(X, Y) + nh(X, Y)\end{aligned}\quad (6.25)$$

olur. (6.25) in normal kısmını ayırırsak

$$w \nabla_X Y = h(X, \varphi Y) - nh(X, Y)$$

O halde

$$w [X, Y] = h(X, \varphi Y) - h(\varphi X, Y) \quad (6.26)$$

olur. Böylece $[X, Y] \in D_1 \Leftrightarrow h(X, \varphi Y) - h(\varphi X, Y) = 0$

D_1 ve D_2 , M alt manifoldu üstünde iki dağılım olsun. $\forall X_i \in D_i$ için ($i = 1, 2$)

$h(X_1, X_2) = 0$ ise M alt manifolduna **karışık-geodezik alt manifold** denir.

Teorem 6.3.3: $M, (\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir semi-slant alt manifoldu olsun. O halde M karışık geodeziktir $\Leftrightarrow$ Herhangi bir $X_i \in D_i$ ($i = 1, 2$) ve $\forall N \in \chi(M)^\perp$ için $A_N X_i \in D_i$ dir.

İspat: Kabul edelim ki M karışık geodezik olsun. Herhangi bir $X_i \in D_i$ ($i = 1, 2$) ve $\forall N \in \chi(M)^\perp$ için

$$g(A_N X_1, X_2) = \widetilde{g}(h(X_1, X_2), N) = 0$$

buradan da $A_N X_i \in D_i$ olduğunu anlarız.

Karşıt olarak herhangi bir $X_i \in D_i$ ($i = 1, 2$) için $A_N X_i \in D_i$ olduğunu kabul edelim. $\{N_1, N_2, \dots, N_{m-k}\}$, $\chi(M)^\perp$ in lokal ortogonal bir bazı olsun. Burada $\dim(\widetilde{M}) = m$ ve $\dim(M) = k$ dır. Böylece

$$0 = g(A_{N_i} X_1, X_2) = \widetilde{g}(h(X_1, X_2), N_i), \quad i = 1, 2, \dots, m - k$$

olur. Yani, $X_1 \in D_1$ ve $X_2 \in D_2$ için $h(X_1, X_2) = 0$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 6.3.4: $M, (\widetilde{M}, \widetilde{g}, \Phi)$ altın Riemann manifoldunun bir semi-slant alt manifoldu olsun. O halde w paraleldir $\Leftrightarrow \forall X \in \chi(M)$ ve $N \in \chi(M)^\perp$ için

$$A_{nN} X = \varphi A_N X$$

dir.

İspat: $g(A_N X, Y) = \widetilde{g}(h(X, Y), N)$ ve $(\nabla_X w)Y = n(h(X, Y)) - h(X, \varphi Y)$ yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
\tilde{g}((\nabla_X w)Y, N) &= \tilde{g}(nh(X, Y) - h(X, \varphi Y), N) \\
&= \tilde{g}(h(X, Y), nN) - \tilde{g}(h(X, \varphi Y), N) \\
&= \tilde{g}(A_{nN}X, Y) - \tilde{g}(A_N X, \varphi Y) \\
&= \tilde{g}(A_{nN}X, Y) - \tilde{g}(\varphi A_N X, Y)
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $(\nabla_X w)Y = 0 \Leftrightarrow A_{nN}X = \varphi A_N X$ dir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde altın manifoldların alt manifoldları teorisi üzerinde bir çalışma yapılmıştır. Altın manifoldlar ve alt manifoldları diferensiyel geometride çok yeni bir konu olup; üzerinde çok sayıda yapılmış bir çalışma yoktur. Bu tezin hem diferensiyel geometride hem de başka alanlarda yeni bir uygulama alanı olmasından bir başlangıç olabileceğini düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

Akdeniz, F. 2007. Altın Oran ve Fibonacci Sayıları. Nobel Kitabevi, Adana.

Atçeken, M. 2010. Slant Submanifolds of a Riemannian Product Manifold. Acta Mathematica Scientia, 30, 215-224.

Anonymous, Web Sitesi: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnathtml>.

Bejancu, A. and Farran, H.R. 2006. Foliations and Geometric Structures. Mathematics and its applications, Vol 580, Springer, New York.

Bolat, C. 2008. k -Fibonacci, k -Lucas Sayılarının zelikleri ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Brickell, F. and Clark, R.S. 1970. Differentiable Manifolds. VRN company, London.

Carmo, M. P. Do. 1992. Riemannian Geometry. Birkhauser. Boston.

Chen, B.Y. 1990. Slant Immersions. Bull. Austral. Math. Soc. 41, 135-147.

Crasmareanu, M. 2003. Nonlinear Connections and Semisprays on Tangent Manifold. Novi Sad J. Math, 33 (2), 11-22.

Crasmareanu, M. and Hretcanu, CE. 2008. Golden Differential Geometry. Chaos, Solitons and Fractals, 38, 1229-1238.

Çakar, . 1992. Doğanın Güzellikleri lüsü Altın Oran. Bilim ve Teknik, 6-11.

Goldberg, S.I. and Yano, K. 1970. Polynomial Structures on Manifolds. Kodai Math.

Sem. Rep. 22, 199-218.

Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. 1972. Connection, Curvature and Cohomology, Vol 1-2. Academic Press, New York.

Hacısalıhoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi.

Hacısalıhoğlu, H. H. ve Ekmekci, N. 2003. Tensör Geometri. Ankara Üniversitesi.

Hacısalıhoğlu, H. H. 2006. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hretcanu, C. and Crasmareanu, M. 2007. Some Invariant submanifolds in Riemannian manifold with Golden Structure. Scientific Annals of Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, 53, 199-211.

Hretcanu, C. and Crasmareanu, M. 2009. Applications of the Golden Ratio on Riemannian Manifolds. Turk J. Math, Vol. 33, 179-191.

Hretcanu, C. 2006. Induced Structures on Submanifolds in almost Product Riemannian Manifold. arXiv:math/0608533v1 [math.DG] .

Lee, J. M. 1997. Riemannian Manifolds. Springer, New York.

Lee, J. M. 2003. Introduction to Smooth Manifolds. Springer, New York.

Lee, J. M. 2009. Manifolds and Differential Geometry. American Mathematical Society, United States of America.

Leon, M., Rodrigues, P.R. 1989. Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics. Netherlands.

- LI, H. and LIU, X. 2005. Semi-slant submanifolds of a locally product manifolds. Georgian Mathematical Journal, 12, 273-282.
- Lotta, A. 1996. Slant Subamnifolds in Contact Geometry. Bull. Math. Soc. 39, 183-198.
- Nakahara, M. 2003. Geometry, topology, and physics. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.
- Nicola, P.C. 2000. Mainstream Mathematical Economics in The 20th Century. Springer, New York.
- Okubo, T. 1987. Differential Geometry. Marcel Dekker, Inc, New York.
- Özdemir, F., Crasmareanu, M., Uguz, S. 2010. Geometrical Objects Associated to a Substructure. Turkish J. Math., 34.
- Özkan, M. 2006. Lineer Çatıların Asli Lif Demeti İle Birleşik Vektör Demetlerine Lineer Konneksiyonların Horizontal Lifti. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Papaghiuc, N. 1994. Semi-Slant Submanifolds of a Kaehlerian Manifold. An. Stiint. Al.I. Cuza Univ., 40, 55-61.
- Peyghan, E. and Tayebi, A. 2011. Almost Paracontact Structure on Finslerian Indicatrix. An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 19(3), 151-162.
- Şahin, B. 2006. Slant submanifolds of an almost product Riemannian manifold. J. Korean Math. Soc., 43(4), 717-732.
- Turgut, A. 1989. Tanjant Manifold Üzerinde Metrikler, Konneksiyonlar ve

Eğriler. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Yağcı, M. 2005. Altın Oran. Matematik Dünyası, 52-60.

Yano, K. and Kon, M. 1983. Structures on Manifolds. Series in pure mathematics
Volume 3, Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif Hatice ILGAZ

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 28.07.1985

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Çankaya Atatürk Anadolu Lisesi - 2004

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü - 2008

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı - 2010

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi - Ankara (Tübitak Bursiyeri - Araştırma Görevlisi) 2008 - 2009

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi - Burdur (Araştırma Görevlisi) 2009 - 2012

Türk Telekom (ASSISTT - Uzman Yardımcısı) 2012 -

Yayınlar

Hakemli Dergiler

Yardımcı, E.H., YAYLI, Y. 2014. Golden Quaternionic Structures. International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 7, No 3, 109 - 125 (Hakemli Dergi).