

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAK BİR ISOPHOTE EĞRİYE SAHİP OLAN YÜZEY AİLELERİ

Orhan Oğulcan TUNCER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2016

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Orhan Oğulcan TUNCER tarafından hazırlanan " **Ortak Bir Isophote Eğriye Sahip Olan Yüzey Aileleri** " adlı tez çalışması 21/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

21/06/2016

Orhan Oğulcan TUNCER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORTAK BİR ISOPHOTE EĞRİYE SAHİP OLAN YÜZEY AİLELERİ

Orhan Oğulcan TUNCER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde kullanılan bazı kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında ortak bir isophote eğriye sahip olan yüzey ailelerinin parametrik gösterimleri elde edilmiştir. Daha sonra bir isophote eğrinin ekseni, $\{N, C, W\}$ çatısı kullanılarak ifade edilmiş ve isophote eğriyi içeren yüzey aileleri karakterize edilmiştir. Ayrıca ortak bir geodezik eğri, asimptotik eğri ya da eğrilik çizgisine sahip olan yüzey aileleri $\{N, C, W\}$ çatısına göre ifade edilmiştir. Verilen tüm teori için pratik uygulamalar ve örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında verilen bir eğriyi bir isophote eğri olarak içeren spacelike ve timelike yüzeyler için karakterizasyonlar verilmiştir. Bu karakterizasyonlar bazı örneklerle desteklenmiştir.

Son bölüm, 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında isophote eğriler için elde edilen sonuçları içermektedir.

Haziran 2016, 91 sayfa

Anahtar Kelimeler: Isophote eğri, silüet eğri, geodezik eğri, asimptotik eğri, eğrilik çizgisi, yüzey aileleri, Öklid 3-uzayı, Minkowski 3-uzayı

ABSTRACT

Master Thesis

SURFACE PENCILS WITH A COMMON ISOPHOTE CURVE

Orhan Oğulcan TUNCER

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. İsmail GÖK

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains some notions, definitions and theorems which are used in the thesis.

In the third chapter, the parametric representation of surface pencils with a common isophote curve have been obtained in 3—dimensional Euclidean space. Then, the axis of a isophote curve has been stated by using the frame $\{N, C, W\}$ and the surface pencils including the isophote curve have been characterized. Besides, the surface pencils which include a common geodesic curve, asymptotic curve or line of curvature have been expressed according to $\{N, C, W\}$ frame. Practical applications an some examples are given for all the theory.

In the fourth chapter, some characterizations for spacelike and timelike surfaces which incorporate a given curve as an isophote curve have been given in 3—dimensional Minkowski space. These characterizations have been supported by some examples.

The last chapter contains the results obtained for isophote curves in Euclidean and Minkowski 3-spaces

June 2016, 91 pages

Key Words: Isophote curve, silhouette curve, geodesic curve, asymptotic curve, line of curvature, surface pencils, Euclidean 3-space, Minkowski 3-space

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemedi beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' e, yakın ilgileriyle çalışmalarımı destekleyen ve fikirler veren saygıdeğer hocalarım, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' ya ve Sayın Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' ye en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında olduğu gibi yüksek lisans eğitimim süresince de büyük fedakarlıklarla hep yanımda olan, emeklerini hiçbir zaman ödeyemeyeceğim başta babaannem Muazzez KARA olmak üzere tüm aileme en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Orhan Oğulcan TUNCER
Ankara, Haziran 2016

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar	4
2.2 Bezier Eğrileri	13
2.3 Pisagor Hodograf Eğrileri.....	16
2.4 Öklid Uzayında Isophote Eğriler	17
2.5 Minkowski Uzayında Isophote Eğriler	23
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ORTAK BİR ISOPHOTE EĞRİYİ İÇEREN YÜZEYLER	31
3.1 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Isophote Eğriye Sahip Yüzey Aileleri.....	38
3.2 3-boyutlu Öklid Uzayında Ortak Bir Isophote Eğriden Geçen Yüzey Örnekleri	42
3.3 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Geodezik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri.....	56
3.4 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Eğrilik Çizgisine Sahip Yüzey Aileleri.....	62
3.5 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Asimptotik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri.....	66
4. 3-BOYUTLU MINKOWSKİ UZAYINDA ORTAK BİR ISOPHOTE EĞRİYİ İÇEREN YÜZEYLER	70
4.1 Bir Isophote Eğri Tarafından Üretilen Spacelike Yüzeyler.....	70
4.2 Bir Isophote Eğri Tarafından Üretilen Timelike Yüzeyler	76
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	86
KAYNAKLAR.....	88
ÖZGEÇMİŞ	91

SİMGELER DİZİNİ

$\wedge$	$\mathbb{E}^3$ uzayında vektörel çarpım
$\langle, \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\ \cdot\ _L$	Minkowski uzayında norm
$\wedge_L$	Minkowski vektörel çarpımı
$\mathbb{E}_1^n$	n –boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{E}^n$	n –boyutlu Öklid uzayı
$\langle, \rangle$	Öklid anlamındaki iç çarpım
$\ \cdot\ $	Öklid uzayında norm
$\mathbb{R}$	Reel uzay
$\mathbb{E}_v^n$	Yarı Öklidiyen uzay



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$\alpha(s)$ helisi	10
Şekil 2.2	$\beta(s)$ slant helisi	11
Şekil 2.3	$(1, -1, 2), (\frac{1}{2}, -2, 0), (-\frac{3}{2}, -1, -2)$ kontrol noktalarıyla verilen kuadratik bir Bézier eğrisi	15
Şekil 2.4	$(0, 0, 0), (1, 2, -1), (2, -1, \frac{1}{2}), (3, 0, 2)$ kontrol noktalarıyla verilen kübik bir Bézier eğrisi	16
Şekil 2.5	Isophote eğrilerin geometrisi	18
Şekil 2.6	G^1 yüzey üzerindeki G^0 isophote eğriler	19
Şekil 2.7	G^2 yüzey üzerindeki G^1 isophote eğriler	20
Şekil 2.8	G^3 yüzey üzerindeki G^2 isophote eğriler	20
Şekil 2.9	Bir elma ve verilen eksenlere sahip isophote eğrileri	21
Şekil 2.10	Bir el ve verilen eksenlere sahip isophote eğrileri	21
Şekil 2.11	Bir vazo ve farklı ışık vektörleri ile verilmiş isophote eğrileri	22
Şekil 2.12	Bir at figürü ve verilen eksenlere sahip isophote eğrileri	22
Şekil 2.13	Bir robot ve farklı ışık vektörleri ile verilmiş isophote eğrileri	23
Şekil 3.1	$\alpha(s)$ eğrisi ve Frenet çatısına bağlı olarak üretilen $P(s, t)$ yüzeyi	31
Şekil 3.2	$\alpha(s)$ eğrisi ve $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı olarak üretilen $P(s, t)$ yüzeyi	39
Şekil 3.3	$\bar{P}_1(r, t)$ yüzeyi ve $\gamma(r)$ isophote eğrisi	44
Şekil 3.4	$\bar{P}_2(r, t)$ yüzeyi ve $\gamma(r)$ isophote eğrisi	45
Şekil 3.5	$\bar{P}_1(r, t)$ ve $\bar{P}_2(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\gamma(r)$ isophote eğrisi	45
Şekil 3.6	$P_3(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi	47
Şekil 3.7	$P_4(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi	47
Şekil 3.8	$P_3(s, t)$ ve $P_4(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi	47
Şekil 3.9	$\bar{P}_5(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ isophote eğrisi	49
Şekil 3.10	$\bar{P}_6(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ isophote eğrisi	49
Şekil 3.11	$\bar{P}_5(r, t)$ ve $\bar{P}_6(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(r)$ isophote eğrisi	50
Şekil 3.12	$P_7(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi	51
Şekil 3.13	$P_8(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi	51
Şekil 3.14	$P_7(s, t)$ ve $P_8(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi	51
Şekil 3.15	$P_9(s, t)$ yüzeyi ve isophote-asimptotik $\alpha(s)$ eğrisi	53
Şekil 3.16	$P_{10}(s, t)$ yüzeyi ve silüet-geodezik $\alpha(s)$ eğrisi	53
Şekil 3.17	$P_9(s, t)$ ve $P_{10}(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi	53
Şekil 3.18	$P_{11}(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi	55
Şekil 3.19	$P_{12}(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi	55
Şekil 3.20	$P_{11}(s, t)$ ve $P_{12}(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi	55
Şekil 3.21	$R_1(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ izogeodezik eğrisi	59
Şekil 3.22	$R_2(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ izogeodezik eğrisi	60

Şekil 3.23	$R_1(s, t)$ ve $R_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ izogeodezik eğrisi	60
Şekil 3.24	$\alpha(r)$ eğrisi $R_3(r, t)$ silindirine izogeodeziktir	61
Şekil 3.25	Bézier formdaki $\alpha(r)$ helisi ile izogeodezik olduğu silindir	62
Şekil 3.26	$\Upsilon_1(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ eğrilik çizgisi	65
Şekil 3.27	$\Upsilon_2(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ eğrilik çizgisi	65
Şekil 3.28	$\Upsilon_1(s, t)$ ve $\Upsilon_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ eğrilik çizgisi	66
Şekil 3.29	$\chi_1(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ asimptotik eğrisi	68
Şekil 3.30	$\chi_2(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ asimptotik eğrisi	69
Şekil 3.31	$\chi_1(s, t)$ ve $\chi_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ asimptotik eğrisi	69
Şekil 4.1	$\Gamma_1(s, t)$ yüzeyi ve $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi	73
Şekil 4.2	$\Gamma_2(s, t)$ yüzeyi ve $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi	73
Şekil 4.3	$\Gamma_1(s, t)$ ve $\Gamma_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi	74
Şekil 4.4	$\Gamma_3(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi	75
Şekil 4.5	$\Gamma_4(r, t)$ yüzeyi ve spacelike $\beta(r)$ isophote eğrisi	76
Şekil 4.6	$\Gamma_3(r, t)$ ve $\Gamma_4(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi	76
Şekil 4.7	$\Gamma_5(s, t)$ yüzeyi ve $\beta(s)$ timelike isophote eğrisi	81
Şekil 4.8	$\Gamma_6(s, t)$ yüzeyi ve $\beta(s)$ timelike isophote eğrisi	81
Şekil 4.9	$\Gamma_5(s, t)$ ve $\Gamma_6(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(s)$ timelike isophote eğrisi	81
Şekil 4.10	$\Gamma_7(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi	83
Şekil 4.11	$\Gamma_8(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi	83
Şekil 4.12	$\Gamma_7(r, t)$ ve $\Gamma_8(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi	83
Şekil 4.13	$\Gamma_9(s, t)$ timelike yüzeyi ve $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi	85
Şekil 4.14	$\Gamma_{10}(s, t)$ timelike yüzeyi ve spacelike $\beta(s)$ isophote eğrisi	85
Şekil 4.15	$\Gamma_9(s, t)$ ve $\Gamma_{10}(s, t)$ timelike yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi	85

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1	Kaynaktan gelen ve yüzeyden yansıyan ışık şiddetleri arasındaki ilişki.	1
Çizelge 3.1	Isophote eğriler ile yüzey üzerindeki bazı özel eğriler arasındaki ilişkiler. ...	36



1. GİRİŞ

Isophote eğriler fizikte kullanılan Lambert Kosinüs Yasası'nın güzel bir sonucudur. Lambert Kosinüs Yasası, bir ışık kaynağı yardımıyla bir yüzeyin aydınlatılması konusunu incelemektedir. Bu yasa ile Güneş'in yaz aylarında gökyüzünde yüksekte iken Dünya'nın neden sıcak, kış aylarında gökyüzünde daha alçaktayken Dünyanın neden soğuk olduğu açıklanabilmektedir. Çünkü, ışığın ideal dağınık bir yansıma yüzeyinden gözlemlenen şiddeti gözlemcinin görüş yeri ve yüzeyin normal vektörü arasında kalan θ açısının kosinüsü ile doğru orantılıdır. Bu yasa, bazen Kosinüs Emisyon Yasası bazen de Lambert Emisyon Yasası olarak da adlandırılır.

Bunun yanı sıra, yüzeyin parlaklığı da kaynaktan gelen ışık ile yüzey normali arasındaki açının kosinüsü ile orantılıdır. Bunu şu şekilde formülize edebiliriz:

$$I_{yuzey} = I_{kaynak} \cos \theta$$

Burada I_{yuzey} yüzeyden yansıyan ışığın şiddeti, I_{kaynak} ise ışık kaynağından gelen ışığın şiddetini ifade etmektedir. Çizelge 1.1'de verilen özel açılar yardımıyla bu ilişkiyi örnekleyelim.

Çizelge 1.1 Kaynaktan gelen ve yüzeyden yansıyan ışık şiddetleri arasındaki ilişki

θ	$I_{kaynak} (w/m^2)$	$I_{yuzey} (w/m^2)$
0°	1000	1000
30°	1000	866
45°	1000	707
60°	1000	500
90°	1000	0

Bir yüzeyin bir kaynak yardımıyla eşit şiddette aydınlatılan (eş aydınlanan) noktalarının geometrik yerine bir *isophote eğri* adı verilmektedir. Dolayısıyla isophote

eğrileri, bu eğriler boyunca yüzey normallerinin sabit bir doğrultu (ışık doğrultusu) ile sabit bir açı yaptığı eğriler olarak tanımlayabiliriz. Yüzey üzerinde, eğri boyunca yüzey normali ile ışık doğrultusu arasında bahsedilen bu açı değiştikçe yeni isophote eğriler oluşacaktır. Özel olarak bu açı $\frac{\pi}{2}$ ise bu eğriler *silüet eğriler* olarak adlandırılmaktadır.

Isophote eğriler optik, bilgisayar destekli tasarım/imalat, yüzey geometrik modelleme, bilgisayar grafikleri gibi birçok dalda da kendine uygulama alanı bulmuştur. Ayrıca bu eğriler birleşik yüzeylerdeki süreksizlikleri belirlemek ve yüzeyleri sorgulamak amacıyla da kullanılmaktadır. Koenderink ve van Doorn keyfi bir aydınlatma altında keyfi bir şeklin Lambert yüzeyleri üzerinde isophote eğrilerin yapısal invariantlarını incelemişlerdir (Koenderink ve van Doorn 1980). Aynı yazarlar bir isophote eğrinin küresel göstergesinin S^2 birim küresi üzerinde bir enlem çemberi olduğunu ispatlamışlardır. Daha sonra, (Poeschl 1984) bir free form yüzey üzerinde isophote eğriler boyunca bozuklukları saptayarak bu eğrileri araba gövde tasarımında kullanmışlardır. Sara, isophote eğrilerin özellikleri yardımıyla lokal gölgeleme üzerinde çalışmıştır (Sara 1994). Kim ve Lee yaptıkları iki farklı yayında kanal yüzeyleri ile dönel yüzeylerin isophote eğrilerini ve karakteristik çemberlerin birbirine teğet olması problemini çözerek bir kanal yüzeyinin perspektif silüetini parametrize etmişlerdir (Kim ve Lee 2003a,b). Bu çalışmalardan sonra (Doğan ve Yaylı 2014, 2015) isophote eğriler hakkında çeşitli karakterizasyonlar vermiş, isophote eğriler ile geodezikler, asimptotik eğriler ve eğrilik çizgileri arasındaki ilişkileri vermişlerdir. Ayrıca Darboux çatısını kullanarak bir isophote eğrinin sabit eksenini elde etmişler ve bir kanal yüzeyi üzerinde yatan isophote eğriler için bazı sonuçlar vermişlerdir. Doğan aynı problemi Minkowski 3-uzayında timelike yüzeyler üzerinde yatan timelike ve spacelike isophote eğriler ve spacelike yüzeyler üzerinde bulunan spacelike isophote eğriler için ele almıştır (Doğan 2012, Doğan ve Yaylı 2014).

Fakat diferensiyel geometride eğriler ve yüzeyler üzerinde yapılan çoğu çalışmada yüzeyler üzerindeki özel eğriler incelenmektedir. Bunun aksine, (Wang vd. 2004)

verilen bir eğri için ters problem düşünerek, bu eğriyi bir geodezik olarak içeren yüzey ailelerini ifade etmişlerdir. Bunu oluşturmak için de eğri ve eğrinin Frenet çatısından yararlanmışlardır. Bu çalışmadan sonra birçok yazar verilen bir, iki hatta dört uzay eğrisini geodezik eğriler, asimptotik eğriler ya da eğrilik çizgileri gibi özel eğriler olarak içeren yüzeyleri farklı uzaylarda farklı karakterizasyonlarla incelemişlerdir (Zhao ve Wang 2007,2008, Kasap ve Akyıldız 2008, Paluszny 2008, Sánchez-Reyes ve Dorado 2008, Farouki vd. 2009a,b, Saffak ve Kasap 2009, Li vd. 2011, Bayram vd. 2012, Li vd. 2013, Ergun vd. 2014, Şaffak ve Kasap 2015).

Bu tez çalışmasında ilk olarak 3-boyutlu Öklid uzayında ortak bir isophote eğriye sahip olan yüzeyler karakterize edilmiş ve pratik uygulamalarda kolaylık sağlayacak sonuçlar verilmiştir. Daha sonra bir isophote eğrinin eksenini $\{N, C, W\}$ çatısına göre elde edilmiş ve aynı problem 3-boyutlu Öklid uzayında bu çatıya göre incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenmiştir. Daha sonraki bölümlerde $\{N, C, W\}$ çatısına göre sırayla ortak bir geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisine sahip olan yüzeyler incelenmiş, önemli karakterizasyonlar örnekleri ile birlikte verilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir isophote eğriyi içeren spacelike ve timelike yüzeyler iki alt başlıkta incelenmiş ve bu tip yüzeylerle ilgili bazı örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Reel İç Çarpım Uzayı) V , $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in V$ için

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu (simetrik, bi-lineer ve pozitif tanımlı) tanımlanabilirse, bu vektör uzayına bir **reel iç çarpım uzayı** denir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.2 (Öklid Uzayı) V , n -boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olsun. V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir A afin uzayına **Öklid uzayı** adı verilir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.3 (Öklid İç Çarpımı) $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayı olsun.

$\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{E}^n$ için

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona standart **Öklid iç çarpım** fonksiyonu ya da **standart iç çarpım** adı verilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.4 (Norm) $\mathbb{E}^n$ n -boyutlu Öklid uzayı'nın her $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ elemanı için

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona u nun **normu** adı verilir (Millman vd. 1977).

Tanım 2.1.5 (Öklid Vektörel Çarpımı) $\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı olsun. Bu durumda $\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}^3$ için, bu vektörlerin **Öklid vektörel çarpımı** şu şekilde tanımlanır (Millman vd. 1977).

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, -u_2v_1 + u_1v_2).$$

Tanım 2.1.6 (C^k Sınıfından Fonksiyon) U cümlesi $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında açık bir alt cümle ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonunun k . mertebeden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise bu fonksiyona **C^k sınıfından diferensiyellenebilir bir fonksiyon** adı verilir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.7 (Eğri) $\mathbb{R}$ gerçel sayı doğrusunun bir $I = (a, b)$ açık aralığından $\mathbb{E}^n$ uzayına tanımlı düzgün bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir **eğri** denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.8 (Türevlenebilir Eğri) $\mathbb{R}$ gerçel sayı doğrusunun bir $I = (a, b)$ açık aralığından $\mathbb{E}^n$ uzayına, türevlenebilir bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonuna bir **türevlenebilir parametrik eğri** adı verilir. (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.9 (Regüler Eğri) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı içinde bir eğri olsun. $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$ olmak üzere $\alpha'_1(s_0) = \alpha'_2(s_0) = \dots = \alpha'_n(s_0) = 0$ olacak biçimde bir $s_0 \in I$ yok ise $\alpha(s)$ eğrisine bir **regüler eğri** denir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.10 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı içinde bir eğri olsun.

$$\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \dots, \alpha'_n(s))$$

biçiminde tanımlanan ifadeye α eğrisinin s noktasındaki **hız vektörü** denir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.11 $\alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı'nda bir eğri olsun. $\|\alpha'(s)\|$ normuna α eğrisinin s noktasındaki **hızı** adı verilir. Ayrıca özel olarak, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine **birim hızlı eğri**, s ye de α eğrisinin **yay parametresi** denir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.12 (Birim Teğet Vektör) $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisini göz önüne alalım.

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.1)$$

eşitliğiyle verilen T vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** adı verilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.13 (Eğrilik Fonksiyonu) $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi alalım.

$$\begin{aligned} \kappa : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona, α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu**, $\kappa(s)$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** adı verilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.14 (Asli Normal Vektör) $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisini göz önüne alalım.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \quad (2.2)$$

eşitliğiyle verilen $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **asli normal vektörü** adı verilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.15 (Binormal Vektör) $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisini göz önüne alalım.

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \quad (2.3)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **binormal vektörü** adı verilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.16 (Frenet Çatısı) $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisini göz önüne alalım. $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri**, bu vektörlerin oluşturduğu

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

cümlesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** adı verilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.17 (Burulma Fonksiyonu) $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi alalım. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona, α eğrisinin **burulma fonksiyonu**, $\tau(s)$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** adı verilir (Stoker 1969).

Tanım 2.1.18 (Frenet-Serret Formülleri) $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere aşağıda verilen eşitliklere α eğrisinin **Frenet-Serret formülleri** adı verilir:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

Şimdi birim hızlı olmayan bir eğri için Frenet çatısı ve Frenet-Serret formüllerini verelim (Stoker 1969).

Tanım 2.1.19 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında keyfi bir r parametresine sahip bir eğri olsun. Bu durumda eğrinin $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ çatısı şu şekilde

tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\bar{T}(r) &= \frac{\alpha'(r)}{\|\alpha'(r)\|}, \\ \bar{B}(r) &= \frac{\alpha'(r) \times \alpha''(r)}{\|\alpha'(r) \times \alpha''(r)\|}, \\ \bar{N}(r) &= \bar{B}(r) \times \bar{T}(r).\end{aligned}$$

Bu durumda eğrinin Frenet-Serret formülleri ise şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \bar{T}(r) \\ \bar{N}(r) \\ \bar{B}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(r)\|\alpha'(r)\| & 0 \\ -\kappa(r)\|\alpha'(r)\| & 0 & \tau(r)\|\alpha'(r)\| \\ 0 & -\tau(r)\|\alpha'(r)\| & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}(r) \\ \bar{N}(r) \\ \bar{B}(r) \end{pmatrix}.$$

Burada $\kappa(r) = \frac{\|\alpha'(r) \times \alpha''(r)\|}{\|\alpha'(r)\|^3}$ ve $\tau(r) = \frac{\det(\alpha'(r), \alpha''(r), \alpha'''(r))}{\|\alpha'(r) \times \alpha''(r)\|^2}$ sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır (Stoker 1969).

Tanım 2.1.20 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda N eğrinin asli normal vektörü, C asli normal vektörün türevi ve W Darboux vektörü olmak üzere eğrinin $\{N, C, W\}$ çatısı şu şekilde tanımlıdır.

$$\begin{aligned}N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \\ C(s) &= \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|}, \\ W(s) &= \frac{\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}.\end{aligned}$$

Bu durumda bu eğrinin alternatif çatıya göre türev formülleri ise şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} N(s) \\ C(s) \\ W(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(s) \\ C(s) \\ W(s) \end{pmatrix}.$$

Burada $f(s) = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}$ ve $g(s) = \sigma(s)f(s)$ (σ diferensiyellenebilir bir fonksiyon) sırasıyla eğrinin bu çatıya göre eğrilik fonksiyonlarıdır (Uzunoglu 2016).

O halde bir eğrinin Frenet çatısı ile $\{N, C, W\}$ çatısı arasında şu bağıntıyı elde ederiz:

$$\begin{pmatrix} N(s) \\ C(s) \\ W(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} & 0 & \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} & 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}.$$

Tanım 2.1.21 (Helis) $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin her noktasındaki teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğriye bir **helis** adı verilir (Stoker 1969).

Teorem 2.1.1 (Lancret Teoremi) 3-boyutlu Öklid uzayında bir $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi alalım. α eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart

$$H(s) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$$

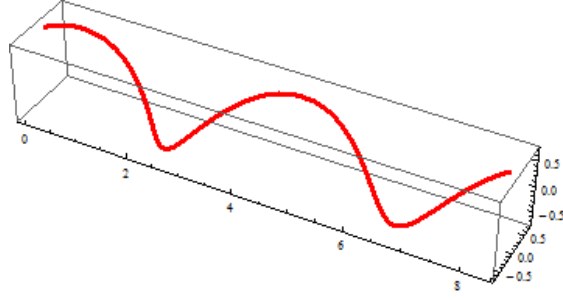
harmonik eğrilik fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır (Lancret 1806).

Örnek 2.1.1 $\alpha(s) = (\frac{2}{3}s, \frac{\sqrt{5}}{3}\sin s, \frac{\sqrt{5}}{3}\cos s)$ eğrisini ele alalım. Eğrinin Frenet elemanları şu şekildedir:

$$\begin{cases} T(s) = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\cos s, -\frac{\sqrt{5}}{3}\sin s\right), \\ N(s) = (0, -\sin s, -\cos s), \\ B(s) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\cos s, -\frac{2}{3}\sin s\right), \end{cases}$$

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ve } \tau(s) = \frac{2}{3}.$$

Dolayısıyla $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \text{sbt.}$ olup, α eğrisi bir helistir. Bu helisin şekli aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1 $\alpha(s)$ helisi

Tanım 2.1.22 (Slant Helis) 3-boyutlu Öklid uzayında bir $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi alalım. Eğrinin her noktasındaki asli normal vektör alanı sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğriye bir **slant helis** adı verilir (Izumiya ve Takeuchi 2004).

Teorem 2.1.2 $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olmak üzere, bu eğrinin bir slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s)$$

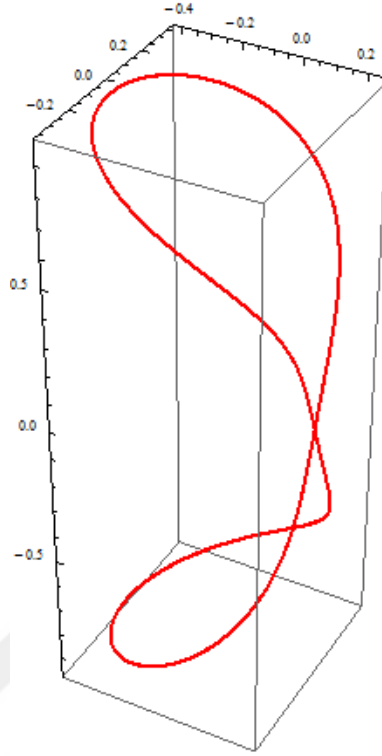
fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır (Izumiya ve Takeuchi 2004).

Örnek 2.1.2 $\beta(s) = \left(-\frac{1}{12} \cos 4s - \frac{1}{3} \cos 2s, -\frac{1}{12} \sin 4s - \frac{1}{3} \sin 2s, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos s \right)$ eğrisini ele alalım. Eğrinin Frenet elemanları şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{cases} T(s) = \left(\frac{1}{3} \sin 4s + \frac{2}{3} \sin 2s, -\frac{1}{3} \cos 4s - \frac{2}{3} \cos 2s, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin s \right), \\ N(s) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos 3s, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 3s, \frac{1}{3} \right), \\ B(s) = \left(\frac{1}{9}(-4 + 2 \cos 2s - \cos 4s), \frac{8}{9} \cos s \sin^3 s, \frac{2\sqrt{2}}{9}(2 \cos s + \cos 3s) \right), \end{cases}$$

$$\kappa(s) = 2\sqrt{2} \cos s \text{ ve } \tau(s) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin s.$$

Bu slant helisin şekli aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.2 $\beta(s)$ slant helisi

Tanım 2.1.23 (Geometrik Süreklilik) Başlangıç noktası ve bitiş noktası sırasıyla P_0 ve P_n olan bir α eğrisi ile Q_0 ve Q_n olan bir β eğrisi göz önüne alalım.

- (i) α eğrisinin P_n bitiş noktası ile β eğrisinin Q_0 başlangıç noktaları aynı ise bu iki eğriye **0. dereceden geometrik sürekliliğe sahip eğriler** denir ve G^0 ile gösterilir.
- (ii) α eğrisinin P_n bitiş noktası ile β eğrisinin Q_0 başlangıç noktaları aynı ve aynı zamanda bu noktadaki teğet vektörleri de paralel ise bu iki eğriye **1. dereceden geometrik sürekliliğe sahip eğriler** denir ve G^1 ile gösterilir.
- (iii) α ve β eğrisi G^1 sürekliliğine sahip iki eğri olmak üzere eğrilerin ortak noktasındaki ikinci türevleri oranlı (ya da eğrilikleri aynı) ise bu iki eğriye **2. dereceden geometrik sürekliliğe sahip eğriler** denir ve G^2 ile gösterilir (Farin 2002).

Tanım 2.1.24 (Yüzey) $\mathbb{E}^2$ de açık bir alt cümle U olsun.

$$\begin{aligned} S : U \subset \mathbb{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\longrightarrow S(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan diferensiyellenebilir bir S dönüşümüne $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir **yüzey** denir (Millman vd. 1977).

Tanım 2.1.25 (Eğrilik Çizgisi) S , $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \longrightarrow S$ bu yüzey üzerinde regüler bir eğri olsun. Her $s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, $\alpha(s)$ noktasında S yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine S yüzeyi üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir (Millman vd. 1977).

Tanım 2.1.26 (Asimptotik Eğri) S , $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \longrightarrow S$ bu yüzey üzerinde regüler bir eğri olsun. Her $s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, $\alpha(s)$ noktasında S yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine S yüzeyi üzerinde bir **asimptotik eğri** denir (Millman vd. 1977).

Tanım 2.1.27 (Geodezik Eğri) S , $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \longrightarrow S$ bu yüzey üzerinde regüler bir eğri olmak üzere S yüzeyinin birim dik vektör alanı n olsun. α'' vektör alanı, $n \circ \alpha$ vektör alanına paralel ise α eğrisine S yüzeyi üzerinde bir **geodezik eğri** denir (Millman vd. 1977).

Tanım 2.1.28 (Darboux Çatısı) S , $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \longrightarrow S$ de S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\{T(s), Y(s), n(s)\}$ vektör cümlesine α eğrisinin S yüzeyi üzerindeki **Darboux çatısı** adı verilir. Burada $T(s)$ α eğrisinin birim teğeti, n ise S yüzeyinin α eğrisi boyunca birim normali ve $Y = n \times T$ olarak tanımlanır (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.3 $S, \mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \longrightarrow S$ de S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda Darboux çatısının türev formülleri şu şekildedir:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T(s) \\ Y(s) \\ \bar{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ Y(s) \\ \bar{n}(s) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Burada $k_g = \langle \alpha'', Y \rangle$, $k_n = \langle \alpha'', \bar{n} \rangle$ ve $\tau_g = -\langle \bar{n}, Y \rangle$ sayıları Darboux çatısının eğrilikleri olup sırasıyla, geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma olarak adlandırılırlar.

Tanım 2.1.29 (Regle Yüzey) $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ve birim uzunlukta bir D doğrusu verildiğini varsayalım. D doğrusunun α eğrisi boyunca hareket ettirilmesi sonucu oluşan yüzeye bir **regle yüzey** denir. Matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$S(s, v) = \alpha(s) + vD(s).$$

Burada α eğrisine regle yüzeyin **dayanak eğrisi**, $D(s)$ doğrusuna ise regle yüzeyin **doğrultmanı** adı verilir. Ayrıca $\alpha(s)$ noktasından geçen ve $D(s)$ vektörüne paralel olan doğruya, $\alpha(s)$ noktasından geçen **ana doğru** denir (Farin 2002).

Tanım 2.1.30 (Açılabilir Yüzey) S bir regle yüzey olmak üzere, S regle yüzeyinin dik vektör alanı, yüzeyin ana doğruları boyunca paralel kalıyorsa bu regle yüzeye bir **açılabilir yüzey** adı verilir (Sabuncuoğlu 2014).

2.2 Bézier Eğrileri

Bézier Eğrileri, Fransız Mühendis Pierre Bézier tarafından 1970 yılında Renault otomobil gövdelerinin tasarımında kullanılmak üzere geliştirilmiş Spline yaklaşım metodudur. Bu eğriler bilgisayar grafiklerinde ve Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır.

Bézier eğrileri gerçek interpolasyon spline'ı değildir. Zira bu eğriler normal olarak bütün veri noktalarından geçmezler. Bu bağlamda Bézier eğrileri en küçük kareler eğrileriyle benzerlik göstermektedirler. Bununla birlikte Bézier eğrileri veri noktalarının belirlediği çokgenin içinde kalma özelliğine sahiptirler. Ayrıca bu eğriler güzel bir geometrik özelliğe de sahiptirler ki, noktalardan biri değiştirildiğinde eğrinin sadece müdahale edilen kısmı değişerek yerel bir etki görülmektedir. Yani, bu veri noktalarının kullanımı sayesinde kullanıcı görsel olarak ulaşabileceği sonuçları önceden kestirebilmektedir. Dolayısıyla bu veri noktaları eğrinin geçtiği noktalar değil (ilk ve son nokta hariç), eğrinin şeklini belirlemek için kullanılan noktalardır.

Bézier eğrileri, matematiksel olarak genellikle Bernstein polinomları baz alınarak ifade edilir. Buna göre n 'inci dereceden temel fonksiyon, kontrol noktaları i ile parametrize edilmek üzere şu şekilde verilebilir.

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}.$$

Burada $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ dir. n 'inci dereceden bir Bézier eğrisi $n+1$ nokta tarafından belirlenir ve kontrol edilir. Şimdi ise Bézier eğrilerinin genel formülünü verelim. P_i i 'inci kontrol (veri) noktası ve $B_{i,n}$ ilgili Bernstein polinomu olmak üzere Bézier eğrisi şu şekilde ifade edilir.

$$\alpha(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

- $n=2$ için P_0 , P_1 ve P_2 noktalarıyla tanımlanan $\alpha(u)$ eğrisi kuadratik bir Bézier eğrisi belirtmektedir.

$$\alpha(u) = (1-u)^2 P_0 + 2(1-u)u P_1 + u^2 P_2.$$

Dolayısıyla $u = 0$ için $P(0) = P_0$ ve $u = 1$ için $P(1) = P_2$ olduğu görülmektedir. Buna göre u parametresi 0 ile 1 arasında değişirken ilk kontrol noktası ile üçüncü (son) kontrol noktası arasında bir eğri çizilmektedir. Üç nokta doğrusal olmadığı sürece eğri hiçbir zaman P_1 noktasından asla geçmez. Sonuç

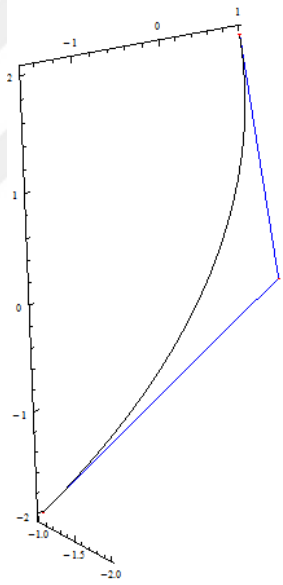
olarak kuadratik bir Bézier eğrisinin üzerindeki noktaların koordinatları, bu eğriyi tanımlamak için kullanılan üç noktanın koordinatlarının ağırlıklı ortalamasıdır.

- n=3 için P_0 , P_1 , P_2 ve P_3 noktalarıyla tanımlanan bir $\beta(u)$ eğrisi kübik bir Bézier eğrisi belirtir.

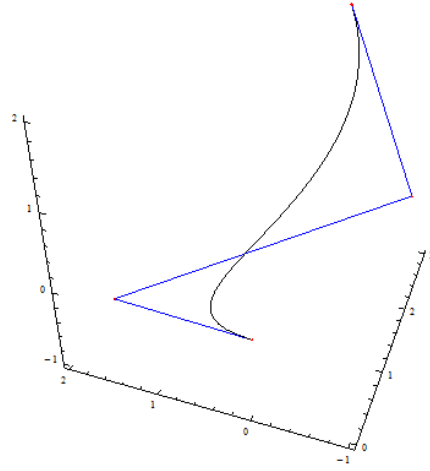
$$\beta(u) = (1-u)^3 P_0 + 3(1-u)^2 u P_1 + 3(1-u) u^2 P_2 + u^3 P_3, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Tekrar kolayca görülebilir ki $\beta(0) = P_0$ ve $\beta(1) = P_3$ şeklindedir. Ara noktalar (P_1 ve P_2) eğri üzerinde yer almazlar ancak eğrinin şeklini belirlerler.

Şekil 2.3-2.4'de bazı Bézier eğri örnekleri verilmiştir.



Şekil 2.3 $(1, -1, 2)$, $(\frac{1}{2}, -2, 0)$, $(-\frac{3}{2}, -1, -2)$ kontrol noktalarıyla verilen kuadratik bir Bézier eğrisi



Şekil 2.4 $(0, 0, 0), (1, 2, -1), (2, -1, \frac{1}{2}), (3, 0, 2)$ kontrol noktalarıyla verilen kübik bir Bézier eğrisi

2.3 Pisagor Hodograf Eğrileri

Bu bölümde Pisagor-Hodograf (PH) eğrilerini tanımlayıp daha sonra bu eğriler için önemli bir teorem vereceğiz.

Tanım 2.3.1 $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir polinom eğrisi olsun. Eğer $\alpha(s)$ eğrisinin hızı bir polinom ise yani aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde bir $\sigma(s)$ reel polinomu mevcut ise, α eğrisine bir **Pisagor Hodograf (PH) eğrisi** denir (Farouki 2008).

$$(\alpha'_1(s))^2 + (\alpha'_2(s))^2 + (\alpha'_3(s))^2 = \sigma^2(s).$$

Teorem 2.3.1 $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında verilen bir $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ eğrisinin bir PH eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki formda $U(s), V(s), P(s)$

ve $Q(s)$ polinomlarının mevcut olmasıdır (Farouki 2008):

$$\begin{aligned}\gamma'_1 &= U^2 + V^2 - P^2 - Q^2, \\ \gamma'_2 &= 2UQ + 2PV, \\ \gamma'_3 &= 2VQ - 2PU, \\ \sigma &= U^2 + V^2 + P^2 + Q^2.\end{aligned}$$

2.4 Öklid Uzayında Isophote Eğriler

Tanım 2.4.1 $P(s, t)$ 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey ve α ise P yüzeyi üzerinde s yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Eğer α eğrisi boyunca P yüzeyinin birim normal vektörleri $\bar{n}(s, t)$ sabit bir u doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, α eğrisine P yüzeyi üzerinde bir **isophote eğri** adı verilir.

Matematiksel olarak ifade edecek olursak; α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olma şartı

$$\langle \bar{n}(s, t), u \rangle = \cos \theta, \quad (2.5)$$

olacak şekilde sabit bir u vektörünün ve sabit bir θ açısının bulunmasıdır. Burada $\bar{n}(s, t)$, $P(s, t)$ yüzeyinin α eğrisi boyunca birim normallerini ifade eder. Eğer θ açısı özel olarak $\frac{\pi}{2}$ radyan ise, yani

$$\langle \bar{n}(s, t), u \rangle = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad (2.6)$$

ise bu durumda α eğrisi P yüzeyi üzerinde bir **silüet eğri** olarak adlandırılır.

Darboux çatısının türev formülleri ve (2.5) denklemini kullanılarak bir isophote eğrinin u eksenini Darboux çatısı bakımından şu şekilde elde edilir:

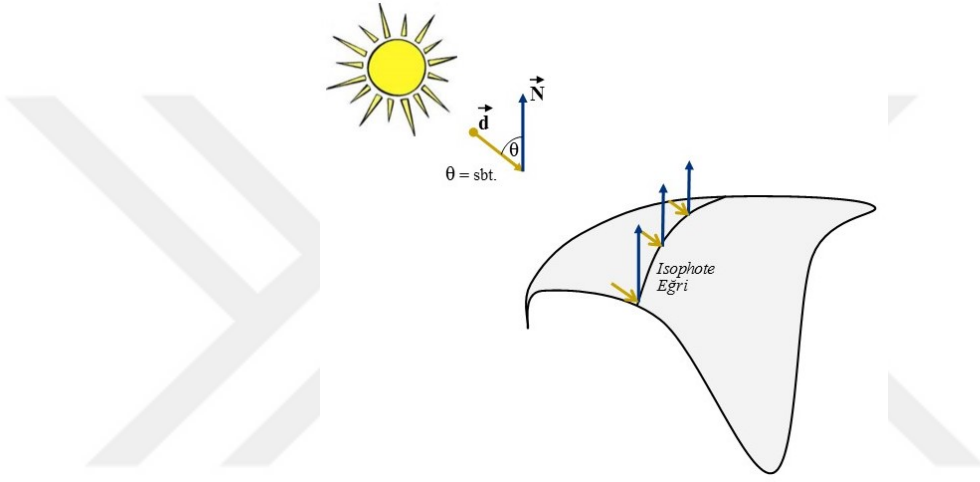
$$u = \pm \frac{\tau_g}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{T} \mp \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}} \sin \theta \mathbf{Y} + \cos \theta \bar{\mathbf{n}}. \quad (2.7)$$

Burada k_n normal eğriliği, τ_g ise geodezik burulmayı temsil eder (Doğan ve Yaylı 2015).

Eğer u eksenini Frenet çatısı bakımından yeniden düzenleyecek olursak

$$u = \pm \cos \psi \sin \theta \mathbf{T} + (\mp \sin \psi \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \mathbf{N} + (\pm \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) \mathbf{B} \quad (2.8)$$

ifadesini elde ederiz. Burada φ açısı eğri boyunca yüzey normali $\bar{n}$ ile eğrinin binormali B arasındaki açının ölçüsüdür, $\psi = \arccos\left(\frac{\tau - \varphi'}{\sqrt{(\kappa \sin \varphi)^2 + (\tau - \varphi')^2}}\right)$.



Şekil 2.5 Isophote eğrilerin geometrisi

Şimdi birleşik yüzeylerin sürekliliklerinin isophote eğriler yardımıyla incelenmesini ifade edecek olan ve birçok uygulamada önemli bir yer oluşturan şu teoremi verelim:

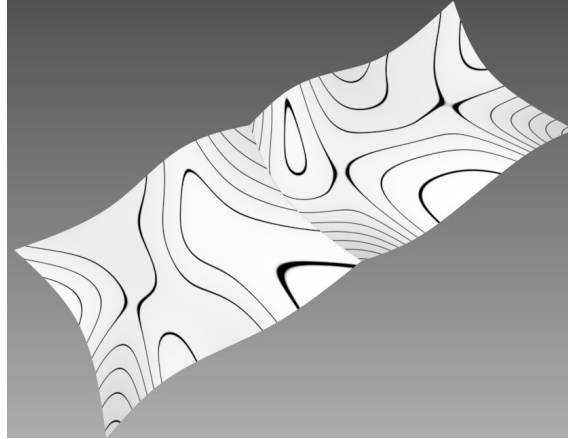
Teorem 2.4.1 Ortak bir l eğrisi boyunca birleşen P_1 ve P_2 parametrik yüzeylerini ele alalım. Eğer P_1 ve P_2 yüzeyleri üzerinde u eksenli isophote eğrilerin ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu yüzeyler l boyunca $G^{n+1}(n \geq 1)$ sürekliliğine sahiptir:

- (1) P_1 ve P_2 yüzeylerinin isophote eğrileri l eğrisinin hiçbir noktasında kritik noktaya sahip değildir.

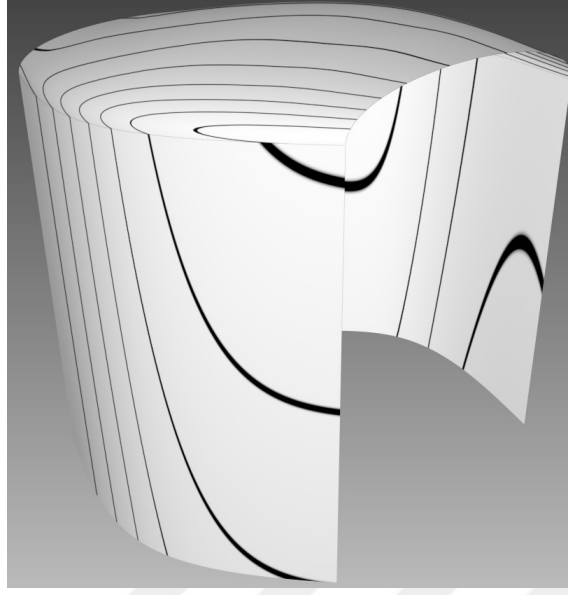
- (2) P_1 ve P_2 yüzeylerinin isophote eğrileri l eğrisinin hiçbir noktasında l ye teğet değildir.
- (3) l eğrisinin hiçbir noktasında, u ekseninin P_1 ve P_2 yüzeylerinin teğet düzlemlerine izdüşüm vektörü l ye teğet değildir.
- (4) P_1 ve P_2 yüzeylerinin isophote eğrileri l eğrisi boyunca G^n sürekliliğine sahiptir.

(Heisel 1996).

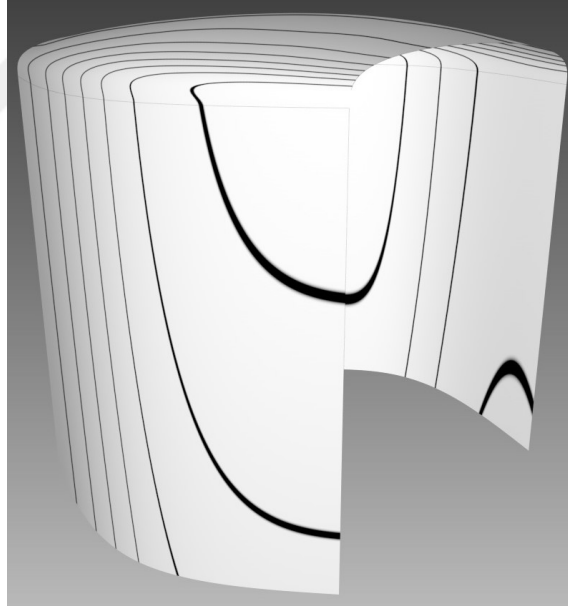
Yukarıdaki teoremden de anlaşılacağı gibi bir eğri boyunca birleşen iki yüzeyin sürekliliğini incelemek yerine bu yüzeylerin üzerindeki isophote eğrilerin sürekliliğini incelemek yeterlidir ve bu işlem daha kolaydır. Örneğin, isophote eğrileri G^0 sürekliliği ile birleşen iki yüzey G^1 sürekliliğine sahiptir. Teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki şekil 2.6-2.8'i verebiliriz:



Şekil 2.6 G^1 yüzey üzerindeki G^0 isophote eğriler



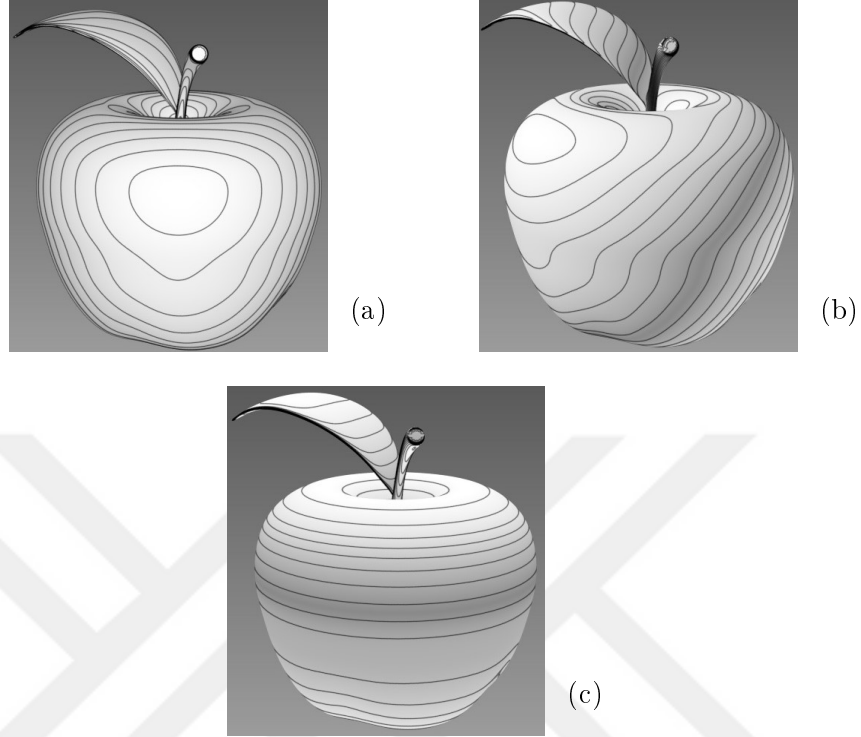
Şekil 2.7 G^2 yüzey üzerindeki G^1 isophote eğriler



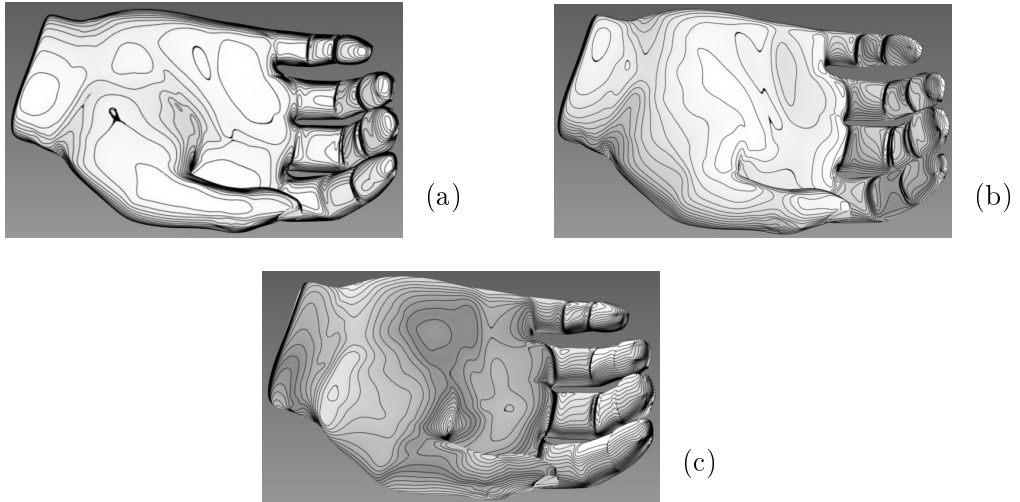
Şekil 2.8 G^3 yüzey üzerindeki G^2 isophote eğriler

Yukarıda verilenlerden çıkarılabilecek diğer bir önemli sonuçta u eksenine bağlı olarak isophote eğrilerin değişimidir. Yani, ışık doğrultusu değiştiği zaman eğrilerin davranışı da değişmektedir. Şimdi ise eksenlerin, isophote eğrilerin durumlarına olan

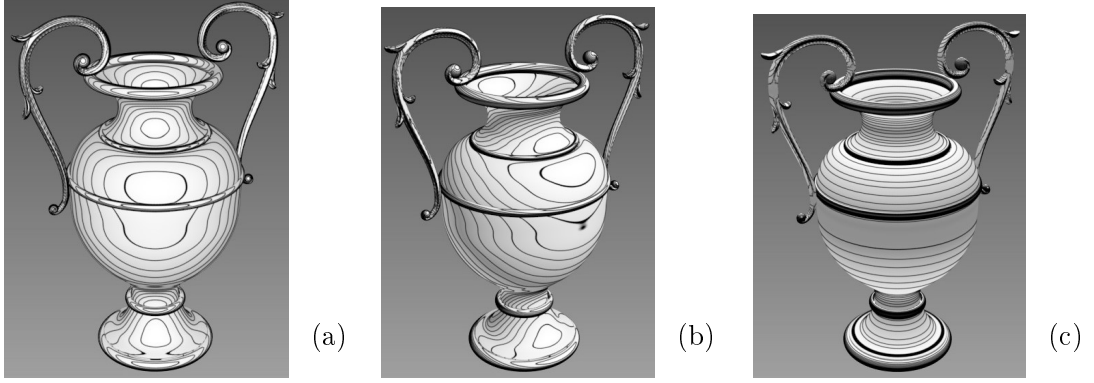
etkilerini anlamak amacıyla aşağıdaki objeler ve üzerindeki isophote eğrileri verelim. Bu objeler ve isophote eğriler AutoCAD programı yardımıyla çizilmiştir.



şekil 2.9 Bir elma ve verilen eksnlere sahip isophote eğrileri
a. Kamera bakış ağısı, b. $\vec{u} = (-3, 2, -3)$, c. $\vec{u} = (0, 0, 1)$

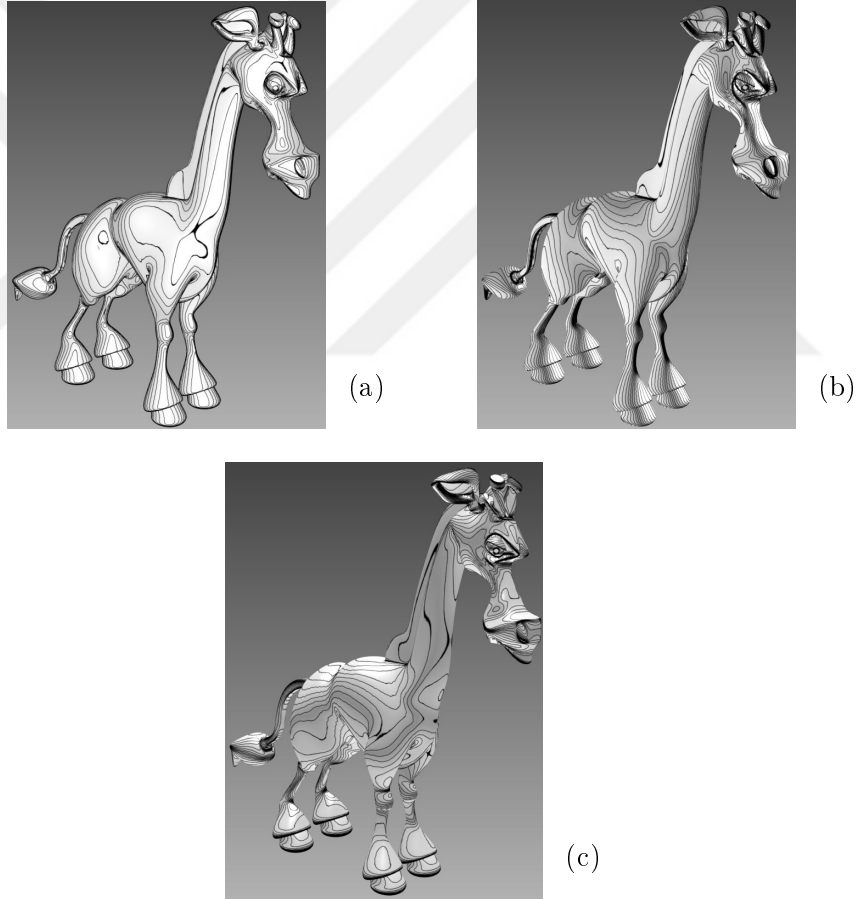


şekil 2.10 Bir el ve verilen eksnlere sahip isophote eğrileri
a. Kamera bakış ağısı, b. $\vec{u} = (-1, 5, -6)$, c. $\vec{u} = (2, 4, 2)$



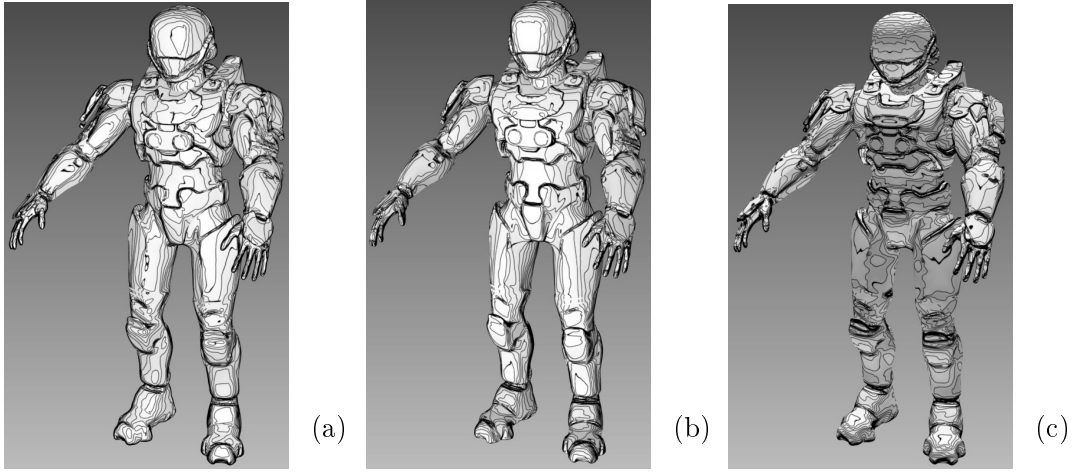
Şekil 2.11 Bir kupa ve farklı ışık vektörleri ile verilmiş isophote eğrileri

a. Kamera bakış açısı, b. $\vec{u} = (1, 0, 1)$, c. $\vec{u} = (0, 0, 1)$



Şekil 2.12 Bir at figürü ve farklı ışık vektörleri ile verilmiş isophote eğrileri

a. Kamera bakış açısı, b. $\vec{u} = (2, -1, 0)$, c. $\vec{u} = (0, 0, 1)$



Şekil 2.13 Bir robot ve farklı ışık vektörleri ile verilmiş isophote eğrileri

a. Kamera bakış açısı, b. $\vec{u} = (1, 0, 0)$, c. $\vec{u} = (0, 0, 1)$

2.5 Minkowski Uzayında Isophote Eğriler

Bu bölümde öncelikle $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz, ardından $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında isophote eğrilerin karakteristik özelliklerini araştıracağız.

Tanım 2.5.1 (Yarı Öklidiyen Uzay) $\mathbb{R}^n$ n -boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. $\forall U = (u_1, u_2, \dots, u_n), V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(U, V) \rightarrow \langle U, V \rangle_L = \sum_{i=1}^p u_i v_i - \sum_{j=p+1}^n u_j v_j$$

biçiminde tanımlanan p indeksli fonksiyon $\mathbb{R}^n$ de pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım belirtir. Bu iç çarpıma Lorentz iç çarpımı adı verilir. Bu iç çarpım üzerinde tanımlı uzaya da yarı Öklidiyen uzay adı verilir ve $\mathbb{E}_p^n$ ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.5.2 (Minkowski Uzayı) $\mathbb{E}_p^n$ yarı Öklidiyen uzayında $p = 1$ ve $n \geq 2$ ise oluşan $\mathbb{E}_1^n$ uzayı n -boyutlu Minkowski uzayı olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Yukarıdaki tanımlara dayanarak Minkowski uzayında iç çarpımın şu şekilde olduğunu kolayca görebiliriz:

$$\langle U, V \rangle_L = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \cdots + u_{n-1}v_{n-1} - u_nv_n$$

Minkowski uzayında üç farklı tipte vektör vardır. Şimdi bu vektörleri tanımlayalım.

Tanım 2.5.3 (Spacelike, Timelike ve Lightlike(Null) Vektör) $\mathbb{E}_1^n$ n boyutlu Minkowski uzayından alınan her U elemanı için,

- (1) Eğer $\langle U, U \rangle_L > 0$ ya da $U = 0$ ise U ya bir spacelike vektör,
- (2) Eğer $\langle U, U \rangle_L < 0$ ise U ya bir timelike vektör,
- (3) Eğer $\langle U, U \rangle_L = 0$ ve $U \neq 0$ ise U ya bir lightlike (null) vektör,

adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.5.4 (Bir Vektörün Causal Karakteri) $\mathbb{E}_1^n$ n boyutlu Minkowski uzayında bir U vektörünün causal karakteri ε_U ile gösterilir ve

$$\varepsilon_U = \begin{cases} 1, & U \text{ bir spacelike vektör ise} \\ 0, & U \text{ bir lightlike vektör ise} \\ -1, & U \text{ bir timelike vektör ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Lopez 2014).

Tanım 2.5.5 (Minkowski Uzayında Norm) $\mathbb{E}_1^n$ Minkowski uzayından alınan $\forall U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ için,

$$\|U\|_L = \sqrt{|\langle U, U \rangle_L|}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona U vektörünün normu adı verilir. Normu 1 olan vektöre ise birim vektör adı verilir (Lopez 2014).

Tanım 2.5.6 $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayı olmak üzere $\forall U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}_1^3$ için Lorentziyen anlamda vektörel çarpımı şu şekilde tanımlanır:

$$U \wedge_L V = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_2v_1 - u_1v_2).$$

Minkowski uzayında eğriler teğet vektörlerinin türüne göre sınıflandırılmaktadır. Eğer, eğrinin teğet vektörü spacelike ise eğri spacelike, timelike ise eğri timelike, lightlike ise eğri lightlike eğri olarak adlandırılır (Lopez 2014).

$\alpha(s)$ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında bir eğri olsun. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere bu çatının türev formülleri şu şekilde verilir.

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\varepsilon_T \varepsilon_N \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\varepsilon_N \varepsilon_B \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Burada ε_T , ε_N ve ε_B , sırasıyla T , N ve B vektörlerinin causal karakterleridir.

Tanım 2.5.7 (a) U ve V vektörleri $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında aynı timelike konide bulunan vektörler olsun. Bu durumda aşağıdaki şartı sağlayan bir tek $\gamma \geq 0$ reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = -\|U\| \|V\| \cosh \gamma,$$

burada γ açısı bu vektörler arasındaki hiperbolik açı olarak adlandırılır.

(b) $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike U vektörü ile timelike V vektörünü ele alalım. O halde aşağıdaki şartı sağlayan bir tek $\gamma \geq 0$ reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = \|U\| \|V\| \sinh \gamma.$$

(c) U ve V vektörleri spacelike vektörler olsun.

- (i) Bu vektörler timelike bir düzlem geriyorsa, aşağıdaki şartı sağlayan bir tek $\gamma \geq 0$ reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = \|U\| \|V\| \cosh \gamma.$$

- (ii) Bu vektörler spacelike bir düzlem geriyorsa, aşağıdaki şartı sağlayan bir tek $\gamma \geq 0$ reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = \|U\| \|V\| \cos \gamma.$$

Minkowski uzayında bir S yüzeyi ele alalım. Eğer yüzey üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı Riemann metriği ise S bir spacelike yüzey, eğer indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise S yüzeyi bir timelike yüzey olarak adlandırılmaktadır (Lopez 2014).

Tanım 2.5.8 (Minkowski Pisagor Hodograf) $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ eğrisi $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında bir polinom eğrisi olsun. Eğer aşağıdaki şartı sağlayacak şekilde bir $\sigma(s)$ reel polinomu mevcut ise, γ eğrisine bir **Minkowski Pisagor Hodograf (MPH) eğrisi** denir (Farouki 2008).

$$(\gamma'_1(s))^2 + (\gamma'_2(s))^2 - (\gamma'_3(s))^2 = \sigma^2(s)$$

Teorem 2.5.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ eğrisinin bir MPH eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde $U(s)$, $V(s)$, $P(s)$ ve $Q(s)$ polinomlarının mevcut olmasıdır (Farouki 2008):

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= U^2 - V^2 + P^2 - Q^2, \\ \gamma'_2 &= 2UV - 2PQ, \\ \gamma'_3 &= 2UP - 2VQ, \\ \sigma &= U^2 - V^2 + P^2 - Q^2. \end{aligned}$$

Şimdi, Minkowski uzayında bir yüzey üzerinde bulunan ve null olmayan bir isophote eğrinin eksenini verelim. İlk olarak yüzey, timelike bir yüzey olsun. Bu durumda

yüzey normalı olan n vektörü spacelike bir vektördür. Timelike yüzey üzerinde hem timelike hem de spacelike eğriler olacağından iki ayrı durumda inceleyeceğiz.

İlk olarak eğriyi spacelike alalım:

Durum 2.5.1 u eksenini bir spacelike vektör ise, Tanım 2.5.7 gereği

$$\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cosh \theta \quad \text{ya da} \quad \frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cos \alpha,$$

elde ederiz. Burada θ ve α sabit açılardır.

- (a) Kabul edelim ki $\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cosh \theta$ olsun. Eğrinin binormal vektörü bir spacelike vektör ise, isophote eğrinin u spacelike eksenini Frenet çatısı bakımından şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} u = & \pm \sinh \psi \sinh \theta T(s) + (\pm \cosh \psi \sinh \theta \cosh \varphi + \cosh \theta \sinh \varphi) N(s) \\ & + (\pm \cosh \psi \sinh \theta \sinh \varphi + \cosh \theta \cosh \varphi) B(s). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Eğer eğrinin binormal vektörü timelike bir vektör ise, isophote eğrinin u spacelike eksenini Frenet çatısı bakımından şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} u = & \pm \sinh \psi \sinh \theta T(s) + (\mp \cosh \psi \sinh \theta \sinh \varphi + \cosh \theta \cosh \varphi) N(s) \\ & + (\mp \cosh \psi \sinh \theta \cosh \varphi + \cosh \theta \sinh \varphi) B(s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Burada φ yüzey normalı ile eğrinin binormalı arasındaki açıyı ifade eder ve

$$\sinh \psi = \frac{\tau + \varphi'}{\sqrt{(\kappa \cosh \varphi)^2 - (\tau + \varphi')^2}} \text{ dir.}$$

- (b) Kabul edelim ki $\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cos \alpha$ olsun. Eğrinin binormal vektörü spacelike bir vektör ise, isophote eğrinin u spacelike eksenini Frenet çatısına göre şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} n = & \pm \cosh \psi \sin \alpha T(s) + (\pm \sinh \psi \sin \alpha \cosh \varphi + \cos \alpha \sinh \varphi) N(s) \\ & + (\pm \sinh \psi \sin \alpha \sinh \varphi + \cos \alpha \cosh \varphi) B(s), \end{aligned} \quad (2.12)$$

Eğer eğrinin binormal vektörü bir timelike vektör ise, u spacelike eksenini Frenet çatısına göre şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} u = & \pm \cosh \psi \sin \alpha T(s) + (\mp \sinh \psi \sin \alpha \sinh \varphi + \cos \alpha \cosh \varphi) N(s) \\ & + (\mp \sinh \psi \sin \alpha \cosh \varphi + \cos \alpha \sinh \varphi) B(s). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Burada φ yüzey normalini ile eğrinin binormalı arasındaki açıyı ifade eder ve $\cosh \psi = \frac{\tau + \varphi'}{\sqrt{(\tau + \varphi')^2 - (\kappa \cosh \varphi)^2}}$ dir.

Durum 2.5.2 u eksenini bir timelike vektör ise, Tanım 2.5.7 gereği

$$\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \sinh \theta.$$

elde ederiz. Eğer eğrinin binormal vektörü bir spacelike vektör ise, u timelike eksenini Frenet çatısı bakımından şu şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned} u = & \pm \sinh \psi \cosh \theta T(s) + (\pm \cosh \psi \cosh \theta \cosh \varphi + \sinh \theta \sinh \varphi) N(s) \\ & + (\pm \cosh \psi \cosh \theta \sinh \varphi + \sinh \theta \cosh \varphi) B(s), \end{aligned} \quad (2.14)$$

Eğer eğrinin binormal vektörü bir timelike vektör ise, u timelike eksenini Frenet çatısına göre aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned} u = & \pm \sinh \psi \cosh \theta T(s) + (\mp \cosh \psi \cosh \theta \sinh \varphi + \sinh \theta \cosh \varphi) N(s) \\ & + (\mp \cosh \psi \cosh \theta \cosh \varphi + \sinh \theta \sinh \varphi) B(s). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Burada φ yüzey normalini ile eğrinin binormalı arasındaki açıyı ifade eder ve

$$\sinh \psi = \frac{\tau + \varphi'}{\sqrt{(\kappa \cosh \varphi)^2 - (\tau + \varphi')^2}} \text{ dir.}$$

Şimdi eğriyi timelike alıp, u eksenini elde edelim:

Durum 2.5.3 u eksenini bir spacelike vektör ise, Tanım 2.5.7 gereği

$$\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cos \theta \quad \text{ya da} \quad \frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cosh \alpha,$$

elde ederiz. Burada θ ve α sabit açılardır.

- (a) Kabul edelim ki $\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cos \theta$ olsun. O halde u spacelike eksenini Frenet çatısı bakımından şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} u = & \pm \sinh \psi \sin \theta T(s) + (\pm \cosh \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) N(s) \\ & + (\pm \cosh \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) B(s). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Burada $\sinh \psi = \frac{\tau + \varphi'}{\sqrt{(\kappa \sin \varphi)^2 - (\tau + \varphi')^2}}$ dir.

- (b) Varsayalım ki $\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \cosh \alpha$ olsun. Kolay bir hesaplamayla, eğrinin u spacelike eksenini Frenet çatısı bakımından şu şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned} u = & \pm \cosh \psi \sinh \alpha T(s) + (\pm \sinh \psi \sinh \alpha \cos \varphi - \cosh \alpha \sin \varphi) N(s) \\ & + (\pm \sinh \psi \sinh \alpha \sin \varphi + \cosh \alpha \cos \varphi) B(s). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Burada φ yüzey normali ile eğrinin binormali arasındaki açıyı ifade eder ve $\cosh \psi = \frac{\tau + \varphi'}{\sqrt{(\tau + \varphi')^2 - (\kappa \sin \varphi)^2}}$ dir.

Durum 2.5.4 u eksenini bir timelike vektör ise, Tanım 2.5.7 gereği

$$\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \sinh \theta.$$

Bu durumda, u timelike eksenini Frenet çatısı bakımından aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} u = & \pm \cosh \psi \cosh \theta T(s) + (\pm \sinh \psi \cosh \theta \cos \varphi - \sinh \theta \sin \varphi) N(s) \\ & + (\pm \sinh \psi \cosh \theta \sin \varphi + \sinh \theta \cos \varphi) B(s), \end{aligned} \quad (2.18)$$

Burada φ yüzey normali ile eğrinin binormali arasındaki açıyı ifade eder ve $\cosh \psi = \frac{\tau + \varphi'}{\sqrt{(\tau + \varphi')^2 - (\kappa \sin \varphi)^2}}$ dir.

Şimdi ise yüzeyi spacelike alıp, bu durumda yüzey üzerinde isophote eğrilerin eksenlerini verelim. Spacelike bir yüzey üzerinde spacelike eğrilerin olduğunu biliyoruz. Ayrıca yüzey spacelike olduğundan yüzey normali timelike bir vektördür. Yine isophote eğrinin eksenini iki durumda inceleyeceğiz.

Durum 2.5.5 u eksenini ve yüzeyin n normalini aynı timelike konide bulunan iki vektör olmak üzere Tanım 2.5.7 gereği

$$\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = -\cosh \theta.$$

elde ederiz. Dolayısıyla, eğrinin binormal vektörü bir timelike vektör ise, u timelike eksenini Frenet çatısı bakımından şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} u &= \pm \cos \psi \sinh \theta T(s) + (\mp \sin \psi \sinh \theta \cosh \varphi + \cosh \theta \sinh \varphi) N(s) \\ &\quad + (\mp \sin \psi \sinh \theta \sinh \varphi + \cosh \theta \cosh \varphi) B(s), \end{aligned} \quad (2.19)$$

Eğer eğrinin binormal vektörü spacelike bir vektör ise, o halde eksen

$$\begin{aligned} u &= \pm \cos \psi \sinh \theta T(s) + (\pm \sin \psi \sinh \theta \sinh \varphi + \cosh \theta \cosh \varphi) N(s) \\ &\quad + (\pm \sin \psi \sinh \theta \cosh \varphi + \cosh \theta \sinh \varphi) B(s), \end{aligned} \quad (2.20)$$

olarak bulunur.

Durum 2.5.6 u eksenini spacelike bir vektör ise, Tanım 2.5.7 gereği

$$\frac{\langle n(s, t), u \rangle}{\|n(s, t)\|} = \sinh \theta.$$

elde ederiz. Dolayısıyla, eksen Frenet çatısı bakımından şu şekilde elde edilir:

Eğrinin binormal vektörü timelike bir vektör ise,

$$\begin{aligned} u &= \pm \cos \psi \cosh \theta T(s) + (\mp \sin \psi \cosh \theta \cosh \varphi - \sinh \theta \sinh \varphi) N(s) \\ &\quad + (\mp \sin \psi \cosh \theta \sinh \varphi - \sinh \theta \cosh \varphi) B(s), \end{aligned} \quad (2.21)$$

spacelike bir vektör ise,

$$\begin{aligned} u &= \pm \cos \psi \cosh \theta T(s) + (\pm \sin \psi \cosh \theta \sinh \varphi - \sinh \theta \cosh \varphi) N(s) \\ &\quad + (\pm \sin \psi \cosh \theta \cosh \varphi - \sinh \theta \sinh \varphi) B(s), \end{aligned} \quad (2.22)$$

bulunur. Burada φ yüzey normalini ile eğrinin binormali arasındaki açıyı ifade eder ve $\psi = \arccos\left(\frac{\tau + \varphi'}{\sqrt{(\kappa \cosh \varphi)^2 + (\tau + \varphi')^2}}\right)$ dir.

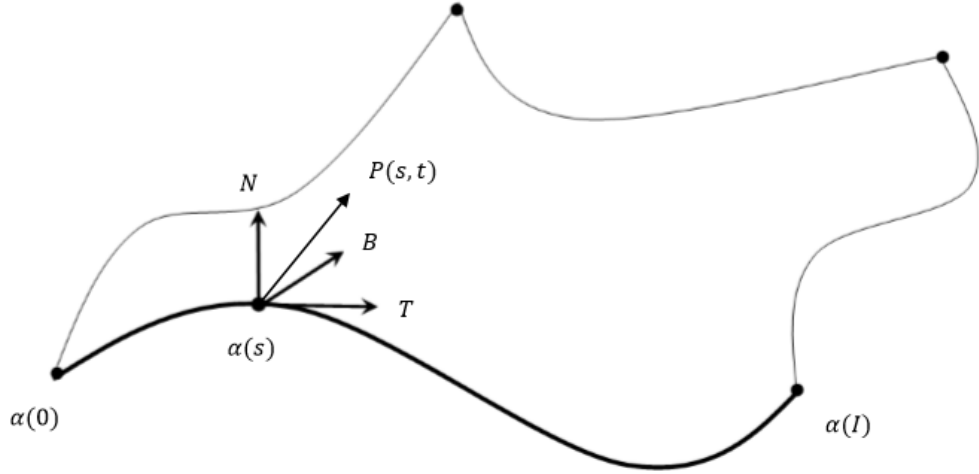
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ORTAK BİR ISOPHOTE EĞRİYİ İÇEREN YÜZEYLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğri ve bu eğrinin Frenet çatısı yardımıyla, bu eğriyi isophote eğri olarak barındıran tüm yüzeyler için karakterizasyonlar ve örnekler vereceğiz.

$P(s, t)$ bir regüler yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde birim hızlı bir izoparametrik eğri olsun. α eğrisine ve eğrinin Frenet çatısına bağlı olarak $P(s, t)$ yüzeyinin denklemi şu şekilde verilebilir (Şekil 3.1):

$$P(s, t) = \alpha(s) + (\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t), \lambda_3(s, t)) \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}; \quad 0 \leq s \leq I, \quad 0 \leq t \leq J. \quad (3.1)$$

Bu denklemde $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonları C^1 sınıftan fonksiyonlardır.



Şekil 3.1 $\alpha(s)$ eğrisi ve Frenet çatısına bağlı olarak üretilen $P(s, t)$ yüzeyi

Şimdi, izoparametrik α eğrisinin P yüzeyi üzerinde isophote eğri olması için yüzeyin sağlaması gereken şartları elde edelim. Öncelikle, α eğrisi P yüzeyi üzerinde

bir izoparametrik eğri olduğundan dolayı bir $t_0 \in [0, J]$ parametresi için

$$\begin{aligned}\lambda_1(s, t_0) &= \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0, \\ 0 &\leq s \leq I,\end{aligned}\tag{3.2}$$

eşitliği sağlanır.

Diğer yandan Tanım 2.4.1 gereği, $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart eğri boyunca $n(s, t_0)$ yüzey normallerinin sabit bir u vektörü ile sabit bir θ açısı yapmasıdır. Yüzey normalini

$$n(s, t) = \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial P(s, t)}{\partial t}$$

eşitliği yardımıyla hesaplayabiliriz. (3.1) denklemini kullanarak kolay bir hesaplamayla yüzey normali şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}n(s, t) &= \left(1 - \lambda_2(s, t)\kappa(s) + \frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial s}, \lambda_1(s, t)\kappa(s) - \lambda_3(s, t)\tau(s) + \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial s}, \right. \\ &\quad \left. \lambda_2(s, t)\tau(s) + \frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial s} \right) \begin{pmatrix} 0 & B(s) & -N(s) \\ -B(s) & 0 & T(s) \\ N(s) & -T(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $t = t_0$ alarak izoparametrik eğri boyunca yüzey normalini

$$n(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)T(s) + \phi_2(s, t_0)N(s) + \phi_3(s, t_0)B(s)\tag{3.3}$$

denklemini yardımıyla veririz. Burada katsayı fonksiyonları

$$\begin{aligned}\phi_1(s, t_0) &= \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t}, \\ \phi_2(s, t_0) &= - \left(1 + \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial s}\right) \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t}, \\ \phi_3(s, t_0) &= \left(1 + \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial s}\right) \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

şeklinde dir.

Ayrıca eğri, yüzey üzerinde bir izoparametrik eğri olduğundan yani $x(s, t_0) = y(s, t_0) = z(s, t_0) = 0$ olduğundan dolayı x, y ve z fonksiyonlarının s parametresine göre kısmi

türevleri sıfıra eşittir.

Dolayısıyla (3.4) ifadesini şu şekilde yeniden düzenleyebiliriz:

$$\begin{aligned}\phi_1(s, t_0) &= 0, \\ \phi_2(s, t_0) &= -\frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t}, \\ \phi_3(s, t_0) &= \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Buradan eğri boyunca yüzey normali

$$n(s, t_0) = \phi_2(s, t_0)N(s) + \phi_3(s, t_0)B(s) = -\frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t}N(s) + \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t}B(s) \tag{3.6}$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdaki işlemlerle eğri boyunca yüzey normalini elde ettik. Dolayısıyla isophote şartını kullanarak

$$\begin{aligned}\frac{\langle n(s, t_0), u \rangle}{\|n(s, t_0)\|} &= \frac{1}{\sqrt{[\phi_2(s, t_0)]^2 + [\phi_3(s, t_0)]^2}} \left[(\mp \sin \psi \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \phi_2(s, t_0) \right. \\ &\quad \left. + (\pm \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) \phi_3(s, t_0) \right] \\ &= \cos \theta = sbt.,\end{aligned}\tag{3.7}$$

eşitliğini elde ederiz, burada $\psi = \arccos\left(\frac{\tau - \varphi'}{\sqrt{(\kappa \sin \varphi)^2 + (\tau - \varphi')^2}}\right)$ dir.

Diğer taraftan φ nin eğri boyunca yüzey normali n ile eğrinin binormali B arasındaki açı olduğunu düşünerek şu denklemi yazabiliriz:

$$\frac{\langle n(s, t_0), B \rangle}{\|n(s, t_0)\|} = \frac{\phi_3(s, t_0)}{\sqrt{[\phi_2(s, t_0)]^2 + [\phi_3(s, t_0)]^2}} = \cos \varphi. \tag{3.8}$$

Ayrıca kolayca görülebilir ki bir eğrinin bir yüzey üzerinde isophote eğri olması için φ ile θ açısı arasında eğrinin eğrilikleri cinsinden aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır.

$$\cot \theta = \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi (1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi (1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt. \tag{3.9}$$

Burada $\mathcal{H} = \frac{\tau - \varphi'}{\kappa \sin \varphi}$ dir.

Sonuç olarak (3.2), (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemlerini kullanarak basit bir hesaplamayla aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.1 $\alpha(s) : [0, I] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, s yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri ve $P(s, t)$ regüler bir yüzey olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik ve isophote eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}\lambda_1(s, t_0) &= \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0 \\ -\frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} \cos(\varphi(s)) &= \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} \sin(\varphi(s)) \\ \cot \theta &= \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi (1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi (1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.\end{aligned}$$

bağıntılarının sağlanmasıdır. Burada $\mathcal{H} = \frac{\tau - \varphi'}{\kappa \sin \varphi}$ dir.

Eğer yüzey normalini birim alırsak $[\phi_2(s, t_0)]^2 + [\phi_3(s, t_0)]^2 = 1$ olur ve buradan da aşağıdaki sonucu kolayca elde ederiz.

Sonuç 3.1 $\alpha(s)$ izoparametrik eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}\lambda_1(s, t_0) &= \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0 \\ \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} &= -\sin(\varphi(s)) \\ \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} &= \cos(\varphi(s)) \\ \cot \theta &= \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi (1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi (1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.\end{aligned}$$

eşitliklerinin gerçekleşmesidir.

Uyarı 3.1 Kolayca gösterilebilir ki eğer $\varphi = \pi/2$ ise α eğrisi P yüzeyi üzerinde aynı zamanda bir geodezik, $\varphi = 0$ ise aynı zamanda bir asimptotik eğridir.

Daha iyi analiz ve pratik uygulamalar için $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonlarını

iki çarpana ayrılabilmediğini düşünerek inceleyelim:

$$\begin{aligned}\lambda_1(s, t) &= l(s)\Lambda_1(t) \\ \lambda_2(s, t) &= m(s)\Lambda_2(t) \\ \lambda_3(s, t) &= n(s)\Lambda_3(t).\end{aligned}$$

Burada $l(s)$, $m(s)$, $n(s)$, $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ ve $\Lambda_3(t)$ fonksiyonları C^1 sınıfından fonksiyonlardır. Bu şartlar altında aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 3.2 Bir $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} \Lambda_1(t_0) = \Lambda_2(t_0) = \Lambda_3(t_0) = 0, \\ m(s)\Lambda_2'(t_0) = \cos \varphi, \quad n(s)\Lambda_3'(t_0) = -\sin \varphi, \\ \cot \theta = \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi(1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi(1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt. \end{cases}$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

Şimdi ise $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonlarını sadece t parametresine bağlı olarak seçelim. Bu durumda φ açısının sabit olması gerektiği aşıkardır. Ayrıca biliyoruz ki kübik polinomlar tasarımcılar için çok kullanışlı araçlardan bir tanesidir. Dolayısıyla, $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ ve $\Lambda_3(t)$ fonksiyonlarını kübik polinomlar olarak seçersek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3 Bir $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}\Lambda_1(t) &= \eta_1(t - t_0) + \eta_2(t - t_0)^2 + \eta_3(t - t_0)^3 \\ \Lambda_2(t) &= \cos \varphi(t - t_0) + \nu_2(t - t_0)^2 + \nu_3(t - t_0)^3 \\ \Lambda_3(t) &= -\sin \varphi(t - t_0) + \epsilon_2(t - t_0)^2 + \epsilon_3(t - t_0)^3 \\ \cot \theta &= \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi(1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi(1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada $\eta_i (i = 1, 2, 3)$, ν_j , $\epsilon_j (j = 2, 3)$ katsayıları reel sabitlerdir ve yüzeyin şeklini kontrol ederler.

Uyarı 3.2 Eğer η_i , ν_j ve ϵ_j katsayılarının hepsini birden sıfır alırsak, karşılık gelen yüzey $n \times T$ doğrultmanlı bir regle yüzey olur. Bu yüzeyin parametrik ifadesi şu şekildedir:

$$P(s, t) = \alpha(s) + (t - t_0)n \times T.$$

Burada n eğri boyunca yüzey normali, T ise eğrinin binormal vektörüdür.

Şimdi isophote eğriler ve yüzey üzerinde bazı özel eğriler arasındaki ilişkiyi ifade eden çizelge 3.1'i verelim:

Çizelge 3.1 Isophote eğriler ile yüzey üzerinde bazı özel eğriler arasındaki ilişkiler

θ	φ	$\alpha(s)$
$\neq \pi/2$	$\neq \pi/2$ and $\neq 0$	isophote eğri
$\neq \pi/2$	$\pi/2$	isophote-geodezik eğri
$\neq \pi/2$	0	isophote-asimptotik eğri
$\pi/2$	$\neq \pi/2$ and $\neq 0$	silüet eğri
$\pi/2$	$\pi/2$	silüet-geodezik eğri
$\pi/2$	0	silüet-asimptotik eğri

Çizelge 3.1'deki veriler ve Teorem 3.1 i birlikte göz önüne alarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4 $\alpha(s)$ eğrisi, $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğri olsun. O halde aşağıdakiler gerçekleşir:

- i) $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir isophote-geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} = -1, \\ \cot \theta = \pm \frac{\mathcal{H}'}{\kappa(1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt. \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada $\mathcal{H} = \tau/\kappa$ dır. Dolayısıyla bir eğrinin bu yüzey üzerinde isophote eğri olması için bir slant helis olması gerekmektedir.

- ii) $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir isophote-asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} = 1, \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} = 0, \\ \tan \theta = \frac{\tau}{\kappa} = sbt. \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Dolayısıyla bir eğrinin bu yüzey üzerinde isophote asimptotik eğri olması için bir helis olması gerekmektedir.

- iii) $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir silüet eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} = -\sin(\varphi(s)), \quad \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} = \cos(\varphi(s)) \\ \mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi \mathcal{H}^2 = -\kappa \cos \varphi, \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada $\mathcal{H} = \frac{\tau - \varphi'}{\kappa \sin \varphi}$ dir.

- iv) $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir silüet-geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} = -1, \\ \mathcal{H} = \tau/\kappa = c(sbt.) \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

- v) $\alpha(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir silüet-asimptotik eğri olamaz. Çünkü gerekli işlemler yapıldığında kolayca görülebilir ki $\frac{\kappa}{\tau} = 0$ dır. Bu da $\kappa = 0$ anlamına gelir. $\kappa = 0$ ise $\alpha(s)$ bir doğru olacağından $\tau = 0$ olmalıdır. Bu da tanımsızlık verir.

Birim hızlı eğriler işlemler açısından kolay olmasına rağmen, pratik uygulamalarda genellikle birim hızlı olmayan eğriler kullanılmaktadır. Ayrıca kolayca gösterilebilir ki birim hızlı olmayan isophote eğrilerin eksenini de birim hızlı durumdaki ile aynıdır. Dolayısıyla, $\gamma(r)$ birim hızlı olmayan bir eğri ise, γ yı bir isophote eğri olarak içerek bir yüzey ailesinin karakterizasyonunu şu şekilde verebiliriz:

$$\overline{P}(r, t) = \gamma(r) + (\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t), \lambda_3(s, t)) \begin{pmatrix} \overline{T}(s) \\ \overline{N}(s) \\ \overline{B}(s) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Eğer $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonları sadece t parametresine bağlı ise yüzey ailesi şu şekilde tekrar verilebilir:

$$\overline{P}(r, t) = \gamma(r) + (\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), \Lambda_3(t)) \begin{pmatrix} \overline{T}(s) \\ \overline{N}(s) \\ \overline{B}(s) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

3.1 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Isophote Eğriye Sahip Yüzey Aileleri

Tezin bu bölümünde, 3-boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisinin bir yüzey üzerinde isophote eğri olma şartını $\{N, C, W\}$ çatısına göre karakterize edeceğiz. Öncelikle isophote eğrinin eksenini $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı olarak elde edelim.

Bölüm 2.4 de bir isophote eğrinin u eksenini Frenet çatısı cinsinden

$$u = \pm \cos \psi \sin \theta T + (\mp \sin \psi \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) N \\ + (\pm \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) B$$

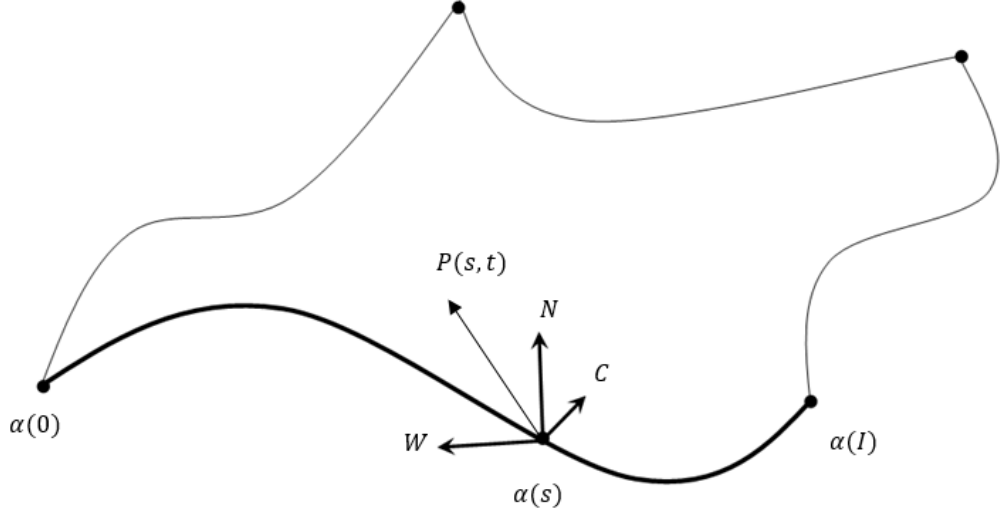
şeklinde vermiştik. Bir $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı ile $\{N, C, W\}$ çatısı arasındaki geçişi kullanarak, eksenini $\{N, C, W\}$ çatısı bakımından şu şekilde elde ederiz:

$$u = (\mp \sin \psi \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) N \\ + (\mp \cos \psi \sin \theta \frac{\kappa}{f} \pm \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \frac{\tau}{f} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\tau}{f}) C \\ + (\pm \cos \psi \sin \theta \frac{\tau}{f} \pm \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \frac{\kappa}{f} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\kappa}{f}) W. \quad (3.12)$$

Şimdi, bir $\alpha(s)$ eğrisini izoparametrik ve isophote eğri olarak içeren bir parametrik yüzey ailesini $\{N, C, W\}$ çatısı bakımından elde edelim. $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde bulunan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi ve eğrinin $\{N, C, W\}$ çatısı kullanılarak $P(s, t)$ yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir (Şekil 3.2):

$$P(s, t) = \alpha(s) + (\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t), \lambda_3(s, t)) \begin{pmatrix} N(s) \\ C(s) \\ W(s) \end{pmatrix}; \quad 0 \leq s \leq I, \quad 0 \leq t \leq J. \quad (3.13)$$

Bu denklemde $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonları C^1 sınıftan fonksiyonlardır.



Şekil 3.2 $\alpha(s)$ eğrisi ve $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı olarak üretilen $P(s, t)$ yüzeyi

İlk olarak $\alpha(s)$ eğrisi bu yüzey üzerinde bir izoparametrik eğri olacağından bir $t_0 \in [0, J]$ parametresi için $P(s, t_0) = \alpha(s)$, yani

$$\begin{aligned} \lambda_1(s, t_0) &= \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0, \\ 0 &\leq s \leq I, \end{aligned} \quad (3.14)$$

olmalıdır.

Diğer taraftan, $\alpha(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olacağından eğri

boyunca yüzey normalleri $n(s, t_0)$ sabit bir u eksenine ile sabit bir θ açısı yapar. O halde eğri boyunca yüzey normalini hesaplayalım. Yüzey normalini hesaplamak için yüzey denkleminin s ve t parametrelerine göre kısmi türevlerini vektörel çarpmalıyız, yani

$$n(s, t) = \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial P(s, t)}{\partial t}.$$

$\{N, C, W\}$ çatısının türev formüllerini kullanarak ve $T(s) = \frac{\tau(s)W(s) - \kappa(s)C(s)}{f(s)}$ yazarak, P yüzeyinin kısmi türevlerini şu şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} = & \left(-\lambda_2(s, t)f(s) + \frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial s} \right) N(s) \\ & + \left(\frac{-\kappa(s)}{f(s)} + \lambda_1(s, t)f(s) + (\lambda_2(s, t) - \lambda_3(s, t))g(s) + \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial s} \right) C(s) \\ & + \left(\frac{\tau(s)}{f(s)} + \frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial s} \right) W(s) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial t} N(s) + \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial t} C(s) + \frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial t} W(s).$$

Dolayısıyla yüzey normali

$$\begin{aligned} n(s, t) = & \left[\frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial t} \left(\frac{-\kappa(s)}{f(s)} + \lambda_1(s, t)f(s) + (\lambda_2(s, t) - \lambda_3(s, t))g(s) + \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial s} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial t} \left(\frac{\tau(s)}{f(s)} + \frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial s} \right) \right] N(s) \\ & + \left[\frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial s} \left(\frac{\tau(s)}{f(s)} + \frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial s} \right) - \frac{\partial \lambda_3(s, t)}{\partial t} \left(-\lambda_2(s, t)f(s) + \frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial s} \right) \right] C(s) \\ & + \left[-\frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial t} \left(\frac{-\kappa(s)}{f(s)} + \lambda_1(s, t)f(s) + (\lambda_2(s, t) - \lambda_3(s, t))g(s) + \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial s} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \lambda_2(s, t)}{\partial t} \left(-\lambda_2(s, t)f(s) + \frac{\partial \lambda_1(s, t)}{\partial s} \right) \right] W(s). \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. α eğrisi boyunca yüzey normalleri ise $t = t_0$ alınarak ve (3.14) denklemi kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$n(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)N(s) + \phi_2(s, t_0)C(s) + \phi_3(s, t_0)W(s). \quad (3.15)$$

Burada katsayı fonksiyonları

$$\begin{aligned}\phi_1(s, t_0) &= -\frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} \frac{\kappa(s)}{f(s)} - \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} \frac{\tau(s)}{f(s)}, \\ \phi_2(s, t_0) &= \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t} \frac{\tau(s)}{f(s)}, \\ \phi_3(s, t_0) &= \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t} \frac{\kappa(s)}{f(s)}.\end{aligned}$$

şeklinde dir. Dolayısıyla isophote şartı

$$\begin{aligned}\langle n(s, t_0), u \rangle &= (\mp \sin \psi \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \phi_1(s, t_0) \\ &+ (\mp \cos \psi \sin \theta \frac{\kappa}{f} \pm \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \frac{\tau}{f} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\tau}{f}) \phi_2(s, t_0) \\ &+ (\pm \cos \psi \sin \theta \frac{\tau}{f} \pm \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \frac{\kappa}{f} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\kappa}{f}) \phi_3(s, t_0) = \cos \theta.\end{aligned}$$

şeklinde bulunur, burada φ açısı eğri boyunca yüzey normali ile eğrinin binormal vektörü arasındaki açıdır ve $\psi = \arccos(\frac{\tau - \varphi'}{\sqrt{(\kappa \sin \varphi)^2 + (\tau - \varphi')^2}})$ dir. Ayrıca eğrinin yüzey üzerinde bir isophote eğri olması için, φ açısı ile θ açısı arasında eğrinin Frenet eğrilikleri bakımından aşağıdaki bağıntı sağlanmalıdır.

$$\cot \theta = \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi (1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi (1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt. \quad (3.16)$$

Burada $\mathcal{H} = \frac{\tau - \varphi'}{\kappa \sin \varphi}$ dir.

Sonuç olarak yukarıda verilen denklemler yardımıyla aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.1.1 Regüler bir $P(s, t)$ yüzeyi ve bu yüzey üzerinde s yay parametresi ile parametrelendirilmiş $\{N, C, W\}$ çatısı bakımından bir $\alpha(s) : [0, I] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ele alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik ve isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}\lambda_1(s, t_0) &= \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0, \\ \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t} &= \cos \varphi, \\ -\frac{\kappa}{f} \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\tau}{f} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} &= \sin \varphi, \\ \cot \theta &= \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi (1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi (1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.\end{aligned}$$

Burada κ ve τ , α eğrisinin Frenet çatısı bakımından eğrilikleri, f ise $\{N, C, W\}$ çatısına göre 1. eğriligidir. Ayrıca $0 \leq s \leq I$ ve $0 \leq t \leq J$ dir.

Uygulamalarda kolaylık sağlama amacıyla $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonlarını iki çarpana ayıralım:

$$\begin{aligned}\lambda_1(s, t) &= l(s)\Lambda_1(t) \\ \lambda_2(s, t) &= m(s)\Lambda_2(t) \\ \lambda_3(s, t) &= n(s)\Lambda_3(t).\end{aligned}$$

Burada $l(s)$, $m(s)$, $n(s)$, $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ ve $\Lambda_3(t)$ fonksiyonları C^1 sınıfından fonksiyonlardır. Bu şartlar altında aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.1.1 $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde yatan doğru olmayan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin bir izoparametrik ve isophote eğri olması için gerek yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}\Lambda_1(t_0) &= \Lambda_2(t_0) = \Lambda_3(t_0), \\ l(s)\Lambda_1'(t_0) &= \cos \varphi, \\ -\frac{\tau(s)}{f(s)}m(s)\Lambda_2'(t_0) - \frac{\kappa(s)}{f(s)}n(s)\Lambda_3'(t_0) &= \sin \varphi, \\ \cot \theta &= \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \cos \varphi(1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \sin \varphi(1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.\end{aligned}$$

3.2 3-boyutlu Öklid Uzayında Ortak Bir Isophote Eğriden Geçen Yüzey Örnekleri

Bu bölümde yukarıda verilen teorem ve sonuçlara uygulama oluşturacak örnekler verilecektir.

Örnek 3.2.1 $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, -3, 0)$, $P_2 = (3, 1, 0)$ ve $P_3 = (4, -3, 0)$ noktaları tarafından kontrol edilen kübik bir $\gamma(r)$ Bézier eğrisini düşünelim. γ eğrisini şu

şekilde ifade edebiliriz:

$$\gamma(r) = P_0 Z_0(r) + P_1 Z_1(r) + P_2 Z_2(r) + P_3 Z_3(r); \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Burada $Z_0(r) = (1 - r)^3$, $Z_1(r) = 3r(1 - r)^2$, $Z_2(r) = 3r^2(1 - r)$ ve $Z_3(r) = r^3$ fonksiyonları harmanlama (blending) fonksiyonları olarak adlandırılır.

Basit bir hesaplamayla eğrinin Frenet çatısı şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{cases} \overline{T}(r) = \frac{(1 + 2r - 2r^2, -3 + 14r - 15r^2, 0)}{\sqrt{10 - 80r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}}, \\ \overline{N}(r) = \frac{(3 - 14r + 15r^2, 1 + 2r - 2r^2, 0)}{\sqrt{10 - 80r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}}, \\ \overline{B}(r) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

Buradan, Sonuç 3.3'deki parametreleri $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 3$, $\eta_3 = -2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = -4$, $\epsilon_2 = -1$, $\epsilon_3 = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ve $t_0 = 0.5$ şeklinde alarak bu eğriyi isophote eğri olarak içeren yüzey ailesinin bir üyesini aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned} \overline{P}_1(r, t) = & \left(-2r^3 + 3r^2 + 3r \right. \\ & + (1.5 - 5.5t + 6t^2 - 2t^3) \left(\frac{-2r^2 + 2r + 1}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right) \\ & + \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{4} + t \left(\frac{\sqrt{2} - 12}{2} \right) + 9t^2 - 4t^3 \right) \left(\frac{15r^2 + 14r - 3}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right), \\ & -15r^3 + 21r^2 - 9r \\ & + (1.5 - 5.5t + 6t^2 - 2t^3) \left(\frac{-15r^2 + 14r - 3}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right) \\ & + \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{2} - 12}{2} \right) t + 9t^2 - 4t^3 \right) \left(\frac{-2r^2 + 2r + 1}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right), \\ & \left. \left(-\frac{2 + \sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{2} + 5}{2} \right) t - 4t^2 + 2t^3 \right) \right). \end{aligned}$$

Ayrıca kolayca görülebilir ki $\theta = \frac{\pi}{4}$ tür. $\overline{P}_1$ yüzeyi şekil 3.3'de gösterilmiştir. Diğer

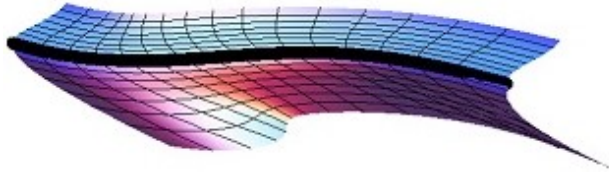
yandan parametreleri

$$\eta_1 = 0.001254, \eta_2 = -0.1523, \eta_3 = -0.00005021, \nu_2 = -0.050452, \nu_3 = 0.14253, \\ \epsilon_2 = 0.7012, \epsilon_3 = -0.0124, \varphi = \frac{\pi}{4}, t_0 = 0.5$$

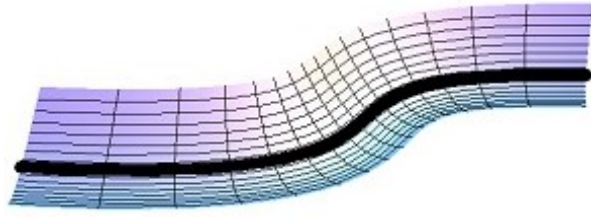
şeklinde seçerek yüzey ailesinin diğer bir üyesini şu şekilde buluruz:

$$\begin{aligned} \overline{P}_2(r, t) = & \left(-2r^3 + 3r^2 + 3r \right. \\ & + (a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3) \left(\frac{-2r^2 + 2r + 1}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right) \\ & + (b_1 + b_2t + b_3t^2 + b_4t^3) \left(\frac{15r^2 + 14r - 3}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right), \\ & -15r^3 + 21r^2 - 9r \\ & + (a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3) \left(\frac{-15r^2 + 14r - 3}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right) \\ & + (b_1 + b_2t + b_3t^2 + b_4t^3) \left(\frac{-2r^2 + 2r + 1}{\sqrt{10 - 8r + 286r^2 - 428r^3 + 229r^4}} \right), \\ & \left. c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 \right). \end{aligned}$$

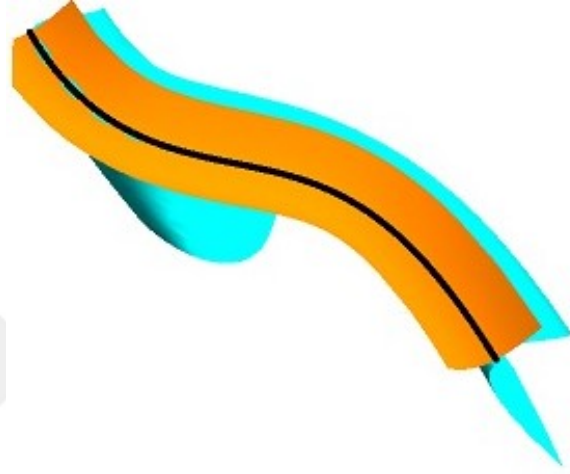
Burada katsayılar $a_1 = -0.0386957$, $a_2 = 0.153516$, $a_3 = -0.152225$, $a_4 = -0.00005021$, $b_1 = -0.0304292 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_2 = 0.157349 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_3 = -0.264247$, $b_4 = 0.14253$, $c_1 = 0.17685 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_2 = -0.7105 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_3 = 0.7198$ ve $c_4 = -0.0124$ şeklindedir. $\overline{P}_2$ yüzeyi ise şekil 3.4'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3 $\overline{P}_1(r, t)$ yüzeyi ve $\gamma(r)$ isophote eğrisi



Şekil 3.4 $\bar{P}_2(r, t)$ yüzeyi ve $\gamma(r)$ isophote eğrisi



Şekil 3.5 $\bar{P}_1(r, t)$ ve $\bar{P}_2(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\gamma(r)$ isophote eğrisi

Örnek 3.2.2 $\alpha(s) = \left(\frac{3}{4} \sin s - \frac{1}{12} \sin 3s, -\frac{3}{4} \cos s + \frac{1}{12} \cos 3s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)$ denkleminde verilen birim hızlı bir slant helisi ele alalım. α eğrisinin Frenet çatısı şu şekilde hesaplanır:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \left(\frac{1}{4}(3 \cos s - \cos 3s), \frac{1}{4}(3 \sin s - \sin 3s), \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right), \\ N(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2s, -\frac{1}{2} \right), \\ B(s) = \left(\frac{1}{4}(-3 \sin s - \sin 3s), \cos^3 s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right), \\ \kappa(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \\ \tau(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \end{array} \right.$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ alalım. Bu durumda $\theta = \arctan(\frac{4}{3})$ şeklinde elde edilir. O halde α eğrisi elde edilen yüzey üzerinde aynı zamanda bir geodezik eğri olacaktır. Dolayısıyla bu eğriyi **isophote-geodezik** olarak adlandırabiliriz. Ayrıca

$$\lambda_1(s, t) = t, \quad \lambda_2(s, t) = t^2, \quad \lambda_3(s, t) = \sin t, \quad t_0 = 0$$

seçerek α eğrisini bir isophote-geodezik eğri olarak içeren yüzey ailesinin bir üyesini şu şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned} P_3(s, t) = & \left(\frac{3}{4} \sin s - \frac{1}{12} \sin 3s + \frac{t}{4} (3 \cos s - \cos 3s) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \cos 2s \right. \\ & + \frac{t^2}{4} (-3 \sin s - \sin 3s), -\frac{3}{4} \cos s + \frac{1}{12} \cos 3s + \frac{t}{4} (3 \sin s - \sin 3s) \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \sin 2s + t^2 \cos^3 s, \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin s + t \cos s + t^2 \sin s) - \frac{\sin t}{2} \right). \end{aligned}$$

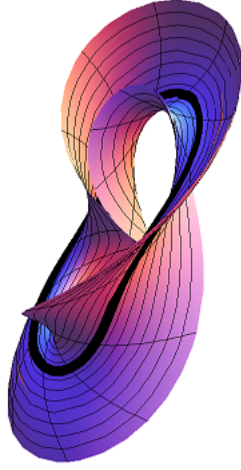
$P_3(s, t)$ yüzeyi şekil 3.6'da görülmektedir. Benzer şekilde

$$\lambda_1(s, t) = \sin t, \quad \lambda_2(s, t) = \sin^2 t, \quad \lambda_3(s, t) = -t, \quad t_0 = 0$$

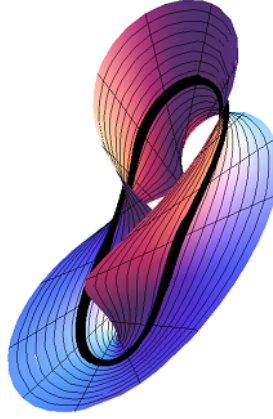
seçersek yüzey ailesinin α eğrisini isophote-geodezik eğri olarak içeren diğer bir üyesini ise şu şekilde buluruz:

$$\begin{aligned} P_4(s, t) = & \left(\frac{3}{4} \sin s - \frac{1}{12} \sin 3s + \frac{\sin t}{4} (3 \cos s - \cos 3s) + \frac{3\sqrt{3}}{8} t \cos 2s \right. \\ & + \frac{\sin(\frac{3t}{4})}{4} (3 \sin s + \sin 3s), -\frac{3}{4} \cos s + \frac{1}{12} \cos 3s + \frac{\sin t}{4} (3 \sin s - \sin 3s) \\ & \left. + \frac{3\sqrt{3}}{8} t \sin 2s - \sin(\frac{3t}{4}) \cos^3 s, \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin s (1 - \sin(\frac{3t}{4})) + \sin t \cos s) - \frac{t}{8} \right). \end{aligned}$$

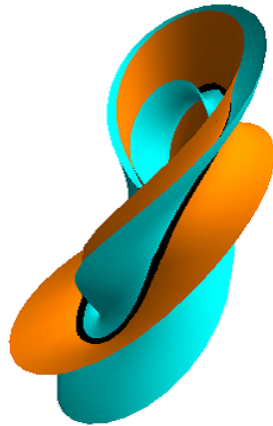
$P_4(s, t)$ yüzeyi ise şekil 3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.6 $P_3(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi



Şekil 3.7 $P_4(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi



Şekil 3.8 $P_3(s, t)$ ve $P_4(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi

Örnek 3.2.3 Bölüm 2.3 de bir eğrinin Pisagor-Hodograf eğri (PH eğri) olma şartını vermiştik. Bu örnekte öncelikle bir $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ PH eğrisi elde edeceğiz ve sonra bu PH eğrisinin isophote eğri olarak içerildiği yüzeyler oluşturacağız.

$U(r) = (1 - r) + 2r$, $V(r) = r$, $P(r) = (1 - r)$ ve $Q(r) = -(1 - r) + r$ alalım. Dolayısıyla Teorem 2.3.1 den

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= -(1 - r)^2 + 3 \cdot 2(1 - r)r + 4r^2, \\ \beta'_2 &= -2(1 - r)^2 + 0 \cdot 2(1 - r)r + 2r^2, \\ \beta'_3 &= -2(1 - r)^2 - 3 \cdot 2(1 - r)r + 2r^2, \\ \sigma &= 3(1 - r)^2 + 1 \cdot 2(1 - r)r + 6r^2\end{aligned}$$

olarak elde edilir. İntegrasyon sabiti $(a_0, b_0, c_0) = (1, 1, 1)$ olmak üzere yukarıdaki denklemlerden integral alarak $\beta(r)$ PH eğrisinin diğer kontrol noktalarını şu şekilde elde ederiz:

$$(a_1, b_1, c_1) = \frac{(2, 1, 1)}{3}, \quad (a_2, b_2, c_2) = \frac{(5, 1, -2)}{3}, \quad (a_3, b_3, c_3) = \frac{(9, 5, 0)}{3}.$$

Dolayısıyla β eğrisinin Frenet çatısı şu şekildedir:

$$\begin{cases} \overline{T}(r) = \frac{(-1 + 8r - 3r^2, -2 + 4r + 2r^2, -2 - 2r + 6r^2)}{3 - 4r + 7r^2}, \\ \overline{N}(r) = \overline{B}(r) \times \overline{T}(r), \\ \overline{B}(r) = \frac{(2, -3, 2)}{\sqrt{17}}. \end{cases}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ seçelim. Bu durumda $\theta = \frac{\pi}{2}$ olur. Dolayısıyla β eğrisi elde edilen yüzey üzerinde aynı zamanda bir geodezik eğri olacaktır. Bu eğriyi **silüet-geodezik eğri** olarak adlandıracacağız. Ayrıca

$$\lambda_1(r, t) = t, \quad \lambda_2(r, t) = \sin^2 t, \quad \lambda_3(r, t) = -t, \quad t_0 = 0$$

olarak β eğrisini içeren yüzey ailesinin bir üyesi şu şekildedir:

$$\overline{P}_5(r, t) = \beta(r) + t\overline{T}(r) + \sin^2 t\overline{N}(r) - t\overline{B}(r).$$

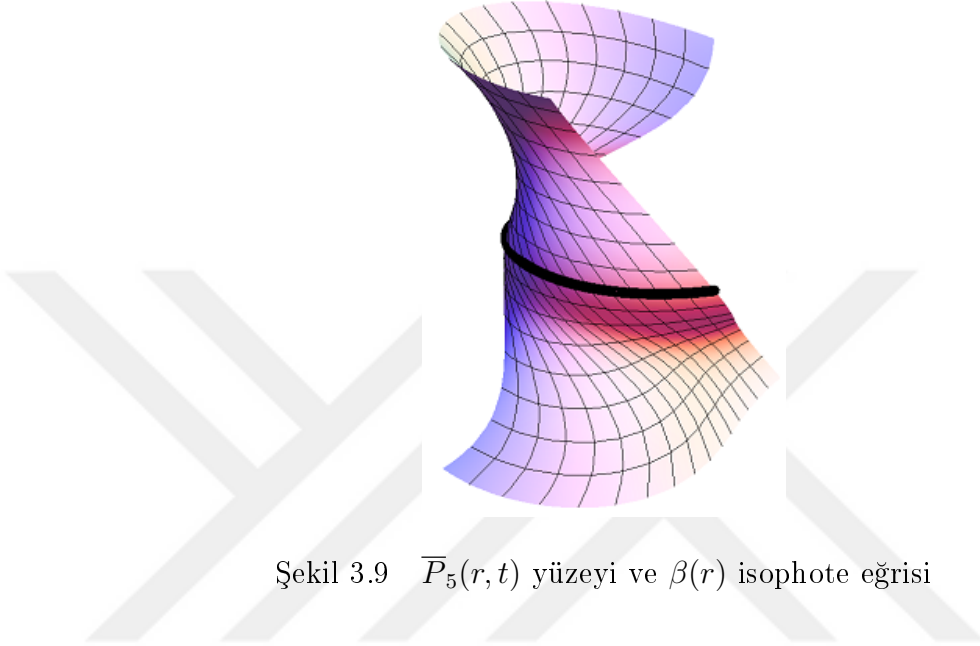
Bu yüzey şekil 3.9'da görülmektedir. Benzer şekilde

$$\lambda_1(s, t) = t^2, \quad \lambda_2(s, t) = t^2, \quad \lambda_3(s, t) = -\sin t, \quad t_0 = 0$$

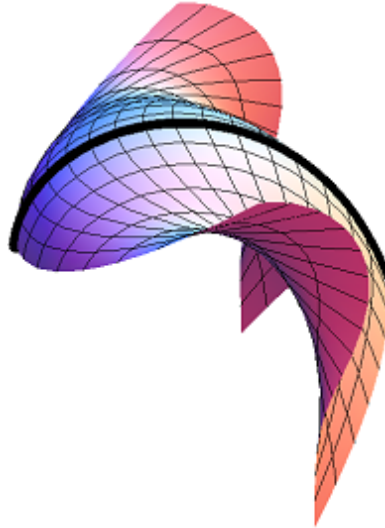
alınarak β eğrisini silüet-geodezik olarak içeren yüzey ailesinin bir diğer üyesi

$$\bar{P}_6(r, t) = \beta(r) + t^2\bar{T}(r) + t^2\bar{N}(r) - \sin t\bar{B}(r).$$

şeklindedir. $\bar{P}_6$ yüzeyi ise şekil 3.10'da gösterilmiştir.



Şekil 3.9 $\bar{P}_5(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ isophote eğrisi



Şekil 3.10 $\bar{P}_6(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ isophote eğrisi



Şekil 3.11 $\overline{P}_5(r, t)$ ve $\overline{P}_6(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(r)$ isophote eğrisi

Örnek 3.2.4 Birim hızlı $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ eğrisini ele alalım. Kolayca elde edilebilir ki α eğrisinin Frenet çatısı ve bu çatı bakımından eğrilikleri şu şekildedir:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = (-\sin s, \cos s, 0), \\ N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0), \\ B(s) = (0, 0, 1), \\ \kappa(s) = 1, \\ \tau(s) = 0. \end{array} \right.$$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ seçelim. Dolayısıyla $\theta = \frac{\pi}{4}$ olarak bulunur. Son olarak

$$u(s, t) \equiv 0, \quad v(s, t) = \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), \quad w(s, t) = \sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), \quad t_0 = 0$$

olarak α eğrisini isophote eğri olarak içeren yüzey ailesinin bir üyesini şu şekilde elde ederiz:

$$P_7(s, t) = \left(\cos s \left(1 - \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right), \sin s \left(1 - \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right), \sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}t\right) \right)$$

Bu yüzeyin şekli şekil 3.12’de verilmiştir.

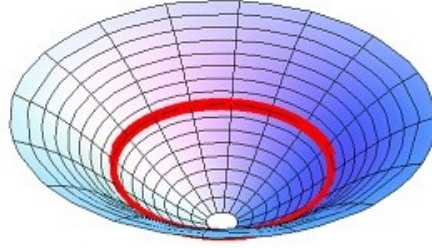
Diğer yandan

$$u(s, t) = t, \quad v(s, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad w(s, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad t_0 = 0$$

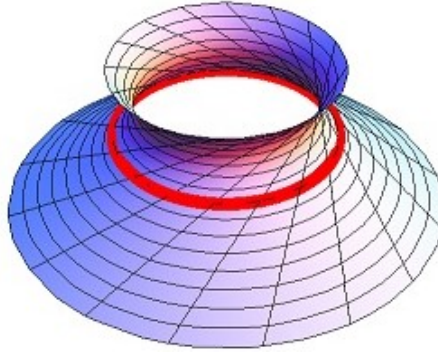
seçerek α eğrisini bir isophote eğri olarak içeren yüzey ailesinin bir diğer üyesi

$$P_8(s, t) = \left(\cos s \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - t \sin s, \sin s \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + t \cos s, -\frac{\sqrt{2}}{2}t \right),$$

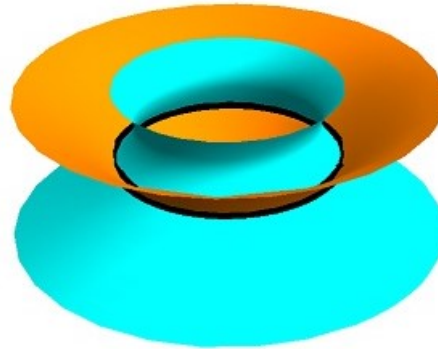
şeklinde elde edilir. $P_8(s, t)$ yüzeyi de şekil 3.13'de gösterilmiştir.



Şekil 3.12 $P_7(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi



Şekil 3.13 $P_8(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi



Şekil 3.14 $P_7(s, t)$ ve $P_8(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi

Örnek 3.2.5 Birim hızlı $\alpha(s) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \sin s, s, \sqrt{3} \cos s)$ helis eğrisini düşünelim. Bu eğrinin Frenet çatısı şu şekildedir:

$$\begin{cases} T(s) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \cos s, 1, -\sqrt{3} \sin s), \\ N(s) = (-\sin s, 0, -\cos s), \\ B(s) = \frac{1}{2}(-\cos s, \sqrt{3}, \sin s), \end{cases}$$

$\varphi = 0$ olsun. Dolayısıyla $\theta = \frac{\pi}{6}$ olarak bulunur. Bu durumda α eğrisi yüzey üzerinde hem asimptotik hem de isophote eğri olacaktır.

$$\lambda_1(s, t) = t, \quad \lambda_2(s, t) = \sin t, \quad \lambda_3(s, t) = t^2, \quad t_0 = 0$$

seçerek α eğrisini **isophote-asimptotik** olarak içeren yüzey ailesinin bir üyesini şu şekilde elde ederiz:

$$P_9(s, t) = \left(\sin s \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t \right) + \frac{t \cos s}{2} (\sqrt{3} - t), \frac{1}{2}(s + t + t^2 \sqrt{3}), \right. \\ \left. \cos s \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t \right) + \frac{t \sin s}{2} (-\sqrt{3} + t) \right)$$

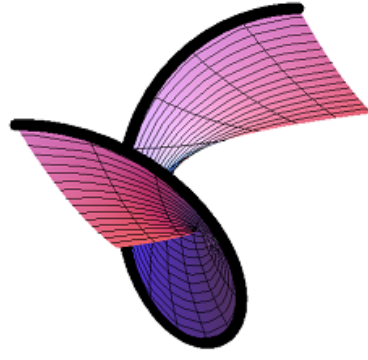
Benzer şekilde $\varphi = \frac{\pi}{2}$ alalım. Bu durumda $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir. Ayrıca

$$\lambda_1(s, t) = t, \quad \lambda_2(s, t) = t^3, \quad \lambda_3(s, t) = -t, \quad t_0 = 0$$

seçerek α eğrisini bir **silüet-geodezik** olarak içeren yüzey ailesinin bir üyesini de şu şekilde buluruz:

$$P_{10}(s, t) = \left(\sin s \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - t^3 \right) + \frac{t \cos s}{2} (\sqrt{3} + 1), \frac{1}{2}(s + t - t\sqrt{3}), \right. \\ \left. \cos s \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - t^3 \right) + \frac{t \sin s}{2} (-\sqrt{3} - 1) \right)$$

$P_9(s, t)$ ve $P_{10}(s, t)$ yüzeyleri şekil 3.15-3.16'da gösterilmiştir.



Şekil 3.15 $P_9(s, t)$ yüzeyi ve isophote-asimptotik $\alpha(s)$ eğrisi



Şekil 3.16 $P_{10}(s, t)$ yüzeyi ve silüet-geodezik $\alpha(s)$ eğrisi



Şekil 3.17 $P_9(s, t)$ ve $P_{10}(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi

Örnek 3.2.6

$$\begin{aligned} a_1(s) &= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2\sqrt{2}} \sin((\sqrt{2}-1)s) - \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}} \sin((\sqrt{2}+1)s) \\ a_2(s) &= -\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2\sqrt{2}} \cos((\sqrt{2}-1)s) + \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}} \cos((\sqrt{2}+1)s) \\ a_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \end{aligned}$$

olmak üzere birim hızlı $\alpha(s) = (a_1(s), a_2(s), a_3(s))$ eğrisini ele alalım. $\alpha(s)$ eğrisi sabit presesyonlu (devinimli) bir eğridir ve bu eğrinin $\{N, C, W\}$ çatısı şu şekilde elde edilir:

$$\begin{cases} N(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \sqrt{2}s, \sin \sqrt{2}s, -1), \\ C(s) = (-\sin \sqrt{2}s, \cos \sqrt{2}s, 0), \\ W(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \sqrt{2}s, \sin \sqrt{2}s, 1), \\ f(s) = 1, \quad g = -1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Ayrıca α eğrisinin Frenet çatısı bakımından eğrilikleri $\kappa = \sin s$ ve $\tau = \cos s$ şeklindedir.

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_1(s, t) = \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), \quad \lambda_2(s, t) = -\frac{\sin s \sin t}{4}, \quad \lambda_3(s, t) = -\frac{\cos s \ln(1+t)}{4}$$

seçerek ve $t_0 = 0$ alarak α eğrisini bir isophote eğri olarak barındıran yüzey ailesinin bir üyesi $\{N, C, W\}$ çatısı yardımıyla şu şekilde ifade edilir:

$$P_{11}(s, t) = \alpha(s) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)N(s) - \frac{\sin s \sin t}{4}C(s) - \frac{\cos s \ln(1+t)}{4}W(s).$$

Ayrıca $\theta = -\frac{\pi}{4}$ olarak bulunur. Bu yüzey şekil 3.18'da gösterilmiştir.

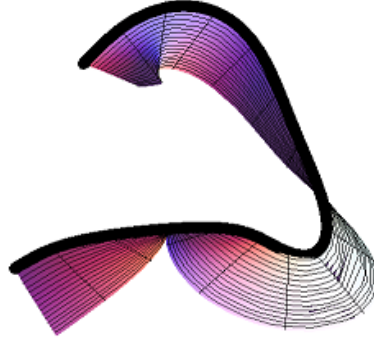
Diğer taraftan,

$$\varphi = 0, \quad \lambda_1(s, t) = \sin t, \quad \lambda_2(s, t) = t^2, \quad \lambda_3(s, t) = t^2, \quad t_0 = 0$$

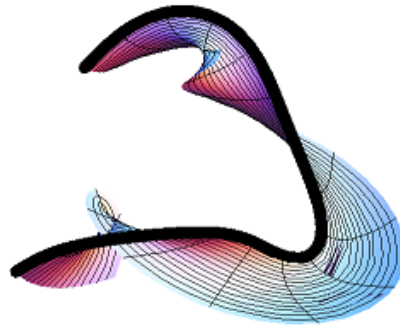
seçersek $\alpha(s)$ eğrisini bir isophote eğri olarak içeren yüzey ailesinin diğer bir üyesini de şu şekilde elde ederiz:

$$P_{12}(s, t) = \alpha(s) + \sin t N(s) + t^2 C(s) + t^2 W(s).$$

P_{12} yüzeyi de şekil 3.19’de gösterilmiştir.



Şekil 3.18 $P_{11}(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi



Şekil 3.19 $P_{12}(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ isophote eğrisi



Şekil 3.20 $P_{11}(s, t)$ ve $P_{12}(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ isophote eğrisi

3.3 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Geodezik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri

Tezin bu bölümünde, bir eğrinin bir yüzey üzerinde izoparametrik ve aynı zamanda bir geodezik eğri (Kısaca izogeodezik diyeceğiz.) olma şartını $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı olarak elde edeceğiz. $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde bulunan $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı birim hızlı bir eğri olsun. Dolayısıyla $P(s, t)$ yüzeyini yine (3.13) denklemi ile ifade edebiliriz. Ayrıca eğrinin yüzey üzerinde izoparametrik olma şartını (3.14) denkleminde, eğri boyunca yüzey normalini de (3.15) denkleminde vermiştik. Şimdi α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olma şartını $\{N, C, W\}$ çatısına göre elde edelim. Öncelikle geodezik şartından dolayı eğri boyunca yüzey normalleri ile eğrinin asli normal vektörleri paralel olmalıdır. Bu da

$$\phi_2(s, t_0) = \phi_3(s, t_0) = 0, \quad \phi_1(s, t_0) \neq 0 \quad (3.18)$$

olması anlamına gelmektedir.

Dolayısıyla (3.14), (3.15) ve (3.18) denklemlerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.3.1 $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde $\{N, C, W\}$ çatısına sahip bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir izogeodezik olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$$\lambda_1(s, t_0) = \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0, \\ \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t} = 0, \quad -\frac{\kappa}{f} \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\tau}{f} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} \neq 0(sbt.)$$

Burada κ ve τ eğrinin Frenet çatısı bakımından eğrilikleri, f ise eğrinin $\{N, C, W\}$ alternatif çatısı bakımından 1. eğriligidir.

Şimdi verilen bir geodezik eğriden geçen açılabilir yüzeylerin parametrik gösterimini $\{N, C, W\}$ çatısı bakımından elde edeceğiz.

Birim hızlı $\alpha = \alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisini ele alalım. α nın $\{N, C, W\}$ çatısını kullanarak, bu eğriden geçen bir $P(s, t)$ yüzeyini (3.13) denklemi ile karakterize etmiştik. Amacımız (3.13) ile karakterize ettiğimiz bu yüzeyin α eğrisini bir izo-geodezik olarak içeren bir açılabilir yüzey olma şartını elde etmektir. İlk olarak, α eğrisi P yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğri olduğundan $P(s, t_0) = \alpha(s)$ olacak şekilde bir $t_0 \in [0, J]$ parametresi vardır.

İkinci olarak, varsayalım ki $P(s, t)$ yüzeyi

$$P(s, t) = \alpha(s) + (t - t_0)D(s) \quad (3.19)$$

denklemleriyle verilen bir regle yüzey olsun. (3.13) denkleminde $t = t_0$ alarak regle yüzeyin dayanak eğrisinin $\alpha(s)$ olduğunu ve

$$(t - t_0)D(s) = (\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t), \lambda_3(s, t))(N, C, W)^t \quad (3.20)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada " t " üst simgesi traspozunu ifade eder.

Son denklemden kolayca görülebilir ki, sadece s parametresine bağlı $\Lambda_1(s)$, $\Lambda_2(s)$ ve $\Lambda_3(s)$ fonksiyonları vardır öyle ki $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonları $(t - t_0)$ ile sırasıyla $\Lambda_1(s)$, $\Lambda_2(s)$ ve $\Lambda_3(s)$ nin çarpımı şeklinde yazılabilir:

$$(\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t), \lambda_3(s, t)) = (t - t_0)(\Lambda_1(s), \Lambda_2(s), \Lambda_3(s)). \quad (3.21)$$

O halde (3.19) denklemini şu şekilde yeniden düzenleyebiliriz:

$$P(s, t) = \alpha(s) + (t - t_0) (\Lambda_1(s), \Lambda_2(s), \Lambda_3(s)) (N(s), C(s), W(s))^t \quad (3.22)$$

Üçüncü olarak, $P(s, t)$ yüzeyinin bir açılabilir yüzey olması için gerek ve yeter şartın $\det(\alpha', D, D') = 0$ eşitliğinin sağlanması olduğunu biliyoruz. Gerekli işlemler yapıldığında bu eşitliğin şu şekilde düzenlenebileceğini görürüz:

$$\frac{\Lambda_1}{f}(\tau\Lambda_2' + \kappa\Lambda_3' + g(\kappa\Lambda_2 - \tau\Lambda_3)) - \frac{\Lambda_1'}{f}(\tau\Lambda_2 + \kappa\Lambda_3) + \tau(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) + \kappa\Lambda_2\Lambda_3 = 0. \quad (3.23)$$

Son olarak α eğrisi P yüzeyi üzerinde bir geodezik olduğundan dolayı Teorem 3.3.1 den

$$\frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t} = 0, \quad -\frac{\kappa}{f} \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\tau}{f} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} = c (c \neq 0 \text{ reel sabit})$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu şartları, (3.21) denklemini kullanarak şu şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\Lambda_1(s) = 0, \quad -\frac{\kappa}{f}\Lambda_3(s) - \frac{\tau}{f}\Lambda_2(s) = c(c \neq 0 \text{ reel sabit}). \quad (3.24)$$

Bu eşitlikleri (3.23) denkleminde yerine yazarak

$$\tau\Lambda_2^2 + \kappa\Lambda_2\Lambda_3 = 0$$

olduğunu görürüz. Ayrıca (3.24) de 2. eşitliğin her iki tarafını $-f\Lambda_2$ ile çarparak ve son denklemi kullanarak $\Lambda_2(s) = 0$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla $\alpha(s)$ eğrisini bir geodezik eğri olarak içeren açılabilir yüzeyler $\{N, C, W\}$ çatısı bakımından

$$P(s, t) = \alpha(s) + (t - t_0) \frac{f(s)c}{\kappa(s)} W(s), \quad c \neq 0 \text{ reel sabit} \quad (3.25)$$

denklemi ile karakterize edilebilir.

Bu ifade, oluşturulan açılabilir yüzeyin özelliğinin verilen geodezik tarafından tamamen belirlenebildiğini göstermektedir. Şimdi özel durumlar için bu açılabilir yüzeyleri tekrar inceleyelim.

Varsayalım ki (3.25) denklemi ile verilen açılabilir yüzey bir silindir olsun. Bu durumda $D' \wedge D = 0$ dır. Basit bir hesaplama ile

$$D' \wedge D = -\frac{f^2(s)c^2}{\kappa^2(s)} g(s)N(s) = 0 \quad (3.26)$$

olduğunu görürüz. $\kappa \neq 0$ olduğundan $f \neq 0$ olup, $g = 0$ elde ederiz. Bu da $\alpha(s)$ eğrisinin ya bir düzlem eğri ya da bir genel helis olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3.1 Düzlemsel eğriler ve genel helisler silindirlere izogeodeziktir.

Polinom tipli yüzeyler mühendislik uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır (Bézier ve B-spline yüzeyler gibi). Fakat, (3.25) denklemi ile verilen açılabilir yüzeyler, $W(s)$ nin birim olmasından dolayı genellikle polinom tipli değildir. Bu problem Λ_1, Λ_2 ve Λ_3 düzgün bir şekilde seçilmesiyle çözülebilir. Ancak bu tür eğriler genellikle birim

hızlı değildir. Dolayısıyla eğriyi rastgele bir r parametresine bağlı olarak ele alalım. Eğer $\Lambda_1(r) = \Lambda_2(r) = 0$ ve $\Lambda_3(r) = \frac{c\|\alpha'(r)\|^3}{\|\alpha'(r) \wedge \alpha''(r)\|}$ seçelim. Bu durumda yüzey şu şekilde ifade edilir:

$$P(r, t) = \alpha(r) + (t - t_0) \frac{c\|\alpha'\|^3}{\|\alpha' \wedge \alpha''(r)\|} \left(\frac{\|\alpha'\|^2 \det(\alpha', \alpha'', \alpha''')\alpha' + \|\alpha' \wedge \alpha''\|^2(\alpha' \wedge \alpha'')}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \right)$$

Şimdi, yukarıda işlenen teoriye örnekler verelim.

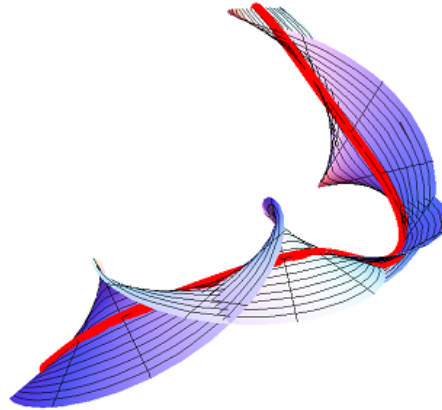
Örnek 3.3.1 Örnek 3.2.6 da verilen $\alpha(s)$ sabit presesyonlu eğriyi ele alalım. Eğrinin $\{N, C, W\}$ çatısı (3.17) denklemi ile verilmiştir. Ayrıca $\kappa(s) = \sin s$ ve $\tau(s) = \cos s$ dir. $\lambda_1(s, t) = 0$, $\lambda_2(s, t) = t \sin s$ ve $\lambda_3(s, t) = t \cos s$ alarak α eğrisini bir izogeodezik eğri olarak içeren bir yüzeyi şu şekilde elde ederiz:

$$R_1(s, t) = \alpha(s) + t \sin s C(s) + t \cos s W(s).$$

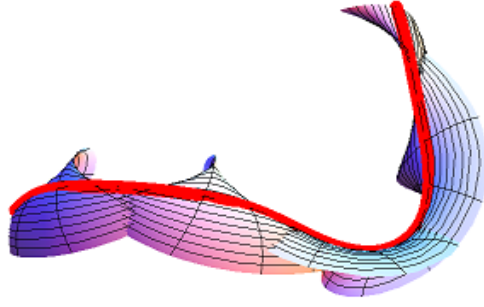
R_1 yüzeyi şekil 3.21'de gösterilmiştir. Benzer şekilde $\lambda_1(s, t) = t^2$, $\lambda_2(s, t) = \sin t \sin s$ ve $\lambda_3(s, t) = \sin t \cos s$ alınarak α eğrisini bir izogeodezik eğri olarak içeren başka bir yüzey ise şu şekilde bulunur:

$$R_2(s, t) = \alpha(s) + t^2 N(s) + \sin t \sin s C(s) + \sin t \cos s W(s).$$

R_2 yüzeyi ise şekil 3.22'de verilmiştir.



Şekil 3.21 $R_1(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ izogeodezik eğrisi



Şekil 3.22 $R_2(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ izogeodezik eğrisi



Şekil 3.23 $R_1(s, t)$ ve $R_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ izogeodezik eğrisi

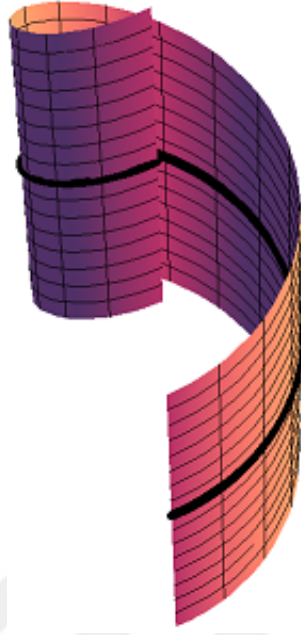
Örnek 3.3.2 $\alpha(r) = (a \cos r, a \sin r, br)$ ($a > 0, b \neq 0, 0 \leq r \leq 2\pi$) helisini ele alalım. α helisinin $\{N, C, W\}$ çatısı şu şekildedir.

$$\begin{cases} N(r) = (-\cos r, -\sin r, 0), \\ C(r) = (\sin r, -\cos r, 0), \\ W(r) = (0, 0, 1), \\ f(r) = 1, g(r) = 0. \end{cases}$$

Ayrıca $\kappa = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ve $\tau = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ dir. (3.25) denklemini kullanarak, $c = 1$ ve $t_0 = 0$ alarak α helisini bir izogeodezik olarak içeren açılabilir yüzey

$$R_3(r, t) = (a \cos r, b \sin r, br + t \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a})$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin bir silindir olduğu şekil 3.24'de görülmektedir.

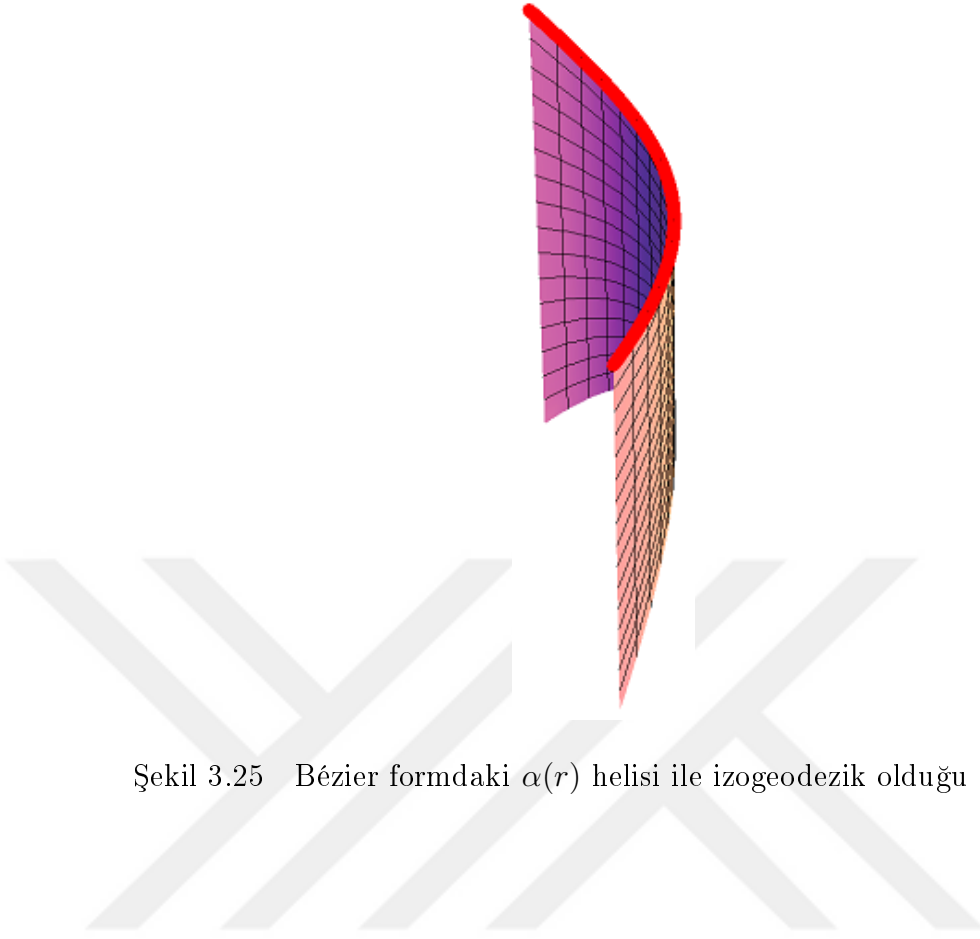


Şekil 3.24 $\alpha(r)$ helisi $R_3(r, t)$ silindrine izogeodeziktir.

Örnek 3.3.3 Helis eğrileri polinomlar tarafından ifade edilebilir. Dolayısıyla bir helisi Bézier formda olarak ifade etmek mümkündür. Kabul edelim ki Bézier formdaki bir helisin açılımı $\alpha(r) = A_0 r^3 + A_1 r^2 + A_2 r + A_3$ şeklinde olsun. Burada $A_i (i = 0, 1, 2, 3)$ katsayı vektörleridir. A_0, A_1, A_2 vektörleri birbirine dik ve $4\|A_1\|^4 = 9\|A_0\|^2\|A_2\|^2$ olduğunda kolayca görülebilir ki $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabittir, yani $\alpha(r)$ bir genel helistir. Bu şartlara uyacak şekilde

$$A_0 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), A_1 = (1, -1, -1), A_2 = (\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), A_3 = (0, 0, 0)$$

seçerek ve polinom tipli eğriler için elde ettiğimiz açılabilir yüzey denklemini kullanarak Bézier formdaki $\alpha(r)$ eğrisini bir izogeodezik olarak içeren bir silindir yüzeyi elde ederiz. Bu silindir şekil 3.25’de verilmiştir.



Şekil 3.25 Bézier formdaki $\alpha(r)$ helisi ile izogeodezik olduğu silindir

3.4 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Eğrilik Çizgisine Sahip Yüzey Aileleri

Bu bölümde, bir eğrinin bir yüzey üzerinde izoparametrik ve aynı zamanda bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şartları $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı olarak elde edeceğiz. $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde bulunan $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı birim hızlı bir eğri olsun. Dolayısıyla $P(s, t)$ yüzeyini yine (3.13) denklemi ile ifade edebiliriz. Ayrıca eğrinin yüzey üzerinde izoparametrik olma şartını (3.14) denkleminde, eğri boyunca yüzey normalini de (3.15) denkleminde vermiştik. Öncelikle eğrilik çizgisi ile ilgili şu teoremi verelim.

Teorem 3.4.1 Bir eğrinin bir yüzey üzerinde bir eğrilik çizgisi olabilmesi için gerek ve yeter şart eğri boyunca yüzey normallerinin bir açılabilir yüzey oluşturmasıdır (Willmore 1959).

$\alpha(s)$ eğrisinin normal yüzeyi

$$Q(s, t) = \alpha(s) + tn_1(s) \quad (3.27)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $n_1 = N \cos \theta + B \sin \theta$ dır. Bu ifadeyi $\{N, C, W\}$ çatısı cinsinden tekrar düzenlersek $n_1 = N \cos \theta + \frac{\tau}{f} \sin \theta C + \frac{\kappa}{f} \sin \theta W$ elde ederiz. Ayrıca açılabilir yüzey olma şartını kullanılarak $\theta = -\int_0^s \tau ds + \theta_0$ bulunur.

Şimdi α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi olma şartını $\{N, C, W\}$ çatısına göre elde edelim. α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi olabilmesi için $n_1 \parallel n(s, t_0)$ olmalıdır. α eğrisi boyunca $P(s, t)$ yüzeyinin normal vektör alanı (3.15) denklemindeki gibi olduğundan dolayı aşağıdaki teorem basitçe elde edilebilir.

Teorem 3.4.2 $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde $\{N, C, W\}$ çatısına sahip bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğri ve eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned} \lambda_1(s, t_0) &= \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0, \\ \frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t} &= \sin \theta, \quad -\frac{\kappa}{f} \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\tau}{f} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t} = \cos \theta \end{aligned}$$

Burada κ ve τ eğrinin Frenet çatısı bakımından eğrilikleri, f ise eğrinin $\{N, C, W\}$ alternatif çatısı bakımından 1. eğriliği ve $\theta = -\int_0^s \tau ds + \theta_0$ dır.

Pratik uygulamalarda kolaylık olması bakımından $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonlarını iki çarpana ayırarak

$$\begin{aligned} \lambda_1(s, t) &= l(s)\Lambda_1(t) \\ \lambda_2(s, t) &= m(s)\Lambda_2(t) \\ \lambda_3(s, t) &= n(s)\Lambda_3(t). \end{aligned}$$

alalım. Bu durumda Teorem 3.4.2 yi şu şekilde yeniden düzenleyebiliriz.

Sonuç 3.4.1 $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde $\{N, C, W\}$ çatısına sahip bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir izoparametrik

eğri ve eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}\Lambda_1(t_0) &= \Lambda_2(t_0) = \Lambda_3(t_0) = 0, \\ l(s)\Lambda'_1(t_0) &= \sin \theta, \\ -\frac{\tau(s)}{f(s)}m(s)\Lambda'_2(t_0) - \frac{\kappa(s)}{f(s)}n(s)\Lambda'_3(t_0) &= \cos \theta.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Burada κ ve τ eğrinin Frenet çatısı bakımından eğrilikleri, f ise eğrinin $\{N, C, W\}$ alternatif çatısı bakımından 1. eğriliği ve $\theta = -\int_0^s \tau ds + \theta_0$ dir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz teoriyi destekleyecek bir örnek verelim.

Örnek 3.4.1 Birim hızlı $\alpha(s) = \left(\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}s), \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}s), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right)$ helisini ele alalım. Basit bir hesaplama ile eğrinin $\{N, C, W\}$ çatısı şu şekilde elde edilir:

$$\begin{cases} N(s) = \left(-\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}s), -\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}s), 0 \right), \\ C(s) = \left(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}s), -\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}s), 0 \right), \\ W(s) = (0, 0, 1), \\ f(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g(s) = 0. \end{cases}$$

Ayrıca $\kappa = \frac{1}{2}$ ve $\tau = \frac{1}{2}$ dir. Bu durumda $\theta(s) = -\frac{s}{2} + \theta_0$ olarak elde edilir. Eğer $\theta_0 = 0$ ise, $\theta(s) = -\frac{s}{2}$ bulunur.

$$\lambda_1(s, t) = -t \sin \frac{s}{2}, \quad \lambda_2(s, t) = -\frac{\kappa}{f}t \cos \frac{s}{2}, \quad \lambda_3(s, t) = -\frac{\tau}{f}t \cos \frac{s}{2}$$

seçerek, α helisini bir eğrilik çizgisi olarak içeren bir yüzey şu şekilde elde edilir.

$$\Upsilon_1(s, t) = \alpha(s) - t \sin \frac{s}{2} N(s) - \frac{\kappa}{f}t \cos \frac{s}{2} C(s) - \frac{\tau}{f}t \cos \frac{s}{2} W(s)$$

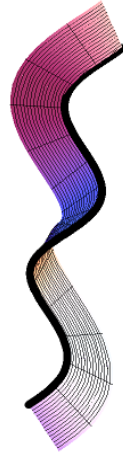
Benzer şekilde

$$\lambda_1(s, t) = -\frac{1}{2} \sin 2t \sin \frac{s}{2}, \quad \lambda_2(s, t) = -\frac{\kappa}{2f} \sin 2t \cos \frac{s}{2}, \quad \lambda_3(s, t) = -\frac{\tau}{2f} \sin 2t \cos \frac{s}{2}$$

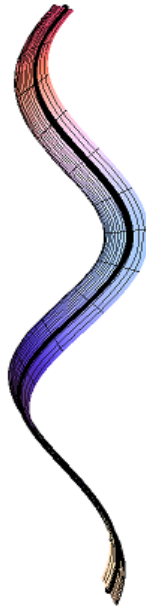
seçelim. Bu durumda ise α helisini bir eğrilik çizgisi olarak içeren bir başka yüzey ise şu şekildedir:

$$\Upsilon_2(s, t) = \alpha(s) - \frac{1}{2} \sin 2t \sin \frac{s}{2} N(s) - \frac{\kappa}{2f} \sin 2t \cos \frac{s}{2} C(s) - \frac{\tau}{2f} \sin 2t \cos \frac{s}{2} W(s).$$

Bu yüzeylerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.26 $\Upsilon_1(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ eğrilik çizgisi



Şekil 3.27 $\Upsilon_2(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ eğrilik çizgisi



Şekil 3.28 $\Upsilon_1(s, t)$ ve $\Upsilon_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ eğrilik çizgisi

3.5 $\{N, C, W\}$ Çatısına Göre Ortak Bir Asimptotik Eğriye Sahip Yüzey Aileleri

Tezin bu bölümünde bir eğriyi izoparametrik ve asimptotik eğri olarak içeren yüzeyleri $\{N, C, W\}$ çatısına göre karakterize edeceğiz. $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde bulunan $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı birim hızlı bir eğri olsun. Dolayısıyla $P(s, t)$ yüzeyini yine (3.13) denklemi ile ifade edebiliriz. Ayrıca eğrinin yüzey üzerinde izoparametrik olma şartını (3.14) denkleminde, eğri boyunca yüzey normalini de (3.15) denkleminde vermiştik. Şimdi α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri olma şartını $\{N, C, W\}$ çatısına göre verelim. Öncelikle asimptotik şartından dolayı eğri boyunca yüzey normalleri ile eğrinin binormal vektörleri paralel olmalıdır. Dolayısıyla $n(s, t_0) \parallel B$ dir. Frenet çatısı ile $\{N, C, W\}$ çatısı arasındaki geçişi kullanarak

$$n(s, t_0) \parallel \left(\frac{\kappa W + \tau C}{f} \right) \quad (3.29)$$

buluruz.

Dolayısıyla (3.13), (3.14), (3.15) ve (3.29) denklemlerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.5.1 $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde $\{N, C, W\}$ çatısına sahip bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir izoparametrik ve asimptotik eğri (izoasimptotik) olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$$\lambda_1(s, t_0) = \lambda_2(s, t_0) = \lambda_3(s, t_0) = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_1(s, t_0)}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \lambda_3(s, t_0)}{\partial t} = -\frac{\tau}{\kappa} \frac{\partial \lambda_2(s, t_0)}{\partial t}$$

Burada κ ve τ eğrinin Frenet çatısı bakımından eğrilikleridir.

Pratik uygulamalarda kolaylık olması bakımından $\lambda_1(s, t)$, $\lambda_2(s, t)$ ve $\lambda_3(s, t)$ fonksiyonlarını iki çarpana ayırarak

$$\begin{aligned} \lambda_1(s, t) &= l(s)\Lambda_1(t) \\ \lambda_2(s, t) &= m(s)\Lambda_2(t) \\ \lambda_3(s, t) &= n(s)\Lambda_3(t). \end{aligned}$$

alalım. Bu durumda Teorem 3.5.1 yi şu şekilde yeniden düzenleyebiliriz.

Sonuç 3.5.1 . $P(s, t)$ regüler bir yüzey ve $\alpha(s)$ de bu yüzey üzerinde $\{N, C, W\}$ çatısına sahip bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin P yüzeyi üzerinde bir izoasimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t_0) &= \Lambda_2(t_0) = \Lambda_3(t_0) = 0, \\ l(s)\Lambda_1'(t_0) &= 1, \\ n(s)\Lambda_1'(t_0) &= -\frac{\tau}{\kappa}m(s)\Lambda_2'(t_0). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Burada κ ve τ eğrinin Frenet çatısı bakımından eğrilikleridir.

Şimdi uygulama olarak bir örnek verelim.

Örnek 3.5.1 Birim hızlı $\alpha(s) = (\frac{2}{3}s, \frac{\sqrt{5}}{3}\sin s, \frac{\sqrt{5}}{3}\cos s)$ helisini göz önüne alalım. Eğrinin $\{N, C, W\}$ çatısı şu şekildedir:

$$N(s) = (0, -\sin s, -\cos s),$$

$$C(s) = (0, -\cos s, \sin s),$$

$$W(s) = (1, 0, 0),$$

$$f(s) = 1, \quad g(s) = 0.$$

Ayrıca $\kappa = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ve $\tau = \frac{2}{3}$ olarak bulunur.

$$\lambda_1(s, t) = t, \quad \lambda_2(s, t) = -\sqrt{5}t, \quad \lambda_3(s, t) = 2t$$

seçerek, α helisini bir asimptotik olarak içeren bir yüzey şu şekilde elde edilir.

$$\chi_1(s, t) = (\frac{2s}{3} + 2t, (\frac{\sqrt{5}}{3} - t)\sin s + \sqrt{5}t\cos s, (\frac{\sqrt{5}}{3} - t)\cos s - \sqrt{5}t\sin s)$$

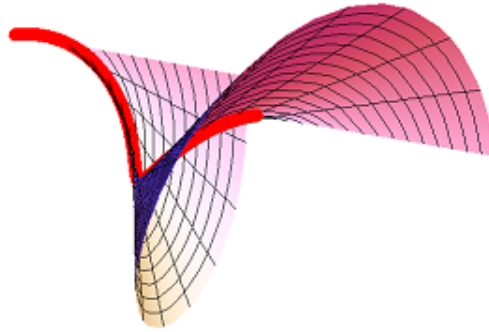
Benzer şekilde

$$\lambda_1(s, t) = \tan t, \quad \lambda_2(s, t) = -\sin \sqrt{5}t, \quad \lambda_3(s, t) = \sin 2t$$

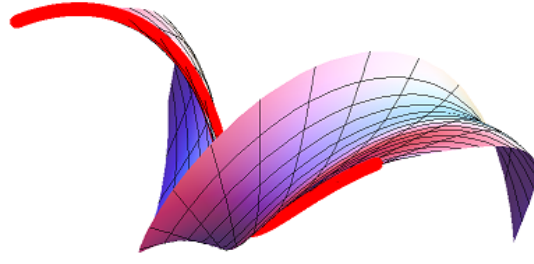
seçelim. Bu durumda ise α helisini bir asimptotik eğri olarak içeren bir başka yüzey ise şu şekildedir:

$$\chi_2(s, t) = (\frac{2s}{3} + \sin 2t, (\frac{\sqrt{5}}{3} - \tan t)\sin s + \sin \sqrt{5}t\cos s, (\frac{\sqrt{5}}{3} - \tan t)\cos s - \sin \sqrt{5}t\sin s)$$

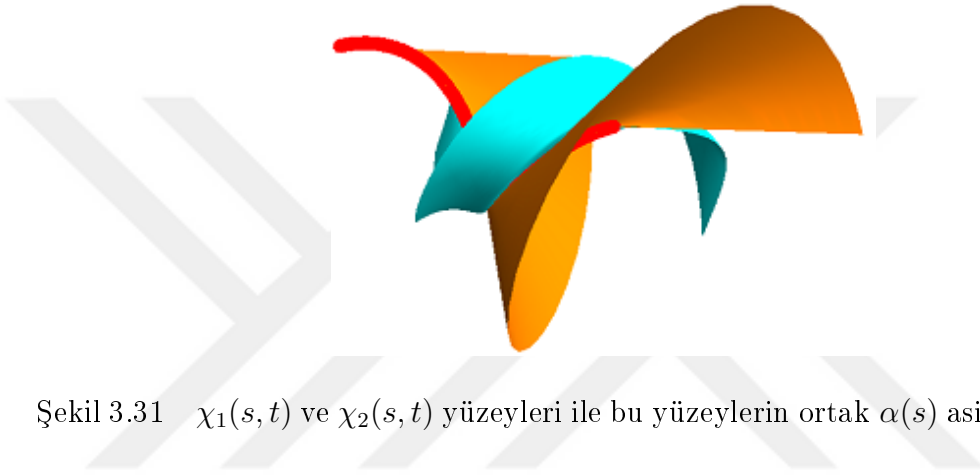
Ayrıca $\alpha(s)$ eğrisi bu yüzeyler üzerinde bir helis ve aynı zamanda asimptotik eğri olduğundan bu eğri aynı zamanda bir isophote eğridir. Bu yüzeylerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.29 $\chi_1(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ asimptotik eğrisi



Şekil 3.30 $\chi_2(s, t)$ yüzeyi ve $\alpha(s)$ asimptotik eğrisi



Şekil 3.31 $\chi_1(s, t)$ ve $\chi_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\alpha(s)$ asimptotik eğrisi

4. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA ORTAK BİR ISOPHOTE EĞRİYİ İÇEREN YÜZEYLER

Tezin bu bölümünde spacelike veya timelike isophote eğriler tarafından üretilen yüzey aileleri 3-boyutlu Minkowski uzayında incelenmiştir. Minkowski uzayında yüzeyler, normallerine bağlı olarak spacelike yüzeyler, timelike yüzeyler ve null (lightlike) yüzeyler olmak üzere üçe ayrılmaktadır. Ancak biz isophote eğrileri spacelike yüzeyler üzerinde ve timelike yüzeyler üzerinde olmak üzere iki başlık altında inceleyeceğiz.

4.1 Bir Isophote Eğri Tarafından Üretilen Spacelike Yüzeyler

$\Gamma = \Gamma(s, t)$ yüzeyi 3-boyutlu Minkowski uzayında bir spacelike yüzey olsun ve bu yüzey üzerinde yatan bir $\beta(s)$ eğrisini ele alalım. $\beta(s)$ eğrisinin bir spacelike eğri olması gerektiğini daha önce söylemiştik. Şimdi β spacelike eğrisinin $\Gamma(s, t)$ spacelike yüzeyi üzerinde izoparametrik ve aynı zamanda isophote eğri olma şartlarını inceleyeceğiz. Dolayısıyla (3.1) denkleminde olduğu gibi $\Gamma(s, t)$ yüzeyini parametrik olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\Gamma(s, t) = \beta(s) + (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}; \quad 0 \leq s \leq I, \quad 0 \leq t \leq J. \quad (4.1)$$

Öncelikle β eğrisi Γ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğri olacağından bir $t_0 \in [0, J]$ parametresi için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$x(s, t_0) = y(s, t_0) = z(s, t_0) = 0, \quad 0 \leq s \leq I. \quad (4.2)$$

Diğer yandan β eğrisi Γ yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olacağından Tanım 2.4.1 gereği β eğrisi boyunca Γ yüzeyinin yüzey normalleri sabit bir u doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapmalıdır. Dolayısıyla β eğrisi boyunca yüzey normallerini hesaplamalıyız. Bir yüzeyin herhangi bir noktadaki normali yüzey parametrelerine göre

kısmi türevlerin vektörel çarpımı olarak verilir. Yani;

$$n(s, t) = \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial t}$$

(4.1) denkleminde Γ yüzeyinin kısmi türevlerini hesaplayarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$n(s, t) = \left(1 + y(s, t)\kappa(s) + \frac{\partial x(s, t)}{\partial s}, x(s, t)\kappa(s) + z(s, t)\tau(s) + \frac{\partial y(s, t)}{\partial s}, \right. \\ \left. y(s, t)\tau(s) + \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \right) \times \begin{pmatrix} 0 & -B(s) & -N(s) \\ -B(s) & 0 & T(s) \\ N(s) & T(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Buradan β izoparametrik eğrisi boyunca yüzey normallerini $t = t_0$ olarak

$$n(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)T(s) + \phi_2(s, t_0)N(s) + \phi_3(s, t_0)B(s)$$

şeklinde elde ederiz ki burada

$$\begin{aligned} \phi_1(s, t_0) &= 0, \\ \phi_2(s, t_0) &= -\frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t}, \\ \phi_3(s, t_0) &= \frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

şeklindedir.

Yukarıda verilen hesaplamalar yardımıyla aşağıdaki teoremi kolayca edebiliriz:

Teorem 4.1.1 Γ bir parametrik spacelike yüzey olmak üzere, spacelike β eğrisi Γ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğri olsun.

(i) β eğrisinin B binormal vektörü spacelike bir vektör olsun.

(a) Eğer L eksen spacelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde spacelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki

şartların sağlanmasıdır.

$$\frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} = -\tanh \varphi \frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve}$$

$$\tanh \theta = \pm \frac{\mathcal{H}' + \kappa \sinh \varphi (1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \cosh \varphi (1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.$$

(b) Eğer L eksenini timelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde timelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$\frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} = \tanh \varphi \frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve}$$

$$\coth \theta = \mp \frac{\mathcal{H}' + \kappa \sinh \varphi (1 + \mathcal{H}^2)}{\kappa \cosh \varphi (1 + \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.$$

$$\text{Burada } \mathcal{H} = \frac{\tau + \varphi'}{\kappa \cosh \varphi} \text{ dir.}$$

Şimdi, yukarıdaki teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki örnekleri verelim.

Örnek 4.1.1 Birim hızlı $\beta(s) = (-\frac{1}{24} \cos 8s + \frac{2}{3} \cos 2s, \frac{1}{24} \sin 8s + \frac{2}{3} \sin 2s, \frac{4}{15} \sin 5s)$ slant helisini ele alalım. Kolayca görülebilir ki β eğrisi bir spacelike eğridir. Eğrinin Frenet elemanları şu şekildedir:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = (\frac{1}{3} \sin 8s - \frac{4}{3} \sin 2s, \frac{1}{3} \cos 8s + \frac{4}{3} \cos 2s, \frac{4}{3} \cos 5s), \\ N(s) = (-\frac{4}{3} \sin 3s, -\frac{4}{3} \cos 8s, -\frac{5}{3}), \\ B(s) = (\frac{1}{3} \cos 8s - \frac{4}{3} \cos 2s, -\frac{8}{3} \cos^3 s (6 \sin s - 3 \sin 3s + \sin 5s), -\frac{4}{3} \sin 5s), \\ \kappa(s) = 4 \sin 5s, \quad \tau(s) = 4 \cos 5s. \end{array} \right.$$

Bu denklemlerden eğrinin binormal vektörünün spacelike bir vektör olduğu açıktır.

L eksenini bir timelike eksen ve $\varphi = 0$ olsun. Bu durumda $\theta = \ln 3$ olarak bulunur.

$$x(s, t) = t^3, \quad y(s, t) = t^2, \quad z(s, t) = 2t, \quad t_0 = 0$$

seçerek β spacelike eğrisini bir isophote eğri olarak barındıran spacelike yüzey ailesinin bir üyesini şu şekilde elde ederiz:

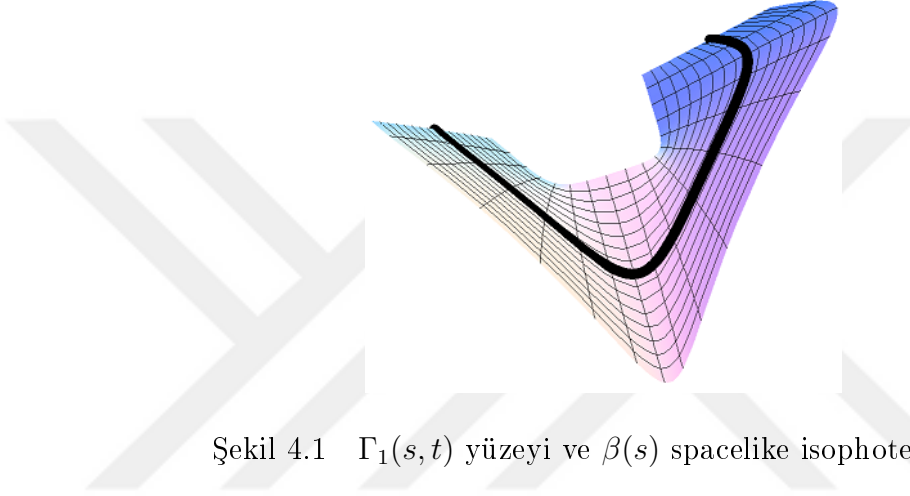
$$\Gamma_1(s, t) = \beta(s) + t^3 T(s) + t^2 N(s) + 2t B(s).$$

Bu yüzeyin grafiği şekil 4.1’de verilmiştir.

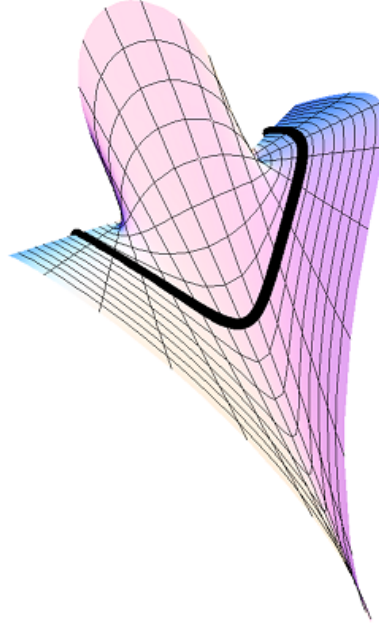
Benzer biçimde $x(s, t) = t^3$, $y(s, t) = 3t^2$, $z(s, t) = -5t$, $t_0 = 0$ seçerek β eğrisini isophote eğri olarak içeren spacelike yüzey ailesinin diğer bir üyesini aşağıdaki denklemle verebiliriz:

$$\Gamma_2(s, t) = \beta(s) + t^3T(s) + 3t^2N(s) - 5tB(s).$$

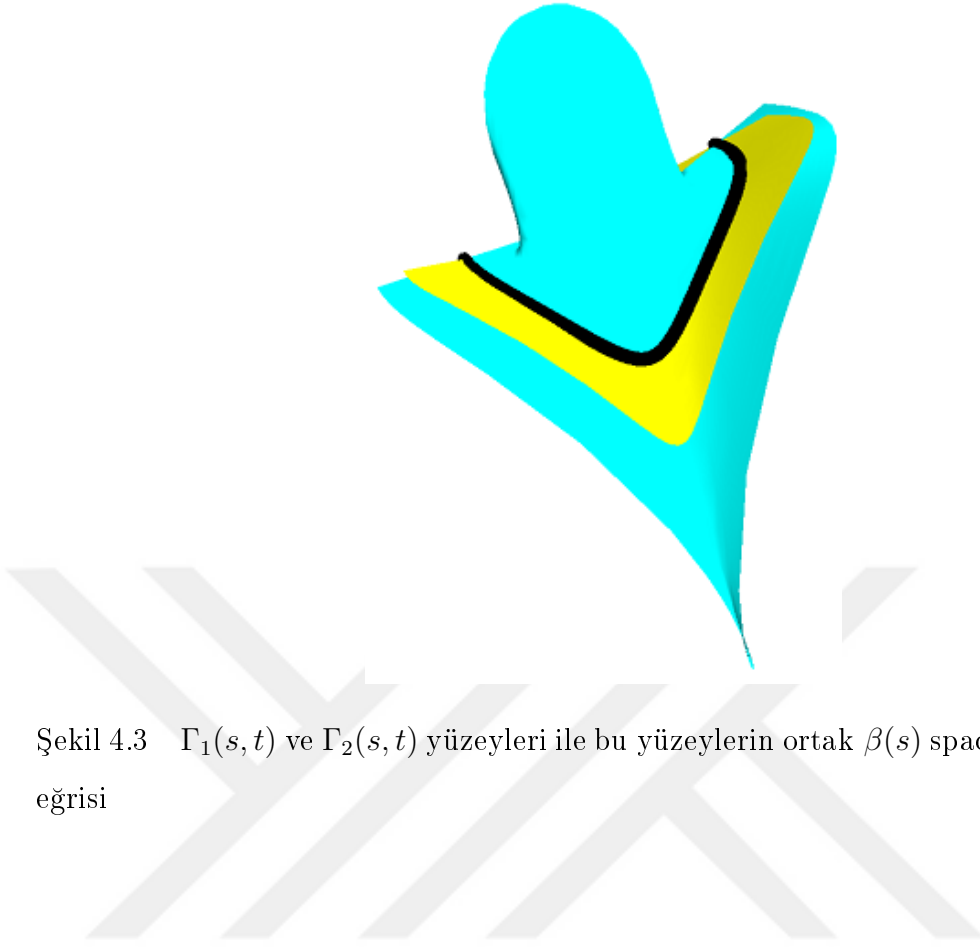
Γ_2 yüzeyi de şekil 4.2’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 $\Gamma_1(s, t)$ yüzeyi ve $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi



Şekil 4.2 $\Gamma_2(s, t)$ yüzeyi ve $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi



Şekil 4.3 $\Gamma_1(s, t)$ ve $\Gamma_2(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi

Örnek 4.1.2 $\mathbf{P}_0 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{P}_1 = (0, 1, 0)$ and $\mathbf{P}_2 = (-2, 1, -1)$ kontrol noktalarına sahip spacelike bir $\beta(r)$ kuadratik Bézier eğrisini ele alalım. $\beta(r)$ Bézier eğrisini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\beta(r) = \mathbf{P}_0 B_0(r) + \mathbf{P}_1 B_1(r) + \mathbf{P}_2 B_2(r), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Burada $B_0(r) = (1 - r)^2$, $B_1(r) = 2(1 - r)r$ ve $B_2(r) = r^2$ şeklindedir. Dolayısıyla eğrinin Frenet çatısı

$$\begin{cases} T(r) = \frac{(-2, 2 - 2r, -r)}{\sqrt{8 - 8r + 3r^2}}, \\ N(r) = \frac{(-3r + 4, r - 4, 4 - 2r)}{\sqrt{16 - 16r + 6r^2}}, \\ B(r) = \frac{(-1, -1, -2)}{\sqrt{2}}, \\ \tau(r) = 0. \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

$\varphi = 0$ olsun. O halde $\theta = 0$ dır.

$$u(r, t) = 0, \quad v(r, t) = t, \quad w(r, t) = 0, \quad t_0 = 0$$

seçerek β eğrisini spacelike eksene sahip bir isophote eğri olarak içeren spacelike yüzey ailesinin bir elemanı şu şekilde bulunur:

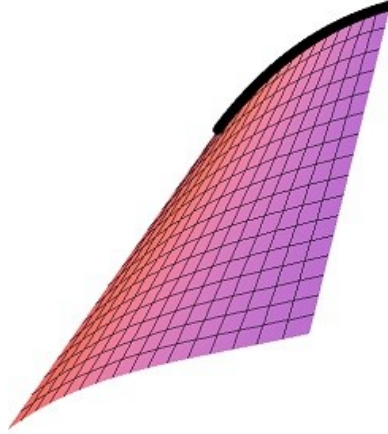
$$\Gamma_3(r, t) = \left(2 - 4r + t\left(\frac{-3r + 4}{\sqrt{16 - 16r + 6r^2}}, -1 + 4r - 2r^2 + t\left(\frac{r - 4}{\sqrt{16 - 16r + 6r^2}}, -r^2 + t\left(\frac{4 - 2r}{\sqrt{16 - 16r + 6r^2}}\right)\right)\right).$$

Bu yüzey şekil 4.4'de gösterilmiştir.

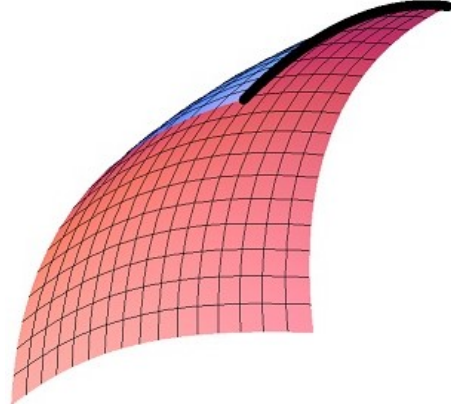
Diğer taraftan $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = t$, $w(s, t) = \frac{t^2}{8}$ ve $t_0 = 0$ seçilerek yüzey ailesinin diğer bir üyesi aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma_4(r, t) = \left(2 - 4r + t\left(\frac{-3r + 4}{\sqrt{16 - 16r + 6r^2}} - \frac{t^2}{8\sqrt{2}}, -1 + 4r - 2r^2 + t\left(\frac{r - 4}{\sqrt{16 - 16r + 6r^2}} - \frac{t^2}{8\sqrt{2}}, -r^2 + t\left(\frac{4 - 2r}{\sqrt{16 - 16r + 6r^2}} - \frac{t^2}{4\sqrt{2}}\right)\right)\right),$$

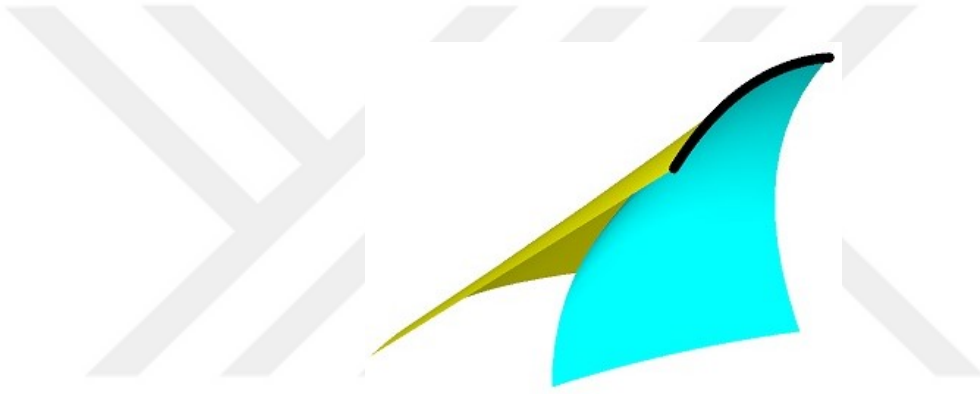
Γ_4 yüzeyi de şekil 4.5'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4 $\Gamma_3(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi



Şekil 4.5 $\Gamma_4(r, t)$ yüzeyi ve spacelike $\beta(r)$ isophote eğrisi



Şekil 4.6 $\Gamma_3(r, t)$ ve $\Gamma_4(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi

4.2 Bir Isophote Eğri Tarafından Üretilen Timelike Yüzeyler

3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir $\Gamma = \Gamma(s, t)$ yüzeyi bu yüzey üzerinde yatan bir $\beta(s)$ eğrisini ele alalım. $\beta(s)$ eğrisi spacelike ya da timelike bir eğri olabilir. Şimdi, $\Gamma(s, t)$ timelike yüzeyinin bir β spacelike (ya da timelike) eğrisini izoparametrik ve isophote bir eğri olarak içermesi için gerek ve yeter şartları elde edeceğiz. Dolayısıyla öncelikle (3.1) denkleminde olduğu gibi $\Gamma(s, t)$ yüzeyini parametrik

olarak yazalım:

$$\Gamma(s, t) = \beta(s) + (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}; \quad 0 \leq s \leq I, \quad 0 \leq t \leq J. \quad (4.3)$$

β eğrisi Γ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğri olacağından bir $t_0 \in [0, J]$ parametresi için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$x(s, t_0) = y(s, t_0) = z(s, t_0) = 0, \quad 0 \leq s \leq I. \quad (4.4)$$

Diğer yandan β eğrisi Γ yüzeyi üzerinde bir isophote eğri olacağından Tanım 2.4.1 gereği β eğrisi boyunca Γ yüzeyinin yüzey normalleri sabit bir u doğrultusu ile sabit bir θ açısı yapmalıdır. Dolayısıyla β eğrisi boyunca yüzey normallerini hesaplamalıyız. Bir yüzeyin herhangi bir noktadaki normali yüzey parametrelerine göre kısmi türevlerin vektörel çarpımı olarak verilir. Yani;

$$n(s, t) = \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial t}$$

4.3 denkleminde Γ yüzeyinin kısmi türevlerini hesaplayarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$n(s, t) = \left(1 - y(s, t)\kappa(s) + \frac{\partial x(s, t)}{\partial s}, x(s, t)\kappa(s) + z(s, t)\tau(s) + \frac{\partial y(s, t)}{\partial s}, y(s, t)\tau(s) + \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \right) \times \begin{pmatrix} 0 & B(s) & -N(s) \\ -B(s) & 0 & T(s) \\ N(s) & -T(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Buradan β izoparametrik eğrisi boyunca yüzey normallerini $t = t_0$ alarak şu şekilde buluruz:

$$n(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)T(s) + \phi_2(s, t_0)N(s) + \phi_3(s, t_0)B(s).$$

Burada

$$\begin{aligned} \phi_1(s, t_0) &= 0, \\ \phi_2(s, t_0) &= -\frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t}, \\ \phi_3(s, t_0) &= -\frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

şeklindedir.

O halde timelike yüzey üzerinde bulunan spacelike (ya da timelike) eğrilerin isophote eğri olma şartlarını aşağıdaki teoremlerle ifade edebiliriz.

Teorem 4.2.1 $\Gamma = \Gamma(s, t)$ bir parametrik yüzey olmak üzere, spacelike $\beta(s)$ eğrisi Γ yüzeyi üzerinde bir izoparametrik eğri olsun.

(i) β eğrisinin B binormal vektörü spacelike bir vektör olsun.

(a) Eğer L eksen spacelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde spacelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$\frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} = \tanh \varphi \frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve}$$

$$\begin{cases} \coth \theta = \mp \frac{\mathcal{H}' + \kappa \sinh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)}{\kappa \cosh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt., & \langle n(s, t_0), L \rangle = \cosh \theta \text{ ise,} \\ \cot \delta = \mp \frac{\mathcal{H}' - \kappa \sinh \varphi (\mathcal{H}^2 - 1)}{\kappa \cosh \varphi (\mathcal{H}^2 - 1)^{3/2}} = sbt., & \langle n(s, t_0), L \rangle = \cos \delta \text{ ise,} \end{cases}$$

(b) Eğer L eksen timelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde timelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$\frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} = \tanh \varphi \frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve}$$

$$\tanh \theta = \mp \frac{\mathcal{H}' + \kappa \sinh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)}{\kappa \cosh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt.$$

$$\text{Burada } \mathcal{H} = \frac{\tau + \varphi'}{\kappa \cosh \varphi} \text{ dir.}$$

(ii) β eğrisinin B binormal vektörü timelike bir vektör olsun.

(a) Eğer L eksen spacelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde spacelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki

şartların sağlanmasıdır.

$$\frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} = \tanh \varphi \frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve}$$

$$\begin{cases} \coth \theta = \mp \frac{\mathcal{H}' + \kappa \sinh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)}{\kappa \cosh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt., & \langle n(s, t_0), L \rangle = \cosh \theta \text{ ise,} \\ \cot \delta = \mp \frac{\mathcal{H}' - \kappa \sinh \varphi (\mathcal{H}^2 - 1)}{\kappa \cosh \varphi (\mathcal{H}^2 - 1)^{3/2}} = sbt., & \langle n(s, t_0), L \rangle = \cos \delta \text{ ise,} \end{cases}$$

- (b) Eğer L eksenı timelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde timelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} &= \tanh \varphi \frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve} \\ \tanh \theta &= \mp \frac{\mathcal{H}' + \kappa \sinh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)}{\kappa \cosh \varphi (1 - \mathcal{H}^2)^{3/2}} = sbt. \end{aligned}$$

$$\text{Burada } \mathcal{H} = \frac{\tau + \varphi'}{\kappa \cosh \varphi} \text{ dir.}$$

Teorem 4.2.2 $\Gamma = \Gamma(s, t)$ timelike bir parametrik yüzey olmak üzere, $\beta(s)$ eğrisi Γ yüzeyi üzerinde bir timelike izoparametrik eğri olsun.

- (i) Eğer L eksenı spacelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde spacelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} &= -\tan \varphi \frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve} \\ \begin{cases} \cot \delta = \mp \frac{K' + \kappa \cos \varphi (1 - K^2)}{\kappa \sin \varphi (1 - K^2)^{3/2}} = sbt., & \langle n(s, t_0), L \rangle = \cos \delta \text{ ise,} \\ \coth \theta = \pm \frac{K' + \kappa \cos \varphi (K^2 - 1)}{\kappa \sin \varphi (K^2 - 1)^{3/2}} = sbt., & \langle n(s, t_0), L \rangle = \cosh \theta \text{ ise,} \end{cases} \end{aligned}$$

- (ii) Eğer L eksenı timelike bir eksen ise bu eğrinin Γ yüzeyi üzerinde timelike eksene sahip bir isophote eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(s, t_0)}{\partial t} &= -\tan \varphi \frac{\partial y(s, t_0)}{\partial t} \quad \text{ve} \\ \coth \theta &= \pm \frac{K' - \kappa \cos \varphi (K^2 - 1)}{\kappa \sin \varphi (K^2 - 1)^{3/2}} = sbt. \end{aligned}$$

Burada $K = \frac{\tau + \varphi'}{\kappa \sin \varphi}$ dir.

Şimdi, yukarıdaki teoremlerin uygulamaları olacak örnekler vereceğiz.

Örnek 4.2.1 $\beta(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s)$ birim hızlı timelike bir eğri olsun. β eğrisinin Frenet çatısı şu şekildedir:

$$\begin{cases} T(s) = (-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}), \\ N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0), \\ B(s) = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sin s, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ olsun.

$$x(s, t) = 0, \quad y(s, t) = t^2, \quad z(s, t) = -t, \quad t_0 = 0$$

seçerek $\beta(s)$ timelike eğrisini bir isophote eğri olarak içeren timelike yüzey ailesinin bir elemanını aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\Gamma_5(s, t) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - t^2 \right) \cos s - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t \sin s, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - t^2 \right) \sin s + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}s + 1) \right)$$

Γ_5 yüzeyinin grafiği şekil 4.7’de verilmiştir.

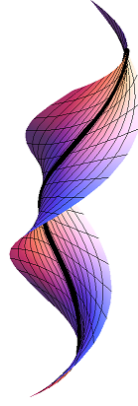
Benzer şekilde

$$x(s, t) = t, \quad y(s, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \quad z(s, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} t, \quad t_0 = 0$$

olarak β eğrisini isophote eğri olarak içeren diğer bir yüzey şu şekildedir:

$$\Gamma_6(s, t) = \left((1 + t^2) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} t \sin s, (1 + t^2) \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} t \cos s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (s + 1) - \frac{t}{2} \right).$$

Bu yüzey ise şekil 4.8’de gösterilmiştir.



Şekil 4.7 $\Gamma_5(s, t)$ yüzeyi ve $\beta(s)$ timelike isophote eğrisi



Şekil 4.8 $\Gamma_6(s, t)$ yüzeyi ve timelike $\beta(s)$ isophote eğrisi



Şekil 4.9 $\Gamma_5(s, t)$ ve $\Gamma_6(s, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(s)$ timelike isophote eğrisi

Örnek 4.2.2 Bölüm 2.5 de bir eğrinin Minkowski Pisagor-Hodograf eğri (MPH eğri) olma şartını vermiştik. Şimdi ise öncelikle bir spacelike $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ MPH eğrisi örneği elde edip daha sonra bu MPH eğrisinin bir spacelike isophote eğri olarak içeren timelike yüzeyler oluşturacağız.

$U(r) = (1 - r) + 2r$, $V(r) = r$, $P(s) = (1 - r)$ ve $Q(s) = (1 - r) + r$ alarak Teorem 2.5.1 den

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= 3(1 - r)^2 + 1 \cdot 2(1 - r)r + 4r^2, \\ \beta'_2 &= 2(1 - r)^2 + 0 \cdot 2(1 - r)r + 4r^2, \\ \beta'_3 &= 2(1 - r)^2 + 3 \cdot 2(1 - r)r - 2r^2, \\ \sigma &= -(1 - r)^2 + 3 \cdot 2(1 - r)r + 0r^2.\end{aligned}$$

bulunur. İntegrasyon sabiti $(a_0, b_0, c_0) = (1, 1, 1)$ olmak üzere son denklemden integral alınarak $\beta(r)$ MPH eğrisinin diğer kontrol noktaları şu şekilde elde edilir:

$$(a_1, b_1, c_1) = \frac{(6, 5, 5)}{3}, \quad (a_2, b_2, c_2) = \frac{(7, 5, 8)}{3}, \quad (a_3, b_3, c_3) = \frac{(11, 9, 6)}{3}.$$

Kolay bir hesaplamayla β eğrisinin Frenet çatısını şu şekilde elde ederiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(r) = \frac{(3 - 4r + 5r^2, 2 - 4r + 6r^2, 2 + 2r - 6r^2)}{\sqrt{9 - 48r + 106r^2 - 64r^3 + 25r^4}}, \\ N(r) = B(r) \times T(r), \\ B(r) = \frac{(6 - 24r + 6r^2, -7 + 28r - 7r^2, 2 - 8r + 2r^2)}{9(1 - 4r + r^2)}. \end{array} \right.$$

$\varphi = \ln 2$ olsun. $x(r, t) = t^2$, $y(r, t) = -\sin t$, $z(r, t) = -\frac{3}{5}t$ ve $t_0 = 0$ seçerek β spacelike eğrisini bir isophote eğri olarak içeren timelike yüzey ailesinin bir üyesini şu şekilde verebiliriz:

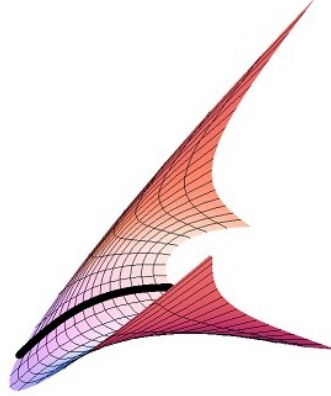
$$\Gamma_7(r, t) = \beta(r) + t^2 T(r) - \sin t N(r) - \frac{3t}{5} B(r).$$

Bu yüzey şekil 4.10'da gösterilmiştir.

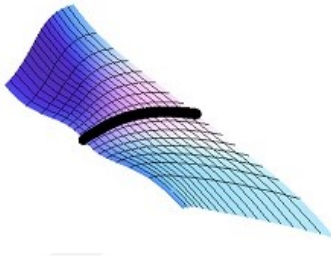
Benzer şekilde, $\varphi = \ln 4$, $x(r, t) = t$, $y(r, t) = -\sin t$, $z(r, t) = -\tan(\frac{15}{17}t)$ ve $t_0 = 0$ alarak yüzey ailesinin diğer bir üyesini şu şekilde elde ederiz:

$$\Gamma_8(r, t) = \beta(r) + tT(r) - \sin t N(r) - \tan(\frac{15}{17}t)B(r).$$

Γ_8 yüzeyi ise şekil 4.11’de verilmiştir.



Şekil 4.10 $\Gamma_7(r, t)$ yüzeyi ve $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi



Şekil 4.11 $\Gamma_8(r, t)$ yüzeyi ve spacelike $\beta(r)$ isophote eğrisi



Şekil 4.12 $\Gamma_7(r, t)$ ve $\Gamma_8(r, t)$ yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(r)$ spacelike isophote eğrisi

Örnek 4.2.3 $\beta(s) = (-\frac{3}{25} \sinh 5s, \frac{4}{5}s, -\frac{3}{25} \cosh 5s)$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. β eğrisinin Frenet çatısı şu şekildedir:

$$\begin{cases} T(s) = (-\frac{3}{5} \cosh 5s, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \sinh 5s), \\ N(s) = (-\sinh 5s, 0, -\cosh 5s), \\ B(s) = (-\frac{4}{5} \cosh 5s, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \sinh 5s), \end{cases}$$

$\varphi = \ln 3$ olsun.

$$x(s, t) = t, \quad y(s, t) = -\sinh t, \quad z(s, t) = -\frac{4}{5}t, \quad t_0 = 0$$

seçerek $\beta(s)$ spacelike eğrisini bir isophote eğri olarak içeren timelike yüzey ailesinin bir elemanını aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\Gamma_9(s, t) = \left(\sinh 5s \left(-\frac{3}{25} + \sinh t\right) + \frac{1}{25}t \cosh 5s, \frac{4}{5}\left(s + \frac{8}{5}t\right), \cosh 5s \left(-\frac{3}{25} + \sinh t\right) + \frac{1}{25}t \sinh 5s \right),$$

Γ_9 yüzeyinin grafiği şekil 4.13'de gösterilmiştir.

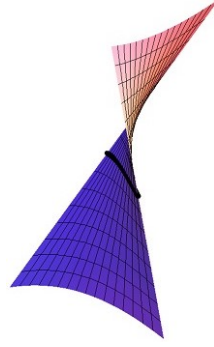
Benzer şekilde

$$x(s, t) = 0, \quad y(s, t) = -t, \quad z(s, t) = -\sinh\left(\frac{4}{5}t\right), \quad t_0 = 0$$

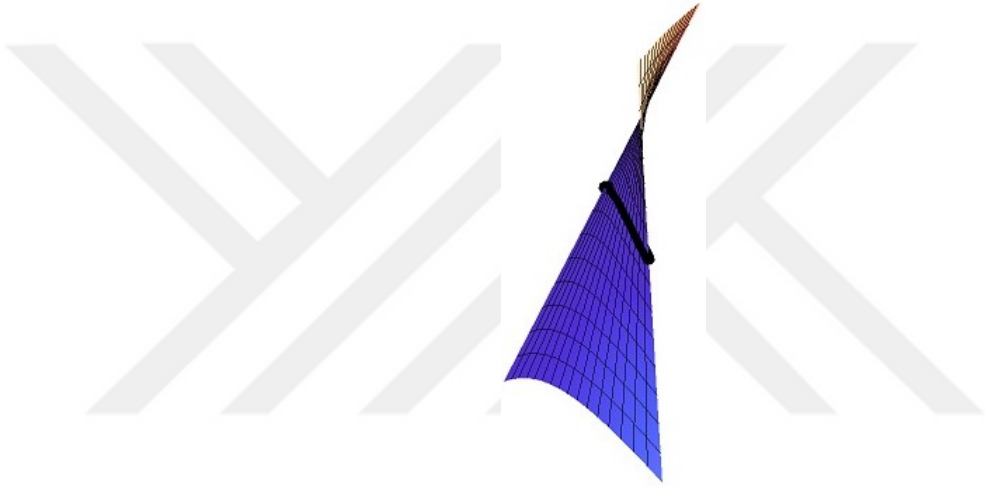
olarak β eğrisini isophote eğri olarak içeren yüzey ailesinin diğer bir üyesi ise şu şekildedir:

$$\Gamma_{10}(s, t) = \left(\sinh 5s \left(-\frac{3}{25} + t\right) + \frac{4}{5} \sinh\left(\frac{4}{5}t\right) \cosh 5s, \frac{1}{5}\left(4s + 3 \sinh\left(\frac{4}{5}t\right)\right), \cosh 5s \left(-\frac{3}{25} + t\right) + \frac{4}{5} \sinh\left(\frac{4}{5}t\right) \sinh 5s \right),$$

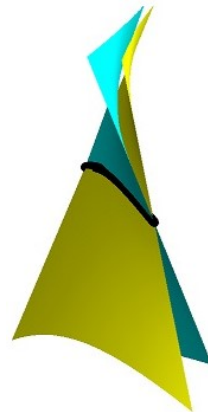
Bu yüzey ise şekil 4.14'de verilmiştir.



Şekil 4.13 $\Gamma_9(s, t)$ timelike yüzeyi ve $\beta(s)$ spacelike isophote eğrisi



Şekil 4.14 $\Gamma_{10}(s, t)$ timelike yüzeyi ve spacelike $\beta(s)$ isophote eğrisi



Şekil 4.15 $\Gamma_9(s, t)$ ve $\Gamma_{10}(s, t)$ timelike yüzeyleri ile bu yüzeylerin ortak $\beta(s)$ space-like isophote eğrisi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yüzey üzerindeki özel eğriler bir çok geometricinin ilgi odağı olmuş ve birçok yazar bu eğrilerin karakterizasyonlarını çeşitli uzaylarda incelemişlerdir. Bu eğrilerden en önemlileri geodezikler, asimptotik eğriler ve eğrilik çizgileridir. Bu eğriler diferensiyel geometri de önemli yer tutmalarının yanı sıra pratik uygulamalarda da kendine birçok alan bulmuştur.

Isophote eğriler de yüzey üzerinde karakteristik eğrilerden biridir. Bir ışık kaynağından düzgün bir yüzeye gelen ışık vektörü yüzey üzerinde bazı noktalarda yüzey normali ile sabit bir θ açısı yapmaktadır. Bu tür noktaların geometrik yeri bir isophote eğri olarak adlandırılmaktadır. Isophote eğriler optik, CAD/CAM, bilgisayar grafikleri, yüzey sorgulama ve eğri-yüzey modelleme gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bu alanların en önemlisi yüzey sorgulamadır. Örneğin, keyfi bir obje ele alalım. Bu objeyi modelleyebilmek için birçok yüzey yamasını bir araya getirmek gerekmektedir. Oluşan objenin düzgün olabilmesi için birleştirilen yüzeyler belli sürekliliklere sahip olmalıdır. Ancak süreklilik hakkında net bir yargıya ulaşmak her zaman kolay olmayabilir. Sürekliliğin belirlenmesini kolaylaştırabilmek için isophote eğrilerden faydalanabiliriz. Eğer birleşik iki yüzeyin isophoteleri n . dereceden bir geometrik sürekliliğe sahip ise yüzeyler $(n + 1)$. dereceden süreklilik gösterir. Örneğin birleşik iki yüzeyin isophote eğrileri arakesit eğrisi üzerinde kesişmiyorsa bu eğriler 0. dereceden geometrik sürekliliğe sahip iken yüzeyler de 1. dereceden geometrik sürekliliğe sahiptir.

Bu tez çalışmasında bir ters problem olarak, verilen bir eğriyi izoparametrik ve isophote eğri olarak barındıran tüm yüzeyleri oluşturma problemi ele alınmıştır. Bu problemi çözmek için yüzey; eğriye ve eğrinin Frenet çatısına bağlı olarak ifade edilmiştir. Daha sonra yüzey normalleri eğri boyunca hesaplanılarak ve isophote şartı kullanılarak eğrinin yüzey üzerinde isophote eğri olabilmesi için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Sonrasında isophote eğrilerin ekseni $\{N, C, W\}$ çatısına göre

elde edilmiş ve birim hızlı bir eğrinin yüzey üzerinde isophote eğri olma şartı bu çatıya göre de incelenmiştir. Ayrıca oluşturan teoriye uygulama oluşturacak örnekler verilmiştir. Sonraki bölümlerde ise ortak bir geodezik eğriye, eğrilik çizgisine ya da asimptotik eğriye sahip olan yüzey aileleri $\{N, C, W\}$ çatısına bağlı olarak ifade edilmiştir.

Tezin son bölümünde 3-boyutlu Minkowski uzayında bir isophote eğriden geçen tüm spacelike ve timelike yüzeylerin karakterizasyonları incelenmiş ve bu karakterizasyonlar örneklerle desteklenmiştir.



KAYNAKLAR

- Bayram,E., Guler,F. and Kasap, E. 2012. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve, *Computer Aided Design*, 44(9) 637-43.
- Do Carmo M. P. 1976. *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dogan,F. and Yayli,Y. 2015. On isophote curves and their characterizations, *Turkish Journal of Mathematics*, 39, 650-664.
- Dogan,F. and Yayli,Y. 2012. Isophote curves on spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski space E_1^3 , arXiv:1203.4388, [math.DG]
- Dogan,F. 2014. Isophote curves on timelike surfaces in Minkowski 3-space, *Annals of the Al. I. Cuza Iasi. Math.* ISSN (Online) 1221-8421, DOI: 10.2478/aicu-2014-0020.
- Ergun,E., Bayram,E. and Kasap E. 2014. Surface pencil with a common line of curvature in Minkowski 3-space, *Acta Math. Sinica, Eng. Series.*, 30(12), 2103-2118.
- Farin,G. 1990. *Curves and Surface for Computer Aided Geometric Design*, 2nd ed. New York: Academic Press.
- Farouki,R.T. 2008. *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Farouki,R.T., Szafran,N. and Biard,L. 2009. Existence conditions for Coons patches interpolating geodesic boundary curves, *Computer Aided Geometric Design*, 26, 599-614.
- Farouki,R.T., Szafran,N. and Biard,L. 2009. Construction of Bézier surface patches with Bézier curves as geodesic boundaries, *Computer Aided Design*, 41, 772-781.
- Heisel,T. 1996. On Geometric Continuity of Isophotes, *Proceedings of Chaminox*, 1-8.
- Kasap ,E., and Akyildiz,F.T. 2008. Surfaces with common geodesic in Minkowski 3-space, *Applied Mathematics and Computation*, 177, 260-270.
- Kim,K.J. and Lee,I.K. 2003. Computing isophotes of surface of revolution and canal surface, *Computer Aided Design*, 35, 215-223.
- Kim,K.J. and Lee,I.K. 2003. The perspective silhouette of a canal surface, *Computer Graphics Forum*, 1,15-22.
- Koenderink,J.J. and van Doorn,A.J. 1980. Photometric invariants related to solid shape, *J Modern Opt.* 27, 981-996.

- Lancret, M.A. 1806. Mémoire sur les courbes a double courbure, Mémoires présentés a l'Institut 1, 416-454.
- Li C.Y., Wang, R.H. and Zhu, C.G. 2011. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature, *Comput. Aided Des.*, 43(9), 1110-1117.
- Li, C.Y., Wang, R.H. and Zhu, C.G. 2011. Design and G^1 connection of developable surfaces through Bézier geodesics, *Appl. Math. Comput.*, 218, 3199-3208.
- Li, C.Y., Wang, R.H. and Zhu, C.G. 2013. An approach for designing a developable surface through a given line of curvature, *Comput. Aided Des.*, 45, 621-627.
- Lopez, R. 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, *Internation Electronic Journal of Geometry*, 7, 44-107.
- O'Neill, B. 1966. Elementary differential geometry. Academic Press, Inc., New York.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press, Inc, New York.
- Millman, R. S. and Parker, G.D. 1977. Elements of Differential Geometry. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Paluszny, M. 2008. Cubic polynomial patches through geodesics. *Comput. Aided Des.*, 40, 56-61.
- Poeschl, T. 1984. Detecting surface irregularities using isophotes. *Comput. Aided Geom. Des.*, 1, 163-168.
- Sara, R. 1994. Local Shading Analysis via Isophotes Properties. PhD Thesis, Johannes Kepler University, Austria.
- Sabuncuoğlu, A. 2014. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayıncılık, Ankara.
- Sanchez-Reyes, J. and Dorado, R. 2008. Constrained design of polynomial surfaces from geodesic curves. *Comput. Aided Des.*, 40, 49-55.
- Stoker, J. 1969. Differential Geometry. New York Interscience.
- Şaffak, G. and Kasap, E. 2009. Family of surface with a common null geodesic. *Int. J. Phys. Sci.*, 48, 428-433.
- Şaffak, G. and Kasap, E. 2015. Surfaces family with common null asymptotic. *Appl. Math. Comput.*, 260, 135-139.
- Uzunoglu, B., Gök, İ. and Yaylı, Y. 2016. A new approach on curves of constant precession. *Appl. Math. Comput.*, 275, 317-323.
- Wang, G.J., Tang, K. and Tai, C.L. 2004. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. *Comput. Aided Des.*, 36(5), 447-459.

Willmore,T.J. 1959. An introduction to differential geometry. Oxford University Press.

Zhao,H. and Wang,G. 2007. A new approach for designing rational Bézier surfaces from a given geodesic. Journal of Information & Computational Science, 4, 879-887.

Zhao,H. and Wang,G. 2008. A new method for designing a developable surface utilizing the surface pencil through a given curve. Progress in Natural Science, 18, 105-110.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Orhan Oğulcan TUNCER

Doğum Yeri : Muğla

Doğum Tarihi : 29/01/1994

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Öğretmen Mukadder Akaydın Anadolu Lisesi (2011)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2015)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
(Eylül 2015 – Haziran 2016)