

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTOGONAL POLİNOMLARIN İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ VE
UYGULAMALARI

Enta MEMET

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORTOGONAL POLİNOMLARIN İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ VE UYGULAMALARI

Enta MEMET

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Rabia AKTAŞ KARAMAN

Bu tezde tek değişkenli ortogonal polinomların integral dönüşümleri incelenmiş ve bazı uygulamaları verilmiştir. Bu kapsamda, ilk olarak Jacobi polinomları, genelleştirilmiş Laguerre polinomları, Hermite polinomlarının ve sonlu ortogonal polinomların Fourier dönüşümleri verilmiş, hemen ardından sonlu ortogonal polinom ailesi olan Routh-Romanovski polinomlarının çeşitli özellikleri incelenmiş ve Fourier dönüşümleri hesaplanmıştır. Daha sonra, simetrik ortogonal polinomlarının özel durumu olan genelleştirilmiş ultra-küresel polinomların, genelleştirilmiş Hermite polinomların, $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal olan polinomların iki sonlu ailesinin Fourier dönüşümleri elde edilmiştir. Ayrıca, Jacobi ortogonal polinomlarının ve özel durumları olan Legendre, Gegenbauer, birinci ve ikinci tür Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümleri incelenmiştir. Son olarak, ortogonal polinom açılımlarının Laplace dönüşümleri ele alınmış ve çeşitli uygulamaları verilmiştir.

Ocak 2024, 109 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ortogonal Polinom, Fourier Dönüşümü, Laplace Dönüşümü, Parseval Özdeşliği, Diferensiyel denklem, Beta Fonksiyonu, Gamma Fonksiyonu

ABSTRACT

Master Thesis

INTEGRAL TRANSFORMS OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATIONS

Enta MEMET

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Rabia AKTAŞ KARAMAN

In this thesis, integral transformations of orthogonal polynomials in one variable are examined and some applications are given. In this context, firstly, Fourier transforms of Jacobi polynomials, generalized Laguerre polynomials, Hermite polynomials and finite orthogonal polynomials are given, then various properties of Routh-Romanovski polynomials, which are finite orthogonal polynomial family, are examined and Fourier transforms are calculated. After then, Fourier transforms of generalized ultraspherical polynomials, generalized Hermite polynomials and two finite orthogonal families over the interval $(-\infty, \infty)$, which are special cases of symmetric orthogonal polynomials, are obtained. Moreover, finite Fourier transforms of Jacobi polynomials and their special cases such as Legendre polynomials, Gegenbauer polynomials, first kind and second kind of Chebyshev polynomials are studied. Finally, Laplace transforms of the expansions in terms of orthogonal polynomials are discussed and their various applications are given.

January 2024, 109 pages

Key Words: Orthogonal Polynomial, Fourier Transform, Laplace Transform, Parseval Identity, Differential Equation, Beta Function, Gamma Function

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında sunduğu özgür çalışma atmosferi, kıymetli yönlendirmeleri ve desteği ile değerli hocam ve tez danışmanım sayın Prof. Dr. Rabia Aktaş Karaman (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' a ve bu süre zarfında bana her türlü kolaylığı sağlamak adına uğraşıp didinen, maddi ve manevi desteklerini derinden hissettiren, stresli olduğum zamanlarımda bana yardımcı olan değerli aileme ve sözlüm Mehmet Rızgıç' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Enta MEMET
Ankara, Ocak 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
3. KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLARIN FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ	16
3.1 Jacobi Polinomları ve Fourier Dönüşümleri	17
3.2 Genelleştirilmiş Laguerre Polinomları ve Fourier Dönüşümleri ..	19
3.3 Hermite Polinomları ve Fourier Dönüşümleri	22
3.4 $N_k^{(a)}(x)$ Polinomları ve Fourier Dönüşümleri	24
3.5 $M_k^{(a,b)}(x)$ Polinomları ve Fourier Dönüşümleri	27
3.5.1 $M_k^{(a,b)}(x)$ polinomlarının Fourier dönüşümlerinin bir uygulaması.....	30
3.6 $I_k^{(a)}(x)$ Polinomları ve Fourier Dönüşümleri.....	32
4. ROUTH-ROMANOVSKI POLİNOMLARININ FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ	36
4.1 Routh-Romanovski Polinomlarının Normu	41
4.2 $I_k^{(a,b)}(x)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümleri.....	44
5. SİMETRİK ORTOGONAL POLİNOMLARININ FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ	47
5.1 Genelleştirilmiş Ultraküresel Polinomlar ve Fourier Dönüşümleri	47
5.2 Genelleştirilmiş Hermite Polinomları ve Fourier Dönüşümleri..	53
5.3 $(-\infty, \infty)$ Aralığında $x^{-2\sigma}(1+x^2)^{-\eta}$ Ağırlık Fonksiyonuna Göre Sonlu Simetrik Ortogonal Polinomlarının Fourier Dönüşümleri .	59
5.4 $(-\infty, \infty)$ Aralığında $x^{-2\sigma}e^{-\frac{1}{x^2}}$ Ağırlık Fonksiyonuna Göre Sonlu Simetrik Ortogonal Polinomlarının Fourier Dönüşümleri.....	65
6. JACOBI POLİNOMLARININ VE ÖZEL DURUMLARININ SONLU FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ	71
6.1 Jacobi Polinomlarının Sonlu Fourier Dönüşümleri	74
6.2 Jacobi Polinomlarının Özel Durumlarının Sonlu Fourier Dönüşümleri	79
6.3 Jacobi Polinomları İçin Biortogonalite	86

7. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İÇİN TRICOMİ YÖNTEMİ VE ORTOGONAL POLİNOMLAR	90
7.1 Laguerre Serisinin Laplace Dönüşümü İçin Tricomi Yöntemi ...	91
7.2 Kuvvet Serisinin Laplace Dönüşümü	92
7.3 Ortogonal Polinom Açılımlarının Laplace Dönüşümü	93
7.4 Sayısal Sonuçlar	95
7.4.1 $e^{i\pi u}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü	96
7.4.2 $J_0(2\sqrt{u})$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü	97
7.4.3 $\sin(u)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü	99
7.4.4 e^{-u^2} fonksiyonunun Laplace dönüşümü	101
8. TARTIŞMA VE SONUÇ	104
KAYNAKLAR	106
ÖZGEÇMİŞ	109



SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$B(x_1, x_2)$	Beta fonksiyonu
$(a)_\tau$	Pochhammer sembolü
${}_sF_t \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_s \\ b_1, b_2, \dots, b_t \end{matrix} \middle x \right)$	Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon
$p_k(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$	k-yıncı dereceden sürekli Hahn polinomu
$\bar{S}_k \left(\begin{matrix} -2w - 2v - 2 & 2w \\ -1 & 1 \end{matrix} \middle x \right)$	k-yıncı dereceden genelleştirilmiş ultraküresel polinomu
$\bar{S}_k \left(\begin{matrix} -2 & 2w \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle x \right)$	k-yıncı dereceden genelleştirilmiş Hermite polinomu
$P_k^{(a,b)}(x)$	k-yıncı dereceden Jacobi polinomu
$L_k^{(a)}(x)$	k-yıncı dereceden genelleştirilmiş Laguerre polinomu
$H_k(x)$	k-yıncı dereceden Hermite polinomu
$P_k(x)$	k-yıncı dereceden Legendre polinomu
$C_k^{(p)}(x)$	k-yıncı dereceden Gegenbauer polinomu
$T_k(x)$	k-yıncı dereceden birinci tür Chebyshev polinomu
$U_k(x)$	k-yıncı dereceden ikinci tür Chebyshev polinomu
$J_q(\mu)$	Bessel fonksiyonu
$\mathcal{F}(f(x))$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$\hat{P}(\mu)$	sonlu Fourier dönüşümü
$\mathcal{L}(f(x))$	f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 7.1 $f(u) = e^{i\pi u}$ fonksiyonunun $N = 100$ için ilgili $f_N(r)$ Laguerre polinom seri yaklaşımı ile karşılaştırılması	96
Şekil 7.2 $x = 1$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = e^{i\pi u}$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 100$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması	97
Şekil 7.3 $f(u) = J_0(2\sqrt{u})$ fonksiyonunun $N = 100$ için ilgili $f_N(r)$ Laguerre polinom seri yaklaşımı ile karşılaştırılması	98
Şekil 7.4 $y = 1$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = J_0(2\sqrt{u})$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 100$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması	99
Şekil 7.5 $y = 1$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = \sin(u)$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 100$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması	100
Şekil 7.6 $x = 5$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = e^{-u^2}$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 16$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması	103

1. GİRİŞ

İntegral dönüşüm, belirli bir $f(x)$ fonksiyonu ve $K(x, s)$ çekirdek fonksiyonunun çarpımının integrallenmesi ile yeni bir $F(s)$ fonksiyonu üreten bir operatördür ve

$$F(s) = \int_a^b K(x, s)f(x)dx$$

eşitliği ile ifade edilir. Çekirdek fonksiyon olarak çeşitli özel fonksiyonları içeren Fourier, Laplace, Beta, Mellin, vb. dönüşümleri gibi birçok integral dönüşüm matematik, fizik ve mühendisliğin birçok probleminde önemli rol oynamaktadır.

Bu süreçten sonraki aşamada diferensiyel denklemlerin çözümlerinde, çok büyük tamsayıların ve polinomların çarpımlarında, kompleks analizde, kriptolojide, görüntü analizi, görüntü filtreleme, görüntü sıkıştırma, elektron mikroskobu yöntemi gibi birçok alanda kullanılan Fourier dönüşümü, hem mühendisler hem de matematikçiler için çok yönlü bir araç haline gelmiştir.

Çekirdek fonksiyonu $K(x, s) = e^{-isx}$ olmak üzere her sonlu $[-L, L]$ aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ integrali yakınsak olan bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$F(s) = \mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx$$

ve ters Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}^{-1}(F) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{isx}ds$$

şeklinde tanımlanır (Davies 2002).

Diğer bir integral dönüşüm, çekirdek fonksiyonu $K(x, s) = e^{-sx}$ olarak seçildiğinde $x \geq 0$ için tanımlı olan $L > 0$ için $[0, L]$ üzerinde Riemann anlamında integralenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

olarak tanımlanır (Widder 1941).

Laplace dönüşümü, diferensiyel denklemleri çözmek için kullanışlı bir araç olmasının yanı sıra fizik, mühendislik ve otomasyon problemlerinde çeşitli uygulamalara sahiptir.

Ortogonal polinomlar nümerik analiz, yaklaşım teorisi, kombinatorik, graph teorisi, kodlama teorisi, sayılar teorisi gibi matematiğin birçok alanında; olasılık teorisi, stokastik süreçler, kuantum mekaniği, katı hal fiziği, optik, dijital sinyal işleme gibi diğer birçok alanda da çok sayıda uygulamalara sahiptir.

$J \subset \mathbb{R}$ üzerinde $\xi(x) \geq 0$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere polinomların lineer uzayı üzerinde tanımlanan bir iç çarpım

$$\langle u, v \rangle = \int_J u(x)v(x)\xi(x)dx$$

olsun. Bu iç çarpıma göre $\langle p_k, p_l \rangle = 0$, $l \neq k$ özelliğini sağlayan $\{p_k\}_{k \geq 0}$ polinomlarının dizisi ortogonal polinomların bir sistemini oluşturur (Szegő 1975). Klasik sürekli ortogonal polinom aileleri Laguerre polinomları, Hermite polinomları ve özel durumları Legendre, Chebychev ve ultraküresel polinomları veren Jacobi polinomlarıdır. Bu polinomların, matematik ve fiziğin birçok dalında çok sayıda uygulamaları görülmektedir (Hochstadt 1971).

(i) $P_k^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomları: $[-1, 1]$ aralığında

$$\xi(x) = (1-x)^a(1+x)^b \quad (a, b > -1)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Rainville 1960).

(ii) $L_k^{(a)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları: $[0, \infty)$ aralığında

$$\xi(x) = x^a e^{-x} \quad (a > -1)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Rainville 1960).

(iii) $H_k(x)$ Hermite polinomları: $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$\xi(x) = e^{-x^2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Rainville 1960).

Bu polinomlar $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ reel parametreler ve k bir doğal sayı olmak üzere

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)y_k'' + (\delta x + \varepsilon)y_k' = k(\delta + (k-1)\alpha)y_k \quad (1.1)$$

formundaki ikinci basamaktan bir diferensiyel denklemin polinom çözümleridir (Bochner 1929). Masjed-Jamei (Masjed-Jamei 2002) çalışmasında, (1.1) denkleminin sonlu

ortogonal polinom çözümlere sahip olabileceğini göstermiş ve böylece bir denklemin çözümleri olan aşağıdaki sonlu ortogonal polinom ailelerini incelemiştir.

(iv)

$$x(x+1)y_k''(x) + ((2-a)x+b+1)y_k'(x) - k(k+1-a)y_k(x) = 0$$

ikinci basamaktan diferensiyel denklemin çözümü olan $M_k^{(a,b)}(x)$ polinom ailesi $[0, \infty)$ aralığında $\xi(x) = x^b(1+x)^{-(a+b)}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu ortogonal polinom ailesidir ve

$$M_k^{(a,b)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=0}^k \binom{a-(k+1)}{n} \binom{b+k}{k-n} (-x)^n$$

formunda tanımlanır.

(v)

$$x^2 y_k''(x) + ((2-a)x+1)y_k'(x) - k(k+1-a)y_k(x) = 0$$

ikinci basamaktan diferensiyel denklemin çözümü olan $N_k^{(a)}(x)$ polinom ailesi $[0, \infty)$ aralığında $\xi(x) = x^{-a}e^{(-1/x)}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu ortogonal polinom ailesidir ve

$$N_k^{(a)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^k n! \binom{a-(k+1)}{n} \binom{k}{k-n} (-x)^n$$

formunda tanımlanır.

(vi)

$$(1+x^2)y_k''(x) + (3-2p)xy_k'(x) - k(k+2-2p)y_k(x) = 0$$

ikinci basamaktan diferensiyel denklemin çözümü olan $I_k^{(a)}(x)$ polinomları $(-\infty, \infty)$ aralığında $\xi(x) = (1+x^2)^{-(a-1/2)}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu ortogonal polinom ailesidir ve

$$I_k^{(a)}(x) = k! \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^n \binom{a-1}{k-n} \binom{k-n}{n} (2x)^{k-2n}$$

formunda tanımlanır.

Fourier dönüşümü yardımı ile bazı ortogonal polinom sistemlerinin birbirleri üzerine eşlenebildiği gösterilmiştir (Erdélyi vd. 1954). Bunun en iyi bilinen örneği

Hermite polinomlarının $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ile çarpımı olan Hermite fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar Fourier dönüşümlerinin özfonksiyonlarıdır (Koelink 1996, Koepf ve Masjed-Jamei 2007, Koornwinder 1985). Fourier-Jacobi dönüşümü yardımı ile klasik Jacobi polinomlarının Wilson polinomları ile eşlenebildiği Koornwinder'ın (Koornwinder 1985) ile verilen çalışmasında görülmektedir. Diğer yandan Koelink (Koelink 1996), Fourier dönüşümü yardımı ile Jacobi polinomları ve Hahn polinomlarının birbirleri üzerine eşlenebildiğini göstermiştir. Jacobi polinomlarının Fourier dönüşümünü sürekli Hahn polinomları cinsinden ifade etmiş ve Jacobi polinomları ile sürekli Hahn polinomları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Sonraki yıllarda simetrik ortogonal polinomlar olan genelleştirilmiş Hermite polinomları, genelleştirilmiş ultraküresel polinomları, Routh-Romanovski polinomları ve sonlu klasik ortogonal polinomlar için Fourier dönüşümleri hesaplanmış ve bu Fourier dönüşümü yardımı ile yeni ortogonal fonksiyon aileleri elde edilmiştir (Koepf ve Majed-Jamei 2007, Masjed-Jamei 2004, Masjed-Jamei vd. 2014, Masjed-Jamei ve Koepf 2012, Masjed-Jamei ve Koepf 2013). Diğer yandan, $[a, b]$ aralığında ortogonal olan bir $P(x)$ polinomunun

$$\widehat{P}(\mu) = \int_a^b P(x)e^{i\mu x} dx$$

sonlu Fourier dönüşümü 2015' de yapılan (Dixit vd. 2015) isimli çalışmada incelenmiştir.

Fourier dönüşümüne benzer olarak ortogonal polinomların Laplace dönüşümleri de çalışılmıştır (Lee 2020, Ricci vd. 2021). Laguerre polinomları cinsinden seriye açılan fonksiyonların Laplace dönüşümünü hesaplamak için bir metod Francesco G. Tricomi tarafından verilmiştir. Aynı metod Ricci, Caratelli ve Mainardi (Ricci vd. 2021) tarafından ortogonal polinom açılımlarına uygulanmış ve çeşitli nümerik sonuçlar verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, sonlu ve sonsuz klasik ortogonal polinom ailelerinin (Koelink 1996, Koepf ve Majed-Jamei 2007, Masjed-Jamei 2004), simetrik ortogonal polinomlar olan genelleştirilmiş Hermite polinomları ve genelleştirilmiş ultraküresel polinomların Fourier dönüşümleri (Masjed-Jamei ve Koepf 2012) ele alınacak ve Parseval özdeşliği yardımı ile elde edilen ortogonal fonksiyon aileleri incelenecektir. Jacobi, Legendre, Gegenbauer, birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının sonlu

Fourier dönüşimleri incelenecektir (Dixit vd. 2015). Ayrıca, ortogonal polinom açılımlarının Laplace dönüşimleri ele alınacak ve çeşitli uygulamaları verilecektir (Ricci vd. 2021).



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışması ile ilgili gerekli olan temel tanım ve toeremler verilecektir.

Tanım 2.1 $\Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \lambda^{z-1} e^{-\lambda} d\lambda \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

$B(z_1, z_2)$ Beta fonksiyonu $z_1 > 0$ ve $z_2 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B(z_1, z_2) &= \int_0^1 \lambda^{z_1-1} (1-\lambda)^{z_2-1} d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{z_1-1}}{(1+\lambda)^{z_1+z_2}} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(z_1) \Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)} = B(z_2, z_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

formunda ifade edilir (Rainville 1960).

Tanım 2.2 τ sıfır ya da pozitif bir tamsayı ve a kompleks ya da reel bir sayı olmak üzere $(a)_\tau$ ifadesi

$$\begin{aligned} (a)_\tau &= \frac{\Gamma(a+\tau)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+\tau-1) ; \quad \tau = 1, 2, \dots \\ (a)_0 &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

ile tanımlıdır. Bu ifadeye Pochhammer sembolü denir (Rainville 1960).

Lemma 2.1 $(a)_\tau$ Pochhammer sembolü

$$(1)_\tau = \tau! \quad (2.4)$$

$$(a)_{2\tau} = 2^{2\tau} \left(\frac{a}{2}\right)_\tau \left(\frac{a+1}{2}\right)_\tau \quad (2.5)$$

$$(a)_{\tau-n} = \frac{(a)_\tau}{(-a-\tau+1)_n (-1)^n} \quad (2.6)$$

$$(-\tau)_k = \frac{(-1)^k \tau!}{(\tau-k)!}, \quad k, \tau \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

$$(\tau+1)_k = \frac{(\tau+k)!}{\tau!}, \quad k, \tau \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

$$(-a)_\tau = (-1)^\tau (a-\tau+1)_\tau \quad (2.9)$$

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)_\tau = \frac{(2a)_{2\tau}}{2^{2\tau} (a)_\tau} \quad (2.10)$$

temel özelliklerini sağlar. Bunların birkaçının ispatına bakalım:

İspat. Pochhammer sembolünün tanımından,

$$\begin{aligned} (-\tau)_k &= (-\tau)(-\tau+1)\dots(-\tau+k-1) \\ &= (-1)^k \tau(\tau-1)\dots(\tau-k+1) \end{aligned}$$

olup son eşitlik $(\tau-k)!$ ile çarpılıp bölünürse

$$(-\tau)_k = \frac{(-1)^k \tau!}{(\tau-k)!}$$

bulunur.

Benzer şekilde Pochhammer sembolü tanımından,

$$\begin{aligned} (a)_{\tau-n} &= a(a+1)\dots(a+\tau-n-1) \\ &= \frac{(a)_\tau}{(a+\tau-n)\dots(a+\tau-1)} \\ &= \frac{(a)_\tau}{(-a-\tau+n)\dots(-a-\tau+1)(-1)^n} \\ &= \frac{(a)_\tau}{(-a-\tau+1)_n(-1)^n} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak yine Pochhammer sembolü tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} (a)_{2\tau} &= a(a+1)\dots(a+2\tau-1) \\ &= 2^{2\tau} \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a+1}{2}\right) \dots \left(\frac{a+2\tau-1}{2}\right) \\ &= 2^{2\tau} \left[\left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a+2}{2}\right) \dots \left(\frac{a+2\tau-2}{2}\right)\right] \left[\left(\frac{a+1}{2}\right) \left(\frac{a+3}{2}\right) \dots \left(\frac{a+2\tau-1}{2}\right)\right] \\ &= 2^{2\tau} \left(\frac{a}{2}\right)_\tau \left(\frac{a+1}{2}\right)_\tau \end{aligned}$$

bulunur. ■

Tanım 2.3 ${}_sF_t$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu

$${}_sF_t \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_s \\ b_1, \dots, b_t \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(a_1)_\tau \dots (a_s)_\tau}{(b_1)_\tau \dots (b_t)_\tau} \frac{x^\tau}{\tau!} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır (Rainville 1960) ve bu seri

$$\begin{cases} \text{tüm } x\text{'ler için yakınsaktır} & , s \leq t \\ |x| < 1 \text{ için yakınsaktır} & , s = t+1 \\ \text{tüm } x \neq 0\text{'ler için ıraksaktır} & , s > t+1 \end{cases}.$$

Burada $(a)_\tau$ Pochhammer sembolünü ifade etmektedir.

Sonuç 2.1 $s = 2$ ve $t = 0$ özel durumunda ${}_sF_t$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_0 \left(\begin{matrix} a_1, a_2 \\ - \end{matrix} \mid x \right) = \sum_{\tau=0}^{\infty} (a_1)_{\tau} (a_2)_{\tau} \frac{x^{\tau}}{\tau!} ,$$

$s = 2$ ve $t = 1$ özel durumunda ${}_2F_1$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1 \end{matrix} \mid x \right) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\tau} (a_2)_{\tau}}{(b_1)_{\tau}} \frac{x^{\tau}}{\tau!} \quad , \quad |x| < 1 ,$$

ve $s = 3$, $t = 2$ durumunda ise ${}_3F_2$ hipergeometrik fonksiyonu

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix} \mid x \right) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\tau} (a_2)_{\tau} (a_3)_{\tau}}{(b_1)_{\tau} (b_2)_{\tau}} \frac{x^{\tau}}{\tau!} \quad , \quad |x| < 1$$

formunda yazılır.

Tanım 2.4 f, g ve h reel parametreler olmak üzere Gauss diferensiyel denklemi

$$x(x-1)y'' + [h - (f+g+1)x]y' - fgy = 0 \quad (2.12)$$

ile tanımlıdır. Frobenius yöntemi kullanılarak $x = 0$ düzgün aykırı noktası civarında $y = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^{n+c}$ formunda serisel çözümü aranırsa hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned} y_1 &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} f, g \\ h \end{matrix} \mid x \right) \\ y_2 &= x^{1-h} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} f-h+1, g-h+1 \\ 2-h \end{matrix} \mid x \right) \end{aligned}$$

şeklinde çözümler elde edilir. Böylece, h parametresi sıfır ya da herhangi bir pozitif tamsayı olmadığı takdirde, (2.12) Gauss diferensiyel denkleminin genel çözümü hipergeometrik fonksiyonu cinsinden A_1 ve A_2 keyfi sabitler olmak üzere $|x| < 1$ için

$$y = A_1 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} f, g \\ h \end{matrix} \mid x \right) + A_2 x^{1-h} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} f-h+1, g-h+1 \\ 2-h \end{matrix} \mid x \right) \quad (2.13)$$

formunda yazılır (Altın 2020).

Tanım 2.5 $q_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $\alpha_k \neq 0$ için $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ lar sabit sayılar olsunlar.

$$q_k(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

şeklinde tanımlanan $q_k(x)$ fonksiyonuna k -yıncı dereceden bir polinom denir. Burada k sayısı polinomun derecesi ve $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ sayıları da polinomun katsayılarıdır. Eğer $\alpha_k = 1$ ise $q_k(x)$ polinomu monik polinom olarak isimlendirilir.

Tanım 2.6 F cismi reel sayılar cismi, X uzayı reel katsayılı polinomların uzayı olsun. Standart toplama ve çarpma işlemlerine göre $(X, +, \cdot)$ lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım, $\xi(x)$ fonksiyonu $J \subset \mathbb{R}$ aralığında pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = \int_J u(x) v(x) \xi(x) dx$$

şeklinde tanımlanır. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow F$ iç çarpım fonksiyonu

- i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- ii) $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- iii) $\langle cu + dv, w \rangle = c \langle u, w \rangle + d \langle v, w \rangle$ (c, d sabitler)

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.7 $J \subset \mathbb{R}$ aralığında k -yıncı dereceden $\vartheta_k(x)$ ve $\vartheta_l(x)$ polinomları reel değerli ve integrallenebilir olsunlar. $J \subset \mathbb{R}$ aralığında $\xi(x) \geq 0$ ağırlık fonksiyonuna göre bu polinomların ortogonallığı $k, l \in \mathbb{N}_0$ ve $k \neq l$ için

$$\langle \vartheta_k, \vartheta_l \rangle = \int_J \vartheta_k(x) \vartheta_l(x) \xi(x) dx = 0 \quad (2.14)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır ve $k = l$ durumunda ise $\vartheta_k(x)$ polinomlarının normu

$$\|\vartheta_k\| = \langle \vartheta_k, \vartheta_k \rangle^{1/2} = \left(\int_J \vartheta_k^2(x) \xi(x) dx \right)^{1/2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

şeklinde tanımlanır (Hochstadt 1971). Ayrıca $k, l \in \mathbb{N}_0$ için

$$\langle \vartheta_k, \vartheta_l \rangle = \int_J \vartheta_k(x) \vartheta_l(x) \xi(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanan $\{\vartheta_k(x)\}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) polinom kümesi ortonormal küme olarak adlandırılır.

Teorem 2.1 (Favard Teoremi) $J = [b, c]$ aralığında $\xi(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\{\vartheta_k\}$ ($k = 0, 1, \dots$) polinom ailesi, K_k, L_k ve M_k katsayıları k ya bağlı sabitler olmak üzere

$$x\vartheta_k(x) = \vartheta_{k+1}(x) + L_k\vartheta_k(x) + M_k\vartheta_{k-1}(x); \quad \vartheta_{-1}(x) = 0, \vartheta_0(x) = 1 \quad (2.15)$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlar ve bu polinom ailesi

$$\int_b^c \xi(x) \vartheta_k(x) \vartheta_l(x) dx = \left(\prod_{i=0}^{k-1} M_{i+1} \int_b^c \xi(x) dx \right) \delta_{k,l} \quad (2.16)$$

ortogonalite bağıntısını gerçekler (Chihara 1978). Burada $\delta_{k,l}$ Kronecker deltası gösterir ve

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.2 Bir J aralığında tanımlanmış,

$$L[y] = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (2.17)$$

denklemini göz önünde bulunduralım. L 'nin self-adjoint olmadığı durumlarda, (2.17) denklemi

$$g(x) = \frac{1}{a} \exp \left\{ \int^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \right\}$$

ile çarpılarak $g(x)L[y]$ ifadesi self-adjoint olur. Bu durumda, ikinci basamaktan (2.17) şeklindeki her lineer diferensiyel denklem $g(x)$ ile çarpılarak

$$\frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dy}{dx} \right] + s(x)y = 0$$

self-adjoint formuna getirilebilir (Altın 2020). Burada

$$\begin{aligned} r(x) &= \exp \left\{ \int^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \right\} \\ s(x) &= \frac{c(x)}{a(x)} \exp \left\{ \int^x \frac{b(t)}{a(t)} dt \right\} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.8 (S-L problemi) (b, c) aralığında tanımlı bir sınır değer problemi, $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ ve γ_2 sabitler ve $q(x), q'(x), r(x)$ ve $\xi(x)$ fonksiyonları $[b, c]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\left(q(x) \vartheta'_k(x) \right)' + (\mu_k \xi(x) - r(x)) \vartheta_k(x) = 0 ; \quad q(x) > 0, \xi(x) > 0 \quad (2.18)$$

denklemini ve

$$\begin{cases} \beta_1 \vartheta_k(b) + \gamma_1 \vartheta'_k(b) = 0 \\ \beta_2 \vartheta_k(c) + \gamma_2 \vartheta'_k(c) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

sınır koşulları ile verilsin. Bu şekilde verilen probleme regüler Sturm-Liouville problemi denir. Diğer yandan $x = b$ veya $x = c$ sınır noktalarında $q(x) = 0$ ya da (b, c) aralığı sonsuz ise bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir.

Teorem 2.3 (2.18)-(2.19) Sturm-Liouville sisteminde $q(x), r(x)$ ve $\xi(x)$ katsayı fonksiyonları $[b, c]$ aralığında sürekli olsunlar. Bununla birlikte μ_k ve μ_l özdeğerlerine karşılık gelen ϑ_k ve ϑ_l özfonksiyonları aynı aralıkta diferensiyellenebilir olsunlar. Böylece ϑ_k ve ϑ_l özfonksiyonları $[b, c]$ aralığında $\xi(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır (Altın 2020).

İspat. ϑ_k ve ϑ_l özfonksiyonları (2.18) diferensiyel denkleminin μ_k ve μ_l özdeğerlerine karşılık gelen iki çözümü olsunlar. ϑ_k fonksiyonu (2.18)-(2.19) probleminin bir çözümü ise

$$\left(q(x) \vartheta'_k(x) \right)' + (\mu_k \xi(x) - r(x)) \vartheta_k(x) = 0 \quad (2.20)$$

ve

$$\begin{cases} \beta_1 \vartheta_k(b) + \gamma_1 \vartheta'_k(b) = 0 \\ \beta_2 \vartheta_k(c) + \gamma_2 \vartheta'_k(c) = 0 \end{cases}$$

koşulları gerçekleşecektir. Burada k indisine bağlı bu eşitlik l indisine bağlı olarak tekrar yazılır ve denklemler sırasıyla $\vartheta_l(x)$ ve $\vartheta_k(x)$ ile çarpılarak taraf tarafa çıkarıldıktan sonra (b, c) aralığında integre edilirse

$$\begin{aligned} & (\mu_l - \mu_k) \int_b^c \xi(x) \vartheta_k(x) \vartheta_l(x) dx \\ &= q(c) \left[\vartheta_k(c) \vartheta'_l(c) - \vartheta'_k(c) \vartheta_l(c) \right] - q(b) \left[\vartheta_k(b) \vartheta'_l(b) - \vartheta'_k(b) \vartheta_l(b) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. ϑ_k ve ϑ_l sınır koşullarını gerçeklediğinden

$$\vartheta_k(c) \vartheta'_l(c) - \vartheta'_k(c) \vartheta_l(c) = 0 \text{ ve } \vartheta_k(b) \vartheta'_l(b) - \vartheta'_k(b) \vartheta_l(b) = 0$$

olup buradan

$$(\mu_l - \mu_k) \int_b^c \xi(x) \vartheta_k(x) \vartheta_l(x) dx = 0$$

elde edilir. $l \neq k$ için

$$\int_b^c \xi(x) \vartheta_k(x) \vartheta_l(x) dx = 0$$

gerçeklenir. Bu durumda ϑ_k ve ϑ_l çözümleri, (b, c) aralığında (2.18) sınır koşulları altında $\xi(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani

$$\int_b^c \xi(x) \vartheta_k(x) \vartheta_l(x) dx = \left(\int_b^c \xi(x) \vartheta_k^2(x) dx \right) \delta_{k,l} \quad (2.21)$$

gerçeklenir. ■

Şimdi de özel durumda regüler Sturm-Liouville problemini de içeren Sturm-Liouville probleminin simetrik bir genellemesini verelim.

Tanım 2.9 Her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\phi_k(-x) = (-1)^k \phi_k(x)$ eşitliğini sağlayan $\phi_k(x)$ fonksiyonuna simetrik bir fonksiyon denir.

Tanım 2.10 (Sturm-Liouville Probleminin Simetrik Bir Genellemesi)

$B(x), C(x), D(x), E(x)$ ve $F(x)$ keyfi fonksiyonlar ve $\{\lambda_k\}$ sabitler dizisi olmak üzere

$$B(x)\phi_k''(x) + C(x)\phi_k'(x) + \left(\lambda_k D(x) + E(x) + \frac{1 - (-1)^k}{2} F(x) \right) \phi_k(x) = 0 \quad (2.22)$$

diferensiyel denklemini sağlayan simetrik fonksiyonların bir dizisi $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ olsun. $F(x) = 0$ olduğunda (2.22) denklemi, (2.18) regüler Sturm-Liouville problemine eş değer olur. $\phi_k(x)$, (2.22) denkleminin $\phi_k(-x) = (-1)^k \phi_k(x)$ koşulunu sağlayan simetrik çözümü olduğundan $B(x), D(x), E(x)$ ve $F(x)$ çift fonksiyon, $C(x)$ ise tek fonksiyondur (Masjed-Jamei 2007a, 2020).

Teorem 2.4 $\phi_k(x)$ fonksiyonu, (2.22) denkleminin $\phi_k(-x) = (-1)^k \phi_k(x)$ koşulunu sağlayan bir simetrik çözümü ise

$$\int_{-\eta}^{\eta} W^*(x) \phi_k(x) \phi_l(x) dx = \left(\int_{-\eta}^{\eta} W^*(x) \phi_k^2(x) dx \right) \delta_{k,l} \quad (2.23)$$

ortogonallık özelliğini sağlar. Burada

$$\begin{aligned} W^*(x) &= D(x) \exp \left(\int \frac{C(x) - B'(x)}{B(x)} dx \right) \\ &= \frac{D(x)}{B(x)} \exp \left(\int \frac{C(x)}{B(x)} dx \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

ağırlık fonksiyonudur. $C(x) > 0$ için $W^*(x)$ pozitif ve $[-\eta, \eta]$ aralığında çift olan bir fonksiyondur (Masjed-Jamei 2007a, 2020).

(2.22) diferensiyel denkleminde,

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2(\alpha x^2 + \beta) = B(-x) \\ C(x) &= x(\gamma x^2 + \delta) = -C(-x) \\ D(x) &= x^2 = D(-x) \\ E(x) &= 0 = E(-x) \\ F(x) &= -\delta = F(-x) \end{aligned} \quad (2.25)$$

ve $\lambda_k = -k(\gamma + (k-1)\alpha)$ özel olarak seçilirse,

$$x^2(\alpha x^2 + \beta)\phi_k''(x) + x(\gamma x^2 + \delta)\phi_k'(x) - (k(\gamma + (k-1)\alpha)x^2 + (1 - (-1)^k)\delta/2)\phi_k(x) = 0 \quad (2.26)$$

denklemi elde edilir. Burada $k = 2l$ ve $k = 2l + 1$ için elde edilen denklemlere Frobenius metodu uygulanarak $x = 0$ düzgün aykırı noktası civarında $y = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^{n+c}$ formunda serisel çözüm aranır ve elde edilen çözümler birleştirilirse, (2.26) denkleminin polinom çözümü,

$$S_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) = \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{[k/2]}{n} \left(\prod_{j=0}^{[k/2]-(n+1)} \frac{(2j + (-1)^{k+1} + 2[k/2])\alpha + \gamma}{(2j + (-1)^{k+1} + 2)\beta + \delta} \right) x^{k-2n} \quad (2.27)$$

olarak bulunur (Masjed-Jamei 2007b, 2020). Burada $\prod_{j=0}^{-1} a_j = 1$ olarak kabul edilmektedir ve

$$\left[\frac{k}{2} \right] = \begin{cases} \frac{k}{2} & , \quad k \text{ çift ise} \\ \frac{k-1}{2} & , \quad k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir. Bu polinomun monik formu

$$\begin{aligned} \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) &= \prod_{j=0}^{[k/2]-1} \frac{(2j + (-1)^{k+1} + 2)\beta + \delta}{(2j + (-1)^{k+1} + 2[k/2])\alpha + \gamma} \\ &\times \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{[k/2]}{n} \left(\prod_{j=0}^{[k/2]-(n+1)} \frac{(2j + (-1)^{k+1} + 2[k/2])\alpha + \gamma}{(2j + (-1)^{k+1} + 2)\beta + \delta} \right) x^{k-2n} \end{aligned} \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda $\bar{S}_k$ monik polinomları

$$\bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) = x^k {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -[k/2], (\beta - \delta)/2\beta - [(k+1)/2] \\ -(\gamma + (2k-3)\alpha)/2\alpha \end{array} \middle| -\frac{\beta}{\alpha x^2} \right) \quad (2.29)$$

hipergeometrik gösterime sahiptir (Masjed-Jamei 2007b, Çelik 2020).

Teorem 2.5 $\bar{S}_k$ monik polinomları

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k+1}(x) &= x\bar{S}_k(x) + \Delta_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) \bar{S}_{k-1}(x), \\ \bar{S}_0(x) &= 1, \quad \bar{S}_1(x) = x, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

üç terimli rekürans bağıntısını gerçekler. Burada $\Delta_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & \\ \alpha & \beta & \end{array} \right)$ katsayısı

$$\Delta_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) = \frac{\alpha\beta k^2 + ((\gamma - 2\alpha)\beta - (-1)^k \alpha \delta)k + (\gamma - 2\alpha)\delta(1 - (-1)^k)/2}{(2\alpha k + \gamma - \alpha)(2\alpha k + \gamma - 3\alpha)} \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır (Masjed-Jamei 2007b, 2020).

Teorem 2.6 $\bar{S}_k$ monik polinomları

$$\begin{aligned} &\int_{-\eta}^{\eta} W^* \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) \bar{S}_l \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) dx \\ &= \left((-1)^k \prod_{j=1}^k \Delta_j \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) \int_{-\eta}^{\eta} W^* \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) dx \right) \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (2.32)$$

ortogonalite bağıntısını sağlarlar. Burada

$$\begin{aligned} W^* \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) &= x^2 \exp \left(\int \frac{(\gamma - 4\alpha)x^2 + (\delta - 2\beta)}{x(\alpha x^2 + \beta)} dx \right) \\ &= \exp \left(\int \frac{(\gamma - 2\alpha)x^2 + \delta}{x(\alpha x^2 + \beta)} dx \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

şeklinde (Masjed-Jamei 2007a, 2020, Çelik 2020).

Şimdi de tez boyunca kullanacağımız Fourier dönüşümü ve Laplace dönüşümünün tanımlarını verelim.

Tanım 2.11 Bir f fonksiyonu her sonlu $[-L, L]$ aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ integrali yakınsak olsun. O takdirde,

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \quad (2.34)$$

ifadesine f nin Fourier dönüşümü denir. Fourier teorisinin Parseval özdeşliği $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f(x)) \overline{\mathcal{F}(g(x))} dx \quad (2.35)$$

biçiminde tanımlanır (Davies 2002).

NOT: Bazı kaynaklarda f fonksiyonunun Fourier dönüşümü ayrıca

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx$$

olarak da verilebilmektedir.

Tanım 2.12 $f(x)$ fonksiyonu p üstel mertebeli, M ve K pozitif sabitler olmak üzere

$$e^{-px} |f(x)| \leq M, \quad \forall x > K$$

koşulunu sağlıyorsa bir $f(x)$ fonksiyonunun tüm $x \geq 0$ (reel sayıları) için tanımlı Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \quad (2.36)$$

olarak tanımlanır (Widder 1941).

3. KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLARIN FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

k pozitif bir tamsayı ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ parametreleri k dan bağımsız reel parametreler olmak üzere

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) y_k''(x) + (\delta x + \varepsilon) y_k'(x) - k(\delta + (k-1)\alpha) y_k(x) = 0 \quad (3.1)$$

formundaki bir diferensiyel denklemini self-adjoint forma dönüştürmek için pozitif bir $z(x)$ fonksiyonu ile çarparsak

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) z(x) y_k''(x) + (\delta x + \varepsilon) z(x) y_k'(x) - k(\delta + (k-1)\alpha) z(x) y_k(x) = 0$$

yazılabilir. Bu denklemin self-adjoint olabilmesi için

$$[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) z(x)]' = (\delta x + \varepsilon) z(x)$$

olmalıdır. Buradan

$$z(x) = e^{\int \frac{(\delta x + \varepsilon) - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)'}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx} = \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} e^{\int \frac{\delta x + \varepsilon}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx}$$

elde edilir. Böylece bu diferensiyel denklem self-adjoint formda

$$\left[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) z(x) y_k'(x) \right]' = k(\delta + (k-1)\alpha) z(x) y_k(x) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır.

1929' da Bochner, böylesi bir denklemin ortogonal polinom çözümlerinin Jacobi polinomları, genelleştirilmiş Laguerre polinomları ve Hermite polinomları olduğunu göstermiştir (Bochner 1929, Szegő 1975). 2002' de ise Masjed-Jamei bu denklemin sonlu ortogonal polinom çözümlere sahip olabileceğini göstermiş ve bu denklemin çözümleri olan sırası ile Jacobi, Laguerre ve ultraküresel polinomlarla ilişkili olan $M_k^{(a,b)}(x)$, $N_k^{(a)}(x)$, $I_k^{(a)}(x)$ sonlu ortogonal polinom aileleri üzerine çalışmıştır (Masjed-Jamei 2002). Böylece bu denklemin çözümü olan sonsuz klasik ortogonal polinom aileleri ve sonlu klasik ortogonal polinom aileleri olmak üzere 6 tane farklı ortogonal polinom ailesi vardır.

Bu bölümde ilk olarak klasik ortogonal polinomların tanımları verilecektir ve literatürde var olan Fourier dönüşümleri üzerine çalışılacaktır.

3.1 Jacobi Polinomları ve Fourier Dönüşümleri

(3.2) eşitliğinde özel olarak

$$\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -a - b - 2, \varepsilon = -a + b$$

değerleri seçildiğinde Jacobi diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem self-adjoint formda

$$\left[(1-x)^{1+a} (1+x)^{1+b} y'_k(x) \right]' = -k(k+a+b+1)(1-x)^a (1+x)^b y_k(x) \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. Serisel çözümü aranırsa

$$P_k^{(a,b)}(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{n=0}^k \binom{a+k}{k-n} \binom{b+k}{n} (x+1)^{k-n} (x-1)^n \quad (3.4)$$

şeklinde bir açık polinom çözümüne sahip olduğu görülür (Rainville 1960). Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned} P_k^{(a,b)}(x) &= \frac{(a+1)_k}{k!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k+a+b+1 \\ a+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right) \\ &= \frac{(a+1)_k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (a+b+k+1)_n}{2^n n! (a+1)_n} (1-x)^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

formunda yazılabilir ve Jacobi ortogonal polinomları

$$P_k^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^k}{dx^k} \left\{ (1-x)^{k+a} (1+x)^{k+b} \right\} \quad (3.6)$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. Bu polinomlar $k, l \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-x)^a (1+x)^b P_k^{(a,b)}(x) P_l^{(a,b)}(x) dx \\ &= \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a+k+1) \Gamma(b+k+1)}{k! (a+b+2k+1) \Gamma(a+b+k+1)} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ortogonallik bağıntısını sağlar (Rainville 1960).

Şimdi Jacobi polinomlarının Fourier dönüşümünü uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = (1 - \tanh x)^p (1 + \tanh x)^q P_k^{(a,b)}(\tanh x) \\ v(x) = (1 - \tanh x)^r (1 + \tanh x)^t P_l^{(c,d)}(\tanh x) \end{cases} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu belirlenen fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1 - \tanh x)^p (1 + \tanh x)^q P_k^{(a,b)}(\tanh x) dx \\
&= \int_{-1}^1 (1-y)^{p-1+\frac{1}{2}is} (1+y)^{q-1-\frac{1}{2}is} P_k^{(a,b)}(y) dy \\
&= 2^{p+q-1} \int_0^1 z^{p-1+\frac{1}{2}is} (1-z)^{q-1-\frac{1}{2}is} P_k^{(a,b)}(1-2z) dz \quad (3.9)
\end{aligned}$$

formunda olup burada sırasıyla $\tanh x = y$ ve $y = 1-2z$ değişken değişimi yapılmıştır ve

$$\frac{dy}{dx} = (\cosh x)^{-2} = (1 - \tanh x)(1 + \tanh x) \quad , \quad \frac{1 - \tanh x}{1 + \tanh x} = e^{-2x}$$

eşitlikleri kullanılmıştır. (3.9) eşitliğinde (3.5) ile verilen Jacobi polinomlarının hipergeometrik gösterimi ve (2.2) ile verilen Beta integrali kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(x)) &= 2^{p+q-1} \frac{(a+1)_k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (a+b+k+1)_n}{n! (a+1)_n} B\left(p+k+\frac{1}{2}is, q-\frac{1}{2}is\right) \\
&= 2^{p+q-1} \frac{(a+1)_k}{k!} B\left(p+\frac{1}{2}is, q-\frac{1}{2}is\right) \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (a+b+k+1)_n (p+\frac{1}{2}is)_n}{n! (a+1)_n (p+q)_n} \\
&= 2^{p+q-1} \frac{(a+1)_k}{k!} B\left(p+\frac{1}{2}is, q-\frac{1}{2}is\right) {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, a+b+k+1, p+\frac{1}{2}is \\ a+1, p+q \end{matrix} \middle| 1\right) \\
&= 2^{p+q-1} \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2}is) \Gamma(q-\frac{1}{2}is)}{\Gamma(p+q+k)} i^{-k} p_k\left(\frac{s}{2}; p, b-q+1, a-p+1, q\right) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $p_k(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sürekli Hahn polinomlarıdır ve

$$\begin{aligned}
&p_k(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad (3.11) \\
&= i^k \frac{(\alpha+\gamma)_k (\alpha+\delta)_k}{k!} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -k, k+\alpha+\beta+\gamma+\delta-1, \alpha+ix \\ \alpha+\gamma, \alpha+\delta \end{matrix} \middle| 1\right)
\end{aligned}$$

ile tanımlıdır. Burada $\mathbb{R}(p), \mathbb{R}(q) > 0$ dır (Koelink 1996).

Benzer şekilde $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1 - \tanh x)^r (1 + \tanh x)^t P_l^{(c,d)}(\tanh x) dx \quad (3.12) \\
&= 2^{r+t-1} \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2}is) \Gamma(t-\frac{1}{2}is)}{\Gamma(r+t+l)} i^{-l} p_l\left(\frac{s}{2}; r, d-t+1, c-r+1, t\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(3.8) eşitliğinde tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak (3.11) ve (3.12) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \tanh x)^{p+r} (1 + \tanh x)^{q+t} P_k^{(a,b)}(\tanh x) P_l^{(c,d)}(\tanh x) dx \\
&= i^{l-k} 2^{p+q+r+t-2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2}is) \Gamma(q - \frac{1}{2}is) \Gamma(r - \frac{1}{2}is) \Gamma(t + \frac{1}{2}is)}{\Gamma(p+q+k) \Gamma(r+t+l)} \\
&\quad \times p_k\left(\frac{s}{2}; p, b-q+1, a-p+1, q\right) p_l\left(\frac{s}{2}; r, d-t+1, c-r+1, t\right) ds \quad (3.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.13) eşitliğinin sol tarafında

$$a = c = p + r - 1 \quad \text{ve} \quad b = d = q + t - 1$$

ifadeleri seçilirse ve daha sonra (3.7) ortogonallik bağıntısı göz önüne alınırsa (3.13) denklemini son olarak

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(p + is) \Gamma(q - is) \Gamma(r - is) \Gamma(t + is) \\
& \quad \times p_k(s; p, t, r, q) p_l(s; r, q, p, t) ds \\
&= 2\pi \frac{\Gamma(p+q+k) \Gamma(r+t+k) \Gamma(p+r+k) \Gamma(q+t+k)}{k! (p+q+r+t+2k-1) \Gamma(p+q+r+t+k-1)} \delta_{k,l}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bunların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 (3.11) ile tanımlanan sürekli Hahn polinomları $\mathbb{R}(p)$, $\mathbb{R}(q)$, $\mathbb{R}(r)$, $\mathbb{R}(t) > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(p + is) \Gamma(q - is) \Gamma(r - is) \Gamma(t + is) \\
& \quad \times p_k(s; p, t, r, q) p_l(s; r, q, p, t) ds \\
&= \frac{\Gamma(p+q+k) \Gamma(r+t+k) \Gamma(p+r+k) \Gamma(q+t+k)}{k! (p+q+r+t+2k-1) \Gamma(p+q+r+t+k-1)} \delta_{k,l}
\end{aligned} \quad (3.14)$$

ortogonallik bağıntısına sahiptir (Koelink 1996).

3.2 Genelleştirilmiş Laguerre Polinomları ve Fourier Dönüşümleri

(3.2) eşitliğinde özel olarak

$$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = -1, \varepsilon = a + 1$$

değerleri seçildiğinde genelleştirilmiş Laguerre diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem self-adjoint formda

$$\left[x^{1+a} e^{-x} y_k'(x) \right]' = -k x^a e^{-x} y_k(x) \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır. Serisel çözümü aranırsa

$$L_k^{(a)}(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!} \binom{a+k}{k-n} (-x)^n \quad (3.16)$$

şeklinde bir açık polinom çözümüne sahip olduğu görülür. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned} L_k^{(a)}(x) &= (-1)^k (a+1)_k {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -k \\ a+1 \end{matrix} \middle| x \right) \\ &= (-1)^k (a+1)_k \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n}{n! (a+1)_n} x^n \end{aligned} \quad (3.17)$$

olarak yazılabilir ve genelleştirilmiş Laguerre ortogonal polinomları

$$L_k^{(a)}(x) = (-1)^k x^{-a} e^x \frac{d^k}{dx^k} \{ x^{k+a} e^{-x} \} \quad (3.18)$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. Bu polinomlar $k, l \in \mathbb{N}_0$ için

$$\int_0^\infty x^a e^{-x} L_k^{(a)}(x) L_l^{(a)}(x) dx = k! \Gamma(a+k+1) \delta_{k,l} \quad (3.19)$$

ortogonalite bağıntısını sağlar (Andrews vd. 1999). $a = 0$ özel durumunda $L_k^{(a)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları $L_k(x)$ Laguerre polinomlarına indirgenir.

Şimdi $L_k^{(a)}(x)$ polinomlarının Fourier dönüşümü için uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = e^{px - \frac{1}{2}e^x} L_k^{(a)}(e^x) \\ v(x) = e^{qx - \frac{1}{2}e^x} L_l^{(b)}(e^x) \end{cases} \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu belirlenen fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü

mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} e^{px - \frac{1}{2}e^x} L_k^{(a)}(e^x) dx = \int_0^{\infty} y^{-is-1+p} e^{-\frac{y}{2}} L_k^{(a)}(y) dy \\
&= (-1)^k (a+1)_k \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n}{n! (a+1)_n} \left(\int_0^{\infty} y^{-is-1+p+n} e^{-\frac{y}{2}} dy \right) \\
&= (-1)^k (a+1)_k \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (p-is)_n}{(a+1)_n n!} 2^{p-is+n} \Gamma(p-is+n) \\
&= (-1)^k (a+1)_k 2^{p-is} \Gamma(p-is) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, p-is \\ a+1 \end{matrix} \middle| 2 \right). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Burada ilk olarak $e^x = y$ değişken değişimi yapılmıştır, Gamma fonksiyonunun tanımı ve

$$\int_0^{\infty} y^{-p-is+k-1} e^{-\frac{1}{2y}} dy = 2^{p+is-k} \Gamma(p+is-k)$$

belirli integrali kullanılmıştır. Benzer işlemler uygulanarak $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} e^{qx - \frac{1}{2}e^x} L_l^{(b)}(e^x) dx \\
&= (-1)^l (b+1)_l 2^{q-is} \Gamma(q-is) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l, q-is \\ b+1 \end{matrix} \middle| 2 \right) \quad (3.22)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.20) eşitliğinde tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak (3.21) ve (3.22) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşü-

müne (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{(p+q)x} e^{-e^x} L_k^{(a)}(e^x) L_l^{(b)}(e^x) dx \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} y^{p+q-1} e^{-y} L_k^{(a)}(y) L_l^{(b)}(y) dy \\
&= (-1)^{k+l} (a+1)_k (b+1)_l \int_{-\infty}^{\infty} 2^{p-is} \Gamma(p-is) \overline{2^{q-is} \Gamma(q-is)} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, p-is \\ a+1 \end{matrix} \middle| 2 \right) \overline{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l, q-is \\ b+1 \end{matrix} \middle| 2 \right)} ds \\
&= 2^{p+q} (-1)^{k+l} (a+1)_k (b+1)_l \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(p-is) \overline{\Gamma(q-is)} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, p-is \\ a+1 \end{matrix} \middle| 2 \right) \overline{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l, q-is \\ b+1 \end{matrix} \middle| 2 \right)} ds
\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. Son olarak (3.23) eşitliğinde

$$a = b = p + q - 1$$

ifadeleri seçilerek ve daha sonra (3.19) ortogonallik bağıntısı göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 Genelleştirilmiş Laguerre polinomları $\mathbb{R}(a) > 0$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(p-is) \overline{\Gamma(a+1-p-is)} \\
& \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, p-is \\ a+1 \end{matrix} \middle| 2 \right) \overline{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l, a+1-p-is \\ b+1 \end{matrix} \middle| 2 \right)} ds \\
&= \frac{\pi k! \Gamma(a+1)}{2^a (a+1)_k} \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

ortogonallik bağıntısına sahiptir.

3.3 Hermite Polinomları ve Fourier Dönüşümleri

(3.2) eşitliğinde özel olarak

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -2, \varepsilon = 0$$

değerleri seçildiğinde Hermite diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem self-adjoint formda

$$\left[e^{-x^2} y'_k(x) \right]' = -2k e^{-x^2} y_k(x) \quad (3.25)$$

şeklinde yazılır. Serisel çözümü aranırsa

$$H_k(x) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^n n! \binom{k-n}{n} \binom{k}{k-n} (2x)^{k-2n} \quad (3.26)$$

şeklinde bir açık polinom çözümüne sahip olduğu görülür. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$H_k(x) = (2x)^k {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -\frac{k}{2}, \frac{-k+1}{2} \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{x^2} \right) \quad (3.27)$$

olarak yazılabilir ve Hermite ortogonal polinomları

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \quad (3.28)$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. Bu polinomlar $k, l \in \mathbb{N}_0$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_k(x) H_l(x) dx = 2^k k! \sqrt{\pi} \delta_{k,l} \quad (3.29)$$

ortogonalite bağıntısını sağlar (Andrews vd. 1999).

Şimdi gösterelim ki $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü kendisidir. Bunu göstermek için

$$P(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos(2xu) du \right)$$

integrali ile başlayalım. Bu eşitliğin her iki yanında x 'e göre türev alıp daha sonra bir kez kısmi integrasyon uygularsak

$$\frac{dP}{dx} = -2xP$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$P(x) = \rho e^{-x^2} \quad (3.30)$$

olarak bulunur. Burada $x = 0$ yazılmasıyla ρ sabiti

$$P(0) = \rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

bulunur. Sonuç olarak

$$P(x) = e^{-x^2}$$

elde edilir. Bu durumda $P(x)$ ' in tanımından ve $e^{isx} = \cos sx + i \sin sx$ Euler formülünden

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{2iux} du \quad (3.31)$$

ifadesine ulaşılır. Böylece e^{-x^2} fonksiyonunun Fourier dönüşümünün kendisine eşit olduğu gösterilmiştir. Benzer olarak Hermite polinomlarının tanımı kullanılarak

$$v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun Fourier dönüşümü de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\frac{u^2}{2}} H_k(u) du = i^k e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)$$

ifadesine eşit olur. Bu eşitlik gösterir ki i^k , Fourier dönüşümünün özdeğerleri ve $e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)$ fonksiyonu da Fourier dönüşümünün özfonksiyonudur (Andrews vd. 1999).

3.4 $N_k^{(a)}(x)$ Polinomları ve Fourier Dönüşümleri

(3.2) eşitliğinde özel olarak

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = -a + 2, \varepsilon = 1$$

değerleri seçildiğinde $N_k^{(a)}(x)$ polinomlarının diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem self-adjoint formda

$$\left[x^{2-a} e^{-\frac{1}{x}} y'_k(x) \right]' = k(k+1-a) x^{-a} e^{-\frac{1}{x}} y_k(x) \quad (3.32)$$

şeklinde yazılır. Frobenius metodu uygulanarak $x = 0$ düzgün aykırı noktası civarında $y = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^{n+c}$ formunda serisel çözümü aranır

$$N_k^{(a)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^k n! \binom{a-k-1}{n} \binom{k}{k-n} (-x)^n \quad (3.33)$$

şeklinde bir açık polinom çözümüne sahip olduğu görülür. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$N_k^{(a)}(x) = k! x^k \binom{a-k-1}{k} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -k \\ a-2k \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)$$

olarak yazılabilir ve

$$N_k^{(a)}(x) = (-1)^k x^a e^{\frac{1}{x}} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{2k-a} e^{-\frac{1}{x}} \right) \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. Bu polinomlar $[0, \infty)$ aralığında $x^{-a} e^{-\frac{1}{x}}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu ortogonaldır. Yani $k, l = 0, 1, 2, \dots, N_0 < \frac{a-1}{2}$,

$N_0 = maks \{k, l\}$ için

$$\int_0^\infty x^{-a} e^{-\frac{1}{x}} N_k^{(a)}(x) N_l^{(a)}(x) dx = \frac{k! (a-k-1)!}{a-2k-1} \delta_{k,l} \quad (3.34)$$

ortogonallik bağıntısını sağlar (Masjed-Jamei 2002).

Şimdi $N_k^{(a)}(x)$ polinomlarının Fourier dönüşümü için uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = e^{-px - \frac{1}{2}e^{-x}} N_k^{(a)}(e^x) \\ v(x) = e^{-qx - \frac{1}{2}e^{-x}} N_l^{(b)}(e^x) \end{cases} \quad (3.35)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu belirlenen fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(x)) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-isx} e^{-(px + \frac{1}{2}e^{-x})} N_k^{(a)}(e^x) dx = \int_0^\infty y^{-is-1-p} e^{-\frac{1}{2y}} N_k^{(a)}(y) dy \\ &= (-1)^k \sum_{n=0}^k \frac{(a-k-1)! k! (-1)^n}{(a-k-1-n)! n! (k-n)!} \left(\int_0^\infty y^{-is-1-p+n} e^{-\frac{1}{2y}} dy \right) \\ &= (-1)^k 2^{p+is} \Gamma(p+is) \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+1-a)_n (2^{-1})^n}{(1-p-is)_n n!} \\ &= (-1)^k 2^{p+is} \Gamma(p+is) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k+1-a \\ 1-p-is \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Burada ilk olarak $e^x = y$ değişken değişimi yapılmıştır ve

$$\int_0^\infty y^{-p-is+k-1} e^{-\frac{1}{2y}} dy = 2^{p+is-k} \Gamma(p+is-k)$$

belirli integrali kullanılmıştır. Benzer işlemler uygulanarak $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v(x)) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-isx} e^{-(qx + \frac{1}{2}e^{-x})} N_k^{(b)}(e^x) dx \\ &= (-1)^l 2^{q+is} \Gamma(q+is) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l, l+1-b \\ 1-q-is \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir.

(3.35) eşitliğinde tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak (3.36) ve (3.37) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p+q)x} e^{-e^{-x}} N_k^{(a)}(e^x) N_l^{(b)}(e^x) dx \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} y^{-(p+q+1)x} e^{-\frac{1}{y}} N_k^{(a)}(y) N_l^{(b)}(y) dy \\
&= (-1)^{k+l} 2^{p+q} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(p+is) \overline{\Gamma(q+is)} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k+1-a \\ 1-p-is \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) \overline{{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l, l+1-b \\ 1-q-is \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right)} ds
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. Son olarak (3.38) eşitliğinde

$$a = b = p + q + 1$$

ifadesi seçilerek ve daha sonra (3.34) ortogonallik bağıntısı dikkate alınarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2 $K_k^{(1)}(x; \alpha, \beta) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k-\alpha-\beta \\ 1-\alpha-x \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right)$ özel fonksiyonu

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+ix) \Gamma(\beta-ix) K_k^{(1)}(ix; \alpha, \beta) K_l^{(1)}(-ix; \beta, \alpha) dx \\
&= \frac{k! \Gamma(\alpha+\beta+1-k)}{(\alpha+\beta-2k) 2^{\alpha+\beta}} \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ortogonallik bağıntısına sahiptir. Burada $\alpha + \beta > 2k$ dir (Koepf ve Masjed-Jamei 2007).

Sonuç 3.2 Yukarıdaki teorem $k = l = 0$ durumunda

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+ix) \Gamma(\beta-ix) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{2^{\alpha+\beta}}$$

sonucunu verir.

3.5 $M_k^{(a,b)}(x)$ Polinomları ve Fourier Dönüşümleri

(3.2) eşitliğinde özel olarak

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 2 - a, \varepsilon = b + 1$$

değerleri seçildiğinde $M_k^{(a,b)}(x)$ polinomlarının diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem self-adjoint formda

$$\left[x^{1+b} (1+x)^{1-a-b} y'_k(x) \right]' = k(k+1-a) x^b (1+x)^{-a-b} y_k(x) \quad (3.40)$$

şeklinde yazılır. Frobenius yöntemi kullanılarak $x = 0$ düzgün aykırı noktası civarında $y = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n x^{n+c}$ formunda serisel çözümü aranır

$$M_k^{(a,b)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=0}^k \binom{a-(k+1)}{n} \binom{b+k}{k-n} (-x)^n \quad (3.41)$$

şeklinde bir açık polinom çözümüne sahip olduğu görülür. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$M_k^{(a,b)}(x) = (-1)^k k! \binom{b+k}{k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k-a+1 \\ b+1 \end{matrix} \middle| -x \right)$$

olarak yazılabilir ve

$$M_k^{(a,b)}(x) = (-1)^k \frac{(1+x)^{a+b}}{x^b} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{k+b} (1+x)^{k-a-b} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. Bu polinomlar $[0, \infty)$ aralığında $\frac{x^b}{(1+x)^{a+b}}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu ortogonaldır. Yani $k, l = 0, 1, 2, \dots, N_0 < \frac{a-1}{2}$ ve $b > -1, N_0 = \max\{k, l\}$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{x^b}{(1+x)^{a+b}} M_k^{(a,b)}(x) M_l^{(a,b)}(x) dx \\ &= \left(\frac{k! (a-(k+1))! (b+k)!}{(a-(2k+1)) (a+b-(k+1))!} \right) \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (3.42)$$

ortogonallik bağıntısını sağlar (Masjed-Jamei 2002).

Şimdi $M_k^{(a,b)}(x)$ polinomlarının Fourier dönüşümü için uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}} M_k^{(a,b)}(e^x) \\ v(x) = \frac{e^{\gamma x}}{(1+e^x)^{\gamma+\delta}} M_l^{(c,d)}(e^x) \end{cases} \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu belirlenen fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(u(x)) \tag{3.44} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}} M_k^{(a,b)}(e^x) dx = \int_0^{\infty} y^{-is-1} \frac{y^{\alpha}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} M_k^{(a,b)}(y) dy \\
&= (-1)^k k! \binom{b+k}{k} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n (-k)_n (k-a+1)_n}{(b+1)_n n!} \left(\int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-is-1+n}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy \right) \\
&= (-1)^k \frac{(b+k)!}{b!} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n (-k)_n (k-a+1)_n}{(b+1)_n n!} \frac{\Gamma(\alpha-is+n) \Gamma(\beta+is-n)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{(-1)^k \Gamma(b+k+1) \Gamma(\alpha-is) \Gamma(\beta+is)}{\Gamma(b+1) \Gamma(\alpha+\beta)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k-a+1, \alpha-is \\ b+1, 1-\beta-is \end{matrix} \middle| 1 \right).
\end{aligned}$$

Burada ilk olarak $e^x = y$ değişken değişimi yapılmıştır, daha sonrasında (2.2) ile verilen Beta integrali ve Pochhammer sembolünün

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha)_n \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)_n}$$

temel özellikleri kullanılmıştır. Benzer işlemler uygulanarak $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{e^{\gamma x}}{(1+e^x)^{\gamma+\delta}} M_l^{(c,d)}(e^x) dx \tag{3.45} \\
&= \frac{(-1)^l \Gamma(d+l+1) \Gamma(\gamma-is) \Gamma(\delta+is)}{\Gamma(d+1) \Gamma(\gamma+\delta)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -l, l-c+1, \gamma-is \\ d+1, 1-\delta-is \end{matrix} \middle| 1 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.43) de tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak (3.44) ve (3.45) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine

(2.35) ile verilen Parseval özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\alpha+\gamma)x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}} M_k^{(a,b)}(e^x) M_l^{(c,d)}(e^x) dx \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha+\gamma-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}} M_k^{(a,b)}(y) M_l^{(c,d)}(y) dy \\
&= (-1)^{k+l} \frac{\Gamma(b+k+1) \Gamma(d+l+1)}{\Gamma(b+1) \Gamma(\alpha+\beta) \Gamma(d+1) \Gamma(\gamma+\delta)} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha-is) \Gamma(\beta+is) \overline{\Gamma(\gamma-is) \Gamma(\delta+is)} \\
&\quad \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k-a+1, \alpha-is \\ b+1, 1-\beta-is \end{matrix} \middle| 1 \right) \overline{{}_3F_2 \left(\begin{matrix} -l, l-c+1, \gamma-is \\ d+1, 1-\delta-is \end{matrix} \middle| 1 \right)} ds
\end{aligned} \tag{3.46}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.46) eşitliğinin sol tarafında

$$b = d = \alpha + \gamma - 1 \quad \text{ve} \quad a = c = \beta + \delta - 1$$

ifadeleri seçilerek ve daha sonra (3.42) ortogonallik bağıntısı göz önüne alınarak (3.46) denklemi son olarak

$$\begin{aligned}
& \frac{(2\pi) k! (\beta + \delta - k)! (\alpha + \gamma - 1 - k)!}{(\beta + \delta - 2k) (\alpha + \beta + \gamma + \delta - k - 1)!} \frac{\Gamma^2(\alpha + \gamma) \Gamma(\beta + \alpha) \Gamma(\gamma + \delta)}{(-1)^{k+l} \Gamma(\alpha + \gamma + k) \Gamma(\alpha + \gamma + l)} \delta_{k,l} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha-is) \Gamma(\beta+is) \overline{\Gamma(\gamma-is) \Gamma(\delta+is)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k-\beta-\delta, \alpha-is \\ \alpha+\gamma, 1-\beta-is \end{matrix} \middle| 1 \right) \\
&\quad \times \overline{{}_3F_2 \left(\begin{matrix} -l, l-\beta-\delta, \gamma-is \\ \alpha+\gamma, 1-\delta-is \end{matrix} \middle| 1 \right)} ds
\end{aligned} \tag{3.47}$$

şeklinde ifade edilir. Bunların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3

$$K_k^{(2)}(x; a_1, b_1, c_1, d_1) = \frac{\Gamma(a_1 + d_1 + k)}{\Gamma(a_1 + d_1)} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k-b_1-c_1, d_1-x \\ a_1+d_1, 1-c_1-x \end{matrix} \middle| 1 \right) \tag{3.48}$$

özel fonksiyonu

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(a_1+ix) \Gamma(b_1-ix) \Gamma(c_1+ix) \Gamma(d_1-ix) \\
& \times K_k^{(2)}(ix; a_1, b_1, c_1, d_1) K_l^{(2)}(-ix; d_1, c_1, b_1, a_1) dx \\
&= \frac{k!}{(b_1 + c_1 - 2k)} \frac{\Gamma(b_1 + c_1 + 1 - k) \Gamma(a_1 + d_1 + k) \Gamma(c_1 + d_1) \Gamma(a_1 + b_1)}{\Gamma(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 - k)} \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

ortogonallik bağıntısına sahiptir. Burada $a_1 + d_1 > -k$, $b_1 + c_1 > 2k$, $a_1 + b_1 > 0$ ve $c_1 + d_1 > 0$ dır (Koepf ve Masjed-Jamei 2007).

Sonuç 3.3 Yukarıdaki teorem $k = l = 0$ özel durumunda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(a_1 + ix) \Gamma(b_1 - ix) \Gamma(c_1 + ix) \Gamma(d_1 - ix) \\ &= \frac{\Gamma(a_1 + d_1) \Gamma(b_1 + c_1) \Gamma(c_1 + d_1) \Gamma(a_1 + b_1)}{\Gamma(a_1 + b_1 + c_1 + d_1)} \end{aligned}$$

sonucunu verir. Elde edilen bu eşitlik Barnes' in 1908' deki ilk lemmasını ifade etmektedir (Bailey 1972, Whittaker ve Watson 1962).

3.5.1 $M_k^{(a,b)}(x)$ polinomlarının Fourier dönüşümlerinin bir uygulaması

(3.48) eşitliğinde tanımlanan $K_k^{(2)}(x; a_1, b_1, c_1, d_1)$ özel fonksiyonunun Ramanujan integraline göre ortogonal olabileceğini iddia etmek için

$$\begin{aligned} Z_k(m) &= \int_{-\infty}^{\infty} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k - \beta - \gamma, \alpha - x \\ \alpha + \delta, 1 - \gamma - x \end{matrix} \middle| 1 \right) \frac{(\delta - x)_m}{(1 - \beta - x)_m} \\ &\quad \times \frac{dx}{\Gamma(1 - \alpha + x) \Gamma(1 - \delta + x) \Gamma(1 - \gamma - x) \Gamma(1 - \beta - x)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanan integrali ele alalım. Bu integralin açık değeri

$$\begin{aligned} Z_k(m) &= \sum_{l=0}^k \frac{(-k)_l (k - \beta - \gamma)_l}{(\alpha + \delta)_l l!} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha - x)_l (\delta - x)_m}{(1 - \gamma - x)_l (1 - \beta - x)_m} \\ &\quad \times \frac{dx}{\Gamma(1 - \alpha + x) \Gamma(1 - \delta + x) \Gamma(1 - \gamma - x) \Gamma(1 - \beta - x)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

formunda yazılabilir. Son eşitlikte tanımlanan integrale

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha + x) \Gamma(\beta + x) \Gamma(\gamma - x) \Gamma(\delta - x)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 3)}{\Gamma(\alpha + \gamma - 1) \Gamma(\alpha + \delta - 1) \Gamma(\beta + \gamma - 1) \Gamma(\beta + \delta - 1)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ramanujan integrali (Ramanujan 1920) uygulanarak ve

$$\frac{(\alpha - x)_l}{\Gamma(1 - \alpha + x)} = \frac{(-1)^l}{\Gamma(1 - \alpha + x - l)} \quad \text{ve} \quad \frac{(\delta - x)_m}{\Gamma(1 - \delta + x)} = \frac{(-1)^m}{\Gamma(1 - \delta + x - m)}$$

bağıntıları yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
Z_k(m) &= \sum_{l=0}^k \frac{(-k)_l (k-\beta-\gamma)_l}{(\alpha+\delta)_l l!} (-1)^{l+m} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(1-\alpha+x-l)\Gamma(1-\delta+x-m)\Gamma(1-\gamma-x+l)\Gamma(1-\beta-x+m)} \\
&= \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l+m} (-k)_l (k-\beta-\gamma)_l}{(\alpha+\delta)_l l!} \\
&\times \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1-\beta-\delta)\Gamma(1-\alpha-\beta+m-l)\Gamma(1-\gamma-\delta-m+l)} \\
&= \frac{(-1)^m \Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1-\beta-\delta)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(1-\gamma-\delta-m)} \\
&\times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k-\beta-\gamma, \alpha+\beta-m \\ \alpha+\delta, 1-\gamma-\delta-m \end{matrix} \middle| 1 \right)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

bulunur.

Diğer taraftan Gosper-Saalschütz özdeşliği

$$\begin{aligned}
{}_3F_2 &= \left(\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \delta, \varepsilon \end{matrix} \middle| 1 \right) \\
&= \frac{\pi^2}{\cos(\delta\pi)\cos(\varepsilon\pi) + \cos(\alpha\pi)\cos(\beta\pi)\cos(\gamma\pi)} \\
&\times \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\delta-\beta)\Gamma(\delta-\gamma)} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-\alpha)\Gamma(\varepsilon-\beta)\Gamma(\varepsilon-\gamma)}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

biçiminde ifade edilir, burada $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + 1 - \delta$ dir (Andrews vd. 1999). Böylece bu özdeşlik kullanılarak belirli integral $Z_k(m)$ ' nin son değeri

$$\begin{aligned}
Z_k(m) &= \frac{\pi^2}{[\cos((\alpha+\beta)\pi)\cos((\beta+\gamma)\pi) - \cos((\alpha+\delta)\pi)\cos((\gamma+\delta)\pi)]} \\
&\times \frac{\Gamma(\alpha+\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta+k)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-k)\Gamma(\delta-\beta+m)} \\
&\times \frac{1}{\Gamma(1-\gamma-\delta-m+k)\Gamma(1+\beta-\delta-m-k)} \\
&\times \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1-\beta-\delta)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

şeklinde verilir. (3.50) ile verilen integral bize gösterir ki Teorem 3.3' de tanımlanan

$K_k^{(2)}(x; a_1, b_1, c_1, d_1)$ özel fonksiyonu Ramanujan integrali yardımıyla ortogonaldır.

Başka bir deyişle

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, k - \beta - \gamma, \delta - x \\ \alpha + \delta, 1 - \beta - x \end{matrix} \middle| 1 \right) {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -m, m - \beta - \gamma, \alpha - x \\ \alpha + \delta, 1 - \gamma - x \end{matrix} \middle| 1 \right) \quad (3.56)$$

$$\times \frac{dx}{\Gamma(1 - \alpha + x) \Gamma(1 - \delta + x) \Gamma(1 - \gamma - x) \Gamma(1 - \beta - x)} = A_k \delta_{k,m}$$

eşitliği varsayılmaktadır. Burada ${}_3F_2(\cdot)$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden Hahn polinomları

$$p_k(x) = \frac{(a+c)_k (a+d)_k}{k!} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, a+b+c+d+k, a-x \\ a+c, a+d \end{matrix} \middle| 1 \right)$$

şeklinde ifade edilebildiğinden yukarıdaki eşitlik

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_k(x) p_l(x) \frac{dx}{\Gamma(1-a+x) \Gamma(1-b+x) \Gamma(1-c-x) \Gamma(1-d-x)}$$

$$= \frac{1}{(1-a-b-c-d-2k)}$$

$$\times \frac{\Gamma(2-a-b-c-d-k)}{\Gamma(1-a-c-k) \Gamma(1-a-d-k) \Gamma(1-b-c-k) \Gamma(1-b-d-k)} \delta_{k,l}$$

ortogonalite bağıntısını verir (Koepf ve Masjed-Jamei 2007).

3.6 $I_k^{(a)}(x)$ Polinomları ve Fourier Dönüşümleri

(3.2) eşitliğinde özel olarak

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 3 - 2a, \varepsilon = 0$$

değerleri seçildiğinde $I_k^{(a)}(x)$ polinomlarının diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem self-adjoint formda

$$\left[(1+x^2)^{\frac{3}{2}-a} y'_k(x) \right]' = k(k+2-2a) (1+x^2)^{\frac{1}{2}-a} y_k(x) \quad (3.57)$$

şeklinde yazılır. Frobenius yöntemi uygulanarak

$$I_k^{(a)}(x) = k! \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^n \binom{a-1}{k-n} \binom{k-n}{n} (2x)^{k-2n} \quad (3.58)$$

formundaki polinom çözümüne sahip olduğu gösterilebilir. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$I_k^{(a)}(x) = \frac{(-4i)^k (a-k)_k (3/2-a)_k}{(k+2-2a)_k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k+2-2a \\ 3/2-a \end{matrix} \middle| \frac{1-ix}{2} \right) \quad (3.59)$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\begin{aligned} & I_k^{(a)}(x) \\ &= \frac{(-2)^k (a-k)_k}{(2a-2k-1)_k} (1+x^2)^{a-\frac{1}{2}} \frac{d^k}{dx^k} \left((1+x^2)^{k-(a-\frac{1}{2})} \right), \quad k=0, 1, \dots \end{aligned}$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. Bu polinomlar $(-\infty, \infty)$ aralığında $(1+x^2)^{-(a-\frac{1}{2})}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu ortogonaldır. Yani $k, l = 0, 1, 2, \dots, N_0 < a-1$ için

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-(a-\frac{1}{2})} I_k^{(a)}(x) I_l^{(a)}(x) dx \\ &= \frac{k! 2^{2k-1} \sqrt{\pi} \Gamma^2(a) \Gamma(2a-2k)}{(a-k-1) \Gamma(a-k) \Gamma(a-k+1/2) \Gamma(2a-k-1)} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (3.60)$$

ortogonallik bağıntısını sağlar (Masjed-Jamei 2002).

Şimdi $I_k^{(a)}(x)$ polinomlarının Fourier dönüşümü için uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = (1+x^2)^{-(p-\frac{1}{4})} I_k^{(a)}(x) \\ v(x) = (1+x^2)^{-(q-\frac{1}{4})} I_l^{(b)}(x) \end{cases} \quad (3.61)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu belirlenen fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1+x^2)^{-(p-\frac{1}{4})} I_k^{(a)}(x) dx \\ &= \frac{(-4i)^k (a-k)_k (3/2-a)_k}{(k+2-2a)_k} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1-ix)^{-(p-\frac{1}{4})} (1+ix)^{-(p-\frac{1}{4})} \left(\sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+2-2a)_n}{(3/2-a)_n n! 2^n} (1-ix)^n \right) dx \\ &= \frac{(-4i)^k (a-k)_k (3/2-a)_k}{(k+2-2a)_k} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+2-2a)_n}{(3/2-a)_n n! 2^n} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1-ix)^{-p+\frac{1}{4}+n} (1+ix)^{-p+\frac{1}{4}} dx. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Burada integrali hesaplamak için

$$E_n^*(s; p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1-ix)^{-p+\frac{1}{4}+n} (1+ix)^{-p+\frac{1}{4}} dx \quad (3.63)$$

diyelim. Eğer $\Re(w + v) > 1$ ise

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1 - ix)^{-w} (1 + ix)^{-v} dx \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{\Gamma(w)} (s/2)^{\frac{w+v}{2}-1} W_{\frac{w-v}{2}, \frac{1-w-v}{2}}(2s) & , \quad s > 0 \\ \frac{\pi}{\Gamma(v)} (-s/2)^{\frac{w+v}{2}-1} W_{\frac{v-w}{2}, \frac{1-w-v}{2}}(-2s) & , \quad s < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.64)$$

dir ve burada $W_{p,q}(s)$ fonksiyonu $2q \notin \mathbb{Z}$ için

$$W_{p,q}(s) = s^{1/2} e^{-s/2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Gamma(-2q)}{\Gamma(1/2-q-p)} s^q {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1/2 + q - p \\ 2q + 1 \end{matrix} \middle| s \right) \\ & + \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma(1/2+q-p)} s^{-q} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1/2 - q - p \\ -2q + 1 \end{matrix} \middle| s \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

şeklinde tanımlanan ikinci tür Whittaker fonksiyonlarını ifade eder (Erdélyi vd. 1954). Dolayısıyla $\Re(2p - n - 1/2) < 1$ ve $n + 3/2 - 2p \notin \mathbb{Z}$ için (3.63) eşitliği

$$E_n^*(s; p) = \begin{cases} \frac{\pi}{\Gamma(p-n-1/4)} (s/2)^{p-n/2-5/4} W_{\frac{-n}{2}, -p+n/2+3/4}(2s) & , \quad s > 0 \\ \frac{\pi}{\Gamma(p-1/4)} (-s/2)^{p-n/2-5/4} W_{\frac{n}{2}, -p+n/2+3/4}(-2s) & , \quad s < 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

ifadesine eşit olur. Böylece (3.62) eşitliği

$$\mathcal{F}(u(x)) = \frac{(-4i)^k (a-k)_k (3/2-a)_k}{(k+2-2a)_k} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+2-2a)_n}{(3/2-a)_n n! 2^n} E_n^*(s; p) \quad (3.67)$$

şeklinde elde edilir. Basitlik için

$$K_k^{(3)}(s; q_1, q_2) = \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+2-2q_2)_n}{(3/2-q_2)_n n! 2^n} E_n^*(s; q_1) \quad (3.68)$$

olarak tanımlanırsa, (3.67) ile verilen $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(u(x)) = \frac{(-4i)^k (a-k)_k (3/2-a)_k}{(k+2-2a)_k} K_k^{(3)}(s; p, a) \quad (3.69)$$

formunda ifade edilir (Masjed-Jamei vd. 2014). Benzer işlemler uygulanarak $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ise

$$\mathcal{F}(v(x)) = \frac{(-4i)^l (b-l)_l (3/2-b)_l}{(l+2-2b)_l} K_l^{(3)}(s; q, b) \quad (3.70)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (3.61) de tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak (3.69) ile (3.70) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile ifade edilen Parseval özdeşliğini uyguladığımızda

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-(p+q-1/2)} I_k^{(a)}(x) I_l^{(b)}(x) dx \\ &= \frac{(-4i)^k (a-k)_k (3/2-a)_k (4i)^l (b-l)_l (3/2-b)_l}{(k+2-2a)_k (l+2-2b)_l} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} K_k^{(3)}(s; p, a) K_l^{(3)}(s; q, b) ds \end{aligned} \quad (3.71)$$

elde edilir. (3.71) eşitliğinde

$$a = b = p + q - 1/2$$

ifadesi seçilerek ve daha sonra (3.60) ortogonallik bağıntısı dikkate alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4 (3.68) eşitliğinde tanımlanan $K_k^{(3)}(s; q_1, q_2)$ özel fonksiyonu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_k^{(3)}(s; p, a) K_l^{(3)}(s; a-p+1/2, a) ds &= \frac{(k+2-2a)_k}{(a-k)_k (3/2-a)_k} \\ & \times \frac{\pi^{3/2} k! \Gamma^2(a) \Gamma(2a-2k)}{(a-k-1) \Gamma(a-k) \Gamma(a-k+1/2) \Gamma(2a-k-1)} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (3.72)$$

ortogonallik bağıntısına sahiptir. Burada $k, l = 0, 1, \dots, N_0 < 2p - 3/2 < a - 1/2$, $N_0 = \max\{k, l\}$, $n + 3/2 - 2p \notin \mathbb{Z}$ dir (Masjed-Jamei vd. 2014).

4. ROUTH-ROMANOVSKI POLİNOMLARININ FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, $(-\infty, \infty)$ aralığında $I_k^{(a)}(x)$ polinomlarını genelleştiren çok daha kapsamlı sonlu ortogonal polinom ailesi tanımlanacak ve bu polinomların Fourier dönüşümleri incelenecektir.

k pozitif bir tamsayı ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ parametreleri k dan bağımsız reel parametreler olmak üzere (3.1) ile verilen diferensiyel denklemde özel olarak

$$\begin{aligned}\alpha &= p^2 + r^2, \quad \beta = 2(pq + rt), \quad \gamma = q^2 + t^2 \\ \delta &= 2(1 - a)(p^2 + r^2), \quad \varepsilon = b(pt - qr) + 2(1 - a)(pq + rt)\end{aligned}$$

değerleri seçilirse

$$\begin{aligned}& ((px + q)^2 + (rx + t)^2) y_k''(x) \\ & + (2(1 - a)(p^2 + r^2)x + b(pt - qr) + 2(1 - a)(pq + rt)) y_k'(x) \\ & - k(k + 1 - 2a)(p^2 + r^2) y_k(x) = 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

denklemini elde edilir. Burada p, q, r, t parametreleri $pt - qr > 0$ olacak şekilde reel parametrelerdir. Bu denklemin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden çözümünü bulmak için ilk olarak (3.1) eşitliğinde verilen diferensiyel denkleminin monik polinom çözümü elde edilmelidir.

(3.1) diferensiyel denkleminde $x = cu + d$ dönüşümü uygulanırsa

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha c^2 u^2 + 2\alpha c d u + \alpha d^2 + \beta c u + \beta d + \gamma$$

ve

$$\delta x + \varepsilon = \delta c u + \delta d + \varepsilon$$

olacaktır. Türevler ise

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{c} \frac{dy}{du} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{c} \frac{dy}{du} \right) \\ &= \frac{d}{du} \left(\frac{1}{c} \frac{dy}{du} \right) \frac{du}{dx} \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{d^2 y}{du^2} \right) \frac{1}{c} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 y}{du^2}\end{aligned}$$

şeklinde değişeceğinden, bu sonuçlar (3.1) denkleminde yerine konulursa ve $\frac{1}{\alpha}$ ile çarpılırsa,

$$\left(u^2 + \frac{2\alpha d + \beta}{\alpha c}u + \frac{\alpha d^2 + \beta d + \gamma}{\alpha c^2}\right) \frac{d^2 y}{du^2} + \left(\frac{\delta}{\alpha}u + \frac{\varepsilon + \delta d}{\alpha c}\right) \frac{dy}{du} - \frac{k}{\alpha}(\delta + (k-1)\alpha)y = 0 \quad (4.2)$$

bulunur. (4.2) eşitliğinde

$$\alpha d^2 + \beta d + \gamma = 0 \text{ ve } \frac{2\alpha d + \beta}{\alpha c} = -1$$

olduğu varsayılırsa

$$c = \mp \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha} \text{ ve } d = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (4.3)$$

formunda yazılabilir. Böylece c ve d değerlerinin (4.2) eşitliğinde yerine yazılmasıyla,

$$u(u-1) \frac{d^2 y}{du^2} + \left(\frac{\delta}{\alpha}u + \frac{2\alpha\varepsilon - \beta\delta \pm \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\mp 2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right) \frac{dy}{du} - \frac{k}{\alpha}(\delta + (k-1)\alpha)y = 0 \quad (4.4)$$

Gauss diferensiyel denkleminin özel bir durumu elde edilir (Koepf 1988). Burada

$$f = -k, g = k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \text{ ve } h = \frac{2\alpha\varepsilon - \beta\delta \pm \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\mp 2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}$$

bağıntıları tanımlanırsa (4.4) eşitliği

$$u(u-1) \frac{d^2 y}{du^2} + ((f+g+1)u - h) \frac{dy}{du} + fgy = 0 \quad (4.5)$$

formunda yazılabilir. Elde edilen bu Gauss diferensiyel denkleminin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden polinom çözümü

$$\begin{aligned} & P_k \left(\begin{matrix} \delta & \varepsilon \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \mid \mp \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}u + \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) \\ &= A {}_2F_1 \left(\begin{matrix} f, g \\ h \end{matrix} \mid u \right) \\ &= A {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \\ \frac{2\alpha\varepsilon - \beta\delta \pm \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\pm 2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \end{matrix} \mid u \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece $x = cu + d$ dönüşümünden $u = \frac{x-d}{c}$ olup bu çözüme karşılık gelen (3.1) denkleminin çözümü ise,

$$P_k \left(\begin{array}{ccc|c} \delta & \varepsilon & & x \\ \alpha & \beta & \gamma & \end{array} \right) \quad (4.7)$$

$$= A {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -k, k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \\ \frac{2\alpha\varepsilon - \beta\delta \pm \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\pm 2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \end{array} \middle| \mp \left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} + \frac{\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) \right)$$

şeklinde yazılabilir. (4.7) eşitliğinden

$$i) \overline{P}_k \left(\begin{array}{ccc|c} \delta & \varepsilon & & x \\ \alpha & \beta & \gamma & \end{array} \right)$$

$$= A^* {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -k, k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \\ \frac{2\alpha\varepsilon - \beta\delta + \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \end{array} \middle| \frac{-\alpha x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} - \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) \quad (4.8)$$

$$ii) \overline{P}_k \left(\begin{array}{ccc|c} \delta & \varepsilon & & x \\ \alpha & \beta & \gamma & \end{array} \right)$$

$$= A^{**} {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -k, k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \\ \frac{-(2\alpha\varepsilon - \beta\delta) + \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \end{array} \middle| \frac{\alpha x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)$$

formunda monik alt durumlar elde edilir. Yukarıdaki ilişkilerin her ikisi de ikinci formül (ii) nin argümanında yalnızca bir eksi işaretiyle farklılaşmaktadır. Başka bir deyişle, ilk formül (i) de $\overline{P}_k \left(\begin{array}{ccc|c} -\delta & , & -\varepsilon & \\ -\alpha & , & -\beta & , & -\gamma & \\ & & & & & x \end{array} \right)$ durumu ele alınırsa, o zaman (4.8) eşitliğinin ikinci formülüne ulaşılabacaktır. Bu durumda ana çözüm olarak yalnızca formül (ii) kullanılmalıdır. Böylece formül (ii) ye karşılık gelen monik çözüm için A^{**} katsayısı

$$A^{**} = \frac{k! \left(\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right)^k \left[\left(\beta\delta - 2\alpha\varepsilon + \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) / \left(2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \right]_k}{\alpha^k (-k)_k \left(k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \right)_k} \quad (4.9)$$

şeklinde verilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n-k, 1-b^*-k \\ 1-a^*-k \end{matrix} \middle| \frac{1}{w^*} \right) \left(\frac{v^*}{w^*} x \right)^n \\ &= \frac{(b^*)_k}{(-w^*)^k (a^*)_k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, a^* \\ b^* \end{matrix} \middle| v^* x + w^* \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

özdeşliği (Koepf ve Masjed-Jamei 2006) dikkate alınarak bu özdeşlik ile (4.8) eşitliğinde verilen ikinci formüldeki hipergeometrik fonksiyon karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} a^* &= k-1 + \frac{\delta}{\alpha}, \quad b^* = \frac{\beta\delta - 2\alpha\varepsilon + \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \\ v^* &= \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}, \quad w^* = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla bu ifadeler doğrultusunda (4.10) eşitliği

$$\begin{aligned} & {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k & k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \\ \frac{\beta\delta - 2\alpha\varepsilon + \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \end{matrix} \middle| \frac{\alpha x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \left(k-1 + \frac{\delta}{\alpha} \right)_k}{\left(\frac{\beta\delta - 2\alpha\varepsilon + \delta\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)_k} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)^{k-n} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)^n \\ & \quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n-k & \frac{2\alpha\varepsilon - \beta\delta - (\delta + (2k-2)\alpha)\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \\ -\frac{\delta}{\alpha} - 2k + 2 \end{matrix} \middle| \frac{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) x^n \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde bulunur. Son olarak (4.9) ile (4.12) eşitlikleri (4.8) de tanımlanan ikinci formülde yerine yazıldığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında (3.1) eşitliğinde

verilen diferensiyel denklemin monik polinom çözümü

$$\begin{aligned} & \overline{P}_k \left(\begin{array}{ccc|c} \delta & \varepsilon & & x \\ \alpha & \beta & \gamma & \end{array} \right) \\ &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \left(\frac{2\alpha}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)^{n-k} \\ & \quad \times {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} n-k, \frac{2\alpha\varepsilon - \beta\delta}{2\alpha\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} + 1 - \frac{\delta}{2\alpha} - k \\ 2 - \frac{\delta}{\alpha} - 2k \end{array} \middle| \frac{2\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) x^n \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir (Koepef ve Masjed-Jamei 2006). Böylece (4.13) eşitliği dikkate alınarak ve bu eşitlikte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ değerleri yerine yazılarak (4.1) denkleminin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden çözümü

$$\begin{aligned} y_k(x) &= J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) \\ &= (-1)^k ((pq + rt) + i(pt - qr))^k (k + 1 - 2a)_k \\ & \quad \times \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \left(\frac{p^2 + r^2}{(pq + rt) + i(pt - qr)} \right)^n \\ & \quad \times {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} n-k, a-k-ib/2 \\ 2a-2k \end{array} \middle| \frac{2(pt - qr)}{(pt - qr) - i(pq + rt)} \right) x^n \end{aligned} \quad (4.14)$$

formunda yazılabilir. (4.1) diferensiyel denklemini Teorem 2.2 kullanılarak self-adjoint formda yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left(((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{1-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} y'_k(x) \right)' \\ &= k(k+1-2a)(p^2 + r^2) ((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} y_k(x) \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Sturm-Liouville teoremini uygulayarak yani, k indisine bağlı bu eşitlik l indisine bağlı olarak tekrar yazılır ve denklemler sırasıyla $y_l(x)$ ve $y_k(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarıldıktan sonra $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edildiğinde

$$\begin{aligned} & \left[((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{1-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} \left(y'_k(x) y_l(x) - y_k(x) y'_l(x) \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= (\mu_k - \mu_l) (p^2 + r^2) \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} ((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) J_l^{(a,b)}(x; p, q, r, t) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mu_k = k(k+1-2a)$ ve $\max \deg(y'_k(x)y_l(x) - y_k(x)y'_l(x)) = k+l-1$ dir. Eşitliğin sol tarafı $N_0 \leq a-1/2$ ($N_0 = \max\{k, l\}$), $p, q, r, t, b \in \mathbb{R}$ ve $pt - qr > 0$ için sıfır olup

$$\int_{-\infty}^{\infty} ((px+q)^2 + (rx+t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} \times J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) J_l^{(a,b)}(x; p, q, r, t) dx = 0 \quad , \quad k \neq l \quad (4.16)$$

elde edilir. Yani bu polinom ailesi, $k, l = 0, 1, \dots, N_0 \leq a-1/2$, $N_0 = \max\{k, l\}$, $p, q, r, t, b \in \mathbb{R}$ ve $pt - qr > 0$ için $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$\Psi^{(a,b)}(x; p, q, r, t) = ((px+q)^2 + (rx+t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

4.1 Routh-Romanovski Polinomlarının Normu

Routh-Romanovski polinomlarının normunu hesaplamak için ilk olarak Rodrigues formülü elde edilmelidir. Genel olarak ortogonal polinomların Rodrigues formülü

$$\frac{c_k}{\xi(x)} \frac{d^k}{dx^k} P^k(x) \xi(x)$$

formunda olup burada $\xi(x)$, ilgili ortogonal polinomun ağırlık fonksiyonu, c_k k ' ya bağlı sabit bir değer ve $P(x)$ ilgili ortogonal polinomun ikinci mertebeden diferensiyel denklemindeki y'' nün katsayısına karşılık gelen bir fonksiyondur. Böylece $J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t)$ polinomunun Rodrigues formülü

$$J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) = \frac{(-1)^k}{((px+q)^2 + (rx+t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}}} \times \frac{d^k}{dx^k} ((px+q)^2 + (rx+t)^2)^{k-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} \quad (4.17)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik

$$((px+q)^2 + (rx+t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t)$$

ile çarpılıp daha sonra $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edildiğinde

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{(a,b)}(x; p, q, r, t) \left(J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) \right)^2 dx \\ &= (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) \frac{d^k}{dx^k} ((px+q)^2 + (rx+t)^2)^{k-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} dx \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında k kez kısmi integrasyon uygulandığında

$$= \frac{k!(p^2 + r^2)^k \Gamma(2a - k)}{\Gamma(2a - 2k)} \int_{-\infty}^{\infty} ((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{k-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} dx \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada integrali değerlendirmek için

$$I^* = \int_{-\infty}^{\infty} ((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{k-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} dx \quad (4.20)$$

diyelim. Aynı zamanda Cauchy Beta integrali $\mathbb{R}(\gamma) > 0, \mathbb{R}(\delta) > 0$ ve

$\mathbb{R}(\gamma + \delta) > 1$ için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(\alpha + iu)^\gamma (\beta - iu)^\delta} = \frac{\Gamma(\gamma + \delta - 1)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\delta)} (\alpha + \beta)^{1-(\gamma+\delta)} \quad (4.21)$$

ile verilir (Askey 1987, Cauchy 1825). Özellikle

$$(\alpha - iu)^{c+id} (\alpha + iu)^{c-id} = (\alpha^2 + u^2)^c e^{(2d \arctan \frac{u}{\alpha})} \quad (4.22)$$

eşitliği dikkate alınarak (4.21) eşitliğinden

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{wu} \cos^v u du = \frac{2^{-v} \Gamma(v+1) \pi}{\Gamma(1 + \frac{v+iw}{2}) \Gamma(1 + \frac{v-iw}{2})} \quad (4.23)$$

elde edilir (Askey 1987). Elde edilen bu sonucu kullanarak (4.20) ile tanımlanan integralin açık ifadesini ve daha sonra normunu elde edebiliriz. Gerçekten de, (4.20) eşitliğinde

$$x = \frac{(pt - qr) \tan u - (pq + rt)}{p^2 + r^2}$$

değişken değişimi yapıldığında integrasyon aralığı $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığı olup gerekli sadeleş-tirmeler sonrasında

$$\begin{aligned} I^* &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{(pt - qr)^2}{p^2 + r^2} \right)^{k-a} (1 + \tan^2 u)^{k-a+1} \\ &\quad \times \frac{pt - qr}{p^2 + r^2} \exp \left(b \arctan \frac{p \tan u - r}{r \tan u + p} \right) du \\ &= \frac{(pt - qr)^{2k-2a+1}}{(p^2 + r^2)^{k-a+1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2a-2k-2} u \exp \left(b(u - \arctan \frac{r}{p}) \right) du \\ &= \frac{(pt - qr)^{2k-2a+1}}{(p^2 + r^2)^{k-a+1}} \exp \left(-b \arctan \frac{r}{p} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{bu} (\cos u)^{2a-2k-2} du \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (4.23) sonucu kullanılarak $w = b$ ve $v = 2a - 2k - 2$ için

$$I^* = \frac{(pt - qr)^{2k-2a+1}}{(p^2 + r^2)^{k-a+1}} \exp \left(-b \arctan \frac{r}{p} \right) \frac{2^{2k-2a+2} \Gamma(2a - 2k - 1) \pi}{\Gamma(a - k + ib/2) \Gamma(a - k - ib/2)} \quad (4.24)$$

elde edilir. Böylece (4.19) eşitliği

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{(a,b)}(x; p, q, r, t) \left(J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) \right)^2 dx \\
&= \frac{k!(p^2 + r^2)^k \Gamma(2a - k) (pt - qr)^{2k-2a+1}}{\Gamma(2a - 2k) (p^2 + r^2)^{k-a+1}} \\
& \quad \times \exp \left(-b \arctan \frac{r}{p} \right) \frac{2^{2k-2a+2} \Gamma(2a - 2k - 1) \pi}{\Gamma(a - k + ib/2) \Gamma(a - k - ib/2)}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylelikle Routh-Romanovski polinomları için normunu aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1 $J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t)$ Routh-Romanovski polinomları

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} \\
& \quad \times J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t) J_l^{(a,b)}(x; p, q, r, t) dx \\
&= \frac{2^{2k-2a+1} (pt - qr)^{2k-2a+1} e^{-b \arctan \frac{r}{p}}}{(p^2 + r^2)^{-a+1} (2a - 2k - 1)} \\
& \quad \times \frac{k! \Gamma(2a - k)}{\Gamma(a - k + ib/2) \Gamma(a - k - ib/2)} \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar. Burada $k, l = 0, 1, \dots, N_0 \leq a - 1/2$, $N_0 = \max\{k, l\}$, $p, q, r, t, b \in \mathbb{R}$ ve $pt - qr > 0$ dir.

Diğer taraftan, (4.25) ile verilen ortogonallik bağıntısının ağırlık fonksiyonu (4.22) eşitliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
& ((px + q)^2 + (rx + t)^2)^{-a} e^{b \arctan \frac{px+q}{rx+t}} \\
&= ((px + q) + i(rx + t))^{-a-ib/2} ((px + q) - i(rx + t))^{-a+ib/2} \\
&= |(p + ir)^{-a-ib/2}|^2 \left(x + \frac{q + it}{p + ir} \right)^{-a-ib/2} \left(x + \frac{q - it}{p - ir} \right)^{-a+ib/2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

şeklinde basitleştirilebilir ve bu ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen ortogonallik aralığı $(-\infty, \infty)$ dur. (4.14) ile ifade edilen $J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t)$ polinomlarının standart formu $p = 1, q = 0, r = 0, t = 1$ özel durumları için

$$\begin{aligned}
I_k^{(a,b)}(x) &= J_k^{(a,b)}(x; 1, 0, 0, 1) \\
&= (-i)^k (k + 1 - 2a)_k \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \\
& \quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n - k, a - k - ib/2 \\ 2a - 2k \end{matrix} \middle| 2 \right) (-ix)^n
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Bu durumda (4.10) ile verilen özdeşliği dikkate alınarak (4.27) eşitliğindeki polinomlar

$$\begin{aligned} I_k^{(a,b)}(x) &= (2i)^k (1-a+ib/2)_k {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, 1+k-2a \\ 1-a+ib/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-ix}{2} \right) \\ &= k! (2i)^k P_k^{(-a+ib/2, -a-ib/2)}(ix) \end{aligned} \quad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $P_k^{(a,b)}(x)$ polinomu (3.5) eşitliğinde tanımlanan Jacobi ortogonal polinomlarıdır (Askey 1987). Son olarak (4.25) eşitliğinde verilen $J_k^{(a,b)}(x; p, q, r, t)$ Routh-Romanovski polinomlarının $p = 1, q = 0, r = 0, t = 1$ özel durumları olan $I_k^{(a,b)}(x)$ standart polinomlarının ortogonalite bağıntısı aşağıdaki şekilde verilir.

Sonuç 4.2 $I_k^{(a,b)}(x)$ standart polinomları

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-a} e^{b \arctan x} I_k^{(a,b)}(x) I_l^{(a,b)}(x) dx \\ &= \frac{k! 2^{2k-2a+1} \Gamma(2a-k)}{(2a-2k-1) \Gamma(a-k+ib/2) \Gamma(a-k-ib/2)} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (4.29)$$

ortogonalite bağıntısına sahiptir. Burada $k, l = 0, 1, \dots, N_0 \leq a - 1/2$, $N_0 = \max\{k, l\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ dir (Masjed-Jamei vd. 2014).

4.2 $I_k^{(a,b)}(x)$ Polinomlarının Fourier Dönüşümleri

(4.29) ile verilen ortogonalite bağıntısı ve (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği dikkate alınarak Routh-Romanovski polinomları cinsinden Fourier dönüşümünü uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = (1+x^2)^{-\alpha} e^{\beta \arctan x} I_k^{(a,b)}(x) \\ v(x) = (1+x^2)^{-\gamma} e^{\delta \arctan x} I_k^{(c,d)}(x) \end{cases} \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde ede-

lim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1+x^2)^{-\alpha} e^{\beta \arctan x} I_k^{(a,b)}(x) dx \\
&= (2i)^k (1-a+ib/2)_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1-ix)^{-\alpha+\frac{i\beta}{2}} (1+ix)^{-\alpha-\frac{i\beta}{2}} \\
&\quad \times \left(\sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+1-2a)_n}{(1-a+ib/2)_n n! 2^n} (1-ix)^n \right) dx \\
&= (2i)^k (1-a+ib/2)_k \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+1-2a)_n}{(1-a+ib/2)_n n! 2^n} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1-ix)^{-\alpha+n+\frac{i\beta}{2}} (1+ix)^{-\alpha-\frac{i\beta}{2}} dx . \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Burada integrali hesaplamak için

$$V_n^*(s; \alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (1-ix)^{-\alpha+n+\frac{i\beta}{2}} (1+ix)^{-\alpha-\frac{i\beta}{2}} dx \tag{4.32}$$

diyelim. (3.64) ile (3.65) eşitliğinde verilen ifadeler kullanılarak $\mathbb{R}(2\alpha - n) < 1$ ve $n+1-2\alpha \notin \mathbb{Z}$ için (4.32) eşitliği

$$V_n^*(s; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{\Gamma(\alpha-n-i\beta/2)} (s/2)^{\alpha-1-n/2} W_{\frac{n+i\beta}{2}, \frac{1+n}{2}-\alpha}(2s) & , \quad s > 0 \\ \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+i\beta/2)} (-s/2)^{\alpha-1-n/2} W_{\frac{n+i\beta}{2}, \frac{1+n}{2}-\alpha}(-2s) & , \quad s < 0 \end{cases} \tag{4.33}$$

formunda bulunur. Burada $W_{\frac{n+i\beta}{2}, \frac{1+n}{2}-\alpha}(s)$ fonksiyonu $n+1-2\alpha \notin \mathbb{Z}$ için

$$W_{\frac{n+i\beta}{2}, \frac{1+n}{2}-\alpha}(s) = s^{1/2} e^{-s/2} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(2\alpha-n-1)}{\Gamma(\alpha-n-i\beta/2)} s^{\frac{1+n-2\alpha}{2}} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1-\alpha-i\beta/2 \\ 2+n-2\alpha \end{matrix} \middle| s \right) \\ &+ \frac{\Gamma(1+n-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-i\beta/2)} s^{\frac{2\alpha-n-1}{2}} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \alpha-n-i\beta/2 \\ 2\alpha-n \end{matrix} \middle| s \right) \end{aligned} \right\}$$

dir (Erdélyi vd. 1954). Böylece (4.31) eşitliği

$$\mathcal{F}(u(x)) = 2^k i^k \frac{\Gamma(1-a+k+ib/2)}{\Gamma(1-a+ib/2)} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+1-2a)_n}{(1-a+ib/2)_n n! 2^n} V_n^*(s; \alpha, \beta) \tag{4.34}$$

şeklinde elde edilir. Basitlik için

$$K_k^{(4)}(s; q_1, q_2, q_3, q_4) = \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+1-2q_3)_n}{(1-q_3+iq_4/2)_n n! 2^n} V_n^*(s; q_1, q_2) \tag{4.35}$$

olarak tanımlanırsa, (4.34) ile verilen $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(u(x)) = 2^k i^k \frac{\Gamma(1-a+k+ib/2)}{\Gamma(1-a+ib/2)} K_k^{(4)}(s; \alpha, \beta, a, b) \quad (4.36)$$

formunda ifade edilir. Benzer işlemler uygulanarak $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünden ise

$$\overline{\mathcal{F}(v(x))} = (-i)^l 2^l \frac{\Gamma(1-c+l-id/2)}{\Gamma(1-c-id/2)} K_l^{(4)}(s; \gamma, -\delta, c, -d) \quad (4.37)$$

elde edilir. Son olarak (4.30) da tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını gözönünde bulundurarak (4.36) ve (4.37) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile ifade edilen Parseval özdeşliğini uyguladığımızda

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-(\alpha+\gamma)} e^{(\beta+\delta)\arctan x} I_k^{(a,b)}(x) I_l^{(c,d)}(x) dx \\ &= (-1)^l i^{k+l} 2^{k+l} \frac{\Gamma(1-a+k+ib/2) \Gamma(1-c+l-id/2)}{\Gamma(1-a+ib/2) \Gamma(1-c-id/2)} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} K_k^{(4)}(s; \alpha, \beta, a, b) K_l^{(4)}(s; \gamma, -\delta, c, -d) ds \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde ederiz. Diğer taraftan, (4.38) eşitliğinin sol tarafında

$$a = c = \alpha + \gamma \quad \text{ve} \quad b = d = \beta + \delta$$

ifadeleri seçilerek ve daha sonra (4.29) ortogonallik bağıntısı gözönüne alınarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1 (4.35) eşitliğinde tanımlanan $K_k^{(4)}(s; q_1, q_2, q_3, q_4)$ özel fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} K_k^{(4)}(s; \alpha, \beta, c, d) K_l^{(4)}(s; c-\alpha, \beta-d, c, -d) ds \\ &= \frac{\pi 2^{2-2c} k!}{(2c-2k-1) \Gamma(c-k+id/2) \Gamma(c-k-id/2) \Gamma^2(1-c+k+id/2)} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (4.39)$$

ortogonallik bağıntısına sahiptir. Burada $k, l = 0, 1, \dots, N_0 < 2\alpha - 1 \leq c - 1/2$, $N_0 = \max\{k, l\}$, $n+1-2\alpha \notin \mathbb{Z}$ ve $\beta, d \in \mathbb{R}$ dir (Masjed-Jamei vd. 2014).

5. SİMETRİK ORTOGONAL POLİNOMLARININ FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, ilk olarak simetrik ortogonal polinomlarının tanımları hatırlatılacaktır (Masjed-Jamei 2007a, 2020). Daha sonra simetrik ortogonal polinomlarının Fourier dönüşümleri (Masjed-Jamei ve Koepf 2012) ele alınacak ve Parseval özdeşliği yardımı ile elde edilen ortogonal fonksiyon aileleri incelenecektir. Bölüm 2’ de detaylı bir şekilde simetrik ortogonal polinomların tanımı, ilgili teoremleri, sağladığı diferensiyel denklem ve bunların monik polinom çözümleri verilmiştir. Burada tekrar

$$x^2(\alpha x^2 + \beta)\phi_k''(x) + x(\gamma x^2 + \delta)\phi_k'(x) - (k(\gamma + (k-1)\alpha)x^2 + (1 - (-1)^k)\delta/2)\phi_k(x) = 0 \quad (5.1)$$

denklemini ve bu denklemin monik polinom çözümünü

$$\begin{aligned} \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & \delta & x \\ \alpha & \beta & \end{array} \right) &= \prod_{m=0}^{[k/2]-1} \frac{(2m + (-1)^{k+1} + 2)\beta + \delta}{(2m + (-1)^{k+1} + 2[k/2])\alpha + \gamma} \\ &\times \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{[k/2]}{n} \left(\prod_{m=0}^{[k/2]-(n+1)} \frac{(2m + (-1)^{k+1} + 2[k/2])\alpha + \gamma}{(2m + (-1)^{k+1} + 2)\beta + \delta} \right) x^{k-2n} \end{aligned} \quad (5.2)$$

ele alalım. (5.1) denkleminin özel durumu olarak dört tane simetrik ortogonal polinom ailesi bulunur. Bunlar genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları, $(-\infty, \infty)$ aralığında $x^{-2\sigma}(1+x^2)^{-\eta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan sonlu simetrik polinomlar ve $(-\infty, \infty)$ aralığında $x^{-2\sigma}e^{-\frac{1}{x^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan sonlu simetrik polinomlardır.

5.1 Genelleştirilmiş Ultraküresel Polinomlar ve Fourier Dönüşümleri

Genelleştirilmiş Ultraküresel polinomlar ilk defa 1978 yılında Chihara tarafından çalışılmıştır.

Özel olarak (5.1) denkleminde

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-1, 1, -2\sigma - 2\eta - 2, 2\sigma) \quad (5.3)$$

değerleri seçildiğinde, genelleştirilmiş ultraküresel polinomların sağladığı

$$\begin{aligned}
& x^2(-x^2 + 1)\phi_k''(x) - 2x((\sigma + \eta + 1)x^2 - \sigma)\phi_k'(x) \\
& + \{k(2\sigma + 2\eta + k + 1)x^2 + ((-1)^k - 1)\sigma\}\phi_k(x) = 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

diferensiyel denklemi elde edilir (Masjed-Jamei 2007a). (5.2) çözümünde (5.3) değerleri yerine yazıldığında genelleştirilmiş ultraküresel polinomların monik formu

$$\begin{aligned}
& \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta - 2 & 2\sigma \\ -1 & 1 \end{array} \middle| x \right) = \prod_{m=0}^{[k/2]-1} \frac{2m + 2\sigma + 2 - (-1)^k}{-2m - (2\eta + 2\sigma + 2 - (-1)^k + 2[k/2])} \\
& \times \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{[k/2]}{n} \left(\prod_{m=0}^{[k/2]-(n+1)} \frac{(-2m - (2\eta + 2\sigma + 2 - (-1)^k + 2[k/2]))}{2m + 2\sigma + 2 - (-1)^k} \right) x^{k-2n}
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Bu polinomların ağırlık fonksiyonu (2.33) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
W \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta - 2 & 2\sigma \\ -1 & 1 \end{array} \middle| x \right) &= \exp \left(\int \frac{(\gamma - 2\alpha)x^2 + \delta}{x(\alpha x^2 + \beta)} dx \right) \\
&= x^{2\sigma}(1 - x^2)^\eta
\end{aligned}$$

dir ve bu fonksiyon $x = -1$ ve $x = 1$ ' de sıfır olacağından ortogonallık aralığı $[-1, 1]$ dir. Böylece genelleştirilmiş ultraküresel polinomları Teorem 2.6' dan $\sigma + 1/2 > 0$, $(-1)^{2\sigma} = 1$ ve $\eta + 1 > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 x^{2\sigma}(1 - x^2)^\eta \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta - 2 & 2\sigma \\ -1 & 1 \end{array} \middle| x \right) \bar{S}_l \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta - 2 & 2\sigma \\ -1 & 1 \end{array} \middle| x \right) dx \\
&= \left((-1)^k \prod_{m=1}^k \Delta_m \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta - 2 & 2\sigma \\ -1 & 1 \end{array} \middle| x \right) \int_{-1}^1 x^{2\sigma}(1 - x^2)^\eta dx \right) \delta_{k,l} \\
&= \left(\prod_{m=1}^k \frac{(m + (1 - (-1)^m)\sigma)(m + (1 - (-1)^m)\sigma + 2\eta)}{(2m + 2\sigma + 2\eta - 1)(2m + 2\sigma + 2\eta + 1)} \frac{\Gamma(\sigma + \frac{1}{2})\Gamma(\eta + 1)}{\Gamma(\sigma + \eta + \frac{3}{2})} \right) \delta_{k,l} \tag{5.5}
\end{aligned}$$

ortogonallık bağıntısını sağlar (Masjed-Jamei 2007a). Burada

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 x^{2\sigma}(1 - x^2)^\eta dx &= 2 \int_0^1 x^{2\sigma}(1 - x^2)^\eta dx \\
&= B(\sigma + 1/2, \eta + 1) \\
&= \frac{\Gamma(\sigma + \frac{1}{2})\Gamma(\eta + 1)}{\Gamma(\sigma + \eta + \frac{3}{2})}
\end{aligned}$$

ve (2.31) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& \Delta_m \begin{pmatrix} -2\sigma - 2\eta - 2 & 2\sigma \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-m^2 - (2\eta + 2(1 - (-1)^m)\sigma)m - 2\sigma(\sigma + \eta)(1 - (-1)^m)}{(2m + 2\sigma + 2\eta - 1)(2m + 2\sigma + 2\eta + 1)} \\
&= \frac{(m + (1 - (-1)^m)\sigma)(m + (1 - (-1)^m)\sigma + 2\eta)}{(2m + 2\sigma + 2\eta - 1)(2m + 2\sigma + 2\eta + 1)}
\end{aligned}$$

dir. Aynı zamanda (2.29) eşitliğinden genelleştirilmiş ultraküresel polinomlarının hipergeometrik gösterimi

$$\begin{aligned}
U_k^{(\sigma, \eta)}(x) &= \bar{S}_k \begin{pmatrix} -2\sigma - 2\eta - 2 & 2\sigma \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mid x \\
&= x^k {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\left[\frac{k}{2}\right], & -\sigma + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right] \\ -\sigma - \eta - k + \frac{1}{2} \end{matrix} \mid \frac{1}{x^2} \right) \quad (5.6)
\end{aligned}$$

formunda yazılır (Masjed-Jamei 2007b).

(5.5) ile verilen ortogonallık bağıntısı, (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği ve $(-1)^{2\sigma} = 1$ gerçekliği dikkate alınarak genelleştirilmiş ultraküresel polinomları cinsinden Fourier dönüşümünü uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = (\tanh x)^{2a} (1 - \tanh^2 x)^b U_k^{(\alpha, \beta)}(\tanh x) & , \quad (-1)^{2a} = 1 \\ v(x) = (\tanh x)^{2c} (1 - \tanh^2 x)^d U_l^{(\gamma, \delta)}(\tanh x) & , \quad (-1)^{2c} = 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu belirlenen fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü

mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (\tanh x)^{2a} (1 - \tanh^2 x)^b U_k^{(\alpha, \beta)}(\tanh x) dx \\
&= \int_{-1}^1 (1+t)^{-\frac{is}{2}} (1-t)^{\frac{is}{2}} t^{2a} (1-t^2)^{b-1} U_k^{(\alpha, \beta)}(t) dt \\
&= 2^{2b-1} \int_0^1 (1-y)^{-\frac{is}{2}} y^{\frac{is}{2}} (1-2y)^{2a} y^{b-1} (1-y)^{b-1} U_k^{(\alpha, \beta)}(1-2y) dy \\
&= 2^{2b-1} \int_0^1 (1-y)^{b-1-\frac{is}{2}} y^{b-1+\frac{is}{2}} (1-2y)^{2a+k} \\
&\quad \times \left(\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)_n (\frac{1}{2} - \alpha - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor)_n}{(-\alpha - \beta - k + 1/2)_n n!} \frac{1}{(1-2y)^{2n}} \right) dy \\
&= 2^{2b-1} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)_n (\frac{1}{2} - \alpha - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor)_n}{(-\alpha - \beta - k + 1/2)_n n!} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 (1-y)^{b-1-\frac{is}{2}} y^{b-1+\frac{is}{2}} (1-2y)^{2a+k-2n} dy \right).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Burada sırasıyla $\tanh x = t$ ve $t = 1 - 2y$ değişken değişimi yapılmıştır. Diğer yandan $\Re(\gamma) > \Re(\beta) > 0$ ve $|x| \leq 1$ için

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 (1-z)^{\gamma-\beta-1} z^{\beta-1} (1-xz)^{-\alpha} dz \tag{5.9}$$

eşitliği Gauss hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimidir (Bailey 1935, Koepf 1988). (5.8) eşitliği (5.9) integrali cinsinden gösterilebilir. Sonuç olarak $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(x)) &= 2^{2b-1} B \left(b + \frac{is}{2}, b - \frac{is}{2} \right) \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)_n (\frac{1}{2} - \alpha - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor)_n}{(-\alpha - \beta - k + 1/2)_n n!} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2n - k - 2a, b + \frac{is}{2} \\ 2b \end{matrix} \middle| 2 \right)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

olarak bulunur.

Açıklama 5.1 Gauss hipergeometrik fonksiyonu $|x| \leq 1$ için yakınsak olduğundan (5.10) eşitliğinde elde edilen

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2n - k - 2a, b + \frac{is}{2} \\ 2b \end{matrix} \middle| 2 \right)$$

50

hipergeometrik fonksiyonunda $x = 2 \notin [-1, 1]$ olup bu seri için $\Re(b) > 0$ ve $\Re(2a + k - 2n) > -1$ koşuluna ihtiyaç vardır.

Basitlik için

$$T_k^{(1)}(x; q_1, q_2, q_3, q_4) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n \left(\frac{1}{2} - q_3 - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n}{(-q_3 - q_4 - k + 1/2)_n n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2n - k - 2q_1, & q_2 + \frac{x}{2} \\ & 2q_2 \end{matrix} \middle| 2 \right) \quad (5.11)$$

şeklinde tanımlanırsa (5.10) eşitliği

$$\mathcal{F}(u(x)) = \frac{2^{2b-1}}{\Gamma(2b)} \Gamma\left(b + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(b - \frac{is}{2}\right) T_k^{(1)}(is; a, b, \alpha, \beta) \quad (5.12)$$

formunda ifade edilir. Benzer işlemler uygulanarak $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(v(x)) = \frac{2^{2d-1}}{\Gamma(2d)} \Gamma\left(d + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(d - \frac{is}{2}\right) T_l^{(1)}(is; c, d, \gamma, \delta) \quad (5.13)$$

şeklinde elde edilir.

(5.7) de tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını gözönünde bulundurarak (5.12) ile (5.13) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile verilen Parseval özdeşliğini uyguladığımızda

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\tanh x)^{2(a+c)} (1 - \tanh^2 x)^{b+d} U_k^{(\alpha, \beta)}(\tanh x) U_l^{(\gamma, \delta)}(\tanh x) dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 t^{2(a+c)} (1 - t^2)^{b+d-1} U_k^{(\alpha, \beta)}(t) U_l^{(\gamma, \delta)}(t) dt \\ &= \frac{2^{2b+2d-2}}{\Gamma(2b) \Gamma(2d)} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(b + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(b - \frac{is}{2}\right) \overline{\Gamma\left(d + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(d - \frac{is}{2}\right)} \\ & \quad \times T_k^{(1)}(is; a, b, \alpha, \beta) \overline{T_l^{(1)}(is; c, d, \gamma, \delta)} ds \end{aligned} \quad (5.14)$$

elde ederiz. Diğer taraftan (5.14) eşitliğinin sol tarafında

$$\alpha = \gamma = a + c \quad \text{ve} \quad \beta = \delta = b + d - 1 \quad (5.15)$$

ifadeleri seçilerek ve daha sonra (5.5) ortogonalite ilişkisi gözönüne alınarak (5.14)

denklemini son olarak

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(b + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(b - \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(d + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(d - \frac{is}{2}\right) \\
& \times T_k^{(1)}(is; a, b, a+c, b+d-1) T_l^{(1)}(-is; c, d, a+c, b+d-1) ds \\
& = \frac{\Gamma(2b) \Gamma(2d) \Gamma\left(a+c+\frac{1}{2}\right) \Gamma(b+d)}{2^{2b+2d+2k-2} \Gamma\left(a+c+b+d+\frac{1}{2}\right)} \\
& \times \prod_{m=1}^k \frac{(m+(1-(-1)^m)(a+c))(m+(1-(-1)^m)(a+c)+2b+2d-1)}{(m+a+c+b+d-\frac{3}{2})(m+a+c+b+d-\frac{1}{2})} \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

şeklinde yazılır. Burada $\prod_{m=1}^0 (\cdot) = 1$, $b, d > 0$ ve $a+c > -\frac{1}{2}$ dir.

Sonuç 5.1 (5.16) eşitliğinde

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

formunda tanımlanan Duplication Legendre formülü (Rainville 1960) uygulanırsa, $k=l=0$ ve $a=c=0$ için (5.16) eşitliği,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+ix) \Gamma(\beta+ix) \Gamma(\gamma-ix) \Gamma(\delta-ix) dx \\
& = \frac{\Gamma(\alpha+\delta) \Gamma(\alpha+\gamma) \Gamma(\beta+\delta) \Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Barnes beta integralini verir (Whittaker ve Watson 1927).

(4.21) eşitliğinde tanımlanan Cauchy beta integralinin sonuçlarından biri, yani

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2bx} (\cos x)^{2a-2} dx = \frac{2^{2-2a} \pi \Gamma(2a-1)}{\Gamma(a+ib) \Gamma(a-ib)} \\
& \Gamma(a+ib) \Gamma(a-ib) = \frac{2^{2-2a} \pi \Gamma(2a-1)}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2bx} (\cos x)^{2a-2} dx}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

eşitliği (Askey 1987) kullanılarak (5.16) ile ifade edilen ortogonallik ilişkisine karşılık gelen ağırlık fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
& \Gamma\left(b + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(b - \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(d + \frac{is}{2}\right) \Gamma\left(d - \frac{is}{2}\right) \\
& = \frac{2^{4-2b-2d} \pi^2 \Gamma(2b-1) \Gamma(2d-1)}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{sx} (\cos x)^{2b-2} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{sx} (\cos x)^{2d-2} dx}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

formunda basitleştirilir.

O halde,

$$W^*(x; \mu) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{x\lambda} (\cos \lambda)^{2\mu-2} d\lambda = \frac{2^{2-2\mu} \pi \Gamma(2\mu-1)}{\Gamma(\mu + \frac{ix}{2}) \Gamma(\mu - \frac{ix}{2})} \quad (5.20)$$

şeklinde tanımlanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1 (5.11) eşitliğinde tanımlanan $T_k^{(1)}(x; q_1, q_2, q_3, q_4)$ özel fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_k^{(1)}(ix; a, b, a+c, b+d-1) T_l^{(1)}(-ix; c, d, a+c, b+d-1)}{W^*(x; b) W^*(x; d)} dx \quad (5.21) \\ &= \frac{(2d-1)(2b-1) \Gamma(a+c+\frac{1}{2}) \Gamma(b+d)}{\pi 2^{2k+1} \Gamma(a+c+b+d+\frac{1}{2})} \\ & \times \prod_{m=1}^k \frac{(m+(1-(-1)^m)(a+c))(m+(1-(-1)^m)(a+c)+2b+2d-2)}{(m+a+c+b+d-\frac{3}{2})(m+a+c+b+d-\frac{1}{2})} \delta_{k,l} \end{aligned}$$

ortogonalite bağıntısına sahiptir. Burada $b, d > \frac{1}{2}$, $a+c > -\frac{1}{2}$ ve $W^*(x; \cdot)$ ifadesi ise (5.20) eşitliğindeki gibi tanımlıdır (Masjed-Jamei ve Koepf 2012).

Sonuç 5.2 $b = d = 1$ ve $p = a + c > -\frac{1}{2}$ için (5.21) bağıntısı

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sinh^2(\frac{\pi x}{2})} T_k^{(1)}(ix; a, 1, p, 1) T_l^{(1)}(-ix; p-a, 1, p, 1) dx \\ &= \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2}) \Gamma(p+\frac{2}{3})}{\pi 2^{2k-1} \Gamma(p+\frac{3}{2}+k) \Gamma(p+\frac{5}{2}+k)} \\ & \times \prod_{m=1}^k (m+(1-(-1)^m)p)(m+(1-(-1)^m)p+2) \delta_{k,l} \end{aligned}$$

formuna indirgenir.

5.2 Genelleştirilmiş Hermite Polinomları ve Fourier Dönüşümleri

Genelleştirilmiş Hermite polinomlarının çeşitli özellikleri daha önce Chihara (1978) ve Szegő (1975) tarafından çalışılmıştır. Bu polinomlar Masjed-Jamei (2007a) tarafından verilen dört parametrelili simetrik ortogonal polinomların özel durumu olarak da karşımıza çıkmaktadır.

Özel olarak (5.1) denkleminde

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 1, -2, 2\sigma) \quad (5.22)$$

değerleri seçildiğinde, genelleştirilmiş Hermite polinomlarının sağladığı

$$x^2 \phi_k''(x) - 2x(x^2 - \sigma) \phi_k'(x) + (2kx^2 - ((-1)^k - 1)\sigma) \phi_k(x) = 0 \quad (5.23)$$

diferensiyel denklemi elde edilir (Masjed-Jamei 2007a). (5.2) çözümünde (5.22)

değerleri yerine yazıldığında genelleştirilmiş Hermite polinomlarının monik formu

$$\begin{aligned} \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2\sigma & x \\ 0 & 1 & \end{array} \right) &= \prod_{m=0}^{[k/2]-1} \frac{2m + 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1}}{-2} \\ &\times \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{[k/2]}{n} \left(\prod_{m=0}^{[k/2]-(n+1)} \frac{-2}{2m + 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1}} \right) x^{k-2n} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu polinomların ağırlık fonksiyonları (2.33) eşitliğinden

$$\begin{aligned} W \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2\sigma & x \\ 0 & 1 & \end{array} \right) &= \exp \left(\int \frac{(\gamma - 2\alpha)x^2 + \delta}{x(\alpha x^2 + \beta)} dx \right) \\ &= x^{2\sigma} e^{-x^2} \end{aligned}$$

dir ve bu fonksiyon $x = -\infty$ ve $x = \infty$ da sıfır olduğundan genelleştirilmiş Hermite polinomlarının ortogonalite aralığı $(-\infty, \infty)$ dur. Böylece genelleştirilmiş Hermite polinomları Teorem 2.6' dan $\sigma + 1/2 > 0$ ve $(-1)^{2\sigma} = 1$ için

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} x^{2\sigma} e^{-x^2} \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2\sigma & x \\ 0 & 1 & \end{array} \right) \bar{S}_l \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2\sigma & x \\ 0 & 1 & \end{array} \right) dx \\ &= \left((-1)^k \prod_{m=1}^k \Delta_m \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2\sigma & x \\ 0 & 1 & \end{array} \right) \right) \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \delta_{k,l} \\ &= \left(\frac{1}{2^k} \prod_{m=1}^k (1 - (-1)^m \sigma + m) \right) \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (5.24)$$

ortogonalite bağıntısını sağlar (Masjed-Jamei 2007a). Burada (2.31) eşitliğinden

$$\Delta_m \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2\sigma & \\ 0 & 1 & \end{array} \right) = -\frac{1}{2}m - \frac{1 - (-1)^m}{2} \sigma$$

dir. Aynı zamanda (2.29) eşitliğinden genelleştirilmiş Hermite polinomları

$$\begin{aligned} H_k^{(\sigma)}(x) &= \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2\sigma & x \\ 0 & 1 & \end{array} \right) \\ &= x^k {}_2F_0 \left(\begin{array}{c} -[k/2], \quad -\sigma + \frac{(-1)^k}{2} - [k/2] \\ - \\ - \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

şeklinde hipergeometrik gösterimine sahiptir (Masjed-Jamei 2007a).

(5.24) ile verilen ortogonalite bağıntısı, (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği ve $(-1)^{2\sigma} = 1$ gerçeği dikkate alınarak genelleştirilmiş Hermite polinomları cinsinden Fourier dönüşümünü uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} f(x) = x^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_k^{(\beta)}(x) & , \quad (-1)^{2\alpha} = 1 \\ g(x) = x^{2\gamma} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_l^{(\delta)}(x) & , \quad (-1)^{2\gamma} = 1 \end{cases} \quad (5.26)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu belirlenen fonksiyonların her ikisi için de Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2} H_k^{(\beta)}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{2\alpha+k} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\quad \times \left(\sum_{n=0}^{[k/2]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n \left(-\beta + \frac{(-1)^k}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]\right)_n}{n!} (-x^{-2})^n \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{[k/2]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n \left(-\beta + \frac{(-1)^k}{2} - \left[\frac{k}{2}\right]\right)_n}{n!} (-1)^n \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{2\alpha+k-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Burada belirli integrali değerlendirmek için

$$P_{k,n}(s; \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{2\alpha+k-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (5.28)$$

diyelim. Yukarıdaki integrali hesaplamamızın iki yolu vardır. İlk olarak (5.28) eşitliğinde $(-1)^{2\alpha} = 1$ olduğuna dikkat edilerek ve e^{-isx} fonksiyonunun Taylor seri açılımı kullanılarak, $k = 2l$ için $P_{n,k}(s; \alpha)$ 'yı doğrudan

$$\begin{aligned} P_{2l,n}(s; \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-isx)^p}{p!} \right) x^{2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p i^p s^p}{p!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{p+2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r}}{(2r)!} \left(2 \int_0^{\infty} x^{2r+2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r}}{(2r)!} 2^{r+\alpha+l-n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(r + \alpha + l - n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

şeklinde hesaplayabiliriz. Burada

$$\int_0^{\infty} t^{-p-is+k-1} e^{-\frac{1}{2t}} dt = 2^{p+is-k} \Gamma(p+is-k)$$

integrali kullanılmıştır ve (5.29)' da p nin tek olduğu durumlarda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{p+2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$$

olduğu not edilmelidir. Aynı zamanda (5.29) eşitliğini basitleştirmek için

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha)_n \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)_n} \quad \text{ve} \quad (2m)! = \left(\frac{1}{2}\right)_m 2^{2m} m!$$

bağıntılarını kullanmamız gerekir. Böylece bu bağıntıları da kullanarak (5.29) eşitliği,

$$\begin{aligned} & P_{2l,n}(s; \alpha) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r} 2^{r+\alpha+l-n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\alpha+l-n+\frac{1}{2}\right) \left(\alpha+l-n+\frac{1}{2}\right)_r}{\left(\frac{1}{2}\right)_r 2^{2r} r!} \\ &= 2^{\alpha+l-n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\alpha+l-n+\frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(\alpha+l-n+\frac{1}{2} \mid -\frac{s^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

şeklinde elde edilir. Bu hesaplama benzer şekilde $P_{2l+1,n}(s; \alpha)$ için de uygulanabilir.

Sadece bu sırada $p = 0, 2, 4, \dots$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{p+2\alpha+2l+1-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$$

olacağını not etmeliyiz. Benzer işlemleri tekrar uyguladığımızda

$$\begin{aligned} & P_{2l+1,n}(s; \alpha) \\ &= (-is) 2^{\alpha+l-n+\frac{3}{2}} \Gamma\left(\alpha+l-n+\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(\alpha+l-n+\frac{3}{2} \mid -\frac{s^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

elde ederiz. Böylece (5.30) ve (5.31) bağıntılarını birleştirerek ve iyi bilinen

$$\left[\frac{k+1}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] = \frac{1 - (-1)^k}{2}$$

özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned} P_{k,n}(s; \alpha) &= 2^{\alpha-n+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]} \Gamma\left(\alpha-n+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \\ &\times (-is)^{\frac{1-(-1)^k}{2}} {}_1F_1\left(\alpha+\frac{1}{2}-n+\left[\frac{k+1}{2}\right] \mid -\frac{s^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

sonucuna ulaşırız. $P_{k,n}(s; \alpha)$ ' yı hesaplamamızın diğer bir yolu, sırası ile $k = 2l$, $k = 2l + 1$ i dikkate alarak $e^{-isx} = \cos(sx) - i \sin(sx)$ Euler formülünü ve $\cos(sx)$ ve $\sin(sx)$ trigonometrik fonksiyonlarının

$$\cos(sx) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (sx)^{2r}}{(2r)!} \text{ ve } \sin(sx) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (sx)^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

Taylor seri açılımlarını kullanarak elde edilmesidir (Erdélyi 1954). Böylece $(-1)^{2\alpha} = 1$ olduğuna dikkat edilerek, $k = 2l$ için $P_{k,n}(s; \alpha)$

$$\begin{aligned} & P_{2l,n}(s; \alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) x^{2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(sx) x^{2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos(sx) x^{2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= 2^{\alpha+l-n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\alpha+l-n+\frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(\alpha+l-n+\frac{1}{2} \mid -\frac{s^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

ve $k = 2l + 1$ için $P_{k,n}(s; \alpha)$

$$\begin{aligned} & P_{2l+1,n}(s; \alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) x^{2\alpha+2l+1-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(sx) x^{2\alpha+2l+1-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= -2i \int_0^{\infty} \sin(sx) x^{2\alpha+2l+1-2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= (-is) 2^{\alpha+l-n+\frac{3}{2}} \Gamma\left(\alpha+l-n+\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(\alpha+l-n+\frac{3}{2} \mid -\frac{s^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak (5.27) eşitliği

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)) &= 2^{\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]} \Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \\ &\times (-is)^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n \left(-\beta+\frac{1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n}{\left(-\alpha+\frac{1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n 2^n n!} \\ &\times {}_1F_1\left(\alpha+\frac{1}{2}-n+\left[\frac{k+1}{2}\right] \mid -\frac{s^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

şeklinde basitleştirilir. Diğer taraftan

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \mid x\right) = e^x {}_1F_1\left(\begin{matrix} \gamma - \alpha \\ \gamma \end{matrix} \mid -x\right) \quad (5.36)$$

Kummer formülüne (Koepef 1988) göre (5.35) bağıntısı

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x)) &= 2^{\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)e^{-\frac{1}{2}s^2} \\ &\times (-is)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}\sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n\left(-\beta+\frac{1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n}{\left(-\alpha+\frac{1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n2^n n!} \\ &\times {}_1F_1\left(\begin{matrix}-\alpha+n-\left[\frac{k}{2}\right] \\ 1-\frac{(-1)^k}{2}\end{matrix}\middle|\frac{s^2}{2}\right)\end{aligned}\quad (5.37)$$

şekline dönüştürülebilir. Şimdi, (5.37) eşitliği dikkate alınarak basitlik için

$$\begin{aligned}T_k^{(2)}(x;p_1,p_2) &= (x)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}\sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n\left(-p_2+\frac{1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n}{\left(-p_1+\frac{1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n2^n n!} \\ &\times {}_1F_1\left(\begin{matrix}-p_1+n-\left[\frac{k}{2}\right] \\ 1-\frac{(-1)^k}{2}\end{matrix}\middle|\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\quad (5.38)$$

şeklinde tanımlanırsa sonuç olarak (5.37) eşitliği

$$\mathcal{F}(f(x)) = (-i)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}2^{\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)e^{-\frac{1}{2}s^2}T_k^{(2)}(s;\alpha,\beta) \quad (5.39)$$

formunda yazılır. Benzer işlemler uygulanarak $g(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(g(x)) = (-i)^{\frac{1-(-1)^l}{2}}2^{\gamma+\frac{1}{2}+\left[\frac{l+1}{2}\right]}\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}+\left[\frac{l+1}{2}\right]\right)e^{-\frac{1}{2}s^2}T_l^{(2)}(s;\gamma,\delta) \quad (5.40)$$

şeklinde elde edilir.

(5.26) da tanımlanan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarını gözönünde bulundurarak (5.39) ile (5.40) eşitliklerinde elde edilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile verilen Parseval özdeşliğini uyguladığımızda

$$\begin{aligned}&2\pi\int_{-\infty}^{\infty}x^{2(\alpha+\gamma)}e^{-x^2}H_k^{(\beta)}(x)H_l^{(\delta)}(x)dx \\ &= (i)^{\frac{(-1)^k-(-1)^l}{2}}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}+\left[\frac{l+1}{2}\right]\right)}{2^{-(\alpha+\frac{1}{2}+\left[\frac{k+1}{2}\right])}2^{-(\gamma+\frac{1}{2}+\left[\frac{l+1}{2}\right])}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}T_k^{(2)}(s;\alpha,\beta)T_l^{(2)}(s;\gamma,\delta)ds\end{aligned}\quad (5.41)$$

elde ederiz. Son olarak (5.41) eşitliğinde

$$\beta = \delta = \alpha + \gamma$$

ifadesi seçilerek ve daha sonra (5.24) ortogonallık ilişkisi gözönüne alınarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.2 (5.38) eşitliğinde tanımlanan $T_k^{(2)}(x; p_1, p_2)$ özel fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} T_k^{(2)}(x; \alpha, \beta) T_l^{(2)}(x; \beta - \alpha, \beta) dx \\ &= \frac{\pi 2^{-\beta-2} \left[\frac{k+1}{2} \right] \Gamma\left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right) \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \Gamma\left(\beta - \alpha + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (5.42)$$

ortogonalite bağıntısına sahiptir. Burada $\alpha, \beta > -\frac{1}{2}$ ve $(-1)^{2\beta} = 1$ dir (Masjed-Jamei ve Koepf 2012).

5.3 $(-\infty, \infty)$ Aralığında $x^{-2\sigma}(1+x^2)^{-\eta}$ Ağırlık Fonksiyonuna Göre Sonlu

Simetrik Ortogonal Polinomlarının Fourier Dönüşümleri

Bu polinomlar Masjed-Jamei (2007a) tarafından verilen simetrik ortogonal polinomların özel bir durumu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Özel olarak (5.1) denkleminde

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, -2\sigma - 2\eta + 2, -2\sigma) \quad (5.43)$$

değerleri seçildiğinde, bu polinomların sağladığı

$$\begin{aligned} & x^2 (x^2 + 1) \phi_k''(x) - 2x ((\sigma + \eta - 1)x^2 + \sigma) \phi_k'(x) \\ & + (k(2\sigma + 2\eta - (k+1))x^2 + (1 - (-1)^k)\sigma) \phi_k(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

diferensiyel denklemi elde edilir (Masjed-Jamei 2007a). (5.2) çözümünde (5.43) değerleri yerine yazıldığında bu denklemin monik polinom çözümü

$$\begin{aligned} & \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma - 2\eta + 2 & -2\sigma & x \\ 1 & 1 & \end{array} \right) \\ &= \prod_{m=0}^{[k/2]-1} \frac{2m - 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1}}{2m - 2\eta - 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1} + 2[k/2]} \\ & \times \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{[k/2]}{n} \left(\prod_{m=0}^{[k/2]-(n+1)} \frac{(2m - 2\eta - 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1} + 2[k/2])}{2m - 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1}} \right) x^{k-2n} \end{aligned} \quad (5.45)$$

şeklinde ve bu monik çözüm (2.29) eşitliğinden

$$\begin{aligned} A_k^{(\sigma, \eta)}(x) &= \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma - 2\eta + 2 & -2\sigma & x \\ 1 & 1 & \end{array} \right) \\ &= x^k {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -\left[\frac{k}{2}\right], \quad \sigma + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right] \\ \sigma + \eta - k + \frac{1}{2} \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

hipergeometrik gösterimine sahiptir (Masjed-Jamei 2007b). Bu polinomların ağırlık fonksiyonları (2.33) eşitliğinden

$$W \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta + 2 & -2\sigma \\ 1 & 1 \end{array} \middle| x \right) = x^{-2\sigma} (1 + x^2)^{-\eta}$$

elde edilir.

$\{\bar{S}_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)\}_{k=0}^{k=N_0}$ sonlu polinom ailesi $(-\infty, \infty)$ aralığında $x^{-2\sigma} (1 + x^2)^{-\eta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani, Teorem 2.6' dan, $N_0 = \max\{l, k\} \leq \sigma + \eta - 1/2$, $\sigma < 1/2$, $(-1)^{2\sigma} = 1$ ve $\eta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{-2\sigma}}{(1+x^2)^\eta} \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta + 2 & -2\sigma \\ 1 & 1 \end{array} \middle| x \right) \bar{S}_l \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta + 2 & -2\sigma \\ 1 & 1 \end{array} \middle| x \right) dx \\ &= \left((-1)^k \prod_{m=1}^k \Delta_m \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta + 2 & -2\sigma \\ 1 & 1 \end{array} \middle| x \right) \right) \frac{\Gamma(-\sigma + \frac{1}{2})\Gamma(\sigma + \eta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\eta)} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (5.47)$$

ortogonallık bağıntısı sağlanır (Masjed-Jamei 2002, 2007a). Burada (2.31) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \Delta_m \left(\begin{array}{cc} -2\sigma - 2\eta + 2 & -2\sigma \\ 1 & 1 \end{array} \right) \\ &= \frac{(m - (1 - (-1)^m)\sigma)(m - (1 - (-1)^m)\sigma - 2\eta)}{(2m - 2\sigma - 2\eta - 1)(2m - 2\sigma - 2\eta + 1)} \end{aligned} \quad (5.48)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{-2\sigma}}{(1+x^2)^\eta} &= \int_0^\infty \frac{t^{-\sigma-1/2}}{(1+t)^\eta} dt \\ &= B\left(-\sigma + \frac{1}{2}, \eta + \sigma - \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\sigma + \frac{1}{2})\Gamma(\sigma + \eta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\eta)} \end{aligned} \quad (5.49)$$

dir.

Şimdi (5.47) ile verilen ortogonallık bağıntısı ve (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği, $(-1)^{2\sigma} = 1$ gerçeği dikkate alınarak monik polinomları cinsinden Fourier dönüşümünü uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} u(x) = x^{-2a} (1+x^2)^{-b} A_k^{(\alpha, \beta)}(x) & , & (-1)^{2a} = 1 \\ v(x) = x^{-2c} (1+x^2)^{-d} A_l^{(\gamma, \delta)}(x) & , & (-1)^{2c} = 1 \end{cases} \quad (5.50)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonların her ikisi içinde Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $u(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde edelim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2a} (1+x^2)^{-b} A_k^{(\alpha, \beta)}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2a+k} (1+x^2)^{-b} \\
&\quad \times \left(\sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-\left[\frac{k}{2}\right])_n (\alpha + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right])_n (-1)^n}{(\alpha + \beta - k + \frac{1}{2})_n n!} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-\left[\frac{k}{2}\right])_n (\alpha + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right])_n (-1)^n}{(\alpha + \beta - k + \frac{1}{2})_n n!} \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2a+k-2n} (1+x^2)^{-b} dx \right). \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Burada belirli integrali değerlendirmek için

$$R_{k,n}(s; a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2a+k-2n} (1+x^2)^{-b} dx \tag{5.52}$$

diyelim. Yukarıdaki integrali hesaplamanın iki yolu vardır. İlk olarak (5.52) eşitliğinde $(-1)^{2a} = 1$ olduğuna dikkat edilerek, $k = 2l$ için $R_{k,n}(s; a, b)$ 'yı doğrudan

$$\begin{aligned}
R_{2l,n}(s; a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-isx)^p}{p!} \right) x^{-2a+2l-2n} (1+x^2)^{-b} dx \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p i^p s^p}{p!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-2a+2l-2n} (1+x^2)^{-b} dx \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r}}{(2r)!} \left(2 \int_0^{\infty} x^{2r-2a+2l-2n} (1+x^2)^{-b} dx \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r}}{(2r)!} B\left(r - a + l - n + \frac{1}{2}, b - r + a - l + n - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. Burada p nin tek olduğu durumlarda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-2a+2l-2n} (1+x^2)^{-b} dx = 0$$

olduğu ve (2.2) eşitliğinde tanımlanan üçüncü tür Beta integrali kullanılmıştır. Aynı zamanda (5.53) eşitliğini basitleştirmek için

$$\Gamma(a+n) = (a)_n \Gamma(a), \quad \Gamma(a-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(a)}{(1-a)_n} \quad \text{ve} \quad (2m)! = \left(\frac{1}{2}\right)_m 2^{2m} m!$$

bağıntılarını kullanmamız gerekmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
R_{2l,n}(s; a, b) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r} \Gamma(r - a + l - n + \frac{1}{2}) \Gamma(b - r + a - l + n - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})_r 2^{2r} r! \Gamma(b)} \\
&= \frac{\Gamma(-a + l - n + \frac{1}{2}) \Gamma(b + a - l + n - \frac{1}{2})}{\Gamma(b)} \\
&\quad \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^{2r} (-a + l - n + \frac{1}{2})_r}{(\frac{1}{2})_r 2^{2r} r! (1 - a - b + l - n + \frac{1}{2})_r} \\
&= \frac{\Gamma(-a + l - n + \frac{1}{2}) \Gamma(b + a - l + n - \frac{1}{2})}{\Gamma(b)} \\
&\quad \times {}_1F_2 \left(\begin{matrix} -a + l - n + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, -a - b + l - n + \frac{3}{2} \end{matrix} \mid \frac{s^2}{4} \right) \tag{5.54}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu hesaplama benzer şekilde $R_{2l+1,n}(s; a, b)$ için de uygulanabilir. Sadece bu sırada $p = 0, 2, 4, \dots$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-2a+2l+1-2n} (1+x^2)^{-b} dx = 0$$

olacağını not etmeliyiz. Benzer işlemleri uygulayarak

$$\begin{aligned}
R_{2l+1,n}(s; a, b) &= (-is) \frac{\Gamma(-a + l - n + \frac{3}{2}) \Gamma(b + a - l + n - \frac{3}{2})}{\Gamma(b)} \\
&\quad \times {}_1F_2 \left(\begin{matrix} -a + l - n + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, -a - b + l - n + \frac{5}{2} \end{matrix} \mid \frac{s^2}{4} \right) \tag{5.55}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (5.54) ve (5.55) bağıntıları birleştirilerek ve iyi bilinen

$$\left[\frac{k+1}{2} \right] - \left[\frac{k}{2} \right] = \frac{1 - (-1)^k}{2}$$

özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&R_{k,n}(s; a, b) \tag{5.56} \\
&= \Gamma \left(-a - n + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2} \right] \right) \Gamma \left(b + a + n - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2} \right] \right) \\
&\quad \times \frac{(-is)^{\frac{1-(-1)^k}{2}}}{\Gamma(b)} {}_1F_2 \left(\begin{matrix} -a - n + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2} \right] \\ 1 - \frac{(-1)^k}{2}, -a - b - n + \frac{3}{2} + \left[\frac{k+1}{2} \right] \end{matrix} \mid \frac{s^2}{4} \right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $R_{k,n}(s; a, b)$ ' yı hesaplamamanın diğer bir yolu, sırası ile $k = 2l$,

$k = 2l + 1$ i dikkate alarak $e^{-isx} = \cos(sx) - i \sin(sx)$ Euler formülünü ve $\cos(sx)$

ve $\sin(sx)$ trigonometrik fonkiyonlarının

$$\cos(sx) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (sx)^{2r}}{(2r)!} \text{ ve } \sin(sx) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (sx)^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

Taylor seri açılımlarını kullanarak elde edilmesidir (Erdélyi vd. 1954). $(-1)^{2a} = 1$ olduğuna dikkat edilerek, $k = 2l$ için $R_{k,n}(s; a, b)$

$$\begin{aligned} & R_{2l,n}(s; a, b) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) x^{-2a+2l-2n} (1+x^2)^{-b} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(sx) x^{-2a+2l-2n} (1+x^2)^{-b} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos(sx) x^{-2a+2l-2n} (1+x^2)^{-b} dx \\ &= \frac{\Gamma(-a+l-n+\frac{1}{2}) \Gamma(b+a-l+n-\frac{1}{2})}{\Gamma(b)} \\ &\quad \times {}_1F_2 \left(\begin{matrix} -a+l-n+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, -a-b+l-n+\frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

ve benzer şekilde $k = 2l + 1$ için $R_{k,n}(s; a, b)$

$$\begin{aligned} & R_{2l+1,n}(s; a, b) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) x^{-2a+2l+1-2n} (1+x^2)^{-b} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(sx) x^{-2a+2l+1-2n} (1+x^2)^{-b} dx \\ &= (-2i) \int_0^{\infty} \sin(sx) x^{-2a+2l+1-2n} (1+x^2)^{-b} dx \\ &= (-is) \frac{\Gamma(-a+l-n+\frac{3}{2}) \Gamma(b+a-l+n-\frac{3}{2})}{\Gamma(b)} \\ &\quad \times {}_1F_2 \left(\begin{matrix} -a+l-n+\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, -a-b+l-n+\frac{5}{2} \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

elde edilir. Sonuç olarak (5.51) eşitliği

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(x)) &= \frac{1}{\Gamma(b)} \Gamma\left(-a + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \Gamma\left(b + a - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \\ &\quad \times (-is)^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n \left(\alpha + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n \left(b + a - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n}{\left(\alpha + \beta - k + \frac{1}{2}\right)_n \left(a + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n n!} \\ &\quad \times {}_1F_2 \left(\begin{matrix} -a - n + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right] \\ 1 - \frac{(-1)^k}{2}, -a - b - n + \frac{3}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right] \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

şeklinde basitleştirilir. Şimdi basitlik için

$$\begin{aligned}
& T_k^{(3)}(x; q_1, q_2, q_3, q_4) \\
&= x^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n \left(q_3 + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n \left(q_1 + q_2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n}{\left(q_3 + q_4 - k + \frac{1}{2}\right)_n \left(q_1 + \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)_n n!} \\
&\quad \times {}_1F_2 \left(\begin{matrix} -q_1 - n + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right] \\ 1 - \frac{(-1)^k}{2}, \quad -q_1 - q_2 - n + \frac{3}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right] \end{matrix} \middle| \frac{x^2}{4} \right)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

olarak tanımlanırsa, (5.59) eşitliği

$$\begin{aligned}
F(u(x)) &= \frac{1}{\Gamma(b)} \Gamma\left(-a + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \Gamma\left(b + a - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \\
&\quad \times (-i)^{\frac{1-(-1)^k}{2}} T_k^{(3)}(s; a, b, \alpha, \beta)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

formunda ifade edilir. Benzer işlemler uygulanarak $v(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
F(v(x)) &= \frac{1}{\Gamma(d)} \Gamma\left(-c + \frac{1}{2} + \left[\frac{l+1}{2}\right]\right) \Gamma\left(d + c - \frac{1}{2} - \left[\frac{l+1}{2}\right]\right) \\
&\quad \times (-i)^{\frac{1-(-1)^l}{2}} T_l^{(3)}(s; c, d, \gamma, \delta)
\end{aligned} \tag{5.62}$$

şeklinde elde edilir.

(5.50) de tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını gözönünde bulundurarak (5.61) ile (5.62) eşitliklerinde elde edilen $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile ifade edilen Parseval özdeşliğini uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2(a+c)} (1+x^2)^{-(b+d)} A_k^{(\alpha, \beta)}(x) A_l^{(\gamma, \delta)}(x) dx \\
&= i^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \Gamma\left(-a + \frac{1}{2} + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \\
&\quad \times \frac{1}{\Gamma(b) \Gamma(d)} \Gamma\left(a + b - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(-c + \frac{1}{2} + \left[\frac{l+1}{2}\right]\right) \Gamma\left(c + d - \frac{1}{2} - \left[\frac{l+1}{2}\right]\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} T_k^{(3)}(s; a, b, \alpha, \beta) T_l^{(3)}(s; c, d, \gamma, \delta) ds
\end{aligned} \tag{5.63}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, (5.63) eşitliğinin sol tarafında

$$\alpha = \gamma = a + c \quad \text{ve} \quad \beta = \delta = b + d \tag{5.64}$$

ifadeleri seçilerek ve daha sonra (5.47) ortogonalite ilişkisi gözönüne alınarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.3 (5.60) eşitliğinde tanımlanan $T_k^{(3)}(x; q_1, q_2, q_3, q_4)$ özel fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_k^{(3)}(x; a, b, \alpha, \beta) T_l^{(3)}(x; \alpha - a, \beta - b, \alpha, \beta) dx \\ &= \prod_{m=1}^k \frac{(-m + (1 - (-1)^m)\alpha)(m - (1 - (-1)^m)\alpha - 2\beta)}{(2m - 2\alpha - 2\beta - 1)(2m - 2\alpha - 2\beta + 1)} \\ & \quad \times \frac{\Gamma(b) \Gamma(\beta - b)}{\Gamma(\beta) \Gamma(-a + \frac{1}{2} + [\frac{k+1}{2}]) \Gamma(a + b - \frac{1}{2} - [\frac{k+1}{2}])} \\ & \quad \times \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2}) \Gamma(-\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(a - \alpha + \frac{1}{2} + [\frac{k+1}{2}]) \Gamma(\alpha + \beta - a - b - \frac{1}{2} - [\frac{k+1}{2}])} \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (5.65)$$

ortogonalite bağıntısına sahiptir. Burada $l, k = 0, 1, \dots, N_0 = \max\{l, k\} \leq \alpha + \beta - \frac{1}{2}$, $\alpha < \frac{1}{2}$, $(-1)^{2\alpha} = 1$, $\beta > b > 0$, $0 < a < \frac{1}{2}$ ve $a + b > \frac{1}{2}$ dir (Masjed-Jamei ve Koepf 2013).

5.4 $(-\infty, \infty)$ Aralığında $x^{-2\sigma} e^{(-\frac{1}{x^2})}$ Ağırlık Fonksiyonuna Göre Sonlu Simetrik Ortogonal Polinomlarının Fourier Dönüşümleri

Bu polinomlar bir önceki duruma benzer olarak, belirtilen ana özelliklere sahip olan simetrik ortogonal polinomların bir başka sonlu dizisi olarak karşımıza çıkmaktadır. Özel olarak (5.1) denkleminde

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, -2\sigma + 2, 2) \quad (5.66)$$

değerleri seçildiğinde, bu polinomların sağladığı

$$x^4 \phi_k''(x) + 2x((1 - \sigma)x^2 + 1) \phi_k'(x) - (k(k + 1 - 2\sigma)x^2 + 1 - (-1)^k) \phi_k(x) = 0 \quad (5.67)$$

diferensiyel denklemi elde edilir (Masjed-Jamei 2007a). (5.2) çözümünde (5.66) değerleri yerine yazıldığında bu denklemin monik polinom çözümü

$$\begin{aligned} \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma + 2 & 2 & x \\ 1 & 0 & \end{array} \right) &= \prod_{m=0}^{[k/2]-1} \frac{2}{2m - 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1} + 2[k/2]} \\ &\times \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{[k/2]}{n} \left(\prod_{m=0}^{[k/2]-(n+1)} \frac{2m - 2\sigma + 2 + (-1)^{k+1} + 2[k/2]}{2} \right) x^{k-2n} \end{aligned} \quad (5.68)$$

biçimindedir ve bu monik çözüm (2.29) eşitliğinden

$$B_k^{(\sigma)}(x) = \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma+2 & 2 & x \\ 1 & 0 & \end{array} \right) = x^k {}_1F_1 \left(\begin{array}{c|c} -\left[\frac{k}{2}\right] & \frac{1}{x^2} \\ \sigma + \frac{(-1)^k}{2} & \end{array} \right) \quad (5.69)$$

formunda hipergeometrik gösterime sahiptir (Masjed-Jamei 2007b).

Bu polinomların ağırlık fonksiyonu (2.33) eşitliğinden

$$W \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma+2 & 2 & x \\ 1 & 0 & \end{array} \right) = x^{-2\sigma} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (5.70)$$

şeklinde elde edilir. Teorem 2.6 gereğince bu polinomlar $N_0 = \max\{l, k\} \leq \sigma - 1/2$ ve $(-1)^{2\sigma} = 1$ için

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2\sigma} e^{-\frac{1}{x^2}} \bar{S}_k \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma+2 & 2 & x \\ 1 & 0 & \end{array} \right) \bar{S}_l \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma+2 & 2 & x \\ 1 & 0 & \end{array} \right) dx \\ &= \left((-1)^k \prod_{m=1}^k \Delta_m \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma+2 & 2 & \\ 1 & 0 & \end{array} \right) \right) \Gamma\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (5.71)$$

ortogonallik bağıntısını sağlar (Masjed-Jamei 2007a). Burada (2.31) eşitliğinden

$$\Delta_m \left(\begin{array}{cc|c} -2\sigma+2 & 2 & \\ 1 & 0 & \end{array} \right) = \frac{-2(-1)^m(m-\sigma)-2\sigma}{(2m-2\sigma-1)(2m-2\sigma+1)} \quad (5.72)$$

dir.

$A_k^{(\sigma, \eta)}(x)$ polinomlarının Fourier dönüşümleri için uygulanan işlemler benzer şekilde $B_k^{(\sigma)}(x)$ polinomlarına da uygulanarak bu polinomların Fourier dönüşümleri elde edilebilir. (5.71) ile verilen ortogonallik bağıntısı, (2.35) ile verilen Parseval özdeşliği ve $(-1)^{2\sigma} = 1$ gerçekliği dikkate alınarak monik polinomları cinsinden Fourier dönüşümünü uygulayacağımız özel fonksiyonları

$$\begin{cases} f(x) = x^{-2\alpha} e^{-\frac{1}{2x^2}} B_k^{(\beta)}(x) & , \quad (-1)^{2\alpha} = 1 \\ g(x) = x^{-2\gamma} e^{-\frac{1}{2x^2}} B_l^{(\delta)}(x) & , \quad (-1)^{2\gamma} = 1 \end{cases} \quad (5.73)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonların her ikisi içinde Fourier dönüşümü mevcuttur. Öncelikle $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü elde ede-

lim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2\alpha} e^{-\frac{1}{2x^2}} B_k^{(\beta)}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2\alpha+k} e^{-\frac{1}{2x^2}} \left(\sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n}{\left(\beta + \frac{(-1)^k}{2}\right)_n} \frac{x^{-2n}}{n!} \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\left(-\left[\frac{k}{2}\right]\right)_n}{\left(\beta + \frac{(-1)^k}{2}\right)_n} \frac{1}{n!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2\alpha+k-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \right). \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Yine burada integrali değerlendirmek için

$$S_{k,n}(s; \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} x^{-2\alpha+k-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \quad (5.75)$$

diyelim. Burada (5.52) eşitliğinde $R_{k,n}(s; a, b)$ için uyguladığımız metodu tekrarlayabiliriz. Bu yüzden $(-1)^{2\alpha} = 1$ olduğuna dikkat edilerek, $k = 2l$ için $S_{k,n}(s; \alpha)$ değerini

$$\int_0^{\infty} t^{-p-is+k-1} e^{-\frac{1}{2t}} dt = 2^{p+is-k} \Gamma(p+is-k)$$

belirli integrali ve hipergeometrik bir form cinsinden son toplamını basitleştirmek için de

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha)_n \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)_n} \quad \text{ve} \quad (2m)! = \left(\frac{1}{2}\right)_m 2^{2m} m!$$

bağıntıları kullanılarak, aynı zamanda p 'nin tek değeri için

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx = 0$$

olduğu not edilerek doğrudan

$$\begin{aligned}
S_{2l,n}(s; \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-isx)^p}{p!} \right) x^{-2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p i^p s^p}{p!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r}}{(2r)!} \left(2 \int_0^{\infty} x^{2r-2\alpha+2l-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r}}{(2r)!} 2^{-r+\alpha-l+n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(-r+\alpha-l+n-\frac{1}{2}\right) \\
&= 2^{\alpha-l+n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\alpha-l+n-\frac{1}{2}\right) {}_0F_2\left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, -\alpha+l-n+\frac{3}{2} \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{8}\right)
\end{aligned} \quad (5.76)$$

elde edilir. Bununla birlikte benzer işlemler $k = 2l + 1$ için yapılırsa $p = 0, 2, 4, \dots$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-2\alpha+2l+1-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx = 0$$

olduğunu not ederek

$$\begin{aligned} S_{2l+1,n}(s; \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-isx)^p}{p!} \right) x^{-2\alpha+2l+1-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p i^p s^p}{p!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-2\alpha+2l+1-2n} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \right) \\ &= (-is) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r s^{2r}}{(2r+1)!} \left(2 \int_0^{\infty} x^{2r-2\alpha+2l-2n+2} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \right) \\ &= (-is) 2^{\alpha-l+n-\frac{3}{2}} \Gamma \left(\alpha - l + n - \frac{3}{2} \right) {}_0F_2 \left(\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2}, -\alpha + l - n + \frac{5}{2} \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{8} \right) \end{aligned} \quad (5.77)$$

elde edilir. Böylece (5.76) ve (5.77) bağıntıları birleştirilerek ve iyi bilinen

$$\left[\frac{k+1}{2} \right] - \left[\frac{k}{2} \right] = \frac{1 - (-1)^k}{2}$$

özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned} S_{k,n}(s; \alpha) &= 2^{\alpha+n-\frac{1}{2}-[\frac{k+1}{2}]} \Gamma \left(\alpha + n - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2} \right] \right) (-is)^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \\ &\quad \times {}_0F_2 \left(\begin{matrix} - \\ 1 - \frac{(-1)^k}{2}, -\alpha - n + \frac{3}{2} + \left[\frac{k+1}{2} \right] \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{8} \right) \end{aligned} \quad (5.78)$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak (5.74) eşitliği

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)) &= 2^{\alpha-\frac{1}{2}-[\frac{k+1}{2}]} \Gamma \left(\alpha - \frac{1}{2} - \left[\frac{k+1}{2} \right] \right) (-is)^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2} \right]} \frac{(-[\frac{k}{2}])_n (\alpha - \frac{1}{2} - [\frac{k+1}{2}])_n 2^n}{\left(\beta + \frac{(-1)^k}{2} \right)_n n!} \\ &\quad \times {}_0F_2 \left(\begin{matrix} - \\ 1 - \frac{(-1)^k}{2}, -\alpha - n + \frac{3}{2} + \left[\frac{k+1}{2} \right] \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{8} \right) \end{aligned} \quad (5.79)$$

şeklinde basitleştirilir. Basitlik için

$$\begin{aligned}
& T_k^{(4)}(x; p_1, p_2) \\
&= x^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)_n (p_1 - \frac{1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor)_n 2^n}{\left(p_2 + \frac{(-1)^k}{2}\right)_n n!} \\
&\quad \times {}_0F_2 \left(\begin{matrix} - \\ 1 - \frac{(-1)^k}{2}, \quad -p_1 - n + \frac{3}{2} + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \end{matrix} \middle| \frac{x^2}{8} \right)
\end{aligned} \tag{5.80}$$

olarak tanımlanırsa, (5.79) eşitliği

$$\mathcal{F}(f(x)) = 2^{\alpha - \frac{1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \Gamma \left(\alpha - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \right) (-i)^{\frac{1-(-1)^k}{2}} T_k^{(4)}(s; \alpha, \beta) \tag{5.81}$$

formunda elde edilir. Benzer işlemler uygulanarak $g(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(g(x)) = 2^{\gamma - \frac{1}{2} - \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor} \Gamma \left(\gamma - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor \right) (-i)^{\frac{1-(-1)^l}{2}} T_l^{(4)}(s; \gamma, \delta) \tag{5.82}$$

elde edilir.

(5.73) te tanımlanan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarını gözönünde bulundurarak (5.81) ile (5.82) eşitliklerinde elde edilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine (2.35) ile ifade edilen Parseval özdeşliğini uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2(\alpha+\gamma)} e^{-\frac{1}{x^2}} B_k^{(\beta)}(x) B_l^{(\delta)}(x) dx \\
&= i^{\frac{(-1)^k - (-1)^l}{2}} \frac{\Gamma \left(\alpha - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \right) \Gamma \left(\gamma - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor \right)}{2^{-\alpha + \frac{1}{2} + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{-\gamma + \frac{1}{2} + \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} T_k^{(4)}(s; \alpha, \beta) T_l^{(4)}(s; \gamma, \delta) ds
\end{aligned} \tag{5.83}$$

elde ederiz. Son olarak (5.83) eşitliğinde

$$\beta = \delta = \alpha + \gamma$$

ifadeleri seçilerek ve daha sonra (5.71) ortogonalite ilişkisi gözönüne alınarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.4 (5.80) eşitliğinde tanımlanan $T_k^{(4)}(x; p_1, p_2)$ özel fonksiyonu

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_k^{(4)}(x; \alpha, \beta) T_l^{(4)}(x; \beta - \alpha, \beta) dx \\
&= 2^{-\beta+1+2\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \prod_{m=1}^k \frac{2(-1)^m(m-\beta) + 2\beta}{(2m-2\beta-1)(2m-2\beta+1)} \\
&\quad \times \frac{\Gamma \left(\beta - \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\alpha - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \right) \Gamma \left(\beta - \alpha - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \right)} \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{5.84}$$

ortogonallik ilişkisine sahiptir. Burada $l, k = 0, 1, \dots, N_0 = \max \{l, k\} \leq \beta - \frac{1}{2}$, $(-1)^{2\beta} = 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha < \beta - \frac{1}{2}$ dir (Masjed-Jamei ve Koepf 2013).



6. JACOBI POLİNOMLARININ VE ÖZEL DURUMLARININ SONLU FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, $[\alpha, \beta]$ aralığında ortogonal olan bir $P(x)$ polinomunun

$$\hat{P}(\mu) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\mu x} P(x) dx \quad (6.1)$$

sonlu Fourier dönüşümü incelenecektir. İlk olarak bölüm 3 te tanımlanan $P_k^{(\alpha, \beta)}$ Jacobi ortogonal polinomlarının sonlu Fourier dönüşümleri ile ilgili formüller verilecektir. Daha sonra Jacobi ortogonal polinomlarının özel durumları olan $P_k(x)$ Legendre polinomu, $C_k^{(p)}(x)$ Gegenbauer polinomu, birinci ve ikinci çeşit $T_k(x)$ ve $U_k(x)$ Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümleri ile ilgili formüller verilecektir.

Bununla birlikte üstel fonksiyonun kısmi toplamaları için E_k gösterimi

$$E_k(x) = \sum_{l=0}^k \frac{x^l}{l!} \quad (6.2)$$

şeklinde tanımlanarak sonuçların çoğu E_k formülü yardımıyla ifade edilecektir (Gradshteyn ve Ryzhik 2007). Böylece $P(x)$ polinomunun sonlu Fourier dönüşümlerini elde etmek için aşağıdaki verilen eşitlikler kullanılacaktır.

Lemma 6.1 μ herhangi bir sayı ve $n \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere

$$\int_{-1}^1 x^n e^{i\mu x} dx = \frac{(-1)^n n!}{(i\mu)^{n+1}} [e^{i\mu} E_n(-i\mu) - e^{-i\mu} E_n(i\mu)] \quad (6.3)$$

ve

$$\int_0^1 x^n e^{i\mu x} dx = \frac{(-1)^n n!}{(i\mu)^{n+1}} [e^{i\mu} E_n(-i\mu) - 1] \quad (6.4)$$

dir.

İspat. (6.3) eşitliğinin sol tarafında $x^n = u$ ve $e^{i\mu x} dx = dv$ denilip kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^n e^{i\mu x} dx &= \frac{x^n}{i\mu} e^{i\mu x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{n}{i\mu} x^{n-1} e^{i\mu x} dx \\ &= \frac{e^{i\mu}}{i\mu} - \frac{(-1)^n e^{-i\mu}}{i\mu} - \int_{-1}^1 \frac{n}{i\mu} x^{n-1} e^{i\mu x} dx \end{aligned}$$

bulunur. $x^{n-1} = u$ ve $e^{i\mu x} dx = dv$ değişken değişimi için tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\mu}}{i\mu} - \frac{(-1)^n e^{-i\mu}}{i\mu} - \frac{n}{i\mu} \left[\frac{x^{n-1}}{i\mu} e^{i\mu x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{i\mu} (n-1) x^{n-2} e^{i\mu x} dx \right] \\
&= \frac{e^{i\mu}}{i\mu} - \frac{(-1)^n e^{-i\mu}}{i\mu} - \frac{ne^{i\mu}}{(i\mu)^2} + \frac{(-1)^{n-1} ne^{-i\mu}}{(i\mu)^2} + \frac{n}{(i\mu)^2} \int_{-1}^1 (n-1) x^{n-2} e^{i\mu x} dx
\end{aligned}$$

bulunur. Yine $x^{n-2} = u$ ve $e^{i\mu x} dx = dv$ denilip kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{i\mu}}{i\mu} - \frac{(-1)^n e^{-i\mu}}{i\mu} - \frac{ne^{i\mu}}{(i\mu)^2} + \frac{(-1)^{n-1} ne^{-i\mu}}{(i\mu)^2} \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{(i\mu)^2} \left[\frac{x^{n-2}}{i\mu} e^{i\mu x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{i\mu} (n-2) x^{n-3} e^{i\mu x} dx \right] \\
&= \frac{e^{i\mu}}{i\mu} - \frac{ne^{i\mu}}{(i\mu)^2} + \frac{n(n-1)e^{i\mu}}{(i\mu)^3} \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1} e^{-i\mu}}{i\mu} + \frac{(-1)^{n-1} ne^{-i\mu}}{(i\mu)^2} + \frac{(-1)^{n-1} n(n-1)e^{-i\mu}}{(i\mu)^3} \\
&\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{(i\mu)^3} \int_{-1}^1 x^{n-3} e^{i\mu x} dx \\
&= e^{i\mu} \sum_{k=0}^2 \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} + (-1)^{n-1} e^{-i\mu} \sum_{k=0}^2 \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} (-1)^k \\
&\quad + \frac{1}{(i\mu)^3} (-n)_3 \int_{-1}^1 x^{n-3} e^{i\mu x} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde kısmi integrasyon uygulanarak devam edilirse

$$\begin{aligned}
&= e^{i\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} + (-1)^{n-1} e^{-i\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} (-1)^k + \frac{1}{(i\mu)^n} (-n)_n \int_{-1}^1 e^{i\mu x} dx \\
&= e^{i\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} + (-1)^{n-1} e^{-i\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} (-1)^k + \frac{1}{(i\mu)^{n+1}} (-n)_n (e^{i\mu} - e^{-i\mu}) \\
&= e^{i\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} + (-1)^{n-1} e^{-i\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} (-1)^k + \frac{(-1)^n}{(i\mu)^{n+1}} n! (e^{i\mu} - e^{-i\mu})
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşıtlik

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{(i\mu)^{n+1}} n! e^{i\mu} \left(1 + \frac{(i\mu)^{n+1}}{(-1)^n n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{(i\mu)^{n+1}} n! e^{-i\mu} \left(-1 + \frac{(-1)^{n-1} (i\mu)^{n+1}}{(-1)^n n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} (-1)^k \right)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

formunda yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}\frac{(-n)_k}{(-1)^n n!} &= \frac{(-n)(-n+1)\dots(-n+k-1)}{(-1)^n n!} \\ &= \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)}{(-1)^n n!} \\ &= \frac{1}{(n-k)!(-1)^{n-k}}\end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}&\left(1 + \frac{(i\mu)^{n+1}}{(-1)^n n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(-1)^n n!} (i\mu)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-i\mu)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-i\mu)^k}{k!} = E_n(-i\mu)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left(-1 + \frac{(-1)^{n-1} (i\mu)^{n+1}}{(-1)^n n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_k}{(i\mu)^{k+1}} (-1)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(i\mu)^{n-k} (-n)_k}{n!} (-1)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (i\mu)^{n-k} \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} (-1)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(i\mu)^{n-k}}{(n-k)!} (-1) = - \sum_{k=0}^n \frac{(i\mu)^k}{k!} = -E_n(i\mu)\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Son olarak elde edilen bu ifadeler (6.5) eşitliğinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^n e^{i\mu x} dx &= \frac{(-1)^n}{(i\mu)^{n+1}} n! e^{i\mu} E_n(-i\mu) - \frac{(-1)^n}{(i\mu)^{n+1}} n! e^{-i\mu} E_n(i\mu) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(i\mu)^{n+1}} [e^{i\mu} E_n(-i\mu) - e^{-i\mu} E_n(i\mu)]\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

(6.3) eşitliğinde integral aralığı $[0, 1]$ olarak alınır ve benzer işlemler uygulanırsa

$$\int_0^1 x^n e^{i\mu x} dx = \frac{(-1)^n n!}{(i\mu)^{n+1}} [e^{i\mu} E_n(-i\mu) - 1]$$

eşitliği elde edilir. ■

6.1 Jacobi Polinomlarının Sonlu Fourier Dönüşümleri

q_k , k -yüncü dereceden bir polinom olmak üzere bu polinomun sonlu Fourier açılımlarını elde etmek için

$$F(q_k) = \int_{-1}^1 e^{-i\mu x} q_k(x) dx$$

eşitliğini ele alalım. Bu eşitlik

$$F(q_k) = -\frac{1}{i\mu} \int_{-1}^1 \frac{de^{-i\mu x}}{dx} q_k(x) dx$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $-\frac{1}{i\mu} \frac{de^{-i\mu x}}{dx} dx = dv$ ve $q_k(x) = u$ değişken değişimi ile kısmi integrasyon uygulanırsa

$$F(q_k) = -\frac{1}{i\mu} [e^{-i\mu} q_k(1) - e^{i\mu} q_k(-1)] + \frac{1}{i\mu} F(q'_k)$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlikte $-\frac{1}{i\mu} \frac{de^{-i\mu x}}{dx} dx = dv$ ve $q'_k(x) = u$ değişken değişimi yapılarak tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & F(q_k) \\ &= -\frac{1}{i\mu} [e^{-i\mu} q_k(1) - e^{i\mu} q_k(-1)] - \frac{1}{(i\mu)^2} [e^{-i\mu} q'_k(1) - e^{i\mu} q'_k(-1)] \\ & \quad + \frac{1}{(i\mu)^2} F(q''_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(m+1)$ kez kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} & F(q_k) \\ &= -\sum_{n=0}^m \frac{1}{(i\mu)^{n+1}} [e^{-i\mu} q_k^{(n)}(1) - e^{i\mu} q_k^{(n)}(-1)] + \frac{1}{(i\mu)^{m+1}} F(q_k^{(m+1)}), \quad m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

bulunur. Burada k dan sonraki terimler için $q_k^{(m+1)} \equiv 0$ olup açık çözüm

$$F(q_k) = -e^{-i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{q_k^{(n)}(1)}{(i\mu)^{n+1}} + e^{i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{q_k^{(n)}(-1)}{(i\mu)^{n+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (6.6)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte $q_k = P_k^{(a,b)}$ alınırsa

$$\begin{aligned} & F(P_k^{(a,b)}) \\ &= -e^{-i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{d^n}{dx^n} P_k^{(a,b)}(1) \frac{1}{(i\mu)^{n+1}} + e^{i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{d^n}{dx^n} P_k^{(a,b)}(-1) \frac{1}{(i\mu)^{n+1}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (6.7) eşitliğini dikkate alarak Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümleri için çeşitli formüller aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 6.1 $P_k^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümleri $\mu \neq 0$ için

$$\begin{aligned}\widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) &= 2e^{i\mu}(a+1)_k \sum_{n=0}^k \frac{(a+b+k+1)_n}{(k-n)!(a+1)_n} \left[\frac{e^{-2i\mu} E_n(2i\mu) - 1}{(-2i\mu)^{n+1}} \right] \\ &= 2 \sum_{n=0}^k \frac{(a+b+k+1)_n}{(k-n)!(-2i\mu)^{n+1}} \\ &\quad \times \left[(-1)^{k-n} e^{-i\mu} (b+n+1)_{k-n} - e^{i\mu} (a+n+1)_{k-n} \right]\end{aligned}$$

ve $\mu = 0$ için

$$\widehat{P_k^{(a,b)}}(0) = \frac{(a+b+k+1)}{2} \left[\binom{a+k}{k-1} - (-1)^{k-1} \binom{b+k}{k-1} \right]$$

şeklindedir (Dixit vd. 2015).

İspat. İlk formül, (3.5) ile verilen Jacobi ortogonal polinomlarının hipergeometrik gösterimleri kullanılarak elde edilir. $P_k^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomlarının hipergeometrik gösterimlerinin sonlu Fourier dönüşümleri

$$\widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) = \frac{(a+1)_k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (a+b+k+1)_n}{n! (a+1)_n} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{2} \right)^n e^{i\mu x} dx$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\frac{1-x}{2} = u$ değişken değişimi yapılarak $1-2u = x$ olur ve $(-k)_n = \frac{(-1)^n k!}{(k-n)!}$ temel özelliği de kullanılarak

$$\widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) = 2e^{i\mu}(a+1)_k \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n (a+b+k+1)_n}{n! (k-n)! (a+1)_n} \int_0^1 e^{-2i\mu u} u^n du$$

şeklinde bulunur. Burada Lemma 6.1 de verilen (6.4) ifadesi yerine yazılarak

$$\widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) = 2e^{i\mu}(a+1)_k \sum_{n=0}^k \frac{(a+b+k+1)_n}{(k-n)!(a+1)_n} \left[\frac{e^{-2i\mu} E_n(2i\mu) - 1}{(-2i\mu)^{n+1}} \right]$$

formülü elde edilir. İkinci formül için

$$\frac{d}{dx} P_k^{(a,b)}(x) = \frac{(a+b+k+1)}{2} P_{k-1}^{(a+1,b+1)}(x) \quad (6.8)$$

eşitliğini (Rainville 1960) dikkate alalım. Bu eşitliğin ardışık olarak tekrarlanmasıyla

$$\frac{d^k}{dx^k} P_k^{(a,b)}(x) = \frac{(a+b+k+1)_n}{2^n} P_{k-n}^{(a+n,b+n)}(x) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.9)$$

elde edilir. Diğer taraftan Jacobi polinomlarının $x = -1$ ve $x = 1$ noktasındaki değerleri

$$\begin{aligned} P_k^{(a,b)}(1) &= \binom{a+k}{k} = \frac{(1+a)_k}{k!} \\ P_k^{(a,b)}(-1) &= (-1)^k \binom{b+k}{k} = (-1)^k \frac{(1+b)_k}{k!} \end{aligned} \quad (6.10)$$

şeklinde olup bu değerler dikkate alınarak (6.9) eşitliği $x = -1$ ve $x = 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} P_k^{(a,b)}(1) &= \frac{(a+b+k+1)_n}{2^n} \frac{(a+n+1)_{k-n}}{(k-n)!} \\ &= \frac{(a+b+1)_{k+n}}{(a+b+1)_k} \frac{(a+1)_k}{(a+1)_n} \frac{1}{2^n (k-n)!} \\ &= \frac{(a+1)_k}{(a+b+1)_k} \frac{(a+b+1)_{k+n}}{2^n (k-n)! (a+1)_n} \\ \frac{d^n}{dx^n} P_k^{(a,b)}(-1) &= (-1)^{k-n} \frac{(a+b+k+1)_n}{2^n} \frac{(b+n+1)_{k-n}}{(k-n)!} \\ &= (-1)^{k+n} \frac{(b+1)_k}{(a+b+1)_k} \frac{(a+b+1)_{k+n}}{2^n (k-n)! (b+1)_n} \end{aligned} \quad (6.11)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, (6.11) ile verilen bu değerler (6.7) eşitliğinde yerine yazılarak Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için

$$\begin{aligned} \widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) &= -e^{-i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{(a+b+k+1)_n (a+n+1)_{k-n}}{2^n (k-n)! (i\mu)^{n+1}} \\ &\quad + (-1)^{k-n} e^{i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{(a+b+k+1)_n (b+n+1)_{k-n}}{2^n (k-n)! (i\mu)^{n+1}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^k \frac{(a+b+k+1)_n}{(k-n)! (-2i\mu)^{n+1}} \\ &\quad \times \left[(-1)^{k-n} e^{i\mu} (b+n+1)_{k-n} - e^{-i\mu} (a+n+1)_{k-n} \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

formülü elde edilir.

$\mu = 0$ olduğunda Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümlerinin formülünü elde etmek için (6.8) eşitliğini ele alalım. Burada (6.10) eşitliğinde verilen ifadeler

gözönünde bulundurularak (6.8) eşitliği $x = -1$ ve $x = 1$ için

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_k^{(a,b)}(1) &= \frac{(a+b+k+1)}{2} \frac{(a+2)_{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{(a+b+k+1)}{2} \binom{a+k}{k-1} \\ \frac{d}{dx}P_k^{(a,b)}(-1) &= (-1)^{k-1} \frac{(a+b+k+1)}{2} \frac{(b+2)_{k-1}}{(k-1)!} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{(a+b+k+1)}{2} \binom{b+k}{k-1}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler doğrultusunda $\mu = 0$ olduğunda Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için

$$\widehat{P_k^{(a,b)}}(0) = \frac{(a+b+k+1)}{2} \left[\binom{a+k}{k-1} - (-1)^{k-1} \binom{b+k}{k-1} \right]$$

formülü elde edilir. ■

Önceki teoremden elde edilen son formülün hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yeniden ifade edilmesi ise aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 6.2 Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned}\widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) &= \frac{(b+1)_k}{i\mu k!} (-1)^{k+1} e^{-i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ b+1 \end{matrix} \middle| \frac{-1}{2i\mu} \right) \\ &\quad + \frac{(a+1)_k}{i\mu k!} e^{i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ a+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2i\mu} \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

şeklinde verilir.

İspat. Teorem 6.1' in $\mu \neq 0$ için Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümleri için verilen ikinci formülün ilk terimdeki ifade

$$\frac{(-1)^{k-n} e^{-i\mu} (a+b+k+1)_n (b+n+1)_{k-n}}{(k-n)! (-2i\mu)^{n+1}}$$

formunda olup, bu ifade (2.4) ile (2.7) özellikleri ve

$$(b+n+1)_{k-n} = \frac{(b+1)_k}{(b+1)_n}$$

eşitliği kullanılarak

$$\frac{(-1)^{k+1} e^{-i\mu} (b+1)_k}{2i\mu} \frac{(a+b+k+1)_n (-k)_n (1)_n}{(b+1)_n k!} \frac{u^n}{n!}$$

şeklinde basitleştirilir. Burada $u = \frac{-1}{2i\mu}$ olup $n = 0$ dan k ya kadar toplanarak formüldeki ilk terim elde edilir. Bu ise hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\frac{(b+1)_k}{i\mu k!} (-1)^{k+1} e^{-i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ b+1 \end{matrix} \middle| \frac{-1}{2i\mu} \right)$$

formunda yazılabilir ve yine Teorem 6.1' in $\mu \neq 0$ için sonlu Fourier dönüşümleri için verilen ikinci formülün ikinci terimdeki ifadesi için benzer işlemler ve argümanlar uygulandığında hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\frac{(a+1)_k}{i\mu k!} e^{i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ a+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2i\mu} \right)$$

formunda yazılabilir. Böylece bu eşitlikler doğrultusunda Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümünün hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned} \widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) &= \frac{(b+1)_k}{i\mu k!} (-1)^{k+1} e^{-i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ b+1 \end{matrix} \middle| \frac{-1}{2i\mu} \right) \\ &\quad + \frac{(a+1)_k}{i\mu k!} e^{i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ a+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2i\mu} \right) \end{aligned}$$

formülü elde edilir. ■

Sonuç 6.1

$$Y_k^{(\alpha,\beta)}(u) = \frac{(\alpha+1)_k}{k!} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} \alpha+\beta+k+1, -k, 1 \\ \alpha+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{u} \right) \quad (6.14)$$

formunda tanımlanırsa $P_k^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü

$$\widehat{P_k^{(a,b)}}(\mu) = \frac{1}{i\mu} \left[(-1)^{k+1} e^{-i\mu} Y_k^{(b,a)}(-2i\mu) + e^{i\mu} Y_k^{(a,b)}(2i\mu) \right] \quad (6.15)$$

şeklinde elde edilir.

6.2 Jacobi Polinomlarının Özel Durumlarının Sonlu Fourier Dönüşümleri

Bu kısımda Jacobi polinomlarının özel durumları ve bunların sonlu Fourier dönüşümlerinin formülleri verilecektir.

i) Legendre polinomları

$a = b = 0$ için Jacobi polinomlarının bir özel hali $P_k(x) = P_k^{(0,0)}(x)$ Legendre polinomlarıdır ve bu polinomlar

$$(1 - x^2) y_k'' - 2x y_k' + k(k+1) y_k = 0 \quad (6.16)$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. Bu denklemin serisel çözümü aranırsa

$$P_k(x) = 2^k \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \binom{\frac{1}{2}(k+n-1)}{k} x^n \quad (6.17)$$

şeklinde bir açık polinom çözümüne sahip olduğu görülür. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned} P_k(x) &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+1)_n}{(1)_n n!} \left(\frac{1-x}{2} \right)^n \end{aligned} \quad (6.18)$$

formunda yazılabilir. $P_k(x)$ Legendre ortogonal polinomları

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad (6.19)$$

Rodrigues formülü ile de ifade edilebilir. Legendre polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için çeşitli formüller aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 6.3 $P_k(x)$ Legendre polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_k(\mu) &= 2^k \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \binom{\frac{1}{2}(k+n-1)}{k} \frac{(-1)^n n!}{(i\mu)^{n+1}} [e^{i\mu} E_n(-i\mu) - e^{-i\mu} E_n(i\mu)] \\
&= i^k \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} J_{k+\frac{1}{2}}(\mu) \\
&= 2 \sum_{n=0}^k \frac{(k+n)!}{(k-n)!n!} \frac{[e^{-i\mu} E_n(2i\mu) - e^{i\mu}]}{(-2i\mu)^{n+1}} \\
&= 2 \sum_{n=0}^k \frac{(k+n)!}{(k-n)!n!} \frac{[(-1)^{k+n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}]}{(-2i\mu)^{n+1}}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dört eşdeğer formdan biri ile verilir (Dixit vd. 2015).

İspat. İlk formül (6.17) eşitliğinde tanımlanan Legendre polinom çözümü kullanılarak elde edilir. $P_k(x)$ Legendre polinom çözümlerinin sonlu Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_k(\mu) &= 2^k \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \binom{\frac{1}{2}(k+n-1)}{k} \int_{-1}^1 x^n e^{i\mu x} dx
\end{aligned}$$

formunda olup burada Lemma 6.1 de verilen (6.3) ifadesi yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_k(\mu) &= 2^k \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \binom{\frac{1}{2}(k+n-1)}{k} \frac{(-1)^n n!}{(i\mu)^{n+1}} [e^{i\mu} E_n(-i\mu) - e^{-i\mu} E_n(i\mu)]
\end{aligned}$$

ilk formül elde edilir.

$\widehat{P}_k(\mu)$ için ikinci ifade Legendre polinomlarının (6.19) ile verilen Rodrigues formülü kullanılarak elde edilir. $P_k(x)$ Rodrigues formülünün sonlu Fourier dönüşümü

$$\widehat{P}_k(\mu) = \frac{1}{2^k k!} \int_{-1}^1 e^{i\mu x} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k dx \quad (6.20)$$

olup k kez kısmi integrasyon uygulandığında ise

$$\widehat{P}_k(\mu) = \frac{(-i\mu)^k}{2^k k!} \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (x^2 - 1)^k dx \quad (6.21)$$

şeklinde elde edilir. Literatürde iyi bilinen

$$\int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1 - x^2)^{p-1} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p-1/2} \Gamma(p) J_{p-1/2}(\lambda) \quad (6.22)$$

eşitliğinde (Gradshteyn ve Ryzhik 2007) $\lambda = \mu$ ve $p = k + 1$ alınarak

$$\widehat{P}_k(\mu) = i^k \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} J_{k+1/2}(\mu)$$

bulunur. Burada $J_q(\mu)$ fonksiyonu

$$J_q(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\mu/2)^{2n+q}}{n! \Gamma(n+q+1)}$$

şeklinde tanımlanan Bessel fonksiyonudur (Rainville 1960).

Legendre polinomlarının sonlu Fourier dönüşümünün üçüncü formülü (6.18) ile ifade edilen Legendre polinomlarının hipergeometrik gösterimleri kullanılarak elde edilir.

Böylece, $P_k(x)$ Legendre hipergeometrik gösterimlerinin sonlu Fourier dönüşümü

$$\widehat{P}_k(\mu) = \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+1)_n}{n!^2} \int_{-1}^1 e^{i\mu x} \left(\frac{1-x}{2} \right)^n dx \quad (6.23)$$

için $\frac{1-x}{2} = u$ değişken değişimi yapılırsa $1 - 2u = x$ ve $-2du = dx$ olur. (2.7) ve (2.8) temel özellikleri de kullanılarak

$$\widehat{P}_k(\mu) = 2e^{i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n (k+n)!}{(k-n)!n!^2} \int_0^1 e^{-2i\mu u} u^n du \quad (6.24)$$

şeklinde bulunur. Burada Lemma 6.1 de verilen (6.4) ifadesi kullanılarak

$$\widehat{P}_k(\mu) = 2 \sum_{n=0}^k \frac{(k+n)!}{(k-n)!n!} \frac{[e^{-i\mu} E_n(2i\mu) - e^{i\mu}]}{(-2i\mu)^{n+1}}$$

formülü elde edilir.

Son olarak (6.12) eşitliğinde, $a = b = 0$ alınırsa $P_k(x)$ Legendre polinomlarının sonlu Fourier dönüşümünün son formülü

$$\begin{aligned} \widehat{P}_k(\mu) &= -e^{-i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{(k+n)!}{2^n (k-n)!n! (i\mu)^{n+1}} \\ &\quad + (-1)^k e^{i\mu} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n (k+n)!}{2^n (k-n)!n! (i\mu)^{n+1}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^k \frac{(k+n)!}{(k-n)!n!} \frac{[(-1)^{k+n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}]}{(-2i\mu)^{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

ii) Gegenbauer polinomları

Gegenbauer polinomları $P_k^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomlarının özel durumu olup

$$C_k^{(p)}(x) = \frac{(2p)_k}{\left(p + \frac{1}{2}\right)_k} P_k^{(p-1/2, p-1/2)}(x) \quad (6.25)$$

şeklinde tanımlanır. (3.3) eşitliğinde $a = b = p - 1/2$ alınmasıyla

$$(1 - x^2) y_k'' - (2p + 1) x y_k' + k(k + 2p) y_k = 0$$

Gegenbauer polinomlarının sağladığı diferensiyel denklemi elde edilir. Ayrıca (3.5) eşitliğinde $a = b = p - 1/2$ olarak alınırsa Gegenbauer polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\begin{aligned} C_k^{(p)}(x) &= \frac{(2p)_k}{k!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k + 2p \\ p + 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1 - x}{2} \right) \\ &= \frac{(2p)_k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k + 2p)_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)_n n!} \left(\frac{1 - x}{2} \right)^n \end{aligned} \quad (6.26)$$

formunda yazılabilir. Gegenbauer polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için çeşitli formüller aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 6.4 $C_k^{(p)}(x)$ Gegenbauer polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} \widehat{C_k^{(p)}}(\mu) &= 2(2p)_k e^{i\mu} \sum_{n=0}^k 2^{2n} \frac{(k + 2p)_n (p)_n}{(k - n)! (2p)_{2n}} \left[\frac{e^{-2i\mu} E_n(2i\mu) - 1}{(-2i\mu)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{2(2p)_k (p)_k}{(2p)_{2k}} \sum_{n=0}^k 2^{2n} \frac{(k + 2p)_n (2p + 2n)_{2k-2n}}{(k - n)! (p + n)_{k-n}} \left[\frac{(-1)^{k-n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}}{(-2i\mu)^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

formülleri ile verilir. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\widehat{C_k^{(p)}}(\mu) = \frac{(2p)_k}{i\mu k!} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{k+1} e^{-i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} k + 2p, -k, 1 \\ p + 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{-1}{2i\mu} \right) \\ &+ e^{i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} k + 2p, -k, 1 \\ p + 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2i\mu} \right) \end{aligned} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Dixit vd. 2015).

İspat. Gegenbauer polinomlarının sonlu Fourier dönüşümünün ilk formülü (6.26) ile ifade edilen Gegenbauer polinomlarının hipergeometrik gösterimleri kullanılarak

elde edilir. Böylece $C_k^{(p)}(x)$ hipergeometrik gösterimlerinin sonlu Fourier dönüşümü

$$\widehat{C_k^{(p)}}(\mu) = \frac{(2p)_k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n (k+2p)_n}{(p+\frac{1}{2})_n n!} \int_{-1}^1 e^{i\mu x} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n dx$$

için $\frac{1-x}{2} = u$ değişken değişimi yapılarak ve (2.7), (2.10) temel özellikleri de kullanılarak

$$\widehat{C_k^{(p)}}(\mu) = 2(2p)_k e^{i\mu} \sum_{n=0}^k 2^{2n} \frac{(k+2p)_n (p)_n}{n! (k-n)! (2p)_{2n}} \int_0^1 e^{-2i\mu u} u^n du$$

şeklinde bulunur. Burada Lemma 6.1 de verilen (6.4) ifadesinin yerine yazılmasıyla

$$\widehat{C_k^{(p)}}(\mu) = 2(2p)_k e^{i\mu} \sum_{n=0}^k 2^{2n} \frac{(k+2p)_n (p)_n}{(k-n)! (2p)_{2n}} \left[\frac{e^{-2i\mu} E_n(2i\mu) - 1}{(-2i\mu)^{n+1}} \right]$$

istenilen eşitlik elde edilir.

Gegenbauer polinomlarının sonlu Fourier dönüşümünün ikinci formülü (6.7) eşitliği kullanılarak elde edilir. Gegenbauer polinomları

$$C_k^{(p)}(x) = \frac{(2p)_k}{(p+\frac{1}{2})_k} P_k^{(p-1/2, p-1/2)}(x)$$

şeklinde tanımlı olup (6.11) eşitliğindeki ifadelerde $a = b = p - 1/2$ alınarak ve (2.10) temel özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} C_k^{(p)}(1) &= \frac{(2p)_k}{(p+\frac{1}{2})_k} \frac{2^{2n} (k+2p)_n (2p+2n)_{2k-2n}}{2^n (k-n)! (p+n)_{k-n}} \\ \frac{d^n}{dx^n} C_k^{(p)}(-1) &= (-1)^{k-n} \frac{(2p)_k}{(p+\frac{1}{2})_k} \frac{2^{2n} (k+2p)_n (2p+2n)_{2k-2n}}{2^n (k-n)! (p+n)_{k-n}} \end{aligned}$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadeler (6.7) eşitliğinde yerine yazılarak Gegenbauer polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için

$$\begin{aligned} &\widehat{C_k^{(p)}}(\mu) \\ &= \frac{2(2p)_k (p)_k}{(2p)_{2k}} \sum_{n=0}^k 2^{2n} \frac{(k+2p)_n (2p+2n)_{2k-2n}}{(k-n)! (p+n)_{k-n}} \left[\frac{(-1)^{k-n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}}{(-2i\mu)^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

formülü elde edilir.

Ayrıca, Teorem 6.2' de Jacobi polinomlarının sonlu Fourier dönüşümlerinin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden formülünü elde etmek için uygulanan işlemler benzer

şekilde uygulanarak ve $a = b = p - 1/2$ alınarak Gegenbauer polinomlarının sonlu Fourier dönüşümlerinin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$\widehat{C_k^{(p)}}(\mu) = \frac{(2p)_k}{i\mu k!} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{k+1} e^{-i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} k+2p, -k, 1 \\ p+1/2 \end{matrix} \middle| \frac{-1}{2i\mu} \right) \\ &+ e^{i\mu} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} k+2p, -k, 1 \\ p+1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2i\mu} \right) \end{aligned} \right\}$$

formülü bulunur. ■

iii) Chebyshev polinomları

Birinci tür Chebyshev polinomları $P_k^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomlarının $a = b = -1/2$ özel durumu olup (3.3) eşitliğinde $a = b = -1/2$ alınmasıyla elde edilen

$$(1-x^2)y_k'' - xy_k' + k^2y_k = 0$$

diferensiyel denklemin polinom çözümleridir. Gerçekten, bu denklemin serisel çözümünün (3.4) eşitliğinde $a = b = -1/2$ alınmasıyla

$$P_k^{(-1/2, -1/2)}(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2n} (x^2-1)^n x^{k-2n} = T_k(x)$$

olduğu görülür. Ayrıca, (3.5) eşitliğinde $a = b = -1/2$ olarak alınırsa birinci tür Chebyshev polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$T_k(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right)$$

formunda yazılabilir.

$U_k(x)$ ikinci tür Chebyshev polinomları da $P_k^{(a,b)}(x)$ Jacobi polinomlarının $a = b = 1/2$ özel durumu olup

$$(1-x^2)y_k'' - 3xy_k' + k(k+2)y_k = 0$$

diferensiyel denklemin polinom çözümleridir. Gerçekten, bu denklemin serisel çözümünün (3.4) eşitliğinde $a = b = 1/2$ alınmasıyla

$$P_k^{(1/2, 1/2)}(x) = \sum_{n=0}^k (-2)^n \binom{k+n+1}{k-n} (1-x)^n = U_k(x) \quad (6.27)$$

formunda olduğu görülür. Ayrıca, (3.5) eşitliğinde $a = b = 1/2$ olarak alınırsa ikinci tür Chebyshev polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$U_k(x) = (k+1) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -k, k+2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right)$$

formunda yazılabilir.

Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için çeşitli formüller aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 6.5 Birinci tür Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü

$$\widehat{T}_k(\mu) = \sum_{n=0}^k (-1)^{n+1} \frac{2^n k (k+n)! n!}{(2n)! (k-n)! (k+n)} \left[\frac{(-1)^{k-n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}}{(i\mu)^{n+1}} \right]$$

formülü ile ve ikinci tür Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \widehat{U}_k(\mu) &= e^{i\mu} \sum_{n=0}^k 2^{2n+1} n! \binom{k+n+1}{k-n} \left[\frac{e^{-2i\mu} E_n(2i\mu) - 1}{(-2i\mu)^{n+1}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^k 2^{2n+1} \frac{(k+n+1)! n!}{(2n+1)! (k-n)!} \left[\frac{(-1)^{k-n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}}{(-2i\mu)^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan formüller ile verilir (Dixit vd. 2015).

İspat. Birinci tür Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için formülü elde etmek için (6.7) eşitliği kullanılmalıdır. (6.11) eşitliğinde verilen ifadelerde $a = b = -1/2$ alınarak

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} T_k(1) &= \frac{k(k+n-1)!}{2^n (k-n)! \left(\frac{1}{2}\right)_n} \\ \frac{d^n}{dx^n} T_k(-1) &= (-1)^{k-n} \frac{k(k+n-1)!}{2^n (k-n)! \left(\frac{1}{2}\right)_n} \end{aligned}$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadeler (6.7) eşitliğinde yerine yazılarak

$$\widehat{T}_k(\mu) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{(i\mu)^{n+1}} \frac{k(k+n-1)!}{2^n (k-n)! \left(\frac{1}{2}\right)_n} \left[(-1)^{k-n} e^{-i\mu} - e^{i\mu} \right]$$

elde edilir. Son olarak

$$(2n)! = \left(\frac{1}{2}\right)_n 2^{2n} n!$$

özellği de kullanılarak birinci tür Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümü için

$$\widehat{T}_k(\mu) = \sum_{n=0}^k (-1)^{n+1} \frac{2^n k (k+n)! n!}{(2n)! (k-n)! (k+n)} \left[\frac{(-1)^{k-n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}}{(i\mu)^{n+1}} \right]$$

formülü elde edilir.

İkinci tür Chebyshev polinomlarının sonlu Fourier dönüşümünün ilk formülünü elde etmek için (6.27) eşitliğinde tanımlanan polinom çözümü kullanılır. $U_k(x)$ ikinci tür Chebyshev polinom çözümlerinin sonlu Fourier dönüşümü

$$\widehat{U}_k(\mu) = \sum_{n=0}^k (-2)^n \binom{k+n+1}{k-n} \int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1-x)^n dx$$

için Lemma 6.1 den

$$\int_{-1}^1 e^{i\mu x} (1-x)^n dx = -e^{i\mu} \frac{n!}{(i\mu)^{n+1}} [e^{-2i\mu} E_n(2i\mu) - 1]$$

ifadesi kullanılırsa

$$\widehat{U}_k(\mu) = e^{i\mu} \sum_{n=0}^k 2^{2n+1} n! \binom{k+n+1}{k-n} \left[\frac{e^{-2i\mu} E_n(2i\mu) - 1}{(-2i\mu)^{n+1}} \right]$$

formülü elde edilir. İkinci formül, (6.7) eşitliğinde $a = b = 1/2$ alınırsa

$$\widehat{U}_k(\mu) = \sum_{n=0}^k 2^{2n+1} \frac{(k+n+1)! n!}{(2n+1)! (k-n)!} \left[\frac{(-1)^{k-n} e^{-i\mu} - e^{i\mu}}{(-2i\mu)^{n+1}} \right]$$

olarak elde edilir. ■

6.3 Jacobi Polinomları İçin Biortogonallik

İntegrallenebilen fonksiyonların dizisi

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi n x} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

olsun. $n \neq m$ için

$$\langle \phi_n(x), \phi_m(x) \rangle = \int_{-1}^1 \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$$

olup $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyon dizisi ortogonal bir sistem oluşturur. Aynı zamanda $n = m$ için

$$\|\phi_n(x)\| = \left[\int_{-1}^1 \phi_n^2(x) dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{e^{2i\pi n} - 1}{2i\pi n}} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

bulunur. Bu sisteme karşılık gelen ortonormal sistem her bir elemanın normuna bölünmesiyle elde edilir ki bu da

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi_n(x) \phi_m(x)}{\left(\frac{e^{2i\pi n}-1}{2i\pi n}\right)^{1/2}} dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ 1 & , \quad n = m \end{cases}$$

olmasıdır. Bundan dolayı $[-1, 1]$ üzerinde tanımlanan her sürekli h fonksiyonu için Fourier serisinde Euler fonksiyonları kullanılırsa, $h(x)$ ' in kompleks formda Fourier açılımı

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(h) e^{i\pi n x} \quad (6.28)$$

formunda ve Fourier katsayıları ise

$$\alpha_n(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 h(x) e^{-i\pi n x} dx \quad (6.29)$$

formunda olacaktır.

Diğer taraftan Parseval özdeşliği

$$\int_{-1}^1 h(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(h) \overline{\alpha_n(g)} \quad (6.30)$$

formunda olup bu özdeşlik

$$h(x) = P_k^{(a,b)}(x) \text{ ve } g(x) = Q_k^{(a,b)}(x) := (1-x)^a (1+x)^b P_k^{(a,b)}(x) \quad (6.31)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar ile açık hale getirilir. $\alpha_n(Q_l^{(a,b)}(x))$ sonlu Fourier dönüşümleri

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^a (1+x)^b P_k^{(a,b)}(x) e^{i\mu x} dx \\ &= X_k(\mu; a, b) {}_1F_1 \left(\begin{matrix} a+k+1 \\ a+b+2k+2 \end{matrix} \middle| -2i\mu \right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

formunda olup burada

$$X_k(\mu; a, b) = \frac{(i\mu)^k e^{i\mu}}{k!} 2^{a+b+k+1} B(k+a+1, k+b+1) \quad (6.33)$$

dir (Olver vd. 2010) ve $\alpha_n(P_k^{(a,b)}(x))$ sonlu Fourier dönüşümü ise Teorem 6.1' den elde edilir. Parseval özdeşliği ve Jacobi polinomlarının ortogonalitesi kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(P_k^{(a,b)}(x)) \overline{\alpha_n(Q_l^{(a,b)}(x))} \\ &= \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a+k+1) \Gamma(b+k+1)}{k! (a+b+2k+1) \Gamma(a+b+k+1)} \delta_{k,l} \quad . \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada $k \neq l$ olduğu durumlarda $n = 0$ için $\alpha_0 \left(Q_l^{(a,b)}(x) \right) = 0$ dir. Böylelikle Parseval özdeşliği $k \neq l$ için

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \alpha_n \left(P_k^{(a,b)}(x) \right) \overline{\alpha_n \left(Q_l^{(a,b)}(x) \right)} = 0 \quad (6.34)$$

formunda yazılabilir. Bu ilişkiyi basitleştirmek için (6.32) eşitliğinde $\mu = -\pi n$ değişken değişimi yapılır ve

$${}_1F_1 \left(\begin{matrix} p \\ p+q \end{matrix} \middle| r \right) = e^r {}_1F_1 \left(\begin{matrix} q \\ p+q \end{matrix} \middle| -r \right) \quad (6.35)$$

Kummer özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_n \left(Q_l^{(a,b)}(x) \right)} &= \frac{(-1)^n n^l}{l!} 2^{a+b+l+1/2} B(l+a+1, l+b+1) \\ &\quad \times {}_1F_1 \left(\begin{matrix} b+l+1 \\ a+b+2l+2 \end{matrix} \middle| 2i\pi n \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 6.2' de $\mu = -\pi n$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &\alpha_n \left(P_k^{(a,b)}(x) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2i\pi n k!} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^k (b+1)_k {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ b+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2i\pi n} \right) \\ &- (a+1)_k {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ a+1 \end{matrix} \middle| \frac{-1}{2i\pi n} \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (6.37)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak (6.36) ile (6.37) ifadelerinin (6.34) eşitliğinde yerine konulmasıyla aşağıdaki teorem üretilebilir.

Teorem 6.6

$$V_{k,l}^{(a,b)}(u; n) = (a+1)_k n^{l-1} {}_3F_1 \left(\begin{matrix} a+b+k+1, -k, 1 \\ a+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{u} \right) {}_1F_1 \left(\begin{matrix} a+l+1 \\ a+b+2l+2 \end{matrix} \middle| u \right)$$

şeklinde özel fonksiyon tanımlanırsa, $u = 2i\pi n$ için (6.34) eşitliği

$$(-1)^k \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} V_{k,l}^{(b,a)}(2i\pi n; n) = (-1)^{l-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} V_{k,l}^{(a,b)}(2i\pi n; n)$$

olarak yazılır. Özel durumda k çift, l tek tamsayı ya da tersine k tek, l çift tam sayı ise

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} V_{k,l}^{(b,a)}(2i\pi n; n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} V_{k,l}^{(a,b)}(2i\pi n; n)$$

eşitliği elde edilir (Dixit vd. 2015).



7. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İÇİN TRICOMI YÖNTEMİ VE ORTOGONAL POLİNOMLAR

Bu bölümde, ilk olarak Francesco G. Tricomi (Tricomi 1935) tarafından verilen bir metod tanımlanacaktır. Daha sonra bu metod kullanılarak Laguerre polinomları cinsinden seriye açılan fonksiyonların Laplace dönüşümleri hesaplanacak ve çeşitli uygulamalar verilecektir.

Tricomi metodu: $F(r)$ analitik fonksiyonu sonsuzda regüler ise ve

$$F(r) = \frac{1}{r+s} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{r+s-1}{r+s} \right)^k$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir s reel sayısı bulunabiliyorsa, $u > 0$ için Laguerre polinomları cinsinden

$$f(u) = e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L_k(u)$$

formunda mutlak ve düzgün yakınsak seriye açılan $f(u)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(r)$ dir (Tricomi 1935).

Özel durumda $s = 0$ için, Tricomi metodu gereğince

$$F(r) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{r-1}{r} \right)^k \leftrightarrow f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L_k(u) \quad (7.1)$$

şeklinde $(F(r), f(u))$ fonksiyon çifti bulunur.

Genelleştirilmiş Laguerre polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden bölüm 3' te

$$L_n^{(p)}(x) = \frac{(p+1)_k}{k!} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -k \\ p+1 \end{matrix} \middle| x \right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Aynı zamanda Laguerre polinomlarının (3.16) eşitliğinde verilen polinom çözümü, $p = 0$ için

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \quad (7.2)$$

şeklinde sonuçlanır. Bu eşitlik dikkate alınarak Laguerre polinomları cinsinden seriye açılan Bessel fonksiyonu

$$J_0(2\sqrt{x}) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} \quad (7.3)$$

formunda ifade edilebilir (Rainville 1960). Bununla birlikte aynı Bessel fonksiyonu, Laguerre polinomları cinsinden

$$J_0(2\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} \quad (7.4)$$

formunda kuvvet serisi kullanılarak başka bir açılım ile ifade edilebilir (Dattoli ve Ricci 2003). Burada (7.3) ve (7.4) eşitlikleri birbirine eşdeğerdir. Gerçekten de, (7.2) eşitliği ile verilen Laguerre polinomları (7.3) eşitliğinde yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} J_0(2\sqrt{x}) &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-1)^m x^m}{m!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{(-1)^m x^m}{n!m!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(n-m)!(m!)^2} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(m!)^2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(m!)^2} \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da eşdeğer olduklarını gösterir.

Laguerre polinomları cinsinden seri açılımlarını, inversiyon veya bağlantı katsayıları kullanılarak diğer polinom kümeleri cinsinden farklı açılımlara dönüştürmek mümkündür. Böylece yukarıda verilen hususlar doğrultusunda Tricomi metodu genişletilerek farklı Laplace fonksiyon çiftleri türetilabilir (Ben Cheikh ve Chaggara 2005, 2006).

Aşağıda, Laguerre polinomlarının inversiyon katsayıları kullanılarak belirli bir kuvvet serisine karşılık gelen Laplace dönüşümülerini elde etmek için bir yöntem ifade edilecektir ve bu yöntem ortogonal polinom açılımlarına da uygulanacaktır (Ricci vd. 2021).

7.1 Laguerre Serisinin Laplace Dönüşümü İçin Tricomi Yöntemi

$f(u)$ fonksiyonunun tüm $u \geq 0$ (reelsayıları) için tanımlı Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}(f(u)) := \int_0^{\infty} e^{-ru} f(u) du = F(r) \quad (7.5)$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda k -yıncı dereceden Laguerre polinomlarının Laplace dönüşümü ise

$$\mathcal{L}(L_k(u)) := \int_0^\infty e^{-ru} L_k(u) du = F(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{r-1}{r} \right)^k \quad (7.6)$$

şeklinde tanımlanır. Tricomi metodu gereğince Laguerre polinomları cinsinden

$$f(u) = e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L_k(u) \quad (7.7)$$

formunda seriye açılan $f(u)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}(f(u)) := \frac{1}{r+s} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{r+s-1}{r+s} \right)^k \quad (7.8)$$

şeklinde yazılabilir.

7.2 Kuvvet Serisinin Laplace Dönüşümü

Laguerre polinomlarının inversiyon katsayıları

$$u^k = \sum_{l=0}^k I_l(k) L_l(u) \quad (7.9)$$

formunda tanımlanır (Ben Cheikh ve Chaggara 2005, 2006). Burada eşitliğin her iki tarafı $e^{-u} L_j(u)$ ile çarpılırsa ve daha sonra $[0, \infty)$ aralığında integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^k e^{-u} L_j(u) du &= \sum_{l=0}^k \int_0^\infty I_l(k) e^{-u} L_j(u) L_l(u) du \\ &= I_j(k) \int_0^\infty e^{-u} [L_j(u)]^2 du \\ &= I_j(k) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan son eşitlikte j yerine l alınırsa

$$I_l(k) = \int_0^\infty u^k e^{-u} L_l(u) du$$

formunda yazılır. Burada (7.2) eşitliği yerine yazılarak ve gamma fonksiyonu kullanılarak integral hesaplandığında

$$I_l(k) = (-1)^l \binom{k}{l} k! = (-k)_l \frac{(1)_k}{(1)_l} \quad (7.10)$$

formundadır. Bu durumda kuvvet serisi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \alpha_k I_l(k) L_l(u) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \alpha_k I_l(k) \right) L_l(u) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l L_l(u)\end{aligned}\tag{7.11}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\beta_l = \sum_{k=l}^{\infty} \alpha_k I_l(k)\tag{7.12}$$

dır. Böylece Tricomi metodu gereğince aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 7.1 $F(r)$ analitik fonksiyonu en az $1/r$ kadar azalan, sonsuzda regüler bir fonksiyon ise ve

$$F(r) = \frac{1}{r+s} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \left(\frac{r+s-1}{r+s} \right)^l\tag{7.13}$$

eşitliğiyle ifade edilebiliyorsa, bu durumda

$$f(u) = e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k\tag{7.14}$$

şeklinde tanımlanan $f(u)$ kuvvet serisinin Laplace dönüşümü $F(r)$ dir. Burada α_k ve β_l katsayıları (7.12) eşitliğinde, $I_l(k)$ ise (7.10) eşitliğinde tanımlanmıştır.

Dolayısıyla, (7.12) koşulu altında

$$F(r) = \frac{1}{r+s} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \left(\frac{r+s-1}{r+s} \right)^l \leftrightarrow f(u) = e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k\tag{7.15}$$

$(F(r), f(u))$ fonksiyon çifti bulunur.

7.3 Ortogonal Polinom Açılımlarının Laplace Dönüşümü

Bir $f(u)$ fonksiyonunun;

- 1) Laplace dönüşümünü sağladığını,
- 2) Uygun bir s parametresi seçerek, belirli bir $\{Q_k(u)\}$ ortogonal polinom

sistemine göre

$$f(u) = e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k Q_k(u)\tag{7.16}$$

formunda seriye açıldığını varsayalım.

Buradaki $Q_k(u)$ polinomları, farklı bir $P_l(u)$ ortogonal polinom sistemi cinsinden

$$Q_k(u) = \sum_{l=0}^k C_l(k) P_l(u) \quad (7.17)$$

formunda ifade edilebilir (Ben Cheikh ve Chaggara 2005). Özellikle, $P_l(u) = L_l(u)$ Laguerre polinomları olarak seçilirse, $f(u)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(u) &= e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \sum_{l=0}^k C_l(k) L_l(u) \\ &= e^{-su} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \gamma_k C_l(k) \right) L_l(u) \\ &= e^{-su} \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l L_l(u) \end{aligned} \quad (7.18)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\delta_l = \sum_{k=l}^{\infty} \gamma_k C_l(k) \quad (7.19)$$

formunda tanımlıdır. Böylece bu dönüşüm altında $f(u)$ fonksiyonu Laguerre polinomları cinsinden ifade edilir ve Tricomi metodu gereğince aşağıdaki teorem ifade verilebilir.

Teorem 7.2 $F(r)$ analitik fonksiyonu en az $1/r$ kadar azalan, sonsuzda regüler bir fonksiyon ise ve s parametresinin uygun bir seçimi için

$$F(r) = \frac{1}{r+s} \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l \left(\frac{r+s-1}{r+s} \right)^l \quad (7.20)$$

eşitliğiyle ifade edilebiliyorsa, bu durumda

$$f(u) = e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k Q_k(u) \quad (7.21)$$

formunda tanımlanan kuvvet serisinin Laplace dönüşümü $F(r)$ dir. Burada γ_k ve δ_l katsayıları (7.19) eşitliğinde verilmiştir (Ricci vd. 2021).

Dolayısıyla, (7.19) koşulu altında

$$F(r) = \frac{1}{r+s} \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l \left(\frac{r+s-1}{r+s} \right)^l \leftrightarrow f(u) = e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k Q_k(u) \quad (7.22)$$

$(F(r), f(u))$ çifti bulunur.

Örnek 7.1 Örneğin, $Q_k(u) = H_k(u)$ Hermite polinomları olarak seçilsin. Bu durumda (7.17) eşitliği

$$H_k(u) = \sum_{l=0}^k C_l(k) L_l(u)$$

formunda yazılabilir. Bu eşitliğin her tarafı $e^{-u}L_j(u)$ ile çarpılırsa ve daha sonra $[0, \infty)$ aralığında integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^\infty H_k(u) e^{-u} L_j(u) du &= \sum_{l=0}^k C_l(k) \int_0^\infty e^{-u} L_j(u) L_l(u) du \\ &= C_j(k) \int_0^\infty e^{-u} [L_j(u)]^2 du \\ &= C_j(k) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan son eşitlikte j yerine l alınırsa

$$C_l(k) = \int_0^\infty H_k(u) e^{-u} L_l(u) du$$

elde edilir. Burada Hermite ve Laguerre seri açılımları yerine yazılarak ve gamma fonksiyonu kullanılarak integral hesaplandığında $C_l(k)$ bağlantı katsayıları

$$C_l(k) = (-1)^l 2^k k! \binom{k}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l-k)_n (l-k+1)_n (-1)^n}{(-k)_n (-k+1)_n 4^n n!} \quad (7.23)$$

formunda bulunur (Ben Cheikh ve Chaggara 2006). Sonuç olarak Teorem 7.2' ye göre Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L} \left(e^{-su} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k H_k(u) \right) := \frac{1}{r+s} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \gamma_k C_l(k) \left(\frac{r+s-1}{r+s} \right)^l \quad (7.24)$$

şeklinde sonuçlanır. Burada $C_l(k)$ bağlantı katsayıları yukarıda açık bir şekilde ifade edilmiştir.

7.4 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, $s = 0$ varsayılarak ve yukarıda ifade edilen metodlar dikkate alınarak bazı sayısal örnekler verilecektir (Ricci vd. 2021).

7.4.1 $e^{i\pi u}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$f(u) = e^{i\pi u} \quad (7.25)$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(u)) &= \int_0^\infty e^{-ru} f(u) du = \int_0^\infty e^{-ru} e^{i\pi u} du \\ &= -\frac{1}{r - i\pi} e^{-(r-i\pi)u} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{r - i\pi} = F(r) \end{aligned} \quad (7.26)$$

dir. $f(u)$ fonksiyonunun Laguerre polinom cinsinden seri yaklaşımı

$$f_N(u) = \sum_{l=0}^N \alpha_l L_l(u) \quad (7.27)$$

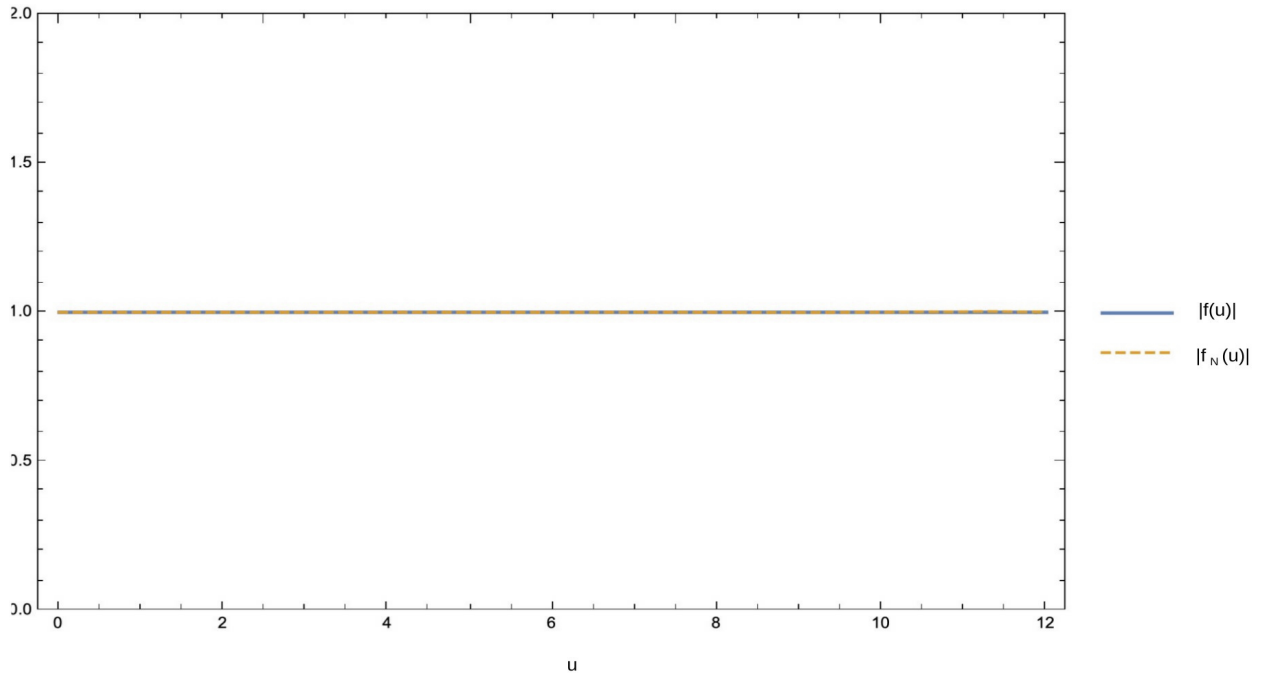
şeklinde verilir. Burada α_l katsayıları

$$\alpha_l = \int_0^\infty e^{-u} f(u) L_l(u) du = \frac{i}{\pi} \left(1 + \frac{i}{\pi}\right)^{l-1} \quad (7.28)$$

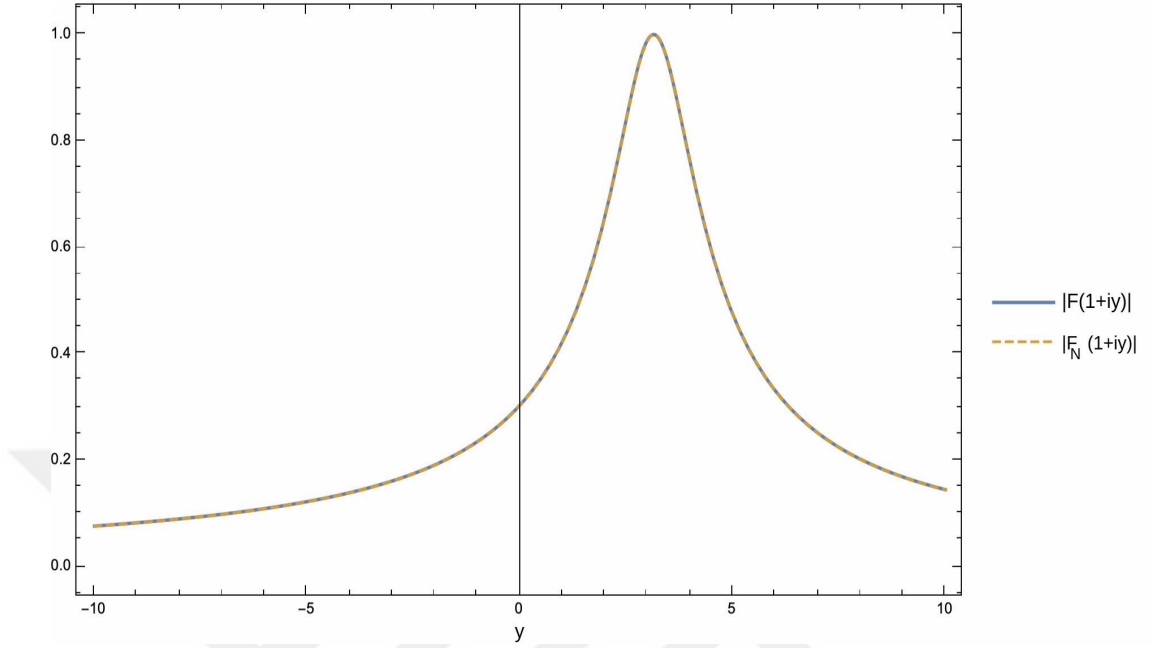
şeklinde bulunur. Tricomi metodu kullanılarak $F(r)$ Laplace dönüşümü

$$F_N(r) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^N \alpha_l \left(\frac{r-1}{r}\right)^l \quad (7.29)$$

formunda tahmin edilebilir (Ricci vd. 2021).



Şekil 7.1 $f(u) = e^{i\pi u}$ fonksiyonunun $N = 100$ için ilgili $f_N(r)$ Laguerre polinom seri yaklaşımı ile karşılaştırılması



Şekil 7.2 $x = 1$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = e^{i\pi u}$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 100$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması

7.4.2 $J_0(2\sqrt{u})$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

Bessel fonksiyonları sonsuz serilerle tanımlandığından terim terim Laplace dönüşümünü alarak dönüşüm formüllerini elde etmek oldukça zordur. Gerçekten de ,

$$\mathcal{L}(u^{k/2} J_k(2\sqrt{u}))$$

dönüşümünü hesaplamak için

$$u^{k/2} J_k(2\sqrt{u}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{k+n}}{n! \Gamma(k+n+1)}$$

eşitliğin her iki tarafının terim terim Laplace dönüşümünü alırsak $r > 0$ için

$$\mathcal{L}(u^{k/2} J_k(2\sqrt{u})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(k+n+1)} \mathcal{L}(u^{k+n})$$

buluruz. Diğer yandan,

$$\mathcal{L}(u^{k+n}) = \frac{\Gamma(k+n+1)}{r^{k+n+1}}$$

formülü ile

$$\mathcal{L}(u^{k/2} J_k(2\sqrt{u})) = \frac{1}{r^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^{k+1}} e^{-1/r}$$

dönüşümüne ulaşırız. Bu dönüşüm altında $k = 0$ için

$$f(u) = J_0(2\sqrt{u}) \quad (7.30)$$

fonksiyonunu ele alalım. Böylece $f(u)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}(f(u)) = \int_0^{\infty} e^{-ru} f(u) du = \frac{e^{-1/r}}{r} = F(r) \quad (7.31)$$

şeklinde elde edilir. Bununla birlikte $f(u)$ fonksiyonunun Laguerre polinom cinsinden seri yaklaşımı

$$f_N(u) = \sum_{l=0}^N \alpha_l L_l(u) \quad (7.32)$$

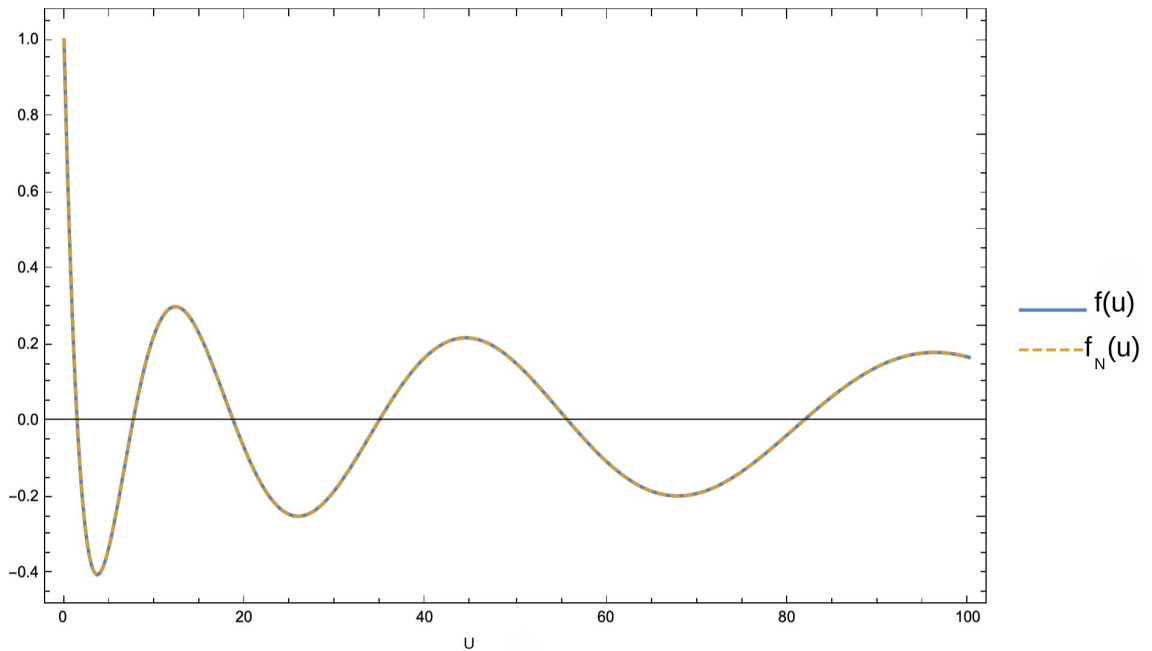
şeklinde verilir. Burada

$$\alpha_l = \int_0^{\infty} e^{-u} f(u) L_l(u) du = \frac{1}{e l!} \quad (7.33)$$

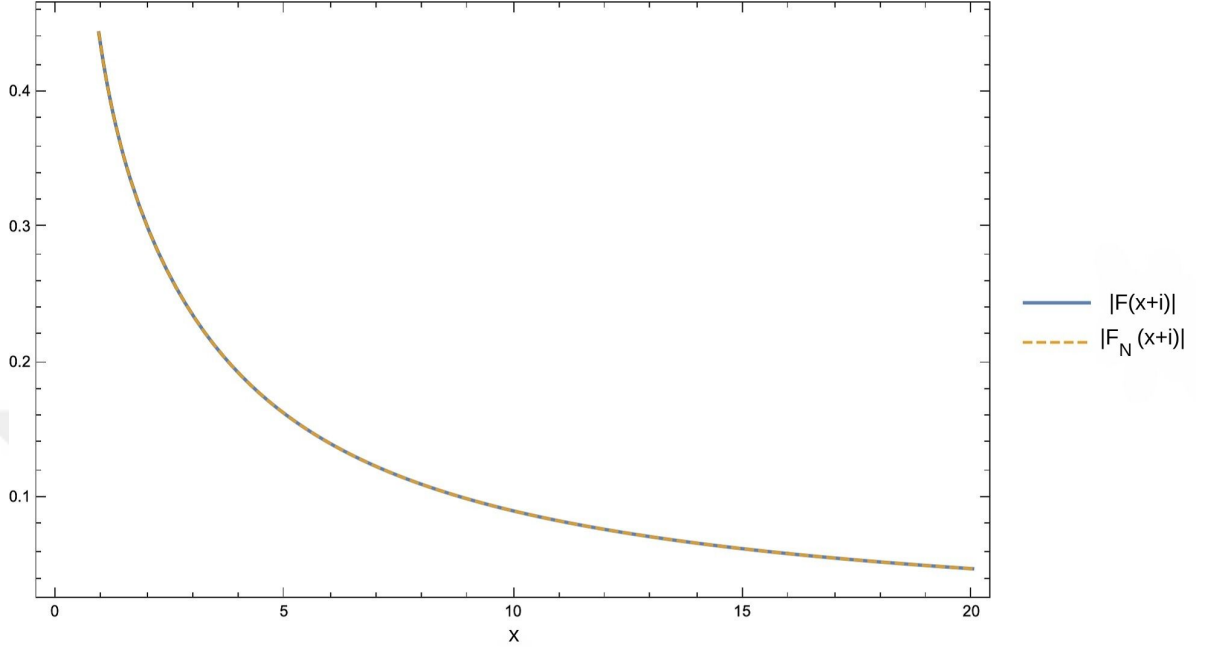
formundadır. Tricomi metodu kullanılarak $F(r)$ Laplace dönüşümü

$$F_N(r) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^N \alpha_l \left(\frac{r-1}{r}\right)^l \quad (7.34)$$

formunda tahmin edilebilir (Ricci vd. 2021).



Şekil 7.3 $f(u) = J_0(2\sqrt{u})$ fonksiyonunun $N = 100$ için ilgili $f_N(r)$ Laguerre polinom seri yaklaşımı ile karşılaştırılması



Şekil 7.4 $y = 1$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = J_0(2\sqrt{u})$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 100$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması

7.4.3 $\sin(u)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$f(u) = \sin(u) \quad (7.35)$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(u)) &= \int_0^\infty e^{-ru} f(u) du = \int_0^\infty e^{-ru} \sin(u) du \\ &= \int_0^\infty e^{-ru} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} du \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{-(r-i)u} - e^{-(r+i)u}) du \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-(r-i)u}}{r-i} + \frac{e^{-(r+i)u}}{r+i} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2i} \left[-\frac{0-1}{r-i} + \frac{0-1}{r+i} \right] = \frac{1}{2i} \frac{2i}{r^2+1} \\ &= \frac{1}{r^2+1} = F(r) \end{aligned} \quad (7.36)$$

şeklinde bulunur. Bununla birlikte $f(u)$ fonksiyonunun Maclaurin seri yaklaşımı

$$f_N(u) = \sum_{l=0}^N \beta_l u^l \quad (7.37)$$

şeklinde verilebilir. Burada

$$\beta_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!} = \frac{1}{l!} \sin\left(\frac{\pi l}{2}\right) \quad (7.38)$$

formunda olup $f^{(l)}(0)$, $f(u)$ fonksiyonunun orijindeki l -yinci dereceden türevini belirtir. (7.9) ve (7.10) eşitlikleri gözönünde bulundurularak (7.37) ile verilen açılımı Teorem 7.1 kullanılarak Laguerre polinomları cinsinden

$$f_N(u) = \sum_{l=0}^N \alpha_l L_l(u) \quad (7.39)$$

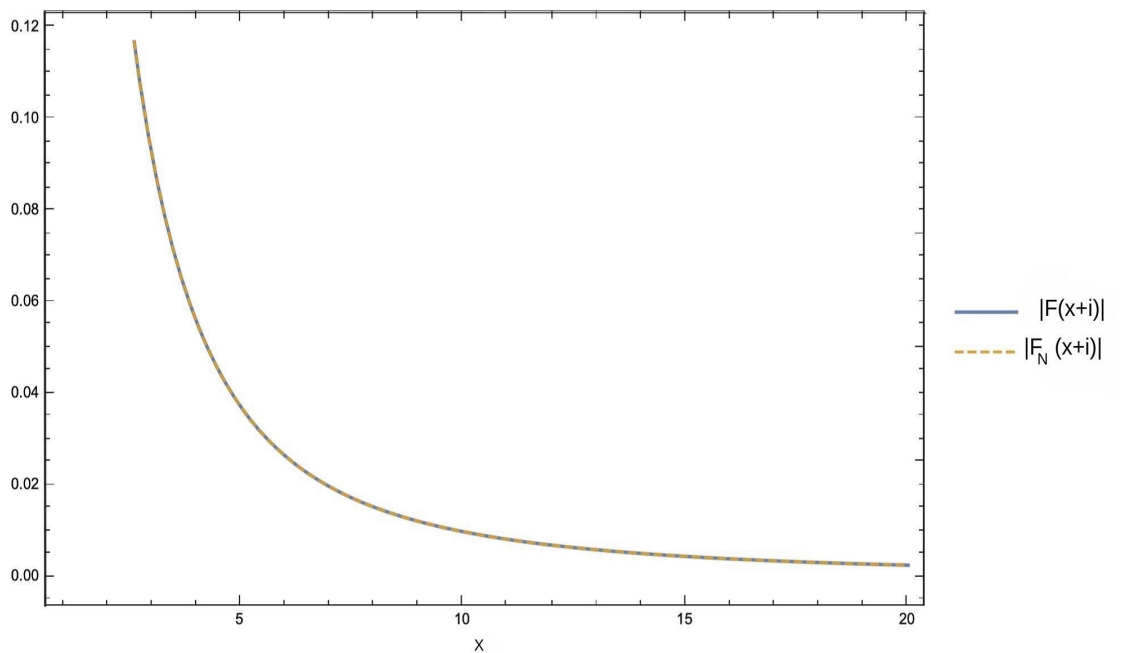
formunda yeniden düzenlenebilir. Buradaki

$$\alpha_l = \sum_{k=l}^N \beta_k I_l(k) \quad (7.40)$$

ile tanımlıdır. Böylece Tricomi metodu kullanılarak $F(r)$ Laplace dönüşümü

$$F_N(r) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^N \alpha_l \left(\frac{r-1}{r}\right)^l \quad (7.41)$$

formunda tahmin edilebilir (Ricci vd. 2021).



Şekil 7.5 $y = 1$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = \sin(u)$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 100$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması

7.4.4 e^{-u^2} fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$f(u) = e^{-u^2} \quad (7.42)$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon için Laplace dönüşümünün tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(u)) &= F(r) = \int_0^\infty e^{-ru} f(u) du \\ &= \int_0^\infty e^{-ru} e^{-u^2} du \\ &= \int_0^\infty e^{-u^2 - ru} du = \int_0^\infty e^{-(u^2 + ru)} du \end{aligned}$$

formunda olup buradaki $e^{-(u^2 + ru)}$ ifadesinde tam kareyi tamamlamak için, $\frac{r^2}{4}$ ifadesini ekleyip çıkararak

$$-(u^2 + ru) = -\left(u^2 + ru + \frac{r^2}{4}\right) + \frac{r^2}{4}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifade integralde yerine konularak

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^\infty e^{-(u^2 + ru + \frac{r^2}{4}) + \frac{r^2}{4}} du \\ &= e^{\frac{r^2}{4}} \int_0^\infty e^{-(u + \frac{r}{2})^2} du \end{aligned}$$

bulunur. Bunun için $t = u + \frac{r}{2}$ değişken değişimi yapılsa $dt = du$ olur. İntegral sınırları da t değişkenine göre ayarlanırsa $u = 0$ için $t = \frac{r}{2}$ ve $u \rightarrow \infty$ için $t \rightarrow \infty$ olup

$$F(r) = e^{\frac{r^2}{4}} \int_{\frac{r}{2}}^\infty e^{-t^2} dt \quad (7.43)$$

formunda yazılır. Burada e^{-u^2} ifadesinin integrali (erf) hata fonksiyonu ile ilgilidir. Ancak, integralin alt sınır $\frac{r}{2}$ olduğu için,

$$\int_{\frac{r}{2}}^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2}\right)$$

eşitliği ile tanımlı olan ($\text{erf } c$) tamamlayıcı hata fonksiyonunu kullanmamız gerekiyor. Böyle tamamlayıcı hata fonksiyonu (7.43) eşitliğinde yerine yazılarak $f(u)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(r) = e^{\frac{r^2}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf } c\left(\frac{r}{2}\right)$$

olarak elde edilir.

Bununla birlikte $f(u)$ fonksiyonunun Hermite seri yaklaşımı

$$f_N(u) = \sum_{l=0}^N \beta_l H_l(u) \quad (7.44)$$

şeklinde tanımlanır. $f(u)$ fonksiyonunun Hermite katsayılarını elde etmek için ise $f(u) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l H_l(u)$ şeklinde bir Hermite serisine açılan bu eşitliğin her iki tarafı $e^{-u^2} H_j(u)$ ile çarpılırsa ve daha sonra $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-u^2} H_j(u) du &= \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} H_l(u) H_j(u) du \\ &= \beta_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} [H_j(u)]^2 du + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{\infty} \beta_l \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} H_l(u) H_j(u) du \\ &= \beta_j 2^j j! \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan son eşitlikte j yerine l alınır

$$\beta_l = \frac{1}{2^l l! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-u^2} H_l(u) du \quad (7.45)$$

elde edilir. $H_k(u)$ Hermite polinomu, $L_l(u)$ ($l = 0, 1, 2, \dots, k$) Laguerre polinomları cinsinden

$$H_k(u) = \sum_{l=0}^k C_l(k) L_l(u) \quad (7.46)$$

formunda ifade edilebilir. Buradaki $C_l(k)$ bağlantı katsayıları (7.23) eşitliğinde verilmiştir. Böylece, Teorem 7.2 kullanılarak (7.44) açılımı Laguerre polinomları cinsinden

$$f_N(u) = \sum_{l=0}^N \alpha_l L_l(u) \quad (7.47)$$

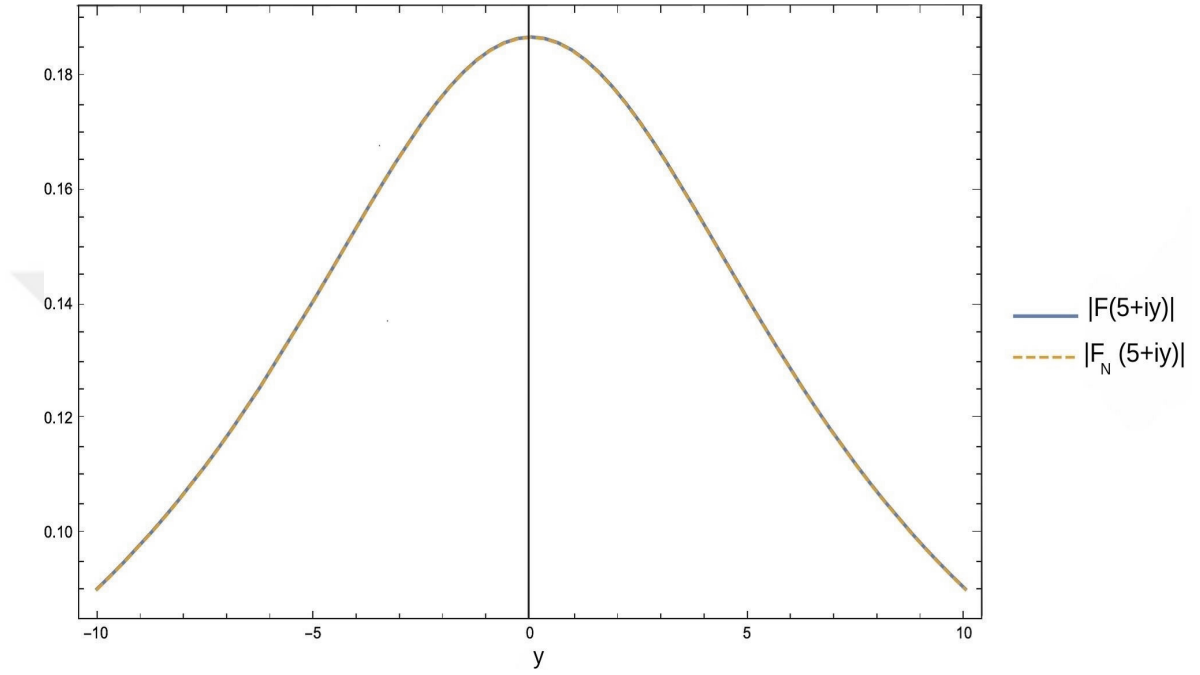
şeklinde yeniden ifade edilebilir ve buradaki

$$\alpha_l = \sum_{k=l}^N \beta_k C_l(k) \quad (7.48)$$

ile tanımlıdır. Tricomi metodu kullanılarak $F(r)$ Laplace dönüşümü

$$F_N(r) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^N \alpha_l \left(\frac{r-1}{r} \right)^l \quad (7.49)$$

formunda ifade edilebilir (Ricci vd. 2021).



Şekil 7.6 $x = 5$ için $r = x + iy$ değişken değişimi yapıldığında, $f(u) = e^{-u^2}$ fonksiyonunun $F(r)$ Laplace dönüşümü ile $N = 16$ için karşılık gelen $F_N(r)$ Tricomi seri yaklaşımının Laplace dönüşümünün karşılaştırılması

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında tek değişkenli ortogonal polinomların integral dönüşümleri incelenmiştir. İlk olarak, k pozitif bir tamsayı ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ parametreleri k dan bağımsız reel parametreler olmak üzere

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) y_k''(x) + (\delta x + \varepsilon) y_k'(x) - k(\delta + (k-1)\alpha) y_k(x) = 0$$

formundaki bir diferensiyel denklemin polinom çözümleri olan ilk üçü Jacobi, Laguerre, Hermite klasik ortogonal polinomları ve diğer üçü sırası ile $M_k^{(a,b)}(x)$, $N_k^{(a)}(x)$, $I_k^{(a)}(x)$ sonlu ortogonal polinom ailelerinin Fourier dönüşümleri hesaplanmıştır (Koelink 1996, Koepf ve Majsej-Jamei 2007, Masjed-Jamei 2004). Aynı zamanda Fourier dönüşümü yardımıyla Hermite polinomlarının $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ile çarpımı olan Hermite fonksiyonlarının birbirleri üzerine eşlenebildiği gösterilmiştir. Diğer taraftan Fourier dönüşümü yardımı ile Jacobi polinomları ve Hahn polinomlarının birbirleri üzerine eşlenebildiği gösterilmiştir (Koelink 1996). $(-\infty, \infty)$ aralığında $I_k^{(a)}(x)$ polinomlarını genelleştiren çok daha kapsamlı sonlu ortogonal polinom ailesi olan Routh-Romanovski polinomları ele alınıp bu polinomların normu elde edilmiş ve Fourier dönüşümleri incelenmiştir (Masjed-Jamei vd. 2014). Daha sonra regüler S-L probleminin daha genel bir durumu olan $\phi_k(-x) = (-1)^k \phi_k(x)$ simetri özelliğini sağlayan çözümlere sahip

$$B(x)\phi_k''(x) + C(x)\phi_k'(x) + \left(\lambda_k D(x) + E(x) + \frac{1 - (-1)^k}{2} F(x) \right) \phi_k(x) = 0$$

problemi ele alınmış ve $B(x), C(x), D(x), E(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonlarının belli seçimleri için bu denklemin dört parametrelili simetrik ortogonal çözümlerinin Fourier dönüşümleri incelenmiştir. Yani bu polinomların özel durumu olarak simetrik ortogonal polinomlarının dört temel ailesi olan genelleştirilmiş ultraküresel polinomlar, genelleştirilmiş Hermite polinomları, $(-\infty, \infty)$ aralığında $x^{-2\sigma}(1+x^2)^{-\eta}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu simetrik ortogonal polinomlar ve $(-\infty, \infty)$ aralığında $x^{-2\sigma}e^{-\frac{1}{x^2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre sonlu simetrik ortogonal polinomların Fourier dönüşümleri hesaplanmış ve Parseval özdeşliği yardımıyla ortogonal fonksiyon aileleri elde edilmiştir. Dahası Jacobi ortogonal polinomlarının ve özel durumları olan $P_k(x)$ Legendre, $C_k^{(p)}(x)$ Gegenbauer, $T_k(x)$ ve $U_k(x)$ birinci ve ikinci tür Chebyshev poli-

nomlarının sonlu Fourier dönüşümleri ile ilgili formüller verilmiştir (Dixit vd. 2015). Ayrıca Tricomi metodu kullanılarak Laguerre polinomları cinsinden seriye açılan fonksiyonların Laplace dönüşümleri incelenmiştir. Aynı metod genişletilerek ortogonal polinom açılımlarına da uygulanmıştır. Bazı özel fonksiyonlar için Laplace dönüşümü ile Tricomi Laplace dönüşümleri elde edilip bunların grafikleri verilmiştir (Ricci vd. 2021).



KAYNAKLAR

- Al-Salam, W., Allaway, W.R. and Askey, R. 1984. Sieved ultraspherical polynomials. Transactions of American Mathematical Society, 284, 39-55.
- Altın, A. 2020. Uygulamalı Matematik. Gazi Yayınları, 2. Baskı, Ankara.
- Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71, Cambridge University Press, Cambridge.
- Askey, R. 1987. An integral of Ramanujan and orthogonal polynomials. J. Indian Math. Soc. 51, 27-36.
- Bailey, W. N. 1935. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, 32, Cambridge.
- Ben Cheikh, Y. and Chaggara, H. 2005. Connection coefficients via lowering operators. J. Comput. Appl. Math., 178, 45-61.
- Ben Cheikh, Y. and Chaggara, H. 2006. Connection coefficients between Boas-Buck polynomial sets. J. Math. Anal. Appl., 319, 665-689.
- Bochner, S. 1929. Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. Mathematische Zeitschrift, 29, 730-736.
- Cauchy, A.L. 1825. Sur les integrales définies prises entre des limites imaginaires. Bulletin de Ferussac, T. III, 214-221,
- Chihara, T.S. 1978. Introduction to Orthogonal Polynomials. New York.
- Çelik, B.Ü. 2020. Simetrik Ortogonal Foksiyon Aileleri. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- Dattoli, G. and Ricci, P.E. 2003. Laguerre-type exponentials, and the relevant L-circular and L-hyperbolic functions. Georgian Math. J., 10, 481-494.
- Davies, B. 2002. Integral transforms and their applications. 3rd ed. Texts in Applied Mathematics, 41, Springer-Verlag, New York.
- Dixit, A., Jiu, L., Moll, V.H. and Vignat, C. 2015. The finite Fourier transform of classical polynomials. Journal of the Australian Mathematical Society, 145-160.
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G. 1954. Tables of Integral Transforms, Vol. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. 2007. Table of Integrals, Series, and Products. Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. Academic Press, New York, 7th edition.

- Hochstadt, H. 1971. *The Functions of Mathematical Physics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto.
- Koelink, H.T. 1996. On Jacobi and continuous Hahn polynomials. *Proc Amer Math Soc.*, 124 (3), 887-898.
- Koepf, W. 1988. *Hypergeometric Summation*, Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg.
- Koepf, W. and Masjed-Jamei, M. 2006. A generic polynomial solution for the differential equation of hypergeometric type and six sequences of classical orthogonal polynomials related to it, *Integral Transforms Spec. Funct.* 17, pp. 559–576.
- Koepf, W. and Masjed-Jamei, M. 2007. Two classes of special functions using Fourier transforms of some finite classes of classical orthogonal polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135, 3599-3606.
- Koornwinder, T.H. 1985. Special orthogonal polynomial systems mapped onto each other by the Fourier-Jacobi transform. In: *Orthogonal polynomials and applications* (C. Brezinski, A. Draux, A. P. Magnus, P. Maroni and A. Ronveaux, Eds.), *Lecture Notes Math.*, 1171, Springer, 174-183.
- Lee, S.L. 2020. Fourier-Laplace transforms and orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory* 256, 105436.
- Masjed-Jamei, M. 2002. Three finite classes of hypergeometric orthogonal polynomials and their application in functions approximation. *Integral Transforms and Special Functions*. 13(2), 169-190.
- Masjed-Jamei, M. 2004. Classical orthogonal polynomials with weight function $((ax+b)^2+(cx+d)^2)^{-p} \exp(q \arctan(((ax+b)/(cx+d))))$; $-\infty < x < \infty$ and a generalization of T and F distributions, *J. Integral Transforms and Special Functions*, 15(2), 137-153.
- Masjed-Jamei, M. 2007a. A generalization of classical symmetric orthogonal functions using a symmetric generalization of Sturm-Liouville problems. *Integral Transforms and Special Functions*. 18(12), 871-883.
- Masjed-Jamei, M. 2007b. A basic class of symmetric orthogonal polynomials using the extended Sturm-Liouville theorem for symmetric function. *J. Math. Anal. Appl.* 325, 753-775.
- Masjed-Jamei, M., Marcellán, F. and Huertas, E.J. 2014. A finite class of orthogonal functions generated by Routh-Romanovski polynomials. *Complex Var Elliptic Equ.* 59 (2), 162-171.
- Masjed-Jamei, M. 2020. *Special functions and generalized Sturm-Liouville problems*. Springer Nature, Cham.
- Masjed-Jamei, M. and Koepf, W. 2012. Two classes of special functions using Fourier transforms of generalized ultraspherical and generalized Hermite polynomials. *Proc Amer Math Soc.*, 140 (6), 2053-2063.

- Masjed-Jamei, M. and Koepf, W. 2013. Two finite classes of orthogonal functions. *Appl Anal.*, 92 (11), 2392-2403.
- Olver, F.W. J., Lozier, D.W., Boisvert, R. F. and Clark, C.W. 2010. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press.
- Rainville, E.D. 1960. *Special Functions*. 1 st ed., The Macmillan Company, New York.
- Ramanujan, S. 1920. A class of definite integrals. *Quarterly J. Math.* 48, 294–310.
- Ricci, P.E., Caratelli, D. and Mainardi, F. 2021. Tricomi’s method for the Laplace transform and orthogonal polynomials, *Symmetry*, 13, 589.
- Szegő, G. 1975. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 23, 4th ed. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Tricomi, F.G. 1935. Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre, I. Inversione della trasformazione; II. Alcune nuove formule sui polinomi di Laguerre. *Rend. Lincei*, 21, 232–239. 332–335.
- Widder, D.V. 1941. *The Laplace Transform*, Princeton Mathematical Series, v.6, Princeton University Press.
- Whittaker, E.T. and Watson, G.N. 1927. *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge.