

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İMPALSİF DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK
ANALİZİ

Levent Furkan DİREKÇİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İMPALSİF DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK ANALİZİ

Levent Furkan DİREKÇİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan temel matematiksel kavramlar açıklanmış ve yapay sinir ağları hakkında genel bilgi verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde ilk olarak impulsif diferensiyel denklemler tanıtılmıştır. Devamında impulsif diferensiyel denklemlerin kararlılığı ile ilgili olarak yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Özellikle impulsif yapay sinir ağları üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölüm uyumlu kesirli türev içeren yapay sinir ağı modellerine ayrılmıştır. İlk kesimde uyumlu kesirli türevin temel özellikleri incelenmiş ikinci kesimde impuls etkisi olmayan modeller üzerine yapılan araştırmalar ifade edilmiştir. Dördüncü bölümün son kesimi tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu kesimde Hopfield türünde uyumlu kesirli türev içeren impulsif bir sistem ele alınmıştır. Sistemin denge noktasının varlık ve tekliği ispatlanmış, üstel kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir. Ayrıca sayısal bir örnek ele alınıp impulsif olmayan sistemle impulsif sistemin kararlılık durumu karşılaştırılmıştır. Tezin son bölümünde yapılan incelemeler özetlenerek bu çalışmanın literatüre yaptığı katkı ifade edilmiştir.

Ocak 2024, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: İmpulsif diferensiyel denklem, kararlılık, üstel kararlılık, Lyapunov yöntemi, yapay sinir ağı, uyumlu kesirli türev

ABSTRACT

Master Thesis

Stability Analysis of Impulsive Differential Equations

Levent Furkan DİREKÇİ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction part. In the second chapter, the basic mathematical concepts which are mentioned in the thesis are explained and general information about the artificial neural networks is given. In the third chapter, firstly, impulsive differential equations are introduced. Then the investigations on the stability of impulsive differential equations are examined. Especially, impulsive artificial neural networks are considered. The fourth chapter is devoted to artificial neural networks with conformable fractional derivatives. The first section provides the basic properties of conformable fractional derivative. In the second section, the research on the non-impulsive models is mentioned. The last section of the fourth chapter involves the original part of this thesis. In this section a Hopfield-type impulsive system with conformable fractional derivative is discussed. The existence and uniqueness of the equilibrium point of the system is proved. Moreover, sufficient conditions for the exponential stability of the equilibrium point are obtained. In addition, a numerical example is considered and stability of the impulsive system is compared with the non-impulsive system. In the final chapter the investigation is summarized and the contribution of this work is explained.

January 2024, 55 pages

Key Words: Impulsive differential equations, stability, exponential stability, Lyapunov method, artificial neural network, conformable fractional derivative

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda araştırma imkanı veren, çalışmalarımın her aşamasında emeği olan, değerli görüş ve önerileriyle beni yönlendiren karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, büyük bir sabır ve titizlikle beni yönlendiren saygı değer danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, tez sürecim boyunca olumlu uyarılarıyla katkıda bulunan Sayın Doç. Dr. Elif DEMİRCİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye, Sayın Doç. Dr. Serhan VARMA (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, Sayın Doç. Dr. Gizem SEYHAN ÖZTEPE (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Musa Emre KAVGACI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a (2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı) ve son olarak daima destek ve güvenlerini hissettiren annem Fatma ŞENTÜRK'e, babam Bülent DİREKÇİ'ye ve tüm aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Levent Furkan DİREKÇİ
Ankara, Ocak 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Ön Bilgiler.....	4
2.2 Yapay Sinir Ağları	8
3. İMPALSİF DİFERENSİYEL DENKLEMLER	11
3.1 Giriş.....	11
3.2 İmpulsif Diferensiyel Denklemlerde Kararlılık	15
3.3 İmpulsif Yapay Sinir Ağları	20
4. UYUMLU KESİRLİ TÜREV İÇEREN YAPAY SİNİR AĞLAR- ININ KARARLILIĞI	32
4.1 Uyumlu Kesirli Türev.....	32
4.2 İmpuls Etkisi Olmayan Modellerin Kararlılığı.....	34
4.3 Hopfield Türü Yapay Sinir Ağı Modelinde İmpuls Etkisi.....	38
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam sembolü
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n- boyutlu Öklid uzayı
$\Delta x(\theta_i)$	İmpuls operatörü
$T_{t_0}^\alpha$	α . basamaktan uyumlu kesirli türev operatörü
$E_\alpha(\lambda, t - t_0)$	Kesirli üstel fonksiyon
∇f	f fonksiyonunun gradiyenti
$\langle x, y \rangle$	x ve y vektörlerinin iç çarpımı



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Yapay sinir hücresi	9
Şekil 3.1	(3.5) – (3.6) ve (3.2) – (3.4) başlangıç değer problemlerinin çözümleri .	14
Şekil 3.2	(3.8) sisteminin $\psi(0^+) = \frac{1}{2}$ ve $\psi(0^+) = \frac{3}{2}$ koşullarını sağlayan çözümleri	15
Şekil 4.1	(4.33) – (4.34) sisteminin durum değişkenleri	50
Şekil 4.2	(4.35) – (4.36) impulsif sisteminin durum değişkenleri	50
Şekil 4.3	(4.35), (4.37) impulsif sisteminin durum değişkenleri	50

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler gerçek yaşam problemlerinin araştırılmasında çok önemli bir yere sahiptir. Ancak bazı problemlerin modellenmesinde adi diferensiyel denklemler bizi sonuca götürmez. Adi diferensiyel denklemlerle modelleme, dışarıdan yapılan etkiyi ihmal ettiği için bazı problemlerde doğru sonuç vermeyebilir. Bir türün popülasyon yoğunluğunda önemli derecede azalmalara neden olan bir dış etki, sarkaçlı saatin denge noktasından geçtiği anda momentumunda ani bir değişimin meydana gelmesi böyle süreçlere örnek olarak verilebilir. Bu süreçleri matematiksel olarak ifade etmek için impulsif diferensiyel denklemler olarak adlandırılan süreksiz yörüngelere sahip sistemler kullanılmaktadır. Gerçek bir sürecin toplam süresine kıyasla göz ardı edilebilecek kadar kısa bir zamanda gerçekleşen bir dış etki, impuls olarak adlandırılan anlık değişimlere sebep olmaktadır. Bazı durumlarda çok küçük ani değişimlerin bile sürecin davranışında çok büyük farklılıklar yarattığı görülmektedir.

İmpulsif diferensiyel denklemlerde çözümler sonlu ya da sonsuz sayıda noktalarda parçalı sürekli, ama diğer her yerde sürekli olacak biçimde tanımlanan fonksiyonlardır. Genel olarak birinci basamaktan bir impulsif diferensiyel denklem

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{du} = f(u, \psi), & u \neq \tau_i, \\ \Delta_{u=\tau_i} = I_i(\psi), & i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Samoilenko ve Perestyuk 1995). Burada $\psi \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, f ve I_i ise n -boyutlu vektör değerli, sürekli fonksiyonlardır. $\{\tau_i\}$ reel değerli artan bir dizi olup $|i| \rightarrow \infty$ için $|\tau_i| \rightarrow \infty$ olduğu kabul edilmektedir. $u = \tau_i$ impulsların gerçekleştiği zamanları göstermektedir. Ayrıca $\Delta\psi(\tau_i) = \psi(\tau_i^+) - \psi(\tau_i^-)$ olup $\psi(\tau_i^+) = \lim_{u \rightarrow \tau_i^+} \psi(t)$ ve $\psi(\tau_i^-) = \lim_{u \rightarrow \tau_i^-} x(u)$ dir. İmpulsif diferensiyel denklemler için çözümlerin impuls noktalarında (τ_i noktalarında) soldan veya sağdan sürekli oldukları kabul edilmektedir.

Bilimin pek çok alanında gerçek hayat problemleri modellenirken lineer olmayan diferensiyel denklemlerden yararlanır. Ancak lineer olmayan bir denklem veya

denklemler sisteminin tam çözümünü bulmak genellikle mümkün değildir. Bu durum araştırmacıları diferensiyel denklemleri kalitatif yaklaşım ile incelemeye yönlendirmiştir. Diğer taraftan son yıllarda yapay sinir ağları pek çok araştırmacı tarafından incelenmeye başlamıştır. Yapay sinir ağları mühendislikte kontrol teorisine, sinyal işleme, örüntü tanıma gibi alanlarda kullanılmaktadır. Matematikçiler için ise yapay sinir ağı incelemesindeki en önemli hedef ele alınan modelin kararlılığının gösterilmesidir.

Bu tezin amacı impulsif diferensiyel denklemlerin kararlılık incelemelerinde kullanılan yöntemlerin irdelenmesi ve sistemler üzerinde impuls etkisinin gösterilebilmesidir. Bu bağlamda tezin ikinci bölümünde temel kavramlar ve özelliklere yer verilmiştir. Tezin üçüncü bölümü impulsif diferensiyel denklemlere ayrılmış, kararlılıkla ilgili literatürde mevcut olan sonuçlar ifade edilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ilk olarak, son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılan uyumlu türev kavramı tanıtılmış devamında uyumlu türev içeren sistemlerin kararlılığı ile ilgili literatürde mevcut olan çalışmalardan bahsedilmiştir. Ayrıca uyumlu türev içeren Hopfield türündeki impulsif

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_{t_k^+}^\alpha x_i)(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ t \geq t_0 > 0, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \\ \Delta x_i(t_k) = I_i(x_i(t_k^+)), \quad k = 1, 2, \dots \\ x_i(t_0^+) = x_0, \end{array} \right.$$

diferensiyel denklem sistemi ele alınmıştır, burada $T^\alpha(\bullet)$, α . basamaktan uyumlu kesirli türev operatörü olup $0 < \alpha \leq 1$ alınmıştır. $x_i(t)$ fonksiyonu i . nöronun t anındaki durum değişkenini ifade etmektedir. $a_i > 0$, sabitleri ağ bağlantısı kesildiğinde i . nöronun potansiyelinin dinlenme durumuna geçme hız oranını, b_{ij} , sabitleri i . nöron ile j . nöron arasındaki bağlantı ağırlıklarını, c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sabitleri ağırlıktan i . birime girişi temsil etmektedir. $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, j . nöron üzerindeki aktivasyon fonksiyonudur. $\Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-)$, $x_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t)$ ve $x_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$ dir. $\{t_k\}$ reel sayıların bir dizisi olup $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ dur. $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olup $t = t_k$ impuls anlarında $x_i(t)$ üzerindeki ani değişimleri ifade eder.

İlk olarak ele alınan sistemin denge noktasının varlık ve tekliği ispatlanmıştır. Ayrıca denge noktasının üstel kararlılığını garanti eden yeter koşullar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar impulsif olmayan sistem için literatürde mevcut olan sonuçlarla kıyaslanmıştır. Tezin son bölümünde ise yapılan çalışmalar özetlenerek diferensiyel denklem sistemleri üzerindeki impuls etkisi yorumlanmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Ön Bilgiler

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde geçen temel kavramlar açıklanmaktadır. Kararlılık ile ilgili verilecek olan tanımlar ve temel özellikler Driver'ın kitabında mevcuttur (Driver 1977).

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık ve bağlantılı bir küme, $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip bir vektör değerli fonksiyon olmak üzere

$$\psi'(u) = f(u, \psi), \quad \psi(u_0) = \bar{\psi}_0 \quad (2.1)$$

sistemini ele alalım. Burada $u_0 \in J$ ve $\bar{\psi}_0 \in \Omega$ dır. $\bar{\psi}(u) = \psi(u; u_0, \bar{\psi}_0)$ (2.1) başlangıç değer probleminin çözümünü, $\psi(u) = \psi(u; u_0, \psi_0)$ de $\psi'(u) = f(u, \psi)$ sisteminin $\psi(u_0) = \psi_0$ koşulunu sağlayan çözümünü gösterebiliriz.

Tanım 2.1 Verilen her $\epsilon > 0$ için $\|\psi_0 - \bar{\psi}_0\| < \delta$ olduğunda her $u \geq u_0$ için

$$\|\psi(u) - \bar{\psi}(u)\| < \epsilon$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\delta(\epsilon, u_0)$ sabiti bulunabiliyorsa (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u)$ çözümüne (Lyapunov anlamında) kararlıdır denir. (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u)$ çözümü kararlı değilse, (2.1) sistemine kararsızdır denir.

Tanım 2.2 (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u) = \bar{\psi}(u; u_0, \bar{\psi}_0)$ çözümü kararlı olsun.

$$\|\psi_0 - \bar{\psi}_0\| < \delta$$

eşitsizliği gerçekleştiği zaman

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \|\psi(u) - \bar{\psi}(u)\| = 0$$

sağlanacak biçimde pozitif bir δ sabiti bulunabiliyorsa (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 2.3 (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u)$ çözümü kararlı olsun. Eğer δ sayısı u_0 dan bağımsız seçilebiliyorsa bu durumda (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u)$ çözümü düzgün kararlıdır denir.

Tanım 2.4 (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u)$ çözümü kararlı olsun. Verilen bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|\psi_0 - \bar{\psi}_0\| < \delta(\epsilon, u_0)$$

eşitsizliği

$$\|\psi(u) - \bar{\psi}(u)\| < \epsilon e^{-\alpha u}, \quad \forall u \geq u_0$$

ifadesini sağlayacak şekilde $\alpha > 0$ için bir $\delta(\epsilon, u_0)$ seçilebiliyorsa (2.1) sisteminin $\bar{\psi}(u)$ çözümü üstel asimptotik kararlıdır denir.

Şimdi $\bar{\psi}_0 = 0 \in \Omega$ ve $f(u, 0) = 0$ olmak üzere (2.1) başlangıç değer probleminin $\psi = 0$ aşıkâr çözümünün kararlılık tanımlarını ifade edelim.

Tanım 2.5 Verilen her $\epsilon > 0$ için $\|\psi(u_0)\| < \delta$ olduğunda her $u \geq u_0$ için

$$\|\psi(u)\| < \epsilon$$

sağlanacak şekilde bir pozitif $\delta(\epsilon, u_0)$ sabiti bulunabiliyorsa (2.1) sisteminin $\psi = 0$ çözümüne (Lyapunov anlamında) kararlıdır denir. Aksi durumda $\psi = 0$ çözümü kararsızdır.

Tanım 2.6 (2.1) sisteminin $\psi = 0$ çözümü kararlı olsun. Eğer δ sayısı u_0 dan bağımsız seçilebiliyorsa bu durumda sıfır çözümüne düzgün kararlıdır denir.

Tanım 2.7 (2.1) sisteminin aşıkâr çözümü kararlı olsun. $\|\psi(u_0)\| < \delta_1$ olduğunda

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \|\psi(u)\| = 0$$

sağlanacak şekilde pozitif bir $\delta_1(\epsilon, u_0)$ sayısı bulunabiliyorsa (2.1) sisteminin $\psi = 0$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 2.8 (2.1) sisteminin $\psi = 0$ çözümü kararlı olsun. Verilen bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|\psi(u_1)\| < \delta, \quad u_1 \geq u_0$$

olduğu zaman

$$\|\psi(u)\| \leq \epsilon e^{-\alpha(u-u_1)}, \quad u \geq u_1$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ ve $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa o zaman (2.1) sisteminin $\psi = 0$ çözümüne üstel asimptotik kararlıdır denir.

Örnek 2.1

$$\frac{d\psi}{du} + 2\psi = u + 3, \quad \psi(0) = 0 \quad (2.2)$$

başlangıç değer probleminin çözümünün kararlılığını inceleyelim.

Çözüm 2.1 (2.2) başlangıç değer probleminin çözümü

$$\bar{\psi}(u) = \psi(u; 0, 0) = \frac{u+3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2u}$$

dir. Verilen diferensiyel denklemin $\psi(0) = \psi_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü

$$\psi(u) = \psi(u; 0, \psi_0) = \frac{u+3}{2} - \frac{1}{4} + (\psi_0 - \frac{5}{4})e^{-2u}$$

dir. $|\psi_0 - 0| < \delta$ olsun. Verilen her $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} |\psi(u) - \bar{\psi}(u)| &= |\psi_0 e^{-2u}| \\ &\leq |\psi_0| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\delta = \epsilon$ olduğunda çözüm düzgün kararlıdır. Ayrıca

$$\lim_{u \rightarrow \infty} |\psi(u) - \bar{\psi}(u)| = \lim_{u \rightarrow \infty} |\psi_0 e^{-2u}| = 0$$

olduğundan çözüm asimptotik kararlıdır.

Örnek 2.2

$$\psi' = \psi + u, \quad \psi(0) = 1 \quad (2.3)$$

başlangıç değer probleminin çözümünün kararlılığını inceleyelim.

Çözüm 2.2 (2.3) başlangıç değer probleminin çözümü

$$\bar{\psi}(u) = -u - 1 + 2e^u$$

bulunur. Ayrıca (2.3) diferensiyel denklemin $\psi(0) = \psi_0$ koşulunu sağlayan çözümü

$$\psi(u) = -u - 1 + (\psi_0 + 1)e^u$$

dir. Her $\epsilon > 0$ için $|\psi_0 - 1| < \delta$ olduğundan her $u \geq 0$ için $|\psi(u) - \bar{\psi}(u)| < \epsilon$ sağlanacak şekilde bir $\delta(\epsilon, 0) > 0$ bulabilirsek $\bar{\psi}(u)$ çözümüne kararlıdır diyebiliriz.

$$\begin{aligned} |\psi(u) - \bar{\psi}(u)| &= |(\psi_0 - 1)e^u| \\ &< \delta e^u \end{aligned}$$

olup $\delta e^u < \epsilon$ olacak biçimde bir δ belirleyemediğimizden verilen sistemin çözümü kararsızdır.

Şimdi dördüncü bölümde ele alınan impulsif yapay sinir ağı modelinin varlık-tekliğini ispatlamak için kullanılacak olan daralma dönüşümü ile ilgili tanımlar ifade edelim.

Tanım 2.9 $\check{A}$ boştan farklı bir küme olmak üzere

$$m_1) \check{d}(\acute{r}, \hat{w}) = 0 \iff \acute{r} = \hat{w},$$

$$m_2) \text{ Her } \acute{r}, \hat{w} \in \check{A} \text{ için } \check{d}(\acute{r}, \hat{w}) = \check{d}(\hat{w}, \acute{r}),$$

$$m_3) \text{ Her } \acute{r}, \hat{w}, \tilde{u} \in \check{A} \text{ için } \check{d}(\acute{r}, \hat{w}) \leq \check{d}(\acute{r}, \tilde{u}) + \check{d}(\tilde{u}, \hat{w}),$$

koşullarını sağlayan $\check{d}: \check{A} \times \check{A} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne $\check{A}$ üzerinde bir metrik ve $(\check{A}, \check{d})$ ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.10 $(\check{A}, \check{d})$ bir metrik uzay, $(\acute{r}_n)$, $\check{A}$ de bir dizi ve $\acute{r} \in \check{A}$ olmak üzere

$$\check{d}(\acute{r}_n, \acute{r}) \rightarrow 0$$

ise $(\acute{r}_n)$ dizisi $\acute{r}$ 'e yakınsıyor denir.

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \check{d}(\acute{r}_n, \acute{r}_m) = 0$$

ise $(\acute{r}_n)$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.11 $(\check{A}, \check{d})$ bir metrik uzay olsun. $\check{A}$ deki her Cauchy dizisi yakınsak ise $\check{A}$ 'ya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.12 $(\check{A}, \check{d})$ bir metrik uzay ve $\varphi: \check{A} \rightarrow \check{A}$ bir dönüşüm olsun. Her $\acute{r}, \hat{w} \in \check{A}$ için

$$\check{d}(\varphi(\acute{r}), \varphi(\hat{w})) < c\check{d}(\acute{r}, \hat{w})$$

olacak şekilde $c \in [0, 1)$ sayısı mevcut ise φ 'ye $\check{A}$ dan $\check{A}$ e bir daralma dönüşümüdür denir.

Teorem 2.1 (Daralma Dönüşümü Prensibi) $\check{A}$ bir tam metrik uzay ve $\varphi: \check{A} \rightarrow \check{A}$ den $\check{A}$ e bir daralma dönüşümü ise $\varphi(\acute{r}) = \acute{r}$ olacak şekilde bir tek $\acute{r} \in \check{A}$ vardır. Başka bir deyişle φ bir tek sabit noktaya sahiptir.

Önerme 2.1 (Tümevarım Prensibi)

$s \in \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}_s = \{k \in \mathbb{N} \mid s \leq k\} = \{s, s+1, \dots\}$ ve $S \subseteq \mathbb{N}_s$ olsun. Eğer,

(i) $s \in S$ ve

(ii) $k \in S \implies k+1 \in S$

şartları sağlanırsa $S = \mathbb{N}_s$ dır.

Tanım 2.13 $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun gradiyenti

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_1}, \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_n} \right)$$

vektörü olup ∇f ile de gösterilir.

Tanım 2.14 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle \nu, \mu \rangle = \sum_{i=1}^n \nu_i \mu_i$$

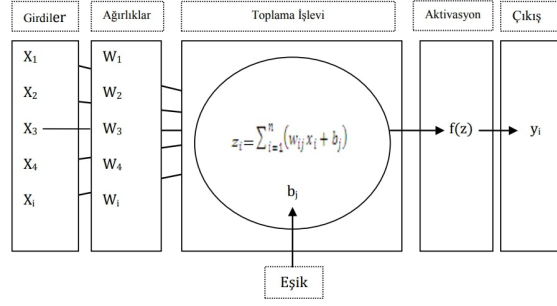
biçiminde tanımlı olan $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne ν ve μ vektörlerinin iç çarpımı denir.

2.2 Yapay Sinir Ağları

Tezin orijinal kısmı olan dördüncü bölümde uyumlu türev içeren impulsif Hopfield tipli sinir ağı modelini ifade eden diferensiyel denklem sisteminin üstel kararlılığı incelenmiştir. Bu yüzden bu kesimde yapay sinir ağlarının ne anlama geldiğinden, hangi alanlarda kullanıldığından ve matematiksel modellerde nasıl kullanıldığından bahsedilecektir.

Yapay zeka, bilgisayarlara veya makinelere, insana mahsus olan zihin yürütme ve öğrenme gibi yetenekleri yapay sinir ağları (YSA) ile kazandırmaktadır. YSA insan zihninin niteliklerinden olan öğrenme yolu ile güncel bilgiler türetebilme, yeni bilgiler oluşturabilme ve bulabilme gibi becerileri, herhangi bir yardıma ihtiyaç duymadan otomatik olarak gerçekleştirebilen yapılardır. Ayrıca YSA insan zihni model alınarak, öğrenme sürecinin matematiksel olarak örneklendirilmesi sonucunda ortaya çıkmıştır. YSA, sinir hücreleri olarak adlandırılan nöronlardan oluşmaktadır. Süreç elemanları olarak dile getirilen yapay sinir hücreleri beş ana elemandan oluşmaktadır

(Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Yapay sinir hücresi

Girdiler: Gelen bilgileri göstermektedir.

Toplama İşlevi: Hücreye giren toplam girdiyi hesaplayan fonksiyondur. Uygulanacak yapay sinir ağı modeline göre farklı fonksiyonlar kullanılabilmektedir. Çoğunlukla girdi değerleri ağırlık değerleri ile çarpılarak oluşmaktadır.

Aktivasyon Fonksiyonu: Girdi ve çıktı arasındaki bağlantıyı kurmakla görevlidir. Toplama fonksiyonundan gelen bilgileri işleyerek çıktı bilgilerini elde etmektedir.

Çıktı: Aktivasyon fonksiyonun ürettiği değerlerdir (Deveci 2012).

Yapay sinir ağları tek katmanlı ve çok katmanlı olarak ikiye ayrılmaktadır. Tek katmanlı YSA, girdi ve çıktı katmanlarından meydana gelmektedir ve lineer problemlerde tercih edilmektedir. Birden fazla girdi değerlerine sahiptirler. x' ler ile w değerleri çarpılarak çıktı değeri bulunabilir. Eşik değeri çıktının 0 olmasını engellemektedir ve her zaman 1 değerini göstermektedir. Çok katmanlı YSA girdi katmanını, gizli katmanlar ve çıktı katmanlarından meydana gelmektedir. Çok katmanlı YSA'nın en önemli özelliklerinden biri karmaşık problemlerin çözümlerinde kullanılmasıdır. Bu yüzden lineer olmayan problemlerde kullanılmaktadır. Birden çok girdiye ve birden fazla gizli katmana sahip olabilmektedir. Gizli katmanların sayısı problemin akışına göre değişiklik göstermektedir. Gizli katman probleme göre farklı fonksiyonlar ile işlenip çıktı katmanına aktarılmasını sağlamaktadır.

Dördüncü bölümde odaklanılan Hopfield tipli yapay sinir ağı modeli tek katmanlı yapay sinir ağı modeline örnek olarak verilebilir. Klasik bir Hopfield yapay sinir ağı modeli

$$\frac{d\psi_i}{du} = -a_i(u)\psi_i(u) + \sum_{j=1}^n b_{ij}f_j(\psi_j(u)) + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

diferensiyel denklem sistemi ile ifade edilir.

Çok katmanlı yapay sinir ağı modeline ise ilk olarak (Kosko 1987, 1988) tarafından önerilen aşağıdaki çift yönlü sinir ağı (BAM), modelini verilebilir.

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_i(u)}{du} &= -a_i\psi_i(u) + \sum_{j=1}^m p_{ji}f_j(\varphi_j(u)) + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{d\varphi_j(u)}{du} &= -b_j\varphi_j(u) + \sum_{i=1}^n q_{ij}g_i(\psi_i(u)) + d_j, \quad j = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

Sinir ağları ile ilgili matematiksel hesaplama çalışmaları 1943 yılında McCulloch ve Pitts (1943)'in yazdığı basit sinir ağı türlerinin aritmetik ya da mantıksal bir fonksiyon ile gösterildiği makale ile başlamıştır. Bunun üzerine diğer araştırmacılar tarafından beyin benzeri veya beyinden ilham alan bilgisayarların tasarımı üzerine yapılan araştırmaların ilginç olabileceği önerisi yapılmıştır. Yapay sinir ağlarının kullanım alanlarının ve uygulamalarının çeşitlenmesi farklı yapay sinir ağı modellerine ihtiyaç duyulmasına neden olmuştur. Hopfield 1982'de örüntü tanıma, optimizasyon ve sinyal işleme alanlarında yeni bir tür ilişkisel bellek ağı tasarlamıştır (Hopfield 1982, 1984). Hopfield tipi sinir ağları tipik olarak dinamik sistemler olarak modellenir. Her bir nöronun zaman içinde değiştiği yer diğer nöronlar ve mevcut durumu dışarıdan gelen girdilere bağlıdır. Sistemin dinamikleri bir dizi diferensiyel denklem tarafından yönetilir ve her bir nöronun durumunun nasıl değiştiğini açıklar. Hopfield tipi sinir ağlarının temel özelliklerinden biri desenleri bellekte saklama ve alma yetenekleridir. Ağlar bir dizi giriş modeliyle ve sinaptik ağırlıkların ayarlanmasıyla eğitilir. Böylece ağlar daha sonra kalabalık ya da eksik ifadelerle sunulduğunda bu kalıpları hafızadan geri getirebilir. Hopfield tipi sinir ağları, görüntü ve konuşma, tanıma, optimizasyon ve kontrol sistemleri gibi çeşitli alanlarda uygulanmış olup, bu alanlar karşılaşacağımız problemler için çok faydalıdır. Son yıllarda yapılan çalışmalarda farklı türden yapay sinir ağı modelleri ele alınmış ve çoğunlukla sistemlerin denge noktalarının kararlılığı için sağlanması gereken koşullar elde edilmiştir (Mohamad 2001, Wang ve Zou 2002, Mohamad ve Gopalsamy 2003, Tang vd. 2005, Cao vd. 2005, Jiang ve Cao 2008, Yadav vd. 2015, Akhmet vd. 2018, Akhmet ve Karacaoren 2018).

3. İMPALSİF DİFERENSİYEL DENKLEMLER

3.1 Giriş

Gerçek hayat problemlerinde sürecin durumunda ani değişimlere sebep olan etkiler mevcutsa problem impulsif diferensiyel denklemler ile modellenir. Temel olarak impulsif diferensiyel denklemler sabit zamanlı impulsif diferensiyel denklemler ve değişken zamanlı impulsif diferensiyel denklemler olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Sabit zamanlı bir impulsif diferensiyel denklem

$$\begin{cases} \psi'(u) = f(u, \psi(u)), & u \neq \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, \\ \Delta\psi(\theta_i) = I_i(\psi(\theta_i)) \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlıdır, burada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset I \times G$ açık bir alt küme, $I \subset \mathbb{R}$ açık aralık, $G \subset \mathbb{R}^n$ açık ve bağlantılı bir küme, I_i fonksiyonları G bölgesinde tanımlı fonksiyonlardır. $\{\theta_i\}$ reel sayıların artan bir dizisi olup $|i| \rightarrow \infty$ iken $|\theta_i| \rightarrow \infty$ olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca $\Delta\psi(\theta_i) = \psi(\theta_i^+) - \psi(\theta_i^-)$ olup $\psi(\theta_i^+) = \lim_{u \rightarrow \theta_i^+} \psi(u)$ ve $\psi(\theta_i^-) = \lim_{u \rightarrow \theta_i^-} \psi(u)$ dır. Ele alınan problemlere göre $\psi(u)$, θ_i noktalarında sağdan sürekli veya soldan sürekli kabul edilir. Bu açıklamalar ışığında (3.1) sisteminin çözüm tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 3.1 Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\psi : [u_0, u_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, fonksiyonuna (3.1) diferensiyel denkleminin bir çözümüdür denir:

- (i) Her $u \in [u_0, u_0 + \alpha)$ için $(u, \psi(u)) \in \Omega$,
- (ii) $u \in [u_0, u_0 + \alpha)$, $u \neq \theta_i$ için $\psi(u)$ sürekli diferensiyellenebilir olup ψ , (3.1) sistemindeki diferensiyel denklemini sağlar,
- (iii) $u = \theta_i$ noktalarında $\psi(u)$ soldan sürekli ve

$$\psi(\theta_i^+) = \psi(\theta_i^-) + I_i(\psi(\theta_i^-))$$

dir.

İmpuls etkisinin çözüm üzerindeki etkisini açıklayabilmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1 $\psi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\psi'(u) = 0, \quad u \neq \theta_i, \quad u \geq 0 \quad (3.2)$$

$$\Delta\psi(\theta_i) = \psi(\theta_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

impulsif diferensiyel denklemini

$$\psi(0^+) = 1 \quad (3.4)$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım, burada $\theta_i = i$, $i = 1, 2, \dots$ olup $\psi(u)$ nun θ_i noktalarında soldan sürekli olduğu kabul edilmektedir. Açık olarak (3.2) diferensiyel denkleminin $0 \leq u \leq 1$ aralığındaki çözümü $\psi(u) = c$, $c \in \mathbb{R}$, dir. Bu çözüme (3.4) koşulu uygulanırsa $\psi(u) = 1$, $0 \leq u \leq 1$, elde edilir.

(3.2) diferensiyel denkleminin $1 < u \leq 2$ aralığındaki çözümü $\psi(u) = c$, $c \in \mathbb{R}$ dir.

(3.3) impuls koşulu göz önüne alınırsa başlangıç koşulu

$$\psi(1^+) = 2\psi(1^-) = 2$$

olarak hesaplanır. Bu koşul $\psi(u) = c$, $1 < u \leq 2$, genel çözümünde uygulandığında $\psi(u) = 2$, $1 < u \leq 2$, çözümü elde edilir.

Şimdi (3.2) – (3.4) probleminin $2 < u \leq 3$ aralığı üzerindeki çözümünü hesaplayalım.

Önceki adımlarda olduğu gibi verilen diferensiyel denkleminin $2 < u \leq 3$ aralığı üzerindeki genel çözümü $\psi(u) = c$, $c \in \mathbb{R}$, dir. (3.3) impuls koşulundan

$$\psi(2^+) = 2\psi(2^-) = 4$$

olup bu koşul genel çözüm ile birlikte göz önüne alındığında $\psi(u) = 4$,

$2 < u \leq 3$ bulunur. Benzer işlemler tekrar edilerek (3.2) – (3.4) probleminin çözümü

$$\psi(u) = \begin{cases} \psi_0(u) = 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ \psi_n(u) = 2\psi_{n-1}(u), & n < u \leq n+1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

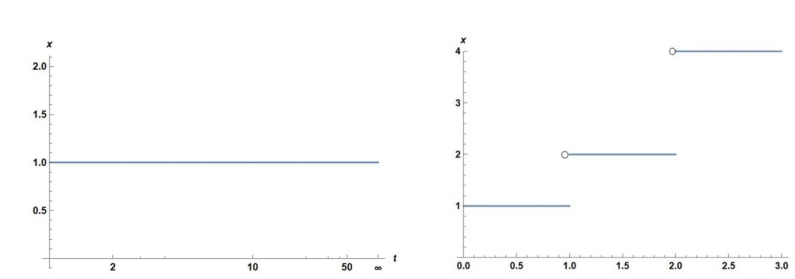
elde edilir.

Diğer taraftan açık olarak görülmektedir ki impuls içermeyen

$$\psi'(u) = 0, \quad u \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\psi(0) = 1 \quad (3.6)$$

başlangıç değer probleminin çözümü $\psi(u) = 1$, $u \geq 0$ dir. Şekil 3.1 de sırasıyla (3.5) – (3.6) ve (3.2) – (3.4) başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin grafikleri yer almaktadır.



Şekil 3.1 (3.5) – (3.6) ve (3.2) – (3.4) başlangıç değer problemlerinin çözümleri

Sabit zamanlı bir impulsif diferensiyel denklemde impuls anları önceden belirli olan sabit anlardır. Değişken zamanlı bir impulsif diferensiyel denklemde ise impulslar sistemin faz noktasının faz uzayında belirlenen yüzeylerle kesişmesi anında olmaktadır. Genel olarak değişken zamanlı bir impulsif diferensiyel denklem

$$\begin{cases} \psi'(u) = f(u, \psi(u)), & u \neq \theta_i(\psi), \quad i = 1, 2, \dots \\ \Delta\psi|_{u=\theta_i(\psi)} = I_i(\psi) \end{cases} \quad (3.7)$$

ile ifade edilir. Burada $u = \theta_i(\psi)$ impulsların gerçekleştiği yüzeyleri göstermektedir. Değişken zamanlı bir impulsif diferensiyel denklemde impulsların ortaya çıktığı anları açıklayabilmek için aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 3.2 $\psi(u)$ impuls anlarında soldan sürekli olmak üzere

$$\begin{cases} \psi'(u) = 0, & u \geq 0, \quad u \neq \theta_i(\psi) \\ \Delta\psi|_{u=\theta_i(\psi)} = \psi(\theta_i), \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.8)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada $\theta_i(\psi) = \psi - 1$ alınmıştır.

(a) (3.8) diferensiyel denklemi $\psi(0^+) = \frac{1}{2}$ başlangıç koşulu ile birlikte ele alınırsa çözüm $\theta_i(\psi) = \psi - 1$ doğrusuyla hiçbir noktada kesişmeyeceğinden $\psi(u) = \frac{1}{2}$ sürekli çözümü elde edilir (Şekil 3.2).

(b) (3.8) diferensiyel denklemini $\psi(0^+) = \frac{3}{2}$ başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım. Bu durumda $\psi(u) = \frac{3}{2}$ çözümü $u = \frac{1}{2}$ anında $\theta_i(\psi) = \psi - 1$ doğrusuna çarpacağından

sistemin ilk impuls anı $u_1 = \frac{1}{2}$ dir. O halde verilen başlangıç değer probleminin $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ aralığındaki çözümü $\psi(u) = \frac{3}{2}$ dir.

$$\psi\left(\frac{1}{2}^+\right) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

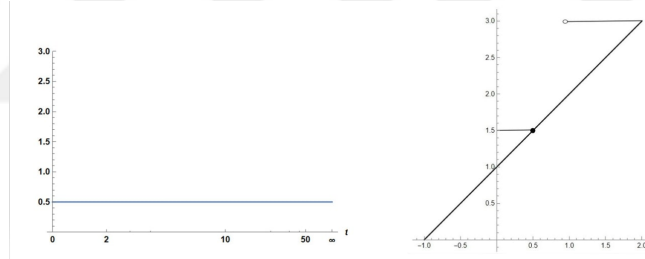
eşitliğinden $\psi\left(\frac{1}{2}^+\right) = 3$ bulunur.

$\psi(u) = c$ genel çözümüne $\psi\left(\frac{1}{2}^+\right) = 3$ koşulu uygulanırsa $\psi(u) = 3, u > \frac{1}{2}$ elde edilir. Ancak bu çözüm $u = 2$ anında $\theta_i(\psi) = \psi - 1$ doğrusuna çarpacağından ikinci impuls anı $u_2 = 2$ noktasıdır.

Dolayısıyla

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ 3, & \frac{1}{2} < u \leq 2 \end{cases}$$

yazılır. $\psi(2^+) = 2\psi(2^-) = 6$ olup benzer işlemler tekrar edilerek çözümün ifadesi elde edilebilir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 (3.8) sisteminin $\psi(0^+) = \frac{1}{2}$ ve $\psi(0^+) = \frac{3}{2}$ koşullarını sağlayan çözümleri

Literatürde impulsif diferensiyel denklemlerin temel teorisi, çözümlerin varlık-tekliği, lineer sistemlerin özelliklerinin anlatıldığı kitaplar mevcuttur (Lakshmikantham vd. 1989, Çiçin 2015). Değişken zamanlı impulsif sistemlerin incelenmesindeki en önemli zorluk vuru olayıdır.

Tanım 3.2 Eğer değişken zamanlı bir impulsif diferensiyel denklemin her çözümü herhangi bir $u = \theta_i(\psi)$ yüzeyi ile en fazla bir kere kesişiyorsa impulsif sistemde vuru olayı yoktur denir.

(3.8) sisteminde vuru olayının varlığı Şekil 3.2 de açıkça görülmektedir.

Teorem 3.1 (Samoilenko ve Perestyuk 1995)

Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (3.7) sisteminde vuru olayı meydana gelmez.

(i) Her $\psi \in G$ ve her $i = 1, 2, \dots$ için $\theta_i(\psi + I_i(\psi)) \leq \theta_i(\psi)$,

(ii) Her $\psi, \varphi \in G$ ve her $i = 1, 2, \dots$ için

$$\|\theta_i(\psi) - \theta_i(\varphi)\| \leq l \|\psi - \varphi\|$$

sağlanacak şekilde bir $l > 0$ sabiti mevcuttur,

(iii) $\sup_{J \times G} \|f(u, \psi)\| l < 1$ dir.

3.2 İmpulsif Diferensiyel Denklemlerde Kararlılık

Bu kesimde impulsif diferensiyel denklemler için kararlılık tanımları ifade edilip temel sonuçlardan bahsedilmektedir. Bu konuyla ilgili olarak ayrıntılı incelemeler Bainov ve Simeonov ile Samoilenko vd.'nin yazmış olduğu kitaplarda mevcuttur (Bainov ve Simeonov 1995, Samoilenko vd. 1995). Ayrıca Akhmet tarafından 2010 yılında yazılan kitap da impulsif diferensiyel denklemlerin kalitatif özelliklerinin anlatıldığı önemli bir kaynak niteliğindedir (Akhmet 2010).

$$\begin{cases} \psi'(u) = f(u, \psi), & u \neq \theta_i, \\ \Delta\psi|_{u=\theta_i} = I_i(\psi), & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.9)$$

impulsif diferensiyel denklemini ele alalım, burada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ açık bir alt cümle, $I_i : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ açık bir alt cümle olup $\theta_i < \theta_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ ve $i \rightarrow \infty$ için $\theta_i \rightarrow \infty$ dir. Ayrıca $\psi(u)$ çözümünün θ_i noktalarında soldan sürekli olduğu kabul edilmektedir.

$\xi(u) = \xi(u; u_0, \xi_{u_0})$ (3.9) denkleminin $\xi(u_0^+) = \xi(u_0)$ başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü olsun.

Tanım 3.3 $\zeta(t)$, (3.9) impulsif diferensiyel denkleminin herhangi bir diğer çözümü olmak üzere her $\epsilon > 0$ ve herhangi bir $u_0 \in \mathbb{R}^+$ için

$$\|\xi(u_0) - \zeta(u_0)\| < \delta \text{ iken } \|\xi(u) - \zeta(u)\| < \epsilon, \quad u \geq u_0$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon, u_0)$ sayısı mevcutsa (3.9) impulsif diferensiyel denkleminin $\xi(u)$ çözümü kararlıdır denir.

Eğer $\delta = \delta(\epsilon)$ olup u_0 değerinden bağımsız ise $\xi(u)$ çözümü düzgün kararlıdır denir.

Tanım 3.4 Eğer $\xi(u)$ çözümü kararlı ve $\zeta(u)$, (3.9) sisteminin diğer bir çözümü olmak üzere, her $u_0 \in \mathbb{R}^+$ için

$$\|\xi(u_0) - \zeta(u_0)\| < \mu \text{ iken } \lim_{u \rightarrow \infty} \|\xi(u) - \zeta(u)\| = 0$$

olacak şekilde bir $\mu = \mu(u_0) > 0$ değeri bulunabiliyorsa (3.9) impulsif diferensiyel denkleminin $\xi(u)$ çözümü asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 3.5 Eğer $\xi(u)$ çözümü kararlı ve $\zeta(u)$, (3.9) sisteminin diğer bir çözümü olmak üzere, her $\epsilon > 0$, herhangi bir $u_0 \in \mathbb{R}^+$ ve u'_0 dan bağımsız bir $\mu > 0$ için

$$\|\xi(u_0) - \zeta(u_0)\| < \mu \text{ iken } \|\xi(u) - \zeta(u)\| < \epsilon, \quad u \geq u_0 + T(\epsilon)$$

olacak şekilde bir $T(\epsilon) > 0$ değeri mevcut ise (3.9) impulsif diferensiyel denkleminin $\xi(u)$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır denir.

Özel olarak $\psi = 0$, (3.9) impulsif diferensiyel denkleminin bir çözümü ise aşağıda vereceğimiz tanımlar geçerlidir.

Tanım 3.6 Her $\epsilon > 0$ ve herhangi bir $u_0 \in \mathbb{R}^+$ için

$$\|\psi_0\| < \delta \text{ iken } \|\xi(u, u_0, \psi_0)\| < \epsilon, \quad u \geq u_0$$

sağlanacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon, u_0) > 0$ değeri mevcut ise (3.9) impulsif diferensiyel denkleminin $\psi = 0$ çözümü kararlıdır denir.

Eğer $\delta = \delta(\epsilon)$ olup, u_0 değerinden bağımsız ise $\psi = 0$ çözümü düzgün kararlıdır denir.

Tanım 3.7 Eğer $\psi = 0$ çözümü kararlı ve her $u_0 \in \mathbb{R}^+$ için

$$\|\psi_0\| < \mu \text{ iken } \lim_{u \rightarrow \infty} \|\xi(u, u_0, \psi_0)\| = 0$$

olacak şekilde bir $\mu = \mu(u_0) > 0$ değeri varsa (3.9) impulsif diferensiyel denkleminin $\psi = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır denir.

İyi bilinmektedir ki gerçek hayat problemleri modellenirken lineer olmayan diferensiyel denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi impulsif diferensiyel denklemleri çözmek de kolay değildir. Bu durumda

diferensiyel denklemin çözümünü bulmadan çözümlerin niteliksel özelliklerinin incelenmesine yardımcı olacak yöntemlere ihtiyaç vardır. 1949 yılında Lyapunov tarafından inşa edilen ve kendi adıyla anılan metot diferensiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık incelemesinde de yaygın bir şekilde kullanılmaktadır (Samoilenko ve Perestyuk 1995).

$W(u, \psi)$

$$Z_0 = \{(u; \psi) \mid u \geq u_0, \|\psi\| < h_0\}$$

bölgesinde reel değerli, sürekli diferensiyellenebilir ve $W(u, 0)$ özelliği sağlanacak şekilde bir fonksiyon olsun.

Tanım 3.8 Her $\|\psi\| < h$ için sürekli ve

$$\begin{aligned} W(u, \psi) &\geq P(\psi) > 0, \psi \neq 0 \\ P(0) &= 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde reel değerli bir P fonksiyonu mevcutsa W fonksiyonuna Z_0 bölgesinde pozitif definittir denir.

Tanım 3.9 Her $\|\psi\| < h$ için sürekli ve

$$W(u, \psi) \leq -P(\psi) < 0, \psi \neq 0$$

olacak şekilde reel değerli bir P fonksiyonu mevcutsa W fonksiyonuna Z_0 bölgesinde negatif definittir denir.

Tanım 3.10 Her $(u, \psi) \in Z_0$ için

$$W(u, \psi) \geq 0$$

sağlanıyorsa W fonksiyonuna Z_0 bölgesinde pozitif yarı definittir denir.

Benzer olarak her $(u, \psi) \in Z_0$ için

$$W(u, \psi) \leq 0$$

sağlanıyorsa W fonksiyonuna Z_0 bölgesinde negatif yarı definittir denir.

Artık bir impulsif diferensiyel denklemin sıfır çözümünün kararlılığını garanti eden yeter koşulları ifade edebiliriz.

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{du} = f(u, \psi), & u \neq \theta_i(\psi), \\ \Delta\psi|_{u=\theta_i(\psi)} = I_i(\psi) \end{cases} \quad (3.10)$$

impulsif diferensiyel denklemini ele alalım, burada $f(u, 0) = 0$, $I_i(0) = 0$, $\theta_i(\psi) < \theta_{i+1}(\psi)$, $i = 1, 2, \dots$ dır. $f(u, \psi)$ ve $I_i(\psi)$ fonksiyonlarının

$$Z = \{(u, \psi) \mid u \geq u_0, \|\psi\| \leq h < h_0\}$$

bölgesinde sürekli olduklarını ve h sayısı ile $\theta_i(\psi)$ in Teorem 3.1 in koşullarını sağladığını kabul edelim. Bu durumda (3.10) sisteminde vuru olayı yoktur.

$W(u, \psi)$ fonksiyonun (3.10) sistemi boyunca $u \neq \theta_i$ için u ye göre türevi

$$W'_{(3.10)}(u, \psi) = \frac{\partial W(u, \psi)}{\partial u} + \langle \text{grad}_{\psi} W(u, \psi), f(u, \psi) \rangle$$

olarak tanımlıdır, burada $\text{grad}_{\psi} W(u, \psi)$ ifadesi W fonksiyonunun ψ değişkenine göre gradiyent vektörünü göstermektedir, $\langle f_1, f_2 \rangle$ ifadesi de f_1 ve f_2 vektörlerinin iç çarpımıdır.

Teorem 3.2 (Samoilenko ve Perestyuk 1995)

Z bölgesinde aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif definit bir $W(u, \psi)$ fonksiyonu mevcutsa (3.10) sisteminin sıfır çözümü kararlıdır:

- (i) $W'_{(3.10)}(u, \psi)$ negatif yarı definit,
- (ii) $W(\theta_i(\psi), \psi + I_i(\psi)) \leq W(\theta_i(\psi), \psi)$.
- (ii) koşulu yerine

$$(iii) W(\theta_i(\psi), \psi + I_i(\psi)) - W(\theta_i(\psi), \psi) \leq -\xi(W(\theta_i(\psi), \psi))$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\xi(0) = 0$, her $s > 0$ için $\xi(s) > 0$ ve $s \geq 0$ için sürekli olan bir $\xi(s)$ fonksiyonu mevcutsa (3.10) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

Örnek 3.3 (Akhmet 2010) $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, $u = \theta_i(\psi)$, $i = 1, 2, \dots$, impulsların

olduğu yüzeyler ve $\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{cases} \psi_1'(u) = \psi_2(u), & u \neq \theta_i(\psi) \\ \psi_2'(u) = -\psi_1(u), & u \neq \theta_i(\psi) \\ \Delta\psi_1|_{u=\theta_i(\psi)} = (\cos\beta - 1)\psi_1 - (\sin\beta)\psi_2 \\ \Delta\psi_2|_{u=\theta_i(\psi)} = (\sin\beta)\psi_1 + (\cos\beta - 1)\psi_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

sistemini ele alalım. Burada $f_1(u, \psi) = \psi_2$, $f_2(u, \psi) = -\psi_1$ olmak üzere $f(u, \psi) = (f_1(u, \psi), f_2(u, \psi))^T$, $I_i(\psi) = ((\cos\beta - 1)\psi_1 - (\sin\beta)\psi_2, (\sin\beta)\psi_1 + (\cos\beta - 1)\psi_2)^T$ dir. f ve I_i sürekli fonksiyonlardır. $\theta_i(\psi)$ in Teorem 3.1 in hipotezlerini sağladığını kabul edelim. Yani (3.11) sisteminde vuru olayı olmasın. Lyapunov yöntemini kullanarak (3.11) sisteminin $\psi(u) \equiv (0, 0)^T$ çözümünün kararlılığını inceleyelim.

$$W(u) = W(u, \psi) = \psi_1^2 + \psi_2^2 \quad (3.12)$$

fonksiyonu pozitif definit bir fonksiyondur. (3.12) fonksiyonun (3.11) sistemi boyunca $u - ya$ göre türevi, $u \neq \theta_i(\psi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W'_{(3.11)}(u, \psi) &= \frac{\partial W(u, \psi)}{\partial u} + \langle \text{grad}_\psi W(u, \psi), f(u, \psi) \rangle \\ &= \langle (2\psi_1, 2\psi_2), (\psi_2, -\psi_1) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $W'_{(3.11)}(u, \psi)$ fonksiyonu negatif yarı definittir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \psi + I_i(\psi) &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\cos\beta - 1)\psi_1 - (\sin\beta)\psi_2 \\ (\sin\beta)\psi_1 + (\cos\beta - 1)\psi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos\beta)\psi_1 - (\sin\beta)\psi_2 \\ (\sin\beta)\psi_1 + (\cos\beta)\psi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} W(\theta_i(\psi), \psi + I_i(\psi)) &= [(\cos\beta)\psi_1 - (\sin\beta)\psi_2]^2 + [(\sin\beta)\psi_1 + (\cos\beta)\psi_2]^2 \\ &= \psi_1^2 + \psi_2^2 \\ &\leq W(\theta_i(\psi), \psi) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Teorem 3.2 den (3.11) sisteminin $\psi(u) \equiv (0, 0)^T$ aşıkâr çözümü kararlıdır.

Literatürde impulsif diferensiyel denklemlerin kararlılığının incelendiği pek çok çalışma mevcuttur. Berezansky ve Braverman 1994 yılında yaptıkları çalışmada lineer impulsif

$$\begin{cases} \psi'(\acute{s}) + K(\acute{s})\psi(\acute{s}) = f(\acute{s}), \acute{s} \in [0, \infty) \\ \psi(\tau_i + 0) = M_i\psi(\tau_i - 0) \end{cases}$$

diferensiyel denklemini ele almışlardır. Banach uzayında çalışarak ele aldıkları problemin sınırlı çözümlerinin varlığını ispatlamışlar ve üstel kararlılık için yeter koşullar elde etmişlerdir (Berezansky ve Braverman 1994). Bu çalışmanın devamında gecikmeli lineer impulsif diferensiyel denklemler incelenmiş, çözümlerin sınırlılığı ve üstel kararlılığı için sonuçlar elde edilmiştir. (Anokhin vd. 1995, Berezansky ve Braverman 1997).

Daha sonra yapılan çalışmalarda sabit τ gecikmeli ve sabit zamanlı impulsif

$$\begin{cases} \psi'(\acute{s}) = f(\acute{s}, \psi(\acute{s} - \tau)), \acute{s} \geq \acute{s}_0, \acute{s} \neq \acute{s}_k \\ \psi(\acute{s}_k^+) - \psi(\acute{s}_k) = I_k(\psi(\acute{s}_k)), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

diferensiyel denklemi ve bazı genelleştirilmeleri ele alınmış sıfır çözümünün kararlılığı, düzgün kararlılığı ve asimptotik kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir (Yu ve Zhang 1996, Yu 2001(a), Yu 2001(b), Akhmet 2002, Tang vd. 2002).

Bu çalışmalarda uygulanan yöntem genel olarak

$$\begin{cases} \psi'(\acute{s}) = p(\acute{s})x(\acute{s} - \tau), \acute{s} \geq \acute{s}_0, \acute{s} \neq \acute{s}_k \\ \psi(\acute{s}_k^+) - \psi(\acute{s}_k) = b_k\psi(\acute{s}_k), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

lineer diferensiyel denklemdeki $p(\acute{s})$ fonksiyonu ve b_k sabitleri ile lineer olmayan denklemdeki f ve I_k fonksiyonlarının sınırlandırılmasına dayanmaktadır. Ancak literatürde mevcut olan ve özellikle gerçek hayat problemleri modellerinin kararlılık incelemesinde kullanılan en etkili yöntem adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi Lyapunov yöntemidir (Liu 1995, Shen ve Luo 1999, Yan ve Shen 1999, Liu 2001, Li ve Wu 2016).

3.3 İmpulsif Yapay Sinir Ağları

Bu kesimde literatürde yer alan impulsif sinir ağları ve çalışmaları incelenecektir. Yapay sinir ağları konusu son zamanlarda çeşitli bilimsel disiplinlerdeki problemleri

çözmek için önemli bir araç haline gelmiştir. Literatürde önerilen ve incelenen bir çok sinir ağı türü arasında Hopfield tipli sinir ağı ilişkisel hafıza, örüntü tanıma, optimizasyon, model tanımlama ve sinyal işleme gibi konuları ele aldığından önemli bir yapay sinir ağı türüdür (Hopfield 1982, 1984).

Genel olarak bir Hopfield tipli sinir ağı modeli

$$\begin{cases} \frac{d\psi_i(u)}{du} = -a_i\psi_i(u) + \sum_{j=1}^n b_{ij}f_j(\psi_j(u)) + c_i, \\ \psi(u_0) = \psi_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.13)$$

sistemi ile ele alınmaktadır. Burada $\psi_i(u)$ fonksiyonu i . nöronun t anındaki durum değişkenini ifade etmektedir. $a_i > 0$, sabitleri ağ bağlantısı kesildiğinde i . nöronun potansiyelinin dinlenme durumuna geçme hız oranını, b_{ij} , sabitleri i . nöron ile j . nöron arasındaki bağlantı ağırlıklarını, c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sabitleri ağın dışında i . birime girişi temsil etmektedir. $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, j . nöron üzerindeki aktivasyon fonksiyonudur.

Gopalsamy 2004 yılında yazmış olduğu makalesinde Hopfield tipli sinir ağı modelinin denge noktasının varlık-tekliliği ve asimptotik kararlılığı için yeter koşullar elde etmiştir. Yapmış olduğu bu yayın konu üzerine yapılan çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır.

Şimdi aşağıdaki Hopfield tipli sinir ağı modelini ele alalım.

$$\begin{cases} \frac{d\psi_i}{du} = -a_i\psi_i(u) + \sum_{j=1}^n b_{ij}f_j(\psi_j(u)) + c_i, \quad u > u_0, \quad u \neq u_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \psi(u_0^+) = \psi_0 \in \mathbb{R}^n, \\ \psi_i(u_k^+) - \psi_i(u_k^-) = I_k(\psi_i(u_k^-)), \quad k \in \mathbb{Z}^+, \\ k \rightarrow \infty \text{ iken } u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.14)$$

Burada $\psi(u) = (\psi_1(u), \psi_2(u), \dots, \psi_n(u))^T \in \mathbb{R}^n$ (3.14) sisteminin çözümü olup aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) Her bir $\psi_i(u)$, bileşeni (u_0, β) , $\beta > u_0$, aralığında parçalı sürekli bir fonksiyondur.
- (ii) $\psi(u_k^+)$ ve $\psi(u_k^-)$ limitleri mevcut olup $u = u_k$ noktalarında $\psi(u)$ sağdan süreklidir.
- (iii) ψ her $(u_{k-1}, u_k) \subset (u_0, \beta)$ aralığında diferensiyellenebilirdir.
- (iv) $I_k(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ süreklidir, $k \in \mathbb{Z}^+$

(v) a_i , b_{ij} ve c_i reel sabitlerdir.

Yapay sinir ağları optimizasyon problemlerinin çözümü için kullanıldığında matematiksel olarak ilk hedef tek denge noktasının varlığı ve kararlılığının gösterilmesidir.

Tanım 3.11 (3.14) sisteminin denge noktası sabit

$$\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$$

vektörü olup aşağıdaki sistemi sağlar:

$$a_i \psi_i^* = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(\psi_j^*) + c_i, \quad (3.15)$$

ve

$$I_k(\psi_i^*) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.16)$$

Gopalsamy yaptığı çalışmada (3.14) sisteminin denge noktasının varlık ve tekliğini farklı normları kullanarak ispatlayıp kararlılık için yeter koşullar elde etmiştir. Aşağıdaki Lemma ispatlanırken her $v \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|v\|_1 = \sum_{j=1}^n |v_j|$$

ile tanımlı olan l_1 normu kullanılmıştır.

Lemma 3.1 $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif sabitler olsun. $f_j(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aktivasyon fonksiyonlarının global Lipschitz sürekli olduğunu kabul edelim. Yani her $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ve $(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$|f_j(\hat{u}_j) - f_j(\hat{w}_j)| \leq L_j |\hat{u}_j - \hat{w}_j|, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

sağlanacak şekilde pozitif L_j sabitleri mevcut olsun. Eğer her $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$a_i > L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \quad (3.17)$$

sağlanırsa (3.15) sisteminin bir tek çözümü vardır.

İspat. (3.17) eşitsizliği sağlanırsa

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{L_i}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| < 1$$

olduğu açıktır. Şimdi uygunluk için bir β_1 sabitini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\beta_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{L_i}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right] \quad (3.18)$$

(3.15) eşitliğine $a_i \psi_i^* = \varphi_i^*$, dönüşümü uygulanırsa

$$\varphi_i^* = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j \left(\frac{\varphi_j^*}{a_j} \right) + c_i, \quad (3.19)$$

denklemi sağlanır. Yani (3.15) sisteminin tek çözümünün olduğunu göstermek için, (3.19) sisteminin tek bir çözümünün varlığını göstermek yeterlidir. Şimdi $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tanımlı olmak üzere

$$P(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n) = \begin{cases} P_1(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n) \\ P_2(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n) \\ \vdots \\ P_n(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n) \end{cases}$$

dönüşümünü göz önüne alalım, burada

$$P_i(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n) = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j \left(\frac{\hat{w}_j}{a_j} \right) + c_i,$$

dir. $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümünün $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. Her $\hat{u}, \hat{w} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \|P(\hat{w}) - P(\hat{u})\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} \left[f_j \left(\frac{\hat{w}_j}{a_j} \right) - f_j \left(\frac{\hat{u}_j}{a_j} \right) \right] \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \left| \frac{\hat{w}_j - \hat{u}_j}{a_j} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \frac{L_i}{a_i} |\hat{w}_i - \hat{u}_i| \\ &\leq \left[\max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{L_i}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right) \right] \sum_{i=1}^n |\hat{w}_i - \hat{u}_i| \\ &= \beta_1 \|\hat{w} - \hat{u}\|_1 \end{aligned}$$

olup hipotezden $\beta_1 < 1$ dir. O halde $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Böylece Banach sabit nokta teoreminden $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümünün

bir tek sabit noktası vardır. Bu da (3.19) sisteminin bir çözümüdür. (3.19) sisteminin tek bir çözüme sahip olması bize, (3.15) sisteminin bir tek çözüme sahip olduğunu gösterir. ■

Şimdi (3.14) sisteminin denge noktasının kararlılığı incelenecektir. (3.14) sistemine

$$\varphi_i(u) = \psi_i(u) - \psi^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_i(u)}{du} = -a_i\varphi_i(u) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(\varphi_j(u)), & u \neq u_k, \quad u > u_0 \\ \varphi_i(u_k^+) = T_k(\varphi_i(u_k^-)), & k \in \mathbb{Z}^+ \\ \varphi(u_0^+) = \psi_0 - \psi^* \end{cases} \quad (3.20)$$

sistemi elde edilir, burada

$$\begin{aligned} g_j(\varphi_j(u)) &= f_j(\varphi_j(u) + \psi_j^*) - f_j(\psi_j^*), \\ T_k(\varphi_i(u_k^-)) &= \varphi_i(u_k^-) + I_k(\varphi_i(u_k^-) - \psi_i^*), \end{aligned}$$

dir. $f_j(\cdot)$ Lipschitz koşulunu sağladığından her $j = 1, 2, \dots, n$ için $g_j(\cdot)$ nin de aynı Lipschitz sabitli Lipschitz koşulunu sağladığı kolaylıkla görülebilir. Ayrıca $g_j(0) = 0$ ve $|g_j(\varphi_j)| \leq L_j |\varphi_j|$, $j = 1, 2, \dots, n$, dir. Ek olarak $T_k(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları da sürekli ve azalmayan olup $T_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ dir.

O halde (3.20) sistemi aşikar çözüme sahiptir ve (3.14) sisteminin x^* çözümünün kararlılığını incelemek yerine (3.20) sisteminin aşikar çözümünün kararlılığını incelemek yeterli olacaktır.

Teorem 3.3 Kabul edelim ki

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_i > 0 \text{ ve } \beta_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{L_i}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right] < 1 \quad (3.21)$$

sağlansın. Ayrıca $T_k(\cdot)$ fonksiyonları

$$\sum_{i=1}^n T_k(|\varphi_i(\cdot)|) \leq T_k \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(\cdot)| \right) \quad (3.22)$$

yarı lineerlik özelliğini sağlasın. Eğer

$$\left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \left[a_i - L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right] \right\} (u_k - u_{k-1}) - \ln \left(\frac{T_k(\sigma)}{\sigma} \right) \geq \gamma_k > 0 \quad (3.23)$$

sağlanacak şekilde pozitif γ_k , $k = 1, 2, \dots$ ve σ sabitleri mevcutsa ve $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ serisi ıraksak oluyorsa bu durumda (3.20) sisteminin aşikar çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. $\beta_1 < 1$ olduğundan (3.21) eşitsizliğinden

$$a_i > L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|,$$

dir ve buradan

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left[a_i - L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right] > 0$$

dır.

$$\beta_1^* = \min_{1 \leq i \leq n} \left[a_i - L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right] \quad (3.24)$$

seçelim. $\beta_1^* > 0$ dır.

(3.14) sisteminin ψ^* denge noktasının varlığı Lemma 3.1 den elde edilir. Ayrıca (3.14) sisteminin ψ^* denge noktası (3.20) sisteminin aşikar çözümüne karşılık gelir.

Şimdi

$$W(u) = W(\varphi(u)) = \sum_{i=1}^n |\varphi_i(u)| \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlı olan Lyapunov fonksiyonunu göz önüne alalım. $u \neq u_k$ için, (3.20) sisteminin çözümü boyunca sağ taraflı türevi hesaplanıp g_j fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sağladığı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^+ W(u)}{du} &\leq \sum_{i=1}^n \left[-a_i |\varphi_i(u)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |g_j(\varphi_j(u))| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[-a_i |\varphi_i(u)| + \sum_{j=1}^n |b_{ji}| L_i |\varphi_i(u)| \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[-(a_i - L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|) |\varphi_i(u)| \right] \\ &\leq -\beta_1^* \sum_{j=1}^n |\varphi_j(u)| = -\beta_1^* W(t), \quad u \neq u_k \end{aligned}$$

elde edilir. O halde her (u_k, u_{k+1}) , $k = 0, 1, 2, \dots$ için $W(t)$ artmayandır. Kabul edelim ki bir $j \in \{1, 2, \dots\}$ için $u_0 \in [u_{j-1}, u_j]$ olsun. $T_j(\cdot)$ fonksiyonu sürekli ve $T_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$, olduğundan verilen her $\epsilon > 0$ için $T_j(\delta) < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ seçilebilir. Ayrıca $W(t_0) < \delta$ ise

$$W(u_j^-) \leq W(t_0) \leq T_j(W(u_0)) \leq T_j(\delta) < \epsilon$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
W(u_j^+) &= \sum_{i=1}^n |\varphi_i(u_j + 0)| = \sum_{i=1}^n T_j(|\varphi_i(u_j -)|) \\
&\leq T_j \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(u_j -)| \right) \\
&\leq T_j(W(u_j -)) \leq T_j(W(u_0)) \\
&\leq T_j(\delta) < \epsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

$k \geq j$ için eğer $\{W(u_k +)\}$ dizisinin artmayan olduğunu gösterirsek $u \geq u_j$ için $W(u) = W(\varphi(u)) < \epsilon$ eşitsizliği sağlanır. Kabul edelim ki $k \geq j + 1$ olsun.

Her $i = j + 1, j + 2, j + 3, \dots, k - 1$ için

$$W(u_i +) \leq W(u_{i-1} +) \leq \dots \leq W(u_j +) < \epsilon$$

bulunur. Buradan

$$\frac{d^+ W(u)}{du} \leq -\beta_1^* W(\varphi(u)) = -\beta_1^* W(u), \quad u \neq u_k \quad (3.26)$$

dır. (3.26) eşitsizliğinin her iki yanının (u_{k-1}, u_k) aralığında integrali alınırsa

$$\int_{u_{k-1}^+}^{u_k^-} \frac{dW}{W} \leq - \int_{u_{k-1}}^{u_k} \beta_1^* dt$$

veya

$$\int_{W(u_{k-1}^+)}^{W(u_k^-)} \frac{ds}{s} \leq - \int_{u_{k-1}}^{u_k} \beta_1^*$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$\int_{W(u_k^-)}^{W(u_k^+)} \frac{ds}{s} \leq \int_{W(u_k^-)}^{T_k(W(u_k^-))} \frac{ds}{s}$$

dır. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
\int_{W(u_{k-1}^+)}^{W(u_k^-)} \frac{ds}{s} + \int_{W(u_k^-)}^{W(u_k^+)} \frac{ds}{s} &= \int_{W(u_{k-1}^+)}^{W(u_k^+)} \frac{ds}{s} \\
&\leq -\beta_1^*[u_k - u_{k-1}] + \int_{W(u_k^-)}^{T_k(W(u_k^-))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve hipotezden dolayı

$$\int_{W(u_{k-1}^+)}^{W(u_k^+)} \frac{ds}{s} \leq -\beta_1^*[u_k - u_{k-1}] + \ln\left(\frac{T_k(W(u_k^-))}{W(u_k^-)}\right) \leq -\gamma_k < 0$$

bulunur. O halde

$$W(u_k^+) < W(u_{k-1}^+), \quad k = 1, 2, \dots$$

elde edilir ki bu $\{W(u_k^+)\}$ dizisinin artmayan olduğunu ifade eder. Böylelikle

$$W(u) \leq W(u_0) \leq T_k(W(u_0)) < T_k(\delta) < \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

dır ve (3.20) sisteminin aşıkâr çözümünün kararlılığının ispatı tamamlanmış olur.

Çünkü

$$\sum_{i=1}^n |\varphi_i(u_0)| < \delta \implies \sum_{i=1}^n |\varphi_i(u)| < \epsilon$$

dur. Şimdi (3.20) sistemini ispatlamak için $k \rightarrow \infty$ iken $\{W(u_k^+)\} \rightarrow 0$ olduğunu gösterilmelidir. Kabul edelim ki $\eta > 0$ mevcut olsun öyle ki

$$k \geq j \text{ için } W(u_k^+) \geq \eta$$

sağlansın. Bu durumda

$$\eta \leq W(u_k^+) \leq W(u_{k-1}^+)$$

ve böylece

$$\gamma_k \leq \int_{W(u_k^+)}^{W(u_{k-1}^+)} \frac{ds}{s} \leq \frac{W(u_{k-1}^+) - W(u_k^+)}{\eta}$$

veya

$$W(u_k^+) \leq W(u_{k-1}^+) - \gamma_k \eta$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$W(u_{j+n}^+) \leq W(u_j^+) - \eta \sum_{k=j+1}^{j+n} \gamma_k$$

ve $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ serisinin ıraksak olmasından dolayı $n \rightarrow \infty$ iken $W(u_{j+n}^+) \rightarrow -\infty$ dir.

$W(t)$ Lyapunov fonksiyonu negatif olmadığı için bu bir çelişkidir ve $\eta > 0$ değildir.

O halde $k \rightarrow \infty$ iken $W(u_k^+) \rightarrow 0$ dır. $W(u)$ Lyapunov fonksiyonun tanımından ve $u \rightarrow \infty$ iken $W(u) \rightarrow 0$ olduğundan (3.20) sisteminin aşıkâr çözümü asimptotik kararlıdır. ■

İmpulsların yapay sinir ağı sistemleri üzerindeki etkisini görebilmek için pek çok matematikçi bu konuda araştırma yapmaya yönelmiştir (Guan ve Chen 1999, Li 2005, Stamova vd. 2013, Stamova vd. 2014, Agarwal vd. 2019). Guan ve Chen Hopfield türünde impulsif modeli ele alıp denge noktasının global üstel kararlılığını incelemişlerdir.

Stamova vd. ise aşağıdaki supremum içeren impulsif modeli çalışmışlardır.

$$\begin{cases} \frac{d\psi_i(u)}{du} = -c_i\psi_i(u) + \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j(\psi_j(u)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}f_j\left(\sup_{s \in [t-\tau_j(t), t]} \psi_j(s)\right) + I_i, \\ u \neq u_k, \quad u > u_0, \\ \Delta\psi_i(u_k) = \psi_i(u_k + 0) - \psi_i(u_k) = P_{ik}(\psi_i(u_k)), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.27)$$

Yaptıkları incelemede aşağıdaki varsayımlar kabul edilmiştir:

(i) $L_i > 0$ sabiti vardır öyle ki her $s, t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$|f_i(s) - f_i(t)| \leq L_i |s - t|$$

Lipschitz koşulu sağlansın.

(ii) (3.27) sisteminin bir tek ψ^* denge noktası vardır öyle ki

$$\begin{aligned} c_i\psi_i^* &= \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j(\psi_j^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij}f_j(\psi_j^*) + I_i \\ P_{ik}(\psi_i^*) &= 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

dır.

(iii) P_{ik} fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir,

(iv) $k \rightarrow \infty$ iken $u_k \rightarrow \infty$ ve $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k < u_{k+1} < \dots$ dir.

(v) f_i fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlıdır, $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorem 3.4 (Stamova vd. 2013) Aşağıdaki koşullar sağlansın:

1) (i) - (v) koşulları sağlasın.

2) c_i, a_{ij} ve b_{ij}

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(c_i - L_i \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \right) > \max_{1 \leq i \leq n} \left(L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right) > 0$$

eşitsizliğini sağlasın.

3) $P_{ik}(\psi_i(u_k)) = -\sigma_{ik}(\psi_i(u_k) - \psi_i^*), 0 < \sigma_{ik} < 2, i = 1, 2, \dots, n, k \in \mathbb{Z}^+$

bu durumda (3.27) sisteminin ψ^* denge noktası global üstel karardır.

Agarwal vd. ise 2019 yılında yaptıkları çalışmada değişken zamanlı impulsif Hopfield türündeki sistemin kararlılık özelliklerini incelemişlerdir.

$$\begin{cases} \psi'_i(u) = -c_i(u)\psi_i(u) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(u)f_j(\psi_j(u)) + I_i(u), & u \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (u_k, s_{k+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \psi_i(u) = \Phi_{k,i}(u, \psi_i(s_k - 0)), & u \in (s_k, u_k], \quad k = 1, 2, \dots \\ \psi_i(u_0) = \psi_i^0, \end{cases}$$

Yapay sinir ağı modelleri içinde yer alan diğer önemli bir model de tekrarlayan sinir ağı modelidir. İlk olarak Kosko (1987, 1988) tarafından önerilen çift yönlü sinir ağları (BAM), özel bir tekrarlayan sinir ağı modelidir. Bu sinir ağlarına çift yönlü ilişkilendirilebilir bellek de denir. Tekrarlayan yapay sinir ağları çıkış düğümlerinden giriş düğümlerine geri giden bağlantılara sahip olabilir. 2005 yılında Li tekrarlayan sinir ağı (BAM) modelinin denge noktasının varlığını ve üstel kararlılığını incelemiştir (Li, 2005).

Genel olarak tekrarlayan sinir ağı modeli

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i(u)}{du} &= -a_i\psi_i(u) + \sum_{j=1}^m p_{ji}f_j(\varphi_j(u)) + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{d\varphi_i(u)}{du} &= -b_j\varphi_j(u) + \sum_{i=1}^n q_{ij}g_i(\psi_i(u)) + d_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

şeklindeir.

Li'nin ele aldığı sabit zamanlı belirli impuls anlarında durum yer değiştirmelerine

maruz kalan sistem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_i(u)}{du} = -a_i\psi_i(u) + \sum_{j=1}^m p_{ji}f_j(\varphi_j(u - \tau_{ji})) + c_i, \quad u > 0, \quad u \neq u_k \\ \Delta\psi_i(u_k) = I_k(\psi_i(u_k)) \\ \frac{d\varphi_j(u)}{du} = -b_j\varphi_j(u) + \sum_{i=1}^n q_{ij}g_i(\psi_i(u - \sigma_{ij})) + d_j, \quad u > 0, \quad u \neq u_k \\ \Delta\varphi_j(u_k) = J_k(\varphi_j(u_k)), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \end{array} \right. \quad (3.28)$$

dır. (3.28) sistemi aşağıdaki başlangıç koşulları ile birlikte ele alınmıştır.

$$\begin{aligned} \psi_i(s) &= \phi_i(s), \quad s \in [-\tau, 0]_{\mathbb{Z}}, \quad \tau = \max_{1 \leq i \leq l} \{\tau_{ji}\}, \quad j = 1, \dots, m \\ \varphi_j(s) &= \xi_j(s), \quad s \in [-\sigma, 0]_{\mathbb{Z}}, \quad \sigma = \max_{1 \leq i \leq l} \sup \{\sigma_{ij}\}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$\phi_i(\cdot)$ ve $\xi_j(\cdot)$ sırasıyla $[-\tau, 0]$ ve $[-\sigma, 0]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonları gösterir.

Yapılan bu çalışmada (3.28) sisteminin denge noktasının varlık ve tekliğinin ispatlanması için aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilmiştir.

(S₁) $a_i, b_j \in (0, \infty)$, $c_i, d_j, p_{ji}, q_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tau_{ji}, \sigma_{ij} \in [0, \infty)$

(S₂) $f_j, g_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olmak üzere pozitif L_j^f ve L_i^g sayıları mevcuttur öyle ki her $\psi, \varphi \in \mathbb{R}$, için

$$|f_j(\psi) - f_j(\varphi)| \leq L_j^f |\psi - \varphi|$$

ve

$$|g_i(\psi) - g_i(\varphi)| \leq L_i^g |\psi - \varphi|$$

dır. (3.28) sisteminin bir denge noktası $(\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_n^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ sabit çözümü olup

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i\psi_i^* = \sum_{j=1}^m p_{ji}f_{ji}(\varphi_j^*) + c_i, \quad i = 1, \dots, n \\ b_j\varphi_j^* = \sum_{i=1}^n q_{ij}g_i(\psi_i^*) + d_j, \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (3.29)$$

sistemini ve $I_k(\psi_i^*) = 0$, $J_k(\varphi_j^*) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$ eşitliklerini sağlar.

Teorem 3.5 (Li, 2005) Kabul edelim ki (S₁) ve (S₂) hipotezlerine ek olarak

(S₃) $a_i > L_i^g \sum_{j=1}^m |q_{ij}|$, $b_j > L_j^f \sum_{i=1}^n |p_{ji}|$

sağlansın, bu durumda (3.29) sisteminin bir tek çözümü vardır.

Teorem 3.6 (Li, 2005) Kabul edelim ki (S_1) ve (S_3) sağlansın. Ayrıca $I_k(\psi_i(u))$ ve $J_k(\varphi_j(u))$ impuls operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlasın.

$$\begin{aligned} I_k(\psi_i(u_k)) &= -\gamma_{ik}(\psi_i(u_k) - \psi_i^*), \quad 0 < \gamma_{ik} < 2, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \\ J_k(\varphi_j(u_k)) &= -\bar{\gamma}_{jk}(\varphi_j(u_k) - \varphi_j^*), \quad 0 < \bar{\gamma}_{jk} < 2, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Bu durumda (3.28) sistemi bir tek periyodik $(\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_n^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*)^T$ denge noktasına sahiptir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^n |\psi_i(u) - \psi_i^*| + \sum_{j=1}^m |\varphi_j(u) - \varphi_j^*| \leq \Lambda e^{-\eta u} \left[\sum_{i=1}^n \sup_{s \in [-\tau, 0]} |\psi_i(s) - \psi_i^*| + \sum_{j=1}^m \sup_{s \in [-\sigma, 0]} |\varphi_j(s) - \varphi_j^*| \right]$$

sağlanacak şekilde $\eta > 0$ ve $\Lambda \geq 1$ sabitleri mevcuttur.

Bu kesimde ifade edilen sonuçlar ispatlanırken Lyapunov yönteminden yararlanılmıştır.

4. UYUMLU KESİRLİ TÜREV İÇEREN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIĞI

4.1 Uyumlu Kesirli Türev

Tam sayı basamaktan klasik türevin bir genelleştirilmesi olan uyumlu kesirli türevin tanımı 2014 yılında Khalil vd. tarafından önerilmiştir (Khalil vd. 2014). 2015 yılında da uyumlu türevin bazı temel özellikleri ispatlanmıştır (Abdeljawad 2015). Bu kesimde uyumlu kesirli türevin tanımı ve temel özellikleri ifade edilecektir.

Tanım 4.1 $f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $t > t_0$ için

$$(T_{t_0}^\alpha f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon(t - t_0)^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}$$

şeklinde tanımlı olan $T_{t_0}^\alpha$ operatörüne α . basamaktan uyumlu kesirli türev operatörü denir.

f fonksiyonunun α . basamaktan uyumlu kesirli türevi mevcutsa f fonksiyonuna α -türevlenebilir denir.

Teorem 4.1 $f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ için türevlenebilir ise f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

Uyumlu kesirli türev operatörü lineerdir. Ayrıca klasik tam sayı türevin sahip olduğu çarpımın türevi, bölümün türevi gibi kuralları benzer şekilde sağlar.

Teorem 4.2 $\alpha \in (0, 1]$, f ve g bir $t \geq t_0 > 0$ noktasında α -diferensiyellenebilir fonksiyonlar olacak şekilde

(i) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $T_{t_0}^\alpha(af + bg) = aT_{t_0}^\alpha(f) + bT_{t_0}^\alpha(g)$,

(ii) $T_{t_0}^\alpha(fg) = fT_{t_0}^\alpha(g) + gT_{t_0}^\alpha(f)$,

(iii) Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_{t_0}^\alpha(x^p) = px^{p-\alpha}$,

(iv) Her $f(t) = c$ sabit fonksiyonu için $T_{t_0}^\alpha(c) = 0$,

(v) Her $g(t) \neq 0$ fonksiyonu için $T_{t_0}^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{t_0}^\alpha(f) - fT_{t_0}^\alpha(g)}{g^2}$,

(vi) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_{t_0}^\alpha(e^{ct}) = ct^{1-\alpha}e^{ct}$,

(vii) Eğer f fonksiyonu diferensiyellenebilir ise $(T_{t_0}^\alpha f)(t) = (t - t_0)^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt}$

özellikleri sağlanır.

Uyarı 4.1 f fonksiyonu (t_0, t_1) aralığında diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda Teorem 4.2 nin (vii) özelliğinden açık olarak görülmektedir ki f fonksiyonunun α . basamaktan uyumlu kesirli türevi (t_0, t_1) aralığında pozitifse (negatifse) f fonksiyonu aynı aralıkta artandır (azalandır).

Tanım 4.2 $\alpha \in (0, 1]$ ve λ bir sabit olmak üzere $t > t_0$ için

$$E_\alpha(\lambda, t - t_0) = \exp(\lambda \frac{(t - t_0)^\alpha}{\alpha}) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlı olan fonksiyona kesirli üstel fonksiyon denir.

Uyumlu kesirli türev için zincir kuralı Abdeljawad tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.3 (Abdeljawad 2015) $g, v : (t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

α -diferensiyellenebilir olsunlar ve $\alpha \in (0, 1]$ sağlansın. Bu durumda $f(t) = g(v(t))$ fonksiyonu α -diferensiyellenebilirdir ve her $t \neq t_0$ ve $v(t) \neq 0$ için

$$(T_{t_0}^\alpha f)(t) = (T_{t_0}^\alpha g)(v(t))(T_{t_0}^\alpha v)(t)v^{\alpha-1}(t)$$

dir. Ek olarak eğer $t = t_0$ ise

$$(T_{t_0}^\alpha f)(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} (T_{t_0}^\alpha g)(v(t))(T_{t_0}^\alpha v)(t)v^{\alpha-1}(t)$$

dir.

Uyarı 4.2 Teorem 4.2 nin (iii) ve (vi) özellikleri ile zincir kuralı göz önüne alındığında (4.1) ile tanımlanan kesirli üstel fonksiyonun uyumlu türevinin

$$(T_{t_0}^\alpha (E_\alpha(\lambda, t - t_0))) = \lambda \exp(\lambda \frac{(t - t_0)^\alpha}{\alpha})$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Souahi vd. tarafından 2017 yılında ispatlanan aşağıdaki sonuç kesirli uyumlu türev içeren sistemlerin kararlılık incelemelerinde önemli bir araç niteliğindedir (Souahi vd 2017).

Lemma 4.1 (Souahi vd. 2017) $f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli olan f fonksiyonu (t_0, ∞) üzerinde α -diferensiyellenebilir olsun. $\alpha \in (0, 1)$ ve λ pozitif bir sabit olmak üzere

$$(T_{t_0}^\alpha f)(t) \leq -\lambda f(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$f(t) \leq E_\alpha(-\lambda, t - t_0)f(t_0)$$

dır.

4.2 İmpuls Etkisi Olmayan Modellerin Kararlılığı

Bu kesimde uyumlu kesirli türev içeren non-impulsif yapay sinir ağı modelleri ele alınıp literatürde mevcut olan sonuçlar ifade edilecektir (Kütahyalıoğlu ve Karakoç 2021, Huyen vd. 2022, Yang vd. 2022, Huyen vd. 2023, Kütahyalıoğlu ve Karakoç 2023).

Uyumlu kesirli türev içeren Hopfield-türündeki temel bir yapay sinir ağı modeli

$$(T_{t_0}^\alpha x_i)(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (4.3)$$

şeklinde, burada $T_{t_0}^\alpha$ α . basamaktan uyumlu kesirli türev operatörüdür. $0 < \alpha < 1$ olup $x_i(t)$, t anında i . birimin durum değişkenini, f_j , j . nöronun aktivasyon fonksiyonunu ifade etmektedir. $a_i > 0$ ağ bağlantısı kesildiği durumda i biriminin potansiyelini dinlenme durumuna sıfırlayacağı hızı belirtmektedir. b_{ij} , j biriminin t zamanında i birimi üzerindeki bağlantı ağırlığına karşılık gelir. I_i , ağ dışından i . birime girişi temsil etmektedir.

(4.2)–(4.3) sistemi 2021 yılında ele alınıp sistemin denge noktasının varlığı-tekliği ve kesirli üstel kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir (Kütahyalıoğlu ve Karakoç 2021).

(4.2) sisteminin denge noktası $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ sabit vektörü olup

$$x_i^* = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j^*) + I_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sistemini sağlar.

Tanım 4.3

$$\|x(t) - x^*\| \leq K E_\alpha(-\lambda, t - t_0) \|x_0 - x^*\|, \quad t \geq t_0$$

olacak şekilde pozitif λ ve K sabitleri mevcutsa (4.2) – (4.3) sisteminin denge noktasına kesirli üstel kararlıdır denir, burada E_α , (4.1) ile tanımlanan kesirli üstel fonksiyondur.

Yapılan incelemede f_j , $j = 1, 2, \dots, n$, fonksiyonlarının Lipschitz sürekli olduğu kabul edilmiştir. Yani her $u, v \in \mathbb{R}$ için

$$|f_j(u) - f_j(v)| \leq L_j |u - v|, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

olacak şekilde $L_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, sabitleri mevcut olsun. İlk sonuçta Teorem 2.1’de ifade edilmiş olan daralma dönüşümü prensibi kullanılarak denge noktasının mevcut ve tek olduğu ispatlanmıştır.

Teorem 4.4 (Kütahyalıoğlu ve Karakoç 2021) (4.4) koşuluna ek olarak her $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$a_i > L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \quad (4.5)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda (4.2) sisteminin bir tek denge noktası vardır.

Aynı çalışmada uygun bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak denge noktasının kesirli üstel kararlı olduğu da gösterilmiştir.

Teorem 4.5 (Kütahyalıoğlu ve Karakoç 2021) Teorem 4.4 ün hipotezlerine ek olarak aşağıdaki koşul sağlansın

$$a_i > \sum_{j=1}^n L_j |b_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Bu durumda (4.2) – (4.3) sisteminin denge noktası kesirli üstel kararlıdır.

İspat. Teorem 4.5’nin hipotezleri altında (4.2) sistemi bir tek $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ denge noktasına sahiptir. (4.2) sistemine $y(t) = x(t) - x^*$ dönüşümünü uygularsak

$$(T_{t_0}^\alpha y_i)(t) = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(y_j(t)), \quad (4.7)$$

denklemi elde edilir. Burada $g_j(y_j(t)) = f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)$ dir. $g_j(0) = 0$ olduğu ve her $j = 1, 2, \dots, n$ için g_j fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sağladığı kolaylıkla görülebilir. (4.7) sisteminin sıfır çözümünün üstel kararlılığı (4.2) sisteminin x^* denge noktasının üstel kararlılığına eşdeğerdir. Şimdi

$$W(t) = W(t, y(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2(t)$$

fonksiyonunu ele alalım. (4.7) sisteminin çözümleri boyunca W Lyapunov fonksiyonunun uyumlu türevi hesaplamırsa

$$\begin{aligned} (T_{t_0}^\alpha W)(t) &= \sum_{i=1}^n y_i(t) (T_{t_0}^\alpha y_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \left((-a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(y_j(t))) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \left| \sum_{j=1}^n b_{ij} y_i(t) g_j(y_j(t)) \right| \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. g_j , Lipschitz koşulunu sağladığında

$$\begin{aligned} (T_\alpha W)(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |y_i(t)| L_j |y_j(t)| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(-a_i y_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j (y_i^2(t) + y_j^2(t)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-a_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|b_{ij}| L_j + |b_{ji}| L_i) \right) y_i^2(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$B^* = \min_{1 \leq i \leq n} \left(a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|b_{ij}| L_j + |b_{ji}| L_i) \right)$$

alınırsa (4.5) ve (4.6) koşullarından $B^* > 0$ dır. O halde (4.8) den

$$(T_\alpha W(t)) \leq -2B^* W(t)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 4.1 göz önüne alındığında

$$W(t) \leq E_\alpha(-2B^*, t - t_0) W(t_0)$$

eşitliğinin gerçekleştiği gözlemlenebilir. O halde

$$\|y(t)\| \leq E_\alpha(-B^*, t - t_0) \|y(t_0)\|$$

olup (4.7) sisteminin sıfır çözümü üstel kararlıdır. Dolayısıyla (4.2) sisteminin x^* denge noktası da üstel kararlıdır ve ispat tamamlanmış olur. ■

Huyen vd. 2022 yılında Hopfield-türü uyumlu türev içeren

$$\begin{cases} T^\alpha \psi(u) = -[\check{A} + \Delta \check{A}(u)]\psi(u) + [W + \Delta W(u)]f(\psi(u)), & u \geq 0 \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

yapay sinir ağı modelini ele almışlardır, burada $\psi(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_n(u))^T \in \mathbb{R}^n$ durum vektörüdür. $f(\psi(u)) = (f_1(\psi_1(u)), \dots, f_n(\psi_n(u)))^T \in \mathbb{R}^n$ ağıın nöron aktivasyon fonksiyonudur. $\alpha \in (0, 1]$ dır.

$\check{A} = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bir pozitif diagonal matris, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ağıın ara bağlantı ağırlık matrisi, $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$ başlangıç koşuludur. Bu çalışmada aşağıdaki hipotez kabul edilmiştir.

(H_1) f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ fonksiyonu Lipschitz süreklidir, yani pozitif l_i sabitleri mevcuttur öyle ki

$$|f_i(\zeta) - f_i(\xi)| \leq l_i |\zeta - \xi|, \quad \forall \zeta, \xi \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitsizliği sağlanır.

Yapılan bu çalışmada Lyapunov yöntemi lineer matris eşitsizlik yaklaşımı ile birlikte ele alınarak sistemin kesirli üstel kararlılığını garanti eden koşullar elde edilmiştir.

Teorem 4.6 (Huyen vd 2022) (H_1) koşulu sağlansın. Eğer aşağıdaki lineer matris eşitliği (LMI) sağlanacak şekilde bir simetrik, pozitif definit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve v_1, v_2, v_3 pozitif skaler sayıları mevcutsa (4.9) sistemi kesirli üstel kararlıdır.

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & PG_a & PG_w & PW \\ * & -v_1 I & 0 & 0 \\ * & * & -v_2 I & 0 \\ * & * & * & -v_3 I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

burada

$$\Omega_{11} = -P\check{A} - \check{A}^T P + v_1 H_a^T H_a + (v_2 \lambda_{\max}(H_w^T H_w) + v_3) L^T L$$

dir.

2022 yılında yapılan diğer bir çalışmada (4.2) – (4.3) sistemi

$$\begin{cases} T_\alpha \psi(u) = -\check{A}\psi(u) + Bf(\psi(u)) + I, & u > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

matris formunda ele alınmıştır, burada $\check{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)^T \in \mathbb{R}^n$ dir. Matris yöntemi kullanılarak sistemin denge noktasının kesirli üstel kararlılığı için benzer sonuçlar elde edilmiştir (Yang vd. 2022). Daha sonra yapılan çalışmada aşağıdaki gecikmeli sistem incelenmiştir (Huyen vd. 2023).

$$\begin{cases} T_0^\alpha \psi(u) = -[\check{A} + \Delta \check{A}(u)]\psi(u) + [M + \Delta M(u)]f(\psi(u)) + [D + \Delta D(u)]g(\psi(u - \tau)), \\ \psi(u) = \xi(u), & u \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4.11)$$

burada $\alpha \in (0, 1]$, olup τ zaman gecikmesidir. $\psi(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_n(u))^T \in \mathbb{R}^n$ nöron durum vektörüdür. $f(\psi(u)) = (f_1(\psi_1(u)), \dots, f_n(\psi_n(u)))^T$ ve $g(\psi(u - \tau)) = (g_1(\psi_1(u - \tau)), \dots, g_n(\psi_n(u - \tau)))^T$ aktivasyon fonksiyonlarıdır. $\check{A} = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$, M, D uygun boyuttaki sabit matrislerdir. $\xi(u) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ başlangıç koşuludur.

Huyen vd. 2023 yılında yaptıkları çalışmada (4.11) sisteminin ve genelleştirilmiş halinin düzgün asimptotik kararlılığını garanti eden yeter koşullar elde etmişlerdir. Yaptıkları incelemelerde kesirli basamaktan Razumikhin teoremini ve LMI tekniğini kullanmışlardır.

4.3 Hopfield Türü Yapay Sinir Ağı Modelinde İmpuls Etkisi

Bu kesimde Kütahyalıoğlu ve Karakoç tarafından ele alınan sistem impuls koşulları ile birlikte ele alınıp impulsın denge noktasının kararlılığı üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

$$\begin{cases} (T_{t_k^+}^\alpha x_i)(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + c_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ t \geq t_0 > 0, & t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \Delta x_i(t_k) = I_i(x_i(t_k^+)), & k \in \mathbb{Z}^+ \\ x_i(t_0^+) = x_0, \end{cases} \quad (4.13)$$

yapay sinir ağı sistemini ele alalım, burada $T_{\bullet}^{\alpha}$ α . basamaktan uyumlu kesirli türev operatörü olup $0 < \alpha \leq 1$ alınmıştır. $x_i(t)$ fonksiyonu i . nöronun t anındaki durum değişkenini ifade etmektedir. $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ sabitleri ağ bağlantısı kesildiğinde i . nöronun potansiyelinin dinlenme durumuna geçme hız oranını, b_{ij} , sabitleri i . nöron ile j . nöron arasındaki bağlantı ağırlıklarını, c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sabitleri ağından i . birime girişi temsil etmektedir. $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, j . nöron üzerindeki aktivasyon fonksiyonudur. $\Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-)$, $x_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t)$ ve $x_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$ dir. $\{t_k\}$ reel sayıların bir dizisi olup $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ dur. $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olup $t = t_k$ impuls anlarında $x_i(t)$ üzerindeki ani değişimleri ifade eder.

Tanım 4.4 Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna (4.12) – (4.13) sisteminin bir çözümüdür denir:

- (i) $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, olası $t = t_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ noktaları dışında $[t_0, \infty)$ üzerinde süreklidir,
- (ii) $t = t_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, noktalarında $x_i(t)$ sağdan sürekli olup sol taraflı limitleri mevcuttur.
- (iii) $x_i(t)$, olası $t = t_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, noktaları hariç her $t \geq t_0$ için α –diferensiyellenebilirdir ve (4.12) sistemini sağlar. $t = t_k$ noktalarında tek taraflı uyumlu α –türevleri mevcuttur.
- (iv) $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t = t_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ noktalarında (4.13) impuls koşulunu sağlar.

Bu kesim boyunca f_j , $j = 1, 2, \dots, n$, fonksiyonlarının Lipschitz sürekli olduğu kabul edilecektir. Yani her $u, v \in \mathbb{R}^n$ için

$$|f_j(u) - f_j(v)| \leq L_j |u - v| \quad (4.14)$$

sağlanacak şekilde pozitif L_j , $j = 1, 2, \dots, n$, sabitleri mevcuttur.

Tanım 4.5 (4.12) – (4.13) sisteminin denge noktası

$$x_i^* = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j^*) + c_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

ve

$$I_i(x_i^*) = 0, \quad (4.16)$$

sistemini sağlayan $x_i^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$ sabit vektörüdür.

(4.12) – (4.13) sisteminin denge noktasının varlık ve tekliği impuls içermeyen sistemlere benzer olarak daralma dönüşümü prensibi yardımıyla ispatlanmaktadır.

Teorem 4.7 (4.14) koşuluna ek olarak

$$a_i > \sum_{j=1}^n L_j |b_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.17)$$

sağlansın. Bu durumda $I_i(x_i^*) = 0$, ise (4.12) – (4.13) sistemi bir tek $x_i^* \in \mathbb{R}^n$ denge noktasına sahiptir.

İspat.

$$B_i(u) = \frac{1}{a_i} \left[\sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(u_j) + c_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B(u) = (B_1(u), B_2(u), \dots, B_n(u))^T$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$$

normu kullanılarak B dönüşümünün bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

(4.14) koşulu göz önüne alınırsa her $u, v \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \|B(u) - B(v)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |B_i(u) - B_i(v)| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n b_{ij} (f_j(u_j) - f_j(v_j)) \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |u_j - v_j| \right) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right) \max_{1 \leq j \leq n} |u_j - v_j| \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. (4.17) koşulundan

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right) < 1$$

dir.

$$B^* = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right)$$

tanımlayalım. Bu durumda (4.18) eşitsizliğinden

$$\|B(u) - B(v)\|_\infty \leq B^* \|u - v\|_\infty$$

elde edilir. $B^* < 1$ olduğundan $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir daralma dönüşümüdür. O halde Teorem 2.1’de verilmiş olan Daralma dönüşümü prensibinden B dönüşümü bir tek $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) \in \mathbb{R}^n$ sabit noktaya sahiptir, bu sabit nokta (4.12) – (4.13) sisteminin tek denge noktasıdır. ■

Teorem 4.8 Teorem 4.7’nin hipotezlerine ek olarak aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$a_i > L_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.19)$$

ve

$$I_i(x_i(t_k)) = \beta_i(x_i(t_k) - x_i^*), \quad |1 - \beta_i| > 1, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (4.20)$$

Bu durumda (4.12) – (4.13) sisteminin denge noktası kesirli üstel kararlıdır.

İspat. Teorem 4.7’nin koşulları sağladığında (4.12) – (4.13) sisteminin bir tek $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$ denge noktası mevcuttur. (4.12) – (4.13) sisteminde $u(t) = x(t) - x^*$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$(T_{t_k^+}^\alpha u_i)(t) = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(u_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

$$t \geq t_0 > 0, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\Delta u_i(t_k) = G_i(u_i(t_k)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

sistemi elde edilir, burada $g_j(u_j(t)) = f_j(u_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)$ ve $G_i(u_i(t_k)) = I_i(u_i(t_k) + x_i^*)$ dır. Gerçekten (4.12) sistemine $u(t) = x(t) - x^*$ dönüşümünü uygularsak her $t \in (t_k, t_{k+1})$ için

$$\begin{aligned} (T_{t_k^+}^\alpha x_i)(t) &= (T_{t_k^+}^\alpha (u_i(t) + x_i^*)) \\ &= -a_i(u_i(t) + x_i^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(u_j(t) + x_j^*) + c_i \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan bu eşitlik

$$(T_{t_k^+}^\alpha x_i)(t) = (T_{t_k^+}^\alpha (u_i(t) + x_i^*))$$

eşitliği ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
(T_{t_k^+}^\alpha u_i)(t) &= -a_i u_i(t) - a_i x_i^* + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(u_j(t) + x_j^*) + c_i \\
&\quad - \left[-a_i x_i^* + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j^*) + c_i \right] \\
&= -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(u_j(t))
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak (4.13) ile verilen impuls koşulunda $u(t) = x(t) - x^*$ dönüşümü göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-) &= u_i(t_k^+) + x_i^* - u_i(t_k^-) - x_i^* \\
&= \Delta u_i(t_k)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ve

$$I_i(x_i(t_k^+)) = I_i(u_i(t_k^+) + x_i^*) \tag{4.24}$$

olur. Böylece (4.23) – (4.24) eşitliklerinin sol tarafları eşit olduğundan

$$\Delta u_i(t_k) = G_i(u_i(t_k))$$

bulunur. Diğer taraftan her $j = 1, 2, \dots, n$ için $g_j(0) = 0$ olduğundan ve her bir f_j (4.14) ile ifade edilen Lipschitz koşulunu sağladığından g_j fonksiyonunun da L_j Lipschitz sabitli Lipschitz koşulunu sağladığı kolaylıkla görülmektedir. Ayrıca $I_i(x_i^*) = 0$, olduğundan $G_i(0) = 0$ olduğu da açıktır. O halde $u \equiv 0$ (4.21) – (4.22) sisteminin bir çözümü olup (4.12) – (4.13) sisteminin denge noktasının üstel kararlılığı yerine (4.21) – (4.22) sisteminin sıfır çözümünün üstel kararlılığı incelenebilir.

$$W(t) = W(t, u(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i^2(t) \tag{4.25}$$

şeklinde tanımlı Lyapunov fonksiyonunu göz önüne alalım. Her bir $x_i(t)$ fonksiyonu

$t = t_k$ noktalarında sağdan sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}
W(t_k^+) &= \lim_{t \rightarrow t_k^+} W(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow t_k^+} u_i^2(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow t_k^+} (x_i(t) - x_i^*)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i^2(t_k) \\
&= W(t_k)
\end{aligned}$$

olup (4.25) ile verilen $W(t)$ fonksiyonu $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, noktalarında sağdan sürekliidir. Ayrıca (4.20) koşulu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
W(t_k^-) &= \lim_{t \rightarrow t_k^-} W(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow t_k^-} u_i^2(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow t_k^-} (x_i(t) - x_i^*)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [x_i(t_k) - \beta_i(x_i(t_k) - x_i^*) - x_i^*]^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(1 - \beta_i)(x_i(t_k) - x_i^*)]^2
\end{aligned}$$

bulunur. $|1 - \beta_i| > 1$, olduğundan

$$W(t_k^-) > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i^2(t_k) = W(t_k) = W(t_k^+), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (4.26)$$

elde edilir. Şimdi $W(t)$ fonksiyonun (4.21) – (4.22) sisteminin çözümleri boyunca α . basamaktan uyumlu türevini hesaplayalım. Her $t \in (t_0, t_1)$ için

$$\begin{aligned}
(T_{t_0^+}^\alpha W)(t) &= \sum_{i=1}^n u_i(t) (T_{t_0^+}^\alpha u_i)(t) \\
&\leq \sum_{i=1}^n (-a_i u_i^2(t) + |u_i(t)| \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |g_j(u_j(t))|)
\end{aligned}$$

olup bu eşitsizlikte g_j fonksiyonlarının Lipschitz koşulunu sağladığı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
(T_{t_0^+}^\alpha W)(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left[-a_i u_i^2(t) + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |u_i(t)| |u_j(t)| \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left[-a_i u_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j (u_i^2(t) + u_j^2(t)) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left(-a_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j \right) u_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_i |b_{ji}| u_i^2(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[-a_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (L_j |b_{ij}| + L_i |b_{ji}|) \right] u_i^2(t)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir.

$$M := \min_{1 \leq i \leq n} \left(a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (L_j |b_{ij}| + L_i |b_{ji}|) \right)$$

tanımlayalım. (4.17) – (4.19) koşulundan $M > 0$ dır ve (4.17), (4.19) koşulları (4.27) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

$$(T_{t_0^+}^\alpha W)(t) < -2MW(t), \quad t \in (t_0, t_1)$$

bulunur. Aynı işlemler tekrar edilerek her $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$ için

$$(T_{t_k^+}^\alpha W)(t) < -2MW(t), \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \tag{4.28}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi

$$h_1(t) = \exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_0)^\alpha \right) W(t), \quad t \in [t_0, t_1)$$

fonksiyonunu ele alalım. Kesirli uyumlu türevin çarpımın türevi, kesirli üstel fonksiyonun türevi ve zincir kuralı özellikleri dikkate alınarak $h_1(t)$ fonksiyonun α . basamak-tan uyumlu türevi

$$(T_{t_0^+}^\alpha h_1)(t) = \exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_0)^\alpha \right) \left[(T_{t_0^+}^\alpha W)(t) + 2MW(t) \right]$$

bulunur. (4.28) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$(T_{t_0^+}^\alpha h_1)(t) < 0, \quad t \in (t_0, t_1),$$

elde edilir. Dolayısıyla $h_1(t)$ fonksiyonu $t \in [t_0, t_1)$ aralığında azalandır. Böylece her $t > t_0$ için $h_1(t) < h_1(t_0)$ yani

$$\exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_0)^\alpha \right) W(t) < W(t_0)$$

ya da

$$W(t) < W(t_0) \exp \left(\frac{-2M}{\alpha} (t - t_0)^\alpha \right), \quad t \in (t_0, t_1) \quad (4.29)$$

dir. $W(t)$ fonksiyonu sağdan sürekli olduğundan (4.29) eşitsizliği $t \in [t_0, t_1)$ aralığında sağlanır. Şimdi

$$h_2(t) = \exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_1)^\alpha \right) W(t), \quad t \in [t_1, t_2)$$

fonksiyonunu ele alalım. Benzer olarak $h_2(t)$ fonksiyonunun α . basamaktan kesirli uyumlu türevi

$$\begin{aligned} (T_{t_1^+}^\alpha h_2)(t) &= \exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_1)^\alpha \right) \left[(T_{t_1^+}^\alpha W)(t) + 2MW(t) \right] \\ &< 0, \quad t \in (t_1, t_2) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $h_2(t)$ fonksiyonu (t_1, t_2) aralığında azalan olup her $t > t_1$ için

$$\exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_1)^\alpha \right) W(t) < W(t_1)$$

dir. $W(t)$ fonksiyonunun $t = t_1$ de sağdan sürekli olması ve (4.26) özelliği dikkate alınırsa son eşitsizlikden

$$\exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_1)^\alpha \right) W(t) < W(t_1) = W(t_1^+) < W(t_1^-)$$

veya

$$W(t) < \exp \left(\frac{-2M}{\alpha} (t - t_1)^\alpha \right) W(t_1^-) \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.29) eşitsizliğinden

$$W(t_1^-) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} W(t) \leq W(t_0) \exp \left(\frac{-2M}{\alpha} (t_1 - t_0)^\alpha \right)$$

olup bu ifade (4.30) ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} W(t) &< W(t_0) \exp \left(\frac{-2M}{\alpha} (t - t_1)^\alpha \right) \exp \left(\frac{-2M}{\alpha} (t_1 - t_0)^\alpha \right) \\ &\leq W(t_0) \exp \left(\frac{-2M}{\alpha} (t - t_0)^\alpha \right), \quad t \in [t_1, t_2) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler her $t \in [t_m, t_{m+1})$ aralığında tekrar edilebilir. Bunun için

$$h_{m+1}(t) = \exp \left(\frac{2M}{\alpha} (t - t_m)^\alpha \right) W(t), \quad t \in [t_m, t_{m+1})$$

fonksiyonunu ele alalım. $h_{m+1}(t)$ fonksiyonunun (t_m, t_{m+1}) aralığı üzerinde α . basamak-
tan uyumlu türevi hesaplandığında

$$(T_{t_m^+}^\alpha h_{m+1})(t) = \exp\left(\frac{2M}{\alpha}(t - t_m)^\alpha\right) [(T_{t_m^+}^\alpha W)(t) + 2MW(t)] < 0$$

bulunur. Dolayısıyla her $t > t_m$ için $h_{m+1}(t) < h_{m+1}(t_m)$ dir. Yani

$$\exp\left(\frac{2M}{\alpha}(t - t_m)^\alpha\right) W(t) < W(t_m) = W(t_m^+) < W(t_m^-)$$

olup buradan

$$W(t) \leq W(t_0) \exp\left(\frac{-2M}{\alpha}(t - t_0)^\alpha\right) \quad (4.31)$$

dir. O halde tümevarım prensibi uygulanarak her $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, için (4.31) eşitsizliğinin sağlandığı ispatlanır. (4.25) ile ifade ettiğimiz $W(t)$ fonksiyonun tanımını (4.31) da yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^n u_i^2(t) \leq \exp\left(\frac{-2M}{\alpha}(t - t_0)^\alpha\right) u_i^2(t_0)$$

ya da

$$\|u(t)\| \leq \exp\left(\frac{-M}{\alpha}(t - t_0)^\alpha\right) \|u(t_0)\|$$

elde edilir. O halde (4.21) – (4.22) sisteminin aşıkâr çözümü üstel kararlı olup ispat tamamlanır. ■

Özel olarak $|1 - \beta_i| = 1$ durumunu ele alalım.

Uyarı 4.3 Eğer $\beta_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, ise bu durumda açık olarak $i = 1, 2, \dots, n$ için $I_i(\cdot) \equiv 0$ dır. Böylece (4.12) – (4.13) sistemi Kütahyalıoğlu ve Karakoç'un incelemiş olduğu impals içermeyen

$$(T_{t_0}^\alpha x_i)(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + c_i, \quad t \geq t_0 \quad (4.32)$$

sistemine indirgenir. Bu durumda (4.14), (4.17) ve (4.19) koşulları (4.32) sisteminin tek denge noktasının üstel kararlılığını garanti eden yeter koşullardır.

Uyarı 4.4 Eğer $\beta_i \equiv 2$, $i = 1, 2, \dots, n$, ise bu durumda

$$W(t_k^-) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(-1)(x_i(t_k) - x_i^*)]^2 = W(t_k) = W(t_k^+)$$

olup $W(t)$ fonksiyonu her yerde sürekli olur. Dolayısıyla Teorem 4.8 benzer şekilde ispatlanabilir.

O halde Uyarı 4.4 ve Uyarı 4.5 dikkate alındığında (4.12) – (4.13) sisteminin denge noktasının kesirli üstel kararlılığı için β_i nin sağlaması gereken koşul $|1 - \beta_i| \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ şeklinde ifade edilebilir.

Bu kesimde elde edilen sonuçları destekleyen bir sistemi üç farklı durum için incelenmiştir.

Örnek 4.1 (i) İlk olarak impals içermeyen

$$\begin{cases} (T_{t_0^+}^\alpha x)(t) = -0.8x(t) + 0.04h(x(t)) - 0.03h(y(t)) + 0.2, \\ (T_{t_0^+}^\alpha y)(t) = -0.5y(t) - 0.01h(x(t)) + 0.1h(y(t)) + 0.01, \end{cases} \quad t \geq t_0 > 0 \quad (4.33)$$

sistemini

$$\begin{cases} x(0.00001) = 0.1, \\ y(0.00001) = 0.001, \end{cases} \quad (4.34)$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım. Burada $h(v) = \frac{1}{2}(|v+1| - |v-1|)$ olup (4.14) Lipschitz koşulu $L_1 = L_2 = 1$ için sağlanır. $a_1 = 0.8 > 0$, $a_2 = 0.5 > 0$ dir. $b_{11} = 0.04$, $b_{12} = -0.03$, $c_1 = 0.2$, $b_{21} = 0.01$, $b_{22} = 0.1$, $c_2 = 0.01$ dir. Katsayılar Teorem 4.8'in (4.17) koşulunu sağlar. Gerçekten,

$$a_1 = 0.8 > L_1 |b_{11}| + L_2 |b_{12}| = 0.07$$

ve

$$a_2 = 0.5 > L_1 |b_{21}| + L_2 |b_{22}| = 0.11$$

dir. O halde (4.33) sistemi bir tek denge noktasına sahiptir.

Bu denge noktası

$$\begin{aligned} -0.08x^* + 0.4h(x^*) - 0.03h(y^*) + 0.2 &= 0 \\ -0.5y^* - 0.01h(x^*) + 0.1h(y^*) + 0.01 &= 0 \end{aligned}$$

cebirsel sisteminin çözümü olup Mathematica programı kullanılarak

$$(x^*, y^*) = (0.26243, 0.018392)$$

olarak hesaplanır. Benzer olarak (4.19) koşulunun sağlandığı da görülebilir. Gerçekten,

$$a_1 = 0.8 > L_1(|b_{11}| + |b_{21}|) = 0.05$$

ve

$$a_2 = 0.5 > L_2(|b_{12}| + |b_{22}|) = 0.13$$

koşulları sağlanır. Sonuç olarak non-impulsif (4.33) sisteminin denge noktası kesirli üstel kararlıdır. Bu durumu görselleştirmek amacıyla sistemin $(x(t), y(t))$ durum değişkenlerinin grafikleri $\alpha = 0.1$ ve $\alpha = 1$ için Mathematica programı ile çizdirilmiştir (Şekil 4.1).

(ii) İkinci durumda aynı sistemi impuls koşulları ile birlikte ele alalım:

$$\begin{cases} (T_{t_0^+}^\alpha x)(t) = -0.8x(t) + 0.04h(x(t)) - 0.03h(y(t)) + 0.2, \\ (T_{t_0^+}^\alpha y)(t) = -0.5y(t) - 0.01h(x(t)) + 0.1h(y(t)) + 0.01, \end{cases} \quad t \geq t_0 > 0, \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} \Delta x(t_k) = 3x(t_k) - 0.78729, \\ \Delta y(t_k) = 2.2y(t_k) - 0.04056624, \end{cases} \quad t_k = 0.5k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

Burada $I_1(x(t_k^+)) = \beta(x(t_k) - x^*)$ ve $I_2(y(t_k^+)) = 2.2(y(t_k) - y^*)$ dır. Yani $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2.2$ olmak üzere Teorem 4.8’ da kabul edilen (4.20) koşulu sağlanır. O halde (4.35) – (4.36) sisteminin

$$(x^*, y^*) = (0.26243, 0.0184392)$$

denge noktası tek olup impuls etkisine rağmen üstel kararlılığı devam etmektedir. Bu durum için de sistemin $(x(t), y(t))$ durum değişkenlerinin grafikleri Şekil 4.2 de verilmiştir.

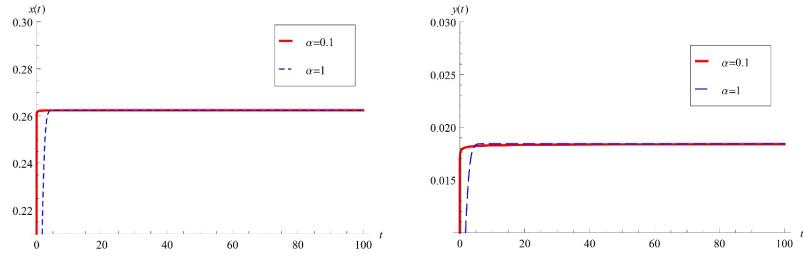
(iii) Son olarak (4.35) sistemini

$$\begin{cases} \Delta x(t_k) = 1.5x(t_k) - 0.393645, \\ \Delta y(t_k) = 1.75y(t_k) - 0.0322686, \end{cases} \quad t_k = 0.5k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

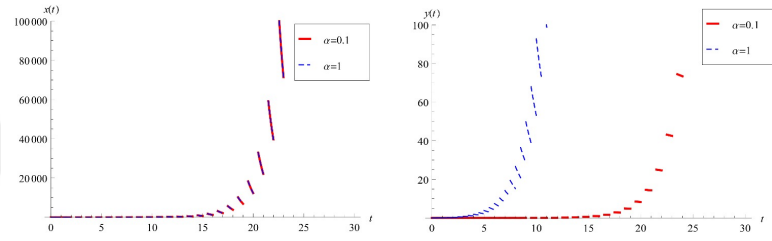
impuls koşulları ile birlikte inceleyelim. Burada $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 1.75$ olduğu görülmektedir. Yani $|1 - \beta_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots$ olup (4.35), (4.37) sisteminin denge noktasının üstel kararlılığı hakkında yorum yapılamaz. Ancak $\alpha = 0.1$ ve $\alpha = 1$ için yapılan nümerik simülasyonlarda denge noktasının kararsız duruma döndüğü görülmektedir (Şekil 4.3).

Sonuç olarak yapılan incelemelerden impuls etkisinin çözümün kararlılık özelliğini değiştirebileceği, uygun koşullar altında ise kararlılığın sürdürülebileceği gözlemlen-

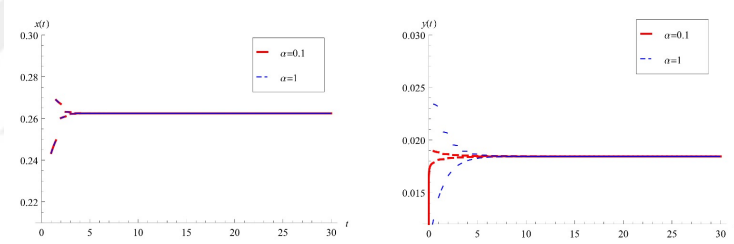
miřtır.



şekil 4.1 (4.33) – (4.34) sisteminin durum değişkenleri



şekil 4.2 (4.35) – (4.36) impulsif sisteminin durum değişkenleri



şekil 4.3 (4.35), (4.37) impulsif sisteminin durum değişkenleri

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Diferensiyel denklemler incelenirken analitik veya nümerik çözümlerini bulmak genellikle kolay değildir. Çözümlerin bulunamadığı durumlarda kalitatif inceleme yapmak yani denklemleri çözmeden kararlılık ve sınırlılık gibi özellikleri incelemek mümkündür. Bu tez çalışmasında impulsif diferensiyel denklemlerin kararlılığı incelenmiştir. İlk olarak impulsif diferensiyel denklemler tanıtılıp, impulsif diferensiyel denklemlerin kararlılığı için temel teoremler verilmiştir. Devamında, pek çok disiplindeki uygulama problemlerinde önemli bir yer tutan yapay sinir ağı sistemleri araştırılmıştır. Öncelikle impuls içermeyen Hopfield tipli yapay sinir ağı sistemi tanıtılıp sistemin varlık-teklığı ve kararlılığı üzerine yapılan çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra impulsif yapay sinir ağları üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölüm uyumlu kesirli türev içeren modellere ayrılmıştır. Uyumlu kesirli türev tanıtılıp literatürde mevcut uyumlu türev içeren impulsif olmayan yapay sinir ağı modelleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu tez çalışmasının literatüre yaptığı katkı son kesimde yer almaktadır. Son kesimde uyumlu türev içeren Hopfield türündeki impulsif yapay sinir ağı sistemi ele alınmış, denge noktasının varlık ve teklığı ispatlanmış ayrıca denge noktasının kesirli üstel kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir. Sayısal örnekle de impulsların kararlılık üzerindeki etkisi gözlemlenmiştir. Bu tez çalışması boyunca yapılan araştırmalardan görülmektedir ki impuls etkisi çözümlerin asimptotik davranışını etkilemektedir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. 2015. On conformable fractional calculus, *J. Comput. Appl. Math.* 279, 57-66.
- Agarwal, R., Hristova, S., O'Regan, D. and Terzieva, R. 2019. Stability properties of neural networks with non-instantaneous impulses, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 16(3), 1210–1227.
- Akhmet, M. 2010. *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*, Springer Science & Business Media.
- Akhmet, M. 2002. On the general problem of stability for impulsive differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 182-196.
- Akhmet, M. and Karacaoren, M. 2018. A Hopfield neural network with multi-compartmental activation, *Neural Computing and Applications*, 29, 815-822.
- Akhmet, M., Çiğcin, D.A. and Cengiz, N. 2018. Exponential stability of periodic solutions of recurrent neural networks with functional dependence on piecewise constant argument, *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 272-292.
- Anokhin, A., Berezansky, L. and Berezansky, E. 1995. Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 193, 923-941.
- Bainov, D. D. and Simeonov, P. 1995. *Impulsive Differential Equations Asymptotic Properties of the Solutions*, World Scientific Publishing.
- Berezansky, L. and Braverman, E. 1994. Boundedness and stability of impulsively perturbed systems in a banach space, *International Journal of Theoretical Physics*, 33, 2075-2090.
- Berezansky, L. and Braverman, E. 1997. Explicit conditions of exponential stability for a linear impulsive delay differential equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 214, 439-458.
- Cao, J., Chen, A. and Huang, X. 2005. Almost periodic attractor of delayed neural networks with variable coefficients, *Physics letters A*, 340, 104-120.
- Çiğcin, D. A. 2015. *İmpulsif Diferansiyel Denklemlere Giriş*, Palme Yayınevi.
- Deveci, Y. 2012. İstatiksel normalizasyon tekniklerinin yapay sinir ağı performansı etkisi, *Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 40.
- Driver, R. D. 1977. *Ordinary and delay differential equations*, Springer Verlag.
- Gopalsamy, K. 2004. Stability of artificial neural networks with impulses, *Appl. Math. Comput.* 154, 783-813.

- Guan, Z. and Chen, G. 1999. On delayed impulsive Hopfield neural networks, *Neural Networks*, 12, 273-280.
- Hopfield, J.J. 1982. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Natl Acad. Sci. USA*. 79, 554-2558.
- Hopfield, J.J. 1984. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 81, 3088-3092.
- Huyen, N.T.T., Sau, N.H. and Thuan, M.V. LMI 2022. Conditions for fractional exponential stability and passivity analysis of uncertain Hopfield conformable fractional-order neural networks, *Neural Process Lett*, 54, 1333–1350.
- Huyen, N.T.T., Thanh, N.T., Sau, N.H., Binh, T.N. and Thuan, M.V. 2023. Mixed H_∞ and passivity-performance for delayed conformable fractional-order neural networks, *Circuits, Systems and Signal Processing*, 42, 5142-5160.
- Jiang, H. and Cao, J. 2008. BAM-type Cohen–Grossberg neural networks with time delays, *Mathematical and Computer Modelling*, 47, 92-103.
- Khalil, R. Al Horani, M. Yousef, A. and Sababheh, M. A 2014. New definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.* 264, 65-70.
- Kosko, B. 1987. Adaptive bidirectional associative memories, *Applied Optics*, 26, 4947-4960.
- Kosko, B. 1988. Bidirectional associative memories, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18, 49-60.
- Kütahyalıoğlu, A. Karakoç, F. 2021. Exponential stability of Hopfield neural networks with conformable fractional derivative, *Neurocomputing*, 456, 263-267.
- Kütahyalıoğlu, A. ve Karakoç, F. 2023. Exponential stability of BAM-type neural networks with conformable derivative, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 49, 78-94.
- Lakshmikantham, V. Bainov, D. and Simeonov, P.S. 1989. *Theory of Impulsive Differential Equations*, Series in Modern Applied Mathematics, World Scientific.
- Li, X. and Wu, J. 2016. Stability of nonlinear differential systems with state-dependent delayed impulses, *Automatica* 64, 63-69.
- Li, Y. 2005. Global exponential stability of BAM neural networks with delays and impulses, *Chaos, Solitons and Fractals*, 24, 279-285.
- Liu, X. 1995. Impulsive stabilization and applications to population growth models, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 25(1), 381-395.
- Liu, X. 2001. Impulsive stabilization and control of chaotic system, *Nonlinear Analysis* 47, 1081-1092.

- McCulloch, W.S. and Pitts, W. 1943. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bull. Math. Biophysics* 5, 115-133.
- Mohamad, S. 2001. Global exponential stability in continuous-time and discrete-time delayed bidirectional neural networks, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 159, 233-251.
- Mohamad, S. and Gopalsamy, K. 2003. Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays, *Applied Mathematics and Computation*, 135, 17-38.
- Samoilenko, A.M. and Perestyuk, N.A. 1995. *Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore
- Shen, J. and Luo, Z. 1999. Impulsive stabilization of functional differential equations via Lyapunov functionals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 240, 1-5.
- Souahi, A., Makhlouf, A. B. and Hammami, M. A. 2017. Stability analysis of conformable fractional-order nonlinear systems, *Indagationes Mathematicae*, 28, 1265-1274.
- Stamova, I. M. Stamov, T. and Simeonova, N. 2012. Impulsive control on global exponential stability for cellular neural networks with supremums, *Journal of Vibration and Control*, 19(4), 483-490.
- Stamova, I. M. Stamov, T. and Simeonova, N. 2014. Impulsive effects on the global exponential stability of neural network models with supremums, *European Journal of Control*, 20, 199-206.
- Tang, X.H., He, Z. and Yu, J.S. 2002. Stability theorem for delay differential equations with impulses, *Applied Mathematics and Computation* 131, 373–381.
- Tang, Z., Luo, Y. and Deng, F. 2005. Global Exponential Stability of Reaction-Diffusion Hopfield Neural Networks with Distributed Delays, *International Symposium on Neural Networks*, 3496, 174-180.
- Wang, L. and Zou, X. 2002. Exponential stability of Cohen–Grossberg neural networks, *Neural Networks*, 15, 415-422.
- Yadav, N., Yadav, A. and Kumar, M. 2015. *An Introduction to Neural Network Methods for Differential Equations*, Springer.
- Yan, Y. and Shen, J. 1999. Impulsive stabilization of impulsive functional differential equations by Lyapunov Razumikhin functions, *Nonlinear Analysis*, 37, 245-255.
- Yang, C., Hong, S., Li, Y., Wang, H. and Zhu, Y. 2022. Stability Analysis of Hopfield Neural Networks with Conformable Fractional Derivative: M-matrix Method, *Intelligent Computing Theories and Application*, 159-167.

- Yu, J.S. and Zhang, B. G. 1996. Stability theorem for delay differential equations with impulses, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 199, 162-175.
- Yu, J.S. 2001. Stability for nonlinear delay differential equations of unstable type under impulsive perturbations, *Applied Mathematics Letters* 14, 849-857.
- Yu, J.S. 2001. Explicit conditions for stability of nonlinear scalar delay differential equations with impulses, *Nonlinear Analysis* 46, 53-67.

