

Kesirli Basamaktan Bir Diferensiyel Denklem Sistemi Üzerine

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM
SİSTEMİ ÜZERİNE

İlknur KOCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

İlknur KOCA tarafından hazırlanan " **KESİRLİ BASAMAKTAN BİR DİFER-
ENSIYEL DENKLEM SİSTEMİ ÜZERİNE** " adlı tez çalışması 26 Temmuz
2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Matem-
atik Anabilim Dalı'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç.Dr. Nuri ÖZALP

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof.Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU
Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü

Üye: Prof.Dr. Ogün DOĞRU
Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü

Üye: Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü

Üye: Doç.Dr. Ali OLGUN
Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü

Üye: Doç.Dr. Nuri ÖZALP
Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ BASAMAKTAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMİ ÜZERİNE

İlknur KOCA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Nuri ÖZALP

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, kesirli basamaktan türev ve integral operatörleri ile ilgili temel kavramlar verilmiş, kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri hatırlatılmış, çözümlerin asimptotik kararlılığı ile ilgili sonuçlar ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, kesirli basamaktan lineer olmayan ikili model ele alınmıştır. Ele alınan modelin çözümlerinin sınırlılığı, tekliği ve başlangıç koşullarına sürekli bağımlılığı incelenmiştir. Ayrıca modelin denge noktaları elde edilerek lokal asimptotik kararlılık için teoremler ifade edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, nümerik çözüm yardımı ile desteklenmiştir.

Son bölümde ise, kesirli basamaktan lineer olmayan üçlü bir model ele alınmıştır. Üçlü modelin denge noktaları elde edilerek lokal asimptotik kararlılığı nümerik çözüm yardımıyla gösterilmiştir.

2013 , 49 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli diferensiyel denklemler, kesirli basamaktan lineer olmayan model, kararlılık, nümerik çözümler.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON A SYSTEM OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

İlknur KOCA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Nuri ÖZALP

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic concepts on fractional integral and derivative are given, existence and uniqueness theorems for fractional differential equations are recalled and some results on the asymptotic stability of solutions are expressed.

In the third chapter, a fractional order nonlinear dynamical model involving two person is introduced. Boundedness, uniqueness and continuous dependence of the solutions of the nonlinear two-dimensional system of fractional differential equation is considered. Stability analysis of the fractional-order nonlinear dynamical model involving two person is studied. By using stability analysis on fractional order system, we obtain sufficient condition on the parameters for the locally asymptotical stability of equilibrium points. Our results are validated by numerical simulations. Finally, in the fourth chapter, a fractional order nonlinear dynamical model of triadic relationship is introduced. By obtaining the equilibrium points, stability analysis of the fractional-order nonlinear dynamical model involving three person is studied. Finally, our results are validated by numerical simulations.

2013 , 49 pages

Key Words: Fractional differential equations, a fractional order nonlinear model, stability, numerical solutions.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bilgisinden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, öğrencisi olmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli danışman hocam, Sayın Doç.Dr. Nuri ÖZALP (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)’a; tez dönemim süresinde önerilerini esirgemeyen değerli hocalarım, Sayın Prof.Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)’na ve Sayın Prof.Dr. Oğün DOĞRU (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)’ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteğini eksik etmeyen sevgili eşim Erkan KOCA’ya ve hayatımın her döneminde yanımda olan aileme teşekkür ederim.

İlknur KOCA
Ankara, Temmuz 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
1 GİRİŞ	1
2 KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER	6
2.1 Kesirli Basamaktan Türev ve İntegral	6
2.1.1 Gamma fonksiyonu	6
2.1.2 Genelleştirilmiş Gamma fonksiyonu	7
2.2 Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler	10
2.2.1 Çözümlerin varlığı ve tekliği	11
2.2.2 Denge noktalarının asimptotik kararlılığı	13
3 KESİRLİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN İKİLİ MODEL	16
3.1 Kesirli Basamaktan Lineer Olmayan İkili Model	17
3.1.1 Çözümlerin tekliği ve başlangıç koşullarına sürekli bağımlılığı	18
3.1.2 İkili modelin denge noktaları ve lokal asimptotik kararlılığı	25
3.2 Nümerik Çözüm	28
3.2.1 İkili sistem için nümerik örnek	29
4 KESİRLİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN ÜÇLÜ MODEL	31
4.1 Denge Noktaları ve Lokal Asimptotik Kararlılık	31
4.2 Nümerik Çözüm	35
4.3 Kesirli Basamaktan Lineer Olmayan İvmeli Duygu Hareketi	37
4.4 Üçlü Modelin Denge Noktaları ve Lokal Asimptotik Kararlılığı	40
4.5 İvmeli Duygu Hareketinin Nümerik Çözümü	42
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	49

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1	Gamma fonksiyonunun grafiği	8
3.1	$x(t)$ (üst) ve $y(t)$ (alt) nin çözümü	30
3.2	Denge noktasına asimptotik yaklaşım.	30
4.1	$\alpha = 0.90$ için $x_1(t)$ nin çözümü	36
4.2	$\alpha = 0.90$ için $x_2(t)$ nin çözümü	36
4.3	$\alpha = 0.90$ için $x_3(t)$ nin çözümü	36
4.4	$\alpha = 0.90$ için $x_4(t)$ nin çözümü	37
4.5	$\alpha = 0.6$ için $y_1(t)$ nin çözümü	44
4.6	$\alpha = 0.6$ için $y_3(t)$ nin çözümü	44
4.7	$\alpha = 0.6$ için $y_5(t)$ nin çözümü	44
4.8	$\alpha = 0.6$ için $y_7(t)$ nin çözümü	45

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam
$\int$	İntegral
I_a^α	α . basamaktan Riemann-Liouville kesirli integrali
D_a^α	α . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi
D_a^α	α . basamaktan Caputo kesirli türevi
Γ	Gamma fonksiyonu
$[\alpha]$	α reel sayısının taban tamsayısı
B.D.P.	Başlangıç değer problemi
$C[a, b]$	$[a, b]$ de sürekli reel değerli fonksiyonlar kümesi
$R[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
x	Kesirli basamaktan lineer olmayan modelde 1. kişi
y	Kesirli basamaktan lineer olmayan modelde 2. kişi

1. GİRİŞ

Mühendislikte, fen bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözmek için ilk olarak bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek daha sonra bazı sınır şartları ve başlangıç koşulları yardımıyla problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonları bulmak gerekmektedir. Bilinen bir problem formüle eden bu matematiksel ifadelerin fonksiyonları kesirli basamaktan, birinci basamaktan veya daha yüksek basamaktan türevler içermektedir. İşte, bu şekildeki bir matematiksel ifadeye içerdiği türevin basamağına göre *kesirli diferensiyel denklem* veya adi diferensiyel denklem denir.

Kesirli kalkülüs araçları uzun zamandır bilinmesine ve değişik alanlarda uygulanmasına rağmen, kesirli diferensiyel denklemler teorisine yakın zamanlarda çalışılmaya başlanmıştır. Kesirli kalkülüs ile ilgili pekçok kitap yazılmış, bu kitaplarda kesirli kalkülüsün tarihi detaylı bir şekilde verilmiştir (Oldham ve Spanier 1974, Miller ve Ross 1993, Podlubny 1999, Kilbas vd. 2006).

Tamsayı olmayan basamaktan türev ve integral kavramları ilk olarak Leibniz ve L'Hospital tarafından 1695 yılında ortaya konmuştur. Marquis de L'Hospital (1661-1704)' ın Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)' e yazdığı bir mektupta $n \in N_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ inci basamaktan türev için kullanılan $\frac{d^n y}{dx^n}$ ifadesinde $n = \frac{1}{2}$ olması durumu ne anlama gelir sorusu kesirli diferensiyelin çıkış tarihi olarak gösterilebilir. Bu mektup 30.09.1695 yılında Leibniz tarafından yanıtlanmış ve kesirli basamaktan türev kavramı oluşmuştur.

Bu mektuplaşmanın ortaya çıkmasından sonra, birçok matematikçi kesirli türev kavramıyla ilgilenmiştir. Kesirli kalkülüsün az bilinen diğer tanımlarını tarihsel olarak sıralamak istersek (Dalir ve Bashour 2010) :

1. L. Euler (1730)

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$$

formülünü, Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)\dots(m-n+1)\Gamma(m-n+1)$$

özelliğini kullanarak,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

eşitliğini vermiştir. Buradaki Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

2. J. B. J. Fourier (1820-1822)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(z) dz \int_{-\infty}^\infty \cos(px - pz) dp$$

integral eşitliği yardımıyla

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(z) dz \int_{-\infty}^\infty \cos(px - pz + n\frac{\pi}{2}) dp$$

elde etmiştir.

3. N. H. Abel (1823-1826), keyfi bir α değeri için

$$\int_0^x \frac{s'(\eta) d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \psi(x)$$

ifadesini gözönüne alarak,

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} \psi(x)}{dx^{-\alpha}}$$

eşitliğini tanımlamıştır.

4. J. Liouville (1832-1855), ilk olarak $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n e^{a_n x}$ üstel ifadesine göre

$$\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = a^m e^{ax}$$

formülünü genelleştirerek

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \sum_{n=0}^\infty c_n a_n^v e^{a_n x}$$

eşitliğini tanımlamıştır. Bir başka tanımlı

$$\begin{aligned} \int^\mu \Phi(x) dx^\mu &= \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int_x^\infty (\tau - x)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau \\ \int^\mu \Phi(x) dx^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

kesirli basamaktan integralidir. Üçüncü tanımı ise

$$\begin{aligned}\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} &= \frac{(-1)^\mu}{h^\mu} (F(x) \frac{\mu}{1} F(x+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x+2h) - \dots) \\ \frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} &= \frac{1}{h^\mu} (F(x) \frac{\mu}{1} F(x-h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x-2h) - \dots)\end{aligned}$$

kesir basamaktan türev tanımlarıdır.

5. G. F. B. Riemann (1847-1876)

$$D^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \psi(t)$$

tanımlamıştır.

6. N. Ya. Sonin (1869), A. V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasove (1888), K. Nishimoto (1987)

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

Cauchy integral formülünü gözönüne alarak ve n yerine v indisini kullanarak

$$D^v f(z) = \frac{\Gamma(v+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{v+1}} dt$$

elde etmişlerdir.

7. Riemann-Liouville:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 \leq \alpha < n.$$

8. Grünwald-Letnikove:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)$$

9. M. Caputo (1967):

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad n-1 \leq \alpha < n.$$

10. K. S. Miller, B. Ross (1993):

$$D^{\bar{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Kesirli basamaktan türev, özellikle birçok madde ve sürecin hafıza ve kalıtsal özelliklerini açıklamak için uygun bir yaklaşımdır. Bu tip özellikler tamsayı basamaktan türevde göz ardı edilmektedir. Kesirli basamaktan türev içeren modeller çeşitli fiziksel ve biyolojik süreçler ile dinamik sistemlerin kontrolü teorisinde tamsayı basamaktan modellere göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Viskoelastik meteryaller, elektroanalitik kimya, biyolojik sistemlerin elektrik iletkenliği ve sinir hücrelerinin işleyişi gibi süreçlerin kesirli basamaktan türevler yardımıyla modellenmesi ve simülasyonları kesirli basamaktan diferensiyel denklem içeren denklemlerin önemini arttırmaktadır (Cherif 2009).

Klasik matematiğin genelleştirilmiş bir şekli olan Kesirli Matematik (Fractional Calculus), özellikle son yirmi yıldır matematik ve mühendislik dallarında, özellikle de sinyal işleme ve kontrol teorisi alanlarında önemli çalışmaların yapılmasına neden olmuştur. Burada temel fikir, tamsayı basamaktan klasik integral ve türev işlemlerini kullanmak yerine, kesirli basamaktan türev ve integral işlemlerini kullanmaktır. Bu şekilde klasik matematiğin sınırları üzerine çıkılarak oldukça geniş bir çalışma alanı elde edilmektedir. Bu durum, temelinde matematik yatan bütün bilimsel alanları etkileyerek, bu alanlarda yeni çalışma konularının ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bununla birlikte, kesirli matematik, kesirli basamaktan sistemler ve kesirli basamaktan kontrol alanları halen çok sayıda açık konular içermektedir. Son zamanlarda kesirli basamaktan sistemler üzerine yapılan çalışmalardaki artış da, bunun en iyi göstergesidir.

Literatürde son yıllarda hızla artan bir ivme ile çalışılan kesirli matematik ve kesirli basamaktan sistemler üzerine Türkiye’de yapılan çalışmalarda da bir artış görülmektedir. İlk olarak 2007 yılında Sabancı Üniversitesi’nde düzenlenen TOK’07 Toplantısında "Kesirli basamaktan Sistemler" adı altında bir özel oturum düzenlenmiş ve bu oturumda toplam 7 bildiri sunulmuştur. Daha sonra 2008 yılında Çankaya Üniversitesi’nde düzenlenen FDA 2008 (IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications) çalıştayında kesirli basamaktan sistemler üzerine dünyaca meşhur bilim adamlarının ülkemize gelerek bildiri sunması, konunun ülkemiz araştırmacıları tarafından öğrenilmesi açısından büyük bir şans olmuştur. Bununla be-

raber, bu tür uluslararası büyük organizasyonların ulusal bağlamda yansımalarının devam etmesi gerekmektedir. İki yılda bir düzenlenen ve başlangıçta konunun yeni olması ve araştırmacı sayısının az olması nedeniyle çalıştay şeklinde gerçekleştirilen FDA serisi 2012 yılında Çin’de bir sempozyum şekline dönüştürülmüştür. FDA 2012 (IFAC Symposium on Fractional Differentiation and its Applications) sempozyumuna yaklaşık 300 yayın sunulmuş olması, kesirli basamaktan sistemlerin artık önemli bir araştırma alanı haline geldiğini ispat etmektedir.

2. KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde kesirli basamaktan türev ve integral operatörleri ile ilgili temel tanımlar ile bu operatörlerin bazı özelliklerini verdikten sonra kesirli basamaktan türev içeren diferensiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri verilecektir.

2.1 Kesirli Basamaktan Türev ve İntegral

2.1.1 Gamma fonksiyonu

Gamma fonksiyonu kesirli diferensiyel ile doğrudan ilişkilidir. Gamma fonksiyonunun en basit anlamı faktoriyelın bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir. Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir. Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biri

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.1)$$

eşitliğidir. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

Buradan açıkça görülmektedir ki $\Gamma(1) = 1$, ve (2.1) den $z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z.(z-1)! = z!$$

elde edilir (Podlubny, 1999).

$\Gamma(z)$ fonksiyonuna karşılık gelen $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ integrali $z > 0$ için yakınsak olup, $c > 0$ olmak üzere bu integral her $[c, d]$ sonlu aralığında düzgün yakınsaktır. O

halde Gamma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) Gamma fonksiyonunun tanım bölgesi $\{z : z > 0\}$ dır.

ii) Gamma fonksiyonu $z > 0$ için süreklidir.

iii) $\Gamma(z)$ ye karşılık gelen integral, her sonlu $[c, d] \subset \mathbb{R}^+$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan z değişkenine göre integral işareti altında türev alarak $\Gamma(z)$ nin türevi elde edilebilir.

Benzer şekilde Gamma fonksiyonunun yüksek basamaktan türevleri de bulunabilir.

Böylece $\Gamma'(z)$ ve $\Gamma''(z)$ türevleri için

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty t^{z-1} (\ln t) e^{-t} dt \quad , \quad \Gamma''(z) = \int_0^\infty t^{z-1} (\ln t)^2 e^{-t} dt$$

yazılabilir. Böylece, $z > 0$ için $\Gamma''(z) > 0$ olup, $\Gamma(z)$ in eğrisi $z > 0$ için yukarı konkavdır. $\Gamma(z)$ in $z \rightarrow 0^+$ için limiti

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) = \infty$$

dur. Gerçekten

$$\Gamma(z) > \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt > e^{-1} \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{ez}$$

olup, böylece,

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) > \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{ez} \rightarrow \infty$$

olur. Diğer yandan, faktöriyel özelliğinden dolayı,

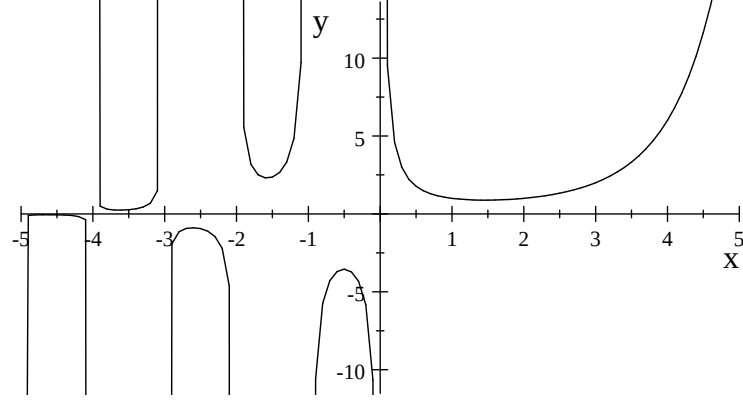
$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1) \Gamma(z-1) \rightarrow \infty$$

olur.

2.1.2 Genelleştirilmiş Gamma fonksiyonu

Şimdiye kadar z in pozitif değerleri için tanımladığımız Gamma fonksiyonunu negatif z değerleri için de tanımlayabiliriz. Yani $\Gamma(z)$ yi tüm reel eksene genişletebiliriz.

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ özelliğini kullanarak $1 \leq z \leq 2$ için $\Gamma(z)$ in bilinen değerlerinden yararlanıp her $z \in \mathbb{R}$ için $\Gamma(z)$ ler elde edilebilir. Negatif z değerleri için $\Gamma(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlarız.



Şekil 2.1. Gamma fonksiyonunun grafiği

$-1 < z < 0$ ise, $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ de $0 < z+1 < 1$ olacağından ve $(z+1) \in (0, 1)$ deki $\Gamma(z+1)$ değerleri bilindiğinden $z \in (-1, 0)$ için $\Gamma(z)$ ler bulunabilirler. Benzer şekilde, $-2 < z < -1$ ise $0 < z+2 < 1$ olup, $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$ yardımıyla ve genel olarak $-n < z < -n+1$ ise $0 < z+n < 1$ olup,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

eşitliklerinden $\Gamma(z)$ ler hesap edilebilir. Yukarıdaki ifadeler göstermektedir ki, Gamma fonksiyonu sıfır ve negatif tamsayılar için sınırsızdır. Yani değeri sonsuzdur.

Kesirli basamaktan integralin tanımı yapılırken, tamsayı basamaktan n -katlı integralin genelleştirilmesi esas alınmıştır. f fonksiyonu (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun (f fonksiyonu, $t = a$ noktasında $r < 1$ basamaktan singülerliğe sahip olabilir). Bu durumda

$$I_a f(t) = D_a^{-1} f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

integrali sonludur ve $t \rightarrow a$ iken değeri sıfıra eşittir (Podlubny, 1999).

Tanım 2.1 $f : (a, \infty) \rightarrow R$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun $\alpha > 0$ (α reel) basamaktan Riemann-Liouville integrali, n katlı integralin genellemesi olan

$$I_a^\alpha f(t) = {}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

eşitliği ile verilir. Bu genelleme,

$$\int_a^t dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} \dots \int_a^{t_1} f(\tau) d\tau$$

n katlı integraline $f(\tau)$ sürekli fonksiyonu için bilinen

$$\int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t d\tau \int_\tau^t f(\tau) dt_1$$

eşitliğinin ardışık olarak uygulanmasıyla elde edilir.

Tanım 2.2 $f : (a, \infty) \rightarrow R$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun $\alpha > 0$ (α reel) basamaktan Riemann-Liouville türevi

$$\mathbf{D}^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, & n-1 \leq \alpha < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada n , $n-1 \leq \alpha < n$ koşulunu sağlayan bir tamsayı olup, Γ Gamma fonksiyonunu göstermektedir.

Bu türev tanımı teorik olarak uygun olsa da uygulama açısından bazı sorunlar çıkarmaktadır. Riemann-Liouville türevi yardımıyla tanımlanan başlangıç değer problemlerinde başlangıç koşullarının limit konumunda verilmesinin gerekliliğini ve sabitin türevinin sabit olmayan bir fonksiyona eşit olmasını ($\mathbf{D}^\alpha(c) = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$) fiziksel olarak açıklamanın bir yolu bilinmemektedir. Bu durum için Caputo tarafından 1967 yılında bir çözüm önerilmiştir. Caputo'nun verdiği türev tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.3 $f : (a, \infty) \rightarrow R$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun $\alpha > 0$ basamaktan Caputo türevi

$${}^C D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, & n-1 < \alpha < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun $[a, T]$ aralığında $(n+1)$. basamaktan sürekli, sınırlı türevlere sahip olması durumunda Caputo türevi, $\alpha \rightarrow n$ için n . basamaktan geleneksel türev haline gelir.

Riemann-Liouville anlamında türev ve integralin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir (Podlubny, 1999):

(i) $f \in C[0, \infty)$ ve $\alpha > 0, \beta > 0$ olsun. Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I^\alpha(I^\beta f(t)) = I^{\alpha+\beta} f(t)$$

özellğine sahiptir.

(ii) $f \in C[0, \infty), \alpha > 0$ ve $t > 0$ için

$$\mathbf{D}^\alpha(I^\alpha f(t)) = f(t)$$

dir. Yani Riemann- Liouville kesirli türevi aynı basamaktan kesirli integralin sol tersidir.

(iii) Eğer f fonksiyonunun α . basamaktan kesirli türevi integrallenebilir ise

$$I^\alpha(\mathbf{D}^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [\mathbf{D}^{\alpha-j} f(t)]_{t=0} \frac{t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$$

dır. Burada $n = \lceil \alpha \rceil + 1$ dir.

(iv) Bir c reel sabitinin Riemann- Liouville kesirli türevi

$$\mathbf{D}^\alpha(c) = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

dır.

(v) Lineerlik

$$\mathbf{D}^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \mathbf{D}^\alpha f(t) + \mu \mathbf{D}^\alpha g(t)$$

(vi)

$$\mathbf{D}^\alpha(t^\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu-\alpha}$$

2.2 Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler

$$\mathbf{D}_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n,$$

diferensiyel operatörünü içeren diferensiyel denklemler birçok fiziksel olayı modellemek için kullanılmıştır. $\lceil \alpha \rceil + 1 = n$ olmak üzere, $\mathbf{D}^\alpha$ Riemann-Liouville türevini içeren

$$\mathbf{D}^\alpha x(t) = f(t, x(t))$$

diferensiyel denkleminin çözümünü elde etmek için

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dt^{\alpha-k}} x(t) \big|_{t=0^+} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ile verilen n tane başlangıç koşuluna ihtiyaç duyulmaktadır. Bu koşulları elde etmek için x fonksiyonunun kesirli basamaktan türevlerine ihtiyaç vardır. Ancak, bu türevlerin elde edilmesi her zaman mümkün değildir. Bunun yanı sıra, bu koşullara fiziksel anlam vermek de olanaksızdır. Bu zorluklardan kurtulmak için Caputo (1967) tarafından bir fikir ortaya konmuştur. $T_{n-1}[x]$, x nin 0 komşuluğundaki $(n-1)$. dereceden Taylor polinomu olmak üzere,

$$\mathbf{D}^\alpha (x - T_{n-1}[x])(t) = f(t, x(t))$$

denklemini

$$x^{(k)}(0) = x_0^k \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

başlangıç değerleri ile birlikte ele alınabilir.

2.2.1 Çözümlerin varlığı ve tekliği

$f \in C([0, T) \times R, R)$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha (x(t) - x_0) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ile verilen Riemann-Liouville kesirli türevi içeren başlangıç değer problemi

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T$$

Volterra kesirli integrale denktir. Burada Γ , Gamma fonksiyonunu ifade etmektedir. Yani, f sürekli olduğu kabul edildiğinden (2.3) ile verilen B.D.P. nin her çözümü Volterra integral denkleminin de bir çözümüdür (Lakshmikantham ve Vatsala 2007). Bu ifadenin terside doğrudur.

(2.3) ile tanımlanan B.D.P. nin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili teoremleri vermeden önce, bu teoremlerin ispatında kullanılacak bir tanım ve bir lemma verelim (Lakshmikantham ve Vatsala 2007).

Tanım 2.4 x -ekseninin bir I alt aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlardan oluşan bir fonksiyon ailesi $\{f_n(x)\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$|x - x_0| < \delta$$

olduğunda

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(x_0) > 0$ bulunabiliyorsa, $\{f_n(x)\}$ ailesine eş-sürekli denir.

Lemma 2.1 Her $\varepsilon > 0$ için $[0, T]$ üzerinde tanımlı sürekli $x_\varepsilon(t)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha (x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0)) &= f(t, x_\varepsilon(t)), \quad 0 < \alpha < 1 \\ x_\varepsilon(0) &= x_0 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümü olmak üzere, $0 \leq t \leq T$ için $|f(t, x_\varepsilon(t))| \leq M$ koşulu sağlanıyorsa, $\{x_\varepsilon(t)\}$ fonksiyon ailesi $0 \leq t \leq T$ üzerinde eş-sürekli dir.

Teorem 2.1 $R_0 = [(t, x) : 0 \leq t \leq a, |x - x_0| \leq b]$ için $f \in C[R_0, R]$ ve R_0 üzerinde $|f(t, x)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ olsun. Bu durumda, $0 \leq t \leq \gamma$ üzerinde (2.3) B.D.P. nin en az bir çözümü vardır. Burada $\gamma = \min\left(a, \left[\frac{b}{M}\Gamma(\alpha + 1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $0 < \alpha < 1$ dir.

İspat. $\delta > 0$ olmak üzere $x_0(\varepsilon)$, $[-\delta, 0]$ üzerinde $x_\varepsilon(t) = x_0(t)$ ve $[0, \gamma_1]$ üzerinde

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon)) ds \quad (2.4)$$

olacak şekilde bir $x_\varepsilon(t)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $D^\alpha x_\varepsilon(t)$ mevcuttur ve γ_1 in seçiminden dolayı

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t) - x_0| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon)) ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{M\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq b \end{aligned}$$

dir. $\gamma_1 < \gamma$ olması durumunda da (2.4) denklemini kullanılarak $x_\varepsilon(t)$ fonksiyonu $\gamma_2 = \min(\gamma, 2\varepsilon)$ olmak üzere $[-\delta, \gamma_2]$ üzerinde kesirli basamaktan sürekli türevlenebilir

ve $|x_\varepsilon(t) - x_0| \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde genişletilebilir. Bu şekilde devam edilirse, $|x_\varepsilon(t) - x_0| \leq b$ koşulunu sağlayan, $[-\delta, \gamma]$ üzerinde tanımlı bir $x_\varepsilon(t)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyon, kesirli basamaktan sürekli türevlere sahip ve aynı aralıkta (2.4) denklemini sağlayan bir fonksiyondur. Aynı zamanda R_0 üzerinde $|f(t, x_\varepsilon(t - \varepsilon))| \leq M$ olduğundan $|D^\alpha x_0(t)| \leq M$ dir. Bu durumda $\{x_\varepsilon(t)\}$ ailesinin eş-sürekli ve düzgün sınırlı fonksiyonların bir ailesi olduğu söylenebilir. Ascoli-Arzela teoremi gereğince, $n \rightarrow \infty$ halinde $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n$ ve $[-\delta, 0]$ üzerinde $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_\varepsilon(t)$ (düzgün) olacak şekilde bir $\{\varepsilon_n\}$ dizisi mevcuttur. f düzgün sürekli olduğundan, $n \rightarrow \infty$ halinde $f(t, x_\varepsilon(t - \varepsilon))$, $f(t, x(t))$ ye düzgün olarak yakınsar. $\varepsilon_n = \varepsilon$ ve $\gamma_1 = \gamma$ alınmasıyla ve (2.4) ün terim terime integre edilmesiyle

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds$$

elde edilir. Bu da (2.3) B.D.P. nin bir $x(t)$ çözümünün varlığını verir. ■

Teorem 2.2 $R_0 = [(t, x) : 0 \leq t \leq a, |x - x_0| \leq b]$ için $f \in C[R_0, R]$ ve R_0 üzerinde $|f(t, x)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ olsun. f , R_0 üzerinde ikinci değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlasın, yani,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq A |x_1 - x_2|$$

olsun. Bu durumda, $0 \leq t \leq \gamma$ üzerinde (2.3) B.D.P. nin tek bir çözümü vardır. Burada $\gamma = \min \left(a, \left[\frac{b}{M} \Gamma(\alpha + 1) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)$, $0 < \alpha < 1$ dir.

(2.3) B.D.P. nin tekliği ile ilgili verdiğimiz bu teoremin ispatı (Podlubny 1999) görülebilir.

2.2.2 Denge noktalarının asimptotik kararlılığı

$\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{cases} D_*^\alpha x_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ D_*^\alpha x_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \vdots \\ D_*^\alpha x_k(t) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{cases} \quad (2.5)$$

otonom sistemini

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \dots, x_k(0) = x_{0k} \quad (2.6)$$

başlangıç değerleri ile birlikte gözönüne alalım. (2.5) sisteminin denge noktaları,

$$D_*^\alpha x_i(t) = 0 \implies f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

koşullarını sağlayan $E^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ noktalarıdır.

Denge noktalarının asimptotik kararlılığını elde etmek için

$$x_i(t) = x_i^* + \delta_i(t)$$

diyelim. $x_i(t)$, (2.5)-(2.6) B.D.P.'nin çözümü olduğundan

$$D_*^\alpha (x_i^* + \delta_i) = f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, \dots, x_k^* + \delta_k), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

yani

$$D_*^\alpha \delta_i(t) = f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, \dots, x_k^* + \delta_k), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.7)$$

yazılabilir. * denge noktasını göstermek üzere,

$$\begin{aligned} f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, \dots, x_k^* + \delta_k) &\simeq f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \\ &+ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_* \delta_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_* \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_* \delta_k \\ &+ \dots \end{aligned}$$

ve $f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = 0$ olduğundan,

$$f_i(x_1^* + \delta_1, x_2^* + \delta_2, \dots, x_k^* + \delta_k) \simeq \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_* \delta_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_* \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_* \delta_k \quad (2.8)$$

yazılabilir. (2.7) ve (2.8) den

$$D_*^\alpha \delta_i(t) \approx \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_* \delta_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_* \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_* \delta_k \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.9)$$

dır. Bu şekilde aşağıdaki indirgenmiş sistem elde edilir.

$$D_*^\alpha \delta = J\delta, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_k \end{bmatrix}, \quad J(E^*) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_k \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots & \partial f_2/\partial x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k/\partial x_1 & \partial f_k/\partial x_2 & \cdots & \partial f_k/\partial x_k \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

ve

$$M^{-1}JM = N, \quad N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \text{ dir.} \quad (2.11)$$

Burada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ lar J Jakobiyan matrisin özdeğerleri ve M ise özvektörleridir. İndirgenmiş sistem

$$\delta_i(0) = x_i(0) - x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

başlangıç değerlerine sahiptir. (2.10) ve (2.11) den

$$D_*^\alpha \delta = (MNM^{-1})\delta \text{ ve } D_*^\alpha(M^{-1}\delta) = N(M^{-1}\delta)$$

olduğundan

$$D_*^\alpha \xi = N\xi, \quad \xi = M^{-1}\delta, \quad \xi = [\xi_1 \ \xi_2 \dots \xi_k]^T,$$

elde edilir. O halde

$$D_*^\alpha \xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \quad D_*^\alpha \xi_2 = \lambda_2 \xi_2, \quad \dots, \quad D_*^\alpha \xi_k = \lambda_k \xi_k \quad (2.12)$$

sistemi mevcuttur. (2.12) ile verilen sistemin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonları yardımı ile

$$\xi_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \xi_i(0) = E_\alpha(\lambda_i t^\alpha) \xi_i(0), \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

şeklinde elde edilir (Podlubny 1999).

Matignon (1996) tarafından elde edilen sonuçlar kullanılırsa,

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

olduğundan $\xi_i(t)$ azalandır. O halde $\delta_i(t)$ de azalandır. Yani $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ koşulları tüm λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ özdeğerleri için geçerliyse $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ denge noktaları lokal olarak asimptotik kararlıdır (Ahmed vd. 2007).

3. KESİRLİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN İKİLİ MODEL

Son zamanlarda dikkati çeken bir çalışma alanı kişilerarası ilişkilerdir. Kişilerarası ilişkiler konusu sosyoloji, biyoloji, nörobilim, psikoloji alanlarında çalışan bilim adamlarının da ilgisini çekmektedir (Ozalp ve Koca 2012, Cherif ve Barley 2011, Allen ve Land 1999, Furman ve Hand 2006, Bus 2005, Collings ve Steinberg 2006 vd.). Kişilerarası ilişkiler denilince aşk, sevgi, nefret, sosyal sorumluluklar ve toplum düzeni gibi birçok konu aklımıza gelmektedir. Toplumda kişilerarası ilişkilere örnek olarak romantik ilişkilerden, aile ve çocuk, arkadaşlık, dostluk, tesadüfi rastlantılar ve internet arkadaşlıkları gibi ilişkilere kadar daha birçok ilişkiyi gösterebiliriz.

Bu alanlardaki deneylerin tasarlanması zor olduğundan dolayı matematiksel modelleme çok önem taşımaktadır. Ayrıca matematiksel modeller romantik ilişkilerin dinamiklerini çalışmak için strateji belirlemeye ve kişiler ile ilişkili olan intihar gibi olumsuz sonuçları kontrol etmeye yardımcı olabilmektedir. Modeldeki parametre değerlerine ve karmaşıklığa bağlı olarak oluşabilecek kaos da dahil olmak üzere birçok davranış elde edilebilir. Psikolojik olayların modellenmesi mühendislik sistemlerinin modellenmesinden çok daha zordur. Bu yüzden romantik ilişki dinamiklerini konu alan çok az matematiksel model vardır. Romantik ilişkiler ve onun ifade edilebilen davranışsal özellikleri kişiden kişiye değişebilir. Birçok matematikçi tarafından kişilerarası duyguyu konu alan matematiksel modeller yapılmıştır (Gagnani 1997, Rinaldi 1998, Gottman 2002, Sprott 2004, Sprott 2005, Wauer 2007).

Kişilerin birbirlerine karşı olan sevgilerinin modellenmesi ilk olarak Strogatz tarafından 1988 yılında yapılmıştır. Strogatz Cornell Üniversitesi Matematik Bölümünde çalışırken öğrencilerinden diferensiyel denklemler yardımıyla aşk ilişkisini incelemelerini istemiştir. Öğrenciler sistemin kurulması, çözümü ve çözümün yorumlanması konularında fikir üretmişlerdir. Bu model bu güne kadar yapılan en basit lineer sevgi modelidir. Modelde Romoe ve Juliet' in aşk ilişkisi incelenip parametrelerin değişimine göre yorumlar yapılmıştır.

$$r(t) = \text{Romeo'nun } t \text{ anındaki sevgisi ya da nefreti}$$

$$j(t) = \text{Juliet'in } t \text{ anındaki sevgisi ya da nefreti}$$

olarak tanımlanmış ve

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= a_{11}r + a_{12}j \\ \frac{dj}{dt} &= a_{21}r + a_{22}j\end{aligned}$$

sistemi ele alınmıştır. Burada a_{ik} ($i, k = 1, 2$) pozitif ya da negatif parametreler olmak üzere parametrelerinin işaretleri kişilerin birbirlerine karşı duygusunun çeşidini göstermektedir.

Kesirli basamaktan bir model oluşturulurken tamsayı basamaktan bir modelin geliştirilmesi esas alınmaktadır. Örneğin Sprott (2004) “Dynamical Models of Love” makalesinde aşkın tamsayı basamaktan modelini ele almıştır. Daha sonra 2007 yılında Ahmad ve El-Khazali tarafından yapılan “Fractional-order Dynamical Models of Love” makalesinde aşkın kesirli basamaktan modeli kurulmuştur. Romantik ilişkilerde hafızadan etkilendiğinden dolayı bu tip dinamik sistemlerin kesirli basamaktan modeller yardımıyla kurulması daha uygun görülmektedir.

3.1 Kesirli Basamaktan Lineer Olmayan İkili Model

Bu bölümde oluşturacağımız model, romantik dinamiklerin davranış özelliklerini konu alan kesirli basamaktan lineer olmayan bir modeldir. Model iki değişkenden oluşmaktadır. Bu değişkenler x ve y değişkenleri olup kişilerin birbirlerine karşı duyduğu sevginin pozitif ya da negatif olmasına göre değişen değişkenlerdir. Model üç parametreden oluşmaktadır. $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2$) olmak üzere unutmaya katsayısı, β_i ($i = 1, 2$) kişinin, partnerinin kendisine olan ilgisine karşılık verme katsayısı ve A_i ($i = 1, 2$) ise ilgi çekme veya diğer bir deyişle cazibe katsayısıdır. β_i ve A_i ($i = 1, 2$) katsayıları pozitif ya da negatif reel sabitlerdir. Modeldeki parametreler kişilerin romantik tiplerini belirtmektedir. Örneğin $\alpha_i > 0$ parametresi, kişilerin kendi kendilerini cesaretlendirmelerinin bir ölçüsüdür. β_i parametresi ise kişinin partneri tarafından cesaretlendirilmesinin bir ölçüsüdür.

Yukarıdaki koşullar altında aşağıdaki matematiksel model yazılabilir:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -\alpha_1 x + \beta_1 y(1 - \varepsilon y^2) + A_1 \\ D^\alpha y(t) = -\alpha_2 y + \beta_2 x(1 - \varepsilon x^2) + A_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_{01} , \quad y(0) = y_{02} \quad (3.2)$$

Burada $0 < \alpha < 1$ olmak üzere model kesirli basamaktan lineer olmayan bir sistemdir.

Kesirli diferensiyel denklemlerin tamsayı basamaktan diferensiyel denklemlerin bir genelleştirilmesi olması bize modelde tamsayı olmayan basamaktan türev kullanmamıza olanak sağlamıştır. $\alpha = 1$ alınmasıyla (3.1)-(3.2) sistemi birinci basamaktan diferensiyel denklem sistemine dönüşür.

3.1.1 Çözümlerin tekliği ve başlangıç koşullarına sürekli bağımlılığı

Bu bölümde iki boyutlu kesirli basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklem sisteminin, çözümlerinin sınırları, çözümlerinin tekliği ve çözümlerinin başlangıç koşullarına sürekli bağımlılığı üzerinde durulacaktır.

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= f_1(t, x(t), y(t)) \\ D^\alpha y(t) &= f_2(t, x(t), y(t)) \\ D^{\alpha-1}x(t) \mid_{t=0} &= a , \quad D^{\alpha-1}y(t) \mid_{t=0} = b \end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$, $t \in I = [0, T)$, $0 < T < +\infty$ ve f_1 ve f_2 sürekli fonksiyonlar olmak üzere, α ncı basamaktan lineer olmayan kesirli basamaktan sistemini ele alalım. Yukarıda tanımladığımız kesirli basamaktan sistemin çözümlerinin sınırlılığı, tekliği ve başlangıç koşullarına olan sürekli bağımlılığı ile ilgili teoremleri vermeden önce, bu teoremlerin ispatında kullanılacak lemmaları verelim [Prudnikov vd. 1981].

Lemma 3.1 α , β , γ , ve p pozitif sabitler olsun. Bu durumda aşağıdaki integral eşitliği yazılabilir.

$$\int_0^t (t-s)^{p(\beta-1)} s^{p(\gamma-1)} ds = t^\theta B[p(\gamma-1)+1, p(\beta-1)+1], \quad t \in R_+,$$

Burada $B[\xi, \eta] = \int_0^1 s^{\xi-1} (1-s)^{\eta-1} ds$ ($\Re \xi > 0$, $\Re \eta > 0$) ve $\theta = p(\beta + \gamma - 2) + 1$ dir.

Lemma 3.2 u, v ve $f_i \in C(I, R_+)$, $i = 1, 2$ olmak üzere f_i azalmayan ve $\varphi_{ij} \in C(I \times I, R_+)$, $(i = 1, 2)$ her sabit s noktası için t değişkenine göre azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $t \in I$ için (3.3) sağlanıyorsa (3.4) geçerlidir.

$$\begin{cases} u(t) \leq f_1(t) + \int_0^t [\varphi_{11}(t, s)u(s) + \varphi_{12}(t, s)v(s)]ds, \\ v(t) \leq f_2(t) + \int_0^t [\varphi_{21}(t, s)u(s) + \varphi_{22}(t, s)v(s)]ds, \end{cases} \quad t \in I \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} u(t) \leq [f_1(t) + f_2(t) \int_0^t \varphi_{12}(t, s)\Phi_2(s)ds] \\ \times \exp\{\int_0^t \varphi_{11}(t, s)ds + \int_0^t \varphi_{12}(t, s)\Phi_2(s)(\int_0^s \varphi_{21}(s, \tau)\Phi_1(\tau)d\tau)ds\}, \\ v(t) \leq [f_2(t) + f_1(t) \int_0^t \varphi_{21}(t, s)\Phi_1(s)ds] \\ \times \exp\{\int_0^t \varphi_{22}(t, s)ds + \int_0^t \varphi_{21}(t, s)\Phi_1(s)(\int_0^s \varphi_{12}(s, \tau)\Phi_2(\tau)d\tau)ds\} \end{cases} \quad (3.4)$$

Burada

$$\Phi_i(t) := \exp \int_0^t \varphi_{ii}(t, s)ds, \quad i = 1, 2$$

dir.

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= -\alpha_1 x + \beta_1 y(1 - \varepsilon y^2) + A_1 = f_1(t, x(t), y(t)) \\ D^\alpha y(t) &= -\alpha_2 y + \beta_2 x(1 - \varepsilon x^2) + A_2 = f_2(t, x(t), y(t)) \\ D^{\alpha-1}x(t) \mid_{t=0} &= a, \quad D^{\alpha-1}y(t) \mid_{t=0} = b \end{aligned}$$

kesirli basamaktan lineer olmayan modeli ele alalım. Qing-Hua Ma ve Josip Pečarić (2010) tarafından verilen teoremlerin basit bir uygulaması olarak yukarıdaki modelin çözümünün sınırlarını, çözümünün tekliğini ve çözümün başlangıç koşullarına sürekli bağımlılığını göstermek için aşağıdaki teoremler ele alınabilir.

Teorem 3.1 f_1 ve $f_2 \in C(I \times R^2, R)$ olmak üzere

$$\begin{cases} |f_1(t, x, y)| \leq \alpha_1(t)|x| + \beta_1(t)|y|, \\ |f_2(t, x, y)| \leq \beta_2(t)|x| + \alpha_2(t)|y|, \end{cases} \quad (3.5)$$

koşulunu sağlasın. α_i ve $\beta_i \in C(I, R_+)$, $(i, j = 1, 2)$ ve $x, y \in R$ oluyorsa, kesirli basamaktan sistemin çözümü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left\{ \begin{array}{l} |x(t)| \leq 2^{1-\frac{1}{q}} t^{\alpha-1} \left[\left(\frac{|a|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q + \left(\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q E^*(t) \int_0^t \beta_1^q(s) \Phi_2(s) ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{q} E^*(t) \left[\int_0^t \alpha_1^q(s) ds + \int_0^t \beta_1^q(s) \Phi_2(s) (E^*(s) \int_0^s \beta_2^q(\tau) \Phi_1(\tau) d\tau) ds \right] \right\}, \\ |y(t)| \leq 2^{1-\frac{1}{q}} t^{\alpha-1} \left[\left(\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q + \left(\frac{|a|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q E^*(t) \int_0^t \beta_2^q(s) \Phi_1(s) ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{q} E^*(t) \left[\int_0^t \alpha_2^q(s) ds + \int_0^t \beta_2^q(s) \Phi_1(s) (E^*(s) \int_0^s \beta_1^q(\tau) \Phi_2(\tau) d\tau) ds \right] \right\}, \end{array} \right.$$

Burada $t > 0$ ve

$$\begin{aligned} p &= \frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}, & q &= \frac{1+4\alpha}{\alpha}, & \theta &= 2p(\alpha-1)+1, \\ E^*(t) &= \frac{2^{2q-2} B^{\frac{q}{p}} [p(\alpha-1)+1, p(\alpha-1)+1] t^{\theta \frac{q}{p} + q(1-\alpha)}}{\Gamma^q(\alpha)} \\ \Phi_1(t) &: = \exp(E^*(t) \int_0^t \alpha_1^q(s) ds), \\ \Phi_2(t) &: = \exp(E^*(t) \int_0^t \alpha_2^q(s) ds), \end{aligned}$$

dir.

İspat.

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha x(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ D^\alpha y(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ D^{\alpha-1} x(t) |_{t=0} = a, \quad D^{\alpha-1} y(t) |_{t=0} = b \end{array} \right. \quad (3.6)$$

kesirli basamaktan (B.D.P) nin çözümü aşağıdaki integral denklemine denktir

(Kilbas vd. 2006).

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{a}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_1(\tau, x(\tau), y(\tau)) d\tau, \\ y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_2(\tau, x(\tau), y(\tau)) d\tau, \end{array} \right.$$

(3.5) koşulu ve $u(t) = |x(t)| t^{1-\alpha}$, $v(t) = |y(t)| t^{1-\alpha}$ eşitliklerinin integral denklemine uygulanmasından aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) \leq \frac{|a|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} [\alpha_1 u(\tau) + \beta_1 v(\tau)] d\tau, \\ v(t) \leq \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} [\beta_2 u(\tau) + \alpha_2 v(\tau)] d\tau, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Şimdi (3.7) eşitliğine $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $p = \frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}$ hölder eşitsizliğini ve $(a+b)^l \leq 2^{l-1}(a^l + b^l)$ ($l \geq 1$) basit eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{cases} u(t) \leq \frac{|a|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2^{1-\frac{1}{q}}t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}E(t) \left(\int_0^t [\alpha_1^q u^q(\tau) + \beta_1^q v^q(\tau)] d\tau \right)^{\frac{1}{q}}, \\ v(t) \leq \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2^{1-\frac{1}{q}}t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}E(t) \left(\int_0^t [\beta_2^q u^q(\tau) + \alpha_2^q v^q(\tau)] d\tau \right)^{\frac{1}{q}}, \end{cases} \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada $E(t) = \left(\int_0^t (t-\tau)^{p(\alpha-1)} \tau^{p(\alpha-1)} d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$ dir. (3.8) eşitliğine tekrar

$$(a+b)^l \leq 2^{l-1}(a+b)^l$$

($l \geq 1$, a ve b pozitif sabitler) eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{cases} u^q(t) \leq 2^{q-1} \left(\frac{|a|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q + \frac{2^{2q-2}t^{q(1-\alpha)}}{\Gamma^q(\alpha)} E^q(t) \int_0^t [\alpha_1^q u^q(\tau) + \beta_1^q v^q(\tau)] d\tau, \\ v^q(t) \leq 2^{q-1} \left(\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q + \frac{2^{2q-2}t^{q(1-\alpha)}}{\Gamma^q(\alpha)} E^q(t) \int_0^t [\beta_2^q u^q(\tau) + \alpha_2^q v^q(\tau)] d\tau, \end{cases} \quad (3.9)$$

olur. Elde edilen son eşitsizlikte $E^q(t)$ integraline Lemma 3.1 uygulanırsa

$$\begin{cases} u^q(t) \leq 2^{q-1} \left(\frac{|a|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q + E^*(t) \int_0^t [\alpha_1^q u^q(\tau) + \beta_1^q v^q(\tau)] d\tau, \\ v^q(t) \leq 2^{q-1} \left(\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)} \right)^q + E^*(t) \int_0^t [\beta_2^q u^q(\tau) + \alpha_2^q v^q(\tau)] d\tau, \end{cases} \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada

$$E^*(t) = \frac{2^{2q-2}B^{\frac{q}{p}}[p(\alpha-1)+1, p(\alpha-1)+1]t^{\theta\frac{q}{p}+q(1-\alpha)}}{\Gamma^q(\alpha)}$$

dir.

$$p(\alpha-1)+1 = \frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}(\alpha-1)+1 = \frac{4\alpha^2}{1+3\alpha} > 0$$

ve

$$\theta\frac{q}{p} + q(1-\alpha) = [2\frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}(\alpha-1)+1]\frac{1+3\alpha}{\alpha} + \frac{1+4\alpha}{\alpha}(1-\alpha) = 4\alpha > 0$$

olduğundan

$$0 < B[p(\alpha-1)+1, p(\alpha-1)+1] < +\infty$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. O halde $E^*(t)$ fonksiyonu I aralığında azalmayandır.

Lemma 3.2 nin (3.10) a uygulanmasından ve $u(t) = |x(t)|t^{1-\alpha}$, $v(t) = |y(t)|t^{1-\alpha}$

eşitliklerinin gözönüne alınmasından istenilen sınırlar elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sıradaki teorem sistemin çözümünün tek olduğunu söyleyebilmek için verilmiştir.

Teorem 3.2 f_1 ve $f_2 \in C(I \times R^2, R)$, α_i ve $\beta_i \in C(I, R_+)$, $(i, j = 1, 2)$ olmak üzere

$$\begin{cases} |f_1(t, u_2, v_2) - f_1(t, u_1, v_1)| \leq \alpha_1(t) |u_2 - u_1| + \beta_1(t) |v_2 - v_1|, \\ |f_2(t, u_2, v_2) - f_2(t, u_1, v_1)| \leq \beta_2(t) |u_2 - u_1| + \alpha_2(t) |v_2 - v_1|, \end{cases} \quad (3.11)$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda (3.6) sisteminin tek bir çözümü vardır.

İspat. $\epsilon > 0$ olmak üzere keyfi reel bir sayı ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $p = \frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}$ alalım. (3.6) kesirli basamaktan sisteminin $(x_1(t), y_1(t))$ ve $(x_2(t), y_2(t))$ olmak üzere iki çözümünün olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.6) sistemi $i = 1, 2$ için aşağıdaki integral denklemine denktir.

$$\begin{cases} x_i(t) = \frac{a}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_1(\tau, x_i(\tau), y_i(\tau)) d\tau \\ y_i(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_2(\tau, x_i(\tau), y_i(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (3.12)$$

(3.12) denkleminde $x(t) = |x_2(t) - x_1(t)|$ ve $y(t) = |y_2(t) - y_1(t)|$ eşitliklerini gözönüne alarak (3.11) Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{cases} x(t) \leq \epsilon + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\alpha_1 x(\tau) + \beta_1 y(\tau)] d\tau \\ y(t) \leq \epsilon + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\beta_2 x(\tau) + \alpha_2 y(\tau)] d\tau \end{cases}$$

elde edilir. Teorem (3.1) in ispatında yapılan işlemlerin benzerleri tekrarlanırsa

$$\begin{cases} x^q(t) \leq 2^{q-1} \epsilon^q + \frac{2^{2q-2}}{\Gamma^q(\alpha)} B^{\frac{q}{p}}[1, \theta_1] t^{\theta_1 \frac{q}{p}} \int_0^t [\alpha_1^q x^q(\tau) + \beta_1^q y^q(\tau)] d\tau \\ y^q(t) \leq 2^{q-1} \epsilon^q + \frac{2^{2q-2}}{\Gamma^q(\alpha)} B^{\frac{q}{p}}[1, \theta_1] t^{\theta_1 \frac{q}{p}} \int_0^t [\beta_2^q x^q(\tau) + \alpha_2^q y^q(\tau)] d\tau \end{cases}$$

elde edilir.

$$\theta_1 = p(\alpha - 1) + 1 = \frac{1 + 4\alpha}{1 + 3\alpha}(\alpha - 1) + 1 = \frac{4\alpha^2}{1 + 3\alpha} > 0$$

olmak üzere $0 < B[1, \theta_1] < +\infty$ ve $t^{\theta_1 \frac{q}{p}}$ nin azalmayan olduğu gösterilmiş olur.

Elde ettiğimiz son eşitsizliğe Lemma 3.2 yi uygularsak

$$\left\{ \begin{array}{l} x^q(t) \leq 2^{q-1}\epsilon^q [1 + E_1(t) \int_0^t \beta_1^q(t, s) \Psi_2(s) ds] \\ \times \exp\{E_1(t) [\int_0^t \alpha_1^q(s) ds + \int_0^t \beta_1^q(s) \Psi_2(s) (E_1(s) \int_0^s \beta_2^q(\tau) \Psi_1(\tau) d\tau) ds]\}, \\ y^q(t) \leq 2^{q-1}\epsilon^q [1 + E_1(t) \int_0^t \beta_2^q(t, s) \Psi_1(s) ds] \\ \times \exp\{E_1(t) [\int_0^t \alpha_2^q(s) ds + \int_0^t \beta_2^q(s) \Psi_1(s) (E_1(s) \int_0^s \beta_1^q(\tau) \Psi_2(\tau) d\tau) ds]\}, \quad t \in I \\ E_1(t) = \frac{2^{2q-2}}{\Gamma^q(\alpha)} B^{\frac{q}{p}}[1, \theta_1] t^{\theta_1 \frac{q}{p}} \\ \Psi_1(t) := \exp(E_1(t) \int_0^t \alpha_1^q(s) ds), \\ \Psi_2(t) := \exp(E_1(t) \int_0^t \alpha_2^q(s) ds), \end{array} \right.$$

elde edilir. $\epsilon \rightarrow 0$ alınırsa $x^q(t) = y^q(t) = 0$ olur. O halde $x_1(t) = x_2(t)$ ve $y_1(t) = y_2(t)$ eşitliklerinden dolayı sistemin çözümü tektir denir. ■

Son olarak kesirli basamaktan sistemin çözümlerinin başlangıç koşuluna olan sürekli bağımlılığını inceleyelim. Bunun için aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha x(t) = \overline{f_1}(t, x(t), y(t)) \\ D^\alpha y(t) = \overline{f_2}(t, x(t), y(t)) \\ D^{\alpha-1}x(t) |_{t=0} = \overline{a}, \quad D^{\alpha-1}y(t) |_{t=0} = \overline{b} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$t \in I$, $\overline{f_1}$ ve $\overline{f_2} \in C(I \times R^2)$, ve $\overline{a}, \overline{b} \in R$.

Teorem 3.3 *Teorem 3.2 nin koşulları sağlanmak üzere Eğer*

$$\left\{ \begin{array}{l} |a - \overline{a}| + |b - \overline{b}| \leq \epsilon \\ |f_1(t, \overline{x}, \overline{y}) - \overline{f_1}(t, \overline{x}, \overline{y})| + |f_2(t, \overline{x}, \overline{y}) - \overline{f_2}(t, \overline{x}, \overline{y})| \leq \epsilon \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$t \in I$ ve $\overline{x}, \overline{y} \in R$ ise aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$\left\{ \begin{array}{l} |x(t) - \overline{x}(t)| \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \epsilon t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) + [1 + E^*(t) \int_0^t \beta_1^q(s) \Phi_2(s) ds]^{\frac{1}{q}} \\ \times \exp\{\frac{1}{q} E^*(t) [\int_0^t \alpha_1^q(s) ds + \int_0^t \beta_1^q(s) \Phi_2(s) (E^*(s) \int_0^s \beta_2^q(\tau) \Phi_1(\tau) d\tau) ds]\}, \\ |y(t) - \overline{y}(t)| \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \epsilon t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) [1 + E^*(t) \int_0^t \beta_2^q(s) \Phi_2(s) ds]^{\frac{1}{q}} \\ \times \exp\{\frac{1}{q} E^*(t) [\int_0^t \alpha_2^q(s) ds + \int_0^t \beta_2^q(s) \Phi_1(s) (E^*(s) \int_0^s \beta_1^q(\tau) \Phi_2(\tau) d\tau) ds]\} \end{array} \right.$$

$t > 0$ olmak üzere $E^*(t)$ ve $\Phi_i(t)$ teorem 3.1 de tanımlandığı gibidir.

İspat. $(x(t), y(t))$ ve $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ sırasıyla (3.6) ve (3.13) sistemlerinin çözümleri olsunlar. O halde $(x(t), y(t))$ (3.6) sistemini, $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ ise (3.13) sistemini sağladığından dolayı aşağıdaki integral denklemleri yazılabilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} |x(t) - \bar{x}(t)| \leq \frac{|a - \bar{a}|}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f_1(\tau, x(\tau), y(\tau)) - f_1(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))| d\tau \\ \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f_1(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) - \bar{f}_1(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))| d\tau \\ \leq \epsilon \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) \\ \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [\alpha_1(\tau) |x(\tau) - \bar{x}(\tau)| + \beta_1(\tau) |y(\tau) - \bar{y}(\tau)|] d\tau \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} |y(t) - \bar{y}(t)| \leq \frac{|b - \bar{b}|}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f_2(\tau, x(\tau), y(\tau)) - f_2(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))| d\tau \\ \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f_2(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)) - \bar{f}_2(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))| d\tau \\ \leq \epsilon \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) \\ \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [\beta_2(\tau) |x(\tau) - \bar{x}(\tau)| + \alpha_2(\tau) |y(\tau) - \bar{y}(\tau)|] d\tau \end{array} \right.$$

dir. (3.11) ve (3.14) varsayımından

$$\bar{u}(t) = |x(t) - \bar{x}(t)| t^{1-\alpha} \text{ ve } \bar{v}(t) = |y(t) - \bar{y}(t)| t^{1-\alpha}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(t) \leq \epsilon \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} [\alpha_1(\tau) \bar{u}(\tau) + \beta_1(\tau) \bar{v}(\tau)] d\tau \\ \bar{v}(t) \leq \epsilon \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha-1} [\beta_2(\tau) \bar{u}(\tau) + \alpha_2(\tau) \bar{v}(\tau)] d\tau \end{array} \right.$$

dir. Teorem 3.1 in ispatında yapılan işlemler sırasıyla tekrarlanırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^q(t) \leq 2^{q-1} \epsilon^q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right)^q + E^*(t) \int_0^t [\alpha_1^q(\tau) \bar{u}^q(\tau) + \beta_1^q(\tau) \bar{v}^q(\tau)] d\tau \\ \bar{v}^q(t) \leq 2^{q-1} \epsilon^q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right)^q + E^*(t) \int_0^t [\beta_2^q(\tau) \bar{u}^q(\tau) + \alpha_2^q(\tau) \bar{v}^q(\tau)] d\tau \end{array} \right.$$

$t \in I$ ve $E^*(t)$ teorem 3.1 de tanımlandığı gibi olmak üzere elde edilen son eşitsizliğe lemma 3.2 yi uygularsak istenilen eşitsizlikler elde edilmiş olur. ■

3.1.2 İkili modelin denge noktaları ve lokal asimptotik kararlılığı

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -\alpha_1 x + \beta_1 y(1 - \varepsilon y^2) + A_1 \\ D^\alpha y(t) = -\alpha_2 y + \beta_2 x(1 - \varepsilon x^2) + A_2 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$x(0) = x_{01}, \quad y(0) = y_{02}$$

α . basamaktan kesirli diferensiyel denklem sistemini ele alalım. (3.15) sisteminin denge noktaları

$$D^\alpha x(t) = f_1(x, y) = 0$$

$$D^\alpha y(t) = f_2(x, y) = 0$$

sistemi yardımıyla hesaplandığında $K_0 = (0, 0)$ ve $K_1 = (x^*, y^*)$ elde edilir.

Karşılıklı ilgisizliğin olduğu K_0 denge noktasındaki Jakobiyeen matris:

$$J(x^*, y^*) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^*} & \frac{\partial f_1}{\partial y^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^*} & \frac{\partial f_2}{\partial y^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1(1 - 3\varepsilon y_*^2) \\ \beta_2(1 - 3\varepsilon x_*^2) & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 3.4 *Aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa (3.15) ile verilen sistemin $K_0 = (0, 0)$ denge noktası asimptotik karardır.*

(i) $1 < \frac{-4\beta_1\beta_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}$

(ii) $\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} < 1$

İspat. (3.15) sisteminin K_0 denge noktasının kararlı olması için bu noktada elde edilmiş Jakobien matrisin tüm λ_i özdeğerlerinin

$$|\arg \lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2$$

koşulunu sağlaması gerekmektedir (Matignon 1996, Ahmed vd. 2007). Bu özdeğerler,

$$\det(J(K_0) - \lambda I) = 0 \quad (3.16)$$

karakteristik denkleminin çözülmesiyle elde edilir. (3.16) açık olarak

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} B &= (\alpha_1 + \alpha_2) \\ C &= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \end{aligned}$$

dir. Karakteristik denklemin kökleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B}{2} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

Denge noktalarının asimptotik kararlı olması için sisteme ait Jakobiye matris için hesaplanan özdeğerlerin her ikisinin negatif olması gerekmektedir ($|\arg \lambda_1| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $|\arg \lambda_2| > \frac{\alpha\pi}{2}$).

$B = (\alpha_1 + \alpha_2) > 0$ olduğu açıktır. O halde özdeğerlerin negatif olması için ya $B^2 - 4C < 0$ ya da $B^2 > |B^2 - 4C|$ koşulları sağlanmalıdır. Eğer $B^2 - 4C < 0$ ise

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) &< 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)^2 &< -4\beta_1\beta_2 \\ 1 &< \frac{-4\beta_1\beta_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir, özdeğerler negatiftir ve denge noktası asimptotik kararlıdır. Böylece (i) şartı ispatlanmış olur. Diğer taraftan $B^2 > |B^2 - 4C|$ olması durumunda (ii) şartının sağlandığı kolayca görülebilir. ■

Şimdi (3.15) sisteminin $K_1 = (x^*, y^*)$ pozitif denge noktasının kararlılığını inceleyeceğiz. K_1 noktasında Jakobiye matris

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1(1 - 3\varepsilon y_*^2) \\ \beta_2(1 - 3\varepsilon x_*^2) & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Lineerleştirilmiş sistemin karakteristik denklemi

$$P(\lambda) = \lambda^2 + D\lambda + K = 0 \quad (3.17)$$

olup buradaki katsayılar,

$$\begin{aligned} K &= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2(1 - 3\epsilon y_*^2)(1 - 3\epsilon x_*^2) \\ D &= (\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

dir. Karakteristik denklemin kökleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-D}{2} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4K}}{2}$$

Teorem 3.5 *Aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa (3.15) ile verilen sistemin $K_1 = (x^*, y^*)$ denge noktası asimptotik karardır.*

- (i) $1 < \frac{-4\beta_1\beta_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}(1 - 3\epsilon y_*^2)(1 - 3\epsilon x_*^2)$
- (ii) $\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}(1 - 3\epsilon y_*^2)(1 - 3\epsilon x_*^2) < 1$

İspat. K_1 denge noktasının asimptotik kararlı olması için K_1 de elde edilen Jakobiyen matrisin tüm özdeğerlerinin

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad i = 1, 2$$

koşulunu sağlaması gerekmektedir (Matignon 1996, Ahmed vd. 2007). Teoremin ispatı teorem 3.4 ün ispatına benzer olarak yapılır. ■

Teorem 3.6 K , (3.18) de verildiği gibi olsun. Eğer $K < 0$ ise, (3.15) ile verilen sistemin K_1 pozitif denge noktası kararsızdır.

İspat. Eğer $K < 0$ ise Descartes işaret kuralından (3.17) denkleminin en az bir pozitif kökü olduğu açıktır. O halde, (3.15) sisteminin K_1 pozitif denge noktası kararsızdır. ■

3.2 Nümerik Çözüm

(3.15) tipindeki başlangıç değer problemlerinin çözümü için birçok teknik vardır. Biz bu problemin çözümü için Demirci ve Özalp tarafından verilen yeni bir tekniği kullanacağız (Demirci ve Özalp 2012). Kullanacağımız bu yeni yöntemle yapılan çözüm diğer yöntemlerle yapılan çözüme göre daha hızlı elde edilmektedir. Ayrıca, tamsayı basamaktan diferensiyel denklemler için bilinen tüm nümerik çözüm tekniklerinin kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için de uygulanabilmesini sağlamaktadır.

Teorem 3.7 $\|\cdot\|$, R^n de uygun bir norm olsun. $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ve $R_1 = [(t, X) : 0 \leq t \leq a \text{ ve } \|X - X_0\| \leq b]$ olmak üzere, $f \in C[R_1, R^n]$ ve R_1 üzerinde $\|f(t, X)\| \leq M$ olsun. Bu durumda,

$$X(0) = X_0 \quad (3.19)$$

başlangıç koşulu ile verilen

$$\mathbf{D}^\alpha(X(t) - X_0) = f(t, X(t)) \quad (3.20)$$

kesirli basamaktan diferensiyel denklem sisteminin $0 \leq t \leq \beta$ üzerinde en az bir çözümü vardır. Burada $\beta = \min\left(a, \left[\frac{b}{M}\Gamma(\alpha + 1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $0 < \alpha < 1$ dir.

Teorem 3.8 $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α . basamaktan kesirli türev içeren (3.19)-(3.20) ile verilen B.D.P. ni ele alalım.

$$g(\nu, X_*(\nu)) = f\left(t - (t^\alpha - \nu\Gamma(\alpha + 1))^{1/\alpha}, X\left(t - (t^\alpha - \nu\Gamma(\alpha + 1))^{1/\alpha}\right)\right)$$

olarak tanımlansın ve teorem 3.7 nin koşulları sağlansın. Bu durumda (3.19)-(3.20) ile verilen B.D.P. nin bir $X(t)$ çözümü

$$X(t) = X_*(t^\alpha/\Gamma(\alpha + 1))$$

ile verilir. Burada $X_*(\nu)$,

$$\begin{aligned} \frac{dX_*(\nu)}{d\nu} &= g(\nu, X_*(\nu)) \\ X_*(0) &= X_0 \end{aligned}$$

ile verilen tamsayı basamaktan diferensiyel denklem sisteminin bir çözümüdür.

3.2.1 İkili sistem için nümerik örnek

(3.15) sistemi,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.001 & \alpha_2 &= 0.004 & \beta_1 &= 0.005 & \beta_2 &= -0.001 \\ \varepsilon &= 0.01 & A_1 &= 0.02 & A_2 &= 0.03 & \alpha &= 0.90\end{aligned}$$

parametreleri ve

$$x(0) = 10, \quad y(0) = 8 \quad (3.21)$$

başlangıç koşullarıyla ele alınsın. (3.15) sistemi (3.21) parametreleri ile birlikte ele alındığında aşağıdaki sistemin

$$\begin{aligned}D^\alpha x &= -0.001x + 0.005y(1 - 0.01y^2) + 0.02 \\ D^\alpha y &= -0.001x(1 - 0.01x^2) - 0.004y + 0.03\end{aligned} \quad (3.22)$$

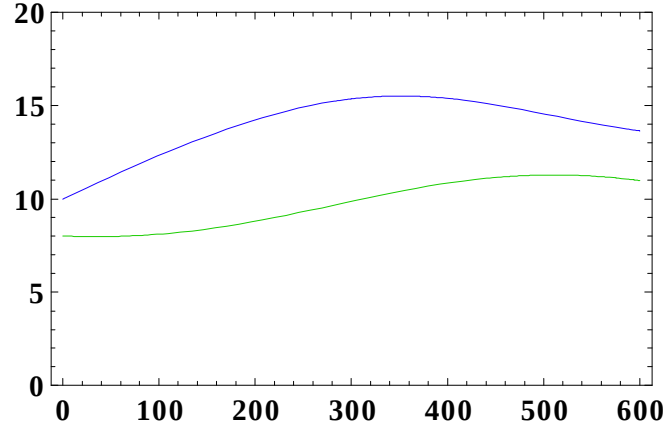
pozitif denge noktası

$$x^* = 13.7604, \quad y^* = 10.5737$$

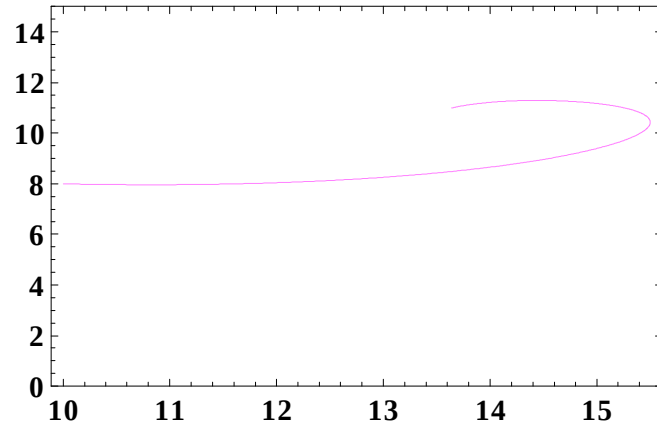
olarak bulunur. Sistemin nümerik çözümü için Demirci ve Özalp (2012) tarafından geliştirilen yeni teknik esas alınarak tamsayı basamaktan sistem

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dv} = -0.001x^* + 0.005y^*(1 - 0.01y^{*2}) + 0.02 \\ \frac{dy^*}{dv} = -0.001x^*(1 - 0.01x^{*2}) - 0.004y^{*2} + 0.03 \end{cases}$$

olarak elde edilmiştir. Tamsayı basamaktan sistemin çözümü Runge-Kutta metodu ile verilmiştir. Elde edilen son sistemin çözümü $(x^*(v), y^*(v))$ olmak üzere ke-sirli basamaktan sistemin çözümü $\alpha = 0.90$ basamak değeri için $(x^*(t^{0.90}/\Gamma(1.90)), y^*(t^{0.90}/\Gamma(1.90)))$ olup sonuçlar şekil 3.1-3.2’ de görülmektedir.



Şekil 3.1. $x(t)$ (ust) ve $y(t)$ (alt) nin çözümü



Şekil 3.2. Denge noktasına asimptotik yaklaşım.

4. KESİRLİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN ÜÇLÜ MODEL

Bu kısımda, üçüncü bölümde incelediğimiz kesirli basamaktan lineer olmayan modele üçüncü bir kişi eklenerek, modelin davranışı yorumlanacaktır. Model A kişinin B ve C kişileriyle olan romantik davranışını ele alan kesirli basamaktan lineer olmayan bir modeldir. Modelde karmaşıklığı önlemek için B ve C kişilerinin birbirlerinden habersiz olduğu varsayılacaktır. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α , A kişinin B ve C kişilerine karşı davranış dinamiğini temsil etmektedir. $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2$) olmak üzere unutmama katsayısı, β_i ($i = 1, 2, 3$) kişinin, partnerinin kendisine olan ilgisine karşılık verme katsayısı ve A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ise ilgi çekme diğer bir deyişle cazibe katsayısıdır. β_i ve A_i katsayıları pozitif ya da negatif reel sabitlerdir. Modeldeki parametreler kişilerin romantik tiplerini belirtmektedir. Ele aldığımız kesirli basamaktan model (4.1) denklem sistemi ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= -\alpha_1 x_1 + \beta_1(x_2 - x_3)(1 - \varepsilon(x_2 - x_3)^2) + A_1 \\ D^\alpha x_2(t) &= -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1(1 - \varepsilon x_1^2) + A_2 \\ D^\alpha x_3(t) &= -\alpha_2 x_3 + \beta_3 x_4(1 - \varepsilon x_4^2) + A_3 \\ D^\alpha x_4(t) &= -\alpha_1 x_4 + \beta_1(x_3 - x_2)(1 - \varepsilon(x_3 - x_2)^2) + A_4 \\ x_1(0) &= x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad x_3(0) = x_{03}, \quad x_4(0) = x_{04}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1 Denge Noktaları ve Lokal Asimptotik Kararlılık

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere (4.1) sistemini

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ D^\alpha x_2(t) &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ D^\alpha x_3(t) &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ D^\alpha x_4(t) &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}$$

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad x_3(0) = x_{03}, \quad x_4(0) = x_{04}.$$

başlangıç koşulları ile ele alalım.

Denge noktalarını hesaplayabilmek için

$$D^\alpha x_i(t) = 0 \implies f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

eşitliğini gözönüne alalım. Buradan $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ için $K_0 = (0, 0, 0, 0)$ ve $K_1 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ denge noktaları elde edilir.

Karşılıklı ilgisizliğin olduğu $K_0 = (0, 0, 0, 0)$ ve $K_1 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ denge noktasındaki Jakobiye matrisler:

$$J(0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 & -\beta_1 & 0 \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & \beta_3 \\ 0 & -\beta_1 & \beta_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$J(K_1) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1(1 - 3\varepsilon(x_2^* - x_3^*)^2) & -\beta_1(1 - 3\varepsilon(x_2^* - x_3^*)^2) & 0 \\ \beta_2(1 - 3\varepsilon x_1^{*2}) & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & \beta_3(1 - 3\varepsilon x_4^{*2}) \\ 0 & -\beta_1(1 - 3\varepsilon(x_3^* - x_2^*)^2) & \beta_1(1 - 3\varepsilon(x_3^* - x_2^*)^2) & -\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

dir.

Teorem 4.1 *Aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa (4.1) ile verilen sistemin $K_0 = (0, 0, 0, 0)$ denge noktası asimptotik karardır.*

(i) $1 < \frac{-4(\beta_1\beta_3 + \beta_1\beta_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}$

(ii) $\frac{(\beta_1\beta_3 + \beta_1\beta_2)}{\alpha_1\alpha_2} < 1$

İspat. (4.1) sisteminin K_0 denge noktasının kararlı olması için bu noktada elde edilmiş Jakobien matrisin tüm λ_i özdeğerlerinin

$$|\arg \lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

koşulunu sağlaması gerekmektedir (Matignon 1996, Ahmed vd. 2007). Bu özdeğerler,

$$\det(J(K_0) - \lambda I) = 0 \tag{4.2}$$

karakteristik denkleminin çözülmesiyle elde edilir. (4.2) açık olarak

$$(\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)(\lambda^2 + (A + B)\lambda + (AB - C)) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$A = \alpha_1$$

$$B = \alpha_2$$

$$C = \beta_1\beta_3 + \beta_1\beta_2$$

dir. Karakteristik denklemin kökleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\alpha_1, \lambda_2 = -\alpha_2 \\ \lambda_{3,4} &= \frac{-(A+B)}{2} \pm \frac{\sqrt{(A+B)^2 - 4AB + 4C}}{2}\end{aligned}$$

Denge noktalarının asimptotik kararlı olması için sisteme ait Jakobiye matris için hesaplanan özdeğerlerin tümünün negatif olması gerekmektedir ($|\arg \lambda_1| > \frac{\alpha\pi}{2}, |\arg \lambda_2| > \frac{\alpha\pi}{2}, |\arg \lambda_3| > \frac{\alpha\pi}{2}, |\arg \lambda_4| > \frac{\alpha\pi}{2}$). $(A+B) > 0$ olduğu açıktır. O halde özdeğerlerin negatif olması için ya $(A-B)^2 + 4C < 0$ şartı sağlanmalıdır ya da $(A+B)^2 > |(A+B)^2 - 4(AB-C)|$ durumu incelenmelidir. ■

Şimdi (4.1) sisteminin $K_1 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ pozitif denge noktasının kararlılığını inceleyeceğiz. K_1 noktasında Jakobiye matris

$$J(K_1) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & a & -a & 0 \\ b & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & c \\ 0 & -a & a & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$a = \beta_1(1 - 3\varepsilon(x_2^* - x_3^*)^2), \quad b = \beta_2(1 - 3\varepsilon x_1^{*2}), \quad c = \beta_3(1 - 3\varepsilon x_4^{*2})$$

şeklindedir.

Lineerleştirilmiş sistemin karakteristik denklemi

$$K(\lambda) := (\alpha_1 + \lambda)R(\lambda) = 0 \tag{4.3}$$

olup $R(\lambda)$, a_1 , a_2 ve a_3 aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ a_2 = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - ac - ab \\ a_3 = \alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_2(ac + ab) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$R(\lambda) = (\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) \quad (4.5)$$

$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ polinomu için $D(P)$,

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3a_1^3 - 4a_2^3 - 27a_3^3$$

olarak verilsin.

Teorem 4.2 $R(\lambda)$ polinomu (4.5) de, a_1, a_2 ve a_3 katsayıları (4.4) de verildiği gibi olmak üzere (4.1) sisteminin $K_1 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ pozitif denge noktası, aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa asimptotik kararlıdır.

- (i) $D(R) > 0$, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, ve $a_1a_2 > a_3$.
- (ii) $D(R) < 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 > 0$ ve $\alpha < \frac{2}{3}$.
- (iii) $D(R) < 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ ve $\alpha > \frac{2}{3}$.

İspat. K_1 denge noktasının kararlı olması için K_1 de elde edilen Jakobiyen matrisin tüm özdeğerlerinin

$$|\arg \lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

koşulunu sağlaması gerekmektedir. (Ahmed vd. 2006)' da verilen Önerme 1 den ispat açıktır. ■

Teorem 4.3 a_3 , (4.4) de verildiği gibi olsun. Eğer $a_3 < 0$ ise, (4.1) ile verilen sistemin K_1 pozitif denge noktası kararsızdır.

İspat. Eğer $a_3 < 0$ ise Descartes işaret kuralından (4.5) denkleminin en az bir pozitif kökü olduğu açıktır. O halde, (4.1) sisteminin K_1 pozitif denge noktası kararsızdır.

■

4.2 Nümerik Çözüm

(4.1) sistemi,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0.01 \quad \alpha_2 = 0.04 \quad \beta_1 = 0.005 \quad \beta_2 = -0.01 \quad \beta_3 = -0.01 \\ \varepsilon = 0.01 \quad A_1 = 0.2 \quad A_2 = 0.3 \quad A_3 = 0.2 \quad A_4 = 0.3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

parametreleri ve

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 8, \quad x_3(0) = 3, \quad x_4(0) = 3 \quad (4.7)$$

başlangıç koşullarıyla ele alınsın. (4.1) sistemi (4.6) parametreleri ile birlikte ele alındığında aşağıdaki sistemin

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= -0.01x_1 + 0.005(x_2 - x_3)(1 - 0.01(x_2 - x_3)^2) + 0.2 \\ D^\alpha x_2(t) &= -0.04x_2 - 0.01x_1(1 - 0.01x_1^2) + 0.3 \\ D^\alpha x_3(t) &= -0.04x_3 - 0.01x_4(1 - 0.01x_4^2) + 0.2 \\ D^\alpha x_4(t) &= -0.01x_4 + 0.005(x_3 - x_2)(1 - 0.01(x_3 - x_2)^2) + 0.3 \end{aligned}$$

pozitif denge noktası

$$x_1^* = 23.3243, \quad x_2^* = 33.3914, \quad x_3^* = 45.7865, \quad x_4^* = 26.6757$$

olarak bulunur. Sistemin nümerik çözümü için Demirci ve Özalp (2012) tarafından geliştirilen yeni teknik esas alınarak tamsayı basamaktan sistem

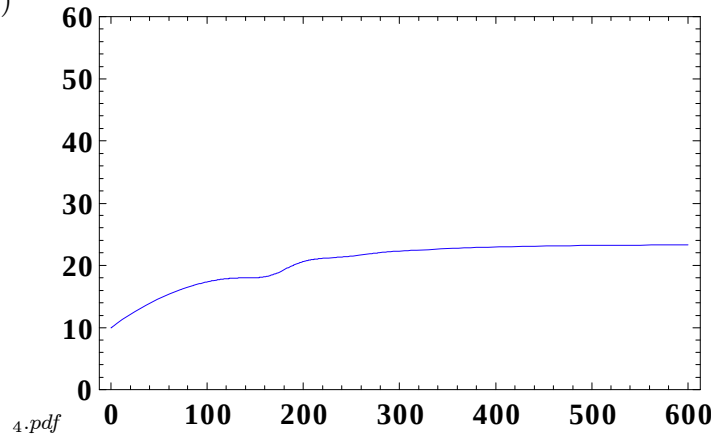
$$\begin{aligned} \frac{dx_1^*}{dv} &= -0.01x_1^* + 0.005(x_2^* - x_3^*)(1 - 0.01(x_2^* - x_3^*)^2) + 0.2 \\ \frac{dx_2^*}{dv} &= -0.04x_2^* - 0.01x_1^*(1 - 0.01x_1^{*2}) + 0.3 \\ \frac{dx_3^*}{dv} &= -0.04x_3^* - 0.01x_4^*(1 - 0.01x_4^{*2}) + 0.2 \\ \frac{dx_4^*}{dv} &= -0.01x_4^* + 0.005(x_3^* - x_2^*)(1 - 0.01(x_3^* - x_2^*)^2) + 0.3 \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Tamsayı basamaktan sistemin çözümü Runge-Kutta metodu ile çözülmüştür. Elde edilen son sistemin çözümü $(x_1^*(v), x_2^*(v), x_3^*(v), x_4^*(v))$ olmak üzere kesirli basamaktan sistemin çözümü $\alpha = 0.90$ basamak değeri için

$$(x_1^*(t^{0.90}/\Gamma(1.90)), x_2^*(t^{0.90}/\Gamma(1.90)), x_3^*(t^{0.90}/\Gamma(1.90)), x_4^*(t^{0.90}/\Gamma(1.90)))$$

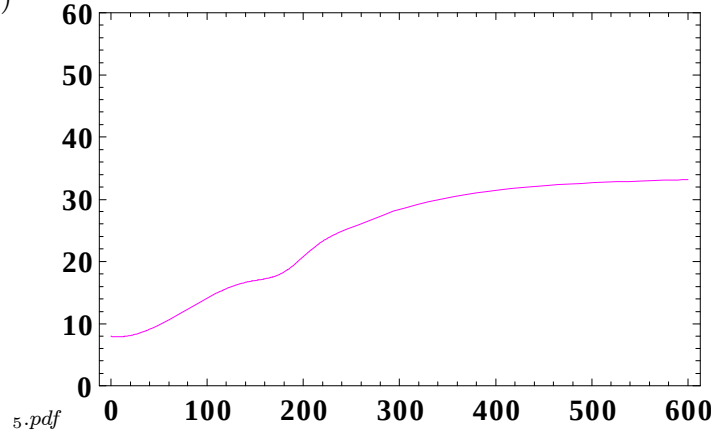
olup sonuçlar şekil 4.1-4.4'de görülmektedir.

(2)

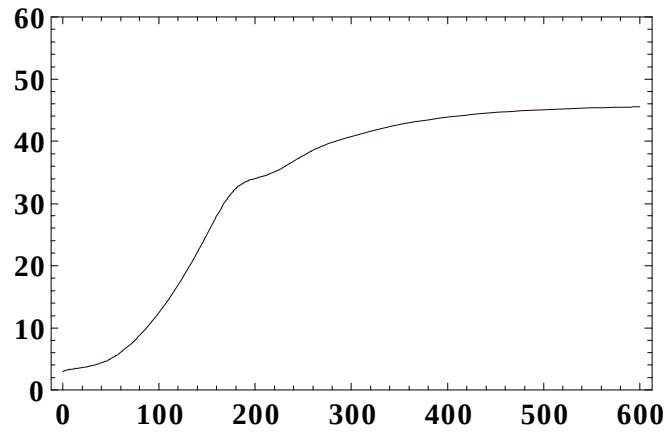


Şekil 4.1. $\alpha = 0.90$ için $x_1(t)$ nin çözümü

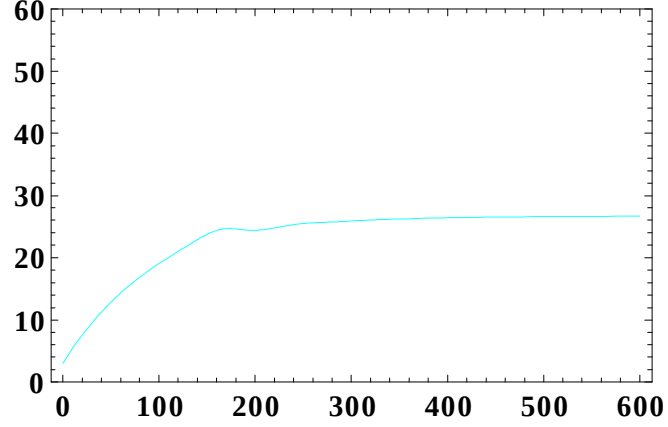
(2)



Şekil 4.2. $\alpha = 0.90$ için $x_2(t)$ nin çözümü



Şekil 4.3. $\alpha = 0.90$ için $x_3(t)$ nin çözümü



Şekil 4.4. $\alpha = 0.90$ için $x_4(t)$ nin çözümü

4.3 Kesirli Basamaktan Lineer Olmayan İvmeli Duygu Hareketi

Bu kısımda, daha önceki bölümlerde kurulan modellerden farklı olarak üçlü modelde türevin derecesi $1 < 2\alpha \leq 2$ olarak alınmıştır. Bu şekilde davranışa bir ivme kazandırılmıştır. 2α , A kişinin B ve C kişilerine karşı davranış dinamiğini temsil etmektedir. Ele aldığımız kesirli basamaktan model aşağıdaki denklem sistemi ile verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 D^{2\alpha}x_1(t) &= -\alpha_1x_1 + \beta_1(x_2 - x_3)(1 - \varepsilon(x_2 - x_3)^2) + A_1 \\
 D^{2\alpha}x_2(t) &= -\alpha_2x_2 + \beta_2x_1(1 - \varepsilon x_1^2) + A_2 \\
 D^{2\alpha}x_3(t) &= -\alpha_2x_3 + \beta_3x_4(1 - \varepsilon x_4^2) + A_3 \\
 D^{2\alpha}x_4(t) &= -\alpha_1x_4 + \beta_1(x_3 - x_2)(1 - \varepsilon(x_3 - x_2)^2) + A_4 \\
 x_1(0) &= x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad x_3(0) = x_{03}, \quad x_4(0) = x_{04},
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

2α ncı basamaktan caputo türevi içeren (4.8) sisteminin çözümü için sistemi α ncı basamağa indirgememiz gerekmektedir. Öncelikle kullanışlı tanım ve lemmaları verelim (Podlubny 1999).

Tanım 4.1 n inci basamaktan kesirli diferensiyel denkleminin genel formu

$$\begin{cases} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = f(t), \\ y^k(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha_n] \end{cases} \tag{4.9}$$

eşitlikleri yardımıyla verilir. Burada $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$, ve $0 < \alpha_n - \alpha_{n-1} < 1$ olmak üzere α_k ($k = 0, 1, \dots, n$) keyfi reel sayılar, a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) ise keyfi sabitlerdir.

Lemma 4.1 $T > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $y \in C^k[0, T]$ sağlanmak üzere $\beta \notin \mathbb{N}$, $0 < \beta < k$ ise ${}_a^C D_t^\beta y(0) = 0$ dır.

Lemma 4.2 ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ ve ${}_a^C D_t^m f(t)$ caputo türev operatörleri olmak üzere aşağıdaki kural geçerlidir.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha ({}_0^C D_t^m f(t)) &= {}_0^C D_t^m ({}_0^C D_t^\alpha f(t)) = {}_0^C D_t^{\alpha+m} f(t), \\ f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = n, n+1, \dots, m \\ m &= 0, 1, 2, \dots, \quad n-1 < \alpha < n. \end{aligned}$$

$T > 0$ ve $y \in C^{\lceil \alpha_n \rceil} [0, T]$ olmak üzere Lemma 4.1 yardımıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^{\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}} {}_0^C D_t^{\alpha_{2i-1}} y(t) &= {}_0^C D_t^{\alpha_{2i}} y, \\ {}_0^C D_t^{\alpha_{2i+1} - \alpha_{2i}} {}_0^C D_t^{\alpha_{2i}} y(t) &= {}_0^C D_t^{\alpha_{2i+1}} y. \end{aligned}$$

O halde tanım 4.1 de verilen n inci basamaktan kesirli diferensiyel denklemini (4.10) kesirli basamaktan denklem sistemi formunda yeniden yazalım.

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^{\beta_1} x_1(t) = {}_0^C D_t^{\alpha_1} x_1(t) = x_2(t), \\ \vdots \\ {}_0^C D_t^{\beta_{n-1}} x_{n-1}(t) = {}_0^C D_t^{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}} x_{n-1}(t) = x_n(t), \\ {}_0^C D_t^{\beta_n} x_n(t) = {}_0^C D_t^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} x_n(t) \\ = \frac{1}{a_n} [f(t) - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n], \end{array} \right. \quad (4.10)$$

(4.10) kesirli basamaktan sistemi (4.11) başlangıç koşullarıyla birlikte geçerlidir.

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0^{(1)} = y_0^{(0)}, \quad x_2(0) = x_0^{(2)} = 0, \dots, \\ x_i(0) &= x_0^{(i)} = \begin{cases} y_0^{(k)}, & i = 2k+1 \\ 0, & i = 2k \end{cases} \quad i \leq n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Lemma 4.1 ve lemma 4.2 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4 (4.9) eşitliği ile verilen kesirli basamaktan n katlı diferensiyel denklem uygun dönüşüm ve başlangıç koşulları altında (4.10)-(4.11) sistemine denktir.

Lemma 4.2 de verilen Caputo türev operatörünün özelliğini gözönüne alarak (4.8) sistemindeki değişkenlere aşağıdaki parametre değişimini uygulayalım.

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1, & D^\alpha x_1 &= y_2 \\x_2 &= y_3, & D^\alpha x_2 &= y_4 \\x_3 &= y_5, & D^\alpha x_3 &= y_6 \\x_4 &= y_7, & D^\alpha x_4 &= y_8\end{aligned}$$

(4.8) sistemi yukarıdaki parametre değişimine bağlı olarak (4.12) sistemine indirgenmektedir.

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha y_1(t) = y_2 \\ D^\alpha y_2(t) = -\alpha_1 y_1 + \beta_1 (y_3 - y_5)(1 - \varepsilon(y_3 - y_5)^2) + A_1 \\ D^\alpha y_3(t) = y_4 \\ D^\alpha y_4(t) = -\alpha_2 y_3 + \beta_2 y_1(1 - \varepsilon y_1^2) + A_2 \\ D^\alpha y_5(t) = y_6 \\ D^\alpha y_6(t) = -\alpha_2 y_5 + \beta_3 y_7(1 - \varepsilon y_7^2) + A_3 \\ D^\alpha y_7(t) = y_8 \\ D^\alpha y_8(t) = -\alpha_1 y_7 + \beta_1 (y_5 - y_3)(1 - \varepsilon(y_5 - y_3)^2) + A_4 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= 0, & y_3(0) &= 0, & y_4(0) &= 0 \\y_5(0) &= 0, & y_6(0) &= 0, & y_7(0) &= 0, & y_8(0) &= 0\end{aligned}$$

$0.5 < \alpha \leq 1$, $\alpha_i > 0$, α_i , β_i , ve A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) olmak üzere sistem yukarıdaki başlangıç koşullarıyla birlikte ele alınacaktır.

4.4 Üçlü Modelin Denge Noktaları ve Lokal Asimptotik Kararlılığı

$\alpha \in (0.5, 1]$ olmak üzere

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\alpha y_1(t) = f_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \\ D^\alpha y_2(t) = f_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \\ D^\alpha y_3(t) = f_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \\ D^\alpha y_4(t) = f_4(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \\ D^\alpha y_5(t) = f_5(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \\ D^\alpha y_6(t) = f_6(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \\ D^\alpha y_7(t) = f_7(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \\ D^\alpha y_8(t) = f_8(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8), \end{array} \right. \quad (4.13)$$

sistemi

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= 0, & y_3(0) &= 0, & y_4(0) &= 0 \\ y_5(0) &= 0, & y_6(0) &= 0, & y_7(0) &= 0, & y_8(0) &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç koşullarıyla birlikte ele alalım.

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= y_2, & f_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= y_4, \\ f_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= -\alpha_1 y_1 + \beta_1 (y_3 - y_5)(1 - \varepsilon(y_3 - y_5)^2) + A_1, \\ f_4(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= -\alpha_2 y_3 + \beta_2 y_1(1 - \varepsilon y_1^2) + A_2, \\ f_5(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= y_6, & f_7(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= y_8, \\ f_6(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= -\alpha_2 y_5 + \beta_3 y_7(1 - \varepsilon y_7^2) + A_3, \\ f_8(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) &= -\alpha_1 y_7 + \beta_1 (y_5 - y_3)(1 - \varepsilon(y_5 - y_3)^2) + A_4. \end{aligned}$$

(4.13) sisteminin denge noktaları

$$D^\alpha y_i(t) = 0 \implies f_i(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*, y_8^*) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

sistemi yardımıyla hesaplandığında $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ için $K_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

ve $K_1 = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*, y_8^*)$ elde edilir.

Sistemin $K_1 = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*, y_8^*)$ noktasında lokal olarak asimptotik kararlılığını incelemek için aşağıdaki lineerleştirilmiş sistem ele alınacaktır.

$$J(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*, y_8^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & a & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada

$$a = \beta_1(1 - 3\varepsilon(y_3^* - y_5^*)^2), \quad b = \beta_2(1 - 3\varepsilon y_1^{*2}), \quad c = \beta_3(1 - 3\varepsilon y_7^{*2})$$

dir. O halde karakteristik denklem

$$P(\lambda) = \lambda^8 + \lambda^6(2\alpha_2 + \alpha_1) + \lambda^4(2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - ab - ac) + \lambda^2(\alpha_1\alpha_2^2 - a\alpha_2b - a\alpha_1c - a\alpha_2c) - a\alpha_1\alpha_2c = 0,$$

olur. Eğer λ^2 yerine k alınırsa karakteristik denklem

$$P(\lambda) = k^4 + a_1k^3 + a_2k^2 + a_3k + a_4 = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} a_1 = (2\alpha_2 + \alpha_1) \\ a_2 = (2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - ab - ac) \\ a_3 = (\alpha_1\alpha_2^2 - a\alpha_2b - a\alpha_1c - a\alpha_2c) \\ a_4 = (-a\alpha_1\alpha_2c) \end{cases} \quad (4.15)$$

olmak üzere $P(\lambda)$ dördüncü dereceden polinomuna dönüşür.

$$P(\lambda) = k^4 + a_1k^3 + a_2k^2 + a_3k + a_4 = 0 \text{ polinomunun diskriminantı}$$

$$D(P) = R(P, P')$$

$$R(P, P') = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 4 & 3a_1 & 2a_2 & 1a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3a_1 & 2a_2 & 1a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3a_1 & 2a_2 & 1a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3a_1 & 2a_2 & 1a_3 \end{vmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} D(P) = & a_1^2 a_2^2 a_3^2 - 4a_2^3 a_3^2 - 4a_1^3 a_3^3 + 18a_1 a_2 a_3^3 - 27a_3^4 - 4a_1^2 a_2^3 a_4 + 16a_2^4 a_4 \\ & + 18a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 80a_1 a_2^2 a_3 a_4 - 6a_1^2 a_3^2 a_4 + 144a_2 a_3^2 a_4 - 27a_1^4 a_4^2 \\ & + 144a_1^2 a_2 a_4^4 - 128a_2^2 a_4^2 - 192a_1 a_3 a_4^2 + 256a_4^3. \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.5 P polinomu (4.14) de, a_1, a_2, a_3 ve a_4 katsayılarında (4.15) verildiği gibi olmak üzere (4.12) sisteminin $K_1 = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*, y_8^*)$ pozitif denge noktası, $D(P) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ $a_4 > 0$ ve $a_2 = \frac{a_1 a_4}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}$ koşulunu sağlıyorsa $\alpha \in (0, 1)$ için lokal olarak asimptotik kararlıdır.

İspat. K_1 denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması için K_1 de elde edilen Jakobiyen matrisin tüm özdeğerlerinin

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

koşulunu sağlaması gerekmektedir. Eğer $D(P) < 0$ ise iki reel negatif kök vardır ve $a_2 = \frac{a_1 a_4}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}$ şartı ile diğer iki kök de imajiner eksene uzanmaktadır. Sonuç olarak $P(\lambda) = k^4 + a_1 k^3 + a_2 k^2 + a_3 k + a_4 = 0$ polinomunun tüm kökleri kararlı bölge içinde kalır. Bu yüzden $K_1 = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*, y_8^*)$ pozitif denge noktası asimptotik kararlıdır. ■

4.5 İvmeli Duygu Hareketinin Nümerik Çözümü

(2.5)-(2.6) tipindeki başlangıç değer problemlerinin çözümleri için sık kullanılan tekniklerden biri genelleştirilmiş Adams-Bashford-Moulton algoritmasıdır. (Diethelm

vd. 2009). Bu metodun tamsayı basamaktan B.D.P.' ne uygulanması ve kesirli diferensiyel denklem içeren B.D.P.'ne uyarlanması ile ilgili detaylar için Diethelm ve diğerleri tarafından yapılan çalışma görülebilir (Diethelm vd. 2009).

(4.12) sistemi,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0.01 \quad \alpha_2 = 0.02 \quad \beta_1 = 0.0003 \quad \beta_2 = 0.0006 \quad \beta_3 = 0.0005 \\ \varepsilon = 0.001 \quad A_1 = 0.1 \quad A_2 = 0.03 \quad A_3 = 0.2 \quad A_4 = 0.3 \end{aligned} \quad (4.16)$$

parametreleri ve

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 0 \\ y_5(0) &= 0, \quad y_6(0) = 0, \quad y_7(0) = 0, \quad y_8(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

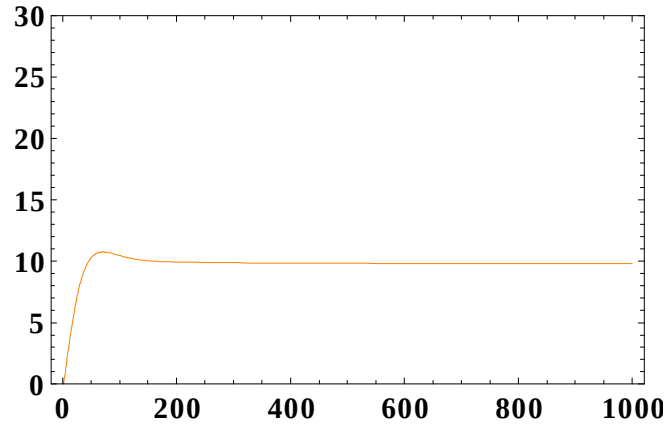
başlangıç koşullarıyla ele alınsın. (4.12) sistemi (4.16) parametreleri ile birlikte ele alındığında (4.18) sistemin

$$\begin{aligned} D^\alpha y_1(t) &= y_2 \\ D^\alpha y_2(t) &= -0.01y_1 + 0.0003(y_3 - y_5)(1 - 0.001(y_3 - y_5)^2) + 0.1 \\ D^\alpha y_3(t) &= y_4 \\ D^\alpha y_4(t) &= -0.02y_3 + 0.0006y_1(1 - 0.001y_1^2) + 0.03 \\ D^\alpha y_5(t) &= y_6 \\ D^\alpha y_6(t) &= -0.02y_5 + 0.0005y_7(1 - 0.001y_7^2) + 0.2 \\ D^\alpha y_7(t) &= y_8 \\ D^\alpha y_8(t) &= -0.01y_7 + 0.0003(y_5 - y_3)(1 - 0.001(y_5 - y_3)^2) + 0.3 \end{aligned} \quad (4.18)$$

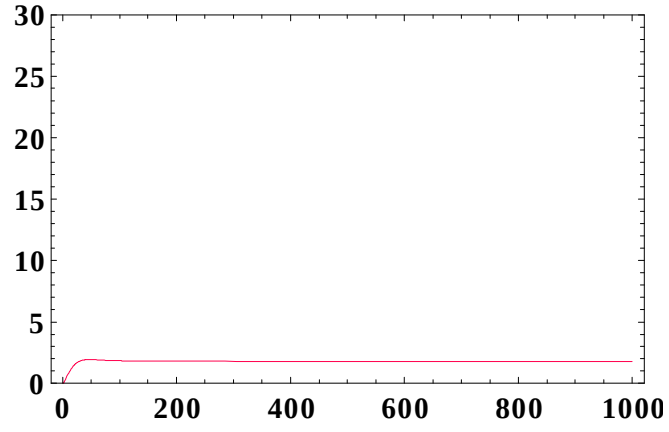
pozitif denge noktası

$$y_1^* = 9.76815, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = 1.76508, \quad y_4^* = 0, \quad y_5^* = 10.065, \quad y_6^* = 0, \quad y_7^* = 30.2318, \quad y_8^* = 0$$

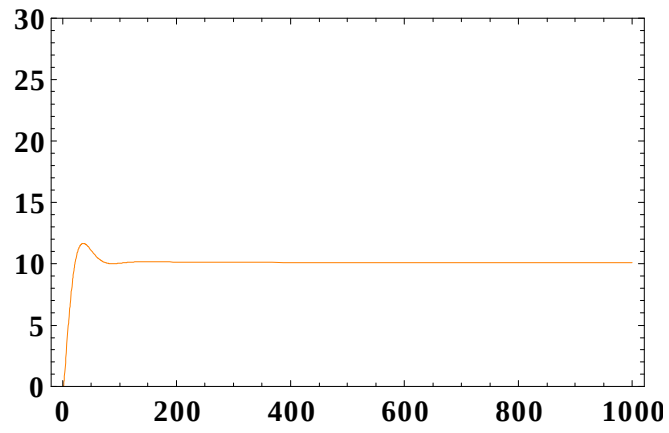
olarak bulunur. Sistemin nümerik çözümü Diethelm (2009) tarafından verilen teknik esas alınarak çözülmüştür. $\alpha = 0.6$ basamak değeri için kesirli basamaktan sistemin çözümü şekil 4.5-4.8'de görülmektedir.



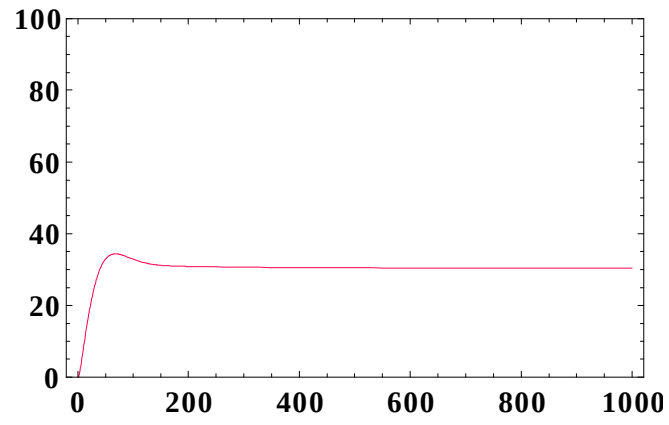
Şekil 4.5. $\alpha = 0.6$ için $y_1(t)$ nin çözümü



Şekil 4.6. $\alpha = 0.6$ için $y_3(t)$ nin çözümü



Şekil 4.7. $\alpha = 0.6$ için $y_5(t)$ nin çözümü



Şekil 4.8. $\alpha = 0.6$ için $y_7(t)$ nin çözümü

KAYNAKLAR

- [1] Ahmed E., El-Sayed, A.M.A. El-Saka, H.A.A. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies model, JMAA 325 (2007) 542-553.
- [2] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems, Physics Letters A 358 (2006) 1-4.
- [3] Ahmad, M. W., El-Khazali, R. Fractional order dynamical models of love, Chaos, Solitons and Fractals, 33, 1367-1375, (2007).
- [4] Allen J.P., Land D. , Attachment in adolescence, in : Cassidy P. R. , Shaver (Eds.), Handbook of Attachment: Theory, Research, and Clinical Applications, Guilford. Newyork, NY, 1999.
- [5] Barley K., Cherif A. Stochastic nonlinear dynamics of interpersonal and romantic relationships, Applied Mathematics and Computation Volume 217, Issue 13 (2011), 6273–6281 .
- [6] Bus D. (Ed.), The Handbook of Evolutionary Psychology, Wiley, Hoboken, NJ, 2005.
- [7] Cherif A. Stochastic Nonlinear Dynamical Models of Interpersonal and Romantic Relationships: Strange Attractions, Arizona State University, Temple AZ (2009).
- [8] Collins W.A., Steinberg L., Adolescent development in interpersonal context, in : Damon W. , Lerner R. Eisenberg N. (Eds.), The Handbook of Child Psychology: Social, Emotional and Personality Development, vol. 3, Wiley, New York, NY, 2006, pp. 1003-1067.
- [9] Dalir M., Bashour M., Applications of Fractional Calculus, Applied Mathematical Sciences, (4) (2010) 21 1021-1032.

- [10] Demirci E., Özalp N. , A method for solving differential equations of fractional order, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236 (2012) 2754-2762.
- [11] Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dynamics* 29 (2002), 3-22.
- [12] Furman W. , Hand L.S. , The slippery nature of romantic relationships : issues in definition and differentiation, in: A. Crouter, A. Booth (Eds.), *Romance and Sex in Adolescence and Emerging Adulthood: Risk and Opportunities*, Erlbaum, Mahwah, NJ, 2006, pp. 171-178.
- [13] Gottman J.M., Murray J.D., Swanson C.C., Tyson R., and Swanson K.R. *The Mathematics of Marriage*. Cambridge, MA: MIT Press (2002) .
- [14] Gragnani A., Rinaldi S. and Feichtinger G. 1997 Cyclic dynamics in romantic relationships. *International J. Bifurcat. Chaos* 7: 2611-19.
- [15] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, 204 Mathematical Studies.
- [16] Lakshmikantham, V., Vatsala, A.S. *Theory of Fractional Differential Inequalities and Applications*, *Commun. Anal.* (2007).
- [17] Ma Q-H., Yang E.H., Some new Gronwall–Bellman–Bihari type integral inequalities with delay, *Period. Math. Hungar.* (44) (2002) 225–238.
- [18] Ma Q-H., Pečarić J., On some qualitative properties for solutions of a certain two-dimensional fractional differential systems, *Comput. Math. Appl.* (2009) doi:10.1016/j.camwa.2009.07.008.
- [19] Matignon, D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, in: *Computational Eng. in Sys. Appl.* 2 (Lille, France, 1996), p 963.

- [20] Miller K.S., Ros B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Willey&Sons Inc., Toronto.
- [21] Oldham, K. B., Spanier, J. 1974. The Fractional Calculus. Academic Press, New York.
- [22] Ozalp, N., Koca I. A fractional order nonlinear dynamical model of interpersonal relationships, *Advances in Difference Equations* (1) (2012) 189 1-7.
- [23] Podlubny I. 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press.
- [24] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.L., Integral and Series, in: Elementary Functions, vol. 1, Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
- [25] Rinaldi S. Love Dynamics: the case of linear couples. *Appl. Math. Comput.* (95) (1998) 181-92.
- [26] Rinaldi S., Gragnani A. Love Dynamics between secure individuals: a modeling approach. *Nonl. Dyn. Psyc. Life Sci.* (2) (2004) 283-301.
- [27] Strogatz S.H. Love affairs and differential equations. *Math. Magazine* (1988) 61-35.
- [28] Sprott J.C. Dynamical models of happiness. *Nonl. Dyn. Psyc. Life Sci.* (9) (2005) 23-36.
- [29] Sprott J.C. Dynamical models of love. *Nonl. Dyn. Psyc. Life Sci.* (8) (2004) 303-14.
- [30] Wauer J., Schwarzer D., Cai G.Q. and Lin Y.K. 2007 Dynamical models of love with time-varying fluctuations. *Applied Mathematics and Computation* 188: 1535-48.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: İlknur KOCA

Doğum Yeri: Fethiye

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu(Kurum ve Yıl):

Lise: Fethiye Mehmet Erdoğan Anadolu Lisesi (2003)

Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2009)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayımları: Ozalp N., **Koca I.** A fractional order nonlinear dynamical model of interpersonal relationships, Advances in Difference Equations (1) (2012) 189 1-7.