

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

RICKART MODÜLLER TEORİSİNDE GENELLEŞTİRMELER

Burcu ÜNGÖR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2014

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Burcu ÜNGÖR tarafından hazırlanan “**Rickart Modüller Teorisinde Genelleştirmeler**” adlı tez çalışması 31/01/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Ali Bülent EKİN
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Ahmet ARIKAN
Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Murat ŞAHİN
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

31/01/2014

Burcu ÜNGÖR

ÖZET

Doktora Tezi

RICKART MODÜLLER TEORİSİNDE GENELLEŞTİRMELER

Burcu ÜNGÖR

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezin amacını içermektedir. İkinci bölümde çalışma içinde kullanılan modül ve halka sınıflarının tanımları verilmektedir. Üçüncü bölümde Rickart, dual Rickart ve T-Rickart modüllerin, çalışmanın daha sonraki bölümlerinde gerekli olan bazı özellikleri ön bilgi olarak yer almaktadır. Dördüncü bölümde Rickart modüllerin bir genellemesi ve genelleştirilmiş sağ temel projektif halkaların modül teorisine genişlemesi olarak π -Rickart modül kavramı tanımlanmaktadır. π -Rickart modüller kullanılarak genelleştirilmiş sağ temel projektif halkaların bazı özellikleri elde edilmektedir. Ayrıca π -Rickart modül ile endomorfizma halkası arasındaki ilişkiler incelenmektedir. Beşinci bölümde dual Rickart modüllerin bir genellemesi ve π -düzenli halkaların modül teorisine bir genişlemesi olarak dual π -Rickart modül kavramı verilmekte ve dual π -Rickart modül ile endomorfizma halkası arasındaki ilişkiler üzerinde durulmaktadır. Altıncı bölüm bir M modülünün tam değişmez bir alt modülü F olmak üzere M nin F -ters parçalı olma özelliğine ayrılmaktadır. Bu özelliğe sahip modül sınıfının bazı özellikleri ve karakterizasyonları araştırılmaktadır. Ayrıca F yerine M nin ikinci tekil alt modülü alınarak T-Rickart modüller hakkında sonuçlar elde edilmektedir.

Ocak 2014, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler : Rickart modül, dual Rickart modül, π -Rickart modül, dual π -Rickart modül, T-Rickart modül, genelleştirilmiş sağ (sol) temel projektif halka, π -düzenli halka, F -ters parçalı modül

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

GENERALIZATIONS IN THE THEORY OF RICKART MODULES

Burcu ÜNGÖR

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

This thesis consists of six chapters. The first chapter includes the purpose of the thesis. In the second chapter, preparatory information that will be used later is given. The third chapter is related to some known properties of Rickart modules, dual Rickart modules and T-Rickart modules. In the fourth chapter, we introduce π -Rickart modules as a generalization of Rickart modules and an extension of generalized right principally projective rings to the module theoretic setting. We obtain several results about generalized right principally projective rings by using π -Rickart modules. Moreover, we investigate relations between a π -Rickart module and its endomorphism ring. In the fifth chapter, a dual π -Rickart module is defined as a generalization of a dual Rickart module and an extension of π -regular rings to the module theoretic setting. Also some relations between a dual π -Rickart module and its endomorphism ring are given. The sixth chapter is devoted to investigation of various properties and characterizations of an F -inverse split module M where F is a fully invariant submodule of M . Some results about T-Rickart modules are obtained from this concept by replacing fully invariant submodule F by the second singular submodule of M .

January 2014, 75 pages

Key Words : Rickart module, dual Rickart module, π -Rickart module, dual π -Rickart module, T-Rickart module, generalized right (left) principally projective ring, π -regular ring, F -inverse split module

TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimime başladığım ilk günden itibaren bilgi ve tecrübeleriyle bana rehberlik eden, tez çalışmamın ortaya çıkmasında fikirleri ve önerileriyle her zaman yardımcı olan, yönlendiren danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); emek isteyen bu çalışmayı hazırlarken engin bilgilerini ve zamanını benimle paylaşan, bu alanda yetişmemde çok emeği geçen, tezime önemli katkılarda bulunarak yardım eden, kendisini her zaman örnek aldığım, ender bilim adamlarından kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI'ya (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); tez çalışmalarımı titizlikle izleyen, düşünceleriyle yol gösteren değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN'a (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve Sayın Prof. Dr. Ali Bülent EKİN'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); tez çalışmamı 2211 kodlu Yurt İçi Doktora Burs Programı ile destekleyerek maddi olanak sağlayan TÜBİTAK'a; 1 Ekim 2012-30 Haziran 2013 tarihleri arasında Ohio University Center of Ring Theory and its Applications'da misafir araştırmacı olarak bulunmamda Yurt Dışı Doktora Araştırma Bursu ile maddi olarak yanımda olan YÖK'e; tüm süreç boyunca kahırımı çeken, bana cesaret veren, her zaman destek, anlayış ve sevgisini bulduğum sevgili aileme yürekten teşekkür ederim.

Burcu ÜNGÖR

Ankara, Ocak 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1 Bazı Tanım ve Teoremler	5
3. RICKART MODÜLLER TEORİSİ ÜZERİNE	13
3.1 Rickart Modül Tanımı ve Bazı Özellikleri.....	13
3.2 Dual Rickart Modül Tanımı ve Bazı Özellikleri	15
3.3 T-Rickart Modül Tanımı ve Bazı Özellikleri.....	16
4. π -RICKART MODÜLLER.....	17
4.1 π -Rickart Modüllerin Özellikleri.....	17
4.2 π -Rickart Modüllerin Endomorfizma Halkaları.....	27
5. DUAL π -RICKART MODÜLLER	34
5.1 Dual π -Rickart Modüllerin Özellikleri.....	34
5.2 Dual π -Rickart Modüllerin Endomorfizma Halkaları	41
6. F-TERS PARÇALI MODÜLLER.....	49
6.1 F-Ters Parçalı Modüllerin Özellikleri.....	49
6.2 F-Ters Parçalı Modüllerin Direkt Toplamları	58
6.3 Göreceli F-Ters Parçalı Modüller.....	60
6.4 $Z_2(\cdot)$ -Ters Parçalı Modüller.....	65
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ.....	73

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\text{Ker } f$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im } f$	f homomorfizmasının görüntü kümesi
$f^{-1}(F)$	$F \leq M$ nin f homomorfizmasındaki ters görüntü kümesi
$(F : I)$	$F \leq M$ ve $I \subseteq S$ için $\{m \in M : Im \subseteq F\}$ kümesi
$r_M(I)$	$I \subseteq S$ nin M deki sağ sıfırlayıcı
M_R	M sağ R -modül
$E(M)$	M modülünün injektif zarfı
$Z(M)$	M modülünün tekil alt modülü
$Z_2(M)$	M modülünün ikinci tekil alt modülü
$\text{Rad}(M)$	M modülünün radikali
$\text{Soc}(M)$	M modülünün sokulu
M/N	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\text{Hom}_R(M, N)$	$M \rightarrow N$ sağ R -modül homomorfizmalarının kümesi
$S = \text{End}_R(M)$	M modülünün sağ R -modül endomorfizmalarının halkası
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt toplamı
$\prod_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt çarpımı
$N \leq M$	N, M nin alt modülü
$N \ll M$	N, M nin dar alt modülü
$l_S(N)$	$N \leq M$ nin S deki sol sıfırlayıcı
$\mathbb{Z}_n$	n pozitif tamsayısına göre kalan sınıflarının halkası
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
R^n	R halkasının kopyalarının n defa direkt çarpımı
$M_n(R)$	R halkası üzerindeki $n \times n$ tipinde matrislerin halkası
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar cismi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar halkası

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe, halkalar birimli ve modüller sağ modül olarak ele alınmaktadır. R bir halka ve M bir R -modül olmak üzere M nin endomorfizma halkası $\text{End}_R(M)$ kısaca S ile gösterilmektedir. M bir (S, R) -bimodül olmak üzere $l_S(\cdot)$ ve $r_M(\cdot)$ sırasıyla M nin bir alt kümesinin S deki sol sıfırlayanını ve S nin bir alt kümesinin M deki sağ sıfırlayanını ifade etmektedir.

Bir halkanın boştan farklı her alt kümesinin sağ (denk olarak, sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretilirse halkaya *Baer* adı verilir (Kaplansky 1965). Hattori (1960), Baer halkalar üzerine olan Kaplansky'nin (1965) çalışmasının motivasyonu ile temel projektif halkaları tanımlamıştır. Halkanın her temel sol (sağ) ideali projektif ise (denk olarak, her elemanın sol (sağ) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretilirse) halkaya *sol (sağ) temel projektif* veya *sol (sağ) Rickart halka* denir (Hattori 1960). Baer halka kavramı Rizvi ve Roman (2004) tarafından modül teorisine genişletilmiştir. Bir M modülünün her N alt modülü için $l_S(N) = Se$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ varsa M ye *Baer modül* adı verilir (Rizvi ve Roman 2004). M nin Baer olması için gerek ve yeter şart S nin her sol ideali I için $r_M(I) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ bulunmasıdır (Rizvi ve Roman 2004). Baer modül kavramının ardından Rizvi ve Roman (2005) keyfi $f \in S$ için $r_M(f) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ varsa M ye *Rickart modül* adını vermişlerdir. Bu kavram temel projektif halka (yani, Rickart halka) kavramının modül teorisindeki karşılığıdır. Son yıllarda, Rickart modüller Lee vd. (2010, 2012) ve Agayev vd. (2012) tarafından da çalışılmıştır. Rickart modüllerin duali olarak Lee vd. (2011) dual Rickart modülleri tanımlayıp özelliklerini incelemişlerdir. Keyfi $f \in S$ için $\text{Im} f = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ varsa M ye *dual Rickart modül* denir (Lee vd. 2011). Dual Rickart modüller von Neumann düzenli halkaların modül teorisindeki karşılığıdır.

Temel projektif halkaların bir genelleştirmesi olarak Hirano (1983) genelleştirilmiş temel projektif halkaları tanımlamıştır. Bir R halkasının keyfi x elemanı için Rx^n ($x^n R$) projektif olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa (denk olarak, x^n nin sol (sağ) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretilecek şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa) R ye *genelleştirilmiş*

sol (sağ) temel projektif halka denir (Hirano 1983). Genelleştirilmiş temel projektif halkalar Ohori (1984) ve Huh vd. (2002) tarafından da incelenmiştir. Bu yayınların motivasyonu, çalışmanın bir bölümünde Rickart modüllerin bir genellemesi ve genelleştirilmiş temel projektif halkaların modül teorisine genişlemesi olarak π -Rickart modüller tanımlanmaktadır. Rickart modüller için sağlanan bazı özelliklerin π -Rickart modüller için de sağlanıp sağlanmadığı incelenmektedir. Huh vd. (2002) tarafından, R genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ise $e^2 = e \in R$ için eRe halkasının da genelleştirilmiş sağ temel projektif olduğu söylenmektedir. Buradan yola çıkarak “ R genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ise $e^2 = e \in R$ için eR modülü ne tür genelleştirilmiş temel projektiflik özelliği sağlar?” sorusu akla gelmektedir. π -Rickart modül kavramı kullanılarak bu soruya çalışma içerisinde cevap verilmektedir. Diğer yandan, π -Rickart modül ile onun endomorfizma halkası arasındaki ilişkiler araştırılmaktadır. π -Rickart modülün endomorfizma halkasının genelleştirilmiş sağ temel projektif olduğu, fakat karşıtının endomorfizma halkası üzerinde düz olan modüller ile 1-örten-kısıtlanabilir modüller için doğru olduğu görülmektedir.

Diğer bir bölümde dual Rickart modüllerin bir genellemesi ve π -Rickart modüllerin duali olarak, dual π -Rickart modüller tanımlanmaktadır. Bu modül sınıfının, π -düzenli halka sınıfının modül teorisindeki karşılığı olduğu gösterilmektedir. Dual Rickart modüller için sağlanan özelliklerden hangilerinin dual π -Rickart modüller için de sağlandığı araştırılmaktadır. Herhangi bir dual π -Rickart modül ile onun endomorfizma halkası arasındaki ilişkiler üzerinde durulmaktadır. Dual π -Rickart bir modülün endomorfizma halkasının genelleştirilmiş sol temel projektif halka olduğu gösterilmekte, fakat karşıtının öz-eş-üreteç modüller için doğru olduğu görülmektedir. Bu sonuç yardımıyla, π -düzenli halkaların genelleştirilmiş sol temel projektif halka olduğu bilgisi elde edilmektedir. Ayrıca, (dual) π -Rickartlık yardımıyla endomorfizma halkası π -düzenli olan modüller belirlenmektedir. (Dual) π -Rickart modüller için elde edilen bazı sonuçların matris halkalarına uygulamaları üzerinde de durulmaktadır.

Asgari ve Haghany (2011) *t*-Baer modülleri tanımlamışlar ve bu modül sınıfının

özelliklerini incelemişlerdir. Herhangi bir M modülünde, S nin I sol ideali için $t_M(I) = \{m \in M \mid Im \leq Z_2(M)\}$ olsun. S nin her I sol ideali için $t_M(I)$ alt modülü M nin bir direkt toplananı oluyorsa M ye *t-Baer modül* denir (Asgari ve Haghany 2011). Keyfi $f \in S$ için $f^{-1}(Z_2(M)) = t_M(Sf) = t_M(f)$ ve $\bigcap_{f \in S} f^{-1}(Z_2(M)) = Z_2(M)$ dir. Ayrıca $f \in S$ için $r_M(f) \leq f^{-1}(Z_2(M))$ dir. t-Baer modüllerin bir genellemesi olarak Ebrahimi Atani vd. (2012) tarafından T-Rickart modüller tanımlanmıştır. Her $f \in S$ için $t_M(f)$ alt modülü M nin bir direkt toplananı oluyorsa M ye *T-Rickart modül* denir (Ebrahimi Atani vd. 2012).

F , bir M modülünün alt modülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $fF \subseteq F$ oluyorsa F ye *tam değişmez (fully invariant)* denir. Örneğin $Z(M)$, $Z_2(M)$, $\text{Soc}(M)$, $\text{Rad}(M)$ ve R nin her bir sağ ideali I için MI alt modülleri M nin tam değişmez alt modülleridir. Rickart modüller ve T-Rickart modüller üzerine yapılan çalışmaların motivasyonu, son bölümde, herhangi bir modülün tam değişmez alt modülleri yardımıyla, hangi şartlar altında bir Rickart modül elde edilebildiği üzerinde durulmaktadır. Bunun için, F alt modülü M de tam değişmez olmak üzere, M nin *F-ters parçalı* olması tanımlanmaktadır. Bu bölüm boyunca F , göz önüne alınan modülün tam değişmez bir alt modülüdür. M nin, F -ters parçalı olmasının önemli ve çok kullanılan bir karakterizasyonu elde edilmektedir. Bu sonuç yardımıyla, F -ters parçalı herhangi bir M modülü için M/F Rickart modüldür. Hattori (1960), bir modülü burulmalı ve burulmasız parçalarına ayırmanın mümkün olup olmadığı problemi üzerinde durmuştur. Bir M modülünün F -ters parçalı olma kavramı yardımıyla, M modülü, bir parçası Rickart ve diğer parçası F tarafından belirlenen burulmalı kısım olacak şekilde parçalara ayrılmaktadır. Herhangi bir M modülünün F -ters parçalı olması T-Rickart modül kavramından daha geneldir. $Z_2(M)$ alt modülü göz önüne alındığında, M nin $Z_2(M)$ -ters parçalı olması ile T-Rickart olması denktir. Dolayısıyla bu çalışma ile T-Rickart modüller hakkında bilinen çalışmalara katkı yapılmaktadır. M nin T-Rickart olmasıyla, $Z_2(M)$ alt modülü sayesinde, bir Rickart modül elde edilebilir. F -ters parçalı modül kavramını çalışmak için motivasyonlardan biri “eğer M nin $Z_2(M)$ alt modülü bir Rickart modül bulunmasına yol açıyorsa, M nin başka hangi alt modülleri sayesinde de bir Rickart modül elde

edilebilir?” sorusudur. Bir halka kendi üzerinde modül olarak göz önüne alındığında, tam değişmez alt modülleri idealleridir. Ters görüntüleri, halkanın direkt toplananı olan idealleri yardımıyla da halkanın bazı özellikleri belirlenmektedir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde halkalar ve modüller ile ilgili, çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı tanımlar verilmektedir.

2.1 Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1 Bir R halkasının tüm maksimal sağ ideallerinin (denk olarak, sol ideallerinin) kesişimine *Jacobson radikali* denir ve $J(R)$ ile gösterilir (Lam 1999).

Tanım 2.1.2 Tek maksimal sağ (denk olarak, sol) ideali olan halkaya *yerel (local) halka* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.3 Bir halkanın sıfırdan başka üstel sıfır (nilpotent) elemanı yoksa halkaya *indirgenmiş (reduced)* denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.4 M bir modül olsun. Eğer $f \in S$ ve $m \in M$ için $fm = 0$ olması $fM \cap Sm = 0$ olmasını gerektirirse M ye *indirgenmiş (reduced)* denir (Agayev vd. 2012).

Tanım 2.1.5 M bir modül, $N \subseteq M$ ve $I \subseteq S$ olmak üzere $r_M(I) = \{m \in M : Im = 0\}$ kümesine I nin M deki sağ sıfırlayanı, $l_S(N) = \{f \in S : fN = 0\}$ kümesine N nin S deki sol sıfırlayanı adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.6 M bir modül ve $0 \neq N \leq M$ olsun. Eğer her $0 \neq L \leq M$ için $N \cap L \neq 0$ ise N ye M nin *esas (essential veya large) alt modülü* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.7 Her alt modülü bir direkt toplamında esas alt modül olan modüle *genişleyen (extending)* denir (Dung vd. 1994).

Önerme 2.1.8 Bir M modülünün genişleyen olması için gerek ve yeter şart $M = Z_2(M) \oplus M'$ olacak biçimde $M' \leq M$ olup $Z_2(M)$ ile M' genişleyen ve $Z_2(M)$ nin M' -injektif olmasıdır (Dung vd. 1994).

Tanım 2.1.9 M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $K \leq M$ için $N + K = M$ olması $K = M$ olmasını gerektiriyorsa N ye M nin *dar* (*small* veya *superfluous*) *alt modülü* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.10 Her bir $f : K \rightarrow M$ modül monomorfizması ve her bir $\gamma : K \rightarrow U$ modül homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak biçimde $\bar{\gamma} : M \rightarrow U$ modül homomorfizması varsa U ya M -*injektif modül* denir. Eğer U modülü U -injektif ise U ya *yarı injektif* (*quasi-injective*), her M modülü için M -injektif ise U ya *injektif* (*injective*) *modül* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

$$\begin{array}{ccccc} & & & U & \\ & & \nearrow \gamma & \vdots \bar{\gamma} & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Tanım 2.1.11 M bir modül ve R nin sağ ideallerinin bir topluluğu $\mathcal{A}$ olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ için her $f : A \rightarrow M$ homomorfizması R ye genişlerse M ye $\mathcal{A}$ -*injektif* denir (Smith 1981).

Tanım 2.1.12 Eğer E injektif modül ve $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} E$ esas monomorfizma ise (E, i) ikilisine M nin *injektif zarfı* (*injective hull*) denir ve $E(M)$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.13 Her bir $f : M \rightarrow K$ modül epimorfizması ve her bir $\gamma : U \rightarrow K$ modül homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak biçimde $\bar{\gamma} : U \rightarrow M$ modül homomorfizması varsa U ya M -*projektif modül* denir. Eğer U modülü U -projektif ise U ya *yarı projektif* (*quasi-projective*), her M modülü için M -projektif ise U ya *projektif* (*projective*) *modül* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nwarrow \bar{\gamma} & \downarrow \gamma & & \\ M & \xrightarrow{f} & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tanım 2.1.14 Bir M modülünün $Z(M) = \{m \in M \mid r_R(m) \text{ sağ ideali } R_R \text{ de esas}\}$ alt modülüne *tekil* (*singular*) *alt modül* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye *tekil* (*singular*) *modül*, $Z(M) = 0$ ise M ye *tekil olmayan* (*nonsingular*) *modül* adı verilir (Lam 1999).

Tanım 2.1.15 Eğer R halkası kendisi üzerinde sağ modül olarak alınırsa $Z(R_R)$ alt modülüne R nin *sağ tekil ideali* (*right singular ideal*) denir. Benzer şekilde kendisi üzerinde sol modül olarak alınırsa $Z({}_R R)$ alt modülü R nin *sol tekil ideali* (*left singular ideal*) olarak adlandırılır (Lam 1999).

Lemma 2.1.16 Bir R halkasının $Z(R_R)$ sağ tekil ideali bir idealidir (Lam 1999).

Tanım 2.1.17 Bir M modülünün $Z_2(M)$ *ikinci tekil* (*Goldie torsion*) alt modülü $Z(M/Z(M)) = Z_2(M)/Z(M)$ olarak tanımlanır (Lam 1999).

Teorem 2.1.18 R sağ tekil olmayan bir halka olmak üzere bir M modülü için $Z(M/Z(M)) = 0$ dır (Lam 1999).

Tanım 2.1.19 R bir halka ve $e \in R$ eşkare eleman (idempotent) olsun. Eğer her $x \in R$ için $xe = exe$ oluyorsa e ye *sol yarı merkezi* (*left semicentral*) eşkare eleman denir (Birkenmeier 1983).

Tanım 2.1.20 Bir R halkasının her eşkare elemanı merkezde ise R ye *abel* (*abelian*) *halka* denir (Agayev vd. 2010). Bir M modülünde herhangi $f \in S$, $e^2 = e \in S$ ve $m \in M$ için $fem = efm$ oluyorsa M ye *abel* (*abelian*) *modül* denir (Roos 1967).

Bir M modülünün abel olması için gerek ve yeter şart S nin abel halka olmasıdır.

Tanım 2.1.21 Eğer bir M modülünün N alt modülü için $Hom_R(M, M)N \subseteq N$ oluyorsa, yani M nin her f endomorfizması için $fN \subseteq N$ ise N ye M de *tam değişmez* (*fully invariant*) denir. M nin her alt modülü tam değişmezse M ye *duo* denir (Özcan vd. 2006).

Tanım 2.1.22 Eğer bir M modülünün herhangi iki (keyfi) direkt toplananının kesişimi M nin bir direkt toplananı oluyorsa M ye *SIP* (*SSIP*) *ye sahiptir* denir (Alkan ve Harmancı 2002).

Tanım 2.1.23 R bir halka olsun.

- Her bir $a \in R$ için $a = aba$ olacak biçimde $b \in R$ varsa R ye *von Neumann düzenli* (*von Neumann regular*) *halka* denir (Lam 2001).

- Her bir $a \in R$ için $a^n = a^n b a^n$ olacak biçimde $b \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa R ye π -düzenli (π -regular) halka denir (Lam 2001).
- Her bir $a \in R$ için $a^n = a^{n+1} x$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \in R$, ya da denk olarak, $a^n = y a^{n+1}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $y \in R$ varsa R ye güçlü π -düzenli (*strongly* π -regular) halka adı verilir (Lam 2001).

Önerme 2.1.24 R bir değişmeli halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R nin her asal ideali maksimaldir.
- (2) Her $a \in R$ için $a^n \in a^n R a^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

(Lam 2001).

Tanım 2.1.25 M bir modül olsun. Eğer her bir $m \in M$ için $m = m\phi(m)$ olacak biçimde $M \xrightarrow{\phi} R$ homomorfizması varsa M ye (Zelmanowitz anlamında) *düzenli* (regular) modül denir (Zelmanowitz 1972).

Tanım 2.1.26 Bir modülde, eğer bir direkt toplanana izomorf olan her alt modül de direkt toplanan oluyorsa modüle C_2 şartını sağlar denir. Eğer bir R halkası sağ R -modül olarak C_2 şartını sağlarsa R ye sağ C_2 halka adı verilir (Dung vd. 1994).

Tanım 2.1.27 M bir modül olsun. Eğer M/N bölüm modülü M nin bir direkt toplananına izomorf olacak biçimdeki her N alt modülü de direkt toplanan oluyorsa M ye D_2 şartını sağlar denir (Mohamed ve Müller 1990).

Tanım 2.1.28 M ve N iki R -modül olsun. Eğer N nin, M nin bir direkt toplananına izomorf olacak şekildeki her K alt modülü bir direkt toplananı oluyorsa M ye N - C_2 modül denir (Lee vd. 2012).

Bir M modülünün C_2 şartını sağlaması için gerek ve yeter şart M nin M - C_2 modül olmasıdır.

Önerme 2.1.29 M ve N iki R -modül olsun. M nin N - C_2 olması için gerek ve yeter şart M nin ve N nin sırasıyla her K ve L direkt toplananları için K nin L - C_2 olmasıdır (Lee vd. 2012).

Tanım 2.1.30 M bir modül olsun.

- Eğer M nin alt modüllerinin her artan dizisi duruyorsa M ye *Noetherian* denir.
- Eğer M nin alt modüllerinin her azalan dizisi duruyorsa M ye *Artinian* denir.

(Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.1.31 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) R sağ direkt toplananları üzerinde artan zincir şartını sağlar.
- (2) R sol direkt toplananları üzerinde azalan zincir şartını sağlar.
- (3) R de sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz kümesi yoktur.

(Lam 1999).

Tanım 2.1.32 M bir modül olsun.

- M nin her epimorfizması otomorfizma ise M ye *Hopfian modül* denir.
- Her $f \in S$ için $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker } f^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Ker } f^n \subseteq \dots$ artan dizisi duruyorsa M ye *güçlü Hopfian (strongly Hopfian) modül* denir.
- M nin her monomorfizması otomorfizma ise M ye *eş-Hopfian (co-Hopfian) modül* denir.
- Her $f \in S$ için $\text{Im } f \supseteq \text{Im } f^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im } f^n \supseteq \dots$ azalan dizisi duruyorsa M ye *güçlü eş-Hopfian (strongly co-Hopfian) modül* denir.

(Hmaimou vd. 2007).

Teorem 2.1.33 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ halkası π -düzenlidir.
- (2) Sonlu üretilmiş (finitely generated) her R -modül eş-Hopfian'dır.

(Armendariz vd. 1978).

Önerme 2.1.34 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M güçlü Hopfiandır.
- (2) Her $f \in S$ için $\text{Ker} f^n = \text{Ker} f^{n+1}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
- (3) Her $f \in S$ için $\text{Im} f^n \cap \text{Ker} f^n = 0$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

(Hmaimou vd. 2007).

Önerme 2.1.35 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M güçlü eş-Hopfiandır.
- (2) Her $f \in S$ için $\text{Im} f^n = \text{Im} f^{n+1}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
- (3) Her $f \in S$ için $\text{Im} f^n + \text{Ker} f^n = M$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

(Hmaimou vd. 2007).

Tanım 2.1.36 M bir modül olsun. Eğer her bir $f \in S$ için $M = \text{Ker} f^n \oplus \text{Im} f^n$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı mevcutsa M ye *Fitting modül* denir (Hmaimou vd. 2007).

Önerme 2.1.37 R bir halka ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R^n güçlü eş-Hopfian R -modüldür.
- (2) R^n Fitting modüldür.
- (3) $M_n(R)$ güçlü π -düzenli halkadır.

(Hmaimou vd. 2007).

Tanım 2.1.38 M bir modül ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer M nin her n -üretilmiş alt modülü, M nin bir homomorf görüntüsü ise M ye *n -örten-kısıtlanabilir (n -epiretractable) modül* adı verilir (Ghorbani ve Vedadi 2009).

Tanım 2.1.39 M bir modül olsun. Eğer $f \in S$ için $M/fM \cong \text{Ker} f$ ise f ye *yapılı (morphic)* denir ve eğer M nin her homomorfizması yapılı ise M ye *yapılı (morphic) modül* adı verilir (Nicholson ve Sanchez Campos 2005).

Tanım 2.1.40 R bir halka olsun.

- Eğer $a \in R$ için $R/Ra \cong l_R(a)$ ise a ya *sol yapılı*, R nin her elemanı sol yapılı ise R ye *sol yapılı* denir (Nicholson ve Sanchez Campos 2004).
- Eğer $a \in R$ için a^n sol yapılı olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa a ya *sol π -yapılı*, R nin her elemanı sol π -yapılı ise R ye *sol π -yapılı* denir (Huang ve Chen 2007).

Önerme 2.1.41 Bir yapılı endomorfizmanın monomorfizma olması için gerek ve yeter şart epimorfizma olmasıdır (Nicholson ve Sanchez Campos 2005).

Önerme 2.1.42 R bir yerel halka ve $J(R)$ nil olsun. Bu durumda R sol ve sağ π -yapılıdır (Huang ve Chen 2007).

Önerme 2.1.43 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M sol S -modül olarak düz (flat) modüldür.
- (2) $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $f : M^n \rightarrow M^k$ homomorfizması için $\text{Ker } f$ alt modülü M -üretilmiştir.
- (3) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $f : M^n \rightarrow M$ homomorfizması için $\text{Ker } f$ alt modülü M -üretilmiştir.

(Wisbauer 1991).

Teorem 2.1.44 M yarı ayrık (quasi discrete) bir modül olsun. M nin ayrık (discrete) olması için gerek ve yeter şart $\nabla = \{f \in S \mid \text{Im } f \ll M\}$ olmak üzere $J(S) = \nabla$ ve S/∇ halkasının düzenli olmasıdır (Mohamed ve Müller 1990).

Tanım 2.1.45 R bir halka ve bir ideali I olsun. Eğer $a^2 - a \in I$ olduğunda $e - a \in I$ olacak biçimde $e^2 = e \in aR$ (denk olarak $e^2 = e \in Ra$) varsa *eşkare elemanlar I ya göre güçlü yükselir* (idempotents lift strongly modulo I) denir (Nicholson ve Zhou 2005).

Tanım 2.1.46 Eğer $R/Z_2(R_R)$ yarı basit (semisimple) ve eşkare elemanlar $Z_2(R_R)$ ye göre güçlü yükselir ise R halkasına $Z_2(R_R)$ -*yarı mükemmel* ($Z_2(R_R)$ -semiperfect) adı verilir (Nicholson ve Zhou 2005).

Önerme 2.1.47 Her R yarı Frobenius (QF) halka $Z_2(R_R)$ -yarı mükemmeldir (Yousif ve Zhou 2002).

Teorem 2.1.48 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) R halkası $Z_2(R_R)$ -yarı mükemmeldir.
- (2) $R = Z_2(R_R) \oplus U$ olacak biçimde U yarı basit (sağ) ideali vardır.
- (3) $R/Z_2(R_R)$ halkası yarı basittir.
- (4) Her M modülü $M = Z(M) \oplus X$ olacak biçimde X yarı basit modülü vardır.
- (5) Her M modülü için $M/Z_2(M)$ yarı basittir.
- (6) Tekil olmayan her modül injektiftir.

(Nicholson ve Zhou 2005).

3. RICKART MODÜLLER TEORİSİ ÜZERİNE

Bu bölümde Rickart modül, dual Rickart modül ve T-Rickart modül kavramlarının tanımları ve ileriki bölümlerde kullanılan bazı özellikleri verilmektedir.

3.1 Rickart Modül Tanımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.1.1 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$ için $r_M(f) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ varsa M ye *Rickart modül* denir (Rizvi ve Roman 2005).

Tanım 3.1.2 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$ için $\text{Ker } f$ alt modülü M nin tam değişmez bir direkt toplananı ise M ye *güçlü Rickart (strongly Rickart)* adı verilir (Ebrahimi Atani vd. 2012).

Önerme 3.1.3 Bir M modülünün güçlü Rickart olması için gerek ve yeter şart Rickart ve abel modül olmasıdır (Ebrahimi Atani vd. 2012).

Örnek 3.1.4 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ halkası ve $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ eşkare elemanı göz önüne alınsın. R sağ R -modülü M ile gösterilsin. $\text{End}_R(eR) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup her $0 \neq u \in \mathbb{Z}$ için $\text{Ker} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ dır. Dolayısıyla eR Rickart R -modüldür. Diğer taraftan $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S \cong R$ için $r_M \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbb{Z}$ olup M nin bir direkt toplananı değildir. Bu sebeple M modülü Rickart değildir (Lee vd. 2010).

Örnek 3.1.5 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ göz önüne alınsın. $(m, \bar{n}) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ olmak üzere $f(m, \bar{n}) = (0, \bar{m})$ ile tanımlı $f \in S$ için $\text{Ker } f = 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ dir. $\text{Ker } f$ alt modülü $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ nin direkt toplananı olmadığından $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ Rickart değildir (Lee vd. 2010).

Teorem 3.1.6 Rickart modüllerin her direkt toplananı da Rickarttır (Lee vd. 2010).

Teorem 3.1.7 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M Rickarttır ve C_2 şartını sağlar.

(2) S düzenli bir halkadır.

(3) Her $f \in S$ için $\text{Ker} f$ ve $\text{Im} f$ alt modülleri M nin direkt toplananlarıdır.

(Ware 1971, Lee vd. 2010).

Tanım 3.1.8 Bir M modülünün her N alt modülü için $l_S(N) = Se$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ varsa M ye *Baer modül* adı verilir (Rizvi ve Roman 2004).

Teorem 3.1.9 M bir modül ve S halkası sıfırdan farklı dik (orthogonal) eşkare elemanların sonsuz kümesine sahip olmasın. Bu durumda M nin Rickart olması için gerek ve yeter şart M nin Baer olmasıdır (Lee vd. 2010).

Tanım 3.1.10 M ve N iki R -modül olsun. Eğer her $f : M \rightarrow N$ homomorfizması için $\text{Ker} f$ alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye *N -Rickart modül* denir (Rizvi ve Roman 2009).

Teorem 3.1.11 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i modülü M_j - C_2 olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün Rickart olması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j -Rickart olmasıdır (Lee vd. 2012).

Tanım 3.1.12 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$ için $r_M(f)$ nin M de esas olması $f = 0$ olmasını gerektirirse M ye *$\mathcal{K}$ -tekil olmayan ($\mathcal{K}$ -nonsingular) modül* denir (Rizvi ve Roman 2004).

Önerme 3.1.13 Her Rickart modül $\mathcal{K}$ -tekil olmayandır (Lee vd. 2010).

Tanım 3.1.14 R bir halka olsun.

- Eğer R nin her temel sol (sağ) ideali projektif ise (denk olarak, her elemanın sol (sağ) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretilirse) R ye *sol (sağ) temel projektif (left (right) principally projective)* veya *sol (sağ) Rickart* denir (Hattori 1960).

- Eğer R nin keyfi x elemanı için Rx^n ($x^n R$) projektif olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa (denk olarak, x^n nin sol (sağ) sıfırlayan bir eşkare eleman tarafından üretilecek şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa) R ye *genelleştirilmiş sol (sağ) temel projektif* (*generalized left (right) principally projective*) denir (Hirano 1983).

Önerme 3.1.15 Genelleştirilmiş sağ temel projektif abel halkalar direkt toplama göre kapalıdır (Huh vd. 2002).

Önerme 3.1.16 Bir R halkası ve $e^2 = e \in R$ için aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Eğer R temel projektif halka ise eRe de temel projektiftir.
- (2) Eğer R genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ise eRe de genelleştirilmiş sağ temel projektiftir.

(Huh vd. 2002).

Önerme 3.1.17 Eğer R genelleştirilmiş sağ temel projektif bir halka ise R nin sağ tekil ideali $Z(R_R)$ nilidir (Ohori 1984).

3.2 Dual Rickart Modül Tanımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.2.1 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$ için $\text{Im } f = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ varsa M ye *dual Rickart modül* denir (Lee vd. 2011).

Örnek 3.2.2 p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_p$ dual Rickarttır.

Önerme 3.2.3 Bir R halkasının von Neumann düzenli olması için gerek ve yeter şart R nin R -modül olarak dual Rickart olmasıdır (Lee vd. 2011).

Teorem 3.2.4 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M dual Rickarttır ve D_2 şartını sağlar.
- (2) M modülü C_2 ile D_2 şartlarını sağlar ve her $f \in S$ için $\text{Im } f$ alt modülü M nin bir direkt toplananına izomorftur.
- (3) S düzenli bir halkadır.

(Lee vd. 2011).

3.3 T-Rickart Modül Tanımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.3.1 M bir modül ve M nin bir alt modülü N olsun. Eğer M nin her K alt modülü için $N \cap K \leq Z_2(M)$ olması $K \leq Z_2(M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye M nin t -esas (t -essential) alt modülü denir (Asgari ve Haghany 2011). Eğer N nin M de kendisinden başka t -esas genişlemesi yoksa N ye M nin t -kapalı (t -closed) alt modülü adı verilir (Asgari ve Haghany 2011).

Tanım 3.3.2 Eğer bir M modülünün her t -kapalı alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye t -genişleyen (t -extending) denir (Asgari ve Haghany 2011).

Tanım 3.3.3 R bir halka olsun. Eğer her serbest (free) R -modül t -genişleyen ise R ye sağ Σ - t -genişleyen halka adı verilir (Asgari ve Haghany 2011).

Tanım 3.3.4 M bir modül olsun.

- Eğer S nin her sol ideali I için $t_M(I) = \{m \in M | Im \leq Z_2(M)\}$ alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye t -Baer denir (Asgari ve Haghany 2011).
- Eğer her $f \in S$ için $t_M(f) = \{m \in M | fm \in Z_2(M)\}$ alt modülü M nin bir direkt toplananı ise M ye T -Rickart denir (Ebrahimi Atani vd. 2012).

Örnek 3.3.5 Örnek 3.1.4 te göz önüne alınan eR modülü T-Rickarttır, fakat M modülü T-Rickart değildir (Ebrahimi Atani vd. 2012).

Bu kavramlar arasındaki ilgi: genişleyen $\Rightarrow$ t -genişleyen $\Rightarrow$ t -Baer $\Rightarrow$ T-Rickart.

Teorem 3.3.6 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) R sağ Σ - t -genişleyendir.
- (2) Tekil olmayan her R -modül projektiftir.
- (3) Her R -modül t -Baerdir.
- (4) Her R -modül T-Rickarttır.

(Asgari ve Haghany 2011, Ebrahimi Atani vd. 2012).

4. π -RICKART MODÜLLER

Bu bölümde π -Rickart modül kavramı tanımlanıp özellikleri ve endomorfizma halkası ile ilişkisi incelenmektedir. π -Rickart modül kavramının Rickart modül kavramını gerektirmediğini gösteren bir örnek verilmektedir. π -Rickart bir modülün her direkt toplananı da π -Rickart olmasına rağmen π -Rickart modüllerin direkt toplamalarının π -Rickart olmadığı örnekle görülmektedir. Fakat bazı abel π -Rickart modüllerin direkt toplamalarının da π -Rickart olduğu sonucu elde edilmektedir.

4.1 π -Rickart Modüllerin Özellikleri

Tanım 4.1.1 M bir modül olsun. Eğer her bir $f \in S$ için $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa M ye π -Rickart modül denir.

Önerme 4.1.2 R halkasının sağ R -modül olarak π -Rickart olması için gerek ve yeter şart R nin genelleştirilmiş sağ temel projektif halka olmasıdır.

Her yarı basit, her tekil olmayan injektif ve her Baer modül π -Rickarttır. Ayrıca her yarı projektif güçlü eş-Hopfian modül, her yarı injektif güçlü Hopfian modül, her Artinian Noetherian modül π -Rickarttır (Sonuç 4.1.32). Sağ Artinian halka üzerindeki her sonlu üretilmiş modül π -Rickarttır (Teorem 4.1.34), endomorfizma halkası genelleştirilmiş sağ temel projektif olan her serbest modül π -Rickarttır (Sonuç 4.2.5), her sonlu üretilmiş projektif düzenli modül π -Rickarttır (Sonuç 4.2.7) ve değişmeli π -düzenli bir halka üzerindeki her sonlu üretilmiş projektif modül π -Rickarttır (Önerme 4.2.13).

Rickart modüller π -Rickart olmasına rağmen, π -Rickart modüller Rickart olmaya-bilir.

Örnek 4.1.3 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ sağ $\mathbb{Z}$ -modülü M ile gösterilsin. M nin endomorfizma halkası $S = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ dir. Herhangi bir $f = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \bar{b} & \bar{c} \end{bmatrix} \in S$ için aşağıdaki durumlar vardır.

Durum 1. $a = 0$, $\bar{b} = \bar{0}$, $\bar{c} = \bar{1}$ ya da $a = 0$, $\bar{b} = \bar{c} = \bar{1}$ ise f eşkare elemandır. Dolayısıyla $r_M(f) = (1 - f)M$ dir.

Durum 2. $a \neq 0$, $\bar{b} = \bar{0}$, $\bar{c} = \bar{1}$ ya da $a \neq 0$, $\bar{b} = \bar{c} = \bar{1}$ ise $r_M(f) = 0$ dir.

Durum 3. $a \neq 0$, $\bar{b} = \bar{c} = \bar{0}$ ya da $a \neq 0$, $\bar{b} = \bar{1}$, $\bar{c} = \bar{0}$ ise $r_M(f) = 0 \oplus \mathbb{Z}_2$ dir.

Durum 4. $a = 0$, $\bar{b} = \bar{1}$, $\bar{c} = \bar{0}$ ise $f^2 = 0$ olup $r_M(f^2) = M$ dir.

Böylece M bir π -Rickart modüldür, fakat Örnek 3.1.5 gereğince M Rickart değildir.

Önerme 4.1.4 M bir Rickart modül ise π -Rickarttır. Eğer S indirgenmiş halka ise karşıtı da doğrudur.

İspat: M bir Rickart modül ise π -Rickart olduğu açıktır. M bir π -Rickart modül, S indirgenmiş halka ve $f \in S$ olsun. Bu durumda $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır. $n = 1$ ise ispat biter. $n > 1$ olsun. S indirgenmiş halka olduğundan, e merkezi olup $(fe)^n = 0$ elde edilir. Böylece $fe = 0$ olup $eM \leq r_M(f)$ dir. Diğer taraftan her zaman $r_M(f) \leq r_M(f^n) = eM$ sağlanır. Dolayısıyla M bir Rickart modüldür. $\square$

Agayev vd. (2012) tarafından indirgenmiş modüllerin endomorfizma halkalarının indirgenmiş olduğu gösterilmiştir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.5 Eğer M bir indirgenmiş modül ise M nin Rickart olması için gerek ve yeter şart π -Rickart olmasıdır.

Ayrıca Rickart halkalar için Huh vd. (2002) nin çalışmasından bilinen aşağıdaki sonuç Önerme 4.1.4 ten elde edilebilir.

Sonuç 4.1.6 R bir indirgenmiş halka olsun. R nin sağ Rickart halka olması için gerek ve yeter şart genelleştirilmiş sağ temel projektif halka olmasıdır.

Lemma 4.1.7 Eğer M bir π -Rickart modül ise S de her nil olmayan sol sıfırlayan sıfırdan farklı bir eşkare eleman içerir.

İspat: $\emptyset \neq N \subseteq M$ olmak üzere $I = l_S(N)$ nil olmayan sol sıfırlayan olsun ve üstel sıfır olmayan $f \in I$ alınsın. M modülü π -Rickart olduğundan $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve $e \neq 1$ dir. $r_M(I) \subseteq r_M(f^n)$ olması sebebiyle $(1 - e)r_M(I) = 0$ dir. Böylece $1 - e \in l_S(r_M(I)) = l_S(r_M(l_S(N))) = l_S(N) = I$ olup ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 4.1.7 kullanılarak π -Rickart modüller, Rickart modüller ve Baer modüller arasında bir ilişki aşağıdaki gibi kurulabilir.

Teorem 4.1.8 M bir modül olsun. Eğer S de sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz kümesi yoksa ve $J(S) = 0$ ise aşağıdakiler denktir.

- (1) M bir π -Rickart modüldür.
- (2) M bir Rickart modüldür.
- (3) M bir Baer modüldür.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) gerektirmesini ispatlamak yeterli olur. $\emptyset \neq N \subseteq M$ olmak üzere $I = l_S(N)$ sol sıfırlayıcı göz önüne alınsın. I nil ise $I \subseteq J(S)$ olup $I = 0$ elde edilir. Bu nedenle I nin nil olmadığı durumu incelemek gerekir. Önerme 2.1.31 gereğince S sol direkt toplananlar üzerinde azalan zincir şartını sağlar. Dolayısıyla I daki bütün sıfırdan farklı eşkare elemanlar arasından $S(1-e) = l_S(eM)$ minimal olacak biçimde $e \in I$ seçilebilir. Şimdi $I \cap l_S(eM) = 0$ olduğu gösterilsin. $I \cap l_S(eM) = l_S(N \cup eM)$ dir. Eğer $I \cap l_S(eM)$ nil ise ispatlanması gereken birşey yoktur. Böylece $I \cap l_S(eM)$ nin nil olmadığı durumun incelenmesi gerekir. Eğer $I \cap l_S(eM) \neq 0$ ise Lemma 4.1.7 gereğince $0 \neq f = f^2 \in I \cap l_S(eM)$ vardır. $fe = 0$ ve $e + (1-e)f \in I$ bir eşkare elemandır. $g = e + (1-e)f$ olsun. Bu durumda $ge = e$ ve $g \neq 0$ dir. Ayrıca $fg = f$ dir. Buradan $l_S(gM) \subsetneq l_S(eM)$ elde edilip bu e nin seçimi ile çelişir. Bu sebeple $I \cap l_S(eM) = 0$ dir. Herhangi bir $\varphi \in I$ için $\varphi(1-e) \in I \cap l_S(eM)$ olduğundan $\varphi = \varphi e$ dir. Dolayısıyla $I \subseteq Se$ dir ve açık olarak $Se = I = l_S(N)$ dir. Dolayısıyla M bir Baer modüldür. $\square$

Sonuç 4.1.9 R bir halka olsun. Eğer R de sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz kümesi yoksa ve $J(R) = 0$ ise aşağıdakiler denktir.

- (1) R bir genelleştirilmiş sağ temel projektif halkadır.
- (2) R bir sağ Rickart halkadır.
- (3) R bir Baer halkadır.

Sonuç 4.1.10 M bir modül olsun. Eğer S bir yarı basit halka ise aşağıdakiler denktir.

- (1) M bir π -Rickart modüldür.
- (2) M bir Rickart modüldür.
- (3) M bir Baer modüldür.

İspat: S yarı basit olduğundan $J(S) = 0$ dır ve S sol Artinian halkadır. Dolayısıyla Önerme 2.1.31 gereğince S de sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz kümesi yoktur. Böylece Teorem 4.1.8 ispatı bitirir. $\square$

Sonuç 4.1.11 Eğer M bir Noetherian (Artinian) modül ve $J(S) = 0$ ise aşağıdakiler denktir.

- (1) M bir π -Rickart modüldür.
- (2) M bir Rickart modüldür.
- (3) M bir Baer modüldür.

İspat: Eğer M Noetherian ya da Artinian modül ise S de sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz kümesi yoktur. Bu nedenle Teorem 4.1.8 gereğince istenilen elde edilir. $\square$

Bir π -Rickart modülü içeren herhangi bir modül π -Rickart olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1.12 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ halkası ve $M = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ sağ R -modülü göz önüne alınsın. Keyfi $\begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix} \in M$ için $f \begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3r & 2y + 3s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlı $f \in S$ homomorfizmasının çekirdeği $r_M(f) = \left\{ \begin{bmatrix} 3k & 3z \\ -2k & -2z \end{bmatrix} : k, z \in \mathbb{Z} \right\}$ dir. $r_M(f)$ alt modülü M nin bir direkt toplananı değildir ve herhangi bir $n \geq 2$ tamsayısı için $r_M(f) = r_M(f^n)$ olduğundan M bir π -Rickart modül değildir. Diğer taraftan M nin $N = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alt modülü göz önüne alınsın. $\text{End}_R(N) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. N bir Rickart modül olduğundan π -Rickarttır.

Rickart modüllerin her direkt toplananı da Rickarttır. Bu özellik π -Rickart modüllerin direkt toplananları için de sağlanır.

Önerme 4.1.13 Herhangi bir π -Rickart modülün her direkt toplananı da π -Rickarttır.

İspat: $M = N \oplus P$ bir π -Rickart modül ve $S_N = \text{End}_R(N)$ olsun. Keyfi $f \in S_N$ için, $g = f \oplus 0|_P$ endomorfizması tanımlansın. Böylece $g \in S$ dir. Hipotez gereğince $r_M(g^n) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve $g^n = f^n \oplus 0|_P$ dir. $M = eM \oplus Q$ olsun. $P \subseteq eM$ olduğundan, $eM = P \oplus L$ olacak biçimde L alt modülü vardır. Dolayısıyla $M = eM \oplus Q = P \oplus L \oplus Q$ olur. M den N üzerine olan izdüşüm $\pi_N : M \rightarrow N$ ile gösterilsin. $\pi_{N|_{Q \oplus L}} : Q \oplus L \rightarrow N$ bir izomorfizmadır. Böylece $N = \pi_N(Q) \oplus \pi_N(L)$ dir. Bu durumda $r_N(f^n) = \pi_N(L)$ olduğu iddia edilmektedir. $g^n(P \oplus L) = 0$ olması sebebiyle $g^n(L) = 0$ dir. Her $l \in L$ için $l = \pi_N(l) + \pi_P(l)$ dir. $g^n(l) = g^n\pi_N(l) + g^n\pi_P(l) = 0$ ve $g^n\pi_P(l) = 0$ ve $g^n\pi_N(l) = f^n\pi_N(l)$ olduğundan $f^n\pi_N(L) = 0$, böylece $\pi_N(L) \subseteq r_N(f^n)$ elde edilir. Ters kapsamayı görmek için $x \in r_N(f^n)$ alınsın ve $x \notin \pi_N(L)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $x = n_1 + n_2$ olacak biçimde $n_1 \in \pi_N(L)$ ve $0 \neq n_2 \in \pi_N(Q)$ vardır. Böylece $\pi_N(q) = n_2$ olacak biçimde $q \in Q$ bulunur. $Q \cap r_M(g^n) = 0$ olması sebebiyle $g^n(q) = (f^n \oplus 0|_P)(q) \neq 0$ olur. $q = \pi_N(q) + \pi_P(q)$ ve $g^n\pi_P(q) = (f^n \oplus 0|_P)\pi_P(q) = 0$ olduğundan $f^n(q) = g^n(q) = f^n\pi_N(q) \neq 0$ olup $x \notin r_N(f^n)$ elde edilir. Buradan çelişki bulunup $r_N(f^n) \subseteq \pi_N(L)$ dir. Dolayısıyla $r_N(f^n) = \pi_N(L)$ dir. $\square$

Sonuç 4.1.14 R bir genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda eR bir π -Rickart modüldür.

Sonuç 4.1.15 R_1 ve R_2 halkalarının direkt toplamı R olmak üzere eğer R bir genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ise R_1 ve R_2 halkaları da genelleştirilmiş sağ temel projektiftir.

π -Rickart modüller kullanılarak genelleştirilmiş sağ temel projektif halkaların bir karakterizasyonu aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.1.16 Bir R halkasının genelleştirilmiş sağ temel projektif olması için gerek ve yeter şart her devirli projektif R -modülün π -Rickart olmasıdır.

İspat: Eğer her devirli projektif R -modül π -Rickart ise R nin genelleştirilmiş sağ temel projektif halka olduğu açıktır. R genelleştirilmiş sağ temel projektif bir halka ve M devirli projektif bir R -modül olsun. Böylece $M \cong I$ olacak biçimde R nin bir direkt toplanan olan I sağ ideali vardır. Önerme 4.1.4 gereğince R sağ R -modül olarak π -Rickarttır ve Önerme 4.1.13 gereğince I sağ ideali de π -Rickart olur. Dolayısıyla M nin π -Rickart modül olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.1.17 Bir R halkası için aşağıdaki şartlar göz önüne alınsın.

- (1) Her serbest R -modül π -Rickarttır.
- (2) Her projektif R -modül π -Rickarttır.
- (3) Her düz R -modül π -Rickarttır.

Bu durumda (3) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1) dir. Ayrıca sonlu gösterilmiş (finitely presented) modüller için (2) $\Rightarrow$ (3) sağlanır.

İspat: (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır. (1) $\Rightarrow$ (2) M bir projektif R -modül olsun. Dolayısıyla M bir serbest R -modül F nin direkt toplananı olur. (1) den F modülü π -Rickarttır ve böylece Önerme 4.1.13 gereğince M modülü π -Rickart olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sonlu gösterilmiş düz modüller projektif olduğundan açıktır. $\square$

π -Rickart modüllerin direkt toplamaları π -Rickart olmayabilir.

Örnek 4.1.18 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ halkası ve $M = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ sağ R -modülü göz önüne alınsın. M nin $N = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ alt modüllerinin sıfırdan farklı her endomorfizması bir monomorfizmadır. Böylece N ve K modülleri π -Rickarttır fakat Örnek 4.1.12 gereğince $M = N \oplus K$ modülü π -Rickart değildir.

Lemma 4.1.19 M bir modül ve $f \in S$ olsun. Eğer S nin bir merkezi eşkare elemanı e ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $r_M(f^n) = eM$ ise $r_M(f^{n+1}) = eM$ dir.

İspat: $r_M(f^n) \leq r_M(f^{n+1})$ olduğu açıktır. Ters kapsamayı görmek için $m \in r_M(f^{n+1})$ alınsın. Bu durumda $fm \in r_M(f^n) = eM$ ve böylece $fm = efm$ elde edilir. e merkezi olduğundan $f^n m = f^{n-1} fm = f^{n-1} efm = f^{n-1} fem = f^n em = 0$ olur. Dolayısıyla $m \in r_M(f^n)$ olup $r_M(f^{n+1}) \leq r_M(f^n)$ dir. $\square$

Önerme 3.1.15 gereğince genelleştirilmiş sağ temel projektif abel halkaların direkt toplama göre kapalı olduğu bilinmektedir. π -Rickart abel modüller için benzer bir sonuç aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Önerme 4.1.20 M_1 ve M_2 abel π -Rickart R -modüller olsun. Eğer $i \neq j$ için $\text{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$ ise $M_1 \oplus M_2$ modülü π -Rickarttır.

İspat: $M = M_1 \oplus M_2$ ve $i = 1, 2$ için $S_i = \text{End}_R(M_i)$ olsun. S halkası $\begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$ şeklindedir. $\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \in S$ alınsın. Bu durumda $f_1 \in S_1$ ve $f_2 \in S_2$ dir. $r_{M_1}(f_1^n) = e_1 M_1$ ve $r_{M_2}(f_2^m) = e_2 M_2$ olacak biçimde $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ve $e_1^2 = e_1 \in S_1$, $e_2^2 = e_2 \in S_2$ vardır. n ve m tamsayıları için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

(i) Eğer $n = m$ ise $r_M \left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^n \right) = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M$ dir.

(ii) Eğer $n < m$ ise Lemma 4.1.19 gereğince $r_{M_1}(f_1^n) = r_{M_1}(f_1^m) = e_1 M_1$ olur.

Dolayısıyla $\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} = 0$ ve böylece $\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M \leq r_M \left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^m \right)$ dir.

$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \in r_M \left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^m \right)$ olsun. $m_1 \in r_{M_1}(f_1^m) = e_1 M_1$ ve $m_2 \in r_{M_2}(f_2^m) = e_2 M_2$ olup $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$ dir. Bu nedenle $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M$ dir. Buradan $r_M \left(\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^m \right) \leq \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M$ elde edilir.

(iii) Eğer $m < n$ ise M_2 abel olduğundan (ii) durumuna benzer şekilde ispat yapılır. $\square$

Bazı durumlarda π -Rickart modüllerin tam değişmez alt modülleri de π -Rickarttır.

Lemma 4.1.21 M bir modül ve N tam değişmez bir alt modülü olsun. Eğer M π -Rickart ve N nin her endomorfizması M nin bir endomorfizmasına genişlerse N π -Rickarttır.

İspat: $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. Hipotez gereğince $g|_N = f$ olacak biçimde $g \in S$ vardır ve M nin π -Rickart olmasından dolayı $r_M(g^n) = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ bulunur. $r_N(f^n) = N \cap r_M(g^n)$ dir. N tam değişmez olduğundan $r_N(f^n) = eN$ olup bu alt modül N nin bir direkt toplananıdır. Böylece N modülü π -Rickarttır. $\square$

Sonuç 4.1.22 R genelleştirilmiş sağ temel projektif bir halka ve bir ideali I olsun. Eğer I nin her endomorfizması R nin bir endomorfizmasına genişlerse I da genelleştirilmiş sağ temel projektiftir.

Aşağıdaki sonuç Lemma 4.1.21 gereğince kolayca elde edilir.

Önerme 4.1.23 M bir yarı injektif modül ve M nin injektif zarfı $E(M)$ olsun. Eğer $E(M)$ modülü π -Rickart ise M modülü de π -Rickarttır.

Teorem 4.1.24 M bir yarı injektif duo modül olsun. Eğer M modülü π -Rickart ise her alt modülü de π -Rickarttır.

İspat: M bir π -Rickart modül, N bir alt modülü ve $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. M nin yarı injektifliği gereğince f endomorfizması M nin bir g endomorfizmasına genişler. Böylece $r_M(g^n) = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ bulunur. N alt modülü g endomorfizmasında tam değişmez kaldığından Lemma 4.1.21 gereğince istenilen elde edilir. $\square$

Tanım 4.1.25 M bir modül olsun. Eğer her $f \in S$ için $r_M(f)$ nin M de esas olması f nin üstel sıfır olmasını gerektirirse M ye *genelleştirilmiş $\mathcal{K}$ -tekil olmayan* (*generalized $\mathcal{K}$ -nonsingular*) modül adı verilir.

Her $\mathcal{K}$ -tekil olmayan modül genelleştirilmiş $\mathcal{K}$ -tekil olmayandır. Karşıtı katı (rigid) modüller için doğrudur.

Lemma 4.1.26 M bir modül olsun. Eğer S bir π -düzenli halka ise M genelleştirilmiş $\mathcal{K}$ -tekil olmayan modüldür.

İspat: $r_M(f)$ alt modülü M nin esas alt modülü olacak biçimde $f \in S$ alınsın. Hipotez gereğince $f^n = f^n g f^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $g \in S$ vardır. Bu durumda $g f^n \in S$ bir eşkare eleman olup $r_M(f^n)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. $r_M(f)$ nin M de esas olması sebebiyle $r_M(f^n)$ de M nin esas alt modülü olur. Dolayısıyla $r_M(g f^n) = M$ ve böylece $g f^n = 0$ elde edilir. Buradan $f^n g f^n = f^n = 0$ bulunur. $\square$

Önerme 4.1.27 Her π -Rickart modül genelleştirilmiş $\mathcal{K}$ -tekil olmayan modüldür.

İspat: M bir π -Rickart modül ve $f \in S$ için $r_M(f)$ alt modülü M de esas olsun. Bu durumda $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Buradan $r_M(f^n)$ de M nin bir esas alt modülü olup $r_M(f^n) = M$ elde edilir. Dolayısıyla $f^n = 0$ dır. $\square$

Sonuç 4.1.28 R bir genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ise genelleştirilmiş $\mathcal{K}$ -tekil olmayan R -modüldür.

M bir modül olsun. $T({}_S M) = \{m \in M \mid fm = 0 \text{ olacak biçimde } f \in S \text{ mevcut}\}$ kümesi M nin S ye göre bütün burulma (torsion) elemanlarının kümesi olsun. M nin $T({}_S M)$ alt kümesi ${}_S M$ ve M_R modüllerinin alt modülü olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1.29 e_{ij} ler 3×3 matris birimleri olsun ve $R = \{(e_{11} + e_{22} + e_{33})a + e_{12}b + e_{13}c + e_{23}d : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2\}$ halkası ile $M = \{e_{12}a + e_{13}b + e_{23}c : a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$ sağ R -modülü göz önüne alınsın.

$$f(e_{12}a + e_{13}b + e_{23}c) = e_{12}a + e_{13}b \text{ ve } g(e_{12}a + e_{13}b + e_{23}c) = (e_{13} + e_{23})c$$

ile tanımlı $f, g \in S$ alınsın. $m = e_{23}1 \in M$ ve $m' = e_{12}1 \in M$ için $fm = 0$ ve $gm' = 0$ dır. Fakat $(m + m')R = M$ olduğundan S de $m + m'$ elemanını sıfırlayan eleman yoktur. Dolayısıyla $T({}_S M)$ alt kümesi ${}_S M$ ve M_R modüllerinin alt modülü değildir.

S değişmeli bir bölge (commutative domain) ise $T({}_S M)$ alt kümesi M nin (S, R) -alt modülü olur.

Önerme 4.1.30 M bir modül ve S değişmeli bir bölge olsun. Eğer M modülü π -Rickart ise $T({}_S M) = 0$ dır ve S nin sıfırdan farklı her elemanı bir monomorfizmadır.

İspat: $0 \neq f \in S$ olsun. M nin π -Rickart olması gereğince $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır. Buradan $f^n e = 0$ olur. S sıfır bölensiz olduğundan $e = 0$ olup $r_M(f^n) = 0$ dır. Bu sebeple $\text{Ker } f = 0$ bulunur. Dolayısıyla f bir monomorfizmadır. Diğer taraftan $m \in T({}_S M)$ için $fm = 0$ olacak biçimde $0 \neq f \in S$ vardır. f nin monomorfizma olması sebebiyle $m = 0$ olup $T({}_S M) = 0$ dır. $\square$

Güçlü Hopfian, Fitting ve π -Rickart modül sınıfları arasında aşağıdaki gibi ilişkiler bulunmaktadır.

Önerme 4.1.31 Her abel π -Rickart modül güçlü Hopfian modüldür.

İspat: Lemma 4.1.19 ve Önerme 2.1.34 gereğince istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Armendariz vd. (1978) tarafından bir M modülünün Fitting modül olması için gerek ve yeter şartın S nin güçlü π -düzenli halka olduğu gösterilmiştir.

Sonuç 4.1.32 Her Fitting modül π -Rickarttır.

Sonuç 4.1.33 R bir halka ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $M_n(R)$ güçlü π -düzenli ise R^n bir π -Rickart R -modüldür.

İspat: $M_n(R)$ güçlü π -düzenli bir halka olsun. Önerme 2.1.37 gereğince R^n bir Fitting R -modül olur. Böylece π -Rickarttır. $\square$

Teorem 4.1.34 Sağ Artinian halka üzerindeki her sonlu üretilmiş modül π -Rickarttır.

İspat: R bir sağ Artinian halka ve M sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Bu durumda M hem Artinian hem de Noetherian bir modüldür. Dolayısıyla bir Fitting modül olur. Böylece Sonuç 4.1.32 gereğince ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.1.35 Her sağ Artinian halka genelleştirilmiş sağ temel projektiftir.

4.2 π -Rickart Modüllerin Endomorfizma Halkaları

Lemma 4.2.1 Eğer M bir π -Rickart modül ise S genelleştirilmiş sağ temel projektif halkadır.

İspat: $f \in S$ olsun. Bu durumda $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Eğer $g \in r_S(f^n)$ ise $gM \leq r_M(f^n) = eM$ dir. Böylece $g = eg \in eS$ olup $r_S(f^n) \leq eS$ elde edilir. $h \in S$ olsun. $f^n ehM \leq f^n eM = 0$ olması sebebiyle $f^n eh = 0$ olup $eS \leq r_S(f^n)$ dir. Dolayısıyla $r_S(f^n) = eS$ dir. $\square$

Önerme 3.1.16 gereğince bilinen aşağıdaki sonuç Teorem 4.1.13 ve Lemma 4.2.1 den de elde edilebilir.

Sonuç 4.2.2 Eğer R bir genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ise herhangi bir $e^2 = e \in R$ için eRe halkası da genelleştirilmiş sağ temel projektiftir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.1.34 ve Önerme 4.2.1 in Artinian halkalar üzerindeki matris halkalarına bir uygulamasıdır.

Sonuç 4.2.3 R bir sağ Artinian halka olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ genelleştirilmiş sağ temel projektif halkadır.

İspat: $n \in \mathbb{Z}^+$ için R^n sağ R -modülünün endomorfizma halkası $M_n(R)$ olduğundan ispat Teorem 4.1.34 gereğince açıktır. $\square$

1-örten-kısıtlanabilir modüller için Lemma 4.2.1 in karşıtı da doğrudur.

Önerme 4.2.4 M bir 1-örten-kısıtlanabilir modül olsun. M nin π -Rickart olması için gerek ve yeter şart S nin genelleştirilmiş sağ temel projektif olmasıdır.

İspat: M modülü π -Rickart ise S nin genelleştirilmiş sağ temel projektif olduğu Lemma 4.2.1 gereğince bilinmektedir. S nin genelleştirilmiş sağ temel projektif olduğu kabul edilsin ve $f \in S$ alınsın. Bu durumda $r_S(f^n) = eS$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır. Böylece $f^n e = 0$ olup $eM \leq r_M(f^n)$ dir. Diğer kapsamayı görmek için $0 \neq m \in r_M(f^n)$ olsun. M nin 1-örten-kısıtlanabilir olması gereğince $gM = mR$ şartını sağlayan $0 \neq g \in S$ bulunur. Dolayısıyla $m = gm_1$ olacak biçimde

$m_1 \in M$ vardır. Diğer taraftan $f^n g M = f^n m R = 0$ olup $f^n g = 0$ dir. Bu sebeple $g \in r_S(f^n) = eS$ elde edilir. Buradan $g = eg$ olup $m = gm_1 = egm_1 = em \in eM$ dir. Böylece $r_M(f^n) = eM$ dir. $\square$

Sonuç 4.2.5 Bir serbest modülün π -Rickart olması için gerek ve yeter şart endomorfizma halkasının genelleştirilmiş sağ temel projektif olmasıdır.

Düzenli bir modülün devirli her alt modülü direkt toplanandır. Dolayısıyla düzenli modüller 1-örten-kısıtlanabilirlerdir.

Sonuç 4.2.6 M bir düzenli modül olsun. S nin genelleştirilmiş sağ temel projektif olması için gerek ve yeter şart M nin π -Rickart olmasıdır.

Sonuç 4.2.7 Her sonlu üretilmiş projektif düzenli modül π -Rickarttır.

İspat: M sonlu üretilmiş projektif düzenli bir modül olsun. Bu durumda M nin endomorfizma halkası genelleştirilmiş sağ temel projektiftir (Ware 1971). Böylece Sonuç 4.2.6 gereğince M modülü π -Rickarttır. $\square$

Tanım 4.2.8 R bir halka olmak üzere R -modüllerin boştan farklı bir kümesi $\mathcal{U}$ olsun. Bir R -modül L için

$$\text{Tr}(\mathcal{U}, L) = \sum \{Imh | h \in Hom(U, L), U \in \mathcal{U}\}$$

alt kümesine $\mathcal{U}$ nun L deki izi (trace) denir, eğer $\mathcal{U}$ sadece bir tek U modülünden oluşuyorsa kısaca $\text{Tr}(U, L)$ şeklinde yazılır (Wisbauer 1991).

Önerme 4.2.9 Bir R halkası için R -modüllerin boştan farklı bir kümesi $\mathcal{U}$ ve L bir R -modül olsun. $\text{Tr}(\mathcal{U}, L) = L$ olması için gerek ve yeter şart L nin $\mathcal{U}$ -üretilmiş olmasıdır (Wisbauer 1991).

Aşağıdaki teorem, Lemma 4.2.1 in karşıtının endomorfizma halkası üzerinde düz olan modüller için de doğru olduğunu ifade eder.

Teorem 4.2.10 M bir modül ve $f \in S$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için eğer $f^n S$ projektif sağ S -modül ise $\text{Tr}(M, r_M(f^n))$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.

- (2) Eğer M bir düz sol S -modül ve S genelleştirilmiş sağ temel projektif halka ise R -modül olarak M π -Rickarttır.

İspat: (1) Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f^n S$ projektif sağ S -modül olsun. Bu durumda $r_S(f^n) = eS$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır. Bu e eşkare elemanı için $\text{Tr}(M, r_M(f^n)) = eM$ olduğu iddia edilmektedir. $f^n eM = 0$ olması sebebiyle $eM \leq \text{Tr}(M, r_M(f^n))$ dir. $g \in \text{Hom}(M, r_M(f^n))$ olsun. Böylece $gM \leq r_M(f^n)$, yani $f^n gM = 0$ ve buradan $f^n g = 0$ olur. Dolayısıyla $g \in r_S(f^n) = eS$ olup $eg = g$ elde edilir. Bu sebeple $gM \leq egM \leq eM$ dir ve $\text{Hom}(M, r_M(f^n))M \leq eM$ olduğu görülür.

(2) M düz sol S -modül ve S genelleştirilmiş sağ temel projektif halka olsun. Bir $f \in S$ için $r_S(f^n) = eS$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ mevcut olduğundan $f^n S$ projektif sağ S -modüldür. (1) in ispatında olduğu gibi $\text{Tr}(M, r_M(f^n)) = eM$ elde edilir. M nin sol S -modül olarak düz olması sebebiyle Önerme 2.1.43 gereğince $r_M(f^n)$ M -üretilmiş modüldür. Önerme 4.2.9 gereğince de $\text{Tr}(M, r_M(f^n)) = r_M(f^n)$ dir. Böylece $r_M(f^n) = eM$ olur. $\square$

Teorem 3.1.7 gereğince eğer S von Neumann düzenli halka ise M modülünün Rickart olduğu bilinmektedir. Benzer bir sonuç π -Rickart modüller için de vardır.

Lemma 4.2.11 M bir modül olsun. Eğer S bir π -düzenli halka ise M modülü π -Rickarttır.

İspat: $f \in S$ olsun. S halkası π -düzenli olduğundan $f^n = f^n g f^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $g \in S$ vardır. Burada $g f^n$ bir eşkare elemandır. Dolayısıyla $1 - g f^n$ elemanı da eşkare olup $r_M(f^n) = (1 - g f^n)M$ olduğu iddia edilmektedir. Keyfi $m \in M$ için $f^n(1 - g f^n)m = (f^n - f^n g f^n)m = (f^n - f^n)m = 0$ dır. Böylece $(1 - g f^n)M \leq r_M(f^n)$ olur. Keyfi $m \in r_M(f^n)$ için $g f^n m = 0$ olması $m = (1 - g f^n)m \in (1 - g f^n)M$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla da $r_M(f^n) = (1 - g f^n)M$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki lemma π -düzenli halkalarla ilgili, daha sonra kullanılacak özellikleri içerir.

Lemma 4.2.12 Bir R halkası için aşağıdakiler sağlanır.

- (1) R halkası π -düzenli ise keyfi $e^2 = e \in R$ için eRe halkası da π -düzenlidir.

(2) Keyfi $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ halkası π -düzenli ise R halkası da π -düzenlidir.

(3) R değişmeli halka olmak üzere R nin π -düzenli olması için gerek ve yeter şart keyfi $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ nin π -düzenli olmasıdır.

İspat: (1) R bir π -düzenli halka, $e^2 = e \in R$ ve $a \in eRe$ olsun. Bu durumda $a^n = a^n r a^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $r \in R$ mevcuttur. $a^n = a^n e = e a^n$ olması sebebiyle $a^n = a^n (ere) a^n$ elde edilir. Böylece eRe de π -düzenlidir.

(2) İspat (1) özelliğinden yapılır.

(3) R değişmeli π -düzenli bir halka olsun. Önerme 2.1.24 gereğince R nin her asal ideali maksimal olup her sonlu üretilmiş R -modül eş-Hopfian modüldür (Vasconcelos 1969). Böylece Teorem 2.1.33 gereğince keyfi $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ halkası π -düzenlidir. İspatın devamı (2) den elde edilir. $\square$

Önerme 4.2.13 R değişmeli π -düzenli bir halka ise sonlu üretilmiş projektif her R -modül π -Rickarttır.

İspat: M sonlu üretilmiş projektif bir R -modül olsun. M nin endomorfizma halkası $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in M_n(R)$ olmak üzere $eM_n(R)e$ şeklindedir. R değişmeli π -düzenli halka olduğundan $M_n(R)$ halkası π -düzenli olup Lemma 4.2.12 gereğince $eM_n(R)e$ de π -düzenlidir. Böylece Lemma 4.2.11 gereğince M modülü π -Rickart olur. $\square$

Aşağıdaki örnek Lemma 4.2.11 in karışının doğru olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.2.14 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}$ göz önüne alınsın. Bu durumda $\mathbb{Z}$ nin endomorfizma halkası kendisine izomorftur. $\mathbb{Z}$ modülü π -Rickarttır fakat halka olarak π -düzenli değildir.

Teorem 3.1.7 gereğince M nin C_2 şartını sağlayan Rickart modül olması için gerek ve yeter şart S nin von Neumann düzenli olmasıdır. C_2 şartını sağlayan modüller için Lemma 4.2.11 in karıştı doğru olur.

Teorem 4.2.15 M bir modül olsun ve C_2 şartını sağlasın. M nin π -Rickart olması için gerek ve yeter şart S nin π -düzenli olmasıdır.

İspat: S halkası π -düzenli ise M nin π -Rickart olduğu Lemma 4.2.11 gereğince bilinmektedir. $0 \neq f \in S$ olsun. M modülü π -Rickart olduğundan $\text{Ker } f^n$ bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için M nin bir direkt toplananıdır. Bu durumda $M = \text{Ker } f^n \oplus N$ olacak biçimde M nin N alt modülü vardır. $f^n|_N$ bir monomorfizmadır. C_2 şartı sebebiyle $f^n N$ alt modülü M nin bir direkt toplananı olur. Diğer taraftan $gf^n|_N = 1_N$ olacak biçimde $0 \neq g \in S$ vardır. Böylece $(f^n - f^n g f^n)M = (f^n - f^n g f^n)(\text{Ker } f^n \oplus N) = (f^n - f^n g f^n)N = 0$ dir. Dolayısıyla $f^n = f^n g f^n$ olup S halkası π -düzenlidir. $\square$

Aşağıdaki sonuç Önerme 4.2.13 ve Teorem 4.2.15 ten elde edilir.

Sonuç 4.2.16 R bir değişmeli sağ C_2 halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R halkası π -düzenlidir.
- (2) Her sonlu üretilmiş projektif R -modül π -Rickarttır.

Her yarı injektif modül C_2 şartını sağladığından aşağıdaki sonuç söylenebilir.

Sonuç 4.2.17 M bir yarı injektif modül olsun. M nin π -Rickart olması için gerek ve yeter şart S nin π -düzenli olmasıdır.

Her π -düzenli halka genelleştirilmiş sağ temel projektiftir. Aşağıdaki sonuç karşının ne zaman doğru olduğunu göstermektedir.

Sonuç 4.2.18 R bir sağ C_2 halka olsun. R nin genelleştirilmiş sağ temel projektif olması için gerek ve yeter şart π -düzenli olmasıdır.

Aşağıdaki sonuç π -düzenliliği sağlayan matris halkalarına Önerme 4.2.11 ve Teorem 4.2.15 ışığında bir uygulamadır. Teorem 4.1.16 da devirli projektif modüllerin π -Rickart olması için gerek ve yeter şart belirlenmiştir. Şimdi her sonlu üretilmiş projektif modüllerin π -Rickart olması için gerek ve yeter şart araştırılmaktadır.

Teorem 4.2.19 R bir sağ yarı injektif halka olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- (1) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ halkası π -düzenlidir.
- (2) Her sonlu üretilmiş projektif R -modül π -Rickarttır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M sonlu üretilmiş projektif bir R -modül olsun. Bu durumda $M \cong eR^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in M_n(R)$ vardır. Dolayısıyla S halkası $eM_n(R)e$ halkasına izomorftur. (1) gereğince S halkası π -düzenlidir. Böylece Lemma 4.2.11 gereğince M modülü π -Rickarttır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ halkası R^n projektif R -modülünün endomorfizma halkası olarak görülebilir. (2) gereğince R^n modülü π -Rickarttır ve hipotezden dolayı yarı injektiftir. Böylece Sonuç 4.2.17 gereğince $M_n(R)$ halkası π -düzenlidir. $\square$

Lemma 4.2.20 M bir modül olsun. S nin π -düzenli halka olması için gerek ve yeter şart her bir $f \in S$ için $\text{Ker } f^n$ ve $\text{Im } f^n$ alt modülleri M nin direkt toplananları olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ bulunmasıdır.

Teorem 4.2.21 M bir π -Rickart modül olmak üzere S nin sağ tekil ideali $Z(S_S)$ nildir ve böylece $Z(S_S) \subseteq J(S)$ dir.

İspat: $f \in Z(S_S)$ olsun. M modülü π -Rickart olduğundan $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ mevcuttur. Lemma 4.2.1 gereğince $r_S(f^n) = eS$ dir. $r_S(f^n)$ sağ ideali S de esas olduğundan $r_S(f^n) = S$ olur. Bu durumda $f^n = 0$ olup $Z(S_S)$ nin nil olduğu görülür. Diğer taraftan herhangi bir $g \in S$ ve $f \in Z(S_S)$ için az önceki tartışmaya göre $(fg)^n = 0$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla $1 - fg$ tersinirdir. Böylece $f \in J(S)$ olup $Z(S_S) \subseteq J(S)$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.1.17 dan bilinen aşağıdaki sonuç Teorem 4.2.21 den elde edilebilir.

Sonuç 4.2.22 Genelleştirilmiş sağ temel projektif bir R halkasının sağ tekil ideali $Z(R_R)$ nildir.

Önerme 4.2.23 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) S nin her bir elemanı ya monomorfizmadır ya da üstel sıfırdır.
- (2) M parçalanamaz (indcomposable) π -Rickart modüldür.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $e^2 = e \in S$ olsun. Eğer e üstel sıfır ise $e = 0$ dir. Eğer e monomorfizma ise keyfi $m \in M$ için $e(m - em) = 0$ olması $em = m$ olmasını

gerektirir. Buradan $e = 1$ olup M parçalanamazdır. Ayrıca herhangi bir $f \in S$ için $r_M(f) = 0$ dır ya da bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $r_M(f^n) = M$ dir. Bu sebeple M modülü π -Rickarttır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $f \in S$ olsun. Bu durumda $r_M(f^n)$ alt modülü M nin bir direkt toplanamı olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. M parçalanamaz olduğundan $r_M(f^n) = 0$ ya da $r_M(f^n) = M$ olmak zorundadır. Dolayısıyla f ya monomorfizmadır ya da üstel sıfırdır. $\square$

Teorem 4.2.24 Bir M modülü için

(1) S Jacobson radikali nil olan bir yerel halkadır.

(2) M parçalanamaz π -Rickart modüldür.

şartları göz önüne alındığında (1) $\Rightarrow$ (2) dir. Eğer M yapılı modül ise (2) $\Rightarrow$ (1) dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) S nin her bir elemanı ya monomorfizmadır ya da üstel sıfırdır. Önerme 4.2.23 gereğince M parçalanamaz π -Rickarttır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $f \in S$ için $r_M(f^n) = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır. Eğer $e = 0$ ise f monomorfizmadır. M yapılı modül olduğundan Önerme 2.1.41 gereğince f tersinirdir. Eğer $e = 1$ ise $f^n = 0$ dır. Dolayısıyla $1 - f$ tersinirdir. Böylece S nin yerel halka olduğu görülür. $0 \neq f \in J(S)$ olsun. f tersinir olmadığından $r_M(f^n) = M$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $J(S)$ nildir. $\square$

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.2.24 ve Önerme 2.1.42 den elde edilebilir.

Sonuç 4.2.25 M parçalanamaz π -Rickart bir modül olsun. Eğer M yapılı ise S sol ve sağ π -yapılı halkadır.

Sonuç 4.2.26 Bir R halkası için aşağıdakiler göz önüne alınsın.

(1) R nin her elemanı ya düzenli ya da üstel sıfırdır.

(2) R parçalanamaz genelleştirilmiş sağ temel projektiftir.

(3) R yerel ve $J(R)$ nildir.

Bu durumda (3) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1) dir. Eğer R sağ yapılı halka ise (2) $\Rightarrow$ (3) tür.

5. DUAL π -RICKART MODÜLLER

Bu bölümde dual π -Rickart modül kavramı tanımlanıp özellikleri incelenmektedir. Dual π -Rickart modül kavramının dual Rickart modül kavramını gerektirmediğini gösteren bir örnek verilmektedir. Dual π -Rickart bir modülün her direkt toplananı dual π -Rickart olmasına rağmen dual π -Rickart modüllerin direkt toplamalarının dual π -Rickart olmadığı örneklerle görülmektedir. Fakat bazı abel dual π -Rickart modüllerin direkt toplamalarının da dual π -Rickart olduğu sonucu elde edilmektedir.

5.1 Dual π -Rickart Modüllerin Özellikleri

Tanım 5.1.1 M bir modül olsun. Her bir $f \in S$ için $\text{Im} f^n = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa M ye *dual π -Rickart modül* denir.

Her yarı basit modül, sağ kalıtsal (right hereditary) halka üzerindeki her injektif modül dual π -Rickarttır. Ayrıca her yarı projektif güçlü eş-Hopfian modül, her yarı injektif güçlü Hopfian modül, her Artinian Noetherian modül dual π -Rickart modüldür (Önerme 5.1.22). Sağ Artinian halka üzerindeki her sonlu üretilmiş modüller de dual π -Rickart modül örneğidir (Teorem 5.1.24).

Önerme 5.1.2 Bir R halkasının R -modül olarak dual π -Rickart olması için gerek ve yeter şart π -düzenli halka olmasıdır.

İspat: R halkası R -modül olarak dual π -Rickart olsun ve $f \in R$ alınsın. $\text{Im} f^n = eR$ olacak biçimde $e^2 = e \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla $e = f^n x$ ve $f^n = ey$ olacak biçimde $x, y \in R$ mevcuttur. Buradan $f^n x f^n = ey = f^n$ elde edilir ve böylece R halkası π -düzenlidir. R nin π -düzenli halka olduğu kabul edilsin ve $g \in R$ olsun. $g^n = g^n x g^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \in R$ mevcuttur. Böylece $g^n x$ bir eşkare elemandır, bu eleman e ile gösterilsin. $e \in g^n R$ ve $g^n = g^n x g^n = e g^n \in eR$ olması nedeniyle $\text{Im} g^n = eR$ bulunur. Dolayısıyla R halkası R -modül olarak dual π -Rickarttır. $\square$

Her dual Rickart modül dual π -Rickarttır. Fakat her dual π -Rickart modül dual Rickart olmak zorunda değildir.

Örnek 5.1.3 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ halkası ve $M = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ sağ R -modülü göz önüne alınsın. Keyfi $f \in S$ için

$$f \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{x} \\ \bar{y} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \overline{ax} \\ \overline{by} & \overline{cx + bz} \end{bmatrix}$$

olacak biçimde $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2$ vardır. Buradaki $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2$ için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Durum 1. $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{1}$ ise f epimorfizmadır.

Durum 2. $\bar{a} = \bar{0}, \bar{b} = \bar{0}, \bar{c} = \bar{1}$ ise $f^2 = 0$ dır.

Durum 3. $\bar{a} = \bar{0}, \bar{b} = \bar{1}, \bar{c} = \bar{1}$ ya da $\bar{a} = \bar{0}, \bar{b} = \bar{1}, \bar{c} = \bar{0}$ ise $\text{Im}f = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \mid \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ olup M nin bir direkt toplananıdır.

Durum 4. $\bar{a} = \bar{1}, \bar{b} = \bar{0}, \bar{c} = \bar{1}$ ise $\text{Im}f = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{x} \\ \bar{0} & \bar{x} \end{bmatrix} \mid \bar{x} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ olup M nin bir direkt toplananıdır.

Durum 5. $\bar{a} = \bar{1}, \bar{b} = \bar{0}, \bar{c} = \bar{0}$ ise $\text{Im}f = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{x} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \mid \bar{x} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ olup M nin bir direkt toplananıdır.

Durum 6. $\bar{a} = \bar{1}, \bar{b} = \bar{1}, \bar{c} = \bar{0}$ ise f birim homomorfizmadır.

Durum 7. $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{0}$ ise f sıfır homomorfizmasıdır.

Her bir durum için $\text{Im}f^n$ alt modülü M nin bir direkt toplananı olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu sebeple M dual π -Rickart modüldür. Fakat ikinci durumda $\text{Im}f = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{x} \end{bmatrix} \mid \bar{x} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ olup M nin direkt toplananı olmadığından M dual Rickart değildir.

Önerme 5.1.4 Bir M modülü dual Rickart ise dual π -Rickarttır. Eğer S indirgenmiş halka ise karşıtı da doğrudur.

İspat: M nin dual Rickart olması açıkça dual π -Rickart olmasını gerektirir. S indirgenmiş halka ve M dual π -Rickart modül olsun. Keyfi $f \in S$ için $\text{Im}f^n = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır. Eğer $n = 1$ ise ispat tamamlanır. $n > 1$ olsun. $(1 - e)f^n M = 0$ olup $(1 - e)f^n = 0$ elde edilir. S indirgenmiş

halka olduğundan, e merkezi eşkare elemandır ve $((1 - e)f)^n = 0$ dır. Böylece $(1 - e)f = 0$ ve buradan $f = ef$ bulunur. Dolayısıyla $Imf \leq eM$ dir. Ayrıca $eM = f^n M \leq f(f^{n-1})M \leq fM$ olduğundan $eM \leq Imf$ olur. Sonuç olarak $eM = Imf$ ve böylece M dual Rickart modüldür. $\square$

Sonuç 5.1.5 Eğer M bir indirgenmiş modül ise M nin dual Rickart olması için gerek ve yeter şart dual π -Rickart olmasıdır.

Sonuç 5.1.6 R indirgenmiş bir halka olsun. R nin von Neumann düzenli halka olması için gerek ve yeter şart π -düzenli halka olmasıdır.

Lemma 5.1.7 Bir M modülünün dual π -Rickart ve S nin bölge olması için gerek ve yeter şart S nin sıfırdan farklı her elemanının bir epimorfizma olmasıdır.

İspat: S nin sıfırdan farklı her elemanı epimorfizma ise M nin dual π -Rickart ve S nin bölge olduğu açıktır. M dual π -Rickart ve S bölge olsun. $0 \neq f \in S$ için $Imf^n = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır. Buradan $f^n = ef^n$ elde edilir. S sıfır bölensiz ve $f^n \neq 0$ olduğundan $e = 1$ dir ve $Imf^n = M$ olur. Böylece $Imf = M$ olup f epimorfizmadır. $\square$

Bir modülün π -Rickart olması ile dual π -Rickart olması arasında herhangi bir gerektirme olmadığı aşağıdaki örneklerden görülmektedir.

Örnekler 5.1.8 (1) $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}$ dual π -Rickart değildir fakat π -Rickarttır.

(2) $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ halkası ve $M = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sağ R -modülü göz önüne alınsın.

Keyfi $f \in S$ için $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ olmak üzere $f \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacak

biçimde $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Burada M modülü π -Rickarttır. Keyfi $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ için

$f \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlı $f \in S$ alınsın. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $Imf^n =$

$\begin{bmatrix} 2^n \mathbb{Z} & 2^n \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup M nin bir direkt toplananı değildir. Bu sebeple M modülü

dual π -Rickart değildir.

(3) p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ sağ $\mathbb{Z}$ -modülü göz önüne alınsın. Her $0 \neq f \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ için $f\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olduğundan $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ dual Rickarttır, böylece dual π -Rickarttır. Keyfi $a \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ için $f(a) = ap$ ile tanımlı $f : \mathbb{Z}_{p^\infty} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ homomorfizması alınsın. $0 \neq \text{Ker} f \subsetneq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ve $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ parçalanamaz olduğundan $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Rickart değildir. Ayrıca herhangi bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\text{Ker} f^n$ alt modülü de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ un bir direkt toplanamı değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ modülü π -Rickart değildir.

π -Rickart ve dual π -Rickart modüller arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

Teorem 5.1.9 Bir M modülü için aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Eğer M modülü dual π -Rickart ve D_2 şartını sağlarsa π -Rickarttır.
- (2) Eğer M modülü π -Rickart ve C_2 şartını sağlarsa dual π -Rickarttır.
- (3) Eğer M projektif yapılı modül ise π -Rickart olması için gerek ve yeter şart dual π -Rickart olmasıdır.

İspat: Keyfi $f \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M/\text{Ker} f^n \cong \text{Im} f^n$ olduğundan D_2 ve C_2 şartlarından (1) ve (2) nin sağlandığı açıktır. Yapılı modül tanımından ve M nin projektifliğinden (3) kolayca elde edilir. $\square$

Sonuç 5.1.10 Bir M modülü C_2 ve D_2 şartlarını sağlasın. Bu durumda M nin dual π -Rickart olması için gerek ve yeter şart π -Rickart olmasıdır.

Lemma 5.1.11 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M dual π -Rickarttır.
- (2) Her bir $f \in S$ için $0 \rightarrow \text{Im} f^n \rightarrow M \rightarrow M/\text{Im} f^n \rightarrow 0$ tam dizisi parçalanacak (split) şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

İspat: Keyfi $f \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $0 \rightarrow \text{Im} f^n \rightarrow M \rightarrow M/\text{Im} f^n \rightarrow 0$ tam dizisi göz önüne alınsın. Bu dizinin parçalanması için gerek ve yeter şart $\text{Im} f^n$ nin M nin bir direkt toplanamı olmasıdır, bunun için de gerek ve yeter şart M nin dual π -Rickart modül olmasıdır. $\square$

Dual π -Rickart bir modülün her alt modülü dual π -Rickart olmak zorunda değildir.

Örnek 5.1.12 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Q}$ göz önüne alınsın. $S = \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ dur. S nin her elemanı ya izomorfizma ya da 0 olduğundan $\mathbb{Q}$ dual π -Rickarttır. $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{Z}$ alt modülü için $f(x) = 2x$ ile tanımlı $f \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ göz önüne alınsın. f nin herhangi bir kuvvetinin görüntüsü $\mathbb{Z}$ nin direkt toplananı olmadığından $\mathbb{Z}$ dual π -Rickart değildir.

Önerme 5.1.13 Dual π -Rickart modülün her direkt toplananı da dual π -Rickarttır.

İspat: M dual π -Rickart modül ve N bir direkt toplananı olsun. $M = N \oplus P$ alınsın ve $S_N = \text{End}_R(N)$ olsun. Keyfi $f \in S_N$ için $g = f \oplus 0|_P \in S$ dir. Hipotez gereğince $\text{Im}g^n = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır, ayrıca $g^n = f^n \oplus 0|_P$ dir. Böylece $eM = \text{Im}g^n = f^n N \leq N$ olur. $M = eM \oplus Q$ olacak biçimde M nin bir Q alt modülü bulunur. Dolayısıyla $N = eM \oplus (N \cap Q) = f^n N \oplus (N \cap Q)$ dir. Bu sebeple N dual π -Rickart olur. $\square$

Sonuç 5.1.14 R bir π -düzenli halka olsun. Herhangi bir $e^2 = e \in R$ için eR bir dual π -Rickart R -modüldür.

Sonuç 5.1.15 R_1 ve R_2 halkalarının direkt toplamı $R_1 \oplus R_2$ bir π -düzenli halka olsun. Bu durumda R_1 ve R_2 halkaları da π -düzenlidir.

π -düzenli halkaların dual π -Rickart modüller yardımıyla bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

Teorem 5.1.16 Bir R halkasının π -düzenli olması için gerek ve yeter şart devirli projektif her R -modülün dual π -Rickart olmasıdır.

İspat: Devirli projektif her R -modül dual π -Rickart ise R nin π -düzenli olduğu açıktır. Şimdi R nin π -düzenli olduğu kabul edilsin ve $M = mR$ projektif bir modül olsun. Bu durumda $R = r_R(m) \oplus I$ olacak biçimde R nin bir sağ ideali I vardır. Burada $I \xrightarrow{\varphi} M$ izomorfizması mevcuttur. Bir $f \in S$ için Önerme 5.1.2 ve Önerme 5.1.13 gereğince $(\varphi^{-1}f\varphi)^n I = (\varphi^{-1}f^n\varphi)I$ alt modülü I nin bir direkt toplananı olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla I nin bir sağ ideali K için $I = (\varphi^{-1}f^n\varphi)I \oplus K$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\varphi I = (f^n\varphi)I \oplus \varphi K$ olup $M = f^n M \oplus \varphi K$ elde edilir. Bu sebeple M dual π -Rickarttır. $\square$

Teorem 5.1.17 Bir R halkası için aşağıdaki şartlar göz önüne alınsın.

- (1) Her serbest R -modül dual π -Rickarttır.
- (2) Her projektif R -modül dual π -Rickarttır.
- (3) Her düz R -modül dual π -Rickarttır.

Bu durumda (3) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1) dir. Ayrıca sonlu gösterilmiş modüller için (2) $\Rightarrow$ (3) sağlanır.

İspat: (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır. (1) $\Rightarrow$ (2) M projektif R -modül olsun. Dolayısıyla M nin direkt toplananı olduğu bir serbest R -modül F vardır. (1) gereğince F dual π -Rickarttır. Böylece Önerme 5.1.13 gereğince M de dual π -Rickart olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sonlu gösterilmiş düz modüller projektif olduğundan açıktır. $\square$

Dual π -Rickart modüllerin direkt toplamaları dual π -Rickart olmayabilir.

Örnek 5.1.18 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ halkası ve $M = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ sağ R -modülü göz önüne

alınsın. Keyfi $f \in S$ için $\begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix} \in M$ olmak üzere

$$f \begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + ur & ay + us \\ cx + tr & cy + ts \end{bmatrix}$$

olacak biçimde $a, c, u, t \in R$ vardır. $a = c = 0$, $u = 3$ ve $t = 2$ olacak şekilde $f \in S$

alınsın. Bu durumda $f \begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3r & 3s \\ 2r & 2s \end{bmatrix}$ olup herhangi bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f^n \begin{bmatrix} x & y \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2^{n-1})r & 3(2^{n-1})s \\ 2^n r & 2^n s \end{bmatrix}$$

dir ve $f^n M$ direkt toplanan değildir. Diğer taraftan M nin $N = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ alt modülleri için $\text{End}_R(N)$ ve $\text{End}_R(K)$ halkaları $\mathbb{R}$ ye izomorftur.

Dolayısıyla N ve K dual π -Rickart modüllerdir fakat M dual π -Rickart değildir.

Lemma 5.1.19 M bir modül ve $f \in S$ olsun. Eğer $\text{Im}f^n = eM$ olacak biçimde merkezi $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa $\text{Im}f^{n+1} = eM$ dir.

İspat: $f \in S$ için $\text{Im}f^n = eM$ olacak biçimde merkezi $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $\text{Im}f^{n+1} \subseteq \text{Im}f^n$ olduğu açıktır. $f^n(x) \in \text{Im}f^n$ için $f^n(x) = ef^n(x) = f^n e(x)$ tir. $e(x) \in \text{Im}f^n$ olduğundan $e(x) = f^n(y)$ olacak biçimde $y \in M$ mevcuttur. Böylece $f^n(x) = f^n(f^n(y)) = f^{n+1}(f^{n-1}(y)) \in \text{Im}f^{n+1}$ dir. $\square$

Önerme 5.1.20 M_1 ve M_2 abel R -modüller olsun. Eğer M_1 ve M_2 dual π -Rickart ve $i \neq j$ için $\text{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$ ise $M_1 \oplus M_2$ dual π -Rickart modüldür.

İspat: $S_1 = \text{End}_R(M_1)$, $S_2 = \text{End}_R(M_2)$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. S halkası $\begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$ şeklinde alınabilir. $f_1 \in S_1$ ve $f_2 \in S_2$ olmak üzere $\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \in S$ alınsın. Bu durumda $\text{Im}f_1^n = e_1 M_1$ ve $\text{Im}f_2^m = e_2 M_2$ olacak biçimde $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ve $e_1^2 = e_1 \in S_1$ ve $e_2^2 = e_2 \in S_2$ mevcuttur. n ve m nin aşağıdaki durumları göz önüne alınırsa:

(i) Eğer $n = m$ ise $\text{Im} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M$ dir.

(ii) Eğer $n < m$ ise Lemma 5.1.19 gereğince $\text{Im}f_1^n = \text{Im}f_1^m = e_1 M_1$ dir. $\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M \leq \text{Im} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^m$ olduğu açıktır. $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \in \text{Im} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^m$ alınsın.

Burada $m_1 \in \text{Im}f_1^m = e_1 M_1$ ve $m_2 \in \text{Im}f_2^m = e_2 M_2$ dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$ dir. Böylece $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M$ dir. Bu sebeple $\text{Im} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}^m \leq \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} M$ elde edilir.

(iii) Eğer $m < n$ ise M_2 abel olduğundan ispat (ii) durumuna benzer şekilde yapılır. $\square$

Abel modüller ile güçlü eş-Hopfian modüller arasında dual π -Rickart modüller kullanılarak aşağıdaki gerektirme verilebilir.

Önerme 5.1.21 Eğer M bir dual π -Rickart modül ve S abel halka ise M güçlü eş-Hopfiandır.

İspat: Lemma 5.1.19 ve Önerme 2.1.35 kullanılarak ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 5.1.22 Her Fitting modül dual π -Rickarttır.

Önerme 5.1.23 R bir halka ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $M_n(R)$ matris halkası güçlü π -düzenli ise R^n dual π -Rickart R -modüldür.

İspat: $M_n(R)$ güçlü π -düzenli bir halka olsun. Önerme 2.1.37 gereğince R^n Fitting R -modüldür ve böylece dual π -Rickarttır. $\square$

Teorem 5.1.24 Sağ Artinian halka üzerindeki her sonlu üretilmiş R -modül dual π -Rickarttır.

İspat: R sağ Artinian halka ve M sonlu üretiliş R -modül olsun. Bu durumda M hem Artinian hem de Noetherian modüldür. Dolayısıyla M Fitting modül olup dual π -Rickarttır. $\square$

Sonuç 5.1.25 Her sağ Artinian halka π -düzenlidir.

5.2 Dual π -Rickart Modüllerin Endomorfizma Halkaları

Bu bölümde dual π -Rickart modüllerin endomorfizma halkaları ile ilişkileri incelenecektir.

Önerme 5.2.1 Eğer M dual π -Rickart modül ise S genelleştirilmiş sol temel projektif halkadır.

İspat: Keyfi $f \in S$ için hipotez gereğince $\text{Im } f^n = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla $l_S(f^n M) = S(1 - e) = l_S(f^n)$ dir. Böylece S nin genelleştirilmiş sol temel projektif halka olduğu görülür. $\square$

Önerme 5.2.1 ve Teorem 5.1.13 ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.2 Eğer R bir π -düzenli halka ise herhangi bir $e^2 = e \in R$ için eRe genelleştirilmiş sol temel projektif halkadır.

İspat: Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $f \in S$ için $Sf^n \cong S/l_S(f^n)$ olduğundan ispat Önerme 5.2.1 den açıktır. $\square$

Aşağıdaki sonuç Teorem 5.1.24 ve Önerme 5.2.1 in Artinian halkalar üzerindeki matris halkalarına bir uygulamasıdır.

Sonuç 5.2.3 R bir sağ Artinian halka olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ genelleştirilmiş sol temel projektif halkadır.

İspat: $n \in \mathbb{Z}^+$ için R^n sağ R -modülünün endomorfizma halkası $M_n(R)$ olduğundan ispat Teorem 5.1.24 gereğince açıktır. $\square$

Bir modül bütün bölüm modüllerini eş-üretirse modüle *öz-eş-üreteç* (*self-cogenerator*) adı verilir (Wisbauer 1991). Aşağıdaki sonuç Önerme 5.2.1 in karşınının öz-eş-üreteç modüller için doğru olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.4 M bir modül ve $f \in S$ olsun.

- (1) Eğer bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için Sf^n projektif sol S -modül ise $N = \bigcap \{ \text{Kerg} \mid g \in S, \text{Im} f^n \leq \text{Kerg} \}$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.
- (2) Eğer M öz-eş-üreteç bir modül ve S genelleştirilmiş sol temel projektif halka ise M dual π -Rickarttır.

İspat: (1) Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için Sf^n projektif sol S -modül olsun. $Sf^n \cong S/l_S(f^n)$ olduğundan $l_S(f^n) = Se$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır. $ef^nM = 0$ olması nedeniyle $f^nM \leq (1-e)M$ dir. N nin tanımı gereğince $N \leq (1-e)M$ dir. $\text{Im} f^n \leq \text{Kerg}$ olacak biçimde $g \in S$ alınsın. Bu durumda $gf^nM = 0$ olup $gf^n = 0$ dır. Dolayısıyla $g \in l_S(f^n) = Se$ ve $ge = g$ olur. Buradan $g(1-e)M = 0$ olup $(1-e)M \leq \text{Kerg}$ elde edilir. Böylece $(1-e)M \leq N$ olduğundan $(1-e)M = N$ dir.

(2) M öz-eş-üreteç bir modül ve S genelleştirilmiş sol temel projektif halka olsun. $f \in S$ için $l_S(f^n) = Se$ ve $M/\text{Im} f^n$ modülü M tarafından eş-üretilecek şekilde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu sebeple $\bigcap \{ \text{Kerg} \mid g \in \text{Hom}(M/\text{Im} f^n, M) \} = 0$ dir (Wisbauer 1991). Dolayısıyla $\text{Im} f^n = \bigcap \{ \text{Kerg} \mid g \in S, \text{Im} f^n \leq \text{Kerg} \}$ olur. Böylece (1) deki şartlar sağlandığından $\text{Im} f^n$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. $\square$

Bir M modülü için eğer S von Neumann düzenli halka ise M nin dual Rickart modül olduğu Teorem 3.2.4 den bilinmektedir. Benzer bir sonuç dual π -Rickart modüller için de bulunmaktadır.

Lemma 5.2.5 M bir modül olsun. Eğer S halkası π -düzenli ise M dual π -Rickarttır.

İspat: $f \in S$ alınsın. S halkası π -düzenli olduğundan $f^n = f^n g f^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $g \in S$ vardır. Burada $f^n g$ eşkare elemandır, bu eleman e ile gösterilsin. $f^n M = e f^n M \leq e M$ olduğu açıktır. Keyfi $m \in M$ için $em = f^n g m \in f^n M$ dir. Böylece $\text{Im } f^n = e M$ elde edilir. Dolayısıyla M dual π -Rickarttır. $\square$

Her güçlü π -düzenli halka π -düzenli olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.6 Endomorfizma halkası güçlü π -düzenli olan her modül dual π -Rickarttır.

Sonuç 5.2.6 nın karşıtı doğru değildir. Dual π -Rickart bir modülün endomorfizma halkasının güçlü π -düzenli olmayabileceği aşağıdaki örnekten görülmektedir.

Örnek 5.2.7 D bir bölümlü halka olsun. D üzerinde tabanı $\{e_i \in M \mid i = 1, 2, \dots\}$ olan sonsuz bir vektör uzayı M alınsın ve $S = \text{End}_D(M)$ olsun. M yarı basit sağ D -modül olduğundan dual π -Rickarttır. Ayrıca S düzenli halkadır (Wisbauer 1991), dolayısıyla π -düzenlidir. S nin güçlü π -düzenli olduğu kabul edilsin. Her $i = 1, 2, 3, \dots$ için $f(e_i) = e_{i+1}$ ile tanımlı $f \in S$ göz önüne alınsın. Kabul gereğince $f^n = f^{n+1} g$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $g \in S$ vardır. Böylece $f^n S = f^{n+1} S$ olup $f^n M = f^{n+1} M$ elde edilir. Her i için $f^n(e_i) = e_{i+n}$ olduğundan $f^n M = \sum_{i>n} e_i D \neq f^{n+1} M$ olup çelişki bulunur. Dolayısıyla S güçlü π -düzenli halka değildir.

Önerme 5.2.8 R bir değişmeli π -düzenli halka olsun. Sonlu üretilmiş projektif her R -modül dual π -Rickarttır.

İspat: M sonlu üretilmiş projektif bir R -modül olsun. M nin endomorfizma halkası, bir $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in M_n(R)$ için $e M_n(R) e$ dir. R değişmeli π -düzenli bir halka olduğundan $M_n(R)$ halkası da π -düzenli olup, Lemma 4.2.12 gereğince $e M_n(R) e$ de π -düzenlidir. Dolayısıyla Lemma 5.2.5 gereğince M dual π -Rickarttır. $\square$

Teorem 5.2.9 Bir M modülü D_2 şartını sağlasın. M nin dual π -Rickart olması için gerek ve yeter şart S nin π -düzenli olmasıdır.

İspat: Eğer S halkası π -düzenli ise Lemma 5.2.5 gereğince M dual π -Rickarttır. M nin dual π -Rickart olduğu kabul edilsin ve $0 \neq f \in S$ olsun. Bu durumda $\text{Im} f^n$ alt modülü M nin bir direkt toplananı olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $M/\text{Ker} f^n \cong \text{Im} f^n$ olduğundan D_2 şartı $\text{Ker} f^n$ nin de M nin bir direkt toplananı olmasını gerektirir. Lemma 4.2.20 gereğince S halkası π -düzenlidir. $\square$

Her yarı projektif modül D_2 şartını sağlar. Önerme 5.2.8 ve Teorem 5.2.9 gereğince aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.10 R bir değişmeli halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R halkası π -düzenlidir.
- (2) Her sonlu üretilmiş projektif R -modül dual π -Rickarttır.

Sonuç 5.2.11 M bir yarı projektif modül olsun. M nin dual π -Rickart modül olması için gerek ve yeter şart S halkasının π -düzenli olmasıdır.

Aşağıdaki sonuç π -düzenliliği sağlayan matris halkalarına Önerme 5.2.5 ve Teorem 5.2.9 ışığında bir uygulamadır. Teorem 5.1.16 da devirli projektif modüllerin dual π -Rickart olması için gerek ve yeter şart belirlenmiştir. Şimdi her sonlu üretilmiş projektif modüllerin dual π -Rickart olması için gerek ve yeter şart araştırılmaktadır.

Teorem 5.2.12 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n(R)$ halkası π -düzenlidir.
- (2) Her sonlu üretilmiş projektif R -modül dual π -Rickarttır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M sonlu üretilmiş projektif R -modül olsun. $M \cong eR^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in M_n(R)$ vardır. Dolayısıyla $S \cong eM_n(R)e$ olur. (1) gereğince S halkası π -düzenlidir. Böylece Lemma 5.2.5 ten M dual π -Rickarttır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için R^n projektif R -modülünün endomorfizma halkası $M_n(R)$ ye izomorftur. (2) gereğince R^n dual π -Rickarttır. Sonuç 5.2.11 gereğince de $M_n(R)$ halkası π -düzenlidir. $\square$

Sonuç 5.2.13 M bir yarı projektif modül ve N tam değişmez bir alt modülü olsun. Eğer M dual π -Rickart ise M/N de dual π -Rickarttır.

İspat: $f \in S$ olsun ve $\pi : M \rightarrow M/N$ doğal epimorfizma olmak üzere aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M/N \\ f \downarrow & & \downarrow f^* \\ M & \xrightarrow{\pi} & M/N \end{array}$$

N alt modülü M de tam değişmez olduğundan $\text{Ker}\pi \subseteq \text{Ker}(\pi f)$ dir. Çarpan Teoremi gereğince $f^*\pi = \pi f$ olacak biçimde bir tek f^* homomorfizması vardır. Böylece $\varphi : S \rightarrow \text{End}_R(M/N)$ homomorfizması keyfi $f \in S$ için $\varphi(f) = f^*$ ile tanımlanır. M yarı projektif olduğundan φ örtendir. Dolayısıyla $\text{End}_R(M/N) \cong S/\text{Ker}\varphi$ dir. Sonuç 5.2.11 gereğince S halkası π -düzenli olup $S/\text{Ker}\varphi$ de π -düzenlidir. Lemma 5.2.5 gereğince M/N dual π -Rickart olur. $\square$

Sonuç 5.2.14 M bir yarı projektif duo modül olsun. Eğer M dual π -Rickart ise M nin her N alt modülü için M/N de dual π -Rickarttır.

Sonuç 5.2.15 Eğer M bir yarı projektif dual π -Rickart modül ise $M/\text{Rad}(M)$ ve $M/\text{Soc}(M)$ de dual π -Rickarttır.

Önerme 5.2.16 M bir dual π -Rickart modül olsun. Bu durumda görüntüsü M de dar olan M nin her endomorfizması üstel sıfırdır.

İspat: $\text{Im}f$ alt modülü M nin dar alt modülü olacak biçimde $f \in S$ olsun. $\text{Im}f^n$ M nin bir direkt toplananı olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Ayrıca $\text{Im}f^n$ de M nin dar alt modülüdür. Dolayısıyla $f^n = 0$ dir. $\square$

Sonuç 5.2.17 M bir dual π -Rickart ayırık modül olsun. $J(S)$ nil ve $S/J(S)$ von Neumann düzenlidir.

İspat: M ayırık olduğundan Teorem 2.1.44 gereğince $J(S)$ görüntüsü M de dar olan endomorfizmalardan oluşur. Önerme 5.2.16 gereğince $J(S)$ nildir ve yine Teorem 2.1.44 gereğince $S/J(S)$ von Neumann düzenli olur. $\square$

Teorem 5.2.18 M bir modül olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) M dual π -Rickarttır.
- (2) S genelleştirilmiş sol temel projektif halkadır ve her bir $f \in S$ için $f^n M = r_M(l_S(f^n M))$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Önerme 5.2.1 gereğince $f \in S$ için $f^n M = r_M(l_S(f^n M))$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ bulunduğunu göstermek yeterlidir. M nin dual π -Rickart olması sebebiyle $f \in S$ için $f^n M = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Ayrıca $r_M(l_S(f^n M)) = r_M(l_S(eM)) = eM = f^n M$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $f \in S$ alınsın. S bir genelleştirilmiş sol temel projektif halka olduğundan $l_S(f^n M) = Se$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Hipotez gereğince $f^n M = r_M(l_S(f^n M)) = r_M(Se) = (1 - e)M$ olur. Böylece M bir dual π -Rickart modül olur. $\square$

Sonuç 5.2.19 Bir M modülünün dual π -Rickart olması için gerek ve yeter şart $f^n M = r_M(l_S(f^n M))$ ve $r_M(l_S(f^n M))$ alt modülü M nin bir direkt toplananı olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ olmasıdır.

Teorem 5.2.20 M bir dual π -Rickart modül olsun. Bu durumda S nin sol tekil ideali $Z(_S S)$ nil ve böylece $Z(_S S) \subseteq J(S)$ dir.

İspat: $f \in Z(_S S)$ olsun. M dual π -Rickart olduğundan $\text{Im}(f^n) = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ vardır. Önerme 5.2.1 gereğince $l_S(f^n) = S(1 - e)$ dir. $l_S(f^n)$ sol ideal olarak S de esas olduğundan $l_S(f^n) = S$ olur. Bu durumda $f^n = 0$ olup $Z(_S S)$ nildir. Diğer taraftan keyfi $g \in S$ ve $f \in Z(_S S)$ için benzer bir tartışmayla $(gf)^n = 0$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Dolayısıyla $1 - gf$ tersinirdir. Böylece $f \in J(S)$ olup $Z(_S S) \subseteq J(S)$ dir. $\square$

Sonuç 5.2.21 Bir π -düzenli R halkasının sol tekil ideali $Z(_R R)$ nildir.

Önerme 5.2.22 M bir modül olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) M parçalanamaz dual π -Rickart modüldür.

(2) S her elemanı ya epimorfizmadır ya da üstel sıfırdır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $f \in S$ olsun. Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f^n M$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. M parçalanamaz olduğundan $f^n M = 0$ ya da $f^n M = M$ dir. Bu durumda f epimorfizma ya da üstel sıfır olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $e^2 = e \in S$ olsun. Eğer e üstel sıfır ise $e = 0$ olur. Eğer e epimorfizma ise $e = 1$ dir. Dolayısıyla M parçalanamaz bir modüldür. Ayrıca $f \in S$ için $fM = M$ ya da bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f^n M = 0$ olduğundan M dual π -Rickarttır. $\square$

Teorem 5.2.23 Bir M modülü için aşağıdaki şartlar göz önüne alınsın.

(1) S yerel halka ve $J(S)$ nildir.

(2) M parçalanamaz dual π -Rickart modüldür.

Bu durumda (1) $\Rightarrow$ (2) dir. Eğer M yapılı modül ise (2) $\Rightarrow$ (1) dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) S nin her bir elemanı ya epimorfizmadır ya da üstel sıfırdır. Önerme 5.2.22 gereğince M parçalanamaz dual π -Rickart olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) $f \in S$ olsun. $f^n M = eM$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $e^2 = e \in S$ mevcuttur. Eğer $e = 1$ ise f epimorfizma olur. M yapılı bir modül olduğundan Önerme 2.1.41 gereğince f tersinirdir. Eğer $e = 0$ ise $f^n = 0$ olup $1 - f$ tersinirdir. Bu sebeple S halkası yereldir. $0 \neq f \in J(S)$ alınsın. f tersinir olmadığı ve M yapılı olduğu için f Önerme 5.2.22 gereğince üstel sıfırdır. Böylece $J(S)$ nil olur. $\square$

Teorem 5.2.23 ve Önerme 2.1.42 gereğince aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.24 M parçalanamaz dual π -Rickart bir modül olsun. Eğer M yapılı ise S sol ve sağ π -yapılı halkadır.

R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer her $b \in R$ için $b = ar$ olacak biçimde $r \in R$ varsa R ye a -bölünebilir (a -divisible) halka denir.

Sonuç 5.2.25 Bir R halkası için aşağıdakiler göz önüne alınsın.

(1) Her $a \in R$ için R halkası a -bölünebilir ya da a üstel sıfırdır.

(2) R parçalanamaz π -düzenlidir.

(3) R yerel ve $J(R)$ nildir.

Bu durumda $(3) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (1)$ dir. Eğer R sağ yapıli halka ise $(2) \Rightarrow (3)$ tür.

6. F -TERS PARÇALI MODÜLLER

6.1 F -Ters Parçalı Modüllerin Özellikleri

Bu bölümde F bir M modülünün tam değişmez alt modülü olmak üzere M nin F -ters parçalı olması tanımlanıp, bazı karakterizasyonları elde edilmektedir. Ayrıca F -ters parçalı M modülünün temel özellikleri incelenmektedir.

Tanım 6.1.1 F bir M modülünün tam değişmez bir alt modülü olsun. Eğer her $f \in S$ için $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplanamı oluyorsa M ye F -ters parçalı (F -inverse split) modül denir.

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe F , göz önüne alınan M modülünün tam değişmez bir alt modülünü gösterecektir. Her M modülünün M -ters parçalı modül olduğu açıktır. Her yarı basit M modülü F -ters parçalıdır ve böylece yarı basit bir halka üzerindeki her M modülü de F -ters parçalıdır. Bir M modülü ve $f \in S$ için $\text{Ker} f = f^{-1}(0)$ olduğundan M nin Rickart olması için gerek ve yeter şart 0-ters parçalı olmasıdır.

Önerme 6.1.2 Parçalanamaz F -ters parçalı her M modülü Rickart veya $F = M$ dir.

İspat: M parçalanamaz F -ters parçalı bir modül olsun. M nin birim endomorfizması 1 olmak üzere $1^{-1}(F) = F$ olduğundan $F = 0$ veya $F = M$ dir. $F = 0$ olması M nin Rickart olmasını gerektirir. $\square$

Teorem 6.1.3 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M modülü F -ters parçalıdır.
- (2) $M = F \oplus N$ ve $F = eM$ olacak biçimde N Rickart modülü ve sol yarı merkezi $e^2 = e \in S$ vardır.
- (3) $M = F \oplus N$ olacak biçimde N Rickart modülü vardır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M bir F -ters parçalı modül olsun ve 1_M ile M nin birim endomorfizması gösterilsin. Böylece $1_M^{-1}(F) = F$ alt modülü M nin bir direkt toplananı olup $M = F \oplus N$ olacak biçimde M nin bir N alt modülü vardır. $f \in \text{End}_R(N)$ olsun. $1_F \oplus f \in S$ olup bu homomorfizma g ile gösterilsin. $g^{-1}(F) = F \oplus \text{Ker} f$ dir. Kabul gereğince $g^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. Bu sebeple $\text{Ker} f$ de N nin bir direkt toplananı olur. Dolayısıyla N Rickarttır. Diğer taraftan $F = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır. Keyfi $h \in S$ için $heM \leq eM$ olduğundan $he = ehe$ elde edilir. Böylece e sol yarı merkezdur.

(3) $\Rightarrow$ (1) N Rickart modül olmak üzere $M = F \oplus N$ olsun ve $f \in S$ alınsın. π_N ile N üzerine olan izdüşüm gösterilsin. Bu durumda $\pi_N f|_N \in \text{End}_R(N)$ dir ve F nin tam değişmez alt modül olması $f^{-1}(F) = F \oplus \text{Ker}(\pi_N f|_N)$ olmasını gerektirir. N Rickart olduğundan $\text{Ker}(\pi_N f|_N)$ alt modülü N nin bir direkt toplananıdır. Dolayısıyla $f^{-1}(F)$ de M nin bir direkt toplananı olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Açıktır. □

Önerme 6.1.4 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) Her $f \in S$ için $f^{-1}(F) = eM$ olacak biçimde sol yarı merkezi $e^2 = e \in S$ vardır.
- (2) Her $f \in S$ için $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin tam değişmez bir direkt toplananıdır.
- (3) $M = F \oplus N$ olacak biçimde N güçlü Rickart modülü vardır.
- (4) M modülü F -ters parçalıdır ve M nin F yi kapsayan her direkt toplananı tam değişmezdir.
- (5) $M = F \oplus N$ ve her $f \in S$ için $f^{-1}(F) \cap N$ alt modülü N nin tam değişmez bir direkt toplananı olacak biçimde bir N alt modülü vardır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Açıktır. (2) $\Rightarrow$ (1) $f \in S$ alınsın. (2) gereğince $f^{-1}(F) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır. $f^{-1}(F)$ alt modülü M de tam değişmez olduğundan her $g \in S$ için $geM \leq eM$ olması $ge = ege$ olmasını gerektirir. Böylece e sol yarı merkezi eşkare elemandır.

(2) $\Rightarrow$ (4) M nin F -ters parçalı modül olduğu açıktır. N alt modülü M nin bir

direkt toplananı ve $F \subseteq N$ olsun. Bu durumda $N = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır. $(1 - e)^{-1}(F) = eM$ olup (2) gereğince N alt modülü M de tam değişmezdir. (4) $\Rightarrow$ (2) $f \in S$ olsun. M modülü F -ters parçalı olduğundan $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. Ayrıca F nin tam değişmez alt modül olması sebebiyle $F \subseteq f^{-1}(F)$ dir. Dolayısıyla (4) ten ispat biter.

(2) $\Rightarrow$ (3) M nin F -ters parçalı olduğu (2) den bilinmektedir. Teorem 6.1.3 gereğince $M = F \oplus N$ olacak biçimde bir N Rickart modülü vardır. $f \in \text{End}_R(N)$ alınsın. $\text{Ker} f$ nin N de tam değişmez olduğu iddia edilmektedir. Bunu görmek için $g \in \text{End}_R(N)$ ve $n \in \text{Ker} f$ alınsın. Bu durumda $n \in (0|_F \oplus f)^{-1}(F)$ olup (2) den $(0|_F \oplus g)(0|_F \oplus f)^{-1}(F) \subseteq (0|_F \oplus f)^{-1}(F)$ dir. Böylece $(0|_F \oplus g)(n) \in (0|_F \oplus f)^{-1}(F)$ olur. Dolayısıyla $fgn \in F \cap N = 0$ ve buradan $gn \in \text{Ker} f$ elde edilir. Bu sebeple $\text{Ker} f$ alt modülü N de tam değişmez olup N güçlü Rickarttır.

(3) $\Rightarrow$ (5) $M = F \oplus N$ ve N güçlü Rickart bir modül olsun. Bu durumda $N = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır ve $\text{End}_R(N) = eSe$ dir. $f \in S$ alınsın. Keyfi $x \in f^{-1}(F) \cap N$ için F alt modülü M de tam değişmez olduğundan $efe(x) = ef(x) \in F \cap eM = 0$ olup $x \in \text{Ker}(efe)$ dir. Buradan $f^{-1}(F) \cap N \subseteq \text{Ker}(efe)$ elde edilir. Şimdi $y \in \text{Ker}(efe) \subseteq N$ alınsın. $f(y) = a + b$ olacak biçimde $a \in F$ ve $b \in N$ vardır. $y \in N = eM$ olduğundan $efe(y) = ef(y) = 0$ dir. Ayrıca $ef(y) = ea + eb = ea + b$ olup $ea = -b \in F \cap N = 0$ dir. Bu nedenle $f(y) = a \in F$ ve böylece $y \in f^{-1}(F) \cap N$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}(F) \cap N = \text{Ker}(efe)$ dir. N nin güçlü Rickart olması nedeniyle $f^{-1}(F) \cap N$ alt modülü N nin tam değişmez bir direkt toplananıdır.

(5) $\Rightarrow$ (2) M nin bir N alt modülü için $M = F \oplus N$ olsun ve $f \in S$ alınsın. Modülerite şartı gereğince $f^{-1}(F) = F \oplus (f^{-1}(F) \cap N)$ olur. (5) şartından dolayı $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. $g \in S$ ve $\pi_N : M \rightarrow N$ doğal izdüşüm olsun. Bu durumda $g = (1 - \pi_N)g + \pi_N g$ şeklinde yazılır. Ayrıca $1 - \pi_N : M \rightarrow F$ dir. Böylece $(1 - \pi_N)g(f^{-1}(F)) \subseteq F$ olur. Diğer taraftan $\pi_N g(f^{-1}(F)) = \pi_N g(F) + \pi_N g(f^{-1}(F) \cap N)$ olduğu açıktır. F ve $f^{-1}(F) \cap N$ sırasıyla M ve N de tam değişmez olduğundan $\pi_N g(F) = 0$ ve $\pi_N(f^{-1}(F) \cap N) = f^{-1}(F) \cap N$ olup $\pi_N g(f^{-1}(F) \cap N) = \pi_N g \pi_N(f^{-1}(F) \cap N) \subseteq f^{-1}(F) \cap N$ dir. Keyfi $x \in f^{-1}(F)$ için $g(x) = (1 - \pi_N)g(x) + \pi_N g(x) \in (1 - \pi_N)g(f^{-1}(F)) + \pi_N g(f^{-1}(F)) \subseteq F + (f^{-1}(F) \cap N)$

$N = f^{-1}(F)$ dir. Bu sebeple $g(f^{-1}(F)) \leq f^{-1}(F)$ olup $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin tam değişmez bir alt modülüdür. $\square$

Bir R halkasında I nin ideal olması için gerek ve yeter şart I nin R sağ R -modülünün tam değişmez alt modülü olmasıdır.

Tanım 6.1.5 R bir halka ve bir ideali I olsun. Eğer R sağ R -modül olarak I -ters parçalı ise R ye *sağ I -ters parçalı halka* adı verilir.

R nin I ideali için sol I -ters parçalı halka olması benzer şekilde tanımlanır. Aşağıdaki örnek gereğince bir R halkasının I -ters parçalı olma kavramı sol-sağ simetrik değildir.

Örnek 6.1.6 F bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ halkası ve R nin $I = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ideali göz önüne alınsın. R nin $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$ sağ ideali için $R = I \oplus J$ dir. J basit R -modül olduğundan Rickarttır. Böylece Teorem 6.1.3 gereğince R sağ I -ters parçalıdır. Diğer taraftan I ideali R nin esas sol idealidir. Bu sebeple R sol R -modülünün bir direkt toplananı olamaz. Dolayısıyla R sol I -ters parçalı halka değildir.

Uyarı 6.1.7 R bir halka ve I bir ideali olsun. Eğer R halkası I -ters parçalı ise her $k \in K$ için $k^{-1}I = r_R(k)$ olacak biçimde R nin bir K sağ ideali vardır.

İspat: Teorem 6.1.3 gereğince $R = I \oplus K$ olacak biçimde R nin bir K sağ ideali vardır. Keyfi $k \in K$ için $kx \in I$ olması $kx = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $k^{-1}I = r_R(k)$ olduğu açıktır. $\square$

Önerme 6.1.8 R bir halka ve bir ideali I olsun. Eğer R sağ I -ters parçalı ise $\mathcal{A} = \{f^{-1}(I) \mid f \in \text{End}_R(R)\}$ olmak üzere her R -modül $\mathcal{A}$ -injektiftir. Eğer R sağ Rickart halka ise karşıtı da doğrudur.

İspat: M bir R -modül, $A \in \mathcal{A}$ ve $\alpha : A \rightarrow M$ bir homomorfizma olsun. R sağ I -ters parçalı olduğundan A sağ ideali R nin bir direkt toplananıdır. Dolayısıyla α homomorfizması R ye yükselir. Böylece M modülü $\mathcal{A}$ -injektiftir. Karşıtı için R

sağ Rickart halka olsun. I sağ R -modül olarak $\mathcal{A}$ -injektif ve $I \in \mathcal{A}$ olması sebebiyle $R = I \oplus J$ olacak biçimde R nin bir J sağ ideali vardır. Ayrıca R nin sağ Rickart olması J nin de R -modül olarak Rickart olmasını gerektirir. Teorem 6.1.3 gereğince R sağ I -ters parçalıdır. $\square$

Teorem 6.1.9 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M modülü F -ters parçalı ve her $f \in S$ için $\text{Ker } f$ alt modülü $f^{-1}(F)$ nin bir direkt toplananıdır.
- (2) M Rickart ve F alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M bir F -ters parçalı modül ve $f \in S$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. $\text{Ker } f$ de $f^{-1}(F)$ nin bir direkt toplananı olduğundan M nin de direkt toplananı olur. Bu sebeple M Rickarttır. Ayrıca Teorem 6.1.3 gereğince F de M nin direkt toplananıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1) M Rickart modül ve F alt modülü M nin bir direkt toplananı olsun. M nin $M = F \oplus N$ olacak biçimde bir N alt modülü vardır. Bu durumda N Rickart olup Teorem 6.1.3 gereğince M modülü F -ters parçalıdır. M Rickart ve her $f \in S$ için $\text{Ker } f$ de $f^{-1}(F)$ nin bir alt modülü olduğundan aynı zamanda bir direkt toplananıdır. $\square$

Lemma 6.1.10 M bir F -ters parçalı modül ve N de M nin tam değişmez bir alt modülü olsun. Eğer N nin her endomorfizması M nin bir endomorfizmasına genişlerse N alt modülü $(N \cap F)$ -ters parçalıdır.

İspat: İlk olarak $N \cap F$ nin N de tam değişmez olduğu gösterilsin. $f \in \text{End}_R(N)$ alınsın. Hipotez gereğince $g|_N = f$ olacak biçimde $g \in S$ vardır. N ve F alt modülleri M de tam değişmez olduğundan $f(N \cap F) = g(N \cap F) \leq g(N) \cap g(F) \leq N \cap F$ dir. $h \in \text{End}_R(N)$ olsun. Yine hipotez gereğince $\alpha|_N = h$ olacak biçimde $\alpha \in S$ mevcuttur. M nin F -ters parçalı olması sebebiyle $\alpha^{-1}(F) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır. N alt modülü M de tam değişmez olduğundan $e|_N$ homomorfizması $\text{End}_R(N)$ nin bir eşkare elemanıdır. $h^{-1}(N \cap F) \subseteq e|_N N$ olduğu açıktır. Diğer kapsamayı görmek için $n \in N$ alınsın. Bu durumda $he|_N n = \alpha en \in N \cap F$ ve böylece

$e_{|N}n \in h^{-1}(N \cap F)$ dir. Dolayısıyla $e_{|N}N \subseteq h^{-1}(N \cap F)$ olup $h^{-1}(N \cap F) = e_{|N}N$ elde edilir. Bu sebeple N modülü $(N \cap F)$ -ters parçalıdır. $\square$

Bir M modülünün yarı-injektif olması için gerek ve yeter şart injektif zarfı $E(M)$ de tam değişmez olmasıdır.

Önerme 6.1.11 M bir yarı-injektif modül olsun.

1. $E(M)$ nin tam değişmez bir alt modülü F olmak üzere eğer $E(M)$ modülü F -ters parçalı ise M de $(M \cap F)$ -ters parçalıdır.
2. Eğer M bir duo modül ve keyfi bir K alt modülü için K -ters parçalı ise M nin her N alt modülü $(N \cap K)$ -ters parçalıdır.

İspat: (1) Lemma 6.1.10 un bir sonucu olarak elde edilir.

(2) M bir duo modül ve bir K alt modülü için K -ters parçalı olsun. M nin bir N alt modülü ve $f \in \text{End}_R(N)$ alınsın. M yarı-injektif olduğundan f homomorfizması M nin bir g homomorfizmasına genişler. Bu durumda $g^{-1}(K) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ vardır. N alt modülü M de tam değişmez olduğundan Lemma 6.1.10 gereğince ispat biter. $\square$

Önerme 6.1.12 M bir F -ters parçalı modül olsun. Bu durumda M nin her N direkt toplananı $(N \cap F)$ -ters parçalıdır.

İspat: M nin bir direkt toplananı N olsun. Bu durumda $M = N \oplus K$ olacak biçimde M nin bir K alt modülü vardır. Keyfi $h \in \text{End}_R(N)$ için $h(N \cap F) = (h \oplus 0_K)(N \cap F) \leq h(N) \cap (h \oplus 0_K)(F) \leq N \cap F$ olması sebebiyle $N \cap F$ alt modülü N de tam değişmezdir. $f \in \text{End}_R(N)$ alınsın. Böylece $f \oplus 1_K \in S$ olur, $g = f \oplus 1_K$ olsun. M modülü F -ters parçalı olduğundan $g^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. Diğer taraftan F nin M de tam değişmez olması $F = (N \cap F) \oplus (K \cap F)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $g^{-1}(F) = f^{-1}(N \cap F) \oplus (K \cap F)$ dir. Buradan $f^{-1}(N \cap F)$ nin N nin bir direkt toplananı olduğu elde edilir. Böylece N de $(N \cap F)$ -ters parçalıdır. $\square$

Sonuç 6.1.13 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) Her M serbest R -modülü için M , F -ters parçalı olacak biçimde M nin bir F tam değişmez alt modülü vardır.
- (2) Her M projektif R -modülü için M , F -ters parçalı olacak biçimde M nin bir F tam değişmez alt modülü vardır.

Teorem 6.1.14 R bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (1) R sağ I -ters parçalı olacak biçimde R nin bir I ideali vardır.
- (2) Her M devirli projektif R -modülü için M , F -ters parçalı olacak biçimde M nin bir F tam değişmez alt modülü vardır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M devirli projektif bir R -modül olsun. Bu durumda M modülü R sağ R -modülünün bir direkt toplanamı J ye izomorftur. Bu izomorfizma $\alpha : J \rightarrow M$ ile gösterilsin. Önerme 6.1.12 gereğince J de $(J \cap I)$ -ters parçalıdır. M nin $\alpha(J \cap I)$ alt modülü N ile gösterilsin. Keyfi $f \in S$ için $\alpha^{-1}f\alpha \in \text{End}_R(J)$ dir ve $J \cap I$ sağ ideali J de tam değişmez olduğundan $\alpha^{-1}f\alpha(J \cap I) \subseteq J \cap I$ olur. Bu sebeple $f(N) \subseteq N$ olup N alt modülü M de tam değişmezdir. M nin N -ters parçalı olduğu iddia edilmektedir. $f \in S$ alınsın. J nin $(J \cap I)$ -ters parçalı olması nedeniyle $J = [(\alpha^{-1}f\alpha)^{-1}(J \cap I)] \oplus K$ olacak biçimde J nin bir K sağ ideali vardır. Böylece $M = \alpha((\alpha^{-1}f\alpha)^{-1}(J \cap I)) + \alpha K$ dir. $\alpha((\alpha^{-1}f\alpha)^{-1}(J \cap I)) = f^{-1}(N)$ olup $M = f^{-1}(N) + \alpha K$ elde edilir. Ayrıca bu toplam direkt toplamdır. Bunu görmek için $x \in f^{-1}(N) \cap \alpha K$ alınsın. Bu durumda $x = \alpha k$ olacak biçimde $k \in K$ ve $fx = f\alpha k \in N$ mevcuttur. Dolayısıyla $\alpha^{-1}fx = \alpha^{-1}f\alpha k \in J \cap I$ olup $k \in [(\alpha^{-1}f\alpha)^{-1}(J \cap I)] \cap K = 0$ dir. Buradan $x = 0$ ve de $M = f^{-1}(N) \oplus \alpha K$ olur. Böylece M modülü N -ters parçalıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır. □

Önerme 6.1.15 M bir yarı projektif modül olsun. Bu durumda M nin F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart M nin $K \subseteq F$ olacak biçimdeki her K alt modülü için M/K nin (F/K) -ters parçalı modül olmasıdır.

İspat: M bir F -ters parçalı modül, $K \subseteq F$ olacak biçimde $K \leq M$ ve $f \in \text{End}_R(M/K)$ olsun. $\pi : M \rightarrow M/K$ doğal izdüşüm olmak üzere, M yarı projektif

olduğundan $f\pi = \pi g$ olacak biçimde $g \in S$ vardır. Bu durumda $f(F/K) = f\pi(F) = \pi g(F) \leq \pi(F) = F/K$ olup F/K alt modülü M/K da tam değişmezdir. Teorem 6.1.3 gereğince $M = F \oplus N$ olacak biçimde N Rickart modülü bulunur. Buradan $M/K = (F/K) + ((N+K)/K)$ elde edilir. Ayrıca $(F/K) \cap ((N+K)/K) = 0$ olduğundan $M/K = (F/K) \oplus ((N+K)/K)$ dir. Diğer yandan $N \cong ((N+K)/K)$ ve N Rickart olması nedeniyle $(N+K)/K$ modülü de Rickarttır. Dolayısıyla M/K modülü F/K -ters parçalıdır. Eğer her $K \leq F \leq M$ için M/K modülü F/K -ters parçalı ise özel olarak $K = 0$ için M nin F -ters parçalı olduğu görülür. $\square$

Lemma 6.1.16 M bir F -ters parçalı modül ve N de M nin F yi kapsayan bir direkt toplananı olsun. M nin her K direkt toplananı için $N \cap K$ alt modülü de M nin bir direkt toplananıdır.

İspat: M nin bir direkt toplananı K olsun. Bu durumda $N = eM$ ve $K = fM$ olacak biçimde $e, f \in S$ eşkare elemanları mevcuttur. $F \subseteq eM$ olduğundan $eM = (1-e)^{-1}(F)$ dir. $((1-e)f)^{-1}(F) = (eM \cap fM) \oplus (1-f)M$ olduğu iddia edilmektedir. Bunu görmek için $m \in ((1-e)f)^{-1}(F)$ alınsın. $fm \in (1-e)^{-1}(F)$ olup $m = fm + (1-f)m \in (eM \cap fM) \oplus (1-f)M$ dir. Buradan $((1-e)f)^{-1}(F) \subseteq (eM \cap fM) \oplus (1-f)M$ elde edilir. Diğer kapsamayı görmek için $x+y \in (eM \cap fM) \oplus (1-f)M$ alınsın. Böylece $(1-e)f(x+y) = (1-e)fx + (1-e)fy = (1-e)x + (1-e)f(1-f)y = 0 \in F$ ve buradan $x+y \in ((1-e)f)^{-1}(F)$ dir. Dolayısıyla $(eM \cap fM) \oplus (1-f)M \subseteq ((1-e)f)^{-1}(F)$ olur. M modülü F -ters parçalı olduğundan $((1-e)f)^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. O halde $eM \cap fM$ de M nin bir direkt toplananı olur. $\square$

Lemma 6.1.16 gereğince aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Önerme 6.1.17 M bir F -ters parçalı modül olsun.

1. M nin her bir direkt toplananı K için $F \cap K$ da M nin direkt toplananıdır.
2. M modülü F yi kapsayan direkt toplananları için SIP ye sahiptir.

Önerme 6.1.18 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M modülü F -ters parçalı ve F yi kapsayan direkt toplananları için SSIP ye sahiptir.
- (2) S nin her sol ideali I için $(F : I)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.
- (3) S nin her alt kümesi I için $(F : I)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) S nin bir alt kümesi I olsun. $(F : I) = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(F)$ dir. M modülü F -ters parçalı olduğundan her $f \in I$ için $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. Ayrıca F nin M de tam değişmez olması her $f \in I$ için $F \subseteq f^{-1}(F)$ olmasını gerektirir. (1) gereğince $\bigcap_{f \in I} f^{-1}(F)$ de M nin bir direkt toplananı olur.

(3) $\Rightarrow$ (2) Açıktır. (2) $\Rightarrow$ (1) Her $f \in S$ için $f^{-1}(F) = (F : Sf)$ olması sebebiyle M modülü F -ters parçalıdır. $\{e_i M \leq M : e_i^2 = e_i \in S, F \subseteq e_i M, i \in J\}$ kümesi göz önüne alınsın ve S nin $\sum_{i \in J} S(1-e_i)$ sol ideali I ile gösterilsin. $\bigcap_{i \in J} e_i M = (F : I)$ olduğu iddia edilmektedir. Bunu görmek için $m \in \bigcap_{i \in J} e_i M$ alınsın. Bu durumda her $i \in J$ için $m = e_i m$ olup $S(1-e_i)m = 0$ dir. Böylece $Im \subseteq F$ olur ve $\bigcap_{i \in J} e_i M \subseteq (F : I)$ dir. Şimdi $m \in (F : I)$ alınsın. $Im \subseteq F$ olması her $i \in J$ için $m \in (1-e_i)^{-1}(F)$ olmasını gerektirir. $F \subseteq e_i M$ olduğundan her $i \in J$ için $(1-e_i)^{-1}(F) = e_i M$ dir. Dolayısıyla $i \in J$ olmak üzere $(F : I) \subseteq e_i M$ olup $(F : I) \subseteq \bigcap_{i \in J} e_i M$ elde edilir. Bu sebeple $\bigcap_{i \in J} e_i M$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. $\square$

Teorem 6.1.19 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M modülü F -ters parçalıdır.
- (2) S nin her sonlu üretilmiş sol ideali I için $(F : I)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.
- (3) S nin her sonlu alt kümesi I için $(F : I)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.

Ayrıca, eğer S sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz bir kümesine sahip değilse yukarıdaki şartlara denk olarak:

- (4) S nin her sol ideali I için $(F : I)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere S nin sonlu üretilmiş bir sol ideali $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ olsun. n üzerine tümevarım ile ispat tamamlanacaktır. Eğer $n = 1$ ise sonuç açıktır. $n > 1$ olsun ve $n - 1$ için iddianın doğru olduğu kabul edilsin. Bu durumda S nin $J = \langle f_1, f_2, \dots, f_{n-1} \rangle$ sol ideali için $(F : J)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. Diğer taraftan $(F : I) = (F : J) \cap f_n^{-1}(F)$ dir ve (1) gereğince $f_n^{-1}(F)$ de M nin bir direkt toplananıdır. $(F : J)$ ve $f_n^{-1}(F)$ alt modülleri F yi kapsadığından Önerme 6.1.17 gereğince $(F : I)$ de M nin bir direkt toplananıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1) F alt modülü M de tam değişmez olduğundan her $f \in S$ için $f^{-1}(F) = \{m \in M : Sfm \subseteq F\}$ dir. Böylece (2) gereğince $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır.

(1) $\Rightarrow$ (3) $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere S nin sonlu bir alt kümesi $I = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ için ispat (1) $\Rightarrow$ (2) nin ispatına benzer olarak yapılır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Her $f \in S$ için $f^{-1}(F) = (F : \{f\})$ olduğundan açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (4) Teorem 6.1.3 gereğince $M = F \oplus N$ olacak biçimde bir N Rickart modülü vardır. Hipotez gereğince de S , dolayısıyla $\text{End}_R(N)$ sıfırdan farklı dik eşkare elemanların sonsuz bir kümesine sahip değildir. Böylece Teorem 3.1.9 gereğince N bir Baer modül olur. S nin bir sol ideali I olsun ve $\pi : M \rightarrow N$ doğal izdüşüm olmak üzere $\mathcal{T} = \{\pi f|_N : f \in I\}$ göz önüne alınsın. $J = \text{End}_R(N)\mathcal{T}$ olmak üzere $(F : I) = F \oplus r_N(J)$ dir. N nin Baer olması $r_N(J)$ nin N nin bir direkt toplananı olmasını gerektirir. Böylece $(F : I)$ alt modülü M nin bir direkt toplananı olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) Önerme 6.1.18 gereğince açıktır. □

6.2 F -Ters Parçalı Modüllerin Direkt Toplamları

Önerme 6.2.1 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun. Eğer her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ de tam değişmez ise her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin F_i -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olmasıdır.

İspat: $i \in \mathcal{I}$ olmak üzere $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı ise Önerme 6.1.12 gereğince M_i de F_i -ters parçalı olur. Şimdi her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin F_i -ters parçalı olduğu kabul edilsin. $M = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$, $F = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ olsun ve $i, j \in \mathcal{I}$ için $f_{ij} \in \text{Hom}_R(M_j, M_i)$

olmak üzere $f = (f_{ij}) \in S$ alınsın. Hipotez gereğince $i \neq j$ olacak biçimdeki her $i, j \in \mathcal{I}$ için $\text{Hom}_R(M_j, M_i) = 0$ dır ve her $i \in \mathcal{I}$ için $f_{ii}^{-1}(F_i)$ alt modülü M_i nin direkt toplananıdır. Diğer taraftan $f^{-1}(F) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} f_{ii}^{-1}(F_i)$ dir. Böylece $f^{-1}(F)$ de M nin bir direkt toplananı olur. $\square$

Önerme 6.2.1 deki her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün tam değişmez alt modülü olması kabulü aşağıda görüldüğü gibi gereksiz değildir.

Örnek 6.2.2 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ halkası göz önüne alınsın ve R sağ R -modülü M ile gösterilsin. M nin $N = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ alt modülleri 0-ters parçalıdır fakat $M = N \oplus K$ modülü Örnek 3.1.4 gereğince 0-ters parçalı değildir.

Bir M modülünün abel olması için gerek ve yeter şart her direkt toplananının M de tam değişmez alt modül olmasıdır.

Sonuç 6.2.3 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ abel modül olsun. Bu durumda her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin F_i -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olmasıdır.

Önerme 6.2.4 R bir halka ve bir I ideali için sağ I -ters parçalı olsun. Her M abel serbest R -modülü $\mathcal{J}$ bir indeks kümesi olmak üzere $\bigoplus_{\mathcal{J}} I$ -ters parçalıdır.

İspat: M bir abel serbest R -modül olsun. $\mathcal{J}$ bir indeks kümesi ve her $i \in \mathcal{J}$ için $R_i = R$ olmak üzere M modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} R_i$ şeklindedir. Bu durumda Sonuç 6.2.3 gereğince R nin I -ters parçalı olması M nin $\bigoplus_{\mathcal{J}} I$ -ters parçalı olmasını gerektirir. $\square$

Önerme 6.2.5 Bir M modülü için aşağıdaki şartlar göz önüne alınsın.

- (1) M modülü F -ters parçalıdır.
- (2) $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. M nin n tane kopyasının direkt toplamı her $i = 1, \dots, n$ için $F_i = F$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ -ters parçalıdır.

Bu durumda (2) $\Rightarrow$ (1) dir. Ayrıca S von Neumann düzenli halka ise (1) $\Rightarrow$ (2) dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. Teorem 6.1.3 gereğince $M = F \oplus N$ olacak biçimde bir N Rickart modülü bulunur. Bu durumda $\bigoplus_{\mathcal{I}} M = (\bigoplus_{\mathcal{I}} F) \oplus (\bigoplus_{\mathcal{I}} N)$ olur. Ayrıca $\bigoplus_{\mathcal{I}} F$ alt modülü $\bigoplus_{\mathcal{I}} M$ de tam değişmezdir. Diğer yandan $\text{End}_R(N) = eSe$ olacak biçimde $e \in S$ eşkare elemanı vardır ve böylece $\text{End}_R(\bigoplus_{\mathcal{I}} N) = M_n(\text{End}_R(N))$ dir. S von Neumann düzenli bir halka ve von Neumann düzenli olma özelliği Morita değişmez olduğundan $\text{End}_R(\bigoplus_{\mathcal{I}} N)$ halkası da von Neumann düzenlidir. Teorem 3.1.7 gereğince $\bigoplus_{\mathcal{I}} N$ Rickarttır. Dolayısıyla $\bigoplus_{\mathcal{I}} M$ modülü $\bigoplus_{\mathcal{I}} F$ -ters parçalıdır. (2) $\Rightarrow$ (1) Önerme 6.1.12 gereğince açıktır. $\square$

Lemma 6.2.6 Herhangi bir Von Neumann düzenli halka üzerindeki her sonlu üretilmiş projektif M modülü F -ters parçalı olacak biçimde bir tam değişmez F alt modülüne sahiptir.

İspat: R von Neumann düzenli bir halka ve M sonlu üretilmiş projektif bir R -modül olsun. Bu durumda M sonlu üretilmiş serbest bir N modülünün direkt toplananıdır. Burada N modülü her $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ için $R_i = R$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^n R_i$ şeklinde alınabilir. R von Neumann düzenli olduğundan bir I ideali için I -ters parçalıdır. Önerme 6.2.5 gereğince her $i = 1, \dots, n$ için $I_i = I$ olmak üzere N modülü $\bigoplus_{i=1}^n I_i$ -ters parçalıdır. Dolayısıyla Önerme 6.1.12 gereğince M modülü $(M \cap (\bigoplus_{i=1}^n I_i))$ -ters parçalıdır. $\square$

Önerme 6.2.7 Herhangi bir Von Neumann düzenli halka üzerindeki her sonlu gösterilmiş M modülü F -ters parçalı olacak biçimde bir tam değişmez F alt modülüne sahiptir.

İspat: R von Neumann düzenli bir halka ve M sonlu gösterilmiş bir R -modül olsun. Bu durumda M düz modüldür. Ayrıca M sonlu gösterilmiş olduğundan sonlu üretilmiş ve projektif olur. Böylece Lemma 6.2.6 ile ispat tamamlanır. $\square$

6.3 Göreceli F -Ters Parçalı Modüller

Ters parçalı modül olma özelliğine sahip modüllerin direkt toplamlarının aynı özelliğe sahip olmayabileceği 6.2 Bölümden bilinmektedir. Bu modüllerin direkt toplamlarının da ters parçalı modül olma özelliğine sahip olduğu durumları incelemek için bu bölümde göreceli F -ters parçalı modül kavramı tanımlanmaktadır.

Tanım 6.3.1 M ile N iki R -modül ve N nin tam değişmez bir alt modülü F olsun. Eğer her $f : M \rightarrow N$ homomorfizması için $f^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananı oluyorsa M modülüne N ye göre F -ters parçalı veya kısaca N - F -ters parçalı adı verilir.

Açıkça bir M modülünün F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart M nin M - F -ters parçalı olmasıdır.

Teorem 6.3.2 M ile N iki R -modül ve N nin tam değişmez bir alt modülü F olsun. M nin N - F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart M nin her direkt toplananı M_1 ve N nin her direkt toplananı N_1 için M_1 in N_1 -($F \cap N_1$)-ters parçalı olmasıdır.

İspat: M modülü N - F -ters parçalı, M_1 ve N_1 sırasıyla M ve N nin direkt toplananları ve $f : M_1 \rightarrow N_1$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda $M = M_1 \oplus M_2$ olacak biçimde M nin bir M_2 alt modülü vardır ve $f \oplus 0_{|M_2} : M \rightarrow N$ olur. $g = f \oplus 0_{|M_2}$ ile gösterilsin. M modülü N - F -ters parçalı olduğundan $g^{-1}(F)$ alt modülü M nin bir direkt toplananıdır. $m_1 + m_2 \in g^{-1}(F)$ alınsın. Buradan $g(m_1 + m_2) = fm_1 \in F \cap N_1$ olup $g^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(F \cap N_1) \oplus M_2$ elde edilir. Ayrıca keyfi $m_1 + m_2 \in f^{-1}(F \cap N_1) \oplus M_2$ için $g(m_1 + m_2) = fm_1 \in F$ olup $f^{-1}(F \cap N_1) \oplus M_2 \subseteq g^{-1}(F)$ dir. Dolayısıyla $g^{-1}(F) = f^{-1}(F \cap N_1) \oplus M_2$ dir. Böylece $f^{-1}(F \cap N_1)$ de M_1 in bir direkt toplananı olur. Bu sebeple M_1 modülü N_1 -($F \cap N_1$)-ters parçalıdır. Karşıt olarak eğer M nin ve N nin sırasıyla her M_1 ve N_1 direkt toplananları için M_1 modülü N_1 -($F \cap N_1$)-ters parçalı ise M nin N - F -ters parçalı olduğu açıktır. $\square$

Sonuç 6.3.3 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M modülü F -ters parçalıdır.
- (2) M nin her N ve K direkt toplananları ve her $f : M \rightarrow K$ homomorfizması için $f|_N^{-1}(F \cap K)$ alt modülü N nin bir direkt toplananıdır.

Teorem 6.3.4 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i modülü M_j - C_2 olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün $Z_2(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i)$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j - $Z_2(M_j)$ -ters parçalı olmasıdır.

İspat: Eğer $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü $Z_2(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i)$ -ters parçalı ise Teorem 6.3.2 gereğince her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j - $Z_2(M_j)$ -ters parçalı olduğu açıktır. Şimdi her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j - $Z_2(M_j)$ -ters parçalı olduğu kabul edilsin. İspatı tamamlamak için $n = 2$ alınması yeterlidir. $M = M_1 \oplus M_2$ olsun ve $f \in \text{End}_R(M)$ nin matris gösterimi $f_{ij} : M_j \rightarrow M_i$ olmak üzere $f = f_{11} + f_{21} + f_{12} + f_{22}$ olsun. Sırasıyla M_1 ve M_2 modülleri $Z_2(M_1)$ -ters parçalı ve $Z_2(M_2)$ -ters parçalıdır. Bu durumda $M_1 = Z_2(M_1) \oplus L_{11}$ ve $M_2 = Z_2(M_2) \oplus L_{22}$ olacak biçimde L_{11} ve L_{22} Rickart modülleri vardır. Sırasıyla $f_{12} : M_2 \rightarrow M_1$ ve $f_{21} : M_1 \rightarrow M_2$ için kabul gereğince $M_2 = f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) \oplus L_{12}$ ve $M_1 = f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) \oplus L_{21}$ olacak biçimde $L_{12} \leq M_2$ ve $L_{21} \leq M_1$ bulunur. $Z_2(M_1) \leq f_{21}^{-1}(Z_2(M_2))$ ve $Z_2(M_2) \leq f_{12}^{-1}(Z_2(M_1))$ olduğundan $f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) = Z_2(M_1) \oplus [f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) \cap L_{11}]$ ve $f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) = Z_2(M_2) \oplus [f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) \cap L_{22}]$ dir. Buradan $M = Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2) \oplus [f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) \cap L_{11}] \oplus [f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) \cap L_{22}] \oplus L_{12} \oplus L_{21}$ elde edilir. $Z_2(M) = Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2)$ olması nedeniyle $[f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) \cap L_{11}] \oplus [f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) \cap L_{22}] \oplus L_{12} \oplus L_{21}$ tekil olmayan bir modüldür. Ayrıca $[f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) \cap L_{11}] \oplus L_{21}$ ve $[f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) \cap L_{22}] \oplus L_{12}$ modülleri göreceli C_2 dir ve Teorem 6.3.2 gereğince de $[f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) \cap L_{11}] \oplus L_{21}$ ve $[f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) \cap L_{22}] \oplus L_{12}$ modülleri birbirlerine göre göreceli $Z_2(\cdot)$ -ters parçalıdır. Her iki modül de tekil olmayan olduğundan Teorem 3.1.11 gereğince $[f_{21}^{-1}(Z_2(M_2)) \cap L_{11}] \oplus [f_{12}^{-1}(Z_2(M_1)) \cap L_{22}] \oplus L_{12} \oplus L_{21}$ Rickarttır. Böylece M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalıdır. $\square$

Endomorfizma halkası von Neumann düzenli olan her modülün C_2 şartını sağladığı Teorem 3.1.7 den bilinmektedir. Önerme 6.2.5(1) $\Rightarrow$ (2) de göz önüne alınan modülün endomorfizma halkasının von Neumann düzenli olması şartı Teorem 6.3.4 gereğince aşağıdaki gibi zayıflatılabilir.

Sonuç 6.3.5 M bir $Z_2(M)$ -ters parçalı ve C_2 şartını sağlayan bir modül olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ ve her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $M_i = M$ olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ modülü $Z_2(\bigoplus_{i=1}^n M_i)$ -ters parçalıdır.

Önerme 6.3.6 R bir sağ $Z_2(R_R)$ -ters parçalı sağ C_2 halka olsun. Bu durumda her P sonlu üretilmiş projektif R -modül $Z_2(P)$ -ters parçalıdır.

İspat: P sonlu üretilmiş projektif bir R -modül olsun. Bu durumda P sonlu üretilmiş bir F serbest R -modülünün direkt toplananıdır. Sonuç 6.3.5 gereğince F modülü $Z_2(F)$ -ters parçalıdır. Böylece Önerme 6.1.12 den ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 6.3.7 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun. $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün bir F tam değişmez alt modülünün olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin, $j \in \mathcal{I}$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ olmak üzere $fF_i \subseteq F_j$ olacak biçimde bir F_i tam değişmez alt modülü olmasıdır.

İspat: $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülünün bir tam değişmez alt modülü F olsun ve her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin $F \cap M_i$ alt modülü F_i ile gösterilsin. $i \in \mathcal{I}$ alınsın. Bu durumda F_i alt modülü M_i de tam değişmezdir. $j \neq i$ olacak biçimdeki keyfi $j \in \mathcal{I}$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ için $f \oplus 0|_{\bigoplus_{i \neq k \in \mathcal{I}} M_k} \in \text{End}_R(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i)$ endomorfizması g ile gösterilsin. F alt modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ de tam değişmez olduğundan herhangi $x \in F_i$ için $f(x) = g(x) \in F$ dir. Böylece $fF_i \subseteq F_j$ olduğu görülür. Şimdi her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin tam değişmez alt modülü F_i olsun ve her $j \in \mathcal{I}$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ için $fF_i \subseteq F_j$ olduğu kabul edilsin. $g_{ij} \in \text{Hom}_R(M_j, M_i)$ olmak üzere keyfi $g = [g_{ij}] \in \text{End}_R(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i)$ ve $x \in \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ için $gx \in \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ elde edilir. Dolayısıyla $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ alt modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ de tam değişmezdir. $\square$

Önerme 6.3.8 $\mathcal{I}$ bir indeks kümesi olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ve N bir R -modül olsun. Her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin, $j \in \mathcal{I}$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ olmak üzere $fF_i \subseteq F_j$ olacak biçimde bir F_i tam değişmez alt modülü olduğu kabul edilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Eğer N modülü SIP ye sahip ve $\mathcal{I}$ sonlu ise N nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart N nin her $i \in \mathcal{I}$ için M_i - F_i -ters parçalı olmasıdır.
- (2) Eğer N modülü SSIP ye sahip ve $\mathcal{I}$ keyfi ise N nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart N nin her $i \in \mathcal{I}$ için M_i - F_i -ters parçalı olmasıdır.
- (3) Eğer N modülü SSIP ye sahip ve $\mathcal{I}$ keyfi ise N nin $\prod_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\prod_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart N nin her $i \in \mathcal{I}$ için M_i - F_i -ters parçalı olmasıdır.

İspat: (1) $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. Eğer N modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı ise Teorem 6.3.2 gereğince her $i \in \mathcal{I}$ için N nin M_i - F_i -ters parçalı olduğu görülür. Şimdi her $i \in \mathcal{I}$ için N nin M_i - F_i -ters parçalı olduğu kabul edilsin ve $f \in \text{Hom}_R(N, \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i)$

alınsın. Her $i \in \mathcal{I}$ için $\pi_i : \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i \rightarrow M_i$ doğal izdüşüm olmak üzere $f = (\pi_1 f, \dots, \pi_n f)$ şeklindedir. Ayrıca $f^{-1}(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} (\pi_i f)^{-1}(F_i)$ dir. Kabul gereğince her $i \in \mathcal{I}$ için $(\pi_i f)^{-1}(F_i)$ alt modülü N nin bir direkt toplananıdır. N SIP ye sahip olduğundan $f^{-1}(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i)$ de N nin bir direkt toplananı olur.
(2) ve (3) önermeleri (1) e benzer şekilde ispatlanır. $\square$

Sonuç 6.3.9 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun. Her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin, $j \in \mathcal{I}$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ olmak üzere $fF_i \subseteq F_j$ olacak biçimde bir F_i tam değişmez alt modülü olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $j \in \mathcal{I}$ için M_j nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_j nin M_i - F_i -ters parçalı olmasıdır.

İspat: $j \in \mathcal{I}$ alınsın. Eğer M_j modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı ise Teorem 6.3.2 gereğince her $i \in \mathcal{I}$ için M_i - F_i -ters parçalı olduğu görülür. Şimdi M_j nin her $i \in \mathcal{I}$ için M_i - F_i -ters parçalı olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla M_j modülü F_j -ters parçalıdır, ayrıca Önerme 6.1.17 gereğince F_j alt modülünü kapsayan direkt toplananları için SIP ye sahiptir. Böylece Önerme 6.3.8(1) dekinе benzer bir tartışmayla ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 6.3.10 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun. Her $i < j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j -injektif olduğu kabul edilsin. Bu durumda bir R -modül N ve N nin tam değişmez bir alt modülü F için $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin N - F -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin N - F -ters parçalı olmasıdır.

İspat: N bir R -modül olsun. Eğer $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü N - F -ters parçalı ise Teorem 6.3.2 gereğince her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin N - F -ters parçalı olduğu görülür. Şimdi her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin N - F -ters parçalı olduğu kabul edilsin. $n = 2$ alınsın ve $f \in \text{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N)$ olsun. Bu durumda $\iota_{M_i} : M_i \rightarrow M_1 \oplus M_2$ içermi olmak üzere $f\iota_{M_i} \in \text{Hom}_R(M_i, N)$ dir, burada $i = 1, 2$ için $f\iota_{M_i}$ homomorfizması f_i ile gösterilsin. Böylece $M_1 = f_1^{-1}(F) \oplus L_1$ ve $M_2 = f_2^{-1}(F) \oplus L_2$ olacak biçimde M_1 ve M_2 nin sırasıyla L_1 ve L_2 alt modülleri vardır. $f_1^{-1}(F) \oplus f_2^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(F)$ olması nedeniyle $f^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \oplus f_2^{-1}(F) \oplus [f^{-1}(F) \cap (L_1 \oplus L_2)]$ dir. Teorem 6.3.2 gereğince $i = 1, 2$ için L_i modülü N - F -ters parçalıdır. Ayrıca $f_{|_{L_1 \oplus L_2}}^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap (L_1 \oplus L_2)$ dir. L_1

modülü L_2 -injektif ve $L_1 \cap [f^{-1}(F) \cap (L_1 \oplus L_2)] = 0$ olduğundan $L_1 \oplus L_2 = L_1 \oplus K$ ve $f^{-1}(F) \cap (L_1 \oplus L_2) \subseteq K$ olacak biçimde $L_1 \oplus L_2$ nin bir K alt modülü vardır. Açıkça $f_{|K}^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap (L_1 \oplus L_2)$ dir. $K \cong L_2$ olduğundan K modülü de N - F -ters parçalıdır. Böylece $f_{|K}^{-1}(F)$ alt modülü K nın bir direkt toplananıdır. Dolayısıyla $f^{-1}(F) \cap (L_1 \oplus L_2)$ de $L_1 \oplus L_2$ nin bir direkt toplananı olur. Bu durumda $f^{-1}(F)$ de $M_1 \oplus M_2$ nin bir direkt toplananıdır. Bu sebeple $M_1 \oplus M_2$ modülü N - F -ters parçalıdır. Şimdi $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ nin N - F -ters parçalı olduğu kabul edilsin ve $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ nin N - F -ters parçalı olduğu gösterilsin. $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ modülü M_n -injektif ve M_n modülü N - F -ters parçalı olduğundan önceki tartışma gereğince $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ modülü N - F -ters parçalıdır. Böylece n üzerine tümevarımla ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 6.3.11 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere R -modüllerin bir sınıfı $\{M_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ olsun. Her $i \in \mathcal{I}$ için M_i nin, $j \in \mathcal{I}$ ve $f \in \text{Hom}_R(M_i, M_j)$ olmak üzere $fF_i \subseteq F_j$ olacak biçimde bir F_i tam değişmez alt modülü olduğu ve her $i < j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j -injektif olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j - F_j -ters parçalı olmasıdır.

İspat: Eğer $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı ise Teorem 6.3.2 gereğince her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j - F_j -ters parçalı olduğu görülür. Şimdi her $i, j \in \mathcal{I}$ için M_i nin M_j - F_j -ters parçalı olduğu kabul edilsin. Sonuç 6.3.9 gereğince her $i \in \mathcal{I}$ için M_i modülü $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ - $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalıdır. Ayrıca Teorem 6.3.10 göz önüne alınarak $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i$ nin $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F_i$ -ters parçalı olduğu elde edilir. $\square$

6.4 $Z_2(\cdot)$ -Ters Parçalı Modüller

Bu kısımda bir modülün keyfi F tam değişmez alt modülü yerine ikinci tekil alt modülü alınarak $Z_2(\cdot)$ -ters parçalı modül olmanın bazı özellikleri incelenmektedir. T-Rickart modül kavramı ile $Z_2(\cdot)$ -ters parçalı modül kavramı denk olduğundan burada elde edilen sonuçlar sayesinde T-Rickart modüller hakkında daha fazla bilgi sahibi olunmaktadır.

Önerme 6.4.1 Her parçalanamaz genişleyen M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalı veya tekil olmayan bir modüldür.

İspat: M parçalanamaz genişleyen bir modül olsun. $Z_2(M)$ alt modülü M nin kapalı (closed) alt modülü olduğu için M nin bir direkt toplanamıdır. Bu durumda $Z_2(M) = 0$ veya $Z_2(M) = M$ dir. Böylece M tekil olmayan veya $Z_2(M)$ -ters parçalı bir modül olur. $\square$

Teorem 6.4.2 M bir Rickart modül olsun. Eğer M genişleyen bir modül ise $Z_2(M)$ -ters parçalıdır.

İspat: Önerme 2.1.8 gereğince M nin genişleyen olması için gerek ve yeter şart $M = Z_2(M) \oplus M'$ olacak biçimde $M' \leq M$ bulunması, M' ile $Z_2(M)$ nin genişleyen ve $Z_2(M)$ nin M' -injektif olmasıdır. Teorem 3.1.6 gereğince M' bir Rickart modüldür. Dolayısıyla Teorem 6.1.3 göz önüne alınarak M nin $Z_2(M)$ -ters parçalı olduğu görülür. $\square$

Önerme 6.4.3 Bir $Z_2(R_R)$ -yarı mükemmel R halkası üzerindeki her M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalıdır.

İspat: M bir R -modül olsun. Teorem 2.1.48 gereğince $M = Z_2(M) \oplus N$ olacak biçimde N yarı basit modülü vardır. N Rickart modül olduğundan Teorem 6.1.3 gereğince de M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalı olur. $\square$

Eğer bir M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalı ise Teorem 6.1.3 gereğince $M/Z_2(M)$ Rickart modüldür, fakat karşıtı aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi genelde doğru değildir.

Örnek 6.4.4 $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \text{ asal}\}$ olsun ve $M = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ sağ $\mathbb{Z}$ -modülü göz önüne alınsın. Burada $Z(M) = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ ve $Z_2(M) = Z(M)$ dir. $M/Z_2(M)$ genişleyen ve tekil olmayan bir modül olduğundan Rickarttır. Diğer taraftan $Z_2(M)$ alt modülü M nin bir direkt toplananı olmadığından Teorem 6.1.3 gereğince M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalı değildir.

Uyarı 6.4.5 Örnek 6.4.4 göz önüne alınarak bir M modülü ve N alt modülü için eğer M/N bir $Z_2(M/N)$ -ters parçalı modül ise M nin $Z_2(M)$ -ters parçalı olamayacağı söylenir. Örnek 6.4.4 te $M/Z_2(M)$ Rickart ve tekil olmayan modüldür, dolayısıyla da $Z_2(M/Z_2(M))$ -ters parçalıdır, fakat M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalı değildir.

Aşağıdaki örnekler gereğince Rickart modül olma ve $Z_2(\cdot)$ -ters parçalı modül olma özellikleri birbirlerini gerektirmez.

Örnekler 6.4.6 (1) Örnek 6.4.4 teki M modülü göz önüne alınsın. M nin $Z_2(M)$ -ters parçalı olmadığı bilinmektedir. Diğer yandan $S = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ von Neumann düzenli halkadır. Teorem 3.1.7 gereğince de M Rickarttır.

(2) $\mathbb{Z}_4$ sağ $\mathbb{Z}$ -modül olarak göz önüne alınsın. $Z(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4 = Z_2(\mathbb{Z}_4)$ olması sebebiyle $\mathbb{Z}_4$ modülü $Z_2(\mathbb{Z}_4)$ -ters parçalıdır. Diğer yandan $f(\bar{1}) = \bar{2}$ ile tanımlı $f \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4)$ için $r_{\mathbb{Z}_4}(f) = 2\mathbb{Z}_4$ olup $2\mathbb{Z}_4$ alt modülü $\mathbb{Z}_4$ ün bir direkt toplanamı değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_4$ Rickart değildir.

Önerme 6.4.7 Eğer M bir $Z(M)$ -ters parçalı modül ise $Z_2(M)$ -ters parçalıdır. Karşıtı R sağ tekil olmayan bir halka ise doğrudur.

İspat: M bir $Z(M)$ -ters parçalı modül olsun. Bu durumda $Z(M)$ alt modülü M nin bir direkt toplanamıdır. $Z(M)$ nin $Z_2(M)$ de esas alt modül olması nedeniyle $Z(M) = Z_2(M)$ olur. Böylece M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalıdır. Karşıtı için R nin sağ tekil olmayan halka olması Teorem 2.1.18 gereğince $Z(M) = Z_2(M)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla ispat biter. $\square$

Teorem 6.4.8 M ve M' iki R -modül ve $M \xrightarrow{f} M'$ bir epimorfizma olsun. Eğer M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalı ve $\text{Ker} f$ tekil ise M' de $Z_2(M')$ -ters parçalıdır.

İspat: Teorem 6.1.3 gereğince $M = Z_2(M) \oplus K$ olacak biçimde bir K Rickart tekil olmayan modülü vardır. Burada $Z_2(M) \subseteq f^{-1}(Z_2(M'))$ ve $f^{-1}(Z_2(M')) / \text{Ker} f \cong Z_2(M')$ olur. $Z_2(M')$ ve $\text{Ker} f$ Goldie torsion modüller olup Goldie torsion modüller sınıfı genişlemeye göre kapalı olduğundan $f^{-1}(Z_2(M'))$ modülü de Goldie torsion olur. M nin Goldie torsion alt modülü $Z_2(M)$ olduğundan $f^{-1}(Z_2(M')) \subseteq Z_2(M)$ dir. Böylece $f^{-1}(Z_2(M')) = Z_2(M)$ elde edilir. Bu sebeple $M' = Z_2(M') + f(K)$ dir. Bu toplamın direkt toplam olduğunu görmek için $Z_2(M') \cap f(K) = 0$ olduğu gösterilmelidir. f örten olduğundan $Z_2(M') = f(f^{-1}(Z_2(M'))) = f(Z_2(M))$ dir. $y \in Z_2(M') \cap f(K)$ alınsın. $y = f(x) = f(k)$ olacak biçimde $x \in Z_2(M)$ ve $k \in K$ vardır. Buradan $x - k \in \text{Ker} f$ olur. $\text{Ker} f$ tekil olduğundan yani $\text{Ker} f \subseteq Z(M) \subseteq Z_2(M)$ olduğundan $k \in Z_2(M)$ elde edilir. Bu sebeple $k = 0$ dir. Ayrıca

$\text{Ker } f \subseteq Z(M)$ olması $f|_K : K \rightarrow f(K)$ nın izomorfizma olmasını gerektirir. K Rickart olduğundan $f(K)$ modülü de Rickart olup ispat tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki sonuç yarı basit halkaların $Z_2(\cdot)$ -ters parçalı modülleri kullanarak elde edilen bir karakterizasyonudur.

Teorem 6.4.9 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (1) Her M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalı ve $Z_2(M)$ projektiftir.
- (2) R yarı basittir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M bir R -modül olsun. M nin $Z_2(M)$ -ters parçalı olması ve Teorem 6.1.3 gereğince $M = Z_2(M) \oplus N$ olacak biçimde Rickart bir N modülü vardır. Burada N bir tekil olmayan modüldür. Hipotez gereğince de $Z_2(M)$ projektiftir. Ayrıca Teorem 3.3.6 göz önüne alınarak N nin projektif olduğu görülür. Dolayısıyla M projektiftir. Böylece R yarı basittir.

(2) $\Rightarrow$ (1) M bir R -modül ve $f \in S$ olsun. R yarı basit olduğundan M de yarı basit olup $0 \rightarrow f^{-1}(Z_2(M)) \rightarrow M \rightarrow M/f^{-1}(Z_2(M)) \rightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanır. Bu sebeple M modülü $Z_2(M)$ -ters parçalıdır. Ayrıca $Z_2(M)$ de projektiftir. $\square$

R bir halka olsun. Eğer R sağ R -modülü $Z_2(R_R)$ -ters parçalı ise R ye *sağ $Z_2(R_R)$ -ters parçalı halka* adı verilir. Diğer bir deyişle, her $a \in R$ için $a^{-1}(Z_2(R_R)) = \{b \in R \mid ab \in Z_2(R_R)\}$ sağ ideali R nin bir direkt toplananı oluyorsa R sağ $Z_2(R_R)$ -ters parçalı halkadır. Sol $Z_2(\cdot)$ -ters parçalı halkalar benzer şekilde tanımlanır. Sol $Z_2(R_R)$ -ters parçalı halka ve sağ $Z_2(R_R)$ -ters parçalı halka olma özellikleri arasında bir ilişki yoktur.

Örnek 6.4.10 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ halkası göz önüne alınsın. R sağ tekil olmayan bir halkadır ve $x = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & \bar{0} \end{bmatrix}$ olmak üzere $Z({}_R R) = \{0, x\}$ dir. Ayrıca $m = \begin{bmatrix} 0 & \bar{0} \\ 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \in R$ olmak üzere $Z({}_R (R/Z({}_R R))) = \{0, \bar{m}\}$ olup $Z_2({}_R R) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ dir. Burada

$R = Z_2({}_R R) \oplus \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Rickart sol R -modüldür. Böylece Teorem

6.1.3 gereğince R sol $Z_2({}_R R)$ -ters parçalı halkadır. Diğer taraftan $y = \begin{bmatrix} 2 & \bar{0} \\ 0 & \bar{0} \end{bmatrix} \in R$

için $r_R(y) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ olup sağ ideal olarak R nin bir direkt toplanamı değildir.

Bu sebeple R sağ Rickart halka değildir. R nin sağ tekil olmayan bir halka olması nedeniyle de R aynı zamanda sağ $Z_2({}_R R)$ -ters parçalı halka değildir.

Uyarı 6.4.11 Her sol Rickart halka sol tekil olmayan bir halkadır ve böylece sol $Z_2(\cdot)$ -ters parçalıdır, fakat sol $Z_2(\cdot)$ -ters parçalı olup sol Rickart olmayan halkalar da mevcuttur. Örnek 6.4.10 da göz önüne alınan R halkası buna bir örnektir, yani sol $Z_2({}_R R)$ -ters parçalı olmasına rağmen sol Rickart değildir. Açık olarak, bir halkanın sol (sağ) Rickart olması için gerek ve yeter şart sol (sağ) $Z_2(R)$ -ters parçalı ve sol (sağ) tekil olmayan olmasıdır.

Ters parçalı modül olma özelliği genellikle bir modülden o modülü kapsayan bir başka modüle geçmez. Bunun için aşağıdaki örnek mevcuttur.

Örnek 6.4.12 Örnek 6.4.10 daki R halkası göz önüne alınsın ve R sağ R -modülü M ile, ayrıca M nin $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ alt modülü N ile gösterilsin. $\begin{bmatrix} 0 & \bar{0} \\ 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \in S$ eşkare elemanı için $N = \begin{bmatrix} 0 & \bar{0} \\ 0 & \bar{1} \end{bmatrix} M$ dir. N basit modül olduğundan Rickarttır. N nin tekil olmayan modül olması $Z_2(N)$ -ters parçalı olmasını gerektirir, fakat Örnek 6.4.10 gereğince M nin $Z_2(M)$ -ters parçalı olmadığı bilinmektedir.

KAYNAKLAR

- Agayev, N., Harmancı, A. ve Halıcıoğlu, S. 2010. On abelian rings. Turk. J. Math., 34, 465-474.
- Agayev, N., Halıcıoğlu, S. ve Harmancı, A. 2012. On Rickart modules. Bull. Iranian Math. Soc., 38(2), 433-445.
- Alkan, M. ve Harmancı, A. 2002. On summand sum and summand intersection property of modules. Turk. J. Math., 26, 131-147.
- Anderson, F.W. ve Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer-Verlag, 376, Berlin.
- Armendariz, E.P., Fisher, J.W. ve Snider, R.L. 1978. On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules. Comm. Algebra, 6(7), 659-672.
- Asgari, Sh. ve Haghany, A. 2011. t-Extending modules and t-Baer modules. Comm. Algebra, 39, 1605-1623.
- Birkenmeier, G.F. 1983. Idempotents and completely semiprime ideals. Comm. Algebra., 11, 567-580.
- Dung, N.V., Huynh, D.V., Smith, P.F. ve Wisbauer, R. 1994. Extending modules. Pitman Research Notes in Math. Ser. 313, Longman Scientific-Technical, 224, New York.
- Ebrahimi Atani, S., Khoramdel, M. ve Dolati Pish Hesari, S. 2012. T-Rickart modules. Colloq. Math., 128(1), 87-100.
- Ghorbani, A. ve Vedadi, M.R. 2009. Epi-Retractable modules and some applications. Bull. Iran. Math. Soc., 35(1), 155-166.
- Hattori, A. 1960. A foundation of the torsion theory over general rings. Nagoya Math. J., 17, 147-158.
- Hirano, Y. 1983. On generalized p.p.-rings, Mathematical Journal of Okayama University, 25(1), 7-11.
- Hmaimou, A., Kaidi, A. ve Sanchez Campos, E. 2007. Generalized fitting modules and rings. J. Algebra, 308(1), 199-214.
- Huang, Q. ve Chen, J. 2007. π -Morphic rings. Kyungpook Math. J., 47, 363-372.

- Huh, C., Kim, H.K. ve Lee, Y. 2002. p.p. rings and generalized p.p. rings. J. Pure Appl. Algebra, 167(1), 37-52.
- Kaplansky, I. 1968. Rings of operators. Math. Lecture Note Series, Benjamin, 150, New York.
- Lam, T.Y. 1999. Lectures on modules and rings. Springer-Verlag, 557, New York.
- Lam, T.Y. 2001. A first course in noncommutative rings. Springer-Verlag, 385, New York.
- Lee, G., Rizvi, S.T. ve Roman, C.S. 2010. Rickart modules. Comm. Algebra, 38(11), 4005-4027.
- Lee, G., Rizvi, S.T. ve Roman, C.S. 2011. Dual Rickart modules. Comm. Algebra, 39, 4036-4058.
- Lee, G., Rizvi, S.T. ve Roman, C.S. 2012. Direct sums of Rickart modules. J. Algebra, 353, 62-78.
- Maeda, S. 1960. On a ring whose principal right ideals generated by idempotents form a lattice. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 24, 509-525.
- Mohamed, S.H. ve Müller, B.J. 1990. Continuous and discrete modules. Cambridge University Press, 126, Cambridge.
- Nicholson, W.K. ve Sanchez Campos, E. 2004. Rings with the dual of the isomorphism theorem. J. Algebra, 271, 391-406.
- Nicholson, W.K. ve Sanchez Campos, E. 2005. Morphyic modules. Comm. Algebra, 33, 2629-2647.
- Nicholson, W.K. ve Zhou, Y. 2005. Strong lifting. J. Algebra, 285, 795-818.
- Ohori, M. 1984. On non-commutative generalized p.p. rings. Math. J. Okayama Univ., 26, 157-167.
- Özcan, A.Ç., Harmancı, A. ve Smith, P.F. 2006. Duo modules. Glasgow Math. J., 48(3), 533-545.
- Rizvi, S.T. ve Roman, C.S. 2004. Baer and quasi-Baer modules. Comm. Algebra, 32, 103-123.
- Rizvi, S.T. ve Roman, C.S. 2005. Baer property of modules and applications. In: Advances in Ring Theory, World Sci. Publ., 225-241, Hackensack, NJ.

- Rizvi, S.T. ve Roman, C.S. 2009. On direct sums of Baer modules. *J. Algebra*, 321, 682-696.
- Roos, J.E. 1967. Sur les categories spectrales localement distributives. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B*, 265, 14-17.
- Smith, P.F. 1981. Injective modules and prime ideals. *Comm. Algebra*, 9, 989-999.
- Vasconcelos, W.V. 1969. On finitely generated flat modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138, 505-512.
- Ware, R. 1971. Endomorphism rings of projective modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 155(1), 233-256.
- Wisbauer, R. 1991. *Foundations of module and ring theory*. Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 606, Düsseldorf.
- Yousif, M.F. ve Zhou, Y. 2002. Semiregular, semiperfect and perfect rings relative to an ideal. *Rocky Mountain J. Math.*, 32(4), 1651-1671.
- Zelmanowitz, J.M. 1972. Regular modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 163, 341-355.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Burcu ÜNGÖR
Doğum Yeri : İzmir
Doğum Tarihi : 02.09.1985
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Mehmetçik Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, Ankara
(Haziran 2003)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
(Haziran 2007)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Eylül 2007 - Ağustos 2009)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Araş. Gör. (2009 -)
Ohio University Center of Ring Theory and its Applications, Misafir Araştırmacı
(1 Ekim 2012 - 30 Haziran 2013)

SCI Yayınlar

- 1) H. Köse, **B. Üngör** ve S. Halıcıoğlu, A Generalization of Reduced Rings, Hacet. J. Math. Stat. 41(5)(2012), 689-696.
- 2) **B. Üngör**, S. Halıcıoğlu, M. A. Kamal ve A. Harmancı, Strongly Large Module Extensions, An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (S. N.) 59(2)(2013), 431-452.
- 3) **B. Üngör** ve S. Halıcıoğlu, Strongly Extending Modules, Hacet. J. Math. Stat. 42(5)(2013), 465-478.

Hakemli Dergilerdeki Yayınlar

- 1) **B. Üngör**, N. Agayev, S. Halıcıoğlu ve A. Harmancı, On Principally Quasi-Baer Modules, Albanian J. Math. 5(3)(2011), 165-173.
- 2) G. Kafkas, **B. Üngör**, S. Halıcıoğlu ve A. Harmancı, Generalized Symmetric Rings, Algebra Discrete Math. 12(2)(2011), 72-84.
- 3) **B. Üngör**, S. Halıcıoğlu ve A. Harmancı, Extensions of Baer and Principally Projective Modules, GU. J. Sci. 25(4)(2012), 863-867.
- 4) **B. Üngör**, G. Kafkas, S. Halıcıoğlu ve A. Harmancı, Some Properties of Rickart Modules, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 61(2)(2012), 1-8.
- 5) **B. Üngör**, N. Agayev, S. Halıcıoğlu ve A. Harmancı, Endo-Principally Projective Modules, Novi Sad J. Math. 43(1)(2013), 41-49.
- 6) H. Köse, **B. Üngör**, S. Halıcıoğlu ve A. Harmancı, Quasi-Reduced Rings, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 34(2013), 57-68.

Uluslararası Konferanslar

- 1) X. Antalya Algebra Days, Antalya, 28 Mayıs-1 Haziran 2008.
- 2) The 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society, Selçuk Üniversitesi, Konya, 20-23 Temmuz 2011. Bildirili.
- 3) The 31st Ohio State-Denison Mathematics Conference, Columbus, Ohio, USA, 25-27 Mayıs 2012. Bildirili.
- 4) The 1084th AMS Meeting, University of Akron, Akron, Ohio, USA, 20-21 Ekim 2012.
- 5) International Conference on Algebra in Honour of Patrick Smith's and John Clark's 70th Birthdays, Balıkesir, 12-15 Ağustos 2013. Bildirili.

Ulusal Konferanslar

- 1) III. Ankara Matematik Günleri, Ankara Üniversitesi, Ankara, 22-23 Mayıs 2008.
- 2) 6. Ankara Matematik Günleri, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 2-3 Haziran 2011. Bildirili.
- 3) 7. Ankara Matematik Günleri, Bilkent Üniversitesi, Ankara, 31 Mayıs-1 Haziran 2012. Bildirili.

Verdiği Seminer: The OSU-OU Ring Theory Seminar, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 3 Mayıs 2013.

Poster Sunumu: π -Day Celebration Poster Session, Ohio University, Athens, Ohio, USA, 14 Mart 2013.