

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

TUTARLI BULANIK KÜMELER VE KARAR VERME
UYGULAMALARI

Ezgi TÜR KARSLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

TUTARLI BULANIK KÜMELER VE KARAR VERME UYGULAMALARI

Ezgi TÜR KARSLAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet ÜNVER
Eş Danışman: Prof Dr. Jun YE

Belirsiz ve birbirleri ile çelişen bilgileri başarılı bir şekilde matematiksel olarak modelleyebilen bulanık küme kavramı, bu özelliğinden dolayı çok kriterli karar verme problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan bir kavramdır. Bu tezin amacı ortamdaki belirsiz bilgiyi daha iyi modellemek amacıyla yeni bir bulanık küme kavramı ortaya koymak ve çok kriterli karar verme problemlerinin çözümü için yeni karar metotları önermektir.

Tez şu şekilde düzenlenmiştir:

Birinci bölüm bulanık küme teorisinin tarihsel süreci, önemi ve çok kriterli karar verme teorisi ile ilişkisine ayrılmıştır.

İkinci bölümde bulanık küme teorisi ile ilgili temel tanım ve örneklerle yer verilmiştir. Tezin orijinal kısmını üçüncü ve dördüncü bölümler oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde yeni bir bulanık küme genelleştirmesi olan tutarlı bulanık küme teorisi kurulmuş, tutarlı bulanık kümeler için korelasyon katsayısı ve kosinüs benzerlik ölçüsü kavramları önerilmiş ve bu kavramlar yardımıyla bir çok periyotlu tıbbi teşhis problemi çözülmüştür.

Dördüncü bölümde, tutarlı bulanık kümeler için çapraz entropi ve sinüs entropi ölçüsü kavramları üzerine çalışılmış ve bu iki kavram VIKOR (VISeKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje) metoduna entegre edilerek bir çok kriterli karar verme problemi çözülmüştür. Son bölümde ise tezin genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

Mayıs 2023, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bulanık Küme, Tutarlı Bulanık Küme, Çok kriterli Karar Verme, Entropi, VIKOR

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CONSISTENT FUZZY SETS AND DECISION MAKING APPLICATIONS

Ezgi TÜRKARSLAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Mehmet NVER
Co-supervisor: Prof Dr. Jun YE

The concept of fuzzy set, which can successfully mathematically model uncertain and conflicting information, is a widely used concept in the solution of multi-criteria decision making problems due to this feature. The aim of this thesis is to introduce a new fuzzy set concept in order to better model the uncertain information in the environment and to propose new decision methods for the solution of multi-criteria decision making problems.

The thesis is organized as follows:

The first chapter is devoted to the historical process of fuzzy set theory, its importance and its relationship with multi-criteria decision making theory.

In the second part, basic definitions and examples related to fuzzy set theory are given.

The third and fourth chapters constitute the original part of the thesis. In the third chapter, the consistency fuzzy set theory, which is a new fuzzy set generalization, is established, the concepts of correlation coefficient and cosine similarity measure for consistency fuzzy sets are proposed, and a multi-period medical diagnosis problem is solved.

In the fourth chapter, the concepts of cross entropy and sine entropy measure for consistency fuzzy sets are studied and a multi-criteria decision making problem is solved by integrating these two concepts into the VIKOR (VIseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje) method.

In the last chapter, a general evaluation of the thesis is given.

May 2023, 50 pages

Key Words: Fuzzy Set, Consistency Fuzzy Set, Multi-criteria Decision Making, Entropy, VIKOR

TEŞEKKÜR

Akademik hayatımın her alanında beni yetiştirmek için ciddi bir emek ve özveri gösteren, kıymetli bilgi ve deneyimleri ile beni yönlendiren, çalışmalarım boyunca bana güvenen ve gerek akademik gerekse manevi desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimimin her aşamasında olumlu ve yapıcı yönlendirmeleri ile desteğini benden esirgemeyen ve bu tez çalışmasının oluşturulmasına büyük katkı sağlayan kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve çok değerli yönlendirmeleri ile beni hem akademik hem sosyal hayata hazırlayan ve yaptığım çalışmalarda bana hem cesaret veren hem de cesur olmayı öğreten kıymetli büyüğüm Sayın hocam Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez izleme komtesinde bulunarak bana kıymetli zamanını ayıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'a teşekkür ederim.

Akademik hayatımın en kritik noktalarında beni destekleyen ve yönlendiren, fikirleri ile yolumu aydınlatan, derin bilgi birikimini benimle paylaşan ve kıymetli zamanını bana ayırarak bu tez çalışmasının ortaya çıkmasına çok büyük katkı sağlayan, pozitif bakış açısıyla kendisini her zaman kendime örnek aldığım eş danışmanım Sayın Prof. Dr. Jun YE (School of Civil and Environmental Engineering, Ningbo University)' ye derin saygılarımı sunarım.

Doktora çalışmalarım kapsamında İsveç'te kaldığım süre boyunca benimle ilgilenen ve danışmanlık yapan, çok kıymetli fikirleri ile bana ilham kaynağı olan ve olmaya devam eden ve bana önemli bir bilimsel bakış açısı kazandıran Sayın Prof. Dr. Vicenç TORRA (Department of Computing Sciences, Umeå University)'ya ve gerek İsveç'e gitmeden önce gerekse İsveç'te her türlü sorunda yanımda olan ve hala desteklerini yanımda hissttiğim Sayın hocamın koordinatörlüğünü yaptığı araştırma grubu "NAUSICA: Privacy-aware transparent decisions group" un her bir üyesine ayrı ayrı teşekkürlerimi sunarım.

Mensubu olmaktan her zaman gurur duyduğum, her süreçte beni maddi ve manevi olarak destekleyen başta Sayın Dekan Hocam Prof. Dr. Kezban ÇELİK olmak üzere tüm TED Üniversitesi ailesine şükranlarımı sunarım.

Hayatımın her dönemindeki desteklerini yazmakla bitiremeyeceğim, haklarını asla ödeyemeyeceğim, sonsuz sevgi ve anlayışlarını kelimelerle ifade edemeyeceğim canım aileme her şey için sonsuz teşekkür ederim, sizlere minnettarım.

Doktora çalışmalarımı "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" ile destekleyen ve doktora tezimi "2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı" ile destekleyerek Umeå Üniversitesi'nde misafir araştırmacı olarak bulunmamı sağlayan TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ezgi TÜRKRSLAN
Ankara, Mayıs 2023

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Bulanık Küme Teorisi	1
1.2 Çok Kriterli Karar Verme	2
1.3 Motivasyon	3
1.4 Tezin Katkıları ve İçeriği	4
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Bulanık Çoklu Küme Teorisi	6
3. TUTARLI BULANIK KÜMELER	10
3.1 Tutarlı Bulanık Küme	10
3.2 Tutarlı Bulanık Kümeler İçin Bir Korelasyon Katsayısı Ölçüsü ve Bir Kosinüs Benzerlik Ölçüsü	13
3.3 Tutarlı Bulanık Kümelerin Çok Periyotlu Bir Tıbbi Teşhis Uygulaması	17
3.3.1 Tutarlı bulanık kümeler için önerilen korelasyon katsayısı ve kosinüs benzerlik ölçüsünün karşılaştırma analizi	20
4. TUTARLI BULANIK KÜMELER İÇİN ÇAPRAZ ENTROPİ VE SİNÜS ENTROPİ ÖLÇÜSÜ	22
4.1 Klasik VIKOR Metodu	26
4.2 Tutarlı Bulanık Kümeler İçin Bir VIKOR Metodu (CF-VIKOR)	30
4.3 CF-VIKOR Uygulaması	32
4.3.1 CF-VIKOR metodunun duyarlılık analizi	34
4.3.2 CF-VIKOR metodunun geçerlilik analizi	35
4.3.3 CF-VIKOR metodunun karşılaştırma analizi	37
4.4 CF-VIKOR Metodunun Tutarlılık Analizi	39
4.4.1 Spearman sıra korelasyon katsayısı ile tutarlılık analizi	39
4.4.2 Kendall sıra korelasyon katsayısı ile tutarlılık analizi	40
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	41
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER DİZİNİ

χ	Karakteristik fonksiyon
μ	Ait olma fonksiyonu
$\vee$	Maksimum operatörü
$\wedge$	Minimum operatörü
$\sigma_A^{(j)}$	A bulanık çoklu kümesindeki j . aitlik dizisinin standart sapması
$m_A^{(j)}$	A bulanık çoklu kümesindeki j . aitlik dizisinin ortalaması
$c_A^{(j)}$	A bulanık çoklu kümesindeki j . aitlik dizisinin tutarlılığı
ρ_{CFS}	Tutarlı bulanık kümeler arasındaki korelasyon katsayısı
δ_{CFS}	Tutarlı bulanık kümeler arasındaki kosinüs benzerlik ölçüsü
$W\rho_{CFS}$	Tutarlı bulanık kümeler arasındaki ağırlıklı korelasyon katsayısı
$W\delta_{CFS}$	Tutarlı bulanık kümeler arasındaki ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü
CFS	Tutarlı bulanık küme
CF-VIKOR	Tutarlı bulanık VIKOR

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1	Önerilen bulanık sinüs entropi ölçüsünün görselleştirilmesi	26
Şekil 4.2	Uzlaşma ve ideal çözümler (Opricovic ve Tzeng 2004)	27
Şekil 4.3	Alternatiflerin duyarlılık analizi	36
Şekil 4.4	Örnek 4.1 için Spearman sıra korelasyon katsayısı	39
Şekil 4.5	Örnek 4.1 için Kendall sıra korelasyon katsayısı	40



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	Karşılaştırma analizi	20
Çizelge 3.2	Tutarlı bulanık kümeler için önerilen ağırlıklı korelasyon katsayısı ve ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü için karar sonuçları ve standart sap- malar	21
Çizelge 4.1	Tüm alternatifler için S , R ve Q değerleri	34
Çizelge 4.2	Uzlaşma çözümünün kararlılığı	35
Çizelge 4.3	Farklı metotların karşılaştırılması	38



1. GİRİŞ

Bulanık küme teorisi ve karar verme teorisi, çok kriterli karar verme problemlerinin çözüm sürecinde kullanılan iki önemli bilimsel alandır. Bu süreçte belirsiz ve kesin olmayan bilgiler matematiksel olarak modellenir ve mantıksal çıkarım yapmayı temel alan bulanık küme teorisi, karar verme teorisinin problem çözüm metotlarına entegre edilerek karar vericinin isteklerine daha duyarlı çözümler elde edilir. Bu tezde de bulanık küme teorisi ve karar verme teorisine ait kavramlar sıkça kullanılmıştır. Bu iki teorinin tarihsel süreci ve bu teorilere neden ihtiyaç duyulduğu ile ilgili bilgiler özet olarak aşağıdaki alt bölümlerde verilmiştir.

1.1 Bulanık Küme Teorisi

Klasik küme teorisinin Aristo mantığına dayanan temelinde bir eleman bir kümeye kesin olarak aittir ya da kesin olarak ait değildir. Bu aidiyet durumu χ karakteristik fonksiyonu yardımıyla belirlenerek kümeler yeniden ifade edilebilir. A kümesi X evrensel kümesinin herhangi bir alt kümesi olmak üzere

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı χ_A fonksiyonu her $x \in X$ için A kümesinin elemanlarını belirler. Oysa ki gerçek hayatta kesinlik durumundan ziyade belirsizlik durumları ile karşılaşırız. Bu belirsiz durumlarla karşılaşmamızın nedeni aslında dilin ve dilsel değişkenlerin belirsiz yapıda olmasıdır. Örneğin; bir araba satın alacağımızı düşünelim. Aristo mantığına göre 100.000 TL nin üzerindeki arabaları "pahalı", 100.000 TL altındaki arabaları "ucuz" olarak nitelendirirsek bu iki önermenin sonucunda hem 101.000 TL hem de 900.000 TL fiyatındaki arabalara pahalı diyebiliriz. Fakat bu durumun günlük hayatta çok kullanışlı olduğu söylenemez. Bu gibi belirsiz ve kesin olmayan durumları matematiksel olarak modelleyebilmek için Zadeh 1965 yılında bulanık mantık ve bulanık küme teorilerini önermiştir (Zadeh 1965). Bulanık mantık, Aristo mantığının 0 – 1 kesinliğini kırarak, $[0, 1]$ aralığında bir derecelendirmeyi temel almıştır. O halde, nasıl ki klasik küme teorisinde kesinlik kavramı χ fonksiy-

onu yardımıyla matematiksel olarak karakterize edilebiliyorsa belirsizlik durumu da bulanık küme teorisinde ait olma fonksiyonu yardımıyla karakterize edilebilmektedir. Zaman içerisinde bulanık küme kavramı ortamdaki tutarsız ve eksik bilgileri daha iyi modellemek amacıyla genellikle iki farklı metot kullanılarak yeni bulanık küme kavramlarına genelleştirilmiştir. Bu metodlardan biri sezgisel bulanık küme (Atanassov 1986), Pisagor bulanık küme (Yager 2013) gibi ait olma fonksiyonunun yanına ait olmama fonksiyonu gibi yeni fonksiyon çeşitleri tanımlamaya ve bu fonksiyonlara çeşitli kısıtlamalar koyarak çok kriterli karar verme problemini çözmeye odaklanırken diğeri tereddütlü bulanık küme (Torra 2010), bulanık çoklu küme (Yager 1986) gibi var olan ait olma fonksiyonunun görüntü kümesini daha fazla belirsiz bilgiyi modelleyecek şekilde genişletmeye odaklanmıştır.

1.2 Çok Kriterli Karar Verme

Çok kriterli karar verme, birbiriyle çelişen kriterlere göre alternatifler arasından en uygun alternatifi seçme sürecidir. Çok kriterli karar verme probleminde, karar vericiler her bir alternatifi birbirleri ile çelişen kriterler altında değerlendirmekte ve alternatifleri en iyiden en kötüye doğru sıralamaktadırlar. Bu süreçte çeşitli eksik ve belirsiz veriler ile karşılaşan karar vericiler bulanık küme teorisinin belirsiz, tutarsız ve eksik bilgileri modelleyebilme özelliğinden faydalanarak optimal seçime ulaşmayı hedeflemektedirler.

Bir elemanın bir kümeye olan kısmi aidiyetinden kaynaklanan belirsizlikleri modelleyerek gerçek hayat problemlerini çözmeyi amaçlayan bulanık küme kavramı zaman içerisinde belirsiz bilginin modellenmesi sürecine bağlı olarak genelleştirilmiş ve örüntü tanıma (Olgun vd. 2021), derin sinir ağları (Atanassov vd. 2023), sınıflandırma (Ünver vd. 2022), tıbbi teşhis (Olgun vd. 2021) gibi çeşitli çok kriterli karar verme problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Ayrıca literatürde TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) (Kumar ve Garg 2018), MULTIMOORA (The Multi- Objective Optimization by Ratio Analysis) (Rani ve Mishra 2021), PROMETHEE (The Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation) (Jiang vd.2021), COPRAS (Com-

plex Proportional Assessment) (Saraji vd. 2021), VIKOR (VIseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje) (Opricovic 1998) gibi bir çok karar verme tekniği bulanık küme teorisi ile birleştirilerek çok kriterli karar verme problemleri çözülmektedir.

VIKOR metodunun amacı, ideal çözüme en yakın uzlaşma çözümünü bulmak ve kriterleri dikkate alarak alternatifleri sıralamaktır. 1998 de Opricovic tarafından önerilen bu metod kullanışlı yapısı ve diğer karar metodları ile karşılaştırıldığında sağladığı avantajları nedeniyle günümüzde hala popülerliğini korumakta ve bulanık küme teorisi ile birleştirildiğinde çok kriterli karar verme problemlerinin çözümündeki duyarlılığı artırdığından dolayı araştırmacılar tarafından günümüzde de tercih edilmektedir. Örneğin, Khan vd. (2022) dairesel sezgisel bulanık kümeleri kullanarak VIKOR metodunun sağlık hizmetlerinde atık yönetimi uygulamasını, Ünver vd. (2022) sezgisel bulanık değerli neutrosophic VIKOR metodunu önermiş ve bu metotla katılımcı seçim problemini incelemiştir. Ayrıca yeni yapılan çalışmalardan bir çalışmada (Yue vd. 2023) aralık değerli sezgisel bulanık kümeler yardımıyla yazılım ürünü kalite değerlendirmesi üzerine çalışılmıştır.

Bu tezde tutarlı bulanık küme teorisinin literatürde bulunan çok periyotlu bir tıbbi teşhis problemine uygulaması ve daha sonra VIKOR metoduna entegrasyonu üzerine odaklanılmıştır.

1.3 Motivasyon

Bulanık küme teorisi, belirsiz, öznel ve kesin olmayan kararlara yönelik problemlerle ilgilenen bir araştırma yaklaşımı olup bireysel veya grup olarak karar verme için, mevcut verilerin dilsel (linguistic) yönünü ve derecelerini ölçer. Bu ölçümün en duyarlı şekilde yapılabilmesi için Bölüm 1.1’de bahsedildiği gibi literatürde bir çok bulanık küme genelleştirmesi yapılmıştır. Bu genelleştirmelerin amacı, kendinden önce literatürde tanımlanmış olan bulanık kümelerin eksik ve dezavantajlı yönlerini gidererek eksik ve belirsiz bilgiyi daha iyi modellemek ve bu modeli gerçek hayat problemlerinin çözümünde kullanarak daha duyarlı çözümler elde etmektir. Örneğin bu genelleştirmelerden biri aitlik fonksiyonu $[0, 1]$ aralığındaki tekil değer-

lerin kümeleri tarafından karakterize edilen tereddütlü bulanık küme kavramıdır (Torra 2010). Bir tereddütlü bulanık küme, kullanışlı yapısı sayesinde belirsiz verileri bulanık bir kümeden daha iyi modelleyebilir. Ancak aynı zamanda bu kümeler doğası gereği tekrar eden bilgileri ortadan kaldırmasından dolayı bazı tekrar eden bilgileri göz ardı eder. Tereddütlü bulanık kümelerin bu dezavantajını ortadan kaldırmak için Yager (Yager 1986) tarafından ait olma fonksiyonu bir dizi ile karakterize edilen bulanık çoklu küme kavramı tanımlanmıştır. Böylece tekrar eden bilgilerin kaybolmasının önüne geçilerek daha doğru sonuçlar elde edilmesi amaçlanmıştır. Fakat bulanık çoklu kümeler tekrarlayan bilgileri kaydetme özelliğine sahip olmasına rağmen, bu kümelerdeki dizilerin uzunluğu arttıkça belirsizlik artmaktadır. Bu durum, bir karar verme probleminde bilginin ifade edilmesinde güçlük yaratmakta ve alternatifin seçimini zorlaştırmaktadır.

Bu tezdeki amacımız, bir bulanık çoklu kümede aitlik dizisinin içerdiği bilgilerin neden olduğu karmaşıklık ve zorluğu azaltmak ve böylece aitlik dizisinin verilerini daha anlaşılır ve kompakt bir şekilde sunmaktır. Bu amaç ile bu tezde tutarlı bulanık kümeler olarak adlandırılan yeni bir bulanık küme kavramı ve özellikleri üzerine odaklanılmıştır. Ayrıca bulanık çoklu kümelerin yapısı gereği çok kriterli grup karar verme ve çok periyotlu tıbbi teşhis problemlerinin çözümünde kullanılması daha uygun olduğundan, korelasyon katsayısı ve benzerlik ölçüsü yardımıyla tutarlı bulanık kümelerin çok periyotlu bir tıbbi teşhis problemine uygulaması üzerine çalışılmıştır. Ayrıca, literatürde VIKOR metodunu mevcut bazı metotlarla karşılaştıran birçok çalışma bulunmakta ve bu çalışmalarda VIKOR metodunu görece olarak diğer metotlardan pozitif olarak ayrıştığının kanıtlanmaktadır. Buradan motivasyonla bu tezde bir çok kriterli karar verme metodu olarak VIKOR metodu seçilmiş, entropi ve sinüs entropi kavramları yardımıyla tutarlı bulanık kümeler için genişletilmiş bir VIKOR metodu (CF-VIKOR) önerilerek bu metot bir çok kriterli karar verme probleminin (Ye vd. 2020) çözümünde kullanılmıştır.

1.4 Tezin Katkıları ve İçeriği

Bu tezin amacı, tutarlı bulanık kümeler sayesinde ortamdaki belirsiz bilgiyi daha iyi modellemek, bulanık çoklu kümelerdeki aitlik dizisine olan bağımlılığı azaltarak

kompakt bilgiler vermek ve tutarlı bulanık kümelerin çok kriterli karar verme problemlerine uygulamasını yapmaktır.

Bu tezin katkıları ve getirdiği yenilikler aşağıda sıralanmıştır:

- Yeni bir bulanık küme kavramı olan tutarlı bulanık küme kavramı tanımlanmış, kümesel ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.
- Tutarlı bulanık kümeler için bir korelasyon katsayısı ve bir kosinüs benzerlik ölçüsü tanımlanmış ve bu kavramlar literatürde bulunan çok periyotlu bir tıbbi teşhis probleminin çözümünde kullanılmıştır.
- Tutarlı bulanık kümeler için bir çapraz entropi ve bir sinüs entropi ölçüsü tanımlanmış, bu kavramlar klasik VIKOR metoduna entegre edilerek tutarlı bulanık VIKOR metodu önerilmiş ve bu metodun bir çok kriterli karar verme uygulaması üzerine çalışılmıştır.

Tezin detaylı içeriği şu şekildedir: İkinci bölümde bulanık küme ve tereddütlü bulanık küme kavramlarından bahsedilmiş ve tutarlı bulanık kümelere temel oluşturan bulanık çoklu küme kavramı ve özellikleri örneklerle açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, tutarlı küme kavramı tanımlanmış ve özellikleri incelenmiş, bu kümeler için bir korelasyon katsayısı ve kosinüs benzerlik ölçüsü tanımlanmış ve bu kavramlar literatürde bulunan çok periyotlu bir tıbbi teşhis problemine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar literatür ile karşılaştırılmış ve ayrıca bu iki kavramın bir karşılaştırma analizi verilmiştir. Dördüncü bölümde, tutarlı bulanık kümeler için bir çapraz entropi ölçüsü ve bir sinüs entropi ölçüsü tanımlanmıştır. Klasik VIKOR metodu açıklanarak yeni önerilen kavramlar kullanılarak CF-VIKOR metodu önerilmiştir. Bu yeni metod bir çok kriterli karar verme probleminin (Ye vd. 2020) çözümüne uygulanmış ve elde edilen sonuçlara göre önerilen yeni metodun duyarlılık analizi, geçerlilik analizi, karşılaştırma analizi incelenmiş, Spearman ve Kendall sıra korelasyon katsayıları yardımıyla tutarlılık analizi verilmiştir. Son bölümde ise tezin genel bir değerlendirmesi yapılarak gelecek çalışmalar konusuna yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bulanık küme ve bulanık çoklu küme kavramları ile ilgili bazı temel tanımlar hatırlatılacaktır.

2.1 Bulanık Çoklu Küme Teorisi

Bir bulanık küme klasik kümelerin bir genelleştirilmesi olarak bir elemanın bir kümeye aitliğini gösteren aitlik fonksiyonu yardımı ile tanımlanır.

Tanım 2.1 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olmak üzere X kümesinden $[0, 1]$ aralığına tanımlı her fonksiyona X kümesinde bir bulanık küme denir (Zadeh 1965).

X kümesindeki bir bulanık A kümesi ait olma fonksiyonu adı verilen $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ ile temsil edilir. Burada $x \in X$ olmak üzere $\mu_A(x)$ değeri, x noktasının A bulanık kümesine olan ait olma derecesidir. $1 - \mu_A(x)$ değeri ise x noktasının A bulanık kümesine olan ait olmama derecesi olarak düşünülebilir. Bir bulanık A kümesi aitlik fonksiyonu yardımıyla

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle : x \in X \} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir (Zadeh 1965).

Örnek 2.1 $X = \{\alpha, \beta, \theta\}$ olmak üzere $\mu_A(\alpha) = \frac{2}{3}$, $\mu_A(\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mu_A(\theta) = \frac{3}{\pi}$ ile tanımlı $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. μ_A fonksiyonunu aitlik fonksiyonu kabul eden A bulanık kümesi

$$A = \left\{ \left\langle \alpha, \frac{2}{3} \right\rangle, \left\langle \beta, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle, \left\langle \theta, \frac{3}{\pi} \right\rangle \right\} \quad (2.2)$$

şeklindedir.

Bulanık küme kavramı belirsizliği daha iyi ifade edebilme amacıyla genelleştirilerek literatürde yeni bulanık küme kavramları önerilmiştir. Bulanık küme kavramının bir genelleştirilmesi de tereddütlü bulanık küme kavramıdır.

Tanım 2.2 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme olmak üzere X kümesinden $[0, 1]$ aralığının tüm alt kümelerinin ailesine tanımlı olan her fonksiyona X kümesinde bir tereddütlü bulanık küme denir (Torra 2010) ve

$$A = \{\langle x, h_A(x) \rangle : x \in X\} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir ve burada $h_A(x)$, $[0, 1]$ aralığının bir alt kümesidir ve x elemanının A kümesine olan aitlik derecesini gösterir (Xia ve Xu 2011).

Örnek 2.2 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ sonlu bir küme, A , X üzerinde bir tereddütlü küme ve

$$h_A(x_1) = \{0.9, 0.4, 0.1\}, h_A(x_2) = \{0.6, 0.2\}, h_A(x_3) = \{0.1, 0.7, 0.3, 0.8\}$$

olsun. Bu durumda A tereddütlü kümesi

$$A = \{\langle x_1, \{0.9, 0.4, 0.1\} \rangle, \langle x_2, \{0.6, 0.2\} \rangle, \langle x_3, \{0.1, 0.7, 0.3, 0.8\} \rangle\} \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Bir tereddütlü bulanık küme, evrensel kümenin elemanlarına birden fazla ait olma derecesi atama özelliği sayesinde belirsiz verileri bulanık bir kümeden daha iyi modellemektedir. Fakat bu küme her ne kadar belirsizliği bulanık küme kavramından daha iyi modellese de ait olma derecesinin küme değerli olmasından dolayı tekrar eden bilgileri yok saymakta ve bu bilgileri modelleyemediği için veri kaybına sebep olmaktadır. Yager (Yager 1986) bulanık küme kavramını bulanık çoklu küme kavramına genelleştirmiştir.

Tanım 2.3 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme olsun. X üzerinde tanımlı bir A bulanık çoklu kümesi

$$A = \{\langle x_j, (\mu_A^1(x_j), \mu_A^2(x_j), \dots, \mu_A^{n_j}(x_j)) \rangle : j = 1, \dots, m\} \quad (2.5)$$

ile gösterilir. Burada $(\mu_A^1(x_j), \dots, \mu_A^{n_j}(x_j))$, j . terime karşılık gelen aitlik dizisi ve n_j , x_j 'in aitlik dizisinin uzunluğudur. $n_j = 1$ olması durumunda bulanık çoklu küme kavramı bulanık küme kavramı ile çakışmaktadır (Yager 1986).

Örnek 2.3 $X = \{x_1, x_2\}$ sonlu bir küme olsun. X üzerindeki A bulanık çoklu kümesi

$$A = \{\langle x_1, (0.3, 0.7, 0.7) \rangle, \langle x_2, (0.4, 0.2) \rangle\} \quad (2.6)$$

olacak biçimde yazılabilir. Aslında A kümesi

$$A = \{\langle x_1, 0.3 \rangle, \langle x_1, 0.7 \rangle, \langle x_1, 0.7 \rangle, \langle x_2, 0.4 \rangle, \langle x_2, 0.2 \rangle\} \quad (2.7)$$

şeklinde. Burada X in bir x_j elemanı birden fazla aitlik derecesine sahiptir.

Bir bulanık çoklu kümede, evrensel kümedeki elemanların üyelik dereceleri, aynı veya farklı bulanık değerlere ve farklı dizi uzunluklarına sahip bir dizi olarak verilir.

Böylece tekrarlayan bilgilerin kaybolması önlenerek veri kaybı engellenir. Ayrıca karar vericilerin kararsızlığından kaynaklanan belirsizlikleri modelleyebilmesinin yanı sıra grup karar verme problemlerinin çözümünde de kullanılmaktadır.

Aşağıdaki tanımda bulanık çoklu kümeler arasındaki bazı kümesel ve cebirsel ilişkiler hatırlatılmaktadır.

Tanım 2.4 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme olsun. X üzerindeki A ve B bulanık çoklu kümeleri sırasıyla

$$A = \{\langle x_j, (\mu_A^1(x_j), \dots, \mu_A^{n_j}(x_j)) \rangle : j = 1, \dots, m\} \quad (2.8)$$

ve

$$B = \{\langle x_j, (\mu_B^1(x_j), \dots, \mu_B^{n_j}(x_j)) \rangle : j = 1, \dots, m\} \quad (2.9)$$

ile verilsin. A ve B arasındaki kapsama, eşitlik, birleşim, kesişim ve cebirsel toplama işlemleri sırasıyla

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A^k(x_j) \leq \mu_B^k(x_j)$, her $k = 1, \dots, n_j$ ve $j = 1, \dots, m$,
2. $A = B \Leftrightarrow \mu_A^k(x_j) = \mu_B^k(x_j)$, her $k = 1, \dots, n_j$ ve $j = 1, \dots, m$,
3. $\mu_{A \cup B}^k(x_j) = \mu_A^k(x_j) \vee \mu_B^k(x_j)$, her $k = 1, \dots, n_j$ ve $j = 1, \dots, m$,
4. $\mu_{A \cap B}^k(x_j) = \mu_A^k(x_j) \wedge \mu_B^k(x_j)$, her $k = 1, \dots, n_j$ ve $j = 1, \dots, m$,

$$5. A \oplus B = \{ \langle x_j, (\mu_A^1(x_j), \dots, \mu_A^{n_j}(x_j), \mu_B^1(x_j), \dots, \mu_B^{n_j}(x_j)) \rangle : j = 1, \dots, m \}$$

şeklinde ifade edilir. Burada " $\vee$ " ve " $\wedge$ " sembolleri sırasıyla maksimum ve minimum operatörlerini belirtmektedir (Miyamoto 2000).

Örnek 2.4 $X = \{x_1, x_2\}$ olmak üzere X üzerindeki A ve B bulanık çoklu kümeleri sırasıyla

$$A = \{ \langle x_1, (0.3, 0.1, 0.1) \rangle, \langle x_2, (0.7, 0.5, 0.1) \rangle \}$$

ve

$$B = \{ \langle x_1, (0.5, 0.7, 0.3) \rangle, \langle x_2, (0.7, 0.6, 0.2) \rangle \}$$

şekilde verilsin. Bu durumda $A \subseteq B$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$A \cup B = \{ \langle x_1, (0.5, 0.7, 0.3) \rangle, \langle x_2, (0.7, 0.6, 0.2) \rangle \},$$

$$A \cap B = \{ \langle x_1, (0.3, 0.1, 0.1) \rangle, \langle x_2, (0.7, 0.5, 0.1) \rangle \},$$

$$A \oplus B = \{ \langle x_1, (0.3, 0.1, 0.1, 0.5, 0.7, 0.3) \rangle, \langle x_2, (0.7, 0.5, 0.1, 0.7, 0.6, 0.2) \rangle \}$$

gerçeklenir.

3. TUTARLI BULANIK KÜMELER

Bu bölümde, öncelikle tutarlı bulanık küme kavramı ve bu kümeler arasındaki bazı kümesel ve cebirsel işlemler tanımlanıp daha sonra tutarlı bulanık kümeler için bir korelasyon katsayısı ve bir kosinüs benzerlik ölçüsü kavramları tanımlanacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir. Son kısımda ise tutarlı bulanık kümelerin bir çok kriterli karar verme uygulaması verilecektir.

3.1 Tutarlı Bulanık Küme

Bulanık kümelerin bir genelleşmesi olan bulanık çoklu küme kavramının temel özelliği, evrensel kümenin her elemanının kümeye olan aitlik derecesinin $[0, 1]$ aralığındaki bir sayı yerine terimleri bu aralıktan gelen bir aitlik dizisi olarak ifade edilmesidir. Böylelikle tekrarlayan bilgilerin kaybolmasının önüne geçilerek çok kriterli karar verme problemlerinin çözümündeki duyarlılığın artırılması amaçlanmıştır. Ayrıca, bu kavram çok kriterli karar verme problemlerinde karar vericilerin kararsızlığından kaynaklanan belirsizliği modellemek veya aitlik dizinin her bir terimi bir karar vericinin değerlendirmesine karşılık gelecek şekilde bir çok kriterli grup karar verme problemini yapılandırmakta kullanılmaktadır. Fakat bulanık çoklu kümeler tekrarlayan bilgileri saklama özelliğine sahip olup karar verme problemlerinin çözümündeki duyarlılığı artırıyor olsa da aitlik dizilerinin uzunluğundaki artış kümedeki belirsizliği artırmakta ve karar vermeyi zorlaştırmaktadır. Bu zorluğun üstesinden gelmek amacıyla Türkarlan vd. (2021) bulanık çoklu kümelerin aitlik dizisinin dizi uzunluğundan kaynaklanan bu dezavantajını ortadan kaldırmayı amaçlayan tutarlı bulanık küme kavramını önermişlerdir.

Tanım 3.1 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme olsun. X üzerinde tanımlı bir tutarlı bulanık küme

$$C_A = \left\{ \left\langle x_j, (m_A^{(j)}, c_A^{(j)}) \right\rangle : x_j \in X \right\} \quad (3.1)$$

ile verilir. Burada her $j = 1, \dots, m$ için

$$m_A^{(j)} = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \mu_A^k(x_j) \quad (\text{ortalama}) \quad (3.2)$$

ve

$$c_A^{(j)} = 1 - \sigma_A^{(j)} \quad (\text{tutarlılık}) \quad (3.3)$$

ile verilir. Burada

$$\sigma_A^{(j)} = \sqrt{\frac{1}{n_j - 1} \sum_{k=1}^{n_j} (m_\Omega^{(j)} - \mu_\Omega^k(x_j))^2} \quad (3.4)$$

A bulanık çoklu kümesindeki j . aitlik dizisinin standart sapmasıdır. Ayrıca, bir tutarlı bulanık kümedeki tutarlı bulanık eleman her bir $j = 1, \dots, m$ için kısaca $a_j = (m_A^{(j)}, c_A^{(j)})$ ile gösterilir (Türkarslan vd. 2021).

Bu yeni kavram, bileşenleri sırasıyla bulanık çoklu kümedeki bir dizinin ortalama değeri ve bu dizinin standart sapmasının tümleyenini olan tutarlılık derecesi ile bir sıralı ikili olarak ifade edilir. Bir tutarlı bulanık küme, ortalama değeri ve standart sapma gibi istatistiksel kavramları kullanarak bulanık çoklu kümede yer alan dizilerin taşıdığı bilgi miktarının dizi uzunluğuna olan bağımlılığını ortadan kaldırarak, dizilerin taşıdığı bilgileri kompakt bir biçimde sunmaktadır.

Örnek 3.1 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ sonlu bir küme ve

$$A = \{\langle x_1, (0.7, 0.3) \rangle, \langle x_2, (0.5, 0.2, 0.1) \rangle, \langle x_3, (0.9) \rangle\} \quad (3.5)$$

ile verilen A kümesi, X de bir bulanık çoklu küme olsun. O halde, C_A tutarlı bulanık kümesi

$$\begin{aligned} C_A &= \{\langle x_1, (0.5, 1 - 0.2828) \rangle, \langle x_2, (0.4, 1 - 0.2345) \rangle, \langle x_3, (0.9, 1 - 0) \rangle\} \\ &= \{\langle x_1, (0.5, 0.7172) \rangle, \langle x_2, (0.4, 0.7655) \rangle, \langle x_3, (0.9, 1) \rangle\} \end{aligned}$$

ile verilir.

Tanım 3.2 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme,

$$A = \{ \langle x_j, (\mu_A^1(x_j), \dots, \mu_A^{n_j}(x_j)) \rangle : j = 1, \dots, m \}$$

ve

$$B = \{ \langle x_j, (\mu_B^1(x_j), \dots, \mu_B^{n_j}(x_j)) \rangle : j = 1, \dots, m \}$$

X üzerinde iki bulanık çoklu küme,

$$C_A = \{ \langle x_j, (m_A^j, c_A^j) \rangle : j = 1, \dots, m \}$$

ve

$$C_B = \{ \langle x_j, (m_B^j, c_B^j) \rangle : j = 1, \dots, m \}$$

sırasıyla A ve B kümelerine karşılık gelen tutarlı bulanık kümeler olsun. C_A ve C_B arasındaki bazı küme işlemleri ve cebirsel işlemler

1. $C_A \subseteq C_B \Leftrightarrow m_A^j(x_j) \leq m_B^j(x_j)$ ve $c_A^j(x_j) \leq c_B^j(x_j)$, her $j = 1, \dots, m$,
2. $C_A = C_B \Leftrightarrow m_A^j(x_j) = m_B^j(x_j)$ ve $c_A^j(x_j) = c_B^j(x_j)$, her $j = 1, \dots, m$,
3. $C_A^c := \{ \langle x_j, (1 - m_A^j, c_A^j) \rangle : j = 1, \dots, m \}$, her $j = 1, \dots, m$,
4. $m_{C_A \cup C_B}^j(x_j) = m^j(\mu_A^k(x_j) \vee \mu_B^k(x_j))$ and $c_{C_A \cup C_B}^j(x_j) = c^j(\mu_A^k(x_j) \vee \mu_B^k(x_j))$, her $k = 1, \dots, n_j$ ve $j = 1, \dots, m$,
5. $m_{C_A \cap C_B}^j(x_j) = m^j(\mu_A^k(x_j) \wedge \mu_B^k(x_j))$ and $c_{C_A \cap C_B}^j(x_j) = c^j(\mu_A^k(x_j) \wedge \mu_B^k(x_j))$, her $k = 1, \dots, n_j$ ve $j = 1, \dots, m$,
6. $C_A \oplus C_B = \left\{ \left\langle x_j \begin{pmatrix} m^j(\mu_A^1(x_j), \dots, \mu_A^{n_j}(x_j), \mu_B^1(x_j), \dots, \mu_B^{n_j}(x_j)), \\ c^j(\mu_A^1(x_j), \dots, \mu_A^{n_j}(x_j), \mu_B^1(x_j), \dots, \mu_B^{n_j}(x_j)) \end{pmatrix} : j = 1, \dots, m \right\right\}$

şeklindedir. Burada C_A^c ise A bulanık çoklu kümesine karşılık gelen C_A tutarlı kümesinin tümleyenini göstermektedir.

Örnek 3.2 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ bir küme ve

$$A = \{ \langle x_1, (0.7, 0.3) \rangle, \langle x_2, (0.9, 0.9, 0.9) \rangle, \langle x_3, (0.5) \rangle \}$$

ve

$$B = \{\langle x_1, (0.8, 0.2) \rangle, \langle x_2, (0.5, 0.2, 0.1) \rangle, \langle x_3, (0.4) \rangle\}$$

X kümesinde iki bulanık çoklu küme olsun. O halde, C_A ve C_B tutarlı bulanık kümeleri

$$\begin{aligned} C_A &= \{\langle x_1, (0.6, 1 - 0.2828) \rangle, \langle x_2, (0.9, 1 - 0) \rangle, \langle x_3, (0.5, 1 - 0) \rangle\} \\ &= \{\langle x_1, (0.5, 0.7172) \rangle, \langle x_2, (0.9, 1) \rangle, \langle x_3, (0.5, 1) \rangle\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} C_B &= \{\langle x_1, (0.5, 1 - 0.4242) \rangle, \langle x_2, (0.3, 1 - 0.2081) \rangle, \langle x_3, (0.4, 1 - 0) \rangle\} \\ &= \{\langle x_1, (0.5, 0.5758) \rangle, \langle x_2, (0.3, 0.7919) \rangle, \langle x_3, (0.4, 1) \rangle\} \end{aligned}$$

ile verilir. Bu durumda $B \subseteq A$ olduğu görülebilir. Ayrıca,

$$C_A^c = \{\langle x_1, (0.5, 0.7172) \rangle, \langle x_2, (0.1, 1) \rangle, \langle x_3, (0.5, 1) \rangle\},$$

$$\begin{aligned} C_A \cup C_B &= \{\langle x_1, (0.55, 1 - 0.3535) \rangle, \langle x_2, (0.9, 1 - 0) \rangle, \langle x_3, (0.5, 1 - 0) \rangle\} \\ &= \{\langle x_1, (0.55, 0.6465) \rangle, \langle x_2, (0.9, 1) \rangle, \langle x_3, (0.5, 1) \rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_A \cap C_B &= \{\langle x_1, (0.45, 1 - 0.3535) \rangle, \langle x_2, (0.3, 1 - 0.2081) \rangle, \langle x_3, (0.4, 1 - 0) \rangle\} \\ &= \{\langle x_1, (0.45, 0.6465) \rangle, \langle x_2, (0.3, 0.7919) \rangle, \langle x_3, (0.4, 1) \rangle\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_A \oplus C_B &= \{\langle x_1, (0.5, 1 - 0.2943) \rangle, \langle x_2, (0.5833, 1 - 0.3710) \rangle, \langle x_3, (0.45, 1 - 0.0707) \rangle\} \\ &= \{\langle x_1, (0.5, 0.7057) \rangle, \langle x_2, (0.5833, 0.6290) \rangle, \langle x_3, (0.45, 0.9293) \rangle\} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2 Tutarlı Bulanık Kümeler İçin Bir Korelasyon Katsayısı Ölçüsü ve Bir Kosinüs Benzerlik Ölçüsü

Korelasyon analizi, iki bulanık küme arasındaki ilişkiyi ölçebildiği için bulanık küme teorisinde önemli bir araştırma konusudur. Bir korelasyon katsayısı (ölçü), iki bulanık küme arasındaki bağımlılık seviyesini ölçer ve iki bulanık küme arasındaki ilişkiyi belirler. İstatistikte, korelasyon katsayıları iki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi ölçerken; bulanık küme teorisinde iki bulanık küme arasındaki bağımlılık derecesini belirlerler (Garg 2020).

Tanım 3.3 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme, A ve B , X kümesinde tanımlı iki bulanık çoklu küme olsun. X kümesindeki C_A ve C_B tutarlı bulanık kümeleri arasındaki bir korelasyon katsayısı

$$\rho_{CFS}(A, B) := \frac{C_{CFS}(A, B)}{\sqrt{C_{CFS}(A, A) C_{CFS}(B, B)}} \quad (3.6)$$

ile verilir. Burada

$$C_{CFS}(A, B) = \sum_{j=1}^m \left(m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)} \right) \quad (3.7)$$

şeklindedir (Türkarslan vd. 2021).

Önerme 3.1 Korelasyon katsayısı ρ_{CFS} aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (1) $0 \leq \rho_{CFS}(A, B) \leq 1$,
- (2) $\rho_{CFS}(A, B) = \rho_{CFS}(B, A)$,
- (3) $A = B$ ise $\rho_{CFS}(A, B) = 1$.

İspat. $a_j = (m_A^{(j)}, c_A^{(j)})$ ve $b_j = (m_B^{(j)}, c_B^{(j)})$ sabit bir $j \in \{1, \dots, m\}$ için X kümesinde iki tutarlı bulanık eleman olsun. Schwarz eşitsizliğinden

$$m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)} \leq \sqrt{\left(m_A^{(j)}\right)^2 + \left(c_A^{(j)}\right)^2} \sqrt{\left(m_B^{(j)}\right)^2 + \left(c_B^{(j)}\right)^2} \quad (3.8)$$

yazılabilir. Daha sonra eşitsizliğin her iki tarafından toplam alarak

$$\sum_{j=1}^m \left(m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)} \right) \leq \sum_{j=1}^m \sqrt{\left(m_A^{(j)}\right)^2 + \left(c_A^{(j)}\right)^2} \sqrt{\left(m_B^{(j)}\right)^2 + \left(c_B^{(j)}\right)^2} \quad (3.9)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi Cauchy Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\sum_{j=1}^m \left(m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)} \right) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\left(m_A^{(j)}\right)^2 + \left(c_A^{(j)}\right)^2 \right)} \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\left(m_B^{(j)}\right)^2 + \left(c_B^{(j)}\right)^2 \right)} \quad (3.10)$$

elde edilir. Böylece,

$$\rho_{CFS}(A, B) = \frac{\sum_{j=1}^m \left(m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)} \right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\left(m_A^{(j)} \right)^2 + \left(c_A^{(j)} \right)^2 \right)} \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\left(m_B^{(j)} \right)^2 + \left(c_B^{(j)} \right)^2 \right)}} \leq 1 \quad (3.11)$$

gerçeklenir. (2) ve (3) özelliklerinin ispatı tanımdan açıktır. ■

Şimdi tutarlı bulanık kümeler için ağırlıklı korelasyon katsayısı tanımını vereceğiz.

Tanım 3.4 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme, A ve B , X kümesinde tanımlı iki bulanık çoklu küme olsun. C_A ve C_B tutarlı bulanık kümeleri arasında bir ağırlıklı korelasyon katsayısı

$$W\rho_{CFS}(A, B) := \frac{WC_{CFS}(A, B)}{\sqrt{WC_{CFS}(A, A) WC_{CFS}(B, B)}} \quad (3.12)$$

ile verilir. Burada

$$WC_{CFS}(A, B) = \sum_{j=1}^m \omega_j \left(m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)} \right) \quad (3.13)$$

şeklinde ve $w = (w_1, \dots, w_m)$, $\sum_{j=1}^m w_j = 1$ ve $w_j \in [0, 1]$ olacak biçimde ($j = 1, \dots, m$) bir ağırlık vektörüdür (Türkarslan vd. 2021).

Benzerlik ölçüsü kavramı, iki bulanık küme arasındaki benzerlik derecesini belirlemede önemli bir rol oynar. Kosinüs benzerlik ölçüsü kavramı, iki vektörün iç çarpımının bu vektörlerin uzunluklarının çarpımına oranı yani vektörler arasındaki açının kosinüsü kullanılarak tanımlanır (Ye 2011).

Şimdi, kosinüs benzerlik ölçüsünün genel tanımından yola çıkarak tutarlı bulanık kümeler için bir kosinüs benzerlik ölçüsü tanımı verilecektir.

Tanım 3.5 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme, A ve B , X kümesinde iki bulanık çoklu küme ve

$$C_A = \left\{ \left\langle x_j, (m_A^{(j)}, c_A^{(j)}) \right\rangle : j = 1, \dots, m \right\}$$

ve

$$C_B = \left\{ \left\langle x_j, (m_B^{(j)}, c_B^{(j)}) \right\rangle : j = 1, \dots, m \right\}$$

X kümesinde iki tutarlı bulanık küme olsun. C_A ve C_B tutarlı bulanık kümeleri arasındaki bir kosinüs benzerlik ölçüsü

$$\delta_{CFS}(A, B) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)}}{\sqrt{(m_A^{(j)})^2 + (c_A^{(j)})^2} \sqrt{(m_B^{(j)})^2 + (c_B^{(j)})^2}} \quad (3.14)$$

ile verilir (Türkarslan vd. 2021).

Eğer $m = 1$ alınırsa kosinüs benzerlik ölçüsü δ_{CFS} , ρ_{CFS} korelasyon katsayısına dönüşür.

Önerme 3.2 Kosinüs benzerlik ölçüsü δ_{CFS} aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (1) $0 \leq \delta_{CFS}(A, B) \leq 1$,
- (2) $\delta_{CFS}(A, B) = \delta_{CFS}(B, A)$,
- (3) $A = B$ ise $\delta_{CFS}(A, B) = 1$.

İspat. Her $j = 1, \dots, m$ için

$$\frac{m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)}}{\sqrt{(m_A^{(j)})^2 + (c_A^{(j)})^2} \sqrt{(m_B^{(j)})^2 + (c_B^{(j)})^2}} \quad (3.15)$$

ifadesi $(m_A^{(j)}, c_A^{(j)})$ ve $(m_B^{(j)}, c_B^{(j)})$ vektörleri arasındaki açının kosinüsü olduğundan bu ifade 0 ile 1 arasındadır. O halde, (1) özelliği gerçekleşir. (2) ve (3) özelliklerinin ispatı tanımdan açıktır. ■

Şimdi tutarlı bulanık kümeler için ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü tanımını vereceğiz.

Tanım 3.6 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme, A ve B , X kümesinde iki bulanık çoklu küme olsun. X kümesindeki C_A ve C_B tutarlı bulanık kümeleri arasındaki bir ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü

$$W\delta_{CFS}(A, B) := \sum_{j=1}^m \omega_j \frac{m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)}}{\sqrt{(m_A^{(j)})^2 + (c_A^{(j)})^2} \sqrt{(m_B^{(j)})^2 + (c_B^{(j)})^2}} \quad (3.16)$$

ile verilir. Burada $w = (w_1, \dots, w_m)$, $\sum_{j=1}^m w_j = 1$ ve $w_j \in [0, 1]$ olacak biçimdeki $j = 1, \dots, m$ için ağırlık vektörüdür (Türkarslan vd. 2021).

Eğer, her $j = 1, \dots, m$ için $w_j = 1/m$ alınırsa, $\delta_{CFS}(A, B) = W\delta_{CFS}(A, B)$ elde edilir. Ayrıca, önerilen ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsünün tanımından $W\delta_{CFS}$, (1 – 3) özelliklerini sağlar.

3.3 Tutarlı Bulanık Kümelerin Çok Periyotlu Bir Tıbbi Teşhis Uygulaması

Bu bölümde, önerilen ağırlıklı korelasyon katsayısı ve ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsünün uygulanabilirliğini ve etkinliğini göstermek için El-Azab vd. (2017) tarafından bulanık çoklu kümeler için verilen örneği tutarlı bulanık ortamda inceleyeceğiz.

Çok periyotlu tıbbi teşhis, hedef hastanın sahip olduğu semptomları birden fazla zaman diliminde analiz ederek hastanın sahip olduğu hastalığa karar verme sürecidir. Bu süreçte karar verici semptomların hedef hasta üzerindeki etkisini birkaç farklı zamanda değerlendirir. Bu süreci diğer tıbbi teşhis süreçlerinden ayıran en önemli faktör, zaman değişkenine dikkate alan bir çözüm algoritmasının sunulmasıdır (Ye ve Fu 2015). Bundan dolayı, hastanın semptomları ve hastalıklar bir bulanık değerler dizisi ile ifade edilmektedir.

Örnek 3.3 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ hastaların kümesi ve

$$B = \{be_1(\text{Ateş}), be_2(\text{Öksürük}), be_3(\text{Boğaz ağrısı}), be_4(\text{Baş Ağrısı}), be_5(\text{Vücut ağrısı})\}$$

ve

$$H = \{H_1(\text{Grip}), H_2(\text{Verem (Tüberküloz)}), H_3(\text{Tifo}), H_4(\text{Boğaz Hastalığı})\}$$

sırasıyla semptomların ve bu semptomlara sahip olan hastalıkların kümesi olsun. Kabul edelim ki verilen semptomlara sahip olan P kümesindeki hastaların her biri için semptomların hasta üzerindeki etkisi üç farklı zamanda aşağıdaki bulanık çoklu kümeler yardımıyla değerlendirilmiş olsun:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left\{ \langle be_1, (0.6, 0.7, 0.5) \rangle, \langle be_2, (0.4, 0.3, 0.4) \rangle, \langle be_3, (0.1, 0.2, 0.0) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.5, 0.6, 0.7) \rangle, \langle be_5, (0.2, 0.3, 0.4) \rangle \right\}, \\
P_2 &= \left\{ \langle be_1, (0.4, 0.3, 0.5) \rangle, \langle be_2, (0.7, 0.6, 0.8) \rangle, \langle be_3, (0.6, 0.5, 0.4) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.3, 0.6, 0.2) \rangle, \langle be_5, (0.8, 0.7, 0.5) \rangle \right\}, \\
P_3 &= \left\{ \langle be_1, (0.1, 0.2, 0.1) \rangle, \langle be_2, (0.3, 0.2, 0.1) \rangle, \langle be_3, (0.8, 0.7, 0.8) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.3, 0.2, 0.2) \rangle, \langle be_5, (0.4, 0.3, 0.2) \rangle \right\}, \\
P_4 &= \left\{ \langle be_1, (0.3, 0.2, 0.2) \rangle, \langle be_2, (0.4, 0.3, 0.1) \rangle, \langle be_3, (0.2, 0.1, 0.0) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.5, 0.6, 0.3) \rangle, \langle be_5, (0.4, 0.5, 0.4) \rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Ayrıca, verilen semptomların her birine sahip olan H kümesindeki her bir hastalık çoklu bulanık kümeler yardımıyla aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \left\{ \langle be_1, (0.8, 0.9, 0.85) \rangle, \langle be_2, (0.2, 0.3, 0.25) \rangle, \langle be_3, (0.3, 0.5, 0.4) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.5, 0.7, 0.6) \rangle, \langle be_5, (0.5, 0.6, 0.55) \rangle \right\}, \\
H_2 &= \left\{ \langle be_1, (0.2, 0.3, 0.25) \rangle, \langle be_2, (0.9, 0.1, 0.95) \rangle, \langle be_3, (0.7, 0.8, 0.75) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.6, 0.7, 0.65) \rangle, \langle be_5, (0.7, 0.8, 0.75) \rangle \right\}, \\
H_3 &= \left\{ \langle be_1, (0.5, 0.7, 0.6) \rangle, \langle be_2, (0.3, 0.5, 0.4) \rangle, \langle be_3, (0.2, 0.3, 0.25) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.2, 0.4, 0.3) \rangle, \langle be_5, (0.4, 0.6, 0.5) \rangle \right\}, \\
H_4 &= \left\{ \langle be_1, (0.1, 0.3, 0.2) \rangle, \langle be_2, (0.3, 0.4, 0.35) \rangle, \langle be_3, (0.8, 0.9, 0.85) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.1, 0.2, 0.15) \rangle, \langle be_5, (0.1, 0.2, 0.15) \rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Şimdi yukarıda çoklu bulanık kümeler ile verilen hasta ve hastalıkları Tanım 3.1 yardımıyla sırasıyla aşağıdaki tutarlı bulanık kümeler olarak ifade edelim:

$$P_1^* = \left\{ \langle be_1, (0.6, 0.9) \rangle, \langle be_2, (0.36, 0.9423) \rangle, \langle be_3, (0.1, 0.9) \rangle, \right. \\
\left. \langle be_4, (0.6, 0.9) \rangle, \langle be_5, (0.3, 0.9) \rangle \right\},$$

$$\begin{aligned}
P_2^* &= \left\{ \langle be_1, (0.4, 0.9) \rangle, \langle be_2, (0.7, 0.9) \rangle, \langle be_3, (0.5, 0.9) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.36, 0.7919) \rangle, \langle be_5, (0.66, 0.8473) \rangle \right\}, \\
P_3^* &= \left\{ \langle be_1, (0.13, 0.9423) \rangle, \langle be_2, (0.2, 0.9) \rangle, \langle be_3, (0.76, 0.9423) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.23, 0.9423) \rangle, \langle be_5, (0.3, 0.9) \rangle \right\}, \\
P_4^* &= \left\{ \langle be_1, (0.23, 0.9423) \rangle, \langle be_2, (0.26, 0.8473) \rangle, \langle be_3, (0.1, 0.9) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.46, 0.8473) \rangle, \langle be_5, (0.43, 0.9423) \rangle \right\}, \\
H_1^* &= \left\{ \langle be_1, (0.85, 0.95) \rangle, \langle be_2, (0.25, 0.95) \rangle, \langle be_3, (0.4, 0.9) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.6, 0.9) \rangle, \langle be_5, (0.55, 0.95) \rangle \right\}, \\
H_2^* &= \left\{ \langle be_1, (0.25, 0.95) \rangle, \langle be_2, (0.65, 0.5231) \rangle, \langle be_3, (0.75, 0.95) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.65, 0.95) \rangle, \langle be_5, (0.75, 0.95) \rangle \right\}, \\
H_3^* &= \left\{ \langle be_1, (0.6, 0.9) \rangle, \langle be_2, (0.4, 0.9) \rangle, \langle be_3, (0.25, 0.95) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.3, 0.9) \rangle, \langle be_5, (0.5, 0.9) \rangle \right\}, \\
H_4^* &= \left\{ \langle be_1, (0.2, 0.9) \rangle, \langle be_2, (0.35, 0.95) \rangle, \langle be_3, (0.85, 0.95) \rangle, \right. \\
&\quad \left. \langle be_4, (0.15, 0.95) \rangle, \langle be_5, (0.15, 0.95) \rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Kabul edelim ki her bir belirti (sempptom) eşit ağırlıkta olsun yani her $j = 1, 2, 3, 4, 5$ için $\omega_j = 0.2$ olsun. Şimdi, Tanım 3.4 ve Tanım 3.6 yardımıyla sırasıyla her bir hasta ile verilen hastalıklar arasındaki ağırlıklı korelasyon katsayısı ve ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsünü hesaplayalım.

Çizelge 3.1'de tutarlı bulanık kümeler için elde edilen ağırlıklı korelasyon katsayısı ve ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü sonuçlarının, literatürde var olan çoklu bulanık kümeler için verilen korelasyon katsayısı sonuçları ile karşılaştırması verilmiştir.

Her $k, i = 1, 2, 3, 4$ için P_k^* hastalarını H_i^* hastalıkları ile eşleştiren formüller

$$k_1 = \arg \max_{1 \leq i \leq 4} \{W \rho_{CFS}(P_k^*, H_i^*)\} \quad (3.17)$$

ve

$$k_2 = \arg \max_{1 \leq i \leq 4} \{W \delta_{CFS}(P_k^*, H_i^*)\} \quad (3.18)$$

Çizelge 3.1 Karşılaştırma analizi

	Korelasyon Katsayısı	Grip	Verem	Tifo	Boğaz Enfeksiyonu
(El-Azab vd. 2017) de elde edilen sonuçlar	$\rho_{FMS}(P_1, H_i)$	0.929	0.757	0.899	0.403
	$\rho_{FMS}(P_2, H_i)$	0.822	0.951	0.897	0.747
	$\rho_{FMS}(P_3, H_i)$	0.644	0.872	0.641	0.943
	$\rho_{FMS}(P_4, H_i)$	0.855	0.835	0.895	0.480
Tutarlı bulanık kümeler için önerilen ağırlıklı korelasyon katsayısı sonuçları	$W\rho_{CFS}(P_1^*, H_i^*)$	0.982	0.910	0.984	0.909
	$W\rho_{CFS}(P_2^*, H_i^*)$	0.956	0.969	0.977	0.941
	$W\rho_{CFS}(P_3^*, H_i^*)$	0.925	0.935	0.944	0.994
	$W\rho_{CFS}(P_4^*, H_i^*)$	0.959	0.928	0.978	0.925
	Kosinüs Benzerlik Ölçüsü	Grip	Verem	Tifo	Boğaz Enfeksiyonu
Tutarlı bulanık kümeler için önerilen ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü sonuçları	$W\delta_{CFS}(P_1^*, H_i^*)$	0.9833	0.9196	0.9870	0.9282
	$W\delta_{CFS}(P_2^*, H_i^*)$	0.969	0.9864	0.9815	0.9493
	$W\delta_{CFS}(P_3^*, H_i^*)$	0.9427	0.9299	0.9544	0.9937
	$W\delta_{CFS}(P_4^*, H_i^*)$	0.9650	0.9284	0.9806	0.9436

şeklinde verilmektedir (Ye 2011).

Çizelge 3.1’de El-Azab vd. (2017) tarafından çoklu bulanık kümeler için önerilen korelasyon katsayısı ve Bölüm 3.2 de tutarlı bulanık kümeler için önerilen ağırlıklı korelasyon katsayısı ρ_{CFS} ve ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü $W\rho_{CFS}$ sonuçlarına göre, 3. ve 4. hastaların sırasıyla boğaz enfeksiyonu ve tifo hastalıklarına sahip olabileceği, diğer hastaların sonuçlarının ise bu üç yaklaşıma göre farklılık gösterdiği görülmektedir. Bu farklılığın nedeninin, tutarlı bulanık kümelerin istatistiksel metotlar kullanarak bulanık ortamdaki veriyi daha iyi analiz etmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

3.3.1 Tutarlı bulanık kümeler için önerilen korelasyon katsayısı ve kosinüs benzerlik ölçüsünün karşılaştırma analizi

Bu bölümde, ilk olarak tutarlı bulanık kümeler için önerilen ağırlıklı korelasyon katsayısının (ρ_{CFS}) ve ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsünün (ρ_{CFS}) çok periyotlu

tıbbi teşhis problemi için elde edilen sonuçlarını standart sapma kavramı yardımıyla karşılaştıracakız ve daha sonra bu iki metodun avantajlarını açıklayacağız.

Çizelge 3.2 Tutarlı bulanık kümeler için önerilen ağırlıklı korelasyon katsayısı ve ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü için karar sonuçları ve standart sapmalar

	Hastalar	Standart Sapmalar	Sıralamalar	Sonuç
$W\rho_{CFS}$	P_1^*	0.04244	$H_3^* \succ H_1^* \succ H_2^* \succ H_4^*$	H_3^*
	P_2^*	0.01575	$H_3^* \succ H_2^* \succ H_1^* \succ H_4^*$	H_3^*
	P_3^*	0.03066	$H_4^* \succ H_3^* \succ H_2^* \succ H_1^*$	H_4^*
	P_4^*	0.02548	$H_3^* \succ H_1^* \succ H_2^* \succ H_4^*$	H_3^*
$W\delta_{CFS}$	P_1^*	0.03556	$H_3^* \succ H_1^* \succ H_4^* \succ H_2^*$	H_3^*
	P_2^*	0.01654	$H_2^* \succ H_3^* \succ H_1^* \succ H_4^*$	H_2^*
	P_3^*	0.02756	$H_4^* \succ H_3^* \succ H_1^* \succ H_2^*$	H_4^*
	P_4^*	0.02303	$H_3^* \succ H_1^* \succ H_4^* \succ H_2^*$	H_3^*

Çizelge 3.2'nin sonuçlarına göre 1., 2. ve 4. hastalarının sonuçları her iki yaklaşım için de birbirleri ile uyumludur. Ayrıca, nümerik sonuçlar arasındaki büyük farkların bu sonuçların standart sapmasını artırdığı ve böylece bu sonuçları elde etmek için kullanılan metodun optimal sonucu belirlemede daha iyi bir metot olduğu bilinmektedir (Ye vd. 2020). Bundan dolayı, her iki metot da elde edilen sonuçların standart sapmalarını inceliyoruz. Çizelge 3.2'de, 2. hasta hariç diğer hastalar için $W\rho_{CFS}$ değerlerinin standart sapmalarının $W\delta_{CFS}$ değerlerinin standart sapmalarından yüksek olduğunu görebiliriz. Bu durumda bir bulanık çoklu ortamda, $W\rho_{CFS}$, 1., 2. ve 4. hastaların hastalığını teşhis etmede $W\delta_{CFS}$ ölçüsünden daha yüksek bir ayırt ediciliğe sahiptir.

4. TUTARLI BULANIK KÜMELER İÇİN ÇAPRAZ ENTROPİ VE SİNÜS ENTROPİ ÖLÇÜSÜ

Bulanık çoklu kümeler tarafından toplanan veriler, tutarlı bulanık kümeler aracılığıyla işlenir ve bulanık ortamda bir tür veri bilimi yapılır. Bulanık küme teorisi, belirsiz bilgileri çok iyi modelleyebildiğinden, araştırmacılar tarafından özellikle çok kriterli karar verme gibi gerçek yaşam problemlerini çözmek için sıklıkla tercih edilmiştir. Bu problemleri çözerken en uygun alternatif, genellikle ortamdaki belirsizlik bulanık kümeler ile modellendikten sonra benzerlik ölçüleri, uzaklık ölçüleri, iraksama ölçüleri gibi metotlar kullanılarak belirlenir. Bu metotlardan bir tanesi de entropi ölçüleridir. Bu bölümde istatistiksel metotlarla elde edilen verilerin işlenmesine ve modellenmesine katkıda bulunmak için Ye (2015) ve Cui ve Ye (2018)'den motive olarak tutarlı bulanık kümeler arasında bir çapraz entropi ölçüsü ve bir sinüs entropi ölçüsü tanımlanmıştır.

Entropi ve çapraz entropi kavramları bilgi teorisinde kullanılan önemli ölçüm metotlarıdır ve bu kavramlar Shannon (1948) ve Shannon ve Weaver (1949) tarafından önerilmiştir. Daha sonra çapraz entropi kavramı Kullback ve Leibler (1951) ve Kullback (1959) tarafından geliştirilmiş ve Lin (1991) tarafından modifiye edilmiştir. Kısaca bu kavramlar bilginin miktarı ile ilgilidir ve bilgideki belirsizliği ölçerler. Ayrıca, Zadeh (1968) Shannon entropisini bulanık entropi kavramına genişletmiştir. Entropi ve bulanık entropi kavramları, belirsiz bilgileri ölçmek için yapılandırıldıklarından birbirleriyle ilişkili gibi görünmektedir. Fakat Shannon entropi ölçüleri ile bulanık entropi ölçüleri arasında büyük bir fark vardır. Aslında, bulanık entropi belirsizlik ve tutarsızlıklar (olasılıksızlık/non-probability) ilgilenirken, Shannon'ın entropi ölçüleri olasılıksal belirsizliklerle (rastgelelik) (Al-sharhan vd. 2001, Pramanik vd. 2018) ilgilenir. Bulanık entropi kavramı, bulanık bir olayın veya bir bulanık kümenin belirsizliğinin ölçülmesiyle tanımlanan bir bulanık bilgi ölçüsüdür.

Bulanık kümeler arasındaki bulanık çapraz entropi ölçüsü kavramı, Shang ve Jiang

(1997) tarafından tanıtılmıştır. Bu kavram bir tür bulanık bilgi ölçüsüdür ve iki bulanık kümenin ayırım derecesi olarak düşünülebilir.

Tanım 4.1 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme,

$$C_A = \left\{ \left\langle x_j, (m_A^{(j)}, c_A^{(j)}) \right\rangle : j = 1, \dots, m \right\}$$

ve

$$C_B = \left\{ \left\langle x_j, (m_B^{(j)}, c_B^{(j)}) \right\rangle : j = 1, \dots, m \right\}$$

X kümesinde tutarlı bulanık iki küme olsun. A ve B arasındaki bir tutarlı çapraz entropi ölçüsü

$$\begin{aligned} E(A, B) = & \sum_{j=1}^m \left[m_A^{(j)} \log_2 \frac{m_A^{(j)}}{(m_A^{(j)} + m_B^{(j)})/2} + (1 - m_A^{(j)}) \log_2 \frac{1 - m_A^{(j)}}{1 - (m_A^{(j)} + m_B^{(j)})/2} \right] \\ & + \sum_{j=1}^m \left[c_A^{(j)} \log_2 \frac{c_A^{(j)}}{(c_A^{(j)} + c_B^{(j)})/2} + (1 - c_A^{(j)}) \log_2 \frac{1 - c_A^{(j)}}{1 - (c_A^{(j)} + c_B^{(j)})/2} \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

ile verilir.

Önerme 4.1 Çapraz entropi ölçüsü E aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (1) $E(A, B) \geq 0$,
- (2) $E(A, B) = E(A^c, B^c)$,
- (3) $E(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter şart her $j = 1, \dots, m$ için $m_A^{(j)} = m_B^{(j)}$ ve $c_A^{(j)} = c_B^{(j)}$ olmasıdır.

İspat. (1) A ve B arasındaki tutarlı çapraz entropi ölçüsü bulanık çoklu kümelerdeki bir dizinin ortalama değeri ve bu dizinin standart sapması ile ilgili kısımlar sırasıyla

$$E_m(A, B) = \sum_{j=1}^m \left[m_A^{(j)} \log_2 \frac{m_A^{(j)}}{(m_A^{(j)} + m_B^{(j)})/2} + (1 - m_A^{(j)}) \log_2 \frac{1 - m_A^{(j)}}{1 - (m_A^{(j)} + m_B^{(j)})/2} \right] \quad (4.2)$$

ve

$$E_c(A, B) = \sum_{j=1}^m \left[c_A^{(j)} \log_2 \frac{c_A^{(j)}}{(c_A^{(j)} + c_B^{(j)})/2} + (1 - c_A^{(j)}) \log_2 \frac{1 - c_A^{(j)}}{1 - (c_A^{(j)} + c_B^{(j)})/2} \right] \quad (4.3)$$

olmak üzere

$$E(A, B) = E_m(A, B) + E_c(A, B) \quad (4.4)$$

olacak biçimde iki parçaya ayrılabilir. (Shang ve Jiang 1997)'da verilen bulanık çapraz entropi özelliği kullanılarak $E_m(A, B) \geq 0$ ve $E_c(A, B) \geq 0$ elde edilir. Buradan $E(A, B) \geq 0$ gerçekleşir. (2) ve (3) özelliklerinin ispatı tanımdan açıktır. ■

Şimdi tutarlı bulanık kümeler için bir ağırlıklı çapraz entropi ölçüsü tanımını verelim.

Tanım 4.2 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonlu bir küme,

$$C_A = \left\{ \left\langle x_j, (m_A^{(j)}, c_A^{(j)}) \right\rangle : j = 1, \dots, m \right\}$$

ve

$$C_B = \left\{ \left\langle x_j, (m_B^{(j)}, c_B^{(j)}) \right\rangle : j = 1, \dots, m \right\}$$

X kümesinde tutarlı bulanık iki küme olsun. A ve B arasındaki bir ağırlıklı tutarlı çapraz entropi ölçüsü

$$\begin{aligned} WE(A, B) = \sum_{j=1}^m \omega_j \left[m_A^{(j)} \log_2 \frac{m_A^{(j)}}{(m_A^{(j)} + m_B^{(j)})/2} + (1 - m_A^{(j)}) \log_2 \frac{1 - m_A^{(j)}}{1 - (m_A^{(j)} + m_B^{(j)})/2} \right] \\ + \sum_{j=1}^m \omega_j \left[c_A^{(j)} \log_2 \frac{c_A^{(j)}}{(c_A^{(j)} + c_B^{(j)})/2} + (1 - c_A^{(j)}) \log_2 \frac{1 - c_A^{(j)}}{1 - (c_A^{(j)} + c_B^{(j)})/2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

ile verilir ve $w = (w_1, \dots, w_m)$, $\sum_{j=1}^m w_j = 1$ ve $w_j \in [0, 1]$ olacak biçimdeki $j = 1, \dots, m$ için bir ağırlık vektörüdür.

Ayrıca, önerilen ağırlıklı tutarlı çapraz entropi ölçüsünün tanımından WE , (1 – 3) özelliklerini sağlar.

Şimdi Cui ve Ye (2018)'nin çalışmasından motive olarak tutarlı bulanık kümeler için bir bulanık sinüs entropi ölçüsü tanımlanacaktır.

Tanım 4.3 $X \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $j = 1, \dots, m$ için $c_j = \langle (m_A^{(j)}, c_A^{(j)}) \rangle$, $C_A = \{c_1, \dots, c_m\}$ tutarlı bulanık kümesindeki j . tutarlı bulanık eleman olmak üzere C_A tutarlı bulanık kümesinin bir bulanık sinüs entropi ölçüsü

$$S(C_A) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m \left[\sin \left(m_A^{(j)} \pi \right) + \sin \left(c_A^{(j)} \pi \right) \right] \quad (4.6)$$

ile verilir.

Önerme 4.2 Bulanık sinüs entropi ölçüsü S aşağıdaki özellikleri sağlar:

(P₁') Eğer C_A bir gerçek (kesin) küme (bulanık olmayan yani $c_j = \langle (1, 1) \rangle$ veya $c_j = \langle (0, 1) \rangle$ veya $c_j = \langle (1, 0) \rangle$ veya $c_j = \langle (0, 0) \rangle$) ise $S(C_A) = 0$ gerçekleşir.

(P₂') $S(C_A) = 1$ olması için gerek ve yeter şart C_A tutarlı bulanık kümesinin en bulanık küme (yani her $j = 1, \dots, m$ için c_j tutarlı bulanık elemanının $c_j = \langle (0.5, 0.5) \rangle$) olmasıdır.

(P₃') C_A^c kümesi C_A tutarlı bulanık kümesinin tümleyeni olmak üzere $S(C_A) = S(C_A^c)$ sağlanır.

İspat.

(P₁') Bu özelliğin ispatı tanımdan açıktır.

(P₂') $z \in [0, 1]$ için $f(z) = \sin z\pi$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $z = 0.5$ için $f(z) = 1$ global maksimumuna sahip konkav bir fonksiyondur. O halde, $j = 1, \dots, m$ için $m_A^{(j)} = c_A^{(j)} = 0.5$ sağlanır. Tersine, $c_j = \langle (0.5, 0.5) \rangle$ olsun. S fonksiyonunun tanımından $S(C_A) = 1$ elde edilir.

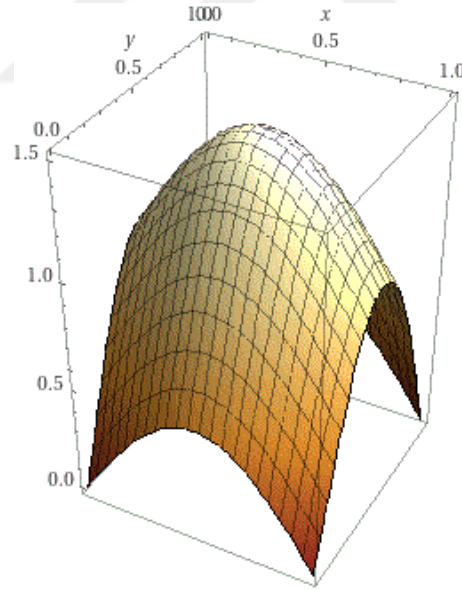
(P₃') C_A tutarlı bulanık kümesindeki $c_j = \langle (m_A^{(j)}, c_A^{(j)}) \rangle$ tutarlı bulanık elemanının tümleyeni $c_j^c = \langle (1 - m_A^{(j)}, c_A^{(j)}) \rangle$ olmak üzere $\sin((1 - m_A^{(j)})\pi) = \sin(m_A^{(j)}\pi)$ özelliğinden dolayı $S(C_A) = S(C_A^c)$ elde edilir. ■

Uyarı 4.1 Önerme 4.2'deki ilk özellikten eğer $c_j = \langle (1, 1) \rangle$ veya $c_j = \langle (0, 1) \rangle$ veya $c_j = \langle (1, 0) \rangle$ veya $c_j = \langle (0, 0) \rangle$ ise tutarlı bulanık kümenin aslında bir kesin küme olduğunu söyleyebiliriz. Fakat $c_j = \langle (1, 0) \rangle$ veya $c_j = \langle (0, 0) \rangle$ olması durumu tutarlı bulanık ortamda anlamlı değildir. Diğer yandan, eğer $j = 1, \dots, m$ için $m_A^{(j)} = c_A^{(j)} = 0.5$ ise A bulanık tutarlı kümesi en bulanık kümedir ve eğer $\sin \left(m_A^{(j)} \pi \right) +$

$\sin \left(c_A^{(j)} \pi \right) \geq \sin \left(m_B^{(j)} \pi \right) + \sin \left(c_B^{(j)} \pi \right)$ sağlanıyorsa A tutarlı bulanık kümesi B tutarlı bulanık kümesinden daha bulanıktır. Şekil 4.1, Önerme 4.2'nin P'_1 and P'_2 maddelerini görsel olarak açıklamaktadır. P'_1 'de $c_j = \langle (1, 0) \rangle$ veya $c_j = \langle (0, 0) \rangle$ olması durumunda teorik olarak $S(C_A) = 0$ sağlanmasına rağmen bu durum fiziksel olarak mümkün olmamaktadır. $c_j = \langle (1, 0) \rangle$ durumunda, ortalaması bir olan bir dizinin sıfır tutarlılık derecesine sahip olması için, dizinin bir sıfır dizisi olması gerekir, bu da dizinin ortalamasının bir olması ile çelişir. Benzer şekilde, $c_j = \langle (0, 0) \rangle$ durumunda, ortalaması sıfır olan bir dizinin sıfır tutarlılık derecesine sahip olması için dizinin terimlerinin sadece birlerden oluşması gerekir, ve bu da dizinin ortalamasının sıfır olması ile çelişir. Ayrıca,

$$\sin \left(m_{\Omega}^{(j)} \pi \right) + \sin \left(c_{\Omega}^{(j)} \pi \right) \geq \sin \left(m_{\Phi}^{(j)} \pi \right) + \sin \left(c_{\Phi}^{(j)} \pi \right)$$

eşitsizlikleri bulanık kümelerin bulanıklık derecelerini belirlemektedir. Bu durum Şekil 4.1'de seviye eğrileri ile gösterilmiştir. Şekilde yüksek seviye eğrileri daha bulanık tutarlı elemanları göstermektedir.



Şekil 4.1 Önerilen bulanık sinüs entropi ölçüsünün görselleştirilmesi

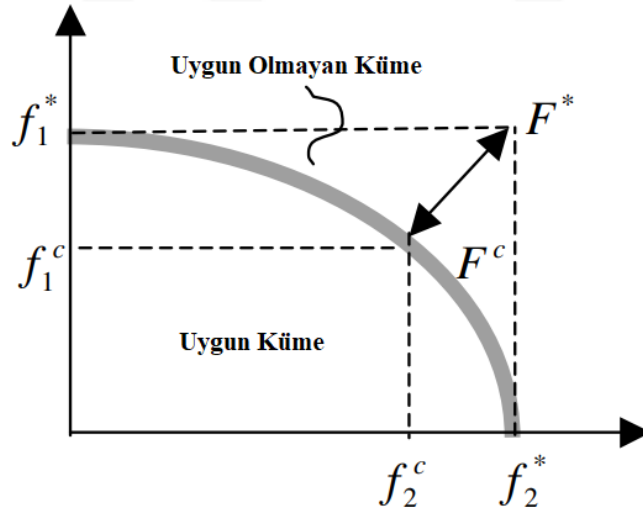
4.1 Klasik VIKOR Metodu

VIKOR metodu 1998 yılında Serafim Opricovic tarafından literatüre kazandırılmış çok kriterli bir optimizasyon ve bir çok kriterli karar verme metodudur (Opricovic 1998).

Çok kriterli karar verme problemlerinde birbiri ile çelişen kriterler dikkate alındığında aynı anda bu kriterleri sağlayan bir çözüm bulunması oldukça güçtür. Bu güçlük VIKOR metodunda uzlaşma (uzlaşık) çözümü ile giderilmeye çalışılmıştır. Bu metodun amacı, ideal çözüme en yakın uzlaşma çözümünü bulmak ve karar verme problemindeki birbirleri ile çelişen kriterleri dikkate alarak alternatifleri sıralamaktır. VIKOR metodu, temeli $A_1, \dots, A_j$ ($j = 1, \dots, m$), tane alternatifin $a_1, \dots, a_i$ ($i = 1, \dots, n$) tane kritere göre değerlendirilmesi sonucu

$$L_{pj} = \sum_{i=1}^n \left[\left(\omega_i \frac{(f_i^* - f_{ij})}{(f_i^* - f_i^-)} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (4.7)$$

ile verilen L_p metriğine dayalı uzaklık temelli bir metottur. Burada, f_{ij} ifadesi j . alternatifin i . kritere göre değerlendirme sonucunu, f_i^* ve f_i^- ifadeleri ise sırasıyla j . alternatifin i . kritere göre en iyi ve en kötü değerlendirme sonuçlarını belirtmektedir. Elde edilen sonuçların sıralanmasında ise sırasıyla $p = 1$ ve $p = \infty$ için elde edilen $L_{1j}(S_j)$ ve $L_{\infty j}(R_j)$ sıralama ölçütleri kullanılmaktadır. Uzlaşma çözümü F^c ve ideal çözüm F^* olmak üzere, uzlaşma çözümü ideal çözüme en yakın çözüm olarak kabul edilmektedir.



Şekil 4.2 Uzlaşma ve ideal çözümler (Opricovic ve Tzeng 2004)

Klasik VIKOR metodunun sıralama algoritmaları aşağıda verilmiştir (Opricovic ve Tzeng 2004) :

Adım 1: Her $i = 1, \dots, n$ için f_i^* en iyi ve f_i^- en kötü değerleri belirlenir. Bu değerler karar verme problemindeki kriterlerin fayda kriteri yada zarar (maliyet)

kriteri olmasına göre değişmektedir. Eğer i . kriter fayda kriteri ise

$$f_i^* = \max_j f_{ij} \text{ ve } f_i^- = \min_j f_{ij} \quad (4.8)$$

ile verilir. Eğer i . kriter maliyet kriteri ise

$$f_i^* = \min_j f_{ij} \text{ ve } f_i^- = \max_j f_{ij} \quad (4.9)$$

şeklindedir.

Adım 2: Her $j = 1, \dots, m$ için S_j ve R_j değerleri hesaplanır. Bu değerler aşağıdaki gibi formülize edilmektedir:

$$S_j = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{(f_i^* - f_{ij})}{(f_i^* - f_i^-)} \quad (4.10)$$

ve

$$R_j = \max_i \omega_i \frac{(f_i^* - f_{ij})}{(f_i^* - f_i^-)}. \quad (4.11)$$

Burada her $i = 1, \dots, n$ için ω_i ifadesi, i . kriterin ağırlığını belirtmektedir. Eşitlik (4.10) ve (4.11) VIKOR metodunun sınır ölçüleri olarak adlandırılır.

Adım 3: Her $j = 1, \dots, m$ için Q_j değerleri hesaplanır. Bu değerler S_j ve R_j değerlerinin ilişkisine bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$Q_j = \gamma \left(\frac{S_j - S^*}{S^- - S^*} \right) + (1 - \gamma) \left(\frac{R_j - R^*}{R^- - R^*} \right) \quad (4.12)$$

Burada her $j = 1, \dots, m$ için $S^- = \max_j S_j$, $S^* = \min_j S_j$, $R^- = \max_j R_j$ ve $R^* = \min_j R_j$ şeklindedir. Burada $\gamma \in [0, 1]$, karar mekanizmasının katsayısı ya da maksimum grup faydasının ağırlığı olarak isimlendirilir. $\gamma > 0.5$ durumu uzlaşmacı çözümün çoğunluk tarafından seçildiğini, $\gamma = 0.5$ durumu fikir birliğini, $\gamma < 0.5$ olması durumu ise vetoyu vermektedir.

Adım 4: Her bir alternatife ait S , R ve Q değerleri küçükten büyüğe artan bir düzende sıralanarak bu alternatiflere ait üç farklı sıralama oluşturulur.

Adım 5: Aşağıdaki iki koşulun sağlanması durumunda Q minimum değerine göre sıralanan en iyi alternatif uzlaşmacı çözüm olarak önerilir. Bu koşullar aşağıdaki şekilde verilmektedir.

1. m toplam alternatif sayısı, $B^{(1)}$ ve $B^{(2)}$ sırasıyla Q değerlendirmesine karşılık gelen en iyi birinci ve ikinci alternatif olmak üzere

$$Q(B^{(2)}) - Q(B^{(1)}) \geq \frac{1}{m-1} \quad (4.13)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ve

2. $B^{(1)}$ alternatifi S ve R sıralamalarına göre de en iyi alternatif ise $B^{(1)}$ bir uzlaşma çözümü olarak önerilir.

Bu iki koşuldan yalnız birinin yada her ikisinin sağlanmaması durumunda uzlaşma çözümü için yeni bir algoritma önerilmiştir. Birinci koşulun sağlanmaması durumunda yani

$$Q(B^{(2)}) - Q(B^{(1)}) < \frac{1}{m-1}, \quad (4.14)$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda maksimum M sayısı için

$$Q(B^{(M)}) - Q(B^{(1)}) < \frac{1}{m-1}, \quad (4.15)$$

eşitsizliği göz önüne alınır ve $B^{(1)}, \dots, B^{(M)}$ alternatifleri uzlaşma çözümleri olarak önerilir. İkinci koşulun sağlanmaması durumunda yani $B^{(1)}$ alternatifinin S ve R sıralamalarına göre en iyi alternatif olmaması durumunda $B^{(1)}$ ve $B^{(2)}$ alternatiflerinin ikisi de uzlaşma çözümleri olarak önerilir.

Literatürde bu metodu diğer karar verme metodları ile karşılaştıran bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin, Opricovic ve Tzeng (2004), VIKOR metodu ile TOPSIS metodunu sırasıyla temel aldıkları L_p ve L_2 metriklerine göre karşılaştırmış ve her iki metodun da bir alternatifin ideal çözüme olan mesafesini hesaplamasına rağmen, VIKOR metodunun karşılıklı tavizler vererek uzlaşmacı bir çözüm önerdiğini, TOPSIS metodunun ise negatif ideal çözüme en uzak ve pozitif ideal çözüme en kısa mesafede bir çözüm önerdiğini belirtmişlerdir. VIKOR metodunda en üst sıralarda yer alan alternatif, ideal çözüme en yakın alternatifken, TOPSIS metodunda yüksek dereceli alternatif, sıralama indeksi açısından en iyisidir ve bu her zaman önerilen çözümün ideal çözüme en yakın olduğu anlamına gelmez. Ayrıca Opricovic ve Tzeng (2007), VIKOR metodunun bir genelleştirmesini TOPSIS,

ELECTRE ve PROMETHEE metotlarıyla karşılaştırmış ve VIKOR metodunun çelişkili ve kıyaslanamaz kriterleri karşılamada üstün olduğunu ortaya koymuştur. Daha sonra, Opricovic (2011) bulanık bir ortamda çok kriterli karar verme problemlerini çözmek için bir alternatifin ideal çözüme uzaklığı ile ilgili bir bulanık VIKOR metodu geliştirmiştir. Ayrıca VIKOR metodu diğer çok kriterli karar verme metotları ile de karşılaştırılmıştır. Örneğin, Zlaugotne vd. (2020) VIKOR, TOPSIS, MULTIMOORA, PROMETHEE, COPRAS metotlarını karşılaştıran bir çalışma sunmuştur. Sonuç olarak, farklı metotlarla elde edilen sonuçları karşılaştırmanın gerçekten objektif olmadığını, çünkü sonuçların benzer olduğunu ancak aynı olmadığını elde etmiştir. Ayrıca, Ceballos vd. (2016) TOPSIS, VIKOR, MULTIMOORA için karşılaştırmalı bir analiz sunmuş ve VIKOR sıralamasının karar mekanizmasının katsayısı olan γ parametresine çok duyarlı olduğu sonucuna varmıştır. Ayrıca Dey vd. (2016) ve Lin vd. (2021), çeşitli sıralama problemlerinde TOPSIS ve VIKOR metotlarının bir karşılaştırmasını sunmuştur.

4.2 Tutarlı Bulanık Kümeler İçin Bir VIKOR Metodu (CF-VIKOR)

Bu bölümde, klasik VIKOR metodu tutarlı bulanık kümeler için tutarlı bulanık VIKOR (CF-VIKOR) metoduna genelleştirilecektir. Ayrıca bu metodun bir çok kriterli karar verme problemine uygulaması ve önerilen metodun duyarlılık analizi verilecektir.

CF-VIKOR metodunun sıralama algoritmaları aşağıda verilmiştir:

Adım 1: Bulanık çoklu kümelerden tutarlı bulanık kümelerin elde edilmesi:

Kabul edelim ki $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ve $B = \{B_1, \dots, B_m\}$ sırasıyla bir çok kriterli karar verme problemindeki kriterlerin kümesi ve alternatiflerin kümesi olsun. Her bir alternatifin bulanık çoklu küme gösterimi her $i = 1, \dots, m$ için

$$B_i = \left\{ \left\langle a_j, (\mu_{B_i}^1(a_j), \dots, \mu_{B_i}^{n_j}(a_j)) \right\rangle : j = 1, \dots, n \right\} \quad (4.16)$$

şeklinde olmak üzere Tanım 3.1 kullanılarak her bir B_i bulanık çoklu bulanık kümesi

$$C_{B_i} = \left\{ \left\langle a_j, (m_{B_i}^{(j)}, c_{B_i}^{(j)}) \right\rangle : j = 1, \dots, n \right\} \quad (4.17)$$

tutarlı bulanık kümesine dönüştürülür.

Adım 2: Karar matrisinin oluşturulması:

Her $i = 1, \dots, m$ ve her $j = 1, \dots, n$ için $b_{ij} = \left\langle a_j, \left(m_{C_{B_i}}^{(j)}, c_{C_{B_i}}^{(j)} \right) \right\rangle$ bir tutarlı bulanık eleman olmak üzere karar matrisi $M = [b_{ij}]_{m \times n}$ ile gösterilir.

Adım 3: Kriter ağırlıklarının belirlenmesi:

Kabul edelim ki her bir $j = 1, \dots, n$ için her a_j kriteri bir tutarlı bulanık küme olarak

$$a_j = \{b_{ij} : i = 1, \dots, m\} \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlansın ve (4.6) eşitliği kullanılarak $e_j := S(a_j)$ değerleri hesaplansın.

Her $j = 1, \dots, n$ için her bir a_j kriterine karşılık gelen bulanık sinüs entropi ağırlıkları

$$w_j = \frac{1 - e_j}{n - \sum_{k=1}^n e_k} \quad (4.19)$$

ile verilir.

Adım 4: En iyi ve en kötü değer seçimi:

Eğer karar kriteri fayda kriteri ise en iyi ve en kötü değer sırasıyla her $i = 1, \dots, m$ için

$$a_j^+ = \left\langle a_j, \left(\max_i \left(m_{C_{B_i}}^{(j)} \right), \max_i \left(c_{C_{B_i}}^{(j)} \right) \right) \right\rangle \quad (4.20)$$

ve

$$a_j^- = \left\langle a_j, \left(\min_i \left(m_{C_{B_i}}^{(j)} \right), \min_i \left(c_{C_{B_i}}^{(j)} \right) \right) \right\rangle \quad (4.21)$$

ile, eğer karar kriteri maliyet kriteri ise en iyi ve en kötü değer sırasıyla her $i = 1, \dots, m$ için

$$a_j^+ = \left\langle a_j, \left(\min_i \left(m_{C_{B_i}}^{(j)} \right), \min_i \left(c_{C_{B_i}}^{(j)} \right) \right) \right\rangle \quad (4.22)$$

ve

$$a_j^- = \left\langle a_j, \left(\max_i \left(m_{C_{B_i}}^{(j)} \right), \max_i \left(c_{C_{B_i}}^{(j)} \right) \right) \right\rangle \quad (4.23)$$

ile verilir.

Adım 5: Her $i = 1, \dots, m$ için S_i and R_i değerlerinin hesaplanması:

E , Tanım 4.1’de tanımlanan tutarlı bulanık kümeler arasındaki bulanık çapraz entropi ölçüsü olmak üzere.

$$S_i = \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\frac{E(x_j^+, x_{ij})}{E(x_j^+, x_j^-)} \right), \quad (4.24)$$

ve

$$R_i = \max_j \omega_j \left(\frac{E(x_j^+, x_{ij})}{E(x_j^+, x_j^-)} \right), \quad (4.25)$$

şeklindedir.

Adım 6: Q değerlerinin Eşitlik (4.12) ile hesaplanması ve elde edilen S , R ve Q değerlerinin küçükten büyüğe sıralanması.

Adım 7: Klasik VIKOR metodunda verilen Adım 5 yardımıyla uzlaşma çözümünün elde edilmesi.

4.3 CF-VIKOR Uygulaması

Bu bölümde bir çok kriterli karar verme problemi CF-VIKOR metodu kullanılarak çözülecektir. Aşağıdaki MCDM problemi, nütrosifik çoklu ortamda (Ye vd. 2020) tarafından incelenmiştir. Bu bölümde verilen örnek, nütrosifik ortamda verilen örneğin yalnızca doğruluk üyelik dizileri kullanılarak elde edilmiştir.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log_2 x = 0$ olduğundan $0 \log_2 0 := 0$ kabul edilecektir.

Örnek 4.1 Bir müşteri

$$A = \{a_1 (\text{yakıt}), a_2 (\text{fiyat}), a_3 (\text{konfor}), a_4 (\text{güvenlik})\} \quad (4.26)$$

kriter kümesi ile verilen kriterlere göre bir araba satın almak istiyor. $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ kriter kümesine uygun olarak belirlenen dört farklı arabanın olduğu alternatiflerin kümesi olmak üzere her bir alternatifin bulanık çoklu küme gösterimi

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\langle a_1, (0.5, 0.7) \rangle, \langle a_2, 0.4 \rangle, \langle a_3, (0.7, 0.8) \rangle, \langle a_4, (0.1, 0.5) \rangle\}, \\ B_2 &= \{\langle a_1, (0.7, 0.9) \rangle, \langle a_2, 0.7 \rangle, \langle a_3, 0.9 \rangle, \langle a_4, (0.5, 0.5) \rangle\}, \\ B_3 &= \{\langle a_1, (0.3, 0.6) \rangle, \langle a_2, 0.2 \rangle, \langle a_3, (0.6, 0.9) \rangle, \langle a_4, (0.4, 0.7) \rangle\}, \\ B_4 &= \{\langle a_1, (0.8, 0.9) \rangle, \langle a_2, 0.3 \rangle, \langle a_3, (0.1, 0.5) \rangle, \langle a_4, (0.4, 0.4) \rangle\} \end{aligned}$$

ile verilsin.

Adım 1: Her $i = 1, 2, 3, 4$ için her B_i bulanık çoklu kümesine karşılık gelen C_{B_i} tutarlı bulanık kümeleri

$$C_{B_1} = \{ \langle a_1, (0.6, 0.8586) \rangle, \langle a_2, (0.4, 1) \rangle, \langle a_3, (0.75, 0.9293) \rangle, \langle a_4, (0.3, 0.7172) \rangle \},$$

$$C_{B_2} = \{ \langle a_1, (0.8, 0.8586) \rangle, \langle a_2, (0.7, 1) \rangle, \langle a_3, (0.9, 1) \rangle, \langle a_4, (0.5, 1) \rangle \},$$

$$C_{B_3} = \{ \langle a_1, (0.45, 0.7879) \rangle, \langle a_2, (0.2, 1) \rangle, \langle a_3, (0.75, 0.7879) \rangle, \langle a_4, (0.55, 0.7879) \rangle \},$$

$$C_{B_4} = \{ \langle a_1, (0.85, 0.9293) \rangle, \langle a_2, (0.3, 1) \rangle, \langle a_3, (0.3, 0.7172) \rangle, \langle a_4, (0.4, 1) \rangle \}$$

olarak elde edilir.

Adım 2: Elde edilen tutarlı bulanık kümelere ilişkin karar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} \langle 0.6, 0.8586 \rangle & \langle 0.4, 1 \rangle & \langle 0.75, 0.9293 \rangle & \langle 0.3, 0.7172 \rangle \\ \langle 0.8, 0.8586 \rangle & \langle 0.7, 1 \rangle & \langle 0.9, 1 \rangle & \langle 0.5, 1 \rangle \\ \langle 0.45, 0.7879 \rangle & \langle 0.2, 1 \rangle & \langle 0.75, 0.7879 \rangle & \langle 0.55, 0.7879 \rangle \\ \langle 0.85, 0.9293 \rangle & \langle 0.3, 1 \rangle & \langle 0.3, 0.7172 \rangle & \langle 0.4, 1 \rangle \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilir.

Adım 3: Her $j = 1, 2, 3, 4$ için bir a_j kriterine karşılık gelen

$$W = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = (0.2233, 0.3256, 0.2590, 0.1921). \quad (4.28)$$

ağırlıkları Eşitlik (4.19) yardımıyla hesaplanmıştır.

Adım 4: Birinci ve ikinci kriterler maliyet kriterleri, üçüncü ve dördüncü kriterler fayda kriterleri olmak üzere her bir $a_j (j = 1, 2, 3, 4)$ için kriterlerin en iyi ve en kötü değerleri sırasıyla

$$a_1^+ = \langle 0.45, 0.7879 \rangle, \quad a_1^- = \langle 0.85, 0.9293 \rangle$$

$$a_2^+ = \langle 0.2, 1 \rangle, \quad a_2^- = \langle 0.7, 1 \rangle$$

$$a_3^+ = \langle 0.9, 1 \rangle, \quad a_3^- = \langle 0.3, 0.7172 \rangle$$

$$a_4^+ = \langle 0.55, 1 \rangle, \quad a_4^- = \langle 0.3, 0.7172 \rangle$$

olarak elde edilir.

Adım 5 ve 6: Her bir alternatif için grup fayda değeri S , bireysel pişmanlık değeri R ve $\gamma = 0.5$ için uzlaşma değeri Q hesaplanır ve elde edilen değerler artan düzende sıralanır. Bu Çizelge 4.1’de sunulmuştur.

Çizelge 4.1 Tüm alternatifler için S , R ve Q değerleri

	B_1	B_2	B_3	B_4	Sıralamalar
S_i	0.3267	0.4742	0.2090	0.5106	$S_3 \succeq S_1 \succeq S_2 \succeq S_4$
R_i	0.1921	0.3256	0.1170	0.2590	$R_3 \succeq R_1 \succeq R_4 \succeq R_2$
$(Q_i)_{\gamma=0.5}$	0.3750	0.9396	0	0.8403	$Q_3 \succeq Q_1 \succeq Q_4 \succeq Q_2$

Adım 7: Çizelge 4.1’den, $Q_3 \succeq Q_1 \succeq Q_4 \succeq Q_2$ olduğu görülebilir, yani B_3 alternatifi en iyi alternatiftir. Ayrıca,

$$Q(B^{(2)}) - Q(B^{(1)}) = 0.3750 \geq \frac{1}{(4 - 1)}$$

olur ve dolayısıyla B_3 alternatifi S_i ve R_i açısından en iyi sıralanmış alternatiftir ve VIKOR metodunun birinci ve ikinci koşulları sağlanır. Bu, B_3 ’ün incelenmekte olan problemin istikrarlı ve avantajlı benzersiz uzlaşmacı çözümü olduğunu gösterir.

4.3.1 CF-VIKOR metodunun duyarlılık analizi

Bu alt bölümde, γ karar parametresinin optimal (en iyi) çözüm üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Duyarlılık analizi, karar verme yaklaşımının sonuca nasıl etki edeceğini gösterir ve önerilen metodun sürdürülebilirliğini değerlendirmek için yapılır. Çizelge 4.2, Örnek 4.1’in duyarlılık analizini göstermektedir.

Çizelge 4.2’de iki durum vardır. Eğer $0 \leq \gamma \leq 0.7$ ise, alternatiflerin sıralaması $B_3 \succeq B_1 \succeq B_4 \succeq B_2$ ve eğer $0.8 \leq \gamma \leq 1$ ise, sıralama sırası $B_3 \succeq B_1 \succeq B_2 \succeq B_4$ şeklindedir. Parametrelerin değişmesinin farklı sıralamalara neden olduğu görülmektedir ve bu beklenen bir durumdur. Ceballos (2016) VIKOR metodunun sonuçlarının parametreden etkilendiği kanıtlanmıştır. Bu örnekte sıralama sonuçları γ tarafından etkilense de, B_3 her zaman en iyi alternatif olarak ve B_1 en iyi ikinci alternatif olarak sıralamalarını korumuştur. Bu gibi durumlarda, genellikle $\gamma = 0,5$ değerinin sonuçları dikkate alınmaktadır. Bu nedenle, duyarlılık analizi, metodun ulaştığı

Çizelge 4.2 Uzlaşma çözümünün kararlılığı

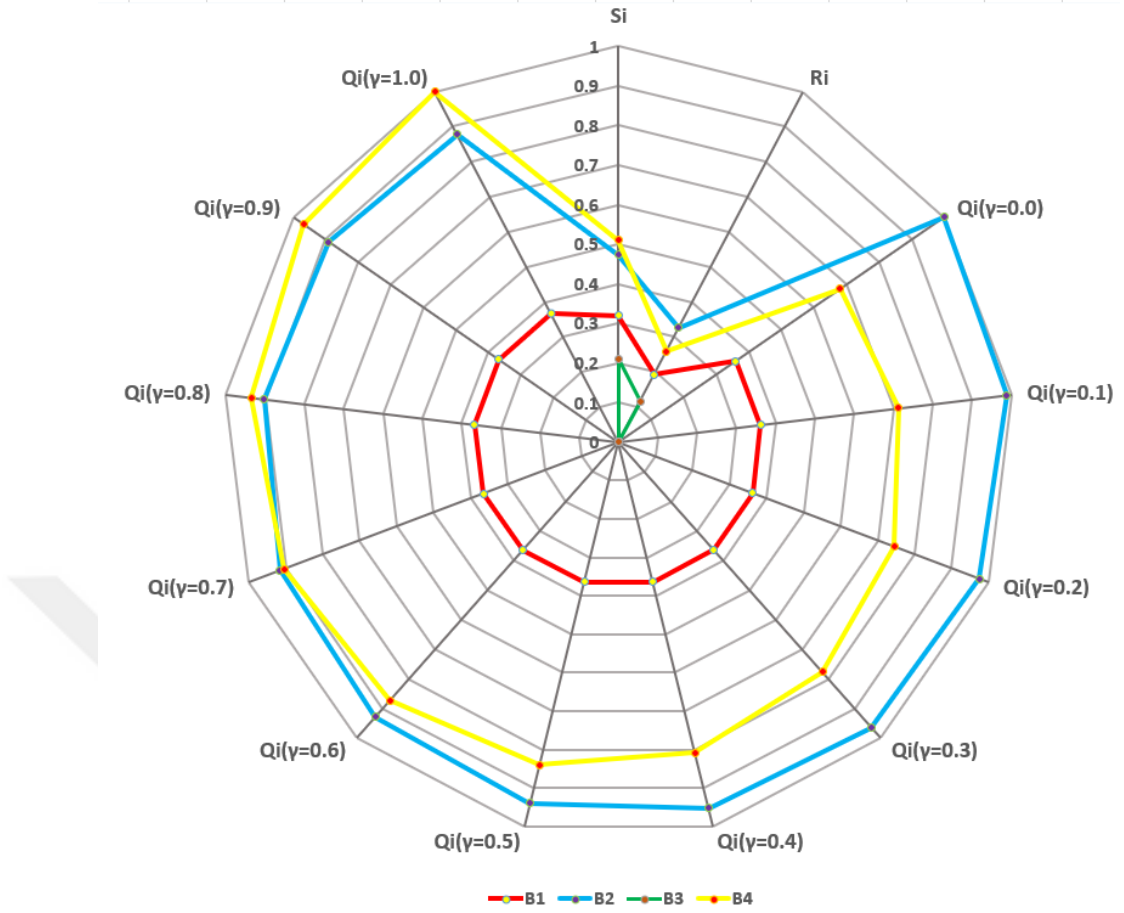
γ	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Sıralamalar	Uzlaşma Çözümü
0.0	0.3598	1.0000	0.0000	0.6806	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.1	0.3628	0.9879	0.0000	0.7125	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.2	0.3658	0.9758	0.0000	0.7444	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.3	0.3689	0.9638	0.0000	0.7764	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.4	0.3719	0.9517	0.0000	0.8083	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.5	0.3750	0.9396	0.0000	0.8403	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.6	0.3780	0.9276	0.0000	0.8722	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.7	0.3810	0.9155	0.0000	0.9041	$B_3 \succ B_1 \succ B_4 \succ B_2$	B_3
0.8	0.3841	0.9034	0.0000	0.9361	$B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_4$	B_3
0.9	0.3871	0.8914	0.0000	0.9680	$B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_4$	B_3
1.0	0.3902	0.8793	0.0000	1.0000	$B_3 \succ B_1 \succ B_2 \succ B_4$	B_3

sonucun kararlı olduğunu göstermektedir. Şekil 4.3, γ parametresi altındaki dört alternatifin karşılaştırma değerlerini göstermektedir.

4.3.2 CF-VIKOR metodunun geçerlilik analizi

Alternatifler arasındaki ilişki, kriterlerin tutarlılığı ve karar vericiler arasındaki tarafsız değerlendirmelerin tümü çok kriterli karar verme metodunu etkiler. Bu nedenle, Wang ve Triantaphyllou (Wang ve Triantaphyllou 2008) çok kriterli karar verme problemlerini çözmek için önerilen metotların geçerliliğini göstermek amacıyla üç test koşulu önermiştir. Bu koşullar aşağıda verilmiştir:

1. Her bir kriterin önem ağırlıkları değiştirilmeden optimal olmayan herhangi bir alternatif kendisinden daha kötü bir karar verici değerlendirmesine sahip olan alternatif ile değiştirildiğinde, en iyi alternatif değişmez.
2. Etkili bir çok kriterli karar verme metodu, geçişme özelliğini sağlamalıdır.
3. Çok kriterli karar verme problemini daha küçük alt problemlere böldüğümüzde elde edilen alternatiflerin sıralaması, orijinal problemin alternatif sıralaması ile



Şekil 4.3 Alternatiflerin duyarlılık analizi

örtüşmelidir.

Önerilen CF-VIKOR metodunun geçerliliği aşağıdaki gibi adım adım incelenmiştir:

1. Birinci koşulu uygulamak için öncelikle optimal olmayan alternatiflerden biri olan B_2 alternatifi seçilmiş ve daha sonra B_2 alternatifi keyfi olarak daha kötü bir karar verici değerlendirmesine sahip olan

$$\hat{B}_2 = \{ \langle a_1, (0.9, 0.9) \rangle, \langle a_2, 0.8 \rangle, \langle a_3, 0.6 \rangle, \langle a_4, (0.2, 0.2) \rangle \}.$$

alternatifi ile yer değiştirilmiştir. $\hat{B}_2$ alternatifi belirlenirken kriterlerin fayda ve maliyet kriterleri olması durumu göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca, kriterlerin aitlik dereceleri B_2 'dan keyfi olarak daha kötü bir değer olarak belirlenmiştir ve $\gamma = 0,5$ için en iyi alternatifin değişip değişmediğini incelenmiştir. Tutarlı bulanık kümeler için önerilen CF-VIKOR metodu yeni alternatif kümesine uygulandığında $B_3 \succeq B_1 \succeq B_4 \succeq \hat{B}_2$ sıralaması elde edilmiş ve optimal alternatif B_3 'ün sırala-

madaki yerini koruduğu tespit edilmiştir. Böylelikle geçerlilik analizinin ilk koşulu sağlanmıştır.

2. – 3. Çok kriterli karar verme problemi $\{B_1, B_2, B_3\}$, $\{B_2, B_3, B_4\}$, $\{B_3, B_4, B_1\}$ ve $\{B_4, B_1, B_2\}$ şeklinde dört farklı alt problemlere dönüştürülmüş ve CF-VIKOR metodu alt problemlerin hepsine ayrı ayrı uygulanmıştır. Her bir alt problemin sıralama sonucu $\gamma = 0,5$ için sırasıyla $B_3 \succeq B_1 \succeq B_2$, $B_3 \succeq B_4 \succeq B_2$, $B_3 \succeq B_1 \succeq B_4$ and $B_1 \succeq B_4 \succeq B_2$ olarak elde edilmiştir. Burada, genel sıralamanın $B_3 \succeq B_1 \succeq B_4 \succeq B_2$ şeklinde olduğu görülebilir. Dolayısıyla sıralamalar arasındaki geçişme özelliği sağlanmakta ve ayrıca elde edilen sıralamanın orjinal problemin alternatif sıralaması ile örtüşmektedir. Böylece geçerlilik analizinin ikinci ve üçüncü koşulları sağlanmıştır.

4.3.3 CF-VIKOR metodunun karşılaştırma analizi

Bu bölümde, Örnek 4.1'in farklı bulanık ortamlarda farklı metotlar yardımıyla çözülmesi sonucunda elde edilen sonuçların bir karşılaştırılması yapılmıştır.

Örnek 4.1'de verilen çok kriterli karar verme problemini çözmek için literatürde farklı bulanık ortamlar altında birkaç farklımetot geliştirilmiştir. Aynı örnek ilk olarak Deli vd. (2015) tarafından bipolar nütrosifik kümeler için ağırlıklı ortalama ve ağırlıklı geometrik operatörler kullanılarak, ardından Fan vd. (2018) tarafından tek değerli nütrosifik çoklu küme ortamında bir kosinüs benzerlik ölçüsü yardımıyla çözülmüştür. Son zamanlarda, Ye vd. (2020) aynı örneği nütrosifik çoklu ortamda bir korelasyon katsayısı yardımıyla çözmüşlerdir.

Örnek 4.1 için farklı metotlarla elde edilen sonuçlar Çizelge 4.3'te verilmiştir. Çizelge 4.3'deki sonuçlar, önerilen metotlar ve kriterlerin ağırlıkları değiştikçe en iyi seçimin değiştiğini göstermektedir. En iyi seçimi belirlerken, CF-VIKOR metodunda en küçük değerlendirme sonucunu alınırken, diğer metotlarda en büyük değerlendirme sonucunu alınmıştır.

Tutarlı bulanık küme kavramı yeni bir kavram olduğu için literatürde bu kümeler için yapılmış çok fazla örnek bulunmamaktadır. Ayrıca CF-VIKOR yaklaşımı literatürde tutarlı bulanık kümeler için önerilmiş ilk metottur ve bu sebeple (Türkarlan vd. 2021) de önerilen korelasyon katsayısı ve kosinüs benzerlik ölçüsünü,

benzerlik ölçüsü kavramının uzaklık ölçüsü kavramının tümleyeni olması özelliğini kullanarak her $j = 1, \dots, n$ için

$$D(A, B)_j = 1 - \frac{m_A^{(j)} m_B^{(j)} + c_A^{(j)} c_B^{(j)}}{\sqrt{\left(m_A^{(j)}\right)^2 + \left(c_A^{(j)}\right)^2} \sqrt{\left(m_B^{(j)}\right)^2 + \left(c_B^{(j)}\right)^2}} \quad (4.29)$$

uzaklık ölçüsü elde edilmiş ve bu ölçü Örnek 4.1 de elde edilen sinüs entropi ağırlıkları ile birlikte CF-VIKOR metodunun 5. adımına entegre edilerek $Q_3 = 0 \succeq Q_1 = 0.0974 \succeq Q_4 = 0.7511 \succeq Q_2 = 0.8582$ sıralaması elde edilmiştir. Böylelikle optimal çözümün hem B_3 hemde B_1 olduğu görülmüştür. Böylece önerilen metotla literatüre yeni bir değerlendirme metodu kazandırılmıştır.

Çizelge 4.3 Farklı metotların karşılaştırılması

Metot	Ağırlık vektörleri	Sonuçlar				En iyi Seçim
		B_1	B_2	B_3	B_4	
Korelasyon katsayıları $S_{w_{2,1}}, S_{w_{2,2}}, S_{w_{2,3}}$ (Ye vd. 2020)	(0.5, 0.25, 0.125, 0.125)	0.9586	0.8485	0.9138	0.8881	B_1
	(0.35, 0.25, 0.25, 0.15)	0.9412	0.8509	0.9229	0.9179	B_1
	(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)	0.9349	0.8505	0.9281	0.9148	B_1
Kosinüs benzerlik ölçüsü ρ_w (Fan vd. 2018)	(0.5, 0.25, 0.125, 0.125)	0.9535	0.9511	0.9813	0.9616	B_3
Metot	Ağırlık Vektörü	Sonuçlar				En İyi Seçim
		B_1	B_2	B_3	B_4	
Ortalama Operatörü $\tilde{s}$ (Deli vd. 2015)	(0.5, 0.25, 0.125, 0.125)	0.50	0.52	0.56	0.54	B_3
Metot	Sinüs Entropi Ağırlık Vektörü	Sonuçlar				En İyi Seçim
		B_1	B_2	B_3	B_4	
CF-VIKOR	(0.2233, 0.3256, 0.2590, 0.1921)	0.3750	0.9396	0	0.8403	B_3

4.4 CF-VIKOR Metodunun Tutarlılık Analizi

Korelasyon, reel değerli iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin ilişkinin gücü ve yönünü belirleyen istatistiksel bir kavramdır. Bir korelasyon katsayısının değeri -1 ile 1 arasında değişebilir; '-1' güçlü bir negatif ilişkiyi, '0' ilişki olmadığını ve '1' önemli ölçüde pozitif bir ilişkiyi gösterir. Spearman ve Kendall korelasyon katsayıları, sıralanmış verilerin iki sütunu arasındaki ilişkiyi ölçer. Kendall (parametrik olmayan) ve Spearman (parametrik olmayan) sıra korelasyon katsayısı, verilerin sıralarına dayalı olarak istatistiksel ilişkileri değerlendirir.

4.4.1 Spearman sıra korelasyon katsayısı ile tutarlılık analizi

Bu alt bölümde, Spearman sıra korelasyon katsayısı (Spearman 1987) kullanılarak Örnek 4.1'in sıralama tutarlılığı değerlendirilmiştir. Spearman sıra korelasyon katsayısı

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n d_i^2 \quad (4.30)$$

olmak üzere n sonuçların sayısını ve d_i sonuçların sıralamaları arasındaki farkı göstermektedir.

	Sw2,1	Sw2,2	Sw2,3	pw	$\tilde{s}$
CF-VIKOR (Q_i) _{y=0,5}	0.8	0.8	0.8	0.8	0.4

Şekil 4.4 Örnek 4.1 için Spearman sıra korelasyon katsayısı

Spearman sıra korelasyon katsayısı testi sonuçları Şekil 4.4'de ısı çizelgesi ile verilmiştir. Elde edilen değerler, $\tilde{s}$ sonucu dışında 0.71 değerinden büyük olduğu için yüksek geçerlilik aralığı olarak kabul edilir. Bu farklılığın nedeni, Şekil 4.4'de verilen diğer metotlardan farklı olarak Deli vd. (2015) tarafından önerilen metodun benzerlik ya da uzaklık temelli bir metot olmamasından kaynaklanmış olabilir. Ancak, $\tilde{s}$ için elde edilen sonuç negatif olmamakla birlikte 0.71'den çok uzak bir değer değildir. Bu nedenle değerler, sonuçların gücünü istatistiksel olarak desteklemektedir.

4.4.2 Kendall sıra korelasyon katsayısı ile tutarlılık analizi

Bu alt bölümde, Kendall sıra korelasyon katsayısı (Kendall 1970) kullanılarak Örnek 4.1'in sıralama tutarlılığı değerlendirilmiştir. Kendall sıra korelasyon katsayısı

$$\tau =: \frac{C - D}{C + D}, \quad (4.31)$$

şeklindedir. Burada C uyumlu çiftlerin sayısı olmak üzere

$$C = \{(i, j) : x_i < x_j \text{ ve } y_i < y_j\} \quad (4.32)$$

ile ve D uyumsuz çiftlerin sayısı olmak üzere

$$D = \{(i, j) : x_i < x_j \text{ ve } y_i > y_j\} \quad (4.33)$$

ile verilmektedir ve x_i, y_i her $i = 1, \dots, j, \dots, n$ için iki farklı metodun değerlendirme sonuçlarıdır. Test sonuçları Şekil 4.5'de gösterilmektedir.

	Sw2,1	Sw2,2	Sw2,3	pw	$\tilde{s}$
CF-VIKOR (Q_i) _{y=0,5}	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667	0.3333

Şekil 4.5 Örnek 4.1 için Kendall sıra korelasyon katsayısı

Şekil 4.5'te $\tilde{s}$ 'nin sonuçları dışında CF-VIKOR metodu ve diğer metotların sonuçlarının % 66 oranında birbiriyle tutarlı olduğunu göstermektedir. $\tilde{s}$ sonuçlarındaki farklılığın nedeninin Spearman sıra korelasyon katsayısındaki nedenler ile aynı olduğu düşünülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tutarlı bulanık küme kavramı, ortalama ve standart sapma değerlerine dayalı olarak bulanık çoklu kümelerde bilginin dizinin uzunluğuna bağımlılığını azaltır ve bulanık çoklu kümelerin aitlik dizisinin taşıdığı bilgiyi daha kompakt ve hibrit bir biçimde sunar. Ayrıca, bir bulanık çoklu kümedeki üyelik dizilerinin standart sapması yardımıyla oluşturulan tutarlılık derecesinin yanı sıra üyelik dizilerinin ortalaması ile istatistiksel bilgileri içerir ve böylece karar verme probleminin anlaşılmasını kolaylaştırır. Aslında tutarlı bulanık kümelerin altında yatan temel ilke bir çeşit bulanık veri bilimi yapmaktır. Bu amaçla, bu tezde tutarlı bulanık kümeler arasında korelasyon katsayısı, kosinüs benzerlik ölçüsü, çapraz entropi ve sinüs entropi kavramları tanımlanmıştır. Önerilen korelasyon katsayısı ve kosinüs benzerlik ölçüsü, çok kriterli karar verme problemlerindeki alternatifler için yararlı bir sıralama metodu sağlar ve bu kavramlar bulanık çoklu küme ortamında çok periyotlu tıbbi teşhis ve çok kriterli grup karar verme problemleri için yararlı matematiksel araçlardır. Tutarlı bulanık kümeler yardımıyla bu tezde geliştirilen tıbbi tanı yaklaşımı, yalnızca karar verme güvenilirliğini artırmakla kalmaz, aynı zamanda bulanık çoklu ortamdaki çok periyotlu tıbbi teşhis sorunları için yeni ve etkili bir yol sağlar.

Bilgi teorisinin en önemli kavramlarından olan entropi kavramı, bir rastgele değişkenin değerinde veya rastgele bir sürecin sonucunda yer alan belirsizliğin miktarını ölçer ve en önemli entropi türlerinden biri olan Shannon entropisi (Shannon 1948) bilgi analizinde rastgele dağılmış verilerdeki belirsizliği ölçmek için kullanılır. Bu nedenle, bu kavram bulanık küme teorisi ile yakından ilgilidir. Bulanık çoklu kümelerde dizilerin her bir ögesi tek bir bilgiye karşılık gelir ve dizilerin uzunluğuna bağlı olarak her dizinin verdiği bilgi miktarında bir belirsizlik vardır. Bu sebeple bu tezde dizi uzunluğuna bağımlılığı azaltan tutarlı bulanık kümeler için çapraz entropi ve sinüs entropi kavramları önerilmiş ve bu kullanışlı iki kavram VIKOR metoduna entegre edilerek bir çok kriterli karar verme problemi incelen-

miştır. Böylece geliştirilen CF-VIKOR yaklaşımı ile karar vericilere yeni bir karar verme tekniği sunulmuştur.

Yapılan bu tezden yola çıkılarak, ortalama ve tutarlılık derecelerinden başka hangi istatistiksel araçlar kullanılarak tutarlı bulanık kümelerin bir genelleştirilmesinin yapılabilceği ve bu yeni genelleştirme için hangi kümeleme operatörleri tanımlanıp karar verme metotlarına entegre edilebileceği yeni bir araştırma konusu olarak düşünülebilir.



KAYNAKLAR

- Al-sharhan, S., Karray, F., Gueaieb, W., Basir, O., 2001. *Fuzzy entropy: a brief survey*, In 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, (Cat. No.01CH37297), 2, 1135-1139.
- Atanassov, K., 1986. *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96.
- Atanassov, K., Sotirov, S., Pencheva, T., 2023. *Intuitionistic Fuzzy Deep Neural Network*, Mathematics, 11, 716. doi: [org/10.3390/math11030716](https://doi.org/10.3390/math11030716).
- Ceballos, B., Lamata, M. T., Pelta, D.A. 2016. *A comparative analysis of multi-criteria decision-making methods*, Progress in Artificial Intelligence, 5, 315-32.
- Cui, W., Ye, J., 2018a. *Improved symmetry measures of simplified neutrosophic sets and their decision-making method based on a sine entropy weight model*, Symmetry, 10, 225-236.
- Deli, I., Ali, M., Smarandache, F., 2015. *Bipolar neutrosophic sets and their application based on multi-criteria decision making problems*. In Proceedings of the International Conference on Advanced Mechatronic Systems, Beijing, China, 5 October 2015, pp. 249–254.
- Dey, B., Bairagi, B., Sarkar, B., Sanyal, S.K., 2016. *Multi objective performance analysis: a novel multi-criteria decision making approach for a supply chain*, Computers & Industrial Engineering, 94, 105-124.
- El-Azab, M.S., Shokry, M., Abo khadra, R.A., 2017. *Correlation measure for fuzzy multisets*, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 25, 263-267.
- Fan, C.X., Fan, E., Ye, J., 2018. *The cosine measure of single-valued neutrosophic multi sets for multiple attribute decision-making*, Symmetry, 10, 154.
- Garg, H., Kaur, G., 2020. *A robust correlation coefficient for probabilistic dual hesitant fuzzy sets and its applications*, Neural Comput and Applic. 32, 8847–8866.
- Jiang, H., Zhan, J., Chen, D., 2021. *PROMETHEE II method based on variable precision fuzzy rough sets with fuzzy neighborhoods*, Artificial Intelligence Review, 54, 1281-1319.
- Kendall, M. G., 1970. *Rank correlation methods*. Fourth ed., Charles Griffin and Co., London.
- Khan, M. J., Kumam, W., Alresidi, N. A., 2022. *Divergence measures for circular intuitionistic fuzzy sets and their applications*, Engineering Applications of Artificial Intelligence, 116, 1-12.
- Kullback, S., Leibler, R. A., 1951. *On information and sufficiency*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 4, 99–111.
- Kullback, S., 1959. *Information Theory and Statistics*, Wiley, New York.

- Kumar, K., Garg, H., 2018. *Connection number of set pair analysis based TOPSIS method on intuitionistic fuzzy sets and their application to decision making*, Applied Intelligence, 48, 2112-2119.
- Lin, J., 1991. *Divergence measures based on Shannon entropy*, IEEE Transactions on Information Theory, 37, 145-151.
- Lin, M., Chen, Z., Xu, Z., Gou, X., Herrera, F., 2021. *Score function based on concentration degree for probabilistic linguistic term sets: An application to TOPSIS and VIKOR*, Information Sciences, 551, 270-290.
- Miyamoto, S., 2000. *Fuzzy Multisets and Their Generalizations*, in: Calude, C.S., Păun, G., Rozenberg, G., Salomaa, A. (eds) Multiset Processing. WMC 2000. Lecture Notes in Computer Science, vol 2235. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Olgun, M., Türkarslan, E., Ünver, M., Ye, J., 2021. *A Cosine Similarity Measure Based on the Choquet Integral for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Applications to Pattern Recognition*, Informatica, 32, 849-864.
- Olgun, M., Türkarslan, E., Ünver, M., Ye, J., 2021. *2-Additive Choquet Similarity Measures For Multi-Period Medical Diagnosis in Single-Valued Neutrosophic Set Setting*, Neutrosophic Sets and Systems, 45, 8-25.
- Opricovic, S., 1998. *Multicriteria optimization of civil engineering systems*, Fac. Civ. Q8 Eng. Belgrade, 2, 5-21.
- Opricovic, S., Tzeng, G. H., 2004. *Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS*, European Journal of Operational Research, 156, 445-455.
- Opricovic, S., Tzeng, G. H., 2007. *Extended VIKOR Method in Comparison with Outranking Methods*, European Journal of Operational Research, 178, 514-529.
- Opricovic, S., 2011. *Fuzzy VIKOR with an application to water resources planning*, Expert Systems with Applications, 38, 12983-12990.
- Pramanik, S., Dey, P. P., Smarandache, F., Ye, J., 2018. *Cross Entropy Measures of Bipolar and Interval Bipolar Neutrosophic Sets and Their Application for Multi-Attribute Decision-Making*, Axioms, 7, 21.
- Rani, P., Mishra, A. R., 2021. *Fermatean fuzzy Einstein aggregation operators-based MULTIMOORA method for electric vehicle charging station selection*, Expert Systems with Application, 182, 1-23.
- Saraji, M.K., Streimikiene, D., Kyriakopoulos, G. L., 2021. *Fermatean Fuzzy CRITIC-COPRAS Method for Evaluating the Challenges to Industry 4.0 Adoption for a Sustainable Digital Transformation*, Sustainability, 13, 9577-9596.

- Shang, X. G., Jiang, W. S., 1997. *A note on fuzzy information measures*, Pattern Recognition Letters, 18, 425–432.
- Shannon, C., 1948. *A mathematical theory of communication*, Bell Labs Technical Journal, 27, 379–423.
- Shannon, C., Weaver, W., 1949. *The mathematical theory of communication*, Urbana: University of Illinois Press.
- Spearman, C., 1987. *The proof and measurement of association between two things*, The American journal of psychology, 100, 441–471.
- Torra, V., 2010. *Hesitant Fuzzy Sets*, International Journal of Intelligent Systems, 25, 529–539.
- Türkarslan, E., Ye, J., Ünver, M. and Olgun, M., 2021. *Consistency Fuzzy Sets and a Cosine Similarity Measure in Fuzzy Multiset Setting and Application to Medical Diagnosis*, Mathematical Problems in Engineering, Article ID: 9975983.
- Ünver, M., Olgun, M., Garg, H., 2022. *An information measure based extended VIKOR method in intuitionistic fuzzy valued neutrosophic value setting for multi-criteria group decision making*, Scientia Iranica, doi: 10.24200/SCI.2022.60039.6562.
- Ünver, M., Türkarslan, E., Çelik, N., Olgun, M., Ye, J., 2022. *Intuitionistic fuzzy-valued neutrosophic multi-sets and numerical applications to classification*, Complex & Intelligent Systems, 8, 1703–1721.
- Wang, X., Triantaphyllou, E., 2008. *Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods*, Omega, 36, 45–63.
- Xia, M. M., Xu, Z. S., 2011. *Hesitant fuzzy information aggregation in decision making*, Int J Approximate Reasoning, 52, 395–407.
- Yager, R. R., 1986. *On the theory of bags*, Int. J. Gen. Syst. 13, 23–37.
- Yager, R.R., 2013. *Pythagorean fuzzy subsetss*, 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS), Edmonton, AB, Canada, 57–61.
- Ye, J., 2011. *Cosine similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and their applications*, Mathematical and Computer Modelling, 53, 91–97.
- Ye, J., Fu, J., 2015. *Multi-period medical diagnosis method using a single valued neutrosophic similarity measure based on tangent function*, Comput. Methods Programs Biomed. 123, 142–149.
- Ye, J., 2015. *Improved Cross Entropy Measures of Single Valued Neutrosophic Sets and Interval Neutrosophic Sets and Their Multicriteria Decision Making Methods*, Cybernetics and Information Technologies, 15, 13–26.

- Ye, J., Song, J., Du, S., 2020. *Correlation Coefficients of Consistency Neutrosophic Sets Regarding Neutrosophic Multi-valued Sets and Their Multi-attribute Decision-Making Method*, International Journal of Fuzzy Systems, DOI: 10.1007/s40815-020-00983-x.
- Yue, Z. L., Yue, C., Peng, X. H., Wu, W., 2023. *VIKOR-based group decision-making method for software quality assessment*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 20, 53-70.
- Zadeh, L. A., 1965. *Fuzzy sets*, Information and control. 8, 338-353.
- Zadeh, L.A., 1968. *Probability measures of fuzzy events*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 23, 421-427.
- Zlaugotne, B., Zihare, L., Balode, L., Kalnbalkite, A., Khabdullin, A., Blumberga, D., 2020. *Multi-Criteria Decision Analysis Methods Comparison*, Environmental and Climate Technologie, 24, 454–471.