

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR OLMAYAN ANAKATSAYILI
İKİ BİLEŞENLİ BURGERS DENKLEM SİSTEMLERİNİN
SİMETRİ SINIFLANDIRMASI

Daryoush TALATI

FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Daryoush TALATI tarafından hazırlanan ”**Köşegenleştirilebilir Olmayan Anakatsayılı İki Bileşenli Burgers Denklem Sistemlerinin Simetri Sınıflandırması**” adlı tez çalışması 31/01/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Atalay KARASU
O.D.T.Ü. Fizik A.B.D.

Üye : Prof. Dr. A. Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Üye : Prof. Dr. Basri ÜNAL
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Üye : Prof. Dr. Ayşe KARASU
O.D.T.Ü. Fizik A.B.D.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

Köşegenleştirilebilir Olmayan Anakatsayılı İki Bileşenli
Burgers Denklem Sistemlerinin Simetri Sınıflandırması

Daryoush TALATI

Ankara Üniversitesi

Fen bilimleri Enstitüsü

Fizik Mühendisliği Anabilim dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN

Belirli bir ağırlık şemasına göre türdeş, anakatsayısı köşegenleştirilebilir olmayan iki bileşenli Burgers denklem sistemleri yüksek simetri varlığına göre sınıflandırıldı. İkinci dereceden sistemlerden üçüncü dereceden simetri, üçüncü dereceden sistemlerden ise beşinci dereceden simetri kabul edenler belirlendi. Yüksek simetriye sahip olduğu belirlenen sistemler ayrıca yüksek kanonik korunum kanunları açısından da araştırıldı. Bulunan onüç yeni yüksek simetrik sistemden altısının yüksek korunum kanunu da olduğu gözlemlendi. Sadece yüksek simetrisi olan sistemlerin master simetrikleri, yüksek korunum kanunlu sistemlerin ise yapı işlemcileri araştırıldı.

Şubat 2013, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: İki bileşenli Burgers denklem sistemi, Çift-Hamiltonsal, Master simetri

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

Symmetry Classification of Two Component
Burgers Systems with Nondiagonalizable Main Coefficient Matrix

Daryoush TALATI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Engineering Physics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Refik TURHAN

Two component Burgers systems with nondiagonalizable main matrix which are homogeneous in a certain weighting scheme are classified for existence of a higher symmetry. Second order systems are searched for existence of a third order, third order systems are searched for existence of a fifth order symmetry. Systems obtained to possess a higher symmetry are further investigated for higher conservation laws. Out of thirteen newly obtained systems possessing a higher symmetry, six are observed to possess higher canonical conservation law also. Systems with only higher symmetry are investigated for their master symmetries. Systems with higher conservation laws are investigated for their structure operators.

February 2013, 59 pages

Key Words: Two component Burgers system, bi-Hamiltonian, Master symmetry

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Refik TURHAN'a, değerli görüşlerinden faydalandığım, ilgi ve desteklerini esirgemeyen hocalarım, Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalından Sayın Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER ve Prof. Dr. Basri ÜNAL'a, Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalından Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e, Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalından Prof. Dr. Yusuf YAYLI ve Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fizik Anabilim Dalından Prof. Dr. Atalay KARASU ve Prof. Dr. Ayşe KALKANLI KARASU'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Birlikte çalıştığım Değerli dostum Fizik Yüksek Mühendisi Bilge Banu KÖK SAYAR'a hertürlü desteği ve eşsiz dostluğundan ötürü teşekkür ederim.

Ayrıca güzel arkadaşlıklarından dolayı Eren ŞAHİNER, Bahman GOLSHAEI, Sahar SHAKOURI, Nesa DOOSTİ, Ramin SEKARCHI, Ebrahim HAGHIGHI, Ehsan SAMET, Amin MİRZAPOUR, Ali MAMİZADEH, Masoud MALEKZADEH, Parisa GOLSHAEI, Shahed PARVİZİ, Amir TALATI, Yağmur GÖKTÜRK, Fulya BAĞCI, Çağıl KADEROĞLU, Nasser Nasiri, Seher BAYRAM ve Buket TAŞDİZEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca manevi desteklerini ve fedakârlıklarını benden esirgemeyen aileme bu çalışmamın bir gurur kaynağı olmasını dilerim.

Doktora eğitimi süresince Yabancı Uyruklular için Doktora burs programıyla desteğinden ötürü TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Daryoush TALATI

Ankara, Şubat 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1 GİRİŞ	1
2 KURAMSAL TEMELLER	4
2.1 Simetri	5
2.2 Simetri Adım İşlemcisi	9
2.3 Master Simetri	10
2.4 Hamiltonsal ve Çift-Hamiltonsal Denklem	12
3 MATERYAL VE YÖNTEMLER	17
3.1 Ağırlık Şeması	18
3.2 Sistem Sınıfları	20
3.3 Doğrusal Dönüşümler Altında Eşdeğerlilik	23
3.4 Anakatsayısı Köşegenleştirilebilir Olmayan Altsınıflar	26
4 İKİNCİ DERECEDEKİ SİSTEMLER	29
4.1 A-I Sınıfı	29
4.1.1 Sistem (4.1)	29
4.2 A-II Sınıfı	30
4.2.1 Sistem (4.2)	30
5 ÜÇÜNCÜ DERECEDEKİ SİSTEMLER	31
5.1 B-I Sınıfı	31
5.1.1 Sistem (5.1)	32
5.1.2 Sistem (5.2)	32
5.2 B-II Sınıfı	32
5.2.1 Sistem (5.3)	34
5.2.2 Sistem (5.4)	34
5.2.3 Sistem (5.5)	34
5.2.4 Sistem (5.6)	35

5.2.5 Sistem (5.7)	36
5.2.6 Sistem (5.8)	37
5.2.7 Sistem (5.9)	37
5.2.8 Sistem (5.10)	38
5.2.9 Sistem (5.11)	38
6 SONUÇ	39
KAYNAKLAR	41
EK 1 İKİNCİ DERECE SİSTEMLERİN SİMETRİ KOŞULLARI .	46
ÖZGEÇMİŞ	59

1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve bunların çok bileşenli sistemleri birçok alanda ortaya çıkmaktadır. Doğrusal denklemlerin analizinde kullanılan Fourier, Laplace dönüşüm yöntemleri gibi yöntemler doğrusal olmayan denklemler için kullanışlı olmadığından doğrusal olmayan denklemlerin analitik çözümlerine ulaşabilmek yakın zamanlara kadar mümkün olmamıştır.

Zabusky ve Kruskal'ın 1960'ların ortalarında nümerik yöntemlerle (Zabusky ve Kruskal 1965) daha sonra da analitik olarak Gardner ve diğerlerinin (Gardner vd. 1967) dikdörtgensel kanal içindeki sıg su yüzeyinde oluşan dalgaları modellemek üzere Korteweg ve de Vries tarafından ortaya konulmuş olan KdV denkleminin (Korteweg ve de Vries 1895) bazı çözümlerini bulmaları ve bu çözümlerin soliton olarak adlandırdıkları, birbirleriyle etkileşimleri üst üste binen dalgalar yerine, çarpışarak saçılan parçacıkların davranışına benzer çözümler olduğunu göstermeleri, doğrusal olmayan denklemlerin matematiksel özelliklerinin araştırılmaya başlanması açısından çığır açıcı olmuştur.

Sonraki yıllarda integre edilebilir denklemlerin Lax formülasyonu, oto-Bäcklund dönüşümleri, Hirota formülasyonu, Painleve özelliği, yüksek simetriler, bu simetrilerin sonsuz sayıda olduğunu gösteren simetri tekrar işlemcileri ve master simetriler, yüksek korunum yasaları ve bu yasaların sonsuz sayıda olduğunu gösteren çoklu-Hamiltonsal yapılar, formel simetri gibi yapılara sahip olabildikleri ortaya konulmuştur.

Genel olarak integre edilebilirlikle ilgili yapılardan birinin varlığı gösterilebilmiş bir denklemin diğer yapılara da sahip olduğu gözlenmiştir. Ancak spesifik bir denklem için bu yapılardan birinin bulunması, diğer yapıların da varlığı ya da kolayca bulunabileceği anlamına gelmemektedir.

Anılan yapılardan sonsuz simetriler integre edilebilir denklemlerin hepsinin temel ortak özelliğidir. Sadece simetri anlamında integre edilebilir olup korunum yasaları olmayan denklemler Calogero tarafından "C-integrable" olarak adlandırılmışlardır (Calogero 1991). Bu türden denklemler bir dönüşüm ile doğrusal bir denklemle ilintilendirilebilmektedirler. Aynı terminolojide, korunum yasaları anlamında integre edilebilir olan doğrusal olmayan denklemler ise "S-integrable" olarak adlandırılmakta ve bu türden denklemlerin, uygun başlangıç koşullarıyla, ters saçılma yöntemiyle integre edilebileceği düşünülmektedir.

İlk olarak İbragimov ve Shabat (İbragimov ve Shabat 1980) ve eşzamanlı olarak Fokas (Fokas 1980), yüksek simetrinin varlığını integre edilebilir olmanın ön koşulu olarak belirleyerek bazı denklemler sınıfını bu açıdan sınıflandırmışlardır. Yüksek simetriler ve korunum yasaları esas alınarak birçok denklem ve denklem sistemleri sınıfı, çeşitli araştırmacılar tarafından integre edilebilir olması muhtemel yeni sistemleri belirlemek üzere sınıflandırılmıştır (Sokolov ve Shabat 1984, Mikhailov ve Shabat 1985, Mikhailov ve Shabat 1986, Fokas 1987, Mikhailov vd. 1987, Mikhailov vd. 1988). Bu yaklaşımlarla yapılmış araştırmalar, 1991'de (Mikhailov vd. 1991) ve daha sonra 2000'de (Adler vd. 2000) çalışmalarında derlenmiştir. Yüksek simetri ve korunum yasaları integre edilebilir olması muhtemel denklemlerin araştırıldığı yegane nicelikler değildir.

Simetri ve korunan nicelikler üzerine kurulan diğer yapıları temel alan sınıflandırma çalışmalarından, Lax formulasyonunu esas alarak yapılmış olan (Drinfeld ve Sokolov 1981, Svinolupov 1993), simetri tekrar işlemcilerine dayalı (Gürses ve Karasu 1998), Painleve özelliğine dayalı (Kalkanlı Karasu 1997, Sakovich 1999), çift-Hamiltonsal yapıya dayalı (De Sole vd. 2010) sınıflandırmalarına örnek çalışmalarıdır.

Bu tezde belirli bir şemaya uygun olarak oluşturulan iki bileşenli denklem sistemi sınıflarındaki yüksek simetriye sahip sistemlerin belirlenmesi en temel amaçtır. Bu amaca dönük olarak ikinci bölümde simetri ve simetrilerin sonsuzluğunu göstermek üzere kullanılan yapıların özet tanımlarıyla başlayıp, üçüncü bölümde ele aldığımız

iki bileşenli Burgers denklem sistemleri sınıflarını belirlemek için kullandığımız ağırlık şemasını ve bu şemaya uyan sistemler sınıfındaki denklemleri birbirlerinden ayırd etmek üzere kullandığımız eşdeğerlilik ölçütlerini açıklayacak, sonra da dördüncü ve beşinci bölümlerde sınıflandırmamızın sonucu olarak ortaya çıkarmış olduğumuz birbirleriyle eşdeğer olmayan yeni denklem sistemlerini ve bu sistemler için yüksek simetri dışında bulabilmiş olduğumuz integre edilebilirlik ile ilgili diğer yapıların listesini vereceğiz.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu çalışmada ele alınan denklem sistemleri, bir zaman t ve bir uzunluk x bağımsız değişkenlerine bağlı iki bağımlı değişken $u(t, x)$ ve $v(t, x)$ ' den oluşan

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F[u, v] \\ G[u, v] \end{pmatrix},$$

biçimindeki iki bileşenli evrimsel kısmi diferansiyel denklem sistemleri (kısaca sistemler) olacaktır. Ancak sadelik açısından aşağıda vereceğimiz tanımları skaler (tek bileşen)

$$u_t = F[u],$$

durumu için vereceğiz. Burada vereceğimiz tanımların keyfi sayıdaki bağımsız ve bağımlı değişkenler durumundaki daha genel halleri kapsamlı olarak (notasyon olarak da kendisine sadık kalmaya özen göstereceğimiz) (Olver 1993) kitabında verilmiştir. Yukarıdaki ifadenin sağ kısmında köşeli parantezle verilen $F[u]$ ile en genelde bağımsız değişkenler x, t , bağımlı değişken u ve u 'nın (sadece) x 'e göre sonlu sayıda dereceden türevlerini barındıran düzgün (türevlenebilir) bir fonksiyon ifade edilmektedir. Yazım kolaylığı açısından x değişkenine göre kısmi türevleri $\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_2, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = u_n$ biçiminde, x 'e göre türev derecesini belirten alt indis konumundaki bir sayıyla göstereceğiz.

En yüksek türev derecesi k olan u_k 'ya bağlı düzgün bir $F[u]$ diferansiyel fonksiyonunun x 'e göre toplam türevi

$$D(F) = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_1} u_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_k} u_{(k+1)}$$

ve daha yüksek dereceden toplam türevler, geleneksel olduğu üzere,

$$\frac{d^n F}{dx^n} = D^n(F), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

ile, D^{-1} ile de $DD^{-1} = D^{-1}D = 1$ varsayımıyla D işlemcisinin biçimsel tersi gösterilecektir.

2.1 Simetri

İntegre edilebilirlik en temelde simetriler üzerinden tanımlanmış bir kavramdır. O nedenle simetrinin tanımı da başlangıç noktamız olmaktadır. Burada vermekte olduğumuz tanım, sınıflandırmamız açısından kullanışlılığı dolayısıyla evrimsel biçimdeki simetri tanımıdır. Simetrinin evrimsel biçimi ve yüksek boyutlu uzaylarda daha yaygın olarak kullanılan geleneksel biçimi eşdeğerdir. Her boyutta iyi kurulmuş bu eşdeğerlilik için (Olver 1993) kitabına bakılabilir.

Tanım 1 : Herhangi bir düzgün $F[u]$ diferansiyel fonksiyonu için F 'in Frechet türevinin $Q[u]$ diferansiyel fonksiyonu üzerine etkisi

$$D_F(Q) = \frac{d}{d\varepsilon} F[u + \varepsilon Q] \big|_{\varepsilon=0},$$

olarak tanımlanır. $F[u]$ 'nin bağlı olduğu en yüksek türevli u_n 'in derecesi n olmak üzere bu tanımdaki

$$D_F = \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial u_i} D^i$$

işlemcidir.

Karakteristiği $Q[u]$ olan, karakteristik biçimdeki $V_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u}$ vektör alanına, karakteristiği $F[u]$ olan diğer bir vektör alanının Frechet türevinin etkisi $D_F(Q)$, $Q[u]$

karakteristikli evrimsel vektör alanının yüksek dereceli türevlere genişletimi (prolongation) olarak

$$prV_Q = \sum_{i=0}^n D^i(Q) \frac{\partial}{\partial u_i},$$

tanımlanan prV_Q 'nın $F[u]$ karakteristikli evrimsel vektör alanına etkisiyle

$$D_F(Q) = prV_Q(F),$$

aynıdır (Olver 1993).

Bu nedenle bir vektör alanının akımlarıyla diğer bir vektör alanının akımlarının sıradeliği olması anlamındaki simetrisinin tanımı Frechet türevi üzerinden aşağıdaki gibi verilebilmektedir.

Tanım 2 : Evrimsel bir

$$u_t = F[u],$$

denklemini, sonsuz-küçük üretici karakteristik biçimde $V_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u}$ olan vektör alanının tanımladığı tek parametrelili dönüşüm grubu altında değişmez kalıyor

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + D_F(Q) - D_Q(F) = 0, \tag{2.1}$$

ise $V_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u}$ 'ya, ya da kısaca karakteristik $Q[u]$ 'ya, ya da V_Q vektör alanının akımlarını tanımlayan evrimsel denklem biçimindeki

$$u_\tau = Q[u],$$

ifadesine $u_t = F[u]$ denkleminin simetrisi denir.

Örnek 1 : (Olver 1993) Potansiyel formundaki ikinci dereceden

$$u_t = u_2 + u_1^2, \quad (2.2)$$

Burgers denkleminin karakteristiği

$$F = u_2 + u_1^2, \quad (2.3)$$

ve bu karakteristiğin Frechet türevi

$$D_F = D^2 + 2u_1 D, \quad (2.4)$$

olur. Bu denklem için $Q[x, t, u, u_1, u_2, u_3]$ karakteristikli bir simetri varsayımı ile (2.1)'in Q için çözümü

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1, \\ Q_1 &= u_1, \\ Q_2 &= 2tu_1 + x, \\ Q_3 &= u_2 + u_1^2, \\ Q_4 &= 2t(u_2 + u_1^2) + xu_1, \\ Q_5 &= 4t^2(u_2 + u_1^2) + 4tu_1 + 2t + x^2, \\ Q_6 &= u_3 + 3u_1u_2 + u_1^3, \\ Q_7 &= 2t(u_3 + 3u_1u_2 + u_1^3) + x(u_2 + u_1^2), \\ Q_8 &= 4t^2(u_3 + 3u_1u_2 + u_1^3) + 4tx(u_2 + u_1^2) + (2t + x)u_1, \\ Q_9 &= 8t^3(u_3 + 3u_1u_2 + u_1^3) + 12t^2x(u_2 + u_1^2) + (12t^2 + 6tx^2)u_1 \\ &\quad + 6tx + x^3, \\ Q_\phi &= \phi(x, t)e^{-u}, \end{aligned}$$

karakteristikli simetrileri ortaya çıkarır. Yukarıdaki son karakteristikteki $\phi(x, t)$, $\phi_t = \phi_2$ ısı denkleminin herhangi bir çözümüdür. Bu karakteristiklerle evrim parametreleri $\tau_i = 0, 1, \dots, 5, \phi$ olmak üzere yazılacak

$$\begin{aligned}
u_{\tau_0} &= [\partial_u]u, \\
u_{\tau_1} &= [\partial_x]u, \\
u_{\tau_2} &= [2t\partial_x + x\partial_u]u, \\
u_{\tau_3} &= u_t = [\partial_t]u, \\
u_{\tau_4} &= 2tu_t + xu_1 = [2t\partial_t + x\partial_x]u, \\
u_{\tau_5} &= 4t^2u_t + 4tu_1 + 2t + x^2 = [4t^2\partial_t + 4t\partial_1 + (2t + x^2)\partial_u]u, \\
u_{\tau_\phi} &= [\phi(x, t)e^{-u}\partial_u]u,
\end{aligned}$$

evrimsel denklem biçimindeki ifadeler anılan karakteristiklere karşılık gelen (simetri) vektör alanlarının akımları olmaktadır.

Evrimsel bir denklem için yukarıdaki Tanım (2.1) kullanılarak u 'nun istenilen herhangi bir dereceye kadar türevlerini barındıran $Q[u]$ karakteristikli bir simetrinin var olup olmadığı algoritmik olarak araştırılabilir. Ancak aşağıdaki tanım bundan daha fazlasını gerektirmektedir.

Tanım 3 : Evrimsel

$$u_t = F[u],$$

denklemini sonsuz sayıda simetriye sahip ise simetri integre edilebilir.

2.2 Simetri Adım İşlemcisi

Evrimsel bir denklemin sonsuz sayıda simetrisinin var olduğunu gösterebilmek başlıca iki durumda mümkün olmaktadır. Bunlardan birincisi ele alınan denklemin simetrilerine uygulandığında yine denklemin başka bir simetrisini veren, aşağıda tanımı verilmiş olan, simetri tekrar işlemcisinin bulunmuş olmasıdır (Olver 1978).

Tanım 4 : Diferansiyelimsi R işlemcisi,

$$u_t = F[u],$$

denkleminin simetrilerine uygulandığında yine denklemin başka bir simetrisini veren ve denklem ile

$$R_t = [D_F, R], \quad (2.5)$$

sıradeğişim ilişkisini sağlayan bir işlemci ise R, $u_t = F[u]$ denklemin simetri tekrar (recursion) işlemcisidir.

Yukarıdaki tanıma uyan bir simetri tekrar işlemcisi yazılabilmiş herhangi bir denklemin, aşağıdaki örnekte de gösterildiği üzere, sonsuz sayıda simetrileri olduğu açıktır.

Örnek 2 : KdV denkleminin $u_t = u_3 + uu_1$ için

$$R = D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1 D^{-1},$$

bir simetri tekrar işlemcisidir. Çünkü Tanım (2.5)'deki

$$R_t = \frac{2}{3}u_t + \frac{1}{3}u_{1t}D^{-1}$$

$$= \frac{2}{3}(u_3 + uu_1) + \frac{1}{3}(u_4 + uu_2 + u_1^2)D^{-1},$$

ile

$$\begin{aligned} [D_{u_3+uu_1}, R] &= (D^3 + uD + u_1)(D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1D^{-1}) \\ &\quad - (D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1D^{-1})(D^3 + uD + u_1), \end{aligned}$$

ifadesi birbirine eşittir. Bu simetri adım işlemcisini kullanarak $u_{\tau_0} = u_1$ (x -öteleme) simetrisinden başlanılarak

$$u_{\tau_n} = R^n u_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde elde edilecek ifadeler, KdV denkleminin aşağıda ilk birkaç tanesi verilmiş olan simetrileridir.

$$\begin{aligned} u_{\tau_0} &= u_1, \\ u_{\tau_1} &= u_3 + uu_1 = u_t, \\ u_{\tau_2} &= u_5 + \frac{5}{3}u_3u + \frac{10}{3}u_2u_1 + \frac{5}{6}u^2u_1, \\ u_{\tau_3} &= u_7 + \frac{7}{3}uu_5 + 7u_1u_4 + \frac{35}{3}u_2u_3 \\ &\quad + \frac{35}{18}u^2u_3 + \frac{70}{9}uu_1u_2 + \frac{35}{18}u_1^3 + \frac{35}{54}u^3u_1 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

2.3 Master Simetri

Bir denklemin sonsuz sayıda simetrisinin varlığını göstermenin bir diğer yolu da aşağıda tanımı verilen bir master simetrinin bulunabilmesidir (Fokas ve Fuchssteiner 1981, Oevel ve Fuchssteiner 1982, Fuchssteiner 1983).

Tanım 5 : Evrimsel

$$u_t = F[u],$$

denkleminin kendisi ve simetrileriyle sıradeliği (adjoint etkisi)

$$D_M(Q_i) - D_{Q_i}(M) = Q_j$$

yine denklemin simetrisini veren ve Frechet türevi genel olarak integro-diferansiyel D_M işlemcisi olan $M = M[u, \int u dx]$ integro-diferansiyel fonksiyonuna $u_t = F[u]$ denkleminin master simetrisi denir.

Örnek 3 : $M = x(u_2 + uu_1) + \frac{1}{2}u^2$ diferansiyel fonksiyonu (normal biçimdeki) Burgers denkleminin $u_t = u_2 + uu_1$ bir master simetrisidir. M ile master simetri tanımındaki

$$D_M = x(D^2 + uD + u_1) + u$$

olur. Denklemin x -öteleme simetrisinin karakteristiği $Q = u_1$ için

$$D_Q = D$$

ve sonuçta

$$D_M(u_1) - D_{u_1}(M) = u_2 + uu_1,$$

ile Burgers denkleminin kendisine, aynı şekilde

$$D_M(u_2 + uu_1) - D_{u_2+uu_1}(M) = u_3 + 6uu_2 + 3u^2u_1 + u_1^2,$$

ile de denklemin 3. dereceden simetrisine ulaşılır. Bu şekilde elde edilen simetrilerin master simetri ile sıradışıları yine başka bir simetriyi ortaya çıkarmaktadır.

Master simetri aşağıdaki örnekte verilen denklem için simetrilerin sonsuzluğunu gösterebilmenin yegane yolu olmuştur.

Örnek 4 : Ibragimov–Shabat (Ibragimov ve Shabat 1980) denklemi

$$u_t = u_3 + 3u^2u_2 + 9uu_1^2 + 3u^4u_1,$$

için

$$M = x(u_3 + 3u^2u_2 + 9uu_1^2 + 3u^4u_1) + \frac{3}{2}u_2 + 5u_1u^2 + \frac{1}{2}u^5$$

bir master simetridir.

Master simetri, isim bu çağrışımı yapıyor olsa da, denklemin bir simetrisi değildir. Çoğunlukla eldeki denklemin zamana ve/ya konuma doğrusal olarak bağlı bir simetrisinin zaman bağımlı kısmının atılması sonrası geriye kalan kısmı olmaktadır.

2.4 Hamiltonsal ve Çift-Hamiltonsal Denklem

Simetrilerinin sonsuz sayıda olduğu gösterilebilmiş denklemlere simetri anlamında ya da kısaca simetri integre edilebilir denklemler denir. Bu denklemler sınıfı içindeki bir alt küme ise simetrilerinin sonsuzluğu yanısıra ayrıca sonsuz korunan niceliklere de sahip denklemlerdir. İntegre edilebilir olmanın bu ikinci ve daha katı anlamı aşağıdaki tanımlar üzerinden yapılmaktadır (Magri 1978).

Tanım 6 : Evrimsel

$$u_t = F[u],$$

denklemleri kayık-eşlenik (skew-adjoint) ve Jacobi özdeşliğini sağlayan dolayısıyla Hamiltonsal J işlemcisi ve

$$E = \sum_{i=0} (-D)^i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Euler işlemcisini göstermek üzere, korunan yoğunluk fonksiyonu $h[u]$ ile

$$u_t = F[u] = JE(h[u])$$

korunum yasası şeklinde yazılabiliyor ise $\int h[u]dx$ niceliğine denklemin korunan niceliği denir. Bir denklemleri korunum ifadesi olarak yazmaya Hamiltonsal yazım da denir.

Tanım 7 : (Magri 1978) Evrimsel

$$u_t = F[u],$$

denklemleri, uyumlu, diğer bir deyişle keyfi doğrusal kombinasyonları $J_1 + \lambda J_2$ da her λ sabiti için yine Hamiltonsal bir işlemci olan, J_1 , ve J_2 Hamiltonsal işlemcileri ve yoğunluk fonksiyonları $h_0[u]$, $h_1[u]$ ile

$$u_t = F[u] = J_1 E(h_0[u]) = J_2 E(h_1[u])$$

şeklinde Hamiltonsal yazılabiliyor ise $u_t = F[u]$ çift-Hamiltonsal bir denklemdir.

Örnek 5 : KdV

$$u_t = u_3 + uu_1$$

denklemini,

$$J_1 = D^3 + \frac{1}{3}(uD + Du), \quad J_2 = D,$$

uyumlu Hamiltonsal işlemcileri ve yoğunluk fonksiyonları

$$h_0 = \frac{1}{2}u^2, \quad h_1 = -\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{6}u^3,$$

ile

$$u_t = F[u] = \left(D^3 + \frac{1}{3}(uD + Du) \right) \left(E\left(\frac{1}{2}u^2\right) \right) = D \left(E\left(-\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{6}u^3\right) \right),$$

şeklinde Hamiltonsal yazılabildiği için çift-Hamiltonsal bir denklemdir.

Tanım 8 : Çift-Hamiltonsal

$$u_t = F[u],$$

denklemini herbiri birbirinin simetrisi olan

$$u_{t_i} = F_i[u] = J_1 E(h_i[u]) = J_2 E(h_{i+1}[u]), \quad i = -1, 0, 1, 2, \dots$$

sonsuz sayıdaki Hamiltonsal $u_{t_i} = F_i[u]$ denklemler hiyerarşisinin $F[u] = F_1[u]$ gibi bir üyesidir.

Diğer bir deyişle çift-Hamiltonsal bir denklemin Hamiltonsal işlemcileri, denklemin

sonsuz sayıdaki korunan niceliklerinin ve simetrilerinin yazılabilmesini sağlamaktadır. Nitekim aşağıda belirtildiği üzere uyumlu Hamiltonsal işlemciler doğal olarak eldeki denklemin bir simetri tekrar işlemcisini ortaya çıkarırlar.

Teorem 1 : Çift-Hamiltonsal

$$u_{t_1} = F_1[u] = J_1 E(h_0[u]) = J_2 E(h_1[u])$$

denkleminin yazıldığı Hamiltonsal işlemcilerden J_2 'nin biçimsel tersi olan işlemci J_2^{-1} ile gösterilmek üzere

$$R = J_1 J_2^{-1}$$

$F_{i+1} = R F_i$ olacak şekilde, simetriler hiyerarşisindeki her F_i için bir simetri tekrar işlemcisidir.

Örnek 6 : KdV denklemin yazıldığı Hamiltonsal işlemcilerden

$$J_1 = D^3 + \frac{1}{3}(uD + Du), \quad J_2 = D,$$

J_2 'nin biçimsel tersi olan işlemci $J_2^{-1} = D^{-1}$ ile

$$R = J_1 J_2^{-1} = D^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1 D^{-1},$$

KdV denklemi için yukarıda verilmiş olan işlemciden başkası değildir.

Çift-Hamiltonsal olarak yazılabilmiş bütün denklemlerin simetrilerinin de aynı Hamiltonsal işlemcilerle fakat farklı korunan nicelikler üzerinden yine çift-Hamiltonsal olduğu, çift-Hamiltonsal integre edilebilirlik teorisi 1978'de Magri tarafından ortaya konulduğundan beri bütün örneklerde gözlenmiş bir durumdur (Magri 1978). Bu

durumun tesadüfi bir durum olmayıp çift-Hamiltonsal yapıya sahip bir denklem için yapının bir sonucu olduğu çok yakın bir zamanda gösterilmiştir (De Sole ve Kac 2012).

Tanım 9 : Çift-Hamiltonsal

$$u_{t_i} = F_i[u] = J_1 E(h_i[u]) = J_2 E(h_{i+1}[u]), \quad i = -1, 0, 1, 2, \dots$$

denklemler hiyerarşisindeki her denklem $u_{t_i} = F_i[u]$ tamamiyle integre edilebilirdir.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Verili spesifik bir denklem ya da denklem sisteminin integre edilebilir olup olmadığını araştırmak söz konusu olduğunda, yapılabilirlik açısından en gerçekçi yaklaşım eldeki sistemin makul bir dereceye kadar yüksek dereceden en az bir simetrisinin var olup olmadığına bakmaktır. Belirtildiği üzere bu işlem algoritmik olarak yapılabilir. Bu yaklaşım ile aranan dereceye kadar kendisine simetri bulunamamış bir sistemin integre edilebilir olmayacağına hükmedilemez ise de simetrisi bulunabilmiş bir sistem başka simetrisi, simetri adım işlemcisi, master simetri ya da korunum kanunlarının var olup olmadığını araştırmak için cesaret verici olmaktadır.

Bu şekilde en az bir yüksek simetriye sahip, dolayısıyla integre edilebilir olmaya aday sistemleri tespit etmek üzere, birçok sistem sınıfı ele alınarak sınıf içindeki hangi sistemlerin yüksek dereceli bir simetriye sahip oldukları çeşitli sınıflandırma çalışmalarının konusu olmuştur (Mikhailov vd. 1991, Adler vd. 2000).

Ele alınacak sistemler sınıfını

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) \\ G(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) \end{pmatrix},$$

gibi hangi değişkenlere bağlı olduğu bilgisi dışında tamamen belirsiz F ve G fonksiyonlarıyla belirleyip, belirlenen sınıfın

$$\begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(u, u_1, u_2, u_3, v, v_1, v_2, v_3) \\ K(u, u_1, u_2, u_3, v, v_1, v_2, v_3) \end{pmatrix},$$

gibi bir yüksek dereceden yine belirsiz H ve K fonksiyonlarıyla tanımlanmış bir simetri öngörüsü kümesinden simetri kabul eden elemanlarını aramak prensip olarak mümkün ise de pratikte bu ancak, skaler (tek bileşenli) denklemler için yapılabilmektedir. Yüksek dereceden sistem sınıfları söz konusu olduğunda, ikinci dereceden, iki bileşenli sistemlerin ele alındığı (Mikhailov vd. 1988) çalışması istisna olmak üzere, sınıfları

belirsiz fonksiyonlar olarak ele almak, hesabi açıdan gerçekleştirilebilir değildir.

3.1 Ağırlık Şeması

Skaler evrimsel denklemlerin sınıflandırmasından ortaya çıkan bir sonuç da hemen hemen bütün ilginç integre edilebilir evrimsel denklemlerin belirli bir ağırlık şemasına göre türdeş polinomlar olduğudur. Bu nedenlerle, sistemlerin sınıflandırılmasında ele alınacak sistem sınıfını (ve olası simetrilerini) bağımlı değişkenlerin belirli bir ağırlık şemasına uyan polinomlarının belirsiz sabitlerle çarpımlarından oluşturmak etkin olarak kullanılagelmiş bir yaklaşımdır (Sanders ve Wang 1998, Olver ve Sokolov 1998, Foursov 2000a, Foursov 2000b, Sokolov ve Wolf 2001).

Bu yaklaşımda

$$u_t = F(u, u_1, \dots, u_n)$$

denklemini her $a \in \mathbb{R}_+$ için

$$(x, t, u) \rightarrow (a^{-1}x, a^{-\mu}t, a^\lambda u),$$

tek-parametrelili ölçeklemeler grubu altında değişmez kalıyor ise denklem μ -ağırlığında λ -türdeş olarak adlandırılmaktadır.

Örnek 7 : KdV $u_t = u_3 + uu_1$ denklemini 3-ağırlığında $\lambda = 2$ için türdeşdir. Bu ağırlık şemasına göre Burgers denklemini $u_t = u_2 + uu_1$ 2-ağırlığında $\lambda = 1$ için türdeş, bu denklemin 3. dereceden simetrisi $u_t = u_3 + 3uu_2 + 3u^2u_1 + 3u_1^2$ ise 3-ağırlığında $\lambda = 1$ için türdeş bir denklemdir.

Bu yaklaşımı kullanarak herbiri polinomlar olan terimleri sistematik olarak yazamak, aşağıda örneklendiği üzere, oldukça kolaydır.

Örnek 8 : $\lambda = 1$ için türdeş, $\mu = 0, 1, 2, \dots, 6$ ağırlığındaki polinom terimler M_μ^λ kümeleri olarak aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
M_0^1 &= \{u\}, \\
M_1^1 &= \{u^2, u_1\}, \\
M_2^1 &= \{u^3, uu_1, u_2\}, \\
M_3^1 &= \{u^4, u^2u_1, u_1^2, uu_2, u_3\}, \\
M_4^1 &= \{u^5, u^3u_1, uu_1^2, u^2u_2, u_1u_2, uu_3, u_4\}, \\
M_5^1 &= \{u^6, u^4u_1, u^2u_1^2, u^3u_2, u_1^3, uu_1u_2, u^2u_3, u_2^2, u_1u_3, uu_4, u_5\}, \\
M_6^1 &= \{u^7, u^5u_1, u^3u_1^2, u^4u_2, uu_1^3, u^2u_1u_2, u^3u_3, u_1^2u_2, uu_2^2, uu_1u_3, u^2u_4, u_2u_3, \\
&\quad u_1u_4, uu_5, u_6\}
\end{aligned}$$

Yapmış olduğumuz sınıflandırmayı

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(u, u_1, \dots, u_n, v, v_1, \dots, v_n) \\ G(u, u_1, \dots, u_n, v, v_1, \dots, v_n) \end{pmatrix},$$

biçimindeki ve her iki bağımlı değişkenin de (u, v) aynı $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ölçeğinde türdeş:

$$(x, t, u, v) \rightarrow (a^{-1}x, a^{-\mu}t, a^1u, a^1v),$$

altında değişmez kalan, belirsiz sabit katsayılı polinom terimlerden oluşan sistem sınıflarından

- A) 2-ağırlıklı sistemler sınıfındaki bir sistemin 3-ağırlıklı sistemler sınıfından bir simetri kabul etmesi,
- B) 3-ağırlıklı sistemler sınıfındaki bir sistemin 5-ağırlıklı sistemler sınıfından bir simetri kabul etmesi koşuluna dayandırdık.

3.2 Sistem Sınıfları

Daha somut olarak yukarıdaki (A) durumu, u ve v 'nin her ikisinin de (1,1)-ölçeğinde türdeş olduğu, ağırlığı 2 olan belirsiz c_i ve k_i sabit katsayılı polinom terimlerden oluşan sistemler sınıfı

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1u_2 + c_2v_2 + c_3uu_1 + c_4uv_1 + c_5u_1v + c_6vv_1 + c_7u^3 \\ + c_8u^2v + c_9uv^2 + c_{10}v^3 \\ k_1u_2 + k_2v_2 + k_3uu_1 + k_4uv_1 + k_5u_1v + k_6vv_1 + k_7u^3 \\ + k_8u^2v + k_9uv^2 + k_{10}v^3 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

ve bu sistemler sınıfının simetrilerinin aranıldığı (1,1)-ölçeğinde türdeş, 3-ağırlıklı, belirsiz sabit l_i, m_i katsayılı terimlerin oluşturduğu sistemler sınıfı

$$\begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1u_3 + l_2v_3 + l_3uu_2 + l_4uv_2 + l_5u_2v + l_6vv_2 \\ + l_7u_1^2 + l_8u_1v_1 + l_9v_1^2 + l_{10}u^2u_1 + l_{11}u^2v_1 \\ + l_{12}uu_1v + l_{13}uvv_1 + l_{14}u_1v^2 + l_{15}v^2v_1 + l_{16}u^4 \\ + l_{17}u^3v + l_{18}u^2v^2 + l_{19}uv^3 + l_{20}v^4 \\ m_1u_3 + m_2v_3 + m_3uu_2 + m_4uv_2 + m_5u_2v + m_6vv_2 \\ + m_7u_1^2 + m_8u_1v_1 + m_9v_1^2 + m_{10}u^2u_1 + m_{11}u^2v_1 \\ + m_{12}uu_1v + m_{13}uvv_1 + m_{14}u_1v^2 + m_{15}v^2v_1 + m_{16}u^4 \\ + m_{17}u^3v + m_{18}u^2v^2 + m_{19}uv^3 + m_{20}v^4 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

olmaktadır.

Durum (B)'de ise (3.2) sistemler sınıfı olarak ele alınıp bu sistemler sınıfına (1,1)-ölçeğinde türdeş, ağırlığı 5 olan sistemler sınıfından simetri aranılmıştır. Simetrinin aranıldığı sınıftaki her bir bileşen 60'dan daha fazla terimden oluşmaktadır. Çok uzun olan bu sınıfı açık olarak yazmayacağız.

Ancak yapmış olduğumuz sınıflandırman detaylarını anlatabilmek için aşağıdaki basit sınıflandırma örneğinden yararlanacağız.

Örnek 9 : Ağırlığı 3 ve 2-ölçeğinde türdeş, belirsiz d_i sabit katsayılı polinom terim-

lerinden oluşan skaler

$$u_t = u_3 + d_1 u u_1 \quad (3.3)$$

denklem sınıfını ele almış ve bu sınıfdaki denklemlerden 2-ölçeğinde türdeş, 5 ağırlıklı bir simetriya sahip olanları tespit etmek istiyor olalım. Belirsiz sabit katsayılar c_i ile 2-ölçeğinde türdeş, 5 ağırlıklı terimlerin oluşturduğu simetriler sınıfı

$$u_\tau = u_5 + c_1 u u_3 + c_2 u_1 u_2 + c_3 u^2 u_1 \quad (3.4)$$

olur. Evrimsel (3.3) denklem sınıfının karakteristiği olan

$$F = u_3 + d_1 u u_1$$

diferansiyel fonksiyonunun Frechet türevi

$$D_F = D^3 + d_1 u D + d_1 u_1$$

işlemcisi ve aynı şekilde 5. dereceden denklem sınıfı (3.4)'ün karakteristiği

$$S = u_5 + c_1 u u_3 + c_2 u_1 u_2 + c_3 u^2 u_1$$

için

$$D_S = D^5 + c_1 u D^3 + c_2 u_1 D^2 + (c_3 u^2 + c_2 u_2) D + (2c_3 u u_1 + c_1 u_3)$$

Frechet türevlerine kolayca ulaşırız. Simetri koşulu (2.1)'deki $\frac{\partial S}{\partial t}$ terimi, ele aldığımız simetri sınıfında açık t bağımlılığı öngörülmediği için sıfır olur. Kalan terimler

$$D_F(S) - D_S(F) = 0,$$

örneğimiz için

$$(D^3 + d_1uD + d_1u_1)(u_5 + c_1uu_3 + c_2u_1u_2 + c_3u^2u_1) - (D^5 + c_1uD^3 + c_2u_1D^2 + (c_3u^2 + c_2u_2)D + (2c_3uu_1 + c_1u_3))(u_3 + d_1uu_1) = 0,$$

gerektirir. İşlemcileri uygulayıp sonucu u ve türevlerinin katsayıları için düzenlediğimizde

$$u_1u_5(3c_1 - 5d_1) + 3u_2u_4(c_2 + c_1 - 5d_1) + u_3^2(3c_2 - 10d_1) + 3uu_1u_3(2c_3 - c_1d_1) + 3uu_2^2(2c_3 - c_1d_1) + 3u_1^2u_2(4c_3 - c_2d_1) = 0,$$

ifadesine ulaşırız. Bu son ifadenin u ve türevlerine herhangi bir sınır getirmeksizin sağlanması için u ve türevlerinin katsayı faktörleri olarak ortaya çıkan

$$(3c_1 - 5d_1), \quad (c_2 + c_1 - 5d_1), \quad (3c_2 - 10d_1), \\ (2c_3 - c_1d_1), \quad (2c_3 - c_1d_1), \quad (4c_3 - c_2d_1),$$

ifadelerinin hepsinin sıfır olması gerekir. Bu ise belirsiz katsayıları

$$c_1 = \frac{5}{3}d_1, \quad c_2 = \frac{10}{3}d_1, \quad c_3 = \frac{5}{6}d_1^2,$$

şeklinde tespit edebilmemizi sağlar. Sonuç olarak her d_1 değeri için

$$u_t = u_3 + d_1uu_1,$$

denkleminin

$$u_\tau = u_5 + \frac{5}{3}d_1uu_3 + \frac{10}{3}d_1u_1u_2 + \frac{5}{6}d_1^2u^2u_1$$

simetrisine sahip olduğu ortaya çıkar. Bu noktadan sonra d_1 sabitinin alabileceği sıfırdan farklı her değer için $v = \frac{u}{d_1}$ ile v için KdV deklemine, $d_1 = 0$ durumunda ise doğrudan (u için) ısı denklemine ulaşırız. Nihai olarak ele aldığımız basit sınıfta sadece ısı ve KdV denklemlerin birer yüksek simetrileri olduğu, dolayısıyla da bu

denklemlerin integre edilebilir olmaya aday denklemler olduğu sonucuna ulaşırız.

3.3 Doğrusal Dönüşümler Altında Eşdeğerlilik

Yukarıda terimlerinin seçimini açıklamış olduğumuz sınıflardaki sistemler

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_n + \text{düşük dereceli terimler}$$

biçimindeki doğrusalımsı sistemlerdir. En yüksek dereceli doğrusal terimlerin katsayılarından oluşan

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

matrisini *anakatsayı matrisi* olarak adlandıralım.

Ele aldığımız doğrusalımsı sistemlerden (ve simetrilerinden) herhangi bir spesifik sisteme yapılacak ve aşağıda (determinantı sıfırdan farklı) S matrisiyle gösterilen

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

doğrusal değişken değişimi sonrasında başlangıçtaki denklemin doğrusal terimleri

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t}_{\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_n}_{\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_n}$$

biçimini alır. Bu şekildeki doğrusal değişken değiştirmeler altında birbirine dönüşebilen sistemleri *eşdeğer sistemler* olarak ele alacağız. Çünkü bu türden doğrusal dönüşümlerin (S matrisinin) tersi ile her zaman varılan son sistemden geriye başlangıçtaki ilk

sisteme dönülebilir.

İntegre edilebilirlik tanımları bu türden doğrusal dönüşümlerden bağımsız olduğu için herhangi bir değişkenler kümesinde integre edilebilir olduğu gösterilebilmiş bir sisteme yapılacak doğrusal dönüşümlerle varılacak eşdeğer sistemler de aynı integre edilebilir sistemin yine integre edilebilir olan başka görünüşleri olacaktır. Bu nedenle doğrusal dönüşümler altında birbirine dönüşebilen herhangi bir sistemler ailesinden sadece birini bu ailenin temsilcisi olarak belirlemek üzere ele aldığımız doğrusalımsı sistemler sınıflarındaki doğrusal terimlerin katsayısı olan anakatsayı matrisi için aşağıdaki teoremi kullanarak seçim yapacağız.

Teorem 2 (Jordan): Elemanları (en genelde) kompleks sayılar olan herhangi bir 2×2

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

matrisini

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

benzerlik dönüşümüyle kanonik Jordan matrislerinden

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \epsilon \neq 0,$$

bir ve de sadece birine dönüştüren ve tersi olan bir

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}$$

matrisi vardır.

Teoremdaki son kanonik Jordan matrisindeki $\epsilon \neq 0$, yine benzerlik dönüşümleriyle sıfırdan farklı herhangi bir istenen değere getirilebilir. Bu nedenle bu matris sıklıkla $\epsilon = 1$ değeri ile verilir. Bu spesifik eşdeğerliliği elde etmiş olduğumuz sistemlerdeki tüm katsayıları, estetik nedenlerle, tamsayı olarak yazabilmek için kullandık.

Yukardaki matrislerden ilk ikisi durumundaki sistem sınıfları daha önceki sınıflandırma çalışmalarında yoğun olarak araştırılmış olup bu nedenle bu çalışmanın kapsamı dışında bırakılmıştır (Sokolov ve Wolf 2001, Tsuchida ve Wolf 2005, Foursov 2003, Foursov 2000a).

Dolayısıyla bu çalışmada yukarıdaki Jordan kanonik matrislerinden sonuncusunun, sistemlerdeki zaman parametresinin yeniden ölçeklenebilmesi keyfiyetini de dikkate alarak aşağıdaki iki durumunu

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon \neq 0, \quad (3.5)$$

seçerek sınıflandırmamızı gerçekleştirdik. Jordan teoremi ve sistemlerin evrim parametresi t 'yi tekrar ölçekleyebilme keyfiyeti, anakatsayısı köşegenleştirilebilir olmayan herhangi bir sistemin her zaman anakatsayısı yukarıdaki J_1 veya J_2 matrislerinden biri olacak biçime getirilebilmesini garanti etmektedir.

Dolayısıyla bu iki matrisin herbiri seçilerek sınıflandırma tamamlandığında, yukarıda açıklanan ağırlık şeması kullanılarak ele alınan sınıflardaki anakatsayısı köşegenleştirilebilir olmayan bütün sistemler, doğrusal değişken değişimleri ve zaman yeniden ölçeklemeleri eşdeğerliliği altında tamamen tüketilmiş olmaktadır.

Bir çarpan keyfiyeti altında, yukarıdaki (3.5) matrislerden J_1 , 2×2 tüm matrislerden determinantı sıfır (dejenere) ve izsiz olanlarının kanonik temsilcisi, J_2 ise 2×2 tüm matrislerden birim matrisle orantılı olmayan fakat çift katlı bir özdeğere sahip matrislerin kanonik tek temsilcisidir. Bu bilgi, verili bir sistemin anakatsayı matrisi

Jordan kanonik biçimine getirilmeden de ele aldığımız sınıf içinde kalıp kalmadığına karar verebilmeyi (ağırlık şemasına uyuma da bağlı olarak) olanaklı kılar.

3.4 Anakatsayısı Köşegenleştirilebilir Olmayan Altsınıflar

İki bileşenli sistemler integre edilebilirlik yönleriyle 1980'lerden itibaren literatürde yeralagelmektedir.

İntegre edilebilirlik vurgusuyla ilk iki bileşenli denklem sistemi

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + uu_1 + vv_1 \\ -2v_3 - uv_1 \end{pmatrix},$$

Hirota ve Satsuma (Hirota ve Satsuma 1981, Hirota ve Satsuma 1982) tarafından ortaya konuldu. Araştırmacılar bu sisteminin çift-Hamiltonsal yapısının yanısıra çoklu soliton çözümleri olduğunu gösterdiler.

Yine aynı tarihlerde benzer bir sistem

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + 3uu_1 + 3vv_1 \\ vu_1 + uv_1 \end{pmatrix},$$

Ito (ito 1982) tarafından çift-Hamiltonsal yapılarıyla birlikte ortaya konuldu.

Skaler denklemlerin sınıflandırılması keyfi karakteristik öngörülerıyla (ele alınan sınıflarda daraltma olmaksızın) yapılmıştır. Ancak iki bileşenli sistemler için sadece Mikhailov, Shabat ve Sokolov (Mikhailov vd. 1991) ve Svinolupov (Svinolupov 1989) tarafından ikinci dereceden Burgers ve Schrödinger sistemlerinin sınıflandırılması skaler denklemlerdekine benzer bir genellikte yapılabilmektedir.

Yüksek derecelere çıkıldıkça hızla artan hesabi zorluk ele alınan sistem sınıflarının ve bunlara ilintilendirilen yapıların belirlenmesinde akılcı seçimler yapmayı gerek-

tirmektedir. Bu açıdan çeşitli araştırmacılar tarafından integre edilebilirliğin farklı yönlerine dayalı olarak gerçekleştirilmiş olan çalışmaların (Drinfeld ve Sokolov 1985, Fuchssteiner 1982, Nutku ve Oğuz 1990, Gerdt ve Zharkov 1990, Zharkov 1993, Kalkanlı Karasu 1997, Foursov 2000 a, Foursov 2000 b, Foursov 2003, Gürses vd. 2001, Gürses ve Karasu 1999, Gürses ve Karasu 1998, Sokolov ve Wolf 2001, Tsuchida ve Wolf 2005) sonuçları kendilerinden sonra yapılan sınıflandırma problemlerinin sınıf belirleme tercihlerinde yol gösterici olmuştur.

Bu çalışmada, formülasyon itibarıyla, şimdiye kadar hiçbir çalışmada ele alınmamış olan

A-I : A sınıfındaki (3.1) sistemlerden J_1 anakatsayılı olanların B sınıfından (3.2),

A-II: A sınıfındaki (3.1) sistemlerden J_2 anakatsayılı olanların B sınıfından (3.2),

B-I : B sınıfındaki (3.2) sistemlerden J_1 anakatsayılı olanların 5-ağırlıklı, (1,1)-türdeş sistemler sınıfından,

B-II: B sınıfındaki (3.2) sistemlerden J_2 anakatsayılı olanların 5-ağırlıklı, (1,1)-türdeş sistemler sınıfından,

simetri kabul edenler, Tanım (2.1) kullanılarak integre edilebilir sistem adayları olarak tespit edilmiştir. Ele alınan alt sınıflardan A-I ve A-II için Tanım (2.1) kullanılarak aday sistemlerin tespiti EK-1’de detaylı olarak verilmiştir. B-I ve B-II sınıfları için böyle bir detay takip edilebilir olmayacağı için verilememiştir.

Tespit edilen aday simetri integre edilebilir sistemlerin master simetrileri de, bir istisna dışında, bulunarak simetri integre edilebilir oldukları ayrıca gösterilmiştir. B sınıfında elde edilen bazı sistemlerin korunum kanunları da olduğu gözlenmiştir. Korunum kanunları olan bazı sistemlerin çoklu-Hamiltonsal yapıları da bulunarak

tamamiyle integre edilebilir oldukları gösterilmiştir.

4. İKİNCİ DERECEDEN SİSTEMLER

Bu bölümde kendisi ikinci dereceden olan (3.1) sınıfındaki sistemlerden, üçüncü dereceden (3.2) sınıfından simetri kabul ettiği tespit edilen (A) sınıfı sistemler sunulmaktadır.

4.1 A-I Sınıfı

Sınıflandırma sonucunda (A) sınıfındaki anakatsayı matrisi (3.5)'de verilen J_1 dejenere (sıfır determinanlı) sistemlerle ilgili olarak aşağıdaki teoreme ulaşılmıştır.

Teorem 3 : Sistem sınıfı (3.1)'deki anakatsayısı dejenere ve izsiz olan sistemlerden (3.2) sınıfından bir simetri kabul eden herhangi bir sistem u, v değişkenlerine yapılacak doğrusal dönüşümler ve x, t değişkenlerini tekrar ölçekleyerek

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 + u_1 v + uv_1 \\ -uv^2 - v_1 v \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

sistemine dönüştürülebilir.

4.1.1 Sistem (4.1)

Bu sistem için

$$M_1 = \begin{pmatrix} x(v_2 + u_1 v + uv_1) + uv \\ xv(v_1 + uv) - v^2 \end{pmatrix},$$

bir master simetridir. Dolayısıyla sistem simetri anlamında integre edilebilirdir.

4.2 A-II Sınıfı

Sınıflandırma sonucunda (A) sınıfındaki anakatsayı matrisi (3.5)'de verilen J_2 dejenere olmayan sistemlerle ilgili olarak aşağıdaki teoreme ulaşılmıştır.

Teorem 4 : Sistem sınıfı (3.1)'deki anakatsayısı dejenere ve birim matrisle orantılı olmayan fakat çift katlı bir özdeğere sahip sistemlerden (3.2) sınıfından bir simetri kabul eden herhangi bir sistem u, v değişkenlerine yapılacak doğrusal dönüşümler ve x, t değişkenlerini tekrar ölçekleyerek

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 + v_2 + 2u_1u + u_1v + uv_1 \\ v_2 + 2uv_1 - uv^2 - v_1v \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

sistemine dönüştürülebilir.

4.2.1 Sistem (4.2)

Bu sistem için

$$M_2 = \begin{pmatrix} x(u_2 + 2u_1u) + u^2 \\ x(v_2 + 2uv_1) - v_1 \end{pmatrix},$$

bir master simetridir. Dolayısıyla sistem simetri anlamında integre edilebilirdir.

5. ÜÇÜNCÜ DERECEDEKİ SİSTEMLER

Bu bölümde kendisi üçüncü dereceden olan (3.2) sınıfındaki sistemlerden, beşinci dereceden 5-ağırlığında (1,1)-türdeş sistemler sınıfından simetri kabul ettiği tespit edilen (B) sınıfı sistemler sunulmaktadır.

Bu sınıfta ortaya çıkan fakat bir önceki bölümde bulunmuş olan ikinci dereceden sistemlerden herhangi birinin simetrisi olduğu tespit edilen sistemler bu bölümde verilen sistemler arasından ayıklanmıştır. Dolayısıyla bu bölümde ortaya konulan 3. dereceden sistemler 2. dereceden bir sistemin simetrisi olmayan sistemlerdir.

5.1 B-I Sınıfı

Sınıflandırma sonucunda (B) sınıfındaki anakatsayı matrisi (3.5)'de verilen J_1 dejenere (sıfır determinantlı) sistemlerle ilgili olarak aşağıdaki teoreme ulaşılmıştır.

Teorem 5 : Sistem sınıfı (3.2)'deki anakatsayısı dejenere ve izsiz olan sistemlerden 5-ağırlığında (1,1)-türdeş sistemler sınıfından bir simetri kabul eden herhangi bir sistem u, v değişkenlerine yapılacak doğrusal dönüşümler ve x, t değişkenlerini tekrar ölçekleyerek

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_3 - 4vu_2 - 6uv_2 + 8uvu_1 - 10u_1v_1 + 4u^2v_1 \\ 4vv_2 - 8v^2u_1 + 4u^2v^2 - 8uvv_1 - v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 + 2vu_2 + 3uv_2 + 5v_1u_1 + 2u^2v_1 + 4uvu_1 \\ -2vv_2 + v_1^2 - 2uvv_1 - 4v^2u_1 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

sistemlerinden bir ve sadece birine dönüştürülebilir.

5.1.1 Sistem (5.1)

Bu sistem için

$$M_3 = \begin{pmatrix} u_2 + 2uu_1 \\ -v_2 - 4vu_1 - 2uv_1 - 2u^2v \end{pmatrix},$$

bir master simetridir. Dolayısıyla sistem simetri anlamında integre edilebilirdir.

5.1.2 Sistem (5.2)

Bu sistemin 3, 4, 5, 6 ve 7. derecelerden simetrileri bulunmuş ancak sistem için simetri işlemcisi ya da master simetri bulunamamıştır. Dolayısıyla sistem simetri anlamında integre edilebilmeye aday bir denklemdir.

5.2 B-II Sınıfı

Sınıflandırma sonucunda (B) sınıfındaki anakatsayı matrisi (3.5)'de verilen J_2 dejenere olmayan sistemlerle ilgili olarak aşağıdaki teoreme ulaşılmıştır.

Teorem 6 : Sistem sınıfı (3.2)'deki anakatsayısı dejenere ve birim matrisle orantılı olmayan fakat çift katlı bir özdeğere sahip sistemlerden 5-ağırlığında (1,1)-türdeş sistemler sınıfından bir simetri kabul eden herhangi bir sistem u, v değişkenlerine yapılacak doğrusal dönüşümler ve x, t değişkenlerini tekrar ölçekleyerek

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + 3v_3 + 3uu_2 + 3vu_2 + 6uv_2 + 3u_1^2 + 9u_1v_1 \\ + 3u^2u_1 + uv6u_1 + 3u^2v_1 \\ v_3 - 3vv_2 + 6u_1v_1 - 3v^2u_1 + 3v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 - 2v_3 + 3u_2u - 4u_2v - 6uv_2 + 3u_1^2 + 3u_1u^2 \\ -8u_1uv - 10u_1v_1 - 4u^2v_1 \\ v_3 + 3uv_2 + 4v_2v + 6u_1v_1 + 8u_1v^2 + 3u^2v_1 + 4u^2v^2 \\ + 8uv_1v - v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + 3v_3 + 3u_2u - 3u_2v + 3u_1^2 + 3u_1u^2 - 3u_1v_1 \\ -3u_1v^2 + 12v_2v + 9v_1^2 + 12v_1v^2 \\ v_3 + 9v_2v - 3uv_2 + 6u_1uv - 3u_1v_1 - 6u_1v^2 + 3u^2v_1 \\ -12uv_1v + 9v_1^2 + 21v_1v^2 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + v_3 + 3uu_2 + 3u^2u_1 + 3u_1^2 + uv_2 + u_1v_1 \\ v_3 - 3uv_2 + 3v_1u_1 + 3u^2v_1 + 2v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + \lambda v_3 + 3uu_2 + 3u^2u_1 + 3u_1^2 + 2\lambda uv_2 + 2\lambda u_1v_1 \\ v_3 - 3uv_2 + 3u^2v_1 + 2\lambda v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + v_3 + 3uu_2 + 3u^2u_1 + 3u_1^2 - 2vu_2 - uv_2 \\ -4uvu_1 - 3u_1v_1 - 2u^2v_1 \\ v_3 - 3uv_2 + 2vv_2 + 6uvu_1 - 6uvv_1 - 4v^2u_1 + 3u^2v_1 \\ -3u_1v_1 + v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + v_3 + 3uu_2 + 3u^2u_1 + 3u_1^2 + vu_2 + 2uv_2 + 2uvu_1 \\ + 3u_1v_1 + u^2v_1 \\ v_3 - vv_2 - 3uvu_1 + 3u_1v_1 - v^2u_1 + v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + 3v_3 + 3uu_2 + 3u^2u_1 + 3u_1^2 + 9uv_2 - 12uvu_1 \\ -30uvv_1 + 9u_1v_1 - 15v^2u_1 - 6u^2v_1 - 18v^2v_1 \\ v_3 - 3uv_2 + 6uvu_1 + 6uvv_1 - 3u_1v_1 + 3v^2u_1 \\ -6v^2v_1 + 3u^2v_1 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + 6v_3 + 3uu_2 + 3u^2u_1 + 3u_1^2 - 9vu_2 - 24uvu_1 \\ +6uvv_1 - 9u_1v_1 + 3v^2u_1 - 12u^2v_1 \\ v_3 + 9vv_2 - 3uv_2 - 3u_1v_1 - 12v^2u_1 + 3u^2v_1 + 3v^2v_1 \\ +6uvu_1 - 24uvv_1 + 9v_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

sistemlerinden bir ve sadece bir sisteme dönüştürülebilir.

5.2.1 Sistem (5.3)

Bu sistem için, kısaca u_t ve v_t sistemdeki eşitliğin sağ tarafını göstermek üzere,

$$M_4 = \begin{pmatrix} xu_t + 2u_2 + 4v_2 + 5uu_1 + 4vu_1 + 7uv_1 + u^3 + 3u^2v \\ xv_t + v_2 + 2uv_1 - vv_1 - uv^2 \end{pmatrix},$$

bir master simetridir. Dolayısıyla sistem simetri anlamında integre edilebilirdir.

5.2.2 Sistem (5.4)

Bu sistem için, kısaca u_t ve v_t sistemdeki eşitliğin sağ tarafını göstermek üzere,

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2xu_t - u_2 - 6v_2 - 12u_1v + 2u^3 - 8u^2v - 16uv_1 \\ 2xv_t + 7v_2 + 20u_1v + 10u^2v + 16uv_1 + 8uv^2 + 4v_1v \end{pmatrix},$$

bir master simetridir. Dolayısıyla sistem simetri anlamında integre edilebilirdir.

5.2.3 Sistem (5.5)

Bu sistem için, kısaca u_t ve v_t sistemdeki eşitliğin sağ tarafını göstermek üzere,

$$M_6 = \begin{pmatrix} 2xu_t + 5u_2 + 12v_2 + 12u_1u - 8u_1v + 2u^3 - 2uv_1 \\ -2uv^2 + 36v_1v + 8v^3 \\ 2xv_t + 3v_2 + 6u^2v - 6uv_1 - 12uv^2 + 26v_1v + 14v^3 \end{pmatrix},$$

bir master simetridir. Dolayısıyla sistem simetri anlamında integre edilebilirdir.

5.2.4 Sistem (5.6)

Bu sistem

$$\begin{aligned}\rho_1^{(1)} &= u, \\ \rho_2^{(1)} &= -\frac{1}{2}u^2v_1 - u_1v_1 - \frac{1}{3}v_1^2, \\ \rho_3^{(1)} &= u_2v_2 - 3u_2v_1u + \frac{2}{3}v_2^2 - \frac{7}{2}u_1^2v_1 - \frac{3}{2}u_1v_1^2 - 4u_1v_1u^2 + 2u_1u^3v - \frac{7}{18}v_1^3 - v_1^2u^2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

korunan yoğunluklarına sahiptir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}K_{11}^{(1)} &= D^3 - u^2D - uu_1 + u_1D^{-1}u_1, \\ K_{12}^{(1)} &= D^3 + 4uD^2 + (9u_1 + 3v_1 + 5u^2)D + (7u_2 + 5v_2 + 16uu_1 + 3uv_1 + 2u^3) \\ &\quad + (2u_3 + 2v_3 + 6uu_2 + 2uv_2 + 2u_1v_1 + 6u_1^2 + 6u^2u_1)D^{-1} + u_1D^{-1}v_1, \\ K_{22}^{(1)} &= 6v_1D + 3v_2 + (v_3 - 3uv_2 + 3u_1v_1 + 2v_1^2 + 3u^2v_1)D^{-1} \\ &\quad + D^{-1}(v_3 - 3uv_2 + 3u_1v_1 + 2v_1^2 + 3u^2v_1) + v_1D^{-1}v_1,\end{aligned}$$

olmak üzere

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}D & D(D+2u)D^{-1} \\ D^{-1}(D-2u)D & 2v_1D^{-1} + 2D^{-1}v_1 \end{pmatrix}, \quad K^{(1)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ -K_{12}^{(1)*} & K_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

Hamiltonsal işlemcileriyle sistem

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J^{(1)} \begin{pmatrix} E_u \\ E_v \end{pmatrix} \rho_2^{(1)} = K^{(1)} \begin{pmatrix} E_u \\ E_v \end{pmatrix} \rho_1^{(1)},$$

şeklinde çift-Hamiltonsal olarak yazılabilmektedir. Dolayısıyla sistem tamamiyle integre edilebilirdir (Talatı ve Turhan 2012).

5.2.5 Sistem (5.7)

Bu sistem

$$\begin{aligned}\rho_1^{(2)} &= u, \\ \rho_2^{(2)} &= u_1 u v - \frac{1}{2} u_1 v_1 - \frac{\lambda}{3} v_1^2, \\ \rho_3^{(2)} &= u^3 v u_1 - \frac{3}{2} u^2 u_1 v_1 - \frac{3}{4} u_1^2 v_1 - u v_1 u_2 - \frac{2}{3} \lambda u^2 v_1^2 - \frac{1}{3} \lambda u_1 v_1^2 - \frac{2}{9} \lambda^2 v_1^3 \\ &\quad + \frac{1}{4} u_2 v_2 + \frac{1}{4} \lambda v_2^2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

korunan yoğunluklarına sahiptir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}S_{11}^{(2)} &= -D^{-1} \left[D v_1 + v_1 D + \frac{2}{3} \lambda \left((D - 2u)^{-1} v_1^2 + v_1^2 (D + 2u)^{-1} \right) \right] D^{-1}, \\ S_{12}^{(2)} &= D^{-1} \left(D - u + \frac{2}{3} \lambda (D - 2u)^{-1} v_1 \right) D, \\ S_{22}^{(2)} &= \lambda D,\end{aligned}$$

olmak üzere simplektik

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ -S_{12}^{(2)*} & S_{22}^{(2)} \end{pmatrix},$$

ve Hamiltonsal

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \lambda D & D(D + u)D^{-1} \\ D^{-1}(D - u)D & D^{-1}v_1 + v_1 D^{-1} \end{pmatrix},$$

işlemcileriyle sistem

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J^{(2)} \begin{pmatrix} E_u \\ E_v \end{pmatrix} \rho_2^{(2)}$$

$$S^{(2)} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_u \\ E_v \end{pmatrix} \rho_3^{(2)}$$

biçiminde Hamiltonsal ve simplektik yazılabilmektedir. Dolayısıyla sistem tamamiyle integre edilebilirdir.

Sistem (5.7) $u = p_1/p$ ve $v_1 = pq$ olmak üzere (p, q) değişkenlerinde

$$\begin{pmatrix} p_t \\ q_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 + \lambda(p^2 q_1 + 3qp p_1) \\ q_3 + \lambda(q^2 p_1 + 3pq q_1) \end{pmatrix}.$$

sistemine dönüşür. Bu son sistem Sasa-Satsuma sistemi olarak bilinmektedir (Sasa ve Satsuma 1991).

5.2.6 Sistem (5.8)

Bu sistem 5. dereceden simetrisi olmanın yanısıra aşağıda ilk üçü verilmiş olan korunam yoğunluklara da sahiptir.

$$\begin{aligned} \rho_1^{(3)} &= u, \\ \rho_2^{(3)} &= uv, \\ \rho_3^{(3)} &= v_1^2 + 3u_1 v_1 + 2v^2 u_1 - 9uvu_1 + 4u^2 v^2 - 3u^3 v, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dolayısıyla sistem korunum kanunu anlamında da integre edilebilir olmaya adaydır.

5.2.7 Sistem (5.9)

Bu sistem 5. dereceden simetrisi olmanın yanısıra aşağıda ilk üçü verilmiş olan korunam yoğunluklara da sahiptir.

$$\begin{aligned} \rho_1^{(4)} &= u, \\ \rho_2^{(4)} &= uv, \\ \rho_3^{(4)} &= u^2 v^2 - u_1 v^2 + v_1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dolayısıyla sistem korunum kanunu anlamında da integre edilebilir olmaya adaydır.

5.2.8 Sistem (5.10)

Bu sistem 5. dereceden simetrisi olmanın yanısıra aşağıda ilk üçü verilmiş olan korunam yoğunluklara da sahiptir.

$$\begin{aligned}\rho_1^{(5)} &= u, \\ \rho_2^{(5)} &= v, \\ \rho_3^{(5)} &= -\frac{1}{3}u^3v - \frac{1}{2}u^2v^2 + \frac{2}{3}uv^3 + v^4 - uvu_1 + \frac{1}{3}u_1v_1 + v_1^2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Dolayısıyla sistem korunum kanunu anlamında da integre edilebilir olmaya adaydır.

5.2.9 Sistem (5.11)

Bu sistem 5. dereceden simetrisi olmanın yanısıra aşağıda ilk üçü verilmiş olan korunam yoğunluklara da sahiptir.

$$\begin{aligned}\rho_1^{(6)} &= u, \\ \rho_2^{(6)} &= v, \\ \rho_3^{(6)} &= u^3v - 6u^2v^2 + uv^3 + 3uvu_1 - \frac{9}{2}v^2u_1 - u_1v_1 - 3v_1^2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Dolayısıyla sistem korunum kanunu anlamında da integre edilebilir olmaya adaydır.

6. SONUÇ

Tezin başlangıcında amaçlamış olduğumuz anakatsayısı köşegenleştirilebilir olmayan 2. dereceden $(1,1)$ -türdeş sistemlerden 3. dereceden $(1,1)$ -türdeş simetriler sınıfından simetri kabul eden sistemlerin ve 3. dereceden $(1,1)$ -türdeş sistemlerden 5. dereceden $(1,1)$ -türdeş simetri kabul eden ve dolayısıyla aday simetri integre edilebilir sistemlerin tespitini gerçekleştirmiş bulunuyoruz. Sonuç olarak 2. dereceden 2 adet, 3 dereceden ise (2. dereceden simetri kabul etmeyen) 11 adet yeni simetri integre edilebilir olmaya aday sisteme ulaşılmıştır.

Bulunan bu aday sistemlerden 2. dereceden olanların tümünün, 3. dereceden olanların ise 4 adedinin master simetrilerini de bularak simetri integre edilebilir olduklarını göstermiş bulunuyoruz. Üçüncü dereceden tespit edilen diğer 7 sistemden altısının sadece simetri değil aynı zamanda yüksek korunum kanunları da olduğunu tespit etmiş bulunuyoruz. Yüksek korunum kanunları olan sistemlerden ikisinin çift-Hamiltonsal işlemcilerini bularak bu sistemlerin tamamıyla integre edilebilir olduğunu da göstermiş bulunuyoruz.

Ortaya çıkarmış olduğumuz sistemlerden sadece biri (5.2) halen aday simetri entegre edilebilir sistem durumundadır. Bu sisteme herhangi bir yüksek korunum yasası, master simetri ya da simetri tekrar işlemcisi bulabilmiş değiliz. Ancak 3. dereceden olan bu sistem, kendisinden yüksek her derecede (4,5,6,7 teyid edildi) simetriye sahip olmakla birlikte 2. derceden herhangi bir simetri kabul etmiyor gözükmektedir. Bu haliyle sistem literatürde bilinen örneklerle tezat teşkil etmektedir. Sistem bu yönüyle ilginç olup incelenilmeye devam edilecektir.

Hamiltonsal işlemcilerini bulmuş olduğumuz sistemlerden biri olan (5.7) sisteminin ayrıca Sasa-Satsuma sistemiyle tersi olmayan bir dönüşümle ilintili olduğunu tespit ettik. Sasa-satsuma sistemi (Sasa ve Satsuma 1991) doğrusal olmayan optikte kullanılan Doğrusal Olmayan Schrödinger sisteminden daha rafine optik atmaları modellemek üzere geliştirilmiş bir sistem olduğundan, elde etmiş olduğumuz yeni sis-

temlerin bazılarının da benzer bağlamlarda kullanım alanı bulabileceğini düşünmekteyiz.

Sınıflandırma başlangıcında ele almış olduğumuz 2. dereceden sistemler sınıfı (anakatsayı seçimi sonrası) 16 adet, 3. dereceden simetriler sınıfı ise 40 adet olmak üzere toplamda 56 adet belirsiz sabit; 3. dereceden sistemler sınıfı (anakatsayı seçimi sonrası) 36 adet ve bu sınıf için belirlemiş olduğumuz 5. dereceden simetriler sınıfı 120 adet olmak üzere toplamda 156 adet belirsiz sabit içermektedir. İkinci dereceden sistemlerin belirsiz sabitler için ortaya çıkarmış olduğu cebirsel koşulları REDUCE bilgisayar cebir sistemiyle çözmek mümkün olmuş ancak 3. dereceden sistemlerin sınıflandırmasında bu şekilde sadece bilgisayar tarafından çözümlere ulaşamamıştır. Bu nedenle bu ikinci durumda cebirsel denklemlerin çözümleri bilgisayarla etkileşimli olarak birçok alt durumun herbiri teker teker ele alınarak gerçekleştirilmiştir.

Elde etmiş olduğumuz sistemlerin bu tezde konu edilememiş yapıları ve özelliklerini sonraki çalışmalarımızda ele almayı düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

- Adler, V. E. and Shabat, A. B. and Yamilov, R. I. 2000. Symmetry approach to the integrability problem. *Theor. Math. Phys.* 125, 1603.
- Calogero, F. 1991. Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable? in *What is Integrability?* pp 1–62.
- De Sole, A., Kac, V. G. and Wakimoto, M. 2010. On classification of Poisson vertex algebras. *Transform. Groups* 15 883.
- De Sole, A. and Kac, V. G. 2012. Non local Poisson structures and applications to the theory of integrable systems I. *arXiv:1210.1688*.
- Drinfeld, V. G. and Sokolov, V. V. 1981. New evolution equations having an (L, A) pair. *Tr. Sem. S L Soboleva* 25–9 (Rusça).
- Drinfeld, V. G. and Sokolov, V. V. 1985. Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type. *J. Sov. Math.* 30. 1975.
- Gardner, C. S. Greene, J. M. Kruskal, M. D. and Miura, R. M. 1967. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* 19. 1095.
- Gerdt, V. P. and Zharkov, A. Y. 1990. Computer classification of integrable coupled KdV-like systems. *J. Symb. Comput.* 10. 203.
- Gürses, M. and Karasu, A. 1998. Integrable coupled KdV systems. *J. Math. Phys.* 39. 2103.
- Gürses, M. and Karasu, A. 1999. Integrable KdV systems: recursion operators of degree four. *Phys. Lett. A* 251, 247.
- Gürses, M. Karasu, A. and Turhan, R. 2001. Non-autonomous Svinolupov–Jordan KdV systems. *J. Phys. A: Math. Gen.* 34, 5705.
- Fokas, A. S. 1980. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations. *J. Math. Phys.* 21, 1318.

- Fokas, A. S. and Fuchssteiner, B. 1981. The hierarchy of Benjamin-Ono equations. Phys. Lett. A 86, 341.
- Fokas, A. S. 1987. Symmetries and integrability. Stud. Appl. Math. 77 253.
- Foursov, M. V. 2000. Classification of certain integrable coupled potential KdV and modified KdV-type equations. J. Math. Phys. 41, 6173.
- Foursov, M. V. 2000. On integrable coupled KdV-type systems. Inverse Problems 16, 259.
- Foursov, M. V. 2003. Towards the complete classification of homogeneous two-component integrable equations. J. Math. Phys. 44, 3088.
- Fuchssteiner, B. 1982. The Lie algebra structure of degenerate Hamiltonian and bi-Hamiltonian systems. Prog. Theor. Phys. 68, 1082.
- Fuchssteiner, B. 1983. Mastersymmetries and higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations. Progr. Theor. Phys. 70, 1508.
- Hirota, R. and Satsuma, J. 1981. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation. Phys. Lett. A 85, 407.
- Hirota, R. and Satsuma, J. 1982. A coupled KdV equation is one case of the four-reduction of the KP hierarchy. J. Phys.Soc. Jpn. 51, 3390.
- Ito, M. 1982. Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation. Phys. Lett. A 91, 335
- Korteweg, D. J. and de Vries, G. 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Phil. Mag. Ser.5 39, 422.
- Ibragimov, N. H. and Shabat, A. B. 1980. Evolutionary equations with nontrivial Lie-Bäcklund group. Funct. Anal. Appl. 14, 19.

- Karasu, (Kalkanlı) A. 1997. Painlevé classification of coupled Korteweg–de Vries systems. *J. Math. Phys.* 38, 383616.
- Magri, F. 1978. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. *J. Math. Phys.* 19 1156.
- Mikhailov, A. V. and Shabat, A. B. 1985. Integrability conditions for systems of two equations of the form $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_1)$: I. *Theor. Math. Phys.* 62, 107.
- Mikhailov, A. V. and Shabat, A. B. 1986. Integrability conditions for systems of two equations of the form $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_1)$: II. *Theor. Math. Phys.* 66, 31.
- Mikhailov, A. V., Shabat, A. B. and Yamilov R I, 1987. The symmetry approach to the classification of non-linear equations Complete lists of integrable systems. *Russ. Math. Surveys* 42, 1.
- Mikhailov, A. V., Shabat, A. B. and Yamilov, R. I. 1988. Extension of the module of invertible transformations Classification of integrable systems. *Commun. Math. Phys.* 115 1.
- Mikhailov, A. V., Shabat, A. B. and Sokolov, V. V. 1991. The symmetry approach to classification of integrable equations, in *What is Integrability?* (Berlin:Springer) pp 115–84.
- Nutku, Y. and Oğuz, O. 1990. Bi-Hamiltonian structure of a pair of coupled KdV equations. *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis.* 1381
- Oevel, w. and Fuchssteiner, B. 1982. Explicit formulas for Symmetries and conservation laws of the Kadomtsev-Petviashvili equations. *Phys. Lett. A* 88,323
- Olver, P. J. 1978. Evolution equations possessing infinitely many symmetries. *J. Math. Phys.* 18, 1212.
- Olver, P. J. 1993. *Application of Lie groups to differential equations.* Springer.
- Olver, P. J. and Sokolov V V, 1998 Integrable evolution equations on associative algebras, *Commun. Math. Phys.* 193 245.

- Sakovich, S. Yu. 1999. Coupled KdV equations of Hirota–Satsuma type. *J. Nonlinear Math. Phys.* 6, 255.
- Sanders, J. A. and Wang, J. P. 1998. On the integrability of homogeneous scalar evolution equations. *J. Diff. Eqns* 147, 410.
- Sasa, N. and Satsuma, J. 1991. New type of soliton solutions for a higher-order nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. Soc. Jpn.* 60, 409.
- Sergyeyev, A. and Demskoi, D. 2007. Sasa-Satsuma (complex modified Korteweg–de Vries II) and the complex sine-Gordon II equation revisited: Recursion operators, nonlocal symmetries, and more, *J. Math. Phys.* 48, 042702.
- Sokolov, V. V. and Wolf, T. 2001. Classification of integrable polynomial vector evolution equations. *J. Phys. A:Math. Gen.* 34 11139.
- Sokolov, V. V. and Shabat, A. B. 1984. Classification of integrable evolution equations. *Sov. Sci. Rev. C* 4, 221.
- Svinolupov, S. I. 1993. Jordan algebras and integrable systems. *Funct. Anal. Appl.* 27, 257.
- Svinolupov, S. I. 1989. On the analogues of the Burgers equation. *Phys. Lett. A* 135, 32.
- Talati, D. and Turhan, R. 2011. On a Recently Introduced Fifth-order bi-Hamiltonian Equation and Trivially Related Hamiltonian Operators. *SIGMA* 7. 081, 8 pages.
- Talati, D. and Turhan, R. 2012. A bi-Hamiltonian integrable two-component generalization of the third-order Burgers equation, submitted.
- Tsuchida, T. and Wolf, T. 2005. Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, 7691.

- Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D. 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 15, 240.
- Zharkov, A. Y. 1993. Computer classification of the integrable coupled KdV-like systems with unit main matrix, *J. Symb. Comput.* 15, 85.

EK 1 İKİNCİ DERECE SİSTEMLERİN SİMETRİ KOŞULLARI

Evrimsel B sistemler sınıfının (3.1) karakteristiği olan

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} c_1u_2 + c_2v_2 + c_3uu_1 + c_4uv_1 + c_5u_1v + c_6vv_1 + c_7u^3 \\ + c_8u^2v + c_9uv^2 + c_{10}v^3 \\ k_1u_2 + k_2v_2 + k_3uu_1 + k_4uv_1 + k_5u_1v + k_6vv_1 + k_7u^3 \\ + k_8u^2v + k_9uv^2 + k_{10}v^3 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

diferansiyel fonksiyonunun Frechet türevi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= c_1D^2 + (c_5v + c_3u)D + (c_9v^2 + 2c_8uv + 3c_7u^2 + c_4v_1 + c_3u_1), \\ \mathbf{F}_2 &= c_2D^2 + (c_6v + c_4u)D + (3c_{10}v^2 + 2c_9uv + c_8u^2 + c_6v_1 + c_5u_1), \\ \mathbf{F}_3 &= k_1D^2 + (k_5v + k_3u)D + (k_9v^2 + 2k_8uv + 3k_7u^2 + k_4v_1 + k_3u_1), \\ \mathbf{F}_4 &= k_2D^2 + (k_6v + k_4u)D + (3k_{10}v^2 + 2k_9uv + k_8u^2 + k_6v_1 + k_5u_1) \end{aligned}$$

bileşen işlemcilerle

$$D_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 & \mathbf{F}_4 \end{pmatrix}$$

ve aynı şekilde 3. dereceden simetriler sınıfının (3.2) karakteristiği

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} l_1u_3 + l_2v_3 + l_3uu_2 + l_4uv_2 + l_5u_2v + l_6vv_2 \\ + l_7u_1^2 + l_8u_1v_1 + l_9v_1^2 + l_{10}u^2u_1 + l_{11}u^2v_1 \\ + l_{12}uu_1v + l_{13}uvv_1 + l_{14}u_1v^2 + l_{15}v^2v_1 + l_{16}u^4 \\ + l_{17}u^3v + l_{18}u^2v^2 + l_{19}uv^3 + l_{20}v^4 \\ m_1u_3 + m_2v_3 + m_3uu_2 + m_4uv_2 + m_5u_2v + m_6vv_2 \\ + m_7u_1^2 + m_8u_1v_1 + m_9v_1^2 + m_{10}u^2u_1 + m_{11}u^2v_1 \\ + m_{12}uu_1v + m_{13}uvv_1 + m_{14}u_1v^2 + m_{15}v^2v_1 + m_{16}u^4 \\ + m_{17}u^3v + m_{18}u^2v^2 + m_{19}uv^3 + m_{20}v^4 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

için

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &= l_1 D^3 + (l_5 v + l_3 u) D^2 + (l_{14} v^2 + l_{12} uv + l_{10} u^2 + l_8 v_1 + 2l_7 u_1) D \\
&\quad + (l_{19} v^3 + 2l_{18} uv^2 + 3l_{17} u^2 v + 4l_{16} u^3 + l_{13} v_1 v + l_{12} u_1 v \\
&\quad + 2l_{11} uv_1 + 2l_{10} u_1 u + l_4 v_2 + l_3 u_2), \\
\mathbf{S}_2 &= l_2 D^3 + (l_6 v + l_4 u) D^2 + (l_{15} v^2 + l_{13} uv + l_{11} u^2 + 2l_9 v_1 + l_8 u_1) D \\
&\quad + (4l_{20} v^3 + 3l_{19} uv^2 + 2l_{18} u^2 v + l_{17} u^3 + 2l_{15} v_1 v + 2l_{14} u_1 v \\
&\quad + l_{13} uv_1 + l_{12} u_1 u + l_6 v_2 + l_5 u_2), \\
\mathbf{S}_3 &= m_1 D^3 + (m_5 v + m_3 u) D^2 + (m_{14} v^2 + m_{12} uv + m_{10} u^2 + m_8 v_1 \\
&\quad + 2m_7 u_1) D + (m_{19} v^3 + 2m_{18} uv^2 + 3m_{17} u^2 v + 4m_{16} u^3 + m_{13} v_1 v \\
&\quad + m_{12} u_1 v + 2m_{11} uv_1 + 2m_{10} u_1 u + m_4 v_2 + m_3 u_2), \\
\mathbf{S}_4 &= m_2 D^3 + (m_6 v + m_4 u) D^2 + (m_{15} v^2 + m_{13} uv + m_{11} u^2 + 2m_9 v_1 \\
&\quad + m_8 u_1) D + (4m_{20} v^3 + 3m_{19} uv^2 + 2m_{18} u^2 v + m_{17} u^3 + 2m_{15} v_1 v \\
&\quad + 2m_{14} u_1 v + m_{13} uv_1 + m_{12} u_1 u + m_6 v_2 + m_5 u_2),
\end{aligned}$$

bileşen işlemcileriyle

$$D_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{pmatrix}$$

Frechet türevlerine ulaşılır. Simetri koşulu

$$D_{\mathbf{F}}(\mathbf{S}) - D_{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = 0,$$

empoze edildiğinde, kısaca hangi değişken terimlerinin katsayısı olarak ortaya çıktıkları da sistematik olarak (satır başlarına) not edilmiş olan, belirsiz katsayı sabitleri c_i, k_i, l_i, m_i 'lerin sağlaması gereken aşağıdaki cebirsel koşullara ulaşılır.

$$u_5 : (c_2m_1 - k_1l_2) = 0,$$

$$v_5 : (-c_2l_1 + c_2m_2 + c_1l_2 - k_2l_2) = 0,$$

$$uu_4 : (c_4m_1 + c_2m_3 - k_3l_2 - k_1l_4) = 0,$$

$$vu_4 : (c_6m_1 + c_2m_5 - k_5l_2 - k_1l_6) = 0,$$

$$uv_4 : (-c_4l_1 + c_4m_2 + c_3l_2 - c_2l_3 + c_2m_4 + c_1l_4 - k_4l_2 - k_2l_4) = 0,$$

$$vv_4 : (-c_6l_1 + c_6m_2 + c_5l_2 - c_2l_5 + c_2m_6 + c_1l_6 - k_6l_2 - k_2l_6) = 0,$$

$$u_1u_3 : (c_5m_1 - 3c_3l_1 + 2c_2m_7 + 2c_2m_3 + 2c_1l_3 - 4k_3l_2 - k_1l_8) = 0,$$

$$v_1u_3 : (c_6m_1 - 3c_5l_1 + c_2m_8 + 2c_2m_5 + 2c_1l_5 - 3k_5l_2 - k_4l_2 - 2k_1l_9) = 0,$$

$$u^2u_3 : (c_8m_1 + c_4m_3 + c_2m_{10} - 3k_7l_2 - k_3l_4 - k_1l_{11}) = 0,$$

$$uvu_3 : (2c_9m_1 + c_6m_3 + c_4m_5 + c_2m_{12} - 2k_8l_2 - k_5l_4 - k_3l_6 - k_1l_{13}) = 0,$$

$$v^2u_3 : (3c_{10}m_1 + c_6m_5 + c_2m_{14} - k_9l_2 - k_5l_6 - k_1l_{15}) = 0,$$

$$u_1v_3 : (-c_5l_1 + c_5m_2 - 3c_4l_1 + c_3l_2 - 2c_2l_7 + c_2m_8 + 2c_2m_4 + c_1l_8 \\ + 2c_1l_4 - k_5l_2 - 3k_4l_2 - k_2l_8) = 0,$$

$$v_1v_3 : (-4c_6l_1 + c_6m_2 + c_4l_2 - c_2l_8 + 2c_2m_9 + 2c_2m_6 + 2c_1l_9 + 2c_1l_6 \\ - 4k_6l_2 - 2k_2l_9) = 0,$$

$$u^2v_3 : (-c_8l_1 + c_8m_2 + 3c_7l_2 - c_4l_3 + c_4m_4 + c_3l_4 - c_2l_{10} + c_2m_{11} \\ + c_1l_{11} - k_8l_2 - k_4l_4 - k_2l_{11}) = 0,$$

$$uvv_3 : (-2c_9l_1 + 2c_9m_2 + 2c_8l_2 - c_6l_3 + c_6m_4 + c_5l_4 - c_4l_5 + c_4m_6 \\ + c_3l_6 - c_2l_{12} + c_2m_{13} + c_1l_{13} - 2k_9l_2 - k_6l_4 - k_4l_6 - k_2l_{13}) = 0,$$

$$v^2v_3 : (-3c_{10}l_1 + 3c_{10}m_2 + c_9l_2 - c_6l_5 + c_6m_6 + c_5l_6 - c_2l_{14} + c_2m_{15} \\ + c_1l_{15} - 3k_{10}l_2 - k_6l_6 - k_2l_{15}) = 0,$$

$$u_2^2 : (-3c_3l_1 + 2c_2m_7 + c_2m_3 + 2c_1l_7 - 3k_3l_2 - k_1l_5) = 0,$$

$$u_2v_2 : (-3c_5l_1 - 3c_4l_1 - c_2l_3 + 2c_2m_8 + c_2m_5 + c_2m_4 + 2c_1l_8 + c_1l_5 \\ - 3k_5l_2 - 3k_4l_2 - k_2l_5 - k_1l_6) = 0,$$

$$uu_1u_2 : (-18c_7l_1 + c_5m_3 + 2c_4m_7 + c_4m_3 - 2c_3l_3 + 6c_2m_{10} + 4c_1l_{10} \\ - 18k_7l_2 - k_3l_8 - k_3l_5 - 3k_3l_4 - k_1l_{12}) = 0,$$

$$vu_1u_2 : (-6c_8l_1 + 2c_6m_7 + c_6m_3 + c_5m_5 - 2c_3l_5 + 3c_2m_{12} + 2c_1l_{12} \\ - 6k_8l_2 - k_5l_8 - k_5l_5 - 3k_3l_6 - 2k_1l_{14}) = 0,$$

$$uv_1u_2 : (-6c_8l_1 + c_6m_3 - 2c_5l_3 - c_4l_3 + c_4m_8 + c_4m_5 + c_3l_5 + 2c_2m_{12} \\ + 2c_2m_{11} + 2c_1l_{12} - 6k_8l_2 - 2k_5l_4 - k_4l_5 - k_4l_4 - 2k_3l_9 - k_1l_{13}) = 0,$$

$$vv_1u_2 : (-6c_9l_1 - c_6l_3 + c_6m_8 + 2c_6m_5 - c_5l_5 + 4c_2m_{14} + c_2m_{13} \\ + 4c_1l_{14} - 6k_9l_2 - k_6l_5 - 2k_5l_9 - 2k_5l_6 - k_4l_6 - 2k_1l_{15}) = 0,$$

$$u^3u_2 : (c_8m_3 - c_7l_3 + c_4m_{10} + 4c_2m_{16} - k_7l_5 - 3k_7l_4 - k_3l_{11} - k_1l_{17}) = 0,$$

$$u^2vu_2 : (2c_9m_3 - c_8l_3 + c_8m_5 + c_6m_{10} + c_4m_{12} + 3c_2m_{17} - k_8l_5 \\ - 2k_8l_4 - 3k_7l_6 - k_5l_{11} - k_3l_{13} - 2k_1l_{18}) = 0,$$

$$uv^2u_2 : (3c_{10}m_3 - c_9l_3 + 2c_9m_5 + c_6m_{12} + c_4m_{14} + 2c_2m_{18} - k_9l_5 \\ - k_9l_4 - 2k_8l_6 - k_5l_{13} - k_3l_{15} - 3k_1l_{19}) = 0,$$

$$v^3u_2 : (-c_{10}l_3 + 3c_{10}m_5 + c_6m_{14} + c_2m_{19} - k_{10}l_5 - k_9l_6 \\ - k_5l_{15} - 4k_1l_{20}) = 0,$$

$$v_2^2 : (-3c_6l_1 - c_2l_4 + 2c_2m_9 + c_2m_6 + 2c_1l_9 + c_1l_6 - 3k_6l_2 - k_2l_6) = 0,$$

$$uu_1v_2 : (-6c_8l_1 - c_5l_3 + c_5m_4 - 2c_4l_7 - 2c_4l_3 + c_4m_8 + c_4m_4 + c_3l_8 \\ + c_3l_4 - 2c_2l_{10} + c_2m_{12} + 4c_2m_{11} + c_1l_{12} + 4c_1l_{11} - 6k_8l_2 - k_5l_4 - k_4l_8 \\ - 2k_4l_4 - k_3l_6 - k_2l_{12}) = 0,$$

$$vu_1v_2 : (-6c_9l_1 - 2c_6l_7 + c_6m_8 + c_6m_4 + c_5l_8 - c_5l_5 + c_5m_6 - 2c_4l_5 + c_3l_6 \\ - c_2l_{12} + 2c_2m_{14} + 2c_2m_{13} + 2c_1l_{14} + 2c_1l_{13} - 6k_9l_2 - k_6l_8 \\ - 2k_5l_6 - 2k_4l_6 - 2k_2l_{14}) = 0,$$

$$uv_2v_1 : (-6c_9l_1 - 3c_6l_3 + c_6m_4 - c_4l_8 + 2c_4m_9 + c_4m_6 + 2c_3l_9 + c_3l_6 - 2c_2l_{11} \\ + 3c_2m_{13} + 3c_1l_{13} - 6k_9l_2 - 3k_6l_4 - 2k_4l_9 - k_4l_6 - k_2l_{13}) = 0,$$

$$vv_2v_1 : (-18c_{10}l_1 - c_6l_8 - 3c_6l_5 - c_6l_4 + 2c_6m_9 + 2c_6m_6 + 2c_5l_9 + c_5l_6 \\ + c_4l_6 - c_2l_{13} + 6c_2m_{15} + 6c_1l_{15} - 18k_{10}l_2 - 2k_6l_9 - 4k_6l_6 - 2k_2l_{15}) = 0,$$

$$u^3v_2 : (-c_8l_3 + c_8m_4 + 2c_7l_4 - c_4l_{10} + c_4m_{11} + c_3l_{11} - 4c_2l_{16} + c_2m_{17} \\ + c_1l_{17} - k_8l_4 - k_7l_6 - k_4l_{11} - k_2l_{17}) = 0,$$

$$u^2vv_2 : (-2c_9l_3 + 2c_9m_4 - c_8l_5 + c_8l_4 + c_8m_6 + 3c_7l_6 - c_6l_{10} + c_6m_{11} \\ + c_5l_{11} - c_4l_{12} + c_4m_{13} + c_3l_{13} - 3c_2l_{17} + 2c_2m_{18} + 2c_1l_{18} - 2k_9l_4 - 2k_8l_6 \\ - k_6l_{11} - k_4l_{13} - 2k_2l_{18}) = 0,$$

$$uv^2v_2 : (-3c_{10}l_3 + 3c_{10}m_4 - 2c_9l_5 + 2c_9m_6 + 2c_8l_6 - c_6l_{12} + c_6m_{13} + c_5l_{13} \\ - c_4l_{14} + c_4m_{15} + c_3l_{15} - 2c_2l_{18} + 3c_2m_{19} + 3c_1l_{19} - 3k_{10}l_4 - 3k_9l_6 \\ - k_6l_{13} - k_4l_{15} - 3k_2l_{19}) = 0,$$

$$v^3v_2 : (-3c_{10}l_5 - c_{10}l_4 + 3c_{10}m_6 + c_9l_6 - c_6l_{14} + c_6m_{15} + c_5l_{15} \\ - c_2l_{19} + 4c_2m_{20} + 4c_1l_{20} - 4k_{10}l_6 - k_6l_{15} - 4k_2l_{20}) = 0,$$

$$u_1^3 : (-6c_7l_1 + c_5m_7 - c_3l_7 + 2c_2m_{10} + 2c_1l_{10} - 6k_7l_2 - k_3l_8) = 0,$$

$$u_1^2v_1 : (-6c_8l_1 + c_6m_7 - 2c_5l_7 + c_5m_8 - c_4l_7 + 2c_2m_{12} + 2c_2m_{11} \\ + 2c_1l_{12} + 2c_1l_{11} - 6k_8l_2 - k_5l_8 - k_4l_8 - 2k_3l_9) = 0,$$

$$u^2u_1^2 : (c_8m_7 - 3c_7l_7 - 6c_7l_3 + c_5m_{10} + 2c_4m_{10} + 12c_2m_{16} + 12c_1l_{16} \\ - 3k_7l_8 - 6k_7l_4 - k_3l_{12} - k_3l_{11}) = 0,$$

$$uvu_1^2 : (2c_9m_7 - 2c_8l_7 - 2c_8l_3 - 6c_7l_5 + 2c_6m_{10} + c_5m_{12} + c_4m_{12} \\ + 6c_2m_{17} + 6c_1l_{17} - 2k_8l_8 - 2k_8l_4 - 6k_7l_6 - k_5l_{12} - 2k_3l_{14} - k_3l_{13}) = 0,$$

$$v^2u_1^2 : (3c_{10}m_7 - c_9l_7 - 2c_8l_5 + c_6m_{12} + c_5m_{14} + 2c_2m_{18} + 2c_1l_{18} \\ - k_9l_8 - 2k_8l_6 - 2k_5l_{14} - k_3l_{15}) = 0,$$

$$u_1v_1^2 : (-6c_9l_1 - 2c_6l_7 + c_6m_8 - c_5l_8 + c_5m_9 + c_3l_9 + 2c_2m_{14} + 2c_2m_{13} \\ + 2c_1l_{14} + 2c_1l_{13} - 6k_9l_2 - k_6l_8 - 2k_5l_9 - 2k_4l_9) = 0,$$

$$u^2u_1v_1 : (-2c_8l_7 - 4c_8l_3 + c_8m_8 + c_6m_{10} - c_5l_{10} + c_5m_{11} - 2c_4l_{10} + c_4m_{12} \\ + 2c_4m_{11} + c_3l_{12} + c_3l_{11} + 6c_2m_{17} + 6c_1l_{17} - k_8l_8 - 4k_8l_4 - 6k_7l_9 - k_5l_{11} \\ - k_4l_{12} - k_4l_{11} - k_3l_{13}) = 0,$$

$$uvu_1v_1 : (-4c_9l_7 - 4c_9l_3 + 2c_9m_8 - 4c_8l_5 - 2c_6l_{10} + 2c_6m_{12} + 2c_6m_{11} + c_5m_{13} \\ - c_4l_{12} + 2c_4m_{14} + c_4m_{13} + 2c_3l_{14} + c_3l_{13} + 8c_2m_{18} + 8c_1l_{18} - 2k_9l_8 - 4k_9l_4 \\ - 4k_8l_9 - 4k_8l_6 - k_6l_{12} - 2k_5l_{13} - 2k_4l_{14} - k_4l_{13} - 2k_3l_{15}) = 0,$$

$$v^2u_1v_1 : (-6c_{10}l_7 + 3c_{10}m_8 - 4c_9l_5 - c_6l_{12} + 3c_6m_{14} + c_6m_{13} + c_5l_{14} + c_5m_{15} \\ + c_3l_{15} + 6c_2m_{19} + 6c_1l_{19} - 3k_{10}l_8 - 2k_9l_9 - 4k_9l_6 - 2k_6l_{14} - 3k_5l_{15} - k_4l_{15}) = 0,$$

$$u^4u_1 : (c_8m_{10} - 2c_7l_{10} + c_5m_{16} + 4c_4m_{16} + c_3l_{16} - k_7l_{12} - 3k_7l_{11} - k_3l_{17}) = 0,$$

$$u^3vu_1 : (2c_9m_{10} - 2c_8l_{10} + c_8m_{12} - c_7l_{12} + 4c_6m_{16} + c_5m_{17} + 3c_4m_{17} \\ + c_3l_{17} - k_8l_{12} - 2k_8l_{11} - 2k_7l_{14} - 3k_7l_{13} - k_5l_{17} - 2k_3l_{18}) = 0,$$

$$u^2v^2u_1 : (3c_{10}m_{10} - 2c_9l_{10} + 2c_9m_{12} - c_8l_{12} + c_8m_{14} + 3c_6m_{17} + c_5m_{18} + 2c_4m_{18} \\ + c_3l_{18} - k_9l_{12} - k_9l_{11} - 2k_8l_{14} - 2k_8l_{13} - 3k_7l_{15} - 2k_5l_{18} - 3k_3l_{19}) = 0,$$

$$uv^3u_1 : (-2c_{10}l_{10} + 3c_{10}m_{12} - c_9l_{12} + 2c_9m_{14} + 2c_6m_{18} + c_5m_{19} + c_4m_{19} + c_3l_{19} \\ - k_{10}l_{12} - 2k_9l_{14} - k_9l_{13} - 2k_8l_{15} - 3k_5l_{19} - 4k_3l_{20}) = 0,$$

$$v^4u_1 : (-c_{10}l_{12} + 3c_{10}m_{14} + c_6m_{19} + c_5m_{20} + c_3l_{20} - 2k_{10}l_{14} - k_9l_{15} - 4k_5l_{20}) = 0,$$

$$v_1^3 : (-6c_{10}l_1 - c_6l_8 + c_6m_9 + c_4l_9 + 2c_2m_{15} + 2c_1l_{15} - 6k_{10}l_2 - 2k_6l_9) = 0,$$

$$u^2v_1^2 : (-2c_9l_3 - c_8l_8 + c_8m_9 + 3c_7l_9 - c_6l_{10} + c_6m_{11} - c_4l_{11} + c_4m_{13} + c_3l_{13} \\ + 2c_2m_{18} + 2c_1l_{18} - 2k_9l_4 - 2k_8l_9 - k_6l_{11} - k_4l_{13}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
uvv_1^2 : & (-6c_{10}l_3 - 2c_9l_8 - 2c_9l_5 + 2c_9m_9 + 2c_8l_9 - c_6l_{12} - 2c_6l_{11} + 2c_6m_{13} \\
& + c_5l_{13} + 2c_4m_{15} + 2c_3l_{15} + 6c_2m_{19} + 6c_1l_{19} - 6k_{10}l_4 - 4k_9l_9 \\
& - 2k_9l_6 - 2k_6l_{13} - 2k_4l_{15}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^2v_1^2 : & (-3c_{10}l_8 - 6c_{10}l_5 + 3c_{10}m_9 + c_9l_9 - c_6l_{14} - c_6l_{13} + 3c_6m_{15} \\
& + 2c_5l_{15} + c_4l_{15} + 12c_2m_{20} + 12c_1l_{20} - 6k_{10}l_9 - 6k_{10}l_6 - 3k_6l_{15}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^4v_1 : & (-c_8l_{10} + c_8m_{11} + c_7l_{11} + c_6m_{16} - 3c_4l_{16} + c_4m_{17} + c_3l_{17} \\
& - k_8l_{11} - k_7l_{13} - k_4l_{17}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3vv_1 : & (-2c_9l_{10} + 2c_9m_{11} - c_8l_{12} + c_8m_{13} + 2c_7l_{13} - 4c_6l_{16} + 2c_6m_{17} \\
& + c_5l_{17} - 2c_4l_{17} + 2c_4m_{18} + 2c_3l_{18} - 2k_9l_{11} - 2k_8l_{13} - 2k_7l_{15} - k_6l_{17} - 2k_4l_{18}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2v^2v_1 : & (-3c_{10}l_{10} + 3c_{10}m_{11} - 2c_9l_{12} - c_9l_{11} + 2c_9m_{13} - c_8l_{14} + c_8l_{13} + c_8m_{15} \\
& + 3c_7l_{15} - 3c_6l_{17} + 3c_6m_{18} + 2c_5l_{18} - c_4l_{18} + 3c_4m_{19} + 3c_3l_{19} - 3k_{10}l_{11} \\
& - 3k_9l_{13} - 3k_8l_{15} - 2k_6l_{18} - 3k_4l_{19}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
uv^3v_1 : & (-3c_{10}l_{12} - 2c_{10}l_{11} + 3c_{10}m_{13} - 2c_9l_{14} + 2c_9m_{15} + 2c_8l_{15} - 2c_6l_{18} \\
& + 4c_6m_{19} + 3c_5l_{19} + 4c_4m_{20} + 4c_3l_{20} - 4k_{10}l_{13} - 4k_9l_{15} - 3k_6l_{19} - 4k_4l_{20}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^4v_1 : & (-3c_{10}l_{14} - c_{10}l_{13} + 3c_{10}m_{15} + c_9l_{15} - c_6l_{19} + 5c_6m_{20} + 4c_5l_{20} \\
& + c_4l_{20} - 5k_{10}l_{15} - 4k_6l_{20}) = 0,
\end{aligned}$$

$$u^6 : (c_8m_{16} - c_7l_{16} - k_7l_{17}) = 0,$$

$$u^5v : (2c_9m_{16} - 2c_8l_{16} + c_8m_{17} - k_8l_{17} - 2k_7l_{18}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
u^4v^2 : & (3c_{10}m_{16} - 3c_9l_{16} + 2c_9m_{17} - c_8l_{17} + c_8m_{18} + c_7l_{18} - k_9l_{17} \\
& - 2k_8l_{18} - 3k_7l_{19}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3v^3 : & (-4c_{10}l_{16} + 3c_{10}m_{17} - 2c_9l_{17} + 2c_9m_{18} + c_8m_{19} + 2c_7l_{19} \\
& - k_{10}l_{17} - 2k_9l_{18} - 3k_8l_{19} - 4k_7l_{20}) = 0,
\end{aligned}$$

$$u^2v^4 : (-3c_{10}l_{17} + 3c_{10}m_{18} - c_9l_{18} + 2c_9m_{19} + c_8l_{19} + c_8m_{20}$$

$$+3c_7l_{20} - 2k_{10}l_{18} - 3k_9l_{19} - 4k_8l_{20}) = 0,$$

$$uv^5 : (-2c_{10}l_{18} + 3c_{10}m_{19} + 2c_9m_{20} + 2c_8l_{20} - 3k_{10}l_{19} - 4k_9l_{20}) = 0,$$

$$v^6 : (-c_{10}l_{19} + 3c_{10}m_{20} + c_9l_{20} - 4k_{10}l_{20}) = 0,$$

$$u_5 : (-c_1m_1 + k_2m_1 + k_1l_1 - k_1m_2) = 0,$$

$$v_5 : (-c_2m_1 + k_1l_2) = 0,$$

$$uu_4 : (-c_3m_1 - c_1m_3 + k_4m_1 + k_3l_1 - k_3m_2 + k_2m_3 + k_1l_3 - k_1m_4) = 0,$$

$$vu_4 : (-c_5m_1 - c_1m_5 + k_6m_1 + k_5l_1 - k_5m_2 + k_2m_5 + k_1l_5 - k_1m_6) = 0,$$

$$uv_4 : (-c_4m_1 - c_2m_3 + k_3l_2 + k_1l_4) = 0,$$

$$vv_4 : (-c_6m_1 - c_2m_5 + k_5l_2 + k_1l_6) = 0,$$

$$u_1u_3 : (-4c_3m_1 - 2c_1m_7 + k_5m_1 + k_3l_1 - 4k_3m_2 + 2k_2m_7 + 2k_2m_3 \\ + 2k_1l_7 + 2k_1l_3 - k_1m_8) = 0,$$

$$v_1u_3 : (-3c_5m_1 - c_4m_1 - c_1m_8 + k_6m_1 - 3k_5m_2 + k_4l_1 - k_4m_2 \\ + k_2m_8 + 2k_2m_5 + k_1l_8 + 2k_1l_5 - 2k_1m_9) = 0,$$

$$u^2u_3 : (-3c_7m_1 - c_3m_3 - c_1m_{10} + k_8m_1 + 3k_7l_1 - 3k_7m_2 + k_4m_3 \\ + k_3l_3 - k_3m_4 + k_2m_{10} + k_1l_{10} - k_1m_{11}) = 0,$$

$$uvu_3 : (-2c_8m_1 - c_5m_3 - c_3m_5 - c_1m_{12} + 2k_9m_1 + 2k_8l_1 - 2k_8m_2 + k_6m_3 \\ + k_5l_3 - k_5m_4 + k_4m_5 + k_3l_5 - k_3m_6 + k_2m_{12} + k_1l_{12} - k_1m_{13}) = 0,$$

$$v^2u_3 : (-c_9m_1 - c_5m_5 - c_1m_{14} + 3k_{10}m_1 + k_9l_1 - k_9m_2 + k_6m_5 \\ + k_5l_5 - k_5m_6 + k_2m_{14} + k_1l_{14} - k_1m_{15}) = 0,$$

$$u_1v_3 : (-c_5m_1 - 3c_4m_1 - 2c_2m_7 - 3k_4m_2 + k_3l_2 + 2k_2m_4 + k_1l_8 + 2k_1l_4) = 0,$$

$$v_1v_3 : (-4c_6m_1 - c_2m_8 - 3k_6m_2 + k_4l_2 + 2k_2m_6 + 2k_1l_9 + 2k_1l_6) = 0,$$

$$u^2v_3 : (-c_8m_1 - c_4m_3 - c_2m_{10} + 3k_7l_2 + k_3l_4 + k_1l_{11}) = 0,$$

$$uvv_3 : (-2c_9m_1 - c_6m_3 - c_4m_5 - c_2m_{12} + 2k_8l_2 + k_5l_4 + k_3l_6 + k_1l_{13}) = 0,$$

$$v^2v_3 : (-3c_{10}m_1 - c_6m_5 - c_2m_{14} + k_9l_2 + k_5l_6 + k_1l_{15}) = 0,$$

$$u_2^2 : (-3c_3m_1 - c_1m_3 - 3k_3m_2 + 2k_2m_7 + k_2m_3 + 2k_1l_7 + k_1l_3 - k_1m_5) = 0,$$

$$u_2v_2 : (-3c_5m_1 - 3c_4m_1 - c_2m_3 - c_1m_4 - 3k_5m_2 - 3k_4m_2 + 2k_2m_8 + k_2m_4 \\ + 2k_1l_8 + k_1l_5 + k_1l_4 - k_1m_6) = 0,$$

$$uu_2u_1 : (-18c_7m_1 - 2c_3m_7 - 4c_3m_3 - 2c_1m_{10} - 18k_7m_2 + k_5m_3 \\ + 2k_4m_7 + k_4m_3 + 2k_3l_7 + 2k_3l_3 - k_3m_8 - k_3m_5 - 3k_3m_4 + 6k_2m_{10} \\ + 6k_1l_{10} - k_1m_{12}) = 0,$$

$$vu_2u_1 : (-6c_8m_1 - 2c_5m_7 - c_5m_3 - 3c_3m_5 - c_1m_{12} - 6k_8m_2 + 2k_6m_7 + k_6m_3 \\ + 2k_5l_7 + k_5l_3 - k_5m_8 + k_3l_5 - 3k_3m_6 + 3k_2m_{12} + 3k_1l_{12} - 2k_1m_{14}) = 0,$$

$$uu_2v_1 : (-6c_8m_1 - 2c_5m_3 - 2c_4m_3 - c_3m_8 - 2c_1m_{11} - 6k_8m_2 + k_6m_3 - 2k_5m_4 \\ + k_4l_3 + k_4m_8 - k_4m_4 + k_3l_8 + k_3l_5 - 2k_3m_9 + 2k_2m_{12} + 2k_2m_{11} + 2k_1l_{12} \\ + 2k_1l_{11} - k_1m_{13}) = 0,$$

$$vu_2v_1 : (-6c_9m_1 - c_6m_3 - c_5m_8 - 2c_5m_5 - c_4m_5 - c_1m_{13} - 6k_9m_2 + k_6m_8 \\ + k_6m_5 + k_5l_8 + k_5l_5 - 2k_5m_9 - 2k_5m_6 + k_4l_5 - k_4m_6 + 4k_2m_{14} + k_2m_{13} \\ + 4k_1l_{14} + k_1l_{13} - 2k_1m_{15}) = 0,$$

$$u_2u^3 : (-4c_7m_3 - c_3m_{10} - 4c_1m_{16} + k_8m_3 + 3k_7l_3 - k_7m_5 - 3k_7m_4 + k_4m_{10} \\ + k_3l_{10} - k_3m_{11} + 4k_2m_{16} + 4k_1l_{16} - k_1m_{17}) = 0,$$

$$u^2vu_2 : (-3c_8m_3 - 3c_7m_5 - c_5m_{10} - c_3m_{12} - 3c_1m_{17} + 2k_9m_3 + 2k_8l_3 - 2k_8m_4 \\ + 3k_7l_5 - 3k_7m_6 + k_6m_{10} + k_5l_{10} - k_5m_{11} + k_4m_{12} + k_3l_{12} - k_3m_{13} + 3k_2m_{17} \\ + 3k_1l_{17} - 2k_1m_{18}) = 0,$$

$$uv^2u_2 : (-2c_9m_3 - 2c_8m_5 - c_5m_{12} - c_3m_{14} - 2c_1m_{18} + 3k_{10}m_3 + k_9l_3 + k_9m_5$$

$$\begin{aligned}
& -k_9m_4 + 2k_8l_5 - 2k_8m_6 + k_6m_{12} + k_5l_{12} - k_5m_{13} + k_4m_{14} + k_3l_{14} - k_3m_{15} \\
& + 2k_2m_{18} + 2k_1l_{18} - 3k_1m_{19}) = 0, \\
v^3u_2 : & (-c_{10}m_3 - c_9m_5 - c_5m_{14} - c_1m_{19} + 2k_{10}m_5 + k_9l_5 - k_9m_6 + k_6m_{14} \\
& + k_5l_{14} - k_5m_{15} + k_2m_{19} + k_1l_{19} - 4k_1m_{20}) = 0, \\
v_2^2 : & (-3c_6m_1 - c_2m_4 - 3k_6m_2 + 2k_2m_9 + 2k_1l_9 + k_1l_6) = 0, \\
uv_2u_1 : & (-6c_8m_1 - c_5m_3 - 2c_4m_7 - 2c_4m_3 - c_3m_4 - 2c_2m_{10} - 6k_8m_2 - k_4m_4 \\
& + k_3l_8 + 2k_3l_4 - k_3m_6 + 4k_2m_{11} + k_1l_{12} + 4k_1l_{11}) = 0, \\
vv_2u_1 : & (-6c_9m_1 - 2c_6m_7 - c_5m_5 - c_5m_4 - 2c_4m_5 - c_2m_{12} - 6k_9m_2 + k_6m_4 \\
& + k_5l_8 + k_5l_4 - k_5m_6 - 2k_4m_6 + k_3l_6 + 2k_2m_{13} + 2k_1l_{14} + 2k_1l_{13}) = 0, \\
uv_2v_1 : & (-6c_9m_1 - 3c_6m_3 - c_4m_8 - c_4m_4 - 2c_2m_{11} - 6k_9m_2 - 2k_6m_4 + k_4l_4 \\
& + 2k_3l_9 + k_3l_6 + 2k_2m_{13} + 3k_1l_{13}) = 0, \\
vv_1v_2 : & (-18c_{10}m_1 - c_6m_8 - 3c_6m_5 - c_6m_4 - c_2m_{13} - 18k_{10}m_2 - 2k_6m_6 \\
& + 2k_5l_9 + k_5l_6 + k_4l_6 + 4k_2m_{15} + 6k_1l_{15}) = 0, \\
u^3v_2 : & (-c_8m_3 - c_7m_4 - c_4m_{10} - 4c_2m_{16} + 3k_7l_4 - k_7m_6 + k_3l_{11} + k_1l_{17}) = 0, \\
u^2vv_2 : & (-2c_9m_3 - c_8m_5 - c_8m_4 - c_6m_{10} - c_4m_{12} - 3c_2m_{17} + 2k_8l_4 - k_8m_6 \\
& + 3k_7l_6 + k_5l_{11} + k_3l_{13} + 2k_1l_{18}) = 0, \\
uv^2v_2 : & (-3c_{10}m_3 - 2c_9m_5 - c_9m_4 - c_6m_{12} - c_4m_{14} - 2c_2m_{18} + k_9l_4 - k_9m_6 \\
& + 2k_8l_6 + k_5l_{13} + k_3l_{15} + 3k_1l_{19}) = 0, \\
v^3v_2 : & (-3c_{10}m_5 - c_{10}m_4 - c_6m_{14} - c_2m_{19} - k_{10}m_6 + k_9l_6 + k_5l_{15} + 4k_1l_{20}) = 0, \\
u_1^3 : & (-6c_7m_1 - 2c_3m_7 - 6k_7m_2 + k_5m_7 + k_3l_7 - k_3m_8 + 2k_2m_{10} + 2k_1l_{10}) = 0, \\
u_1^2v_1 : & (-6c_8m_1 - 2c_5m_7 - 2c_4m_7 - c_3m_8 - 6k_8m_2 + k_6m_7 + k_4l_7 - k_4m_8 \\
& + k_3l_8 - 2k_3m_9 + 2k_2m_{12} + 2k_2m_{11} + 2k_1l_{12} + 2k_1l_{11}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2u_1^2 : & (-6c_7m_7 - 6c_7m_3 - 3c_3m_{10} + k_8m_7 + 3k_7l_7 - 3k_7m_8 - 6k_7m_4 + k_5m_{10} \\
& + 2k_4m_{10} + 3k_3l_{10} - k_3m_{12} - k_3m_{11} + 12k_2m_{16} + 12k_1l_{16}) = 0, \\
uvu_1^2 : & (-4c_8m_7 - 2c_8m_3 - 6c_7m_5 - 2c_5m_{10} - 2c_3m_{12} + 2k_9m_7 + 2k_8l_7 - 2k_8m_8 \\
& - 2k_8m_4 - 6k_7m_6 + 2k_6m_{10} + 2k_5l_{10} + k_4m_{12} + 2k_3l_{12} - 2k_3m_{14} - k_3m_{13} \\
& + 6k_2m_{17} + 6k_1l_{17}) = 0, \\
u_1^2v^2 : & (-2c_9m_7 - 2c_8m_5 - c_5m_{12} - c_3m_{14} + 3k_{10}m_7 + k_9l_7 - k_9m_8 - 2k_8m_6 \\
& + k_6m_{12} + k_5l_{12} - k_5m_{14} + k_3l_{14} - k_3m_{15} + 2k_2m_{18} + 2k_1l_{18}) = 0, \\
u_1v_1^2 : & (-6c_9m_1 - 2c_6m_7 - c_5m_8 - c_4m_8 - 6k_9m_2 - k_5m_9 + k_4l_8 - 2k_4m_9 \\
& + k_3l_9 + 2k_2m_{14} + 2k_2m_{13} + 2k_1l_{14} + 2k_1l_{13}) = 0, \\
u^2u_1v_1 : & (-2c_8m_7 - 4c_8m_3 - 3c_7m_8 - c_5m_{10} - 3c_4m_{10} - 2c_3m_{11} - 4k_8m_4 + 3k_7l_8 \\
& - 6k_7m_9 + k_6m_{10} + k_4l_{10} + k_4m_{11} + k_3l_{12} + 3k_3l_{11} - k_3m_{13} + 6k_2m_{17} + 6k_1l_{17}) = 0, \\
uvu_1v_1 : & (-4c_9m_7 - 4c_9m_3 - 2c_8m_8 - 4c_8m_5 - 2c_6m_{10} - c_5m_{12} - 2c_5m_{11} - 2c_4m_{12} \\
& - c_3m_{13} - 4k_9m_4 + 2k_8l_8 - 4k_8m_9 - 4k_8m_6 + k_6m_{12} + 2k_6m_{11} + k_5l_{12} + 2k_5l_{11} \\
& - k_5m_{13} + k_4l_{12} + 2k_3l_{14} + 2k_3l_{13} - 2k_3m_{15} + 8k_2m_{18} + 8k_1l_{18}) = 0, \\
v^2u_1v_1 : & (-6c_{10}m_7 - c_9m_8 - 4c_9m_5 - c_6m_{12} - c_5m_{14} - c_5m_{13} - c_4m_{14} + k_9l_8 \\
& - 2k_9m_9 - 4k_9m_6 + k_6m_{14} + k_6m_{13} + 2k_5l_{14} + k_5l_{13} - 2k_5m_{15} + k_4l_{14} - k_4m_{15} \\
& + k_3l_{15} + 6k_2m_{19} + 6k_1l_{19}) = 0, \\
u^4u_1 : & (-5c_7m_{10} - 4c_3m_{16} + k_8m_{10} + 3k_7l_{10} - k_7m_{12} - 3k_7m_{11} + k_5m_{16} \\
& + 4k_4m_{16} + 5k_3l_{16} - k_3m_{17}) = 0, \\
u^3vu_1 : & (-4c_8m_{10} - 4c_7m_{12} - 4c_5m_{16} - 3c_3m_{17} + 2k_9m_{10} + 2k_8l_{10} - 2k_8m_{11} \\
& + 3k_7l_{12} - 2k_7m_{14} - 3k_7m_{13} + 4k_6m_{16} + 4k_5l_{16} + 3k_4m_{17} + 4k_3l_{17} - 2k_3m_{18}) = 0, \\
u^2v^2u_1 : & (-3c_9m_{10} - 3c_8m_{12} - 3c_7m_{14} - 3c_5m_{17} - 2c_3m_{18} + 3k_{10}m_{10} + k_9l_{10} \\
& + k_9m_{12} - k_9m_{11} + 2k_8l_{12} - k_8m_{14} - 2k_8m_{13} + 3k_7l_{14} - 3k_7m_{15} + 3k_6m_{17} + 3k_5l_{17} \\
& - k_5m_{18} + 2k_4m_{18} + 3k_3l_{18} - 3k_3m_{19}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
uv^3u_1 : & (-2c_{10}m_{10} - 2c_9m_{12} - 2c_8m_{14} - 2c_5m_{18} - c_3m_{19} + 2k_{10}m_{12} + k_9l_{12} \\
& - k_9m_{13} + 2k_8l_{14} - 2k_8m_{15} + 2k_6m_{18} + 2k_5l_{18} - 2k_5m_{19} + k_4m_{19} \\
& + 2k_3l_{19} - 4k_3m_{20}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^4u_1 : & (-c_{10}m_{12} - c_9m_{14} - c_5m_{19} + k_{10}m_{14} + k_9l_{14} - k_9m_{15} + k_6m_{19} + k_5l_{19} \\
& - 3k_5m_{20} + k_3l_{20}) = 0,
\end{aligned}$$

$$v_1^3 : (-6c_{10}m_1 - c_6m_8 - 6k_{10}m_2 - k_6m_9 + k_4l_9 + 2k_2m_{15} + 2k_1l_{15}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
u^2v_1^2 : & (-2c_9m_3 - c_8m_8 - c_6m_{10} - 2c_4m_{11} - 2k_9m_4 - k_8m_9 + 3k_7l_9 + k_4l_{11} \\
& + k_3l_{13} + 2k_2m_{18} + 2k_1l_{18}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
uvv_1^2 : & (-6c_{10}m_3 - 2c_9m_8 - 2c_9m_5 - c_6m_{12} - 2c_6m_{11} - c_4m_{13} - 6k_{10}m_4 \\
& - 2k_9m_9 - 2k_9m_6 + 2k_8l_9 + k_5l_{13} + k_4l_{13} + 2k_3l_{15} + 6k_2m_{19} + 6k_1l_{19}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^2v_1^2 : & (-3c_{10}m_8 - 6c_{10}m_5 - c_6m_{14} - c_6m_{13} - 3k_{10}m_9 - 6k_{10}m_6 + k_9l_9 \\
& + 2k_5l_{15} + k_4l_{15} + 12k_2m_{20} + 12k_1l_{20}) = 0,
\end{aligned}$$

$$u^4v_1 : (-c_8m_{10} - 2c_7m_{11} - 4c_4m_{16} + 3k_7l_{11} - k_7m_{13} + k_6m_{16} + k_4l_{16} + k_3l_{17}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
u^3vv_1 : & (-2c_9m_{10} - c_8m_{12} - 2c_8m_{11} - c_7m_{13} - 4c_6m_{16} - 3c_4m_{17} + 2k_8l_{11} \\
& - k_8m_{13} + 3k_7l_{13} - 2k_7m_{15} + k_6m_{17} + k_5l_{17} + k_4l_{17} + 2k_3l_{18}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2v^2v_1 : & (-3c_{10}m_{10} - 2c_9m_{12} - 2c_9m_{11} - c_8m_{14} - c_8m_{13} - 3c_6m_{17} - 2c_4m_{18} \\
& + k_9l_{11} - k_9m_{13} + 2k_8l_{13} - 2k_8m_{15} + 3k_7l_{15} + k_6m_{18} + 2k_5l_{18} + k_4l_{18} + 3k_3l_{19}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
uv^3v_1 : & (-3c_{10}m_{12} - 2c_{10}m_{11} - 2c_9m_{14} - c_9m_{13} - 2c_6m_{18} - c_4m_{19} - k_{10}m_{13} \\
& + k_9l_{13} - 2k_9m_{15} + 2k_8l_{15} + k_6m_{19} + 3k_5l_{19} + k_4l_{19} + 4k_3l_{20}) = 0,
\end{aligned}$$

$$v^4v_1 : (-3c_{10}m_{14} - c_{10}m_{13} - c_6m_{19} - 2k_{10}m_{15} + k_9l_{15} + k_6m_{20} + 4k_5l_{20} + k_4l_{20}) = 0,$$

$$u^6 : (-4c_7m_{16} + k_8m_{16} + 3k_7l_{16} - k_7m_{17}) = 0,$$

$$u^5v : (-4c_8m_{16} - 3c_7m_{17} + 2k_9m_{16} + 2k_8l_{16} + 3k_7l_{17} - 2k_7m_{18}) = 0,$$

$$u^4v^2 : (-4c_9m_{16} - 3c_8m_{17} - 2c_7m_{18} + 3k_{10}m_{16} + k_9l_{16} + k_9m_{17} + 2k_8l_{17} \\ - k_8m_{18} + 3k_7l_{18} - 3k_7m_{19}) = 0,$$

$$u^3v^3 : (-4c_{10}m_{16} - 3c_9m_{17} - 2c_8m_{18} - c_7m_{19} + 2k_{10}m_{17} + k_9l_{17} + 2k_8l_{18} \\ - 2k_8m_{19} + 3k_7l_{19} - 4k_7m_{20}) = 0,$$

$$u^2v^4 : (-3c_{10}m_{17} - 2c_9m_{18} - c_8m_{19} + k_{10}m_{18} + k_9l_{18} - k_9m_{19} + 2k_8l_{19} \\ - 3k_8m_{20} + 3k_7l_{20}) = 0,$$

$$uv^5 : (-2c_{10}m_{18} - c_9m_{19} + k_9l_{19} - 2k_9m_{20} + 2k_8l_{20}) = 0,$$

$$v^6 : (-c_{10}m_{19} - k_{10}m_{20} + k_9l_{20}) = 0.$$

Simetri olma koşulunun belirsiz katsayılar c_i, k_i, l_i, m_i için ortaya çıkardığı yukarıdaki cebirsel koşullardaki $(c_1 = 0, c_2 = 1, k_1 = 0, k_2 = 0)$ seçimi J_1 ve $(c_1 = 1, c_2 = 1, k_1 = 0, k_2 = 1)$ seçimi J_2 anakatsayı matrisi seçimlerine karşılık gelmektedir. Bu seçimlerin herbiri sonrasında yukarıdaki cebirsel koşulların tümünün çözümü olarak ortaya çıkan katsayı değerleri ilgili sınıftaki simetri integre edilebilir olmaya aday sistemi ve bu sistemin kabul etmekte olduğu yüksek simetriyi ortaya çıkarmaktadır.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Daryoush TALATI

Doğum Yeri : Kermanshah/IRAN

Doğum Tarihi : 17 Temmuz 1981

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dil : İngilizce/Türkçe

Eğitim Durumu

Lise : Shahid Chamran (Şehit Çemran) Salmas(1995-1999)

Lisans : Shahid Madani Azarbayjan University Fizik böl. (1999-2004)

Yüksek Lisans: Islamic Azad University Of Iran Fizik böl. (2004-2008)

Doktora : Ankara Üniversitesi Fizik Müh. böl. (2009-2013)

Yayınlar

1. Talati, D. and Turhan, R. 2011. On a Recently Introduced Fifth-order bi-Hamiltonian Equation and Trivially Related Hamiltonian Operators. SIGMA 7, 081. 8 pages.