

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ERİYEBİLİR MODÜLLER

Işıl BAYDAR AVDAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2026

Her hakkı saklıdır

## ÖZET

Doktora Tezi

### ERİYEİLİR MODÜLLER

Işıl BAYDAR AVDAN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı ve motivasyonu sunulmakta, eriyebilir modül kavramının literatürdeki yeri açıklanmakta ve temel problem çerçevesi sunulmaktadır. Ayrıca modül teorisi ile halka teorisi arasındaki bağlantılar ve çalışmanın sağlayacağı katkılar tartışılmaktadır. İkinci bölümde tez boyunca kullanılan modül ve halka sınıflarının tanımları verilmektedir. Üçüncü bölümde eriyebilir modül kavramı ayrıntılı olarak incelenmekte, genel özellikleri örneklerle açıklanmaktadır. Burulmasızlık ve tekillik gibi yapısal nitelikler ele alınmakta; eriyebilirliğin kalıtsallığı altmodüller, bölüm modülleri, direkt toplam ve direkt çarpım üzerinden değerlendirilmektedir. Ayrıca polinom, kuvvet serileri ve çarpık polinom halkaları üzerindeki eriyebilirlik durumları tartışılmaktadır. Dördüncü bölümde modüllerin endomorfizmaları eriyebilirlik özelliği bakımından ele alınmaktadır. Beşinci bölümde endo-eriyebilir modül kavramı tanımlanmakta, temel özellikleri ortaya konmaktadır. Bu modüllerin eriyebilirlik kavramıyla ilişkileri analiz edilmekte, karakterizasyonları yapılmakta ve bu modül sınıfı diğer modül sınıflarıyla karşılaştırılmaktadır. Çeşitli örneklerle endo-eriyebilir modüllerin özellikleri değerlendirilmektedir.

**Şubat 2026, 60 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Eriyebilir halka, eriyebilir modül, burulmalı eleman, burulmasız eleman, endo-eriyebilir modül

# ABSTRACT

PhD Thesis

## FUSIBLE MODULES

İşıl BAYDAR AVDAN

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR

This thesis consists of five chapters. The first chapter presents the aim and motivation of the study, explains the place of the concept of fusible modules in the literature, and frames the main problem addressed in the thesis. It also discusses the connections between module theory and ring theory as well as the contributions of the study to module theory. The second chapter provides the definitions of the module and ring classes used throughout the thesis. The third chapter examines the concept of fusible modules in detail and explains their general properties with examples. Torsion-freeness, singularity, and the heredity of fusibility are examined via submodules, quotients, and direct constructions. In addition, the fusibility of modules over polynomial rings, power series rings, and skew polynomial rings is discussed. In the fourth section, the endomorphisms of modules are examined with respect to the fusibility. The fifth chapter introduces the notion of endofusible modules and sets out their basic properties. The relationship between these modules and the concept of fusibility is analyzed, characterizations of endofusible modules are given, and comparisons with other classes of modules are presented. Various examples are provided to evaluate the properties of endofusible modules.

**February 2026, 60 pages**

**Keywords:** Fusible ring, fusible module, torsion element, torsion-free element, endofusible module

## TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim boyunca bilgi, tecrübe ve yol göstericiliğiyle her zaman yanımda olan, akademik katkıları, titiz yönlendirmeleri ve sabırlı desteği ile bu çalışmanın her aşamasında bana ışık tutan, bilimsel bakış açımı geliştirmemde, araştırma disiplini kazanmamda büyük rol oynayan değerli danışmanım Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR'e (Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü); bu çalışma boyunca bilgisini ve deneyimini benimle paylaşarak yol gösteren, akademik gelişimimde büyük rol oynayan, çalışmama değerli katkılar sağlayan, çalışkanlığı ve özverisiyle örnek olan kıymetli hocam Prof. Dr. Abdullah HARMANCI'ya (Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü); çalışmamı dikkatle inceleyip değerli görüş ve önerileriyle katkıda bulunan, yapıcı eleştirileri ve yol gösterici değerlendirmeleriyle bu çalışmanın gelişimine yön veren, akademik birikimi ve tecrübesiyle bana farklı bakış açıları kazandıran değerli hocam Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na (Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü); tez çalışmamı titizlikle değerlendiren, verdiği yapıcı geri bildirimlerle tezimin şekillenmesine yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN'a (Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü); bu çalışma süresince değerli fikirleriyle yol gösteren, bilgi ve rehberliğiyle bana daima destek olan kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Tuğçe ÇALCI'ya (Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü); tez çalışmamı 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında finansal olarak destekleyen TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu); tez sürecim boyunca sabrı, sevgisi ve desteğiyle daima yanımda olan, her koşulda bana güç veren sevgili eşim Ufuk AVDAN'a ve bugüne kadar gösterdikleri fedakârlıkları ve koşulsuz sevgileriyle yanımda olan aileme içten teşekkür ederim.

Işıl BAYDAR AVDAN

Ankara, Şubat 2026

# İÇİNDEKİLER

## TEZ ONAY SAYFASI

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| ETİK .....                                                               | i   |
| ÖZET .....                                                               | ii  |
| ABSTRACT .....                                                           | iii |
| TEŞEKKÜR .....                                                           | iv  |
| SİMGELER DİZİNİ .....                                                    | vi  |
| 1. GİRİŞ .....                                                           | 1   |
| 2. KURAMSAL TEMELLER .....                                               | 3   |
| 2.1 Temel Kavramlar .....                                                | 3   |
| 3. ERİYEBİLİR MODÜLLER VE GENEL ÖZELLİKLERİ .....                        | 16  |
| 3.1 Eriyebilir Modül Kavramı ve Bazı Özellikleri. ....                   | 16  |
| 3.2 Eriyebilir Modüller ve Cebirsel Altyapıları Arasındaki İlişkiler ... | 20  |
| 3.3 Polinom Halkaları Üzerindeki Modüllerin Eriyebilirlik Özelliği ...   | 27  |
| 4. ERİYEBİLİR ENDOMORFİZMALAR. ....                                      | 35  |
| 4.1 Eriyebilir Endomorfizmalar .....                                     | 35  |
| 5. ENDO-ERİYEBİLİR MODÜLLER .....                                        | 46  |
| 5.1 Endo-Eriyebilir Modül Tanımı ve Bu Modüllerin Bazı Özellikleri. .    | 46  |
| 6. TARTIŞMA VE SONUÇ .....                                               | 56  |
| KAYNAKLAR .....                                                          | 57  |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                           | 60  |

## SİMGELER DİZİNİ

|                           |                                                                 |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$              | Doğal sayılar kümesi                                            |
| $\text{Ker } f$           | $f$ homomorfizmasının çekirdeği                                 |
| $\text{Im } f$            | $f$ homomorfizmasının görüntü kümesi                            |
| $M_R$                     | $M$ sağ $R$ -modül                                              |
| $Z(M)$                    | $M$ modülünün tekil altmodülü                                   |
| $M/N$                     | $M$ modülünün $N$ altmodülüne göre bölüm modülü                 |
| $r_M(I)$                  | $S$ nin $I$ altkümesinin $M$ deki sağ sıfırlayanı               |
| $T_R(M)$                  | $M$ modülünün burulmalı elemanlarının kümesi                    |
| $T_R^*(M)$                | $M$ modülünün burulmasız elemanlarının kümesi                   |
| $\text{Hom}_R(M, N)$      | $M \rightarrow N$ sağ $R$ -modül homomorfizmalarının kümesi     |
| $S = \text{End}_R(M)$     | $M$ modülünün sağ $R$ -modül endomorfizmalarının halkası        |
| $\bigoplus_{i \in I} M_i$ | $M_i$ modüllerinin direkt toplamı                               |
| $\prod_{i \in I} M_i$     | $M_i$ modüllerinin direkt çarpımı                               |
| $N \leq M$                | $N, M$ nin altmodülü                                            |
| $\mathbb{Z}_n$            | $n$ pozitif tamsayısına göre kalan sınıflarının halkası         |
| $M_n(R)$                  | $R$ halkası üzerindeki $n \times n$ tipinde matrislerin halkası |
| $N \leq^{ess} M$          | $N, M$ nin esas altmodülü                                       |
| $\triangle$               | $\{f \in S \mid fM \leq^{ess} M\}$                              |
| $\mathbb{Q}$              | Rasyonel sayılar cismi                                          |
| $\mathbb{R}$              | Reel sayılar cismi                                              |
| $\mathbb{Z}$              | Tamsayılar halkası                                              |

# 1. GİRİŞ

Bu çalışmada,  $R$  birimli bir halka ve  $M$  bir sağ  $R$ -modül olarak ele alınacaktır. Ayrıca bir  $R$ -modül  $M$  nin endomorfizmalarının halkası  $S = \text{End}_R(M)$  ile gösterilecektir. Bir halkanın sıfır bölen olan iki elemanının toplamı sıfır bölen eleman olmak zorunda değildir. Ayrıca eğer bir halkanın tüm sol (sağ) sıfır bölen olan elemanlarının kümesi halkanın bir sol (sağ) ideali değilse, o zaman halkanın bir sol (sağ) sıfır bölen ile sol (sağ) sıfır bölen olmayan elemanın toplamı olarak ifade edilebilen bir sol (sağ) sıfır bölen elemanı vardır. Buradan hareketle 2017 yılında Ebrahim Ghashghaei ve Warren Wm. McGovern “Fusible rings” isimli çalışmalarında birimli halkalar için eriyebilir eleman ve eriyebilir halka kavramlarını tanımlamıştır. Birimli bir  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir  $a$  elemanı,  $R$  halkasının bir sol (sağ) sıfır bölen ve bir sol (sağ) sıfır bölen olmayan (diğer bir ifadeyle düzenli) elemanının toplamı şeklinde yazılabiliyorsa, o zaman  $a$  elemanına *sol (sağ) eriyebilir eleman* denir. Eğer  $R$  halkasının sıfırdan farklı her elemanı bir sol (sağ) eriyebilir eleman ise, o zaman  $R$  halkasına *sol (sağ) eriyebilir halka* denir. Hem sol hem de sağ eriyebilir elemanlara (halkalara) kısaca *eriyebilir eleman (halka)* adı verilir. Ayrıca yine aynı çalışmalarında Ebrahim Ghashghaei ve Warren Wm. McGovern eriyebilir halkaların bazı temel özelliklerini ve diğer halka sınıfları ile ilişkilerini incelemişlerdir. Ayrıca sıfırdan farklı her elemanı sıfır bölen olmayan halkaların eriyebilir halka olduğu ve eriyebilir halkaların tekil olmayan (nonsingular) olduğu gösterilerek eriyebilir halkaların halka teorisindeki yeri belirlenmiştir. Tamlık bölgeleri ve Boole halkalar eriyebilir halka örnekleri arasında yer alır. Ayrıca temiz (clean) halkalar, temizimsi (almost clean) halkalar, özel temizimsi (special almost clean) halkalar, Rickart halkalar, indirgenmiş (reduced) halkalar ve yarı-basit (semisimple) halkalar ile eriyebilir halkalar arasındaki ilişkiler yine aynı çalışmada detaylı olarak incelenmiştir.

Halka teorisindeki duruma benzer şekilde, modül teorisinde de burulmalı elemanların kümesi altmodül olmak zorunda değildir. Birimli ve değişmeli halkalar üzerindeki modüllerde ise burulmalı elemanların kümesi altmodül yapısına sahiptir. Bu çalışmada eriyebilir eleman ve eriyebilir halka kavramları üzerine yapılan çalışmaların motivasyonu ile söz konusu kavramların modül teorisindeki karşılıklarının araştırıl-

ması amacıyla modül teoride eriyebilir eleman ve eriyebilir modül kavramları incelenmektedir.

Bu çalışmanın diğer bir kısmında modüllerin endomorfizma halkaları eriyebilirlik kavramı bakımından incelenmektedir. Modüllerin endomorfizma halkalarını incelemenin, modüllerin kendilerini incelemeye göre çeşitli avantajları vardır. Bir yandan, modülün endomorfizmalarını kullanarak modülün yapısının daha derin bir şekilde anlaşılmasını sağlar. Böylece modüllerin endomorfizma halkası yapılarına göre sınıflandırılmasına olanak tanır. Öte yandan, modül ve halka teorisi arasındaki ilişkiyi kullanarak, söz konusu alanlar arasındaki anlayışı ve bilgi paylaşımını geliştirir. Halka ve modül teorisi bağlamında, endomorfizma halkaları belirli halkalar olan modüller ile ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu doğrultuda Crivei, “On a class of modules whose non-zero endomorphisms are monomorphisms” makalesinde sıfırdan farklı endomorfizmaları monomorfizma olan modüller sınıfını tanıtmıştır. Breaz, Calugareanu ve Schultz “Modules with Dedekind finite endomorphism rings” adlı çalışmalarında endomorfizma halkaları Dedekind sonlu olan modüller üzerinde çalışmışlardır. Lee, Rizvi ve Roman “Modules whose endomorphism rings are von Neumann regular” isimli çalışmalarında endomorfizma halkaları von Neumann düzenli olan modülleri incelemişlerdir. Ayrıca 2014 yılında endomorfizma halkaları bölme halkası olan modüller Lee, Roman ve Zhang tarafından “Modules whose endomorphism rings are division rings” makalesinde çalışılmıştır. Zhang ve Lee “Modules whose endomorphism rings are unit-regular” adlı çalışmalarında endomorfizma halkaları birim-düzenli (unit-regular) olan modülleri ele almışlardır. Ayrıca 2019 yılında “Modules whose endomorphism rings are  $(m, n)$ -coherent” isimli çalışmalarında Luo ve Mao endomorfizma halkaları  $(m, n)$ -tutarlı  $((m, n)$ -coherent) olan modüllere odaklanmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan esinlenerek, bu çalışmada endomorfizma halkaları eriyebilir olan modüller araştırılmaktadır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmada kullanılacak temel bilgiler verilmektedir.

### 2.1 Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1**  $M$  bir modül ve  $M$  nin bir altkümesi  $N$  olsun. Bu durumda  $r_R(N) = \{r \in R \mid Nr = 0\}$  kümesine  $N$  nin  $R$  içindeki *sağ sıfırlayanı* (*right annihilator*) ve  $l_S(N) = \{s \in R \mid sN = 0\}$  kümesine  $N$  nin  $S$  içindeki *sol sıfırlayanı* (*left annihilator*) denir. Eğer  $N = \{n\}$  ise, o zaman  $r_R(\{n\})$  yerine  $r_R(n)$  gösterimi kullanılmaktadır (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.2**  $M$  bir modül olsun.  $T_R(M) = \{m \in M \mid r_R(m) \neq 0\}$  kümesine  $M$  nin *burulmalı* (*torsion*) *elemanlarının kümesi* denir. Ayrıca  $T_R^*(M) = \{m \in M \mid r_R(m) = 0\}$  kümesine  $M$  nin *burulmasız* (*torsion-free*) *elemanlarının kümesi* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.3**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $0 \rightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} B'' \rightarrow 0$  sol  $R$ -modüllerin dizisi tam iken,  $0 \rightarrow M \otimes_R B' \xrightarrow{1_M \otimes i} M \otimes_R B \xrightarrow{1_M \otimes \rho} M \otimes_R B'' \rightarrow 0$  dizisi tam oluyor ise, o zaman  $M$  ye bir *düz* (*flat*) *modül* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Önerme 2.1.4**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  bir tamlık bölgesi ve  $M$  bir düz  $R$ -modül ise, o zaman  $M$  burulmasızdır (Rotman 1979).

**Tanım 2.1.5**  $R$  bir halka olsun. Eğer her  $r \in R$  için  $rr'r = r$  olacak şekilde bir  $r' \in R$  var ise, o zaman  $R$  ye bir *von Neumann düzenli* (*von Neumann regular*) *halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Teorem 2.1.6**  $R$  bir halka olsun.  $R$  nin von Neumann düzenli halka olması için gerek ve yeter şart her sağ  $R$ -modülün düz olmasıdır (Rotman 1979).

**Tanım 2.1.7**  $M$  bir modül ve  $0 \neq N \leq M$  olsun. Eğer her  $L \leq M$  için  $N \cap L \neq 0$  ise, o zaman  $N$  ye  $M$  nin bir *esas* (*essential*) *altmodülü* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.8** Bir  $M$  modülünün  $Z(M) = \{m \in M \mid r_R(m) \text{ sağ ideali } R_R \text{ de esas}\}$  altmodülüne *tekil (singular) altmodül* denir. Eğer  $Z(M) = M$  ise,  $M$  ye bir *tekil (singular) modül* ve  $Z(M) = 0$  ise, o zaman  $M$  ye bir *tekil olmayan (nonsingular) modül* adı verilir (Lam 1999).

**Tanım 2.1.9** Eğer bir  $R$  halkası kendisi üzerinde sağ modül olarak alınırsa,  $Z(R_R)$  altmodülüne  $R$  nin bir sağ *tekil (right singular) ideali* denir. Benzer şekilde kendisi üzerinde sol modül olarak alınırsa,  $Z({}_R R)$  altmodülü  $R$  nin bir *sol tekil (left singular) ideali* olarak adlandırılır (Lam 1999).

**Tanım 2.1.10**  $M$  sıfırdan farklı bir modül olsun. Eğer  $M$  nin aşıkâr altmodülleri dışında bir altmodülü yok ise, o zaman  $M$  ye bir *basit (simple) modül* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.11**  $M$  bir modül olsun.

$$\begin{aligned} Soc(M) &= \bigcap \{K \leq M : K \text{ modülü } M \text{ nin bir esas altmodülü}\} \\ &= \sum \{L \leq M : L \text{ modülü } M \text{ nin bir basit altmodülü}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $M$  nin *sokulu (socle)* denir (Goodearl 1976).

**Tanım 2.1.12**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  basit altmodüllerinin direkt toplamı olarak yazılıyor ise, o zaman  $M$  ye bir *yarı basit (semisimple) modül* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Teorem 2.1.13**  $M$  bir modül olsun.  $M$  nin yarı basit olması için gerek ve yeter şart  $Soc(M) = M$  olmasıdır (Goodearl 1976).

**Tanım 2.1.14**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  nin altmodülleri kapsama bağıntısına göre tam sıralı ise, yani  $N, L \leq M$  için  $N \subseteq L$  veya  $L \subseteq N$  ise, o zaman  $M$  ye bir *tek sıralı (uniserial) modül* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.15**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $0 \neq a \in R$  için  $a = z + r$  olacak şekilde bir sol (sağ) sıfır bölen eleman  $z$  ve bir sol (sağ) sıfır bölen olmayan eleman  $r$  var

ise, o zaman  $a$  ya *sol (sağ) eriyebilir (left (right) fusible) eleman* denir. Eğer  $R$  nin sıfırdan farklı her elemanı sol (sağ) eriyebilir ise, o zaman  $R$  ye *sol (sağ) eriyebilir halka* denir. Hem sol hem de sağ eriyebilir elemanlara (halkalara) kısaca *eriyebilir eleman (halka)* denir (Ghashghaei ve McGovern 2017).

**Lemma 2.1.16**  $R$  bir halka ve  $n \geq 2$  bir tamsayı olsun. O zaman  $R$  üzerindeki alt (üst) üçgensel matrislerin halkası  $T_n(R)$  sol (sağ) eriyebilir değildir (Ghashghaei ve McGovern 2017).

**Tanım 2.1.17**  $R$  bir halka olsun. Bu durumda  $R[[x]]$  *biçimsel kuvvet serileri (formal power series) halkası* her  $n \in \mathbb{N}$  için  $a_n \in R$  olmak üzere  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  şeklindeki kuvvet serilerinden oluşur.  $R[[x]]$  biçimsel kuvvet serileri halkasının toplama ve çarpma işlemi polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemidir (Lam 2001).

**Tanım 2.1.18**  $R$  bir halka ve  $R$  nin bir endomorfizması  $\sigma$  olsun. Bu durumda  $R[x; \sigma]$  *çarpık (skew) polinomlar halkası*  $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$  olmak üzere  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  biçimindeki tüm polinomların kümesi olarak tanımlanır. Burada toplama işlemi polinomların bilinen toplama işlemidir, fakat çarpma işlemi her  $a \in R$  için  $xa = \sigma(a)x$  şeklinde tanımlıdır (Lam 2001).

**Tanım 2.1.19**  $R$  bir halka ve  $R$  nin bir endomorfizması  $\sigma$  olsun. Bu durumda  $R[[x; \sigma]]$  *biçimsel çarpık kuvvet serileri (formal skew power series) halkası* her  $n \in \mathbb{N}$  için  $a_n \in R$  olmak üzere  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$  biçimindeki kuvvet serilerinin kümesi olarak tanımlanır. Burada toplama işlemi polinomların bilinen toplama işlemidir, fakat çarpma işlemi her  $a \in R$  için  $xa = \sigma(a)x$  şeklinde tanımlıdır (Lam 2001).

**Tanım 2.1.20**  $M$  bir  $R$ -modül,  $m \in M$  ve  $a \in R$  olsun. Eğer  $ma = 0$  olması  $mR \cap Ma = 0$  olmasını gerektiriyorsa,  $M$  ye *indirgenmiş (reduced) modül* denir (Lee ve Zhou 2004).

Ayrıca bir  $R$  halkasının indirgenmiş olması için gerek ve yeter şart  $R$  nin indirgenmiş  $R$ -modül olmasıdır (Lee ve Zhou 2004).

**Lemma 2.1.21**  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (1)  $M$  indirgenmiştir.
- (2)  $m \in M$  ve  $a \in R$  için,
  - (i)  $ma^2 = 0$  ise, o zaman  $ma = 0$ ,
  - (ii)  $ma = 0$  ise, o zaman  $mRa = 0$  dır

(Lee ve Zhou 2004).

**Lemma 2.1.22** Eğer  $R$  bir sol eriyebilir halka ise, o zaman  $M_n(R)$  de bir sol eriyebilir halkadır (Ghashghaei ve McGovern 2017).

**Lemma 2.1.23**  $R$  bir halka ve  $n \geq 2$  bir tamsayı olsun. O zaman alt (üst) üçgensel matrislerin halkası  $T_n(R)$  sol eriyebilir değildir (Ghashghaei ve McGovern 2017).

**Tanım 2.1.24**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  nin her sol ideali aynı zamanda bir sağ ideal ise yani,  $R$  nin bir ideali ise, o zaman  $R$  ye *sol eş (left duo) halka* denir. Benzer şekilde eğer  $R$  nin her sağ ideali aynı zamanda bir sol ideal ise yani,  $R$  nin bir ideali ise, o zaman  $R$  ye *sağ eş (right duo) halka* denir. Ayrıca her  $a \in R$  için  $aR \subseteq Ra$  ve  $Ra \subseteq aR$  ise, o zaman  $R$  ye *eş (duo) halka* denir (Thierrin 1960).

**Tanım 2.1.25**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $e \in R$  için  $e^2 = e \in R$  sağlanıyor ise, o zaman  $e$  ye *eşkare (idempotent) eleman* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.26**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  nin tüm eşkare elemanları merkezde ise, o zaman  $R$  ye *abelyen (abelian) veya normal halka* denir (Endo 1960). Bir  $M$  modülünde herhangi  $f \in S$ ,  $e^2 = e \in S$  ve  $m \in M$  için  $fem = efm$  oluyorsa,  $M$  ye *abelyen (abelian) modül* denir (Roos 1967).

**Tanım 2.1.27**  $M$  bir modül ve  $\alpha \in S$  olsun. Eğer  $M/\alpha(M) \cong \text{Ker}(\alpha)$  ise, o zaman  $\alpha$  ya *morfik (morphic)* denir. Eğer  $S$  nin her elemanı morfik ise, o zaman  $M$  ye *morfik modül* denir (Nicholson ve Campos 2005).

**Lemma 2.1.28** Her morfik modül *iç kısaltmaya (internal cancellation)* sahiptir (Nicholson ve Campos 2005).

**Tanım 2.1.29** Her bir  $f: M \rightarrow K$  modül epimorfizması ve her bir  $\gamma: U \rightarrow K$  modül homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir  $\bar{\gamma}: U \rightarrow M$  modül homomorfizması varsa,  $U$  ya bir  $M$ -projektif ( $M$ -projective) modül denir. Eğer  $U$  modülü  $U$ -projektif ise, o zaman  $U$  ya bir yarı-projektif (*quasi-projective*) modül, her  $M$  modülü için  $M$ -projektif ise, o zaman  $U$  ya bir projektif (*projective*) modül adı verilir (Anderson ve Fuller 1974).

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow \bar{\gamma} & \downarrow \gamma & & \\ M & \xrightarrow{f} & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Teorem 2.1.30**  $M$  bir morfik ve yarı-projektif modül olsun. Ayrıca  $\theta \in S$  olmak üzere  $M$  nin direkt toplananları  $\theta(M) + \text{Ker}(\theta)$  ve  $\theta(M) \cap \text{Ker}(\theta)$  olsun. O zaman  $\theta$  nin birim-düzenli olması için gerek ve yeter şart  $\pi^2 = \pi \in S$  ve  $\sigma \in S$  tersinir olmak üzere  $\theta(M) \cap \pi(M) = 0$  için  $\theta = \pi + \sigma$  olmasıdır (Chen vd. 2018).

**Lemma 2.1.31**  $M$  bir modül olsun. O zaman  $S$  nin von Neumann düzenli halka olması için gerek ve yeter şart her  $f \in S$  için  $\text{Ker} f$  ve  $\text{Im} f$  nin  $M$  nin direkt toplananları olmasıdır (Ware 1971).

**Lemma 2.1.32**  $P$  bir projektif modül ve  $P$  nin bir direkt toplananı  $P_1$  ve  $N$  bir altmodülü olsun. O zaman  $P = P_1 \oplus P_2$  olacak şekilde bir  $P_2 \subseteq N$  vardır (Nicholson 1977).

**Lemma 2.1.33**  $M$  bir modül ve  $S$  bir  $T$ -projektif modül olmak üzere  $M = S \oplus T = N + T$  olsun. O zaman  $N$  nin  $M = S' \oplus T$  olacak şekilde bir  $S'$  altmodülü vardır (Mohamed ve Müller 1990).

**Tanım 2.1.34** Eğer bir  $M$  modülünün keyfi iki direkt toplananının kesişimi  $M$  nin bir direkt toplananı oluyorsa,  $M$  ye *SIP* (*Summand Intersection Property*) ye sahiptir, keyfi sayıda direkt toplananının kesişimi bir direkt toplanan oluyorsa,  $M$  ye *SSIP* (*Strong Summand Intersection Property*) ye sahiptir denir (Wilson 1986).

**Tanım 2.1.35** Eğer bir  $M$  modülünün keyfi iki direkt toplananının toplamı  $M$  nin bir direkt toplananı oluyorsa,  $M$  ye *SSP* (*Summand Sum Property*) ye sahiptir,

keyfi sayıda direkt toplanamının toplamı bir direkt toplanan oluyorsa,  $M$  ye *SSSP* (*Strong Summand Sum Property*) ye sahiptir denir (Garcia 1989).

**Tanım 2.1.36**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $\text{End}_R(M)$  von Neumann düzenli halka ise, o zaman  $M$  ye *endo-düzenli* (*endoregular*) modül denir (Lee, Rizvi vd. 2013).

**Önerme 2.1.37** Her endo-düzenli modül *SSP* ve *SIP* yi sağlar (Lee, Rizvi vd. 2013).

**Tanım 2.1.38**  $R$  bir halka ve  $e \in R$  bir eşkare eleman olsun. Bu durumda  $eRe$  ye  $R$  nin *köşe* (*corner*) *halkası* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.39**  $R$  bir halka ve  $e \in R$  bir eşkare eleman olsun. Eğer her  $x \in R$  için  $xe = exe$  oluyorsa,  $e$  ye *sol yarı merkezi* (*left semicentral*) *eşkare eleman* denir. Benzer şekilde, eğer her  $x \in R$  için  $ex = exe$  oluyorsa,  $e$  ye *sağ yarı merkezi* (*right semicentral*) *eşkare eleman* denir (Birkenmeier 1983).

**Önerme 2.1.40** Eğer  $R$  bir halka ise, o zaman  $R \cong \text{End}_R(R)$  dir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.41**  $M$  bir sağ  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$  modülü  $R$  nin kopyalarının bir direkt toplamına izomorf ise, yani her  $i \in I$  için  $R_i \cong R$  ve  $M \cong \bigoplus_{i \in I} R_i$  olacak biçimde bir  $I$  indis kümesi varsa,  $M$  ye *serbest* (*free*) *sağ  $R$ -modül* denir (Dauns 1994).

**Tanım 2.1.42**  $M$  bir modül olsun.

- Eğer  $M$  nin altmodüllerinin her artan dizisi sonlu bir adımda duruyorsa,  $M$  ye *Noetherian* denir.

- Eğer  $M$  nin altmodüllerinin her azalan dizisi sonlu bir adımda duruyorsa,  $M$  ye *Artinian* denir

(Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.43** Eğer bir  $M$  modülünün  $N$  altmodülü için  $\text{Hom}_R(N, M)N \subseteq N$  oluyorsa, yani  $M$  nin her  $f$  endomorfizması için  $fN \subseteq N$  ise, o zaman  $N$  ye  $M$  de *tam değişmez* (*fully invariant*) denir.  $M$  nin her altmodülü tam değişmezse,  $M$  ye *eş* (*duo*) *modül* denir (Özcan vd. 2006).

**Önerme 2.1.44**  $\{R_i\}_{i \in I}$  halkaların bir ailesi ve  $R = \prod_{i \in I} R_i$  olsun.  $R$  nin eriyebilir olması için gerek ve yeter şart her  $i \in I$  için  $R_i$  nin eriyebilir olmasıdır (Ghashghaei ve McGovern 2017).

**Tanım 2.1.45**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  de sıfırdan farklı her elemanın tersi varsa,  $R$  ye *bölme (division) halkası* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.46** Sıfırdan farklı her endomorfizması monomorfizma olan sıfırdan farklı  $R$ -modüllerin sınıfına  $\mathcal{M}$  sınıfı denir (Crivei 1998).

**Önerme 2.1.47** Her sol eriyebilir halka sağ tekil olmayandır (Ghashghaei ve McGovern 2017).

**Önerme 2.1.48**  $A, B$  birer halka ve  $M = {}_A M_B$  bi-modül olsun. O zaman  $R = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$  nin sol eriyebilir olması için gerek ve yeter şart  $M = 0$  ve  $A, B$  nin sol eriyebilir halkalar olmasıdır (Ghashghaei ve McGovern 2017).

**Tanım 2.1.49**  $M$  bir modül olsun. Eğer her  $f \in S$  için  $r_M(f) = eM$  olacak biçimde bir  $e^2 = e \in S$  varsa,  $M$  ye *Rickart modül* denir (Rizvi ve Roman 2005).

**Tanım 2.1.50**  $M$  bir modül olsun. Eğer her  $f \in S$  için  $\text{Im } f = eM$  olacak biçimde bir  $e^2 = e \in S$  varsa,  $M$  ye *dual Rickart modül* denir (Lee vd. 2011).

**Tanım 2.1.51**  $M$  bir modül olsun. Eğer bir  $f \in S$  için  $r_M(f^n) = eM$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tamsayısı ve  $e^2 = e \in S$  varsa,  $M$  ye  $\pi$ -*Rickart modül* denir (Üngör vd. 2014).

**Önerme 2.1.52**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  bir Rickart modül ise, o zaman  $M$  bir  $\pi$ -Rickart modüldür. Ayrıca  $S$  indirgenmiş bir halka ise, o zaman önermenin karşıtı da doğrudur (Üngör vd. 2014).

**Örnek 2.1.53**  $A = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  olmak üzere  $T = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A \mid a_n \text{ sonlu bileşen dışında sabit}\}$

ve  $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  göz önüne alınsın. Şimdi  $R = \begin{pmatrix} T & T/I \\ 0 & T/I \end{pmatrix}$  bir halka olup,  $E =$

$\begin{pmatrix} (1, 1, \dots) & 0 + I \\ 0 & 0 + I \end{pmatrix} \in R$  bir eşkare elemandır. Bu durumda  $R$  bir sağ Rickart halkadır ve  $M = ER$  bir Rickart  $R$ -modüldür (Lee vd. 2010).

**Tanım 2.1.54**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M \neq 0$  ve  $M$  nin sıfır ve  $M$  den başka direkt toplananı yoksa,  $M$  ye *ayrıştırılmaz (indecomposable) modül* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Önerme 2.1.55**  $M$  bir Artinian Rickart modül olsun. O zaman her  $i \in I$  için  $M_i$  bir ayrıştırılmaz Artinian Rickart modül ve  $\text{End}_R(M_i)$  bir bölme halkası olmak üzere

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

olacak şekilde bir ayrışım vardır (Lee vd. 2010).

**Önerme 2.1.56**  $M$  bir Noetherian dual Rickart modül olsun. O zaman her  $i \in I$  için  $M_i$  bir ayrıştırılmaz Noetherian dual Rickart modül ve  $\text{End}_R(M_i)$  bir bölme halkası olmak üzere

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

olacak şekilde bir ayrışım vardır (Lee vd. 2011).

**Tanım 2.1.57**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  nin sıfırdan farklı her  $N$  altmodülü için  $\varphi(M) \leq N$  olacak şekilde bir  $0 \neq \varphi \in S$  varsa,  $M$  ye *kısıtlanabilir (retractable) modül* denir (Khuri 1979).

**Tanım 2.1.58**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  nin her epimorfizması otomorfizma ise, o zaman  $M$  ye *Hopfian modül* denir (Hmaimou 2007).

**Tanım 2.1.59** Eğer bir  $R$  halkasının her sağ (sol) ideali projektif ise, o zaman  $R$  halkasına bir *sağ (sol) kalıtsal (hereditary) halka* denir (Anderson ve Fuller 1974).

**Teorem 2.1.60** Bir  $R$  halkası için aşağıdakiler denktir:

- (1) Her projektif sağ  $R$ -modül bir Rickart modüldür.
- (2) Her serbest  $R$ -modül bir Rickart modüldür.
- (3)  $R$  bir kalıtsal halkadır

(Lee vd. 2010).

**Tanım 2.1.61**  $M$  bir modül olsun. Eğer her  $N \leq M$  için  $l_S(N) = Se$  olacak şekilde bir  $e^2 = e \in S$  var ise, o zaman  $M$  ye *Baer modül* denir (Rizvi ve Roman 2004).

**Tanım 2.1.62**  $M$  bir modül olsun. O zaman her  $N \leq M$  için

$$D(N) = \{\varphi \in S \mid \text{Im } \varphi \subseteq N\} = eS$$

olacak şekilde bir  $e^2 = e \in S$  var ise, o zaman  $M$  ye *dual Baer modül* denir (Keskin Tütüncü ve Tribak 2010).

**Önerme 2.1.63**  $M$  bir  $\mathbb{Z}$ -modül olsun.  $M$  nin dual Baer olması için gerek ve yeter şart  $p_i$  ( $i \in I$ ) ve  $q_j$  ( $j \in J$ ) asal sayılar ve her  $(i, j) \in I \times J$  için  $p_i \neq q_j$  olmak üzere  $M$  nin  $\mathbb{Q}$ 'nun keyfi sayıda kopyalarının,  $(\mathbb{Z}(p_i^\infty))_{i \in I}$  ve  $(\mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z})_{j \in J}$  nin bir direkt toplamına izomorfik olmasıdır (Keskin Tütüncü ve Tribak 2010).

**Teorem 2.1.64**  $M$  bir modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (1)  $M$  bir dual Baer modüldür.
- (2)  $S$  nin her  $A$  altkümesi için  $e^2 = e \in S$  olmak üzere  $\sum_{f \in A} \text{Im } f = eM$  dir.
- (3)  $S$  nin her  $I$  sağ ideali için  $e^2 = e \in S$  olmak üzere  $\sum_{f \in I} \text{Im } f = eM$  dir.
- (4)  $M$  bir *SSSP* ye sahip modül ve her  $\varphi \in S$  için  $\text{Im } \varphi$  altmodülü  $M$  nin bir direkt toplananıdır (yani  $M$  dual Rickarttır)

(Keskin Tütüncü ve Tribak 2010).

**Örnek 2.1.65**  $k$  karakteristiği  $p > 0$  olan bir cisim ve  $G$  de  $x, y$  tarafından üretilen mertebesi  $p^2$  olan elementer abelyen bir  $p$ -grup olsun. Bu durumda

$$V = e_1k \oplus e_2k \oplus e_3k$$

şeklinde tanımlanan 3-boyutlu bir sağ  $kG$ -modüldür ve çarpım

$$e_1x = e_1, \quad e_2x = e_2, \quad e_3x = e_1 + e_3,$$

ve

$$e_1y = e_1, \quad e_2y = e_2, \quad e_3y = e_2 + e_3$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Aynı tabanda hesaplama yapıldığında,  $V$ 'nin  $kG$ -endomorfizmaları aşağıdaki matrislerle verilmektedir:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in k \right\}.$$

Bu matrislerden oluşan halka yerel bir halkadır ve böylece  $V$  ayrıştırılamaz bir  $kG$ -modüldür (Lam 2001).

**Örnek 2.1.66**  $p$  bir asal sayı olmak üzere  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  ve  $\mathbb{Z}_p$  dual Rickart modüller olsun. Ancak  $\mathbb{Z}$ -modül  $M = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$  dual Rickart değildir. Gerçekten,  $n \in \mathbb{Z}_p$  için  $\varphi : (\overline{m}, n) \mapsto (\overline{n}, 0)$  şeklinde tanımlanan  $\varphi \in \text{End}_R(M)$  endomorfizması ele alınsın. Bu durumda  $\text{Im}\varphi = \mathbb{Z}_p \oplus 0 \leq_{\text{ess}} \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus 0$  olup  $\text{Im}\varphi$ ,  $M$  nin bir direkt toplamı değildir (Lee vd. 2011).

**Örnek 2.1.67**  $F$  bir cisim,  $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$  ve  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  olsun. Ayrıca  $M = eR = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  göz önüne alınsın. Burada  $\text{End}_R(M)$  bir cisim olduğundan  $M$  Rickart ve aynı zamanda dual Rickart bir modüldür (Lee vd. 2011).

**Tanım 2.1.68**  $M$  bir modül olsun. Eğer keyfi  $f \in S$  için  $\text{Im}f^n = eM$  olacak şekilde  $e^2 = e \in S$  ve bir  $n$  pozitif tamsayısı varsa,  $M$  ye *dual  $\pi$ -Rickart modül* denir (Üngör vd. 2012).

**Önerme 2.1.69**  $M$  bir dual Rickart modül olsun. O zaman  $M$  dual  $\pi$ -Rickarttır. Eğer  $S$  indirgenmiş bir halka ise, o zaman önermenin karşısı da doğrudur (Üngör vd. 2012).

**Tanım 2.1.70**  $R$  bir halka ve  $x \in R$  olsun. Eğer  $x = xux$  olacak şekilde bir  $u \in U(R)$  elemanı mevcutsa  $x$  e *birim-düzenli (unit-regular) eleman* denir (Nicholson 1999).

**Teorem 2.1.71** (Camillo–Khurana Teoremi)  $R$  bir halka olsun.  $R$  nin birim-düzenli olması için gerek ve yeter şart  $R$  nin her elemanının  $e^2 = e \in R$  ve  $u \in R$  tersinir olmak üzere  $aR \cap eR$  olacak şekilde  $e+u$  biçiminde yazılmasıdır (Camillo ve Khurana 2001).

**Tanım 2.1.72**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  nin endomorfizma halkası birim-düzenli ise, o zaman  $M$  ye *birim endo-düzenli (unit-endoregular) modül* denir (Zhang ve Lee 2016).

**Teorem 2.1.73**  $M$  bir modül olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- (1)  $M$  bir birim endo-düzenli modüldür.
- (2) Keyfi  $\varphi, \psi \in S$  için  $\varphi M + \psi M = M$  olması  $e^2 = e \in S$  olmak üzere  $S\varphi \cap Se = 0$  olacak şekilde bir  $\varphi + \psi e$  izomorfizması olmasını gerektirir.
- (3) Keyfi  $\varphi \in S$  için  $\varphi = \mu + e$  ve  $S\varphi \cap Se = 0$  olacak şekilde bir  $e^2 = e \in S$  ve  $\mu \in S$  izomorfizması vardır

(Zhang ve Lee 2018).

**Örnek 2.1.74**  $\mathbb{Z}_{(2)}$ -modül  $M = \mathbb{R} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  göz önüne alınsın.  $M$  birim endo-düzenli bir modül değildir (Anderson ve Juett 2021).

**Tanım 2.1.75**  $R$  bir halka ve  $x \in R$  olsun. Eğer  $x^n = 0$  olacak şekilde bir pozitif  $n$  tamsayısı varsa,  $x$  e *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir (Anderson ve Fuller 1992).

**Tanım 2.1.76**  $R$  bir halka olsun. Eğer her  $0 \neq a \in R$  için  $a = u + n$  olacak şekilde bir  $u \in R$  tersinir elemanı ve  $n \in R$  üstel sıfır elemanı varsa,  $R$  ye *ince (fine) halka* denir (Călugăreanu ve Lam 2016).

**Teorem 2.1.77**  $R$  bir halka ve  $R \setminus \{0\}$  içindeki ince elemanların kümesi  $\Phi(R)$  olsun. O zaman

- (1) Eğer  $a \in \Phi(R)$  ise, o zaman  $RaR = R$  dir.
- (2) Eğer  $R$  bir ince halka ise, o zaman  $R$  basittir.

(3) Her birimli halka homomorfizması  $f : R \rightarrow S$  için  $S \neq 0$  olmak üzere  $f(\Phi(R)) \subseteq \Phi(S)$  dir.

(4)  $R$  nin bir nil ideali  $I$  ve  $a \in R$  olsun. O zaman  $a \in \Phi(R)$  olması için gerek ve yeter şart  $\bar{a} \in \Phi(R/I)$  olmasıdır

(Călugăreanu ve Lam 2016).

**Tanım 2.1.78**  $M$  bir modül olsun.

(1)  $M$  nin her altmodülü,  $M$  nin bir direkt toplananında esastır.

(2) Eğer  $M$  nin bir  $A$  altmodülü  $M$  nin bir direkt toplananına izomorf ise, o zaman  $M$  nin bir direkt toplananı  $A$  dır.

(3) Eğer  $M$  nin  $M_1 \cap M_2 = 0$  olacak şekilde  $M_1$  ve  $M_2$  direkt toplananları varsa, o zaman  $M_1 \oplus M_2$  de  $M$  nin bir direkt toplananıdır.

Eğer yukarıdaki (1) ve (2) şartları sağlanıyorsa  $M$  ye *sürekli (continuous) modül*, eğer (1) ve (3) şartları sağlanıyorsa  $M$  ye *yarı-sürekli (quasi-continuous) modül* denir (Mohamed ve Müller 1990).

**Teorem 2.1.79** Her sürekli modül yarı-süreklidir (Mohamed ve Müller 1990).

**Tanım 2.1.80**  $M$  bir modül olsun. O zaman  $\Delta = \{\alpha \in S \mid \text{Ker}\alpha \leq^{ess} M\}$  şeklinde tanımlanmaktadır (Mohamed ve Müller 1990).

**Lemma 2.1.81** Eğer  $M$  yarı-sürekli ise, o zaman  $R$  nin eşkare elemanları  $\Delta$  ya yükselir (Mohamed ve Müller 1990).

**Önerme 2.1.82**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  sürekli ise, o zaman  $S/\Delta$  von Neumann düzenli halkadır ve  $\Delta$  da  $S$  nin Jacobson radikalidir (Mohamed ve Müller 1990).

**Tanım 2.1.83**  $R$  bir halka olsun. Eğer keyfi  $e^2 = e \in R$  ve  $a, r \in R$  için  $ae = 0$  olması  $Rera \subseteq J(R)$  olmasını gerektiriyorsa  $R$  ye *J-normal halka* denir (Köse vd. 2020).

**Teorem 2.1.84**  $R$  bir halka olsun ve  $R$  nin eşkare elemanları  $J(R)$  ye yükselsin. O zaman  $R$  nin  $J$ -normal olması için gerek ve yeter şart  $R/J(R)$  nin abelyen olmasıdır (Köse vd. 2020).

**Sonuç 2.1.85**  $R$  bir abelyen ve sağ yarı-süreklı halka olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- (1)  $R$  sağ tekil olmayandır.
- (2)  $\mathbb{Q}_{max}^r(R)$  birim-düzenlidir.
- (3)  $R$  Rickarttır

(Akalan ve Vas 2013).

### 3. ERİYEĞİLİR MODÜLLER VE GENEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde eriyebilir modül kavramı tanımlanıp çeşitli örnekler ile bazı özelliklerinden bahsedilmektedir.

#### 3.1 Eriyebilir Modül Kavramı ve Bazı Özellikleri

**Tanım 3.1.1**  $M$  bir modül ve  $0 \neq m \in M$  olsun. Eğer  $m = m_1 + m_2$  olacak şekilde  $m_1 \in T_R(M)$  ve  $m_2 \in T_R^*(M)$  var ise, o zaman  $m$  ye *eriyebilir (fusible) eleman* denir. Eğer  $M$  nin sıfırdan farklı bütün elemanları eriyebilir ise, o zaman  $M$  ye *eriyebilir modül* denir.

**Uyarı 3.1.2**  $M$  bir modül olsun. Burada  $r_R(0) \neq 0$  olduğundan  $0 \in T_R(M)$  dir. Ayrıca  $m \in M$  burulmasız bir eleman olsun. O halde  $m = 0 + m$  yazılışı  $m$  için bir eriyebilir ayrışımıdır.

**Teorem 3.1.3** Eğer  $M$  burulmasız bir modül ise, o zaman  $M$  eriyebiliridir. Eğer  $T_R(M)$  altkütmesi  $M$  nin bir altgrubu ise, o zaman önermenin karşıtı da doğrudur.

**İspat:**  $M$  burulmasız bir modül olsun. Uyarı 3.1.2 gereğince  $M$  eriyebiliridir. Karşıt olarak,  $M$  eriyebilir ve  $T_R(M)$  altkütmesi  $M$  nin bir altgrubu olsun. O zaman  $0 \neq m \in T_R(M)$  için  $m = m_1 + m_2$  olacak şekilde  $m_1 \in T_R(M)$  ve  $m_2 \in T_R^*(M)$  vardır. Buradan  $m - m_1 = m_2$  ve  $m_2 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $m - m_1 \in T_R^*(M)$  dir. Bu ise bir çelişki olup  $T_R(M) = 0$  dir.  $\square$

Teorem 3.1.3 ün sonucunda bazı eriyebilir modül örnekleri aşağıda verilmektedir.

#### Örnek 3.1.4

- (1) Her vektör uzayı eriyebiliridir.
- (2) Tamlık bölgeleri üzerindeki her düz modül eriyebiliridir.
- (3) Bir von Neumann düzenli tamlık bölgesi üzerindeki her modül eriyebiliridir.

(4) Eğer  $R$  tamlık bölgesi ise, o zaman  $R$  eriyebilir bir  $R$ -modüldür.

**İspat:**

(1)  $F$  bir cisim ve  $V$  bir  $F$ -vektör uzayı olsun. Kabul edilsin ki  $0 \neq v \in V$  için  $rv = 0$  olacak şekilde bir  $r \in F$  olsun. O halde  $r = 0$  dır. Dolayısıyla  $V$  burulmasızdır ve böylece eriyebilir.

(2) Önerme 2.1.4 gereğince ispat tamamlanır.

(3)  $R$  bir von Neumann düzenli tamlık bölgesi olsun. O halde Teorem 2.1.6 gereğince  $M$  bir düz modüldür. O halde  $R$  bir tamlık bölgesi olduğundan Önerme 2.1.4 gereğince  $M$  burulmasız bir modüldür. Böylece  $M$  eriyebilir.

(4) Açıktır. □

**Uyarı 3.1.5** Burulmasız elemanlarının kümesi boş olduğundan burulmalı modüller eriyebilir değildir. Bu sebeple her  $n$  pozitif tamsayısı için  $\mathbb{Z}$ -modül olarak  $\mathbb{Z}_n$  eriyebilir değildir.

Şimdi hangi şartlar altında eriyebilir modüllerin burulmasız olduğu incelenmektedir. Bunun için bazı tanım ve önermelerden yararlanılmaktadır.

**Tanım 3.1.6**  $M$  bir modül ve  $N_1, N_2 \subseteq M$  olsun. Eğer  $r_R(N_1) \subseteq r_R(N_2)$  veya  $r_R(N_2) \subseteq r_R(N_1)$  ise, o zaman  $M$  *altkümelerinin sıfırlayanları arasında karşılaştırılabilirlik bağıntısını sağlar* (satisfy comparability relation between annihilators of subsets) denir.

**Örnek 3.1.7**

(1)  $\mathbb{Z}$ -modül olarak  $\mathbb{Z}_{p^n}$ , altkümelerinin sıfırlayanları arasında karşılaştırılabilirlik bağıntısını sağlar.

(2) Her tek sıralı modül  $M$ , altkümelerinin sıfırlayanları arasında karşılaştırılabilirlik bağıntısını sağlar.

Bilindiği üzere  $T_R(M)$  altkümeleri  $M$  nin bir altgrubu olmak zorunda değildir. Şimdi aşağıda hangi koşul altında  $T_R(M)$  nin  $M$  nin altgrubu olduğu gösterilmektedir.

**Sonuç 3.1.8**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M$  altkümelerinin sıfırlayanları arasında karşılaştırılabilirlik bağıntısını sağlar ise, o zaman  $T_R(M)$  altkümesi  $M$  nin bir altgrubudur.

**İspat:**  $m_1, m_2 \in T_R(M)$  ve böylece  $m_1 n_1 = 0, m_2 n_2 = 0$  olacak şekilde  $n_1, n_2 \in R$  mevcut olsun. Bu durumda  $n_1 \in r_R(m_1)$  ve  $n_2 \in r_R(m_2)$  dir. Hipotezden  $r_R(m_1) \subseteq r_R(m_2)$  veya  $r_R(m_2) \subseteq r_R(m_1)$  dir. Eğer  $r_R(m_1) \subseteq r_R(m_2)$  ise, o zaman  $(m_1 + m_2)n_1 = 0$  elde edilir. Benzer olarak eğer  $r_R(m_2) \subseteq r_R(m_1)$  ise, o zaman  $(m_1 + m_2)n_2 = 0$  dir. Her iki durumda da  $m_1 + m_2 \in T_R(M)$  dir. O halde  $T_R(M)$  altkümesi  $M$  nin bir altgrubudur.  $\square$

**Önerme 3.1.9**  $M$  eriyebilir bir modül olsun. Eğer  $M$  altkümelerinin sıfırlayanları arasında karşılaştırılabilirlik bağıntısını sağlar ise, o zaman  $M$  burulmasız bir modüldür.

**İspat:**  $M$  altkümelerinin sıfırlayanları arasında karşılaştırılabilirlik bağıntısını sağlasın,  $0 \neq m \in M$  ve  $r_M(m) \neq 0$  olsun.  $M$  eriyebilir olduğundan  $m = m_1 + m_2$  olacak şekilde  $m_1 \in T_R(M)$  ve  $m_2 \in T_R^*(M)$  vardır. Hipotezden  $r_R(m) \subseteq r_R(m_1)$  veya  $r_R(m_1) \subseteq r_R(m)$  dir. Birinci durum olarak  $0 \neq t \in r_R(m) \subseteq r_R(m_1)$  olsun. Buradan  $0 = mt = m_1 t + m_2 t$  dir. Böylece  $m_1 t = 0$  olduğundan  $m_2 t = 0$  elde edilir. Benzer şekilde ikinci durum olarak  $0 \neq s \in r_R(m_1) \subseteq r_R(m)$  için  $m_2 s = 0$  bulunur. Burada  $m_2 \in T_R^*(M)$  olduğundan her iki durumda da bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla  $r_R(m) = 0$  olup  $M$  burulmasız bir modüldür.  $\square$

**Teorem 3.1.10**  $M$  eriyebilir bir modül olsun. O zaman  $M$  tekil olmayan bir modüldür.

**İspat:**  $0 \neq m \in Z(M)$  olsun.  $M$  eriyebilir olduğundan  $m = m_1 + m_2$  olacak şekilde  $m_1 \in T_R(M)$  ve  $m_2 \in T_R^*(M)$  vardır. O halde  $r_R(m_1) \neq 0$  ve  $r_R(m_2) = 0$  dir. Bu durumda  $r_R(m_1) \neq 0$  ve  $r_R(m)$  de  $R$  nin bir esas sağ ideali olduğundan  $r_R(m) \cap r_R(m_1) \neq 0$  dir. O zaman  $0 \neq t \in r_R(m) \cap r_R(m_1)$  vardır. Böylece  $m - m_1 = m_2$  olduğundan  $0 \neq t \in r_R(m) \cap r_R(m_1) \subseteq r_R(m - m_1) = r_R(m_2)$  dir. Dolayısıyla  $r_R(m_2) \neq 0$  olup buradan bir çelişki elde edilir. O halde  $Z(M) = 0$  dir.  $\square$

**Lemma 3.1.11** Eğer her  $R$ -modül tekil olmayan ise, o zaman  $R$  yarı basittir.

**İspat:**  $R$  nin bir esas ideali  $I$  olsun. Bu durumda  $R/I$  tekildir. Ayrıca hipotezden  $R/I$  tekil olmayandır. O halde  $R/I = 0$  dır ve buradan  $I = R$  elde edilir.  $Soc(R_R)$  tüm esas ideallerin bir kesişimi olduğundan  $Soc(R_R) = R$  bulunur. Böylece  $R$  yarı basittir.  $\square$

**Sonuç 3.1.12** Eğer her  $R$ -modül eriyebilir ise, o zaman  $R$  yarı basittir.

Teorem 3.1.10 un karşısı her zaman doğru değildir.

**Örnek 3.1.13**  $\mathbb{Z}_2$  üzerindeki  $2 \times 2$  tipinde üst üçgensel matrislerin halkası  $R = U_2(\mathbb{Z}_2)$  olsun. Lemma 2.1.16 gereğince  $R$  eriyebilir  $R$ -modül değildir. Burada  $e_{ij}$  ile  $2 \times 2$  tipindeki matris birimleri gösterilsin. O zaman  $R$  nin aşıkâr olmayan bütün direkt toplanan sağ idealleri  $r_R(e_{11}) = e_{22}R$ ,  $r_R(e_{11} + e_{12}) = (e_{12} + e_{22})R$ ,  $r_R(e_{12}) = (e_{11} + e_{12})R$ ,  $r_R(e_{12} + e_{22}) = (e_{11} + e_{12})R$  ve  $r_R(e_{22}) = (e_{11} + e_{12})R$  dir.  $Z(R_R) = \{a \in R \mid r_R(a) \text{ sağ ideali } R_R \text{ de esas}\} = \{0\}$  olduğu iddia edilmektedir. Bu durumda  $0 \neq a \in Z(R_R)$  olsun. O halde  $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{Z}_2$  için  $0 \neq a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + a_{22}e_{22}$  dir.

**I. Durum:**  $a_{11} = \bar{1}$ ,  $a_{12} = a_{22} = \bar{0}$  olsun. O zaman  $a = e_{11}$  bulunur ve  $R$  de  $r_R(e_{11})$  direkt toplanan sağ ideal olduğundan esas değildir. Böylece  $e_{11} \notin Z(R_R)$  dir.

**II. Durum:**  $a_{11} = a_{22} = \bar{0}$  ve  $a_{12} = \bar{1}$  olsun. O zaman  $a = e_{12}$  ve  $R$  de  $r_R(e_{12})$  direkt toplanan sağ ideal olduğundan esas değildir. Böylece  $e_{12} \notin Z(R_R)$  dir.

**III. Durum:**  $a_{11} = a_{12} = \bar{0}$  ve  $a_{22} = \bar{1}$  olsun. O zaman  $a = e_{22}$  ve  $R$  de  $r_R(e_{22})$  direkt toplanan sağ ideal olduğundan esas değildir. O halde  $e_{22} \notin Z(R_R)$  dir.

**IV. Durum:**  $a_{11} = a_{12} = \bar{1}$  ve  $a_{22} = \bar{0}$  olsun. O zaman  $a = e_{11} + e_{12}$  ve  $R$  de  $r_R(e_{11} + e_{12})$  direkt toplanan sağ ideal olduğundan esas değildir. Bu durumda  $e_{11} + e_{12} \notin Z(R_R)$  dir.

**V. Durum:**  $a_{11} = \bar{0}$  ve  $a_{12} = a_{22} = \bar{1}$  olsun. O zaman  $a = e_{12} + e_{22}$  ve  $R$  de  $r_R(e_{12} + e_{22})$  direkt toplanan sağ ideal olduğundan esas değildir. Bu durumda  $e_{12} + e_{22} \notin Z(R_R)$  dir.

**VI. Durum:**  $a_{11} = a_{22} = \bar{1}$  ve  $a_{12} = \bar{0}$  olsun. O zaman  $a = e_{11} + e_{22}$  olup  $e_{11} + e_{22} = I_2$  dir. Buradan  $r_R(e_{11} + e_{22}) = 0$  bulunur.

**VII. Durum:**  $a_{11} = a_{12} = a_{22} = \bar{1}$  olsun. O zaman  $a = e_{11} + e_{12} + e_{22} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$  bulunur. Böylece  $r_R(e_{11} + e_{12} + e_{22}) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $R$  sağ tekil olmayandır.

Sonuç 3.1.12 nin karşıtı her zaman doğru değildir.

**Örnek 3.1.14**  $R = \mathbb{Z}_6$  ve  $M = \langle \bar{2} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_6$  olsun. Bu durumda  $R$  yarı basittir.  $R$ -modül olarak  $M$  burulmalı bir modül olduğundan eriyebilir değildir.

## 3.2 Eriyebilir Modüller ve Cebirsel Altyapıları Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde, eriyebilir modüllerin altmodülleri, bölüm modülleri, direkt toplamaları ve direkt çarpımları eriyebilirlik kavramı bakımından incelenmektedir.

Aşağıda eriyebilir modüllerin altmodüllerinin ve bölüm modüllerinin eriyebilir olmak zorunda olmadığını gösteren bazı örnekler verilmektedir.

### Örnek 3.2.1

- (1)  $\mathbb{Z}_6$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}_6$ -modül olmasına rağmen,  $\mathbb{Z}_6$  nın altmodülü  $\langle \bar{2} \rangle$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}_6$ -modül değildir, çünkü  $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$  altmodülünün burulmasız elemanı yoktur.
- (2)  $\mathbb{Z}$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}$ -modüldür, fakat  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  bölüm modülünün  $\mathbb{Z}$ -modül olarak burulmasız elemanı yoktur. Bu sebeple,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}$ -modül değildir.
- (3)  $\mathbb{Z}_{(2)}$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}$ -modül olmasına rağmen,  $\mathbb{Z}_{(2)}/2\mathbb{Z}_{(2)}$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}$ -modül değildir. Çünkü,  $\frac{a}{b} + 2\mathbb{Z}_{(2)} \in \mathbb{Z}_{(2)}/2\mathbb{Z}_{(2)}$  ve  $2 \in \mathbb{Z}$  için  $\left(\frac{a}{b} + 2\mathbb{Z}_{(2)}\right) 2 = 0 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$  dir. Dolayısıyla  $\mathbb{Z}_{(2)}/2\mathbb{Z}_{(2)}$  bölüm modülünün burulmasız elemanı yoktur. Böylece  $\mathbb{Z}$ -modül olarak  $\mathbb{Z}_{(2)}/2\mathbb{Z}_{(2)}$  nin sıfırdan farklı elemanları için bir eriyebilir ayrışım bulunmamaktadır.

- (4)  $\mathbb{Z}_{(2)}$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}_{(2)}$ -modül olmasına rağmen, 3. örnekteki benzer tartışma gereğince  $\mathbb{Z}_{(2)}/2\mathbb{Z}_{(2)}$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}_{(2)}$ -modül değildir.

Eriyebilir bir modülün direkt toplananlarının da eriyebilir bir modül olup olmadığı aşağıdaki örnek yardımıyla incelenmektedir.

**Örnek 3.2.2**  $\mathbb{Z}_6$ -modül olarak  $M = \mathbb{Z}_6$  göz önüne alınsın. O halde  $M_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$  ve  $M_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$  için  $M = M_1 \oplus M_2$  dir. Ayrıca  $T_R(M) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$  ve  $T_R^*(M) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$  dir. Böylece  $\bar{1} = \bar{0} + \bar{1}$ ,  $\bar{2} = \bar{3} + \bar{5}$ ,  $\bar{3} = \bar{2} + \bar{1}$ ,  $\bar{4} = \bar{3} + \bar{1}$  ve  $\bar{5} = \bar{0} + \bar{5}$  olduğundan  $M$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}_6$ -modüldür. Buradan  $\bar{2} \in M$  için  $\bar{2} = \bar{3} + \bar{5}$  ayrışımı tek türdür ve  $\bar{3}, \bar{5} \notin M_1$  olduğundan bu ayrışım  $M_1$  de değildir. Benzer şekilde  $\bar{3} \in M$  için  $\bar{3} = \bar{2} + \bar{1}$  ayrışımı tek türdür ve  $\bar{1}, \bar{2} \notin M_2$  olduğundan bu ayrışım  $M_2$  de değildir. Dolayısıyla  $M_1$  ve  $M_2$  eriyebilir  $\mathbb{Z}_6$ -modüller değildir.

**Önerme 3.2.3**  $R$  bir tamlık bölgesi olsun. O zaman eriyebilir  $R$ -modüllerin her altmodülü de eriyebilir.

**İspat:**  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modül ve  $M$  nin bir altmodülü  $N$  olsun. Bu durumda  $R$  bir tamlık bölgesi olduğu için  $T_R(M)$  altkümesi  $M$  nin bir altgrubudur. Teorem 3.1.3 gereğince  $M$  bir burulmasız modüldür ve buradan  $N$  de burulmasız bir modüldür. Teorem 3.1.3 den  $N$  eriyebilir.  $\square$

**Lemma 3.2.4**  $R$ -modüllerin bir ailesi  $\{M_i\}_{i \in I}$  ve  $(m_i) \in \bigoplus_{i \in I} M_i$  olsun. Eğer  $m_k \in T_R^*(M_k)$  olacak biçimde bir  $k \in I$  varsa, yani  $a \in R$  olmak üzere  $m_k a = 0$  iken  $a = 0$  ise, o zaman  $(m_i) \in T_R^*(\bigoplus_{i \in I} M_i)$  dir.

**İspat:**  $(m_i)r = 0$  olacak şekilde bir  $r \in R$  var olsun. O zaman her  $i \in I$  için  $m_i r = 0$  dir. Bu durumda  $m_k r = 0$  olup, hipotez gereğince  $r = 0$  elde edilir.  $\square$

**Sonuç 3.2.5**  $R$ -modüllerin bir ailesi  $\{M_i\}_{i \in I}$  olsun. Eğer  $(m_i) \in T_R(\bigoplus_{i \in I} M_i)$  ise, o zaman her  $i \in I$  için  $m_i \in T_R(M_i)$  dir.

**Teorem 3.2.6** Her  $i = 1, 2$  için  $R_i$  bir halka ve  $M_i$  bir  $R_i$ -modül olsun. O zaman  $M = M_1 \oplus M_2$  nin eriyebilir bir  $R = R_1 \oplus R_2$ -modül olması için gerek ve yeter şart her  $i = 1, 2$  için  $M_i$  nin eriyebilir bir  $R_i$ -modül olmasıdır.

**İspat:** ( $\Leftarrow$ ):  $0 \neq (m_1, 0) \in M_1 \oplus M_2$  olsun. O zaman  $0 \neq m_1 \in M_1$  olduğundan  $m_1 = z_1 + y_1$  olacak şekilde  $z_1 \in T_{R_1}(M_1)$  ve  $y_1 \in T_{R_1}^*(M_1)$  vardır. O halde  $z_1 z_1' = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq z_1' \in R_1$  vardır. Ayrıca,  $M_2 \neq 0$  olduğundan  $0 \neq m_2 \in M_2$  vardır. Böylece  $m_2 = a_2 + b_2$  olacak şekilde  $a_2 \in T_{R_2}(M_2)$  ve  $b_2 \in T_{R_2}^*(M_2)$  vardır. O zaman  $(m_1, 0) = (z_1, -b_2) + (y_1, b_2)$  dir. Lemma 3.2.4 gereğince  $(y_1, b_2) \in T_R^*(M)$  dir. Ayrıca  $(z_1, -b_2)(z_1', 0) = (0, 0)$  olduğundan  $(z_1, -b_2) \in T_R(M)$  dir. Buradan  $(m_1, 0) \in M_1 \oplus M_2$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $(m_1, 0) = (z_1, -b_2) + (y_1, b_2)$  dir. Benzer şekilde  $0 \neq (0, m_2) \in M_1 \oplus M_2$  eriyebilir.

Her  $i = 1, 2$  için  $a_i \in T_{R_i}(M_i)$ ,  $b_i \in T_{R_i}^*(M_i)$  ve  $m_1 = a_1 + b_1$ ,  $m_2 = a_2 + b_2$  olacak şekilde  $0 \neq m_1 \in M_1$ ,  $0 \neq m_2 \in M_2$  olsun. O zaman her  $i = 1, 2$  için  $a_i a_i' = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq a_i' \in R_i$  vardır. Ayrıca  $m_1 + m_2 = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)$  dir. Buradan Lemma 3.2.4 gereğince  $(b_1, b_2) \in T_R^*(M)$  dir. Bunun yanı sıra  $(a_1, a_2) \in T_R(M)$  olduğundan  $(a_1, a_2)(a_1', a_2') = (0, 0)$  olacak şekilde  $a_1' \in R_1$  ve  $a_2' \in R_2$  vardır. Böylece  $M$  eriyebilir.

( $\Rightarrow$ ):  $m \in M_1$  olsun.  $M$  eriyebilir olduğundan  $(m, 0) = (m_1, m_2) + (n_1, n_2)$  olacak şekilde  $(m_i) \in T_R(M)$  ve  $(n_i) \in T_R^*(M)$  vardır. O zaman  $m \in M_1$  in bir eriyebilir ayrışımı  $m = m_1 + n_1$  dir. Buradan  $M_1$  eriyebilir. Benzer şekilde  $M_2$  de bir eriyebilir modüldür.  $\square$

**Teorem 3.2.7** Her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $M_i$  eriyebilir bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $T_R\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right)$  kümesi  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  nin bir altgrubu ise, o zaman  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  eriyebilir.

**İspat:**  $n = 2$  ve  $0 \neq (m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2$  olsun.

**I. Durum:**  $m_1 \neq 0$  ve  $m_2 = 0$  olsun.  $M_1$  eriyebilir olduğundan  $m_1 = m_1' + m_1''$  olacak şekilde  $m_1' \in T_{R_1}(M_1)$  ve  $m_1'' \in T_{R_1}^*(M_1)$  vardır. O zaman  $(m_1, 0) = (m_1', 0) + (m_1'', 0)$  olacak şekilde  $(m_1', 0) \in T_R(M_1 \oplus M_2)$  ve  $(m_1'', 0) \in T_R^*(M_1 \oplus M_2)$  vardır.

**II. Durum:**  $m_1 = 0$  ve  $m_2 \neq 0$  olsun.  $M_2$  eriyebilir olduğundan  $m_2 = m_2' + m_2''$  olacak şekilde  $m_2' \in T_{R_2}(M_2)$  ve  $m_2'' \in T_{R_2}^*(M_2)$  vardır. O zaman  $(0, m_2) = (0, m_2') + (0, m_2'')$  olacak şekilde  $(0, m_2') \in T_R(M_1 \oplus M_2)$  ve  $(0, m_2'') \in T_R^*(M_1 \oplus M_2)$  vardır.

**III. Durum:**  $m_1 \neq 0$  ve  $m_2 \neq 0$  olsun.  $M_1$  ve  $M_2$  eriyebilir olduğundan  $i = 1, 2$  için  $m_i = m_i' + m_i''$  olacak şekilde  $m_i' \in T_{R_i}(M_i)$  ve  $m_i'' \in T_{R_i}^*(M_i)$  vardır. Buradan  $(m_1, m_2) = (m_1', m_2') + (m_1'', m_2'')$  elde edilir. Ayrıca,  $T_R\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \leq \bigoplus_{i=1}^n M_i$  oldu-

ğundan  $(m'_1, 0), (0, m'_2) \in T_R(M_1 \oplus M_2)$  iken  $(m'_1, m'_2) \in T_R(M_1 \oplus M_2)$  dir. Benzer şekilde  $(m''_1, 0), (0, m''_2) \in T_R^*(M_1 \oplus M_2)$  iken  $(m''_1, m''_2) \in T_R^*(M_1 \oplus M_2)$  dir.

Böylece  $(m_1, m_2)$  eriyebilir ve buradan  $M_1 \oplus M_2$  eriyebilir. Tümevarım gereğince  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  eriyebilir.  $\square$

Eğer  $R$  bir tamlık bölgesi ise, o zaman bir  $R$ -modülün burulmalı elemanlarının kümesi  $R$  nin bir altgrubudur (Anderson ve Fuller 1992). Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

**Sonuç 3.2.8**  $R$  bir tamlık bölgesi olsun. Eğer  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $M_i$  eriyebilir bir  $R$ -modül ise, o zaman  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  eriyebilir.

Verilen sonuçların ışığında aşağıdaki örneklerden bahsedilmektedir.

**Örnek 3.2.9**  $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  olsun. Bu durumda

- (1)  $M$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}$ -modül değildir.
- (2)  $M$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}_2$ -modüldür.
- (3)  $M$  eriyebilir bir  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -modüldür.

**İspat:**

- (1)  $M$  burulmalı bir  $\mathbb{Z}$ -modül olduğundan  $M$  nin burulmasız elemanlarının kümesi boştur. Bu sebeple  $M$  eriyebilir değildir.
- (2)  $M$  burulmasız bir  $\mathbb{Z}_2$ -modül olduğundan Teorem 3.1.3 gereğince  $M$  eriyebilir.
- (3)  $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  için  $T_{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2}(M) = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})\}$  ve  $T_{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2}^*(M) = \{(\bar{1}, \bar{1})\}$  dir. Buradan  $M$  nin sıfırdan farklı elemanlarının eriyebilir ayrışmaları,

$$(\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{1}),$$

$$(\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{1}),$$

$$(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{1})$$

şeklindedir. □

### Örnek 3.2.10

- (1)  $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$  halkası,  $N = M_2(\mathbb{Z}_2)$  olmak üzere  $M = N \oplus N$  sağ  $R$ -modülü ele alınsın ve  $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \in N$  olsun. O zaman  $N$  eriyebilir olduğundan  $A, B \in N$  bir eriyebilir ayrışımına sahiptir. Bu durumda  $A = A' + A''$  ve  $B = B' + B''$  olacak şekilde  $A', B' \in T_R(N)$  ve  $A'', B'' \in T_R^*(N)$  vardır. Ayrıca  $(A', B') \in T_R(M)$  olmak zorunda değildir.
- (2)  $N = M_2(\mathbb{Z}_2)$  olmak üzere  $M = N \oplus N$  bir  $R = U_2(\mathbb{Z}_2)$ -modül olarak göz önüne alınsın. Bu durumda
- (i)  $N$  eriyebilir.
  - (ii)  $M$  eriyebilir.

### İspat:

- (1)  $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$  matrisinin bir eriyebilir ayrışımı  $A = C + D$  olacak şekilde  $C = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in T_R(N)$  ve  $D = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ \bar{z} & \bar{t} \end{pmatrix} \in T_R^*(N)$  var olsun.  $D \in T_R^*(N)$  olduğundan  $\bar{x}\bar{t} = \bar{1}$  veya  $\bar{y}\bar{z} = \bar{1}$  dir. Eğer  $\bar{x}\bar{t} = \bar{1}$  ise, o zaman  $\bar{x} = \bar{t} = \bar{1}$  dir. Buradan  $\bar{a} = \bar{0}$  ve  $\bar{d} = \bar{1}$  dir. Benzer şekilde eğer  $\bar{y}\bar{z} = \bar{1}$  ise, o zaman  $\bar{b} = \bar{1}$  ve  $\bar{c} = \bar{1}$  dir. Benzer tartışma  $B$  matrisi için de yapılarak aşağıdaki eriyebilir ayrışimler elde edilir:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ayrıca  $Y = \left( \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \right)$  için  $Y \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$  iken  $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{d} = \bar{0}$  olmalıdır. Dolayısıyla  $Y \notin T_R(M)$  dir.

(2) (i)  $N = M_2(\mathbb{Z}_2)$  bir  $R = U_2(\mathbb{Z}_2)$ -modül olsun.  $N$  nin sıfırdan farklı burulmalı elemanlarının eriyebilir ayrışimleri,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir.

(ii) Yukarıdaki benzer tartışma ile ispat tamamlanır.  $\square$

Bu kısımda modüllerin direkt çarpımları eriyebilirlik kavramı bakımından incelenmektedir.

**Lemma 3.2.11**  $\{R_i\}_{i \in I}$  halkaların bir ailesi ve her  $M_i$  bir  $R_i$ -modül olmak üzere

$\{M_i\}_{i \in I}$  modüllerin bir ailesi olsun. Ayrıca  $M = \prod_{i \in I} M_i$  ve  $R = \prod_{i \in I} R_i$  olsun. O zaman  $T_R^*(M) = \prod_{i \in I} T_{R_i}^*(M_i)$  dir.

**İspat:**  $(m_i) \in M$  ve  $(r_i) \in R$  için  $(m_i)(r_i) = (m_i r_i)$  dir. Her  $i \in I$  için  $m_i r_i = 0$  olacak şekilde  $(m_i) \in T_R^*(M)$  ve  $(r_i) \in R$  var olsun. O zaman  $(m_i)(r_i) = 0$  bulunur ve buradan  $(r_i) = 0$  dır. Böylece  $r_i = 0$  ve her  $i \in I$  için  $m_i \in T_{R_i}^*(M_i)$  dir. O halde  $T_R^*(M) \subseteq \prod_{i \in I} T_{R_i}^*(M_i)$  elde edilir. Diğer kapsama için  $mr = 0$  olacak şekilde  $m = (m_i) \in \prod_{i \in I} T_{R_i}^*(M_i)$  ve  $r = (r_i) \in R$  olsun. Buradan her  $i \in I$  için  $m_i r_i = 0$  dır. Böylece her  $i \in I$  için  $r_i = 0$  bulunur. Dolayısıyla  $r = 0$  dır ve buradan  $m \in T_R^*(M)$  dir. O halde  $\prod_{i \in I} T_{R_i}^*(M_i) \subseteq T_R^*(M)$  elde edilir.  $\square$

**Teorem 3.2.12**  $\{R_i\}_{i \in I}$  halkaların bir ailesi ve her  $M_i$  bir  $R_i$ -modül olmak üzere  $\{M_i\}_{i \in I}$  modüllerin bir ailesi olsun. Ayrıca  $M = \prod_{i \in I} M_i$  ve  $R = \prod_{i \in I} R_i$  olsun. O zaman  $M$  nin eriyebilir bir  $R$ -modül olması için gerek ve yeter şart her  $i \in I$  için  $M_i$  nin eriyebilir bir  $R_i$ -modül olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ .)  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modül ve  $i \in I$  olmak üzere  $x_i \in M_i$  olsun. O zaman  $k \in I$  olmak üzere  $k \neq i$  için  $m_i = x_i$  ve  $m_k = 0$  olacak şekilde  $0 \neq (m_i) \in M$  göz önüne alınsın. Hipotezden,  $(m_i) = (z_i) + (y_i)$  olacak şekilde  $(z_i) \in T_R(M)$  ve  $(y_i) \in T_R^*(M)$  vardır. Buradan  $(z_i)(t_i) = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq (t_i) \in R$  vardır. Dolayısıyla her  $i \in I$  için  $z_i t_i = 0$  dır. Bir taraftan, her  $k \neq i$  için  $z_k + y_k = 0$  ve  $x_i = z_i + y_i$  bulunur. Lemma 3.2.11 gereğince,  $y_i \in T_{R_i}^*(M_i)$  dir. Diğer taraftan,  $k \neq i$  olacak şekilde her  $k \in I$  için  $z_k + y_k = 0$  iken  $y_k t_k = 0$  elde edilir ve buradan  $t_k = 0$  dır. Böylece  $t_i \neq 0$  ve  $x_i \in M_i$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $x_i = z_i + y_i$  olarak bulunur. Sonuç olarak,  $M_i$  eriyebilir bir  $R_i$ -modüldür.

( $\Leftarrow$ .) Her  $i \in I$  için  $M_i$  eriyebilir bir  $R_i$ -modül ve  $0 \neq (m_i) \in M$  olsun. Buradan her  $0 \neq m_i \in M_i$  için  $m_i = z_i + y_i$  olacak şekilde  $z_i \in T_{R_i}(M_i)$  ve  $y_i \in T_{R_i}^*(M_i)$  vardır. O halde  $z_i z'_i = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq z'_i \in R_i$  mevcuttur. Ayrıca  $(m_i) = (u_i) + (v_i)$  olacak şekilde  $(u_i) \in T_R(M)$  ve  $(v_i) \in T_R^*(M)$  şöyle tanımlansın: Eğer  $m_i \neq 0$  ise, o zaman  $u_i = z_i$  ve  $v_i = y_i$  dir. Eğer  $m_i = 0$  ise, o zaman  $M_i \neq 0$  olduğundan  $0 \neq n_i \in M_i$  vardır. O halde,  $n_i = a_i + b_i$  olacak şekilde  $a_i \in T_{R_i}(M_i)$  ve  $b_i \in T_{R_i}^*(M_i)$  vardır. Buradan  $m_i = 0$  olacak şekildeki her  $i \in I$  için,  $u_i = -b_i$  ve  $v_i = b_i$  olarak tanımlansın. Burada bir taraftan,  $(u_i) \in T_R(M)$  olduğu gösterilmek istenmektedir.

Gerçekten,  $(u_i)(u'_i) = 0$  olacak şekilde bir  $(u'_i) \in R$  vardır. Söz konusu  $(u'_i)$  elemanı şu şekilde bulunur: Eğer  $m_i \neq 0$  ise, o zaman  $u_i = z_i$  dir. Aksi takdirde, yani  $m_i = 0$  ise, o zaman  $u'_i = 0$  dir. Bu durumda  $(u_i)(u'_i) = 0$  bulunur. Böylece  $(u_i) \in T_R(M)$  dir. Diğer taraftan, Lemma 3.2.11 gereğince  $(v_i) \in T_R^*(M)$  dir. Dolayısıyla  $(m_i)$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $(m_i) = (u_i) + (v_i)$  olarak elde edilir. Sonuç olarak,  $M$  bir eriyebilir modüldür.  $\square$

### 3.3 Polinom Halkaları Üzerindeki Modüllerin Eriyebilirlik Özelliği

Bu bölümde polinom halkaları, çarpık polinom halkaları, kuvvet serileri halkaları ve çarpık kuvvet serileri halkaları üzerindeki modüller eriyebilirlik kavramı bakımından incelenmektedir.

**Uyarı 3.3.1**  $R$  bir halka olmak üzere  $R[x]$  polinom halkası ve  $R[[x]]$  biçimsel kuvvet serileri halkası göz önüne alınsın. Ayrıca  $R$  nin bir endomorfizması  $\alpha$ , yani  $\alpha(1) = 1$  olmak üzere  $\alpha : R \rightarrow R$  bir halka homomorfizması olsun. Burada belirsiz bir  $x$  için çarpık polinomlar halkası  $R[x; \alpha]$  ile gösterilmektedir. O halde  $R[x; \alpha]$  nin her elemanı  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  şeklinde tek türlü yazılır ve halkanın çarpımı  $xa = \alpha(a)x$  ile belirlenir. Benzer şekilde, biçimsel çarpık kuvvet serilerinin halkası  $R[[x; \alpha]]$  nin her elemanı  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  formunda tek türlü olarak yazılır ve bu halkanın çarpımı  $xa = \alpha(a)x$  ile belirlenir.

Bir  $M$  modülünün polinom genişlemeleri aşağıdaki şekildedir:

- $M[x; \alpha] := \left\{ \sum_{i=0}^s m_i x^i \mid s \geq 0, m_i \in M \right\},$
- $M[[x; \alpha]] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \mid m_i \in M \right\}.$

Ayrıca  $m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \in M[[x; \alpha]]$  ve  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x; \alpha]]$  için

$$m(x)f(x) = \sum_t \left( \sum_{i+j=t} m_i \alpha^i(a_j) \right) x^t \quad (*)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Böylece bilinen toplama ve  $(*)$  da tanımlanan çarpma işlemi ile  $M[[x; \alpha]]$  bir  $R[[x; \alpha]]$ -modüldür. O halde  $(*)$  tanımına benzer bir tanım

ile  $M[x; \alpha]$  bir  $R[x; \alpha]$ -modüldür.

Bu doğrultuda aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

**Teorem 3.3.2**  $R$  bir tamlık bölgesi ve  $R$  nin birebir olmayan bir endomorfizması  $\sigma$  olsun. Eğer  $M[x; \sigma]$  eriyebilir bir  $R[x; \sigma]$ -modül ise, o zaman  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modüldür.

**İspat:**  $M[x; \sigma]$  eriyebilir bir  $R[x; \sigma]$ -modül olsun. Ayrıca  $0 \neq m \in M$  için  $m(x) = m$  göz önüne alınsın. Bu durumda  $M[x; \sigma]$  eriyebilir olduğundan,  $m(x) = d(x) + e(x)$  olacak şekilde  $d(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n \in T_{R[x; \sigma]}(M[x; \sigma])$  ve  $e(x) = e_0 + e_1x + \dots + e_tx^t \in T_{R[x; \sigma]}^*(M[x; \sigma])$  vardır. O halde  $m = d_0 + e_0$  ve  $d_1 + d_2x + \dots + d_nx^{n-1} + e_1 + e_2x + \dots + e_tx^{t-1} = 0$  dır. Aşağıdaki durumlar göz önüne alınsın:

**I.Durum:**  $d_0 \neq 0$  ve  $e_0 \neq 0$  olsun. Böylece  $d(x) \in T_{R[x; \sigma]}(M[x; \sigma])$  olduğundan  $d(x)f(x) = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_kx^k \in R[x; \sigma]$  vardır. Buradan  $d_0f_0 = 0$  bulunur. Eğer  $f_0 \neq 0$  ise ispat tamamlanır. Eğer  $f_0 = 0$  ise, o zaman  $d_0f_1 = 0$  dır. Benzer şekilde, eğer  $f_1 \neq 0$  ise ispat tamamlanır. Eğer  $f_1 = 0$  ise, o zaman  $d_0f_2 = 0$  bulunur. Bu şekilde devam edilirse  $d_0f_i = 0$  olacak şekilde  $0 \neq f_i \in R$  elde edilir. Dolayısıyla  $d_0 \in T_R(M)$  dir. Şimdi  $e_0 \in T_R^*(M)$  olduğu iddia edilsin. O zaman  $s \in R$  için  $e_0s = 0$  olsun. Böylece  $g \in M[x; \sigma]$  olmak üzere  $e(x)s = e_1xs + \dots + e_tx^ts = g(x)xs$  olarak bulunur. Bu durumda  $\sigma$  birebir olmadığından  $\sigma(r) = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq r \in R$  vardır. Eğer  $e(x)s = g(x)xs$  eşitliğini sağdan  $r$  ile çarparsak ve  $M[x; \sigma]$  nin çarpım tanımını kullanırsak  $e(x)sr = g(x)xsr = g(x)\sigma(sr)x = g(x)\sigma(s)\sigma(r)x = 0$  bulunur. O halde  $e(x)sr = 0$  elde edilir. Bu durumda  $e(x) \in T_{R[x; \sigma]}^*(M[x; \sigma])$  olduğundan  $sr = 0$  dır. Ayrıca  $R$  bir tamlık bölgesi ve  $r \neq 0$  olduğu için  $s = 0$  dır. Böylece  $e_0 \in T_R^*(M)$  bulunur. Buradan  $m \in M$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $m = d_0 + e_0$  dır.

**II.Durum:**  $d_0 \neq 0$  ve  $e_0 = 0$  olsun. O zaman  $m = d_0 + 0$  dır ve yukarıdaki ispatın benzeri uygulanırsa  $d_0 \in T_R(M)$  bulunur. Fakat  $m = d_0 + 0$  ayrışımı  $m \in M[x; \sigma]$  nin bir eriyebilir ayrışımı değildir. Dolayısıyla bu durum söz konusu değildir.

**III.Durum:**  $d_0 = 0$  ve  $e_0 \neq 0$  olsun. Böylece  $m = 0 + e_0$  dır ve yukarıdaki ispatın benzeri uygulanırsa  $e_0 \in T_R^*(M)$  bulunur. Buradan  $m \in M$  eriyebilir.

Sonuç olarak  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modüldür. □

**Sonuç 3.3.3**  $R$  bir tamlık bölgesi ve  $R$  nin birebir olmayan bir endomorfizması  $\sigma$  olsun. Eğer  $M[[x; \sigma]]$  eriyebilir bir  $R[[x; \sigma]]$ -modül ise, o zaman  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modüldür.

**Teorem 3.3.4**  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modül olsun. Bu durumda

- (1)  $M[x; \alpha]$  nın sabit terimli her elemanı eriyebiliridir.
- (2) Eğer  $\alpha$  izomorfizma ise, o zaman  $M[x; \alpha]$  eriyebilir bir  $R[x; \alpha]$ -modüldür.

**İspat:**

- (1)  $m_0 \neq 0$  olmak üzere  $m(x) = m_0 + m_1x + \cdots + m_nx^n \in M[x; \alpha]$  olsun.  $M$  eriyebilir olduğundan  $m_0 = z_0 + d_0$  olacak şekilde  $z_0 \in T_R(M)$  ve  $d_0 \in T_R^*(M)$  vardır. O halde  $n_0(x) = z_0$  ve  $d_0(x) = d_0 + m_1x + \cdots + m_nx^n$  olsun. Bu durumda  $n_0(x) \in T_{R[x; \sigma]}(M[x; \sigma])$  ve  $d_0(x) \in T_{R[x; \sigma]}^*(M[x; \sigma])$  dir. Gerçekten,  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_tx^t \in R[x; \alpha]$ ,  $d_0(x)f(x) = 0$  ve  $t \leq n$  olsun. O zaman  $d_0(x)f(x) = (d_0 + m_1x + m_2x^2 + \cdots + m_nx^n)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_tx^t) = 0$  dır. Buradan  $d_0(x)f(x) = (d_0a_0 + d_0a_1x + d_0a_2x^2 + \cdots + d_0a_tx^t) + (m_1xa_0 + m_1xa_1x + m_1xa_2x^2 + \cdots + m_1xa_tx^t) + (m_2x^2a_0 + m_2x^2a_1x + m_2x^2a_2x^2 + \cdots + m_2x^2a_tx^t) + \cdots + (m_nx^na_0 + m_nx^na_1x + m_nx^na_2x^2 + \cdots + m_nx^na_tx^t) = 0$  elde edilir. O halde,

- (i)  $d_0a_0 = 0$  dır. Buradan  $d_0 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $a_0 = 0$  bulunur.
- (ii)  $d_0a_1x + m_1xa_0 = 0$  dır. Böylece  $M[x; \alpha]$  nın çarpım tanımından  $xa = \alpha(a)x$  olduğundan  $d_0a_1x + m_1\alpha(a_0)x = 0$  elde edilir. Böylece  $d_0a_1 + m_1\alpha(a_0) = 0$  dır. Böylece  $a_0 = 0$  ve  $d_0 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $a_1 = 0$  elde edilir.
- (iii)  $d_0a_2x^2 + m_1xa_1x + m_2x^2a_0 = 0$  dır. Dolayısıyla  $M[x; \alpha]$  nın çarpım tanımı uygulanırsa  $d_0a_2x^2 + m_1\alpha(a_1)x^2 + m_2x\alpha(a_0)x = d_0a_2x^2 + m_1\alpha(a_1)x^2 + m_2\alpha^2(a_0)x^2 = 0$  elde edilir. O halde  $d_0a_2 + m_1\alpha(a_1) + m_2\alpha^2(a_0) = 0$  dır. Ayrıca  $a_0 = a_1 = 0$  ve  $d_0 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $a_2 = 0$  bulunur.
- (iv)  $d_0a_3x^3 + m_1xa_2x^2 + m_2x^2a_1x + m_3x^3a_0 = 0$  dır. Burada  $M[x; \alpha]$  nın çarpım tanımı uygulanırsa  $d_0a_3x^3 + m_1\alpha(a_2)x^3 + m_2x\alpha(a_1)x^2 + m_3x^2\alpha(a_0)x =$

$d_0a_3x^3 + m_1\alpha(a_2)x^3 + m_2\alpha^2(a_1)x^3 + m_3x\alpha^2(a_0)x^2 = d_0a_3x^3 + m_1\alpha(a_2)x^3 + m_2\alpha^2(a_1)x^3 + m_3\alpha^3(a_0)x^3 = 0$  bulunur. Buradan  $d_0a_3 + m_1\alpha(a_2) + m_2\alpha^2(a_1) + m_3\alpha^3(a_0) = 0$  dir. O halde  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  ve  $d_0 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $a_3 = 0$  bulunur.

Bu şekilde devam edilirse,

(n)  $d_0a_{n-1} + m_1\alpha(a_{n-2}) + m_2\alpha^2(a_{n-3}) + \dots + m_n\alpha^n(a_0) = 0$  dir ve buradan  $a_{n-1} = 0$  elde edilir. Böylece  $a_n = 0$  dir ve buradan  $f(x) = 0$  bulunur.

Şimdi  $t > n$  olsun. O halde  $n$ . adımdan sonra  $d_0a_{n+1} = d_0a_{n+2} = \dots = d_0a_t = 0$  elde edilir. Böylece  $d_0 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_t = 0$  bulunur. Dolayısıyla  $f(x) = 0$  dir. O zaman  $m(x)$  in bir eriyebilir ayrışımı  $m(x) = n_0(x) + d_0(x)$  olarak bulunur.

(2)  $l \neq 0$  için  $0 \neq m(x) = (m_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + m_nx^n)x^l \in M[x; \alpha]$  olsun.

O zaman  $m_0 \neq 0$  ve  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modül olduğundan  $m_0 = z_0 + d_0$  olacak şekilde  $z_0 \in T_R(M)$  ve  $d_0 \in T_R^*(M)$  vardır. Böylece  $n_0(x) = z_0x^l \in T_{R[x; \alpha]}(M[x; \alpha])$  dir. Çünkü  $z_0 \in T_R(M)$  olduğundan  $z_0r = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq r \in R$  vardır. Ayrıca  $\alpha$  örten olduğundan  $\alpha^l$  de örtendir. O halde  $r = \alpha^l(s)$  olacak şekilde bir  $0 \neq s \in R$  vardır. O zaman  $n_0(x) = z_0x^l$  yi sağdan  $s$  ile çarparsak ve  $M[x; \alpha]$  nın çarpım tanımını kullanırsak  $z_0x^ls = z_0\alpha^l(s)x^l = z_0rx^l = 0$  bulunur. Ayrıca  $d_0(x) = (d_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + m_nx^n)x^l \in T_{R[x; \alpha]}^*(M[x; \alpha])$  dir. Gerçekten,  $t \leq n$  olmak üzere  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_tx^t \in R[x; \alpha]$  ve  $d_0(x)f(x) = 0$  olsun. Bu durumda  $d_0(x)f(x) = (d_0x^la_0 + d_0x^la_1x + d_0x^la_2x^2 + \dots + d_0x^la_tx^t) + (m_1x^{l+1}a_0 + m_1x^{l+1}a_1x + m_1x^{l+1}a_2x^2 + \dots + m_1x^{l+1}a_tx^t) + (m_2x^{l+2}a_0 + m_2x^{l+2}a_1x + m_2x^{l+2}a_2x^2 + \dots + m_2x^{l+2}a_tx^t) + \dots + (m_nx^{n+l}a_0 + m_nx^{n+l}a_1x + m_nx^{n+l}a_2x^2 + \dots + m_nx^{n+l}a_tx^t) = 0$  dir. Bu durumda,

(i)  $d_0x^la_0 = 0$  dir. Burada  $[M; \alpha]$  nın çarpım tanımı uygulanırsa  $d_0\alpha^l(a_0)x^l = 0$  bulunur ve buradan  $d_0\alpha^l(a_0) = 0$  elde edilir. Böylece  $d_0 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $\alpha^l(a_0) = 0$  dir. Buradan  $\alpha$  birebir olduğundan  $\alpha^l$  birebirdir. Dolayısıyla  $a_0 = 0$  bulunur.

(ii)  $d_0x^l a_1x + m_1x^{l+1}a_0 = 0$  dır. Benzer şekilde  $d_0\alpha^l(a_1) + m_1\alpha^{l+1}(a_0) = 0$  elde edilir ve buradan  $a_1 = 0$  bulunur.

(iii)  $d_0x^l a_2x^2 + m_1x^{l+1}a_1x + m_2x^{l+2}a_0 = 0$  dır. Benzer olarak  $d_0\alpha^l(a_2) + m_1\alpha^{l+1}(a_1) + m_2\alpha^{l+2}(a_0) = 0$  bulunur ve buradan  $a_2 = 0$  elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse,

(n-1)  $d_0\alpha^l(a_{n-2}) + m_1\alpha^{l+1}(a_{n-3}) + \dots + m_{n-2}\alpha^{l+(n-2)}(a_0) = 0$  dır. Böylece  $a_{n-2} = 0$  bulunur.

(n)  $d_0\alpha^l(a_{n-1}) + m_1\alpha^{l+1}(a_{n-2}) + \dots + m_{n-1}\alpha^{l+(n-1)}(a_0) = 0$  dır ve buradan  $a_{n-1} = 0$  bulunur. O halde  $a_n = 0$  dır. Böylece  $f(x) = 0$  elde edilir.

Şimdi  $t > n$  olsun. Bu durumda  $n$ . adımdan sonra  $d_0a_{n+1} = d_0a_{n+2} = \dots = d_0a_t = 0$  elde edilir. Buradan  $d_0 \in T_R^*(M)$  olduğundan  $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a^t = 0$  dır. Böylece  $f(x) = 0$  dır ve buradan  $d_0(x) \in T_{R[x;\alpha]}^*(M[x;\alpha])$  bulunur. O zaman  $m(x)$  in bir eriyebilir ayrışımı  $m(x) = n_0(x) + d_0(x)$  dir. Böylece ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 3.3.5** Eğer  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modül ise, o zaman  $M[x]$  eriyebilir bir  $R[x]$ -modüldür. Eğer  $R$  bir tamlık bölgesi ise, o zaman önermenin karşıtı da doğrudur.

**İspat:**  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modül olsun. O zaman  $\alpha = 1_R$  alınırsa Teorem 3.3.4 (2) den  $M[x]$  eriyebilir bir  $R[x]$ -modüldür. Karşıt olarak,  $R$  bir tamlık bölgesi ve  $0 \neq m \in M$  olsun. Ayrıca  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_tx^t$ ,  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \in M[x]$  olsun.  $M[x]$  eriyebilir bir  $R[x]$ -modül olduğundan  $m$  eriyebilir bir ayrışımına sahiptir yani,  $m = f(x) + g(x)$  olacak şekilde  $f(x) \in T_{R[x]}(M[x])$  ve  $g(x) \in T_{R[x]}^*(M[x])$  vardır. Bu durumda polinomların eşitliğinden  $m = a_0 + b_0$  dır. Bir taraftan, Teorem 3.3.2 nin ispatındaki benzer tartışma ile  $a_0 \in T_R(M)$  bulunur. Diğer taraftan, eğer  $b_0 \in T_R^*(M)$  ise, o zaman ispat tamamlanır. Kabul edilsin ki  $b_0 \in T_R(M)$  olsun.  $M[x]$  eriyebilir olduğundan  $b_0 = f_1(x) + g_1(x)$  olacak şekilde  $f_1(x) = c_0 + f_1'(x)x \in T_{R[x]}(M[x])$  ve  $g_1(x) = d_0 + g_1'(x)x \in T_{R[x]}^*(M[x])$  vardır. O zaman  $b_0 = c_0 + d_0$  dır. Buradan  $c_0 \in T_R(M)$  dir. Şimdi  $d_0 \in T_R^*(M)$  olsun. Bu durumda  $R$  bir tamlık bölgesi olduğundan ispat tamamlanır. Böylece  $a_0 + c_0 \in T_R(M)$  ve buradan  $m = (a_0 + c_0) + d_0$  ayrışımı  $m$  nin bir eriyebilir ayrışımıdır. Aksi takdirde,  $d_0 \in T_R(M)$  dir ve  $d_0$  ın  $M[x]$  te bir eriyebilir ayrışımı vardır yani,  $d_0 = f_2(x) + g_2(x)$  olacak

şekilde  $f_2(x) = c_1 + f'_2(x)x \in T_{R[x]}(M[x])$  ve  $g_2(x) = d_1 + g'_2(x)x \in T_{R[x]}^*(M[x])$  vardır. O halde  $d_0 = c_1 + d_1$  dir ve daha önce gösterildiği gibi  $c_1 \in T_R(M)$  dir. Eğer  $d_1 \in T_R^*(M)$  ise, o zaman ispat tamamlanır. Gerçekten,  $R$  de burulmalı elemanların toplamı burulmalı olduğundan  $a_0 + c_0 + c_1 \in T_R(M)$  dir. Bu durumda  $m$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $m = (a_0 + c_0 + c_1) + d_1$  dir. Aksi olarak,  $d_1 \notin T_R^*(M)$  olsun.  $M[x]$  eriyebilir olduğundan  $d_1$  eriyebilir bir ayrışuma sahiptir yani,  $d_1 = f_3(x) + g_3(x)$  olacak şekilde  $f_3(x) = c_2 + f'_3(x)x \in T_{R[x]}(M[x])$  ve  $g_3(x) = d_2 + g'_3(x)x \in T_{R[x]}^*(M[x])$  vardır. O halde,  $d_1 = c_2 + d_2$  dir. Böylece daha önce gösterildiği gibi  $c_2 \in T_R(M)$  dir. Eğer  $d_2 \in T_R^*(M)$  ise, o zaman ispat tamamlanır. Aksi olarak,  $d_2 \in T_R^*(M)$  olsun. Böylece ispat benzer şekilde devam eder, fakat bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu işlem sonlu bir adımda durur. Sonuç olarak,  $m \in M$  bir eriyebilir ayrışuma sahiptir.  $\square$

Bu kısımda indirgenmiş modüller ile eriyebilir modüller arasındaki ilişki incelenmektedir. Aşağıda eriyebilir olmayan indirgenmiş bir modül örneği verilmektedir.

**Örnek 3.3.6**  $p$  bir asal sayı ve  $n \geq 2$  olmak üzere  $R = \mathbb{Z}_{p^n}$  olsun. Bu durumda  $M = p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n}$  bir  $R$ -modül olarak göz önüne alınsın. O zaman  $M$  eriyebilir olmayan indirgenmiş bir modüldür.

**İspat:**  $M = p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} = \{\bar{0}, \overline{p^{n-1}}, \overline{p^{n-1}2}, \dots, \overline{p^{n-1}(p-1)}\}$  göz önüne alınsın. Ayrıca  $\bar{0} \neq \bar{m} = \overline{tp^{n-1}} \in M$  ve  $\overline{ms} = \bar{0}$  olmak üzere  $\bar{s} \in R$  olsun. Bu durumda  $\bar{0} \neq \bar{m} = \overline{tp^{n-1}}$  olduğundan  $p$  asalı  $t$  yi bölmez. Buradan ve  $\overline{ms} = \bar{0}$  olduğundan  $p$  asalı  $s$  yi böler. Şimdi  $\overline{mR} \cap M\bar{s} = \bar{0}$  olduğu gösterilmek istenmektedir. Bu durumda  $\overline{mr} = \overline{m_1s} \in \overline{mR} \cap M\bar{s}$  olsun. Ayrıca  $\overline{m_1} = \overline{t_1p^{n-1}}$  olarak alınsın. Bu eşitlik sağdan  $s$  ile çarpılırsa  $\overline{m_1s} = \overline{t_1p^{n-1}s}$  bulunur. O halde  $p$  asalı  $s$  yi böldüğü için  $s = pk$  olacak şekilde bir  $k \in \mathbb{Z}$  vardır. Böylece  $\overline{m_1s} = \overline{t_1p^{n-1}pk}$  dir ve buradan  $\overline{m_1s} = \overline{t_1p^{n-1}pk} = \overline{t_1p^n k}$  elde edilir. Ayrıca  $mr \equiv m_1s \pmod{p^n}$  ve  $\overline{m_1s} = \overline{t_1p^n k}$  olduğundan  $\overline{m_1s} \equiv 0 \pmod{p^n}$  bulunur. O halde  $mr \equiv 0 \pmod{p^n}$  dir. Bu yüzden  $\overline{mr} = \bar{0}$  dir ve böylece  $\overline{mR} \cap M\bar{s} = \bar{0}$  elde edilir. Dolayısıyla  $M$  indirgenmiştir. Ayrıca her  $0 \neq \bar{m} \in M$  için  $\bar{p} \in R$  olmak üzere  $\overline{mp} = \bar{0}$  olduğundan  $M$  eriyebilir değildir.  $\square$

Eriyebilir her modül indirgenmiş olmak zorunda değildir. Aşağıda bu duruma bir örnek verilmektedir.

**Örnek 3.3.7**  $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$  kendisi üzerinde bir  $R$ -modül olarak göz önüne alınsın yani,  $M_R = M_2(\mathbb{Z}_2)$  olsun. O zaman  $M$  indirgenmiş olmayan eriyebilir bir modüldür.

**İspat:**  $\mathbb{Z}_2$  eriyebilir olduğundan Lemma 2.1.22 gereğince  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modüldür.

Şimdi  $M$  nin indirgenmiş olmadığı gösterilmek istenmektedir. Eğer  $m = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$

ve  $a = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$  ise, o zaman  $ma = 0$  dır. Bu durumda eğer  $M_R$  indirgenmiş

olsaydı, o zaman  $mR \cap Ma = 0$  olarak bulunurdu. Ayrıca  $r = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in R$  ve

$m_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in M$  olsun. Böylece  $mr = m_1a \in mR \cap Ma$  elde edilir. Gerçekten,

$$mr = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = m_1a \neq 0 \text{ dır.}$$

Sonuç olarak,  $M$  indirgenmiş bir  $R$ -modül değildir.  $\square$

Ghashghaei ve McGovern (2017) değişmeli durumda eriyebilir halkaların indirgenmiş olduğunu göstermişlerdir. Bu kısımda benzer özellik eriyebilir modüller için incelenmektedir.

**Teorem 3.3.8**  $M$  eriyebilir bir  $R$ -modül ve  $R$  bir eş halka olsun. O zaman  $M$  indirgenmiştir.

**İspat:**

- (i)  $m \in M$  ve  $a \in R$  olsun. Ayrıca  $ma^2 = 0$  olduğu kabul edilsin. Eğer  $ma = 0$  ise, o zaman ispat tamamlanır. O halde  $ma \neq 0$  olsun.  $M$  eriyebilir olduğundan  $ma = z + y$  olacak şekilde  $z \in T_R(M)$  ve  $y \in T_R^*(M)$  vardır. Bu durumda  $zz' = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq z' \in R$  vardır. Bu durumda  $ma = y + z$  eşitliği sağdan  $a$  ile çarpılırsa  $za + ya = 0$  bulunur. Ayrıca  $R$  bir eş halka olduğundan  $za \in zR \subseteq Rz$  dir. Buradan  $za = tz$  olacak şekilde bir  $t \in R$  vardır. Böylece  $0 = za + ya = tz + ya$  elde edilir. Bu eşitliği sağdan  $z'$  ile çarparsak  $tz z' + ya z' = 0$  bulunur. Buradan  $ya z' = 0$  dır. Bu durumda  $y \in T_R^*(M)$  olduğundan  $az' = 0$  elde edilir. Ayrıca  $ma = z + y$  eşitliği sağdan  $z'$  ile çarpılırsa  $maz' = zz' + yz'$

olarak bulunur ve buradan  $yz' = 0$  dır. Burada  $y \in T_R^*(M)$  olduğundan  $z' = 0$  dır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $ma^2 = 0$  iken  $ma = 0$  bulunur.

(ii)  $ma = 0$  olacak şekilde  $m \in M$  ve  $a \in R$  olsun. Ayrıca  $mR \cap Ma \neq 0$  olduğu kabul edilsin. Şimdi  $0 \neq mr' = m'a \in mR \cap Ma$  olsun. O zaman  $R$  bir eş halka olduğundan  $r'a \in Ra \subseteq aR$  dir. Bu durumda  $r'a = at$  olacak şekilde bir  $t \in R$  vardır. Eğer  $mr' = m'a$  eşitliği sağdan  $a$  ile çarpılırsa ve  $r'a = at$  olduğu kullanılırsa  $m'a^2 = mr'a = mat = 0$  elde edilir. Ayrıca kabulden  $ma = 0$  olduğundan  $mat = 0$  dır ve buradan  $m'a^2 = 0$  bulunur. Böylece (i) den  $m'a = 0$  dır. O halde  $mR \cap Ma = 0$  bulunur. Ayrıca  $mRa \subseteq mR \cap Ma$  olduğundan  $mRa = 0$  dır.

Sonuç olarak, Lemma 2.1.21 gereğince  $M$  indirgenmiştir. □

Teorem 3.3.8 den aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

**Sonuç 3.3.9** Değişmeli halka üzerindeki eriyebilir her modül indirgenmiştir.

## 4. ERİYEYİLİR ENDOMORFİZMALAR

### 4.1 Eriyebilir Endomorfizmalar

Bu bölümde modüllerin endomorfizmaları, eriyebilirlik kavramı bakımından incelenmektedir.

**Tanım 4.1.1**  $M$  bir modül ve  $0 \neq f \in S$  olsun. Eğer  $f = g + h$  olacak şekilde bir sol (sağ) sıfır bölen eleman  $g \in S$  ve bir sol (sağ) sıfır bölen olmayan eleman  $h \in S$  var ise, o zaman  $f$  ye *sol (sağ) eriyebilir endomorfizma (fusible endomorphism)* denir. Eğer  $f$  hem sol hem de sağ eriyebilir ise, o zaman  $f$  ye *eriyebilir endomorfizma* denir.

**Teorem 4.1.2**  $M$  bir modül ve  $M_n = M$ ,  $S = \text{End}_R(N)$  olmak üzere  $N = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$  olsun. O zaman

- (1) Eğer  $f \in S$  bir ileri kaydırma operatörü, yani  $f \geq 0$  için  $f(m_n) = m_{n+1}$  ise, o zaman  $f$  eriyebiliridir.
- (2) Eğer  $f \in S$  bir geri kaydırma operatörü, yani  $n \geq 1$  için  $f(m_0) = 0$  ve  $f(m_n) = m_{n-1}$  ise, o zaman  $f$  eriyebiliridir.
- (3) Eğer  $f \in S$  bir geri kaydırma operatörü ve  $g \in S$  bir ileri kaydırma operatörü ise, o zaman  $fg$  ve  $gf$  eriyebiliridir.
- (4) Eğer  $f \in S$  bir geri kaydırma operatörü ve  $g \in S$  bir ileri kaydırma operatörü ise, o zaman  $f + g$  sol eriyebiliridir.

**İspat:**

- (1)  $n \geq 0$  için  $f \in S$  olmak üzere  $f(m_n) = m_{n+1}$  olsun. O halde  $e(m_{2n}) = m_{2n}$  ve  $e(m_{2n+1}) = m_{2n+2} - m_{2n}$  olacak şekilde bir  $e \in S$  endomorfizması göz önüne alınsın. Bu durumda  $e^2(m_{2n}) = e(m_{2n})$  ve  $e^2(m_{2n+1}) = e(m_{2n+2} - m_{2n}) = e(m_{2n+2}) - e(m_{2n}) = m_{2n+2} - m_{2n} = e(m_{2n+1})$  olduğundan  $e^2 = e \in S$  bulunur. Böylece  $e$  sıfır bölendir. Şimdi  $u = f - e$  nin tersinir olduğu iddia edilsin. Bu durumda  $g \in S$  için  $g(m_{2n}) = m_{2n+1}$  ve  $g(m_{2n+1}) = m_{2n+1} + m_{2n}$  olsun. Bir taraftan,  $gu(m_{2n}) = g((f-e)(m_{2n})) = g(f(m_{2n}) - e(m_{2n})) = g(m_{2n+1} - m_{2n}) =$

$g(m_{2n+1}) - g(m_{2n}) = m_{2n+1} + m_{2n} - m_{2n+1} = m_{2n}$  ve  $gu(m_{2n+1}) = g((f - e)(m_{2n+1})) = g(f(m_{2n+1}) - e(m_{2n+1})) = g(m_{2n+2} - m_{2n+2} + m_{2n}) = g(m_{2n}) = m_{2n}$  dir. Diğer taraftan,  $ug(m_{2n}) = (f - e)(g(m_{2n})) = (f - e)(m_{2n+1}) = f(m_{2n+1}) - e(m_{2n+1}) = m_{2n+2} - m_{2n+2} + m_{2n} = m_{2n}$  ve  $ug(m_{2n+1}) = (f - e)g(m_{2n+1}) = (f - e)(m_{2n+1} + m_{2n}) = f(m_{2n+1} + m_{2n}) - e(m_{2n+1} + m_{2n}) = f(m_{2n+1} + m_{2n}) - e(m_{2n+1} + m_{2n}) = f(m_{2n+1}) + f(m_{2n}) - e(m_{2n+1}) - e(m_{2n}) = m_{2n+2} + m_{2n+1} - m_{2n+2} + m_{2n} - m_{2n} = m_{2n+1}$  dir. Dolayısıyla  $u$  tersinir bir elemandır. Sonuç olarak  $f = e + u$  elde edilir ve buradan  $f$  eriyebilir.

(2)  $n \geq 1$  için  $f \in S$  olmak üzere  $f(m_0) = 0$  ve  $f(m_n) = m_{n-1}$  olsun. O halde  $n \geq 1$  için  $e(m_0) = m_0$ ,  $e(m_{2n}) = m_{2n}$  ve  $e(m_{2n+1}) = m_{2n} - m_{2n+2}$  olacak şekilde bir  $e \in S$  endomorfizması göz önüne alınsın. Bu durumda  $e^2(m_0) = e(m_0)$ ,  $e^2(m_{2n}) = e(m_{2n})$  ve  $e^2(m_{2n+1}) = e(m_{2n} - m_{2n+2}) = e(m_{2n}) - e(m_{2n+2}) = m_{2n} - m_{2n+2} = e(m_{2n+1})$  olduğundan  $e^2 = e \in S$  elde edilir. Böylece  $e$  sıfır bölendir. Şimdi  $u = f - e$  nin tersinir olduğu iddia edilsin. O halde  $n \geq 1$  için  $g(m_0) = -m_0$ ,  $g(m_{2n}) = m_{2n-1}$  ve  $g(m_{2n+1}) = m_{2n+1} + m_{2n+2}$  olacak şekilde bir  $g \in S$  tanımlansın. Bir taraftan,  $gu(m_0) = g((f - e)(m_0)) = g(f(m_0) - e(m_0)) = g(-m_0) = m_0$ ,  $gu(m_{2n}) = g((f - e)(m_{2n})) = g(f(m_{2n})) - e(m_{2n})) = g(m_{2n-1} - m_{2n}) = g(m_{2n-1}) - g(m_{2n}) = m_{2n-1} + m_{2n} - m_{2n-1} = m_{2n}$  ve  $gu(m_{2n+1}) = g((f - e)(m_{2n+1})) = g(f(m_{2n+1}) - e(m_{2n+1})) = g(m_{2n} - m_{2n} + m_{2n+2}) = g(m_{2n+2}) = m_{2n+1}$  dir. Diğer taraftan,  $ug(m_0) = (f - e)g(m_0) = (f - e)(-m_0) = f(-m_0) - e(-m_0) = m_0$ ,  $ug(m_{2n}) = (f - e)g(m_{2n}) = (f - e)(m_{2n-1}) = f(m_{2n-1}) - e(m_{2n-1}) = m_{2n-2} - m_{2n-2} + m_{2n} = m_{2n}$  ve  $ug(m_{2n+1}) = (f - e)g(m_{2n+1}) = (f - e)(m_{2n+1} + m_{2n+2}) = f(m_{2n+1}) + f(m_{2n+2}) - e(m_{2n+1}) - e(m_{2n+2}) = m_{2n} + m_{2n+1} - m_{2n} + m_{2n+2} - m_{2n+2} = m_{2n+1}$  dir. Böylece  $u$  tersinirdir. O halde  $f$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $f = e + u$  olarak bulunur.

(3)  $n \geq 1$  için  $f(m_0) = 0$ ,  $f(m_n) = m_{n-1}$  olacak şekilde bir  $f \in S$  ve  $n \geq 0$  için  $g(m_n) = m_{n+1}$  olacak şekilde bir  $g \in S$  tanımlansın. O zaman  $n \geq 0$  için  $fg(m_n) = f(m_{n+1}) = m_n$  olarak bulunur. Böylece  $fg = 1_S$  ve buradan  $fg$  eriyebilir. Ayrıca  $n \geq 1$  için  $gf(m_0) = g(0) = 0$  ve  $gf(m_n) = g(m_{n-1}) = m_n$

elde edilir. Bu durumda  $e = gf$  olsun. O halde  $e^2 = e \neq 1_S$  dir. Bu durumda  $2e - 1$  tersinir ve  $1 - e$  sıfır bölen olduğundan  $e$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $e = (1 - e) + (2e - 1)$  olarak elde edilir. Böylece  $gf$  eriyebilirdir.

- (4)  $f, g \in S$  olmak üzere  $n \geq 0$  için  $f(m_0) = 0$ ,  $f(m_n) = m_{n-1}$  ve  $n \geq 1$  için  $g(m_n) = m_{n+1}$  şeklinde tanımlansın. O zaman (3) ten  $f$  sol sıfır bölen ve  $g$  sol sıfır bölen olmayan elemandır. Dolayısıyla  $f + g$  sol eriyebilirdir.  $\square$

Teorem 4.1.2 gereğince aşağıdaki sonuca ulaşılır.

**Sonuç 4.1.3**  $R$  bir halka olsun ve  $R$  üzerindeki tüm sütun sonlu matrislerin halkası

$S = \mathbb{CFM}(R)$  ile gösterilsin. O zaman 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in S$$
 sol eriyebilirdir. Ayrıca 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in S$$
 eriyebilirdir.

**Önerme 4.1.4**  $M$  bir modül ve  $0 \neq f \in S$  olsun. O zaman  $f$  nin sol eriyebilir olması için gerek ve yeter şart  $\alpha \in S$  tersinir olmak üzere  $\alpha f \alpha^{-1}$  in sol eriyebilir olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $0 \neq f \in S$  sol eriyebilir olsun. O zaman,  $f = g + h$  olacak şekilde bir sol sıfır bölen eleman  $g \in S$  ve bir sol sıfır bölen olmayan eleman  $h \in S$  vardır. Bu durumda  $g\beta = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq \beta \in S$  mevcuttur. Kabul edilsin ki  $\alpha \in S$  tersinir olsun. Bir taraftan,  $(\alpha g \alpha^{-1})(\alpha \beta) = \alpha g \beta = 0$  dır. Böylece  $\alpha \beta \neq 0$  olduğundan  $\alpha g \alpha^{-1}$  sol sıfır bölen olarak bulunur. Diğer taraftan,  $h$  bir sol sıfır

bölen olmayan eleman ve  $\alpha$  tersinir olduğundan  $\alpha h \alpha^{-1}$  bir sol sıfır bölen olmayan elemandır. Dolayısıyla  $\alpha f \alpha$  nın bir eriyebilir ayrışımı  $\alpha f \alpha^{-1} = \alpha g \alpha^{-1} + \alpha h \alpha^{-1}$  dir.

( $\Leftarrow$ ):  $\alpha \in S$  tersinir olmak üzere  $\alpha f \alpha^{-1}$  sol eriyebilir olsun. O halde  $\alpha f \alpha^{-1} = g + h$  olacak şekilde bir sol sıfır bölen eleman  $g \in S$  ve bir sol sıfır bölen olmayan eleman  $h \in S$  vardır. Bu durumda  $g\beta = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq \beta \in S$  mevcuttur. Ayrıca  $\alpha f \alpha^{-1} = g + h$  eşitliği soldan  $\alpha^{-1}$  ve sağdan  $\alpha$  ile çarpılırsa  $f = \alpha^{-1}g\alpha + \alpha^{-1}h\alpha$  elde edilir. Buradan  $(\alpha^{-1}g\alpha)(\alpha^{-1}\beta) = \alpha^{-1}g\beta = 0$  bulunur. Böylece  $\alpha^{-1}\beta \neq 0$  olduğundan  $\alpha^{-1}g\alpha$  bir sol sıfır bölen elemandır. Buna ek olarak,  $h$  bir sol sıfır bölen olmayan eleman ve  $\alpha$  tersinir olduğundan  $\alpha^{-1}h\alpha$  bir sol sıfır bölen olmayan elemandır. Sonuç olarak,  $f$  sol eriyebilir.  $\square$

**Sonuç 4.1.5**  $R$  bir halka ve  $0 \neq a \in R$  olsun. O zaman  $a$  nın sol eriyebilir olması için gerek ve yeter şart  $x \in R$  tersinir olmak üzere  $axx^{-1}$  in sol eriyebilir olmasıdır.

**Önerme 4.1.6**  $M$  bir modül ve  $0 \neq f \in S$  olsun. Eğer  $f$  sağ eriyebilir ve  $g \in S$  tersinir ise, o zaman  $fg$  ve  $gf$  sağ eriyebilir.  $\square$

**İspat:**  $f \in S$  sağ eriyebilir ve  $g \in S$  tersinir olsun. Bu durumda  $f = u + v$  olacak şekilde bir sağ sıfır bölen eleman  $u$  ve bir sağ sıfır bölen olmayan eleman  $v$  vardır. O zaman eğer bu eşitlik sağdan  $g$  ile çarpılırsa  $fg = ug + vg$  ve soldan  $g$  ile çarpılırsa  $gf = gu + gv$  elde edilir. Bu durumda  $u$  bir sağ sıfır bölen eleman olduğundan  $yu = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq y \in S$  vardır ve buradan  $y(ug) = 0$  elde edilir. Böylece  $ug$  sağ sıfır bölen elemandır. Kabul edilsin ki  $x \in S$  olmak üzere  $x(vg) = 0$  olsun. Bu durumda  $g \in S$  tersinir olduğundan  $xv = 0$  elde edilir ve böylece  $v$  bir sağ sıfır bölen olmayan eleman olduğundan  $x = 0$  bulunur. O halde  $vg \in S$  bir sağ sıfır bölen olmayan elemandır. Dolayısıyla  $fg$  sağ eriyebilir.  $\square$

Diğer yandan,  $y \neq 0$  ve  $g \in S$  tersinir olduğundan  $yg^{-1} \neq 0$  dır. Böylece  $(yg^{-1})(gu) = yu = 0$  dır ve buradan  $gu$  sağ sıfır bölendir. Şimdi  $x \in S$  için  $x(gv) = 0$  olsun. O zaman  $v$  bir sağ sıfır bölen olmayan eleman olduğundan  $xg = 0$  dır ve buradan  $g$  tersinir olduğu için  $x = 0$  elde edilir. Buradan  $gv$  bir sağ sıfır bölen olmayan elemandır. Sonuç olarak  $gf$  sağ eriyebilir.  $\square$

**Sonuç 4.1.7** Bir  $R$  halkası için aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Eğer  $0 \neq a \in R$  sağ eriyebilir ve  $b \in R$  tersinir ise, o zaman  $ab$  ve  $ba$  sağ eriyebilirlerdir.
- (2) Kabul edilsin ki  $0 \neq A \in M_n(R)$  sağ eriyebilir olsun. Eğer  $A$  ya uygulanan satır ve sütun işlemleri  $P$  ve  $Q$  ile gösterilirse, o zaman  $PA, AP, AQ$  ve  $QA$  sağ eriyebilirlerdir.

Bir sonraki sonuçta, abelyen dual Rickart modüllerin endomorfizmaları eriyebilirlik kavramı açısından incelenmektedir.

**Teorem 4.1.8** Eğer  $M$  bir abelyen dual Rickart modül ve  $0 \neq f \in S$  ise, o zaman  $f$  sağ eriyebilir veya  $gf$  sağ eriyebilir olacak şekilde bir  $g^2 = g \in S$  mevcuttur.

**İspat:**  $M$  bir abelyen dual Rickart modül ve  $0 \neq f \in S$  olsun. Eğer  $f(M) = M$  ise, o zaman  $f$  bir sağ sıfır bölen olmayan elemandır. Gerçekten,  $hf = 0$  olacak şekilde bir  $h \in S$  var olsun. Bu durumda  $hf(M) = 0$  dır ve  $f(M) = M$  olduğundan  $hf(M) = h(M) = 0$  dır. Dolayısıyla  $h = 0$  dır ve buradan  $f$  bir sağ sıfır bölen olmayan elemandır. Böylece  $f$  sağ eriyebilirlerdir. Kabul edilsin ki  $f(M) \neq M$  olsun. Hipotezden,  $f(M) = eM$  olacak şekilde bir  $1 \neq e^2 = e \in S$  vardır. Eğer  $(f - e)M = M$  ise, o zaman  $f - e$  bir sağ sıfır bölen olmayan elemandır ve  $f$  nin bir sağ eriyebilir ayrışımı  $f = e + (f - e)$  dir. Aksi takdirde,  $M$  abelyen dual Rickart modül olduğundan  $(f - e)g = g(f - e) = 0$  olacak şekilde bir  $g^2 = g \in S$  vardır. Buradan  $gf = eg$  elde edilir ve böylece  $(gf)^2 = gfgf = eggf = egf = eeg = eg = gf$  olduğundan  $gf$  eşkaredir. Dolayısıyla  $gf$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $gf = (1 - gf) + (2gf - 1)$  dir.  $\square$

Şimdi von Neumann düzenli endomorfizmaların hangi şartlar altında eriyebilir olduğu araştırılmaktadır. Morfik modüllerin yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

**Teorem 4.1.9**  $M$  bir morfik, yarı-projektif modül ve  $0 \neq \theta \in S$  von Neumann düzenli olsun. Eğer  $M$  nin direkt toplananları  $\theta(M) + \text{Ker}(\theta)$  ve  $\theta(M) \cap \text{Ker}(\theta)$  ise, o zaman  $\theta$  sol eriyebilirlerdir.

**İspat:** Bu ispat Teorem 2.1.30 daki benzer tartışma ile yapılmaktadır.  $\theta$  von Neumann düzenli olduğundan Lemma 2.1.31 gereğince  $M$  nin direkt toplananları  $\theta(M)$

ve  $\text{Ker}(\theta)$  dır. Hipotezden  $M$  nin direkt toplananları  $P = \theta(M) + \text{Ker}(\theta)$  ve  $K = \theta(M) \cap \text{Ker}(\theta)$  dır ve buradan  $M$  nin  $Y, Z$  altmodülleri için  $M = P \oplus Y$  ve  $M = K \oplus Z$  dir.  $P$  yarı-projektif olduğundan ( $M$  nin bir direkt toplananı olmasından dolayı) Lemma 2.1.32 gereğince  $P = \theta(M) \oplus X$  olacak şekilde bir  $X \subseteq \text{Ker}(\theta)$  vardır ve buradan  $M = \theta(M) \oplus X \oplus Y$  elde edilir. O halde  $X \subseteq \text{Ker}(\theta) \subseteq \theta(M) \oplus X$  olduğundan modülerite kuralı gereğince  $\text{Ker}(\theta) = X \oplus K$  bulunur.  $M$  morfik olduğundan  $X \oplus K = \text{Ker}(\theta) \cong M/\theta(M) \cong X \oplus Y$  dir ve böylece Lemma 2.1.28 gereğince  $K \cong Y$  elde edilir. Şimdi  $\phi : K \rightarrow Y$  ve  $\eta : X \oplus K \rightarrow X \oplus Y$  birer izomorfizma olsun. O halde  $K \subseteq \theta(M)$  ve  $M$  nin bir direkt toplananı  $K$  olduğundan  $\theta(M) = K \oplus L$  olacak şekilde bir  $L \subseteq M$  vardır. Böylece  $M = K \oplus L \oplus X \oplus Y$  bulunur. Bu durumda  $v, w \in S$  olmak üzere aşağıdaki diyagramı elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccccc}
M & = & X \oplus Y & \oplus & K & \oplus & L \\
v \downarrow & & \eta^{-1} \downarrow & & \phi \downarrow & & 0 \downarrow \\
M & = & X \oplus K & \oplus & Y & \oplus & L \\
\text{ve} & & & & & & \\
M & = & X \oplus K & \oplus & Y & \oplus & L \\
w \downarrow & & \eta \downarrow & & 1_Y \downarrow & & 0 \downarrow \\
M & \supseteq & X \oplus Y & + & Y & + & L
\end{array}$$

Teorem 2.1.30 un ispatındaki benzer tartışma ile  $wvw = w$  ve  $\theta - wv$  tersinirdir. Bu ispatın tamamlanması için eşkare  $wv$  nin  $S$  de tersinir olmadığı iddia edilsin. O zaman  $0 \neq k + l \in K \oplus L$  olsun. Bu durumda  $v(l) = 0$  ve  $v(k) = \phi(k)$  olduğundan  $wv(k + l) = \phi(k)$  dır. Buradan  $wv \neq 1_S$  bulunur. Ayrıca  $u = \theta - wv$  olsun. Böylece  $\theta = wv + u$  elde edilir. O zaman eşkare  $wv \in S$  bir sol sıfır bölen ve  $u \in S$  bir sol sıfır bölen olmayan elemandır. Sonuç olarak,  $\theta$  bir sol eriyebilir ayrışma sahiptir.  $\square$

**Sonuç 4.1.10** Eğer  $M$ ,  $SSP$  ve  $SIP$  yi sağlayan morfik ve yarı-projektif bir modül ise, o zaman  $M$  nin her von Neumann düzenli sıfırdan farklı endomorfizması sol eriyebilir.

**İspat:**  $M$  morfik, yarı-projektif ve  $SSP$  ile  $SIP$  yi sağlayan bir modül olsun. O zaman Teorem 4.1.9 gereğince ispat tamamlanır.  $\square$

**Sonuç 4.1.11**  $M$  bir endo-düzenli morfik yarı-projektif modül olsun. O zaman  $M$

nin her endomorfizması sol eriyebilirdir.

**İspat:** Önerme 2.1.37 gereğince, her endo-düzenli modül  $SSP$  ve  $SIP$  yi sağlar. Böylece Sonuç 4.1.10 gereğince ispat tamamlanır.  $\square$

Aşağıdaki örnek ile eriyebilir bir endomorfizmanın kısıtlamasının da eriyebilir olup olmadığı araştırılmaktadır.

**Örnek 4.1.12**  $\mathbb{Z}$ -modül olarak  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$  göz önüne alınsın. O halde  $S = M_2(\mathbb{Z}_4)$  elde edilir. Bu durumda  $\alpha(x, y) = (\bar{2}x + y, y)$  ile tanımlanan bir  $\alpha$  endomorfizması ele alınsın. Böylece  $\alpha$  nın standart matrisi  $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$  şeklindedir. Dolayısıyla  $\alpha$  nın sağ eriyebilir ayrışımı,  $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_4)$  sağ sıfır bölen ve  $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_4)$  sağ sıfır bölen olmayan eleman olmak üzere  $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$  olarak bulunur. Ayrıca  $\bar{2} \in M_2(\mathbb{Z}_4)$  eriyebilir olmadığından,  $\alpha|_{\mathbb{Z}_4}(x) = \bar{2}x$  sağ eriyebilir değildir.

Şimdi eriyebilir halkaların köşe halkaları eriyebilirlik kavramı bakımından incelenmektedir. Ayrıca Lemma 2.1.22 gereğince bir  $F$  cismi için  $M_n(F)$  matris halkası eriyebilirdir. Bu doğrultuda aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

**Teorem 4.1.13**  $F$  bir cisim olsun. O zaman  $M_2(F)$  nin her sıfırdan farklı köşe halkası eriyebilirdir.

**İspat:**  $M_2(F)$  nin aşıkâr olmayan her eşkare elemanın formu  $bc = a - a^2$  olmak üzere  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$  şeklindedir. Kabul edilsin ki  $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \in M_2(F)$  aşıkâr olmayan bir eşkare eleman,  $EAE \neq 0$  ve  $u = ax + cy + bz + (1-a)t$  olmak üzere  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(R)$  olsun. Ayrıca  $U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$  alınsın. Buradan  $EAE = EU = UE$  dir. Eğer  $u = 0$  ise, o zaman  $EAE = 0$  dir. O halde  $u \neq 0$  olsun. Böylece  $u^{-1} \in F$  ve  $U^{-1} = \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in M_2(F)$  dir. Bu durumda  $EAE = EU = UE$

olduğundan  $(EAE)(EU^{-1}E) = E = (EU^{-1}E)(EAE)$ . Böylece  $EM_2(F)E$  nin bir tersinir elemanı  $EAE$  olarak bulunur. Sonuç olarak,  $EAE$  eriyebilir ve buradan  $EM_2(F)E$  eriyebilir.

**Teorem 4.1.14**  $M$  bir modül,  $\alpha \in S$  sol eriyebilir ve  $e^2 = e \in S$  sol yarı merkezi olsun. O zaman  $e\alpha e \in eSe$  sol eriyebilir.

**İspat:** Kabul edilsin ki  $\alpha$  nın sol eriyebilir ayrışımı  $f \in S$  bir sol sıfır bölen,  $g \in S$  bir sol sıfır bölen olmayan eleman olmak üzere  $\alpha = f + g$  olsun. Bu durumda  $e\alpha e = efe + ege$  dir. Böylece  $f$  bir sol sıfır bölen eleman olduğundan  $fh = 0$  olacak şekilde bir  $0 \neq h \in S$  vardır. Bir taraftan,  $e$  sol yarı merkezi olduğundan  $(efe)(ehe) = efhe = efhe = 0$  dir. Buradan  $efe \in eSe$  sol sıfır bölendir. Diğer taraftan,  $(ege)(ete) = 0$  olacak şekilde bir  $t \in S$  olsun. O halde  $e$  sol yarı merkezi olduğundan  $(ege)(ete) = (ege)te = (ge)te = g(ete) = 0$  elde edilir. Böylece  $g \in S$  sol sıfır bölen olmayan bir eleman olduğundan  $ete = 0$  bulunur. Dolayısıyla  $ege \in eSe$  bir sol sıfır bölen olmayan elemandır. Sonuç olarak,  $e\alpha e \in eSe$  sol eriyebilir.  $\square$

**Sonuç 4.1.15** Eğer  $R$  bir sol eriyebilir halka ise, o zaman her sol yarı merkezi eşkare eleman  $e \in R$  için  $eRe$  sol eriyebilir.

$R$  bir halka ve  $e^2 = e \in R$  olsun. Bu durumda  $eRe$  köşe halkasının sol eriyebilir olması  $e$  nin sol yarı merkezi olmasını gerektirmez.

**Örnek 4.1.16**  $R = M_2(\mathbb{Z}_6)$  ve  $E^2 = E = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_6)$  olsun. Bu durumda

$$ERE = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3}x \\ \bar{2}x & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_6 \right\}, \text{ yani}$$

$$ERE = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{5} \end{pmatrix} \right\}$$

olarak bulunur. Böylece  $A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_6)$  için  $AE = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix} = EAE$  olduğundan  $E$  sol yarı merkezi değildir. Bir taraftan,  $ERE$  nin sol sıfır bö-

len olmayan elemanları  $U = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{5} \end{pmatrix}$  dir ve böylece eriyebilir ayrışma sahiptirler. Diğer taraftan,  $ERE$  nin sol sıfır bölen elemanlarının ayrışımı,

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Dolayısıyla  $ERE$  sol eriyebilirdir.

Şimdi eriyebilir matrislerle ilgili önemli bir sonuç verilmektedir. Lemma 2.1.22 için verilen algoritma bazı matrislerin, örneğin  $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{5} & \bar{0} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_6)$  matrisinin, eriyebilir ayrışımını bulmak konusunda çalışmamaktadır. Bu nedenle Lemma 2.1.22 için alternatif bir ispat verilmektedir.

**Teorem 4.1.17**  $R$  bir halka olsun. O zaman  $R$  nin sol eriyebilir olması için gerek ve yeter şart keyfi bir  $n$  pozitif tamsayısı için  $M_n(R)$  nin sol eriyebilir olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ .)  $R$  sol eriyebilir bir halka olsun. Şimdi  $M_2(R)$  nin sol eriyebilir bir halka olduğu gösterilmektedir. Aşağıdaki durumlar  $M_2(R)$  deki sıfırdan farklı matrisler için incelenir:

**I.Durum:**  $0 \neq a \in R$  olsun. Bu durumda  $a = z + r$  olacak şekilde bir sol sıfır bölen  $z \in R$  ve bir sol sıfır bölen olmayan eleman  $r \in R$  vardır. O halde,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

sol eriyebilir ayrışimleri vardır. Benzer şekilde

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ -r & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ -r & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

matrisleri de sol eriyebilir ayrışına sahiptir.

**II.Durum:** Eğer  $0 \neq a, b \in R$  ise, o zaman  $R$  sol eriyebilir bir halka olduğundan  $a = r + z$  ve  $b = r' + z'$  olacak şekilde  $z, z' \in R$  sol sıfır bölen ve  $r, r' \in R$  sol sıfır bölen olmayan elemanlar mevcuttur. Böylece,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b \\ 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$  formundaki matrislerin sol eri-

yebilir ayrışımı  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  matrisine,  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$  formundaki matrislerin sol eriyebilir

ayrışımı ise  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  matrisine benzer şekilde bulunur.

**III.Durum:** Eğer  $0 \neq a, b, c \in R$  ise, o zaman  $a = r + z$ , ve  $c = r'' + z''$  olacak şekilde sol sıfır bölen  $z, z'' \in R$  ve sol sıfır bölen olmayan  $r, r'' \in R$  elemanları vardır. Bu durumda,

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r'' & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ z'' & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b \\ 0 & r'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z'' \end{pmatrix}$$

sol eriyebilir ayrışım elde edilir. Benzer şekilde,  $\begin{pmatrix} b & a \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$  formundaki matrislerin de sol eriyebilir ayrışımı vardır.

**IV.Durum:** Eğer  $0 \neq a, b, c, d$  ise, o zaman  $a = r + z$  ve  $d = r''' + z'''$  olacak şekilde sol sıfır bölen  $z, z'''$  ve sol sıfır bölen olmayan  $r, r'''$  elemanları mevcuttur. O halde,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b \\ 0 & r''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ c & z''' \end{pmatrix}$$

sol eriyebilir ayrışımı elde edilir. Kabul edilsin ki  $n \geq 3$  ve her  $k < n$  için  $M_n(R)$  sol eriyebilir olsun. Tümevarımdan ispat tamamlanır. Gerçekten,  $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$  olmak üzere aşağıdaki durumlar incelensin:

**Durum (i)**  $a_{11} \neq 0$  olsun. O zaman  $1 \times 1$  tipindeki  $A_{11} = a_{11}$  blok matrisi ve  $(n-1) \times (n-1)$  tipindeki  $A_{22}$  blok matrisi için  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  olsun. Tümevarım gereğince  $A_{11}$  ve  $A_{22}$  sol eriyebilir. O halde,  $A_{11} = r_{11} + z_{11}$  olacak şekilde bir sol sıfır bölen  $z_{11} \in R$  ve sol sıfır bölen olmayan  $r_{11} \in R$  elemanı vardır. Ayrıca  $A_{22} = P_{22} + Z_{22}$  olacak şekilde bir sol sıfır bölen  $P_{22} \in M_{n-1}(R)$  ve sol sıfır bölen olmayan  $Z_{22} \in M_{n-1}(R)$  vardır. Böylece  $A = P + Z$  olacak şekilde bir sol sıfır bölen  $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ * & Z_{22} \end{pmatrix} \in M_n(R)$  ve bir sol sıfır bölen olmayan  $P = \begin{pmatrix} r_{11} & * \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \in M_n(R)$  vardır.

**Durum (ii)**  $a_{11} = 0$  olsun. Kabul edilsin ki  $A$  nın  $a_{ij}$  girdisi sıfırdan farklı olsun. Bu durumda  $A$  nın satır ve sütunlarına satır ve sütun işlemleri uygulayarak  $a_{ij}$  nin  $A$  nın (1,1) girişi olması sağlanır. Sonuç 4.1.7 gereğince satır ve sütun işlemleri sol eriyebilirlik özelliğini koruduğundan,  $A$  nın bir eriyebilir ayrışımı Durum (i) deki gibidir.

( $\Leftarrow$ ;) Açıktır. □

## 5. ENDO-ERİYEYİLİR MODÜLLER

### 5.1 Endo-Eriyeyilir Modül Tanımı ve Bu Modüllerin Bazı Özellikleri

Bu bölümde sıfırdan farklı her endomorfizması bir sol sıfır bölen olan ve bir sol sıfır bölen olmayan elemanın toplamı şeklinde yazılabilen modüllerin sınıfı tanımlanmaktadır ve bu modül sınıfının özellikleri incelenmektedir. Ayrıca bu modüllerin altmodülleri ve direkt toplamaları için bu özelliğin kalıtsal olup olmadığı araştırılmaktadır.

**Tanım 5.1.1**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $S$  sol (sağ) eriyeyilir bir halka ise, o zaman  $M$  ye sol (sağ) *endo-eriyeyilir modül* denir. Eğer  $M$  hem sol hem de sağ endo-eriyeyilir bir modül ise, o zaman  $M$  ye *endo-eriyeyilir modül* denir.

$R \cong \text{End}_R(R)$  olduğundan  $R$  nin bir sol (sağ) eriyeyilir halka olması için gerek ve yeter şart  $R$  nin bir sol (sağ) endo-eriyeyilir  $R$ -modül olmasıdır. Dolayısıyla her tamlık bölgesinin kendisi üzerinde bir endo-eriyeyilir modül olduğu açıktır. Şimdi sağ eriyeyilir halkaların, sağ endo-eriyeyilirlik kavramı bakımından bir karakterizasyonu verilmektedir.

**Teorem 5.1.2**  $R$  bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- (1)  $R$  sağ eriyeyilirdir.
- (2) Her sonlu üretilmiş serbest sağ  $R$ -modül sağ endo-eriyeyilirdir.

**İspat:** (1)  $\Rightarrow$  (2)  $R$  sağ eriyeyilir ve bir  $n$  pozitif tamsayısı için  $R$  üzerinde  $M = R^{(n)}$  serbest bir modül olsun. O halde,  $R \cong \text{End}_R(R)$  olduğundan  $M_n(\text{End}_R(R)) \cong M_n(R)$  dir. Teorem 4.1.17 gereğince  $M$  nin endomorfizma halkası eriyeyilirdir. Böylece  $M$  sağ endo-eriyeyilirdir.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Açıktır. □

Bir sonraki örnekte, endo-eriyeyilir bir modülün altmodülünün endo-eriyeyilir olmak zorunda olmadığı gösterilmektedir.

**Örnek 5.1.3**  $\mathbb{Z}$ -modül  $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$  göz önüne alınsın. O halde  $S = M_2(\mathbb{Q})$  olarak bulunur. Teorem 4.1.17 gereğince  $S$  eriyebilir. Böylece  $M$  endo-eriyebilir. Ayrıca  $M$  nin bir altmodülü  $N = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$  alınsın. O zaman  $S_N = \text{End}_{\mathbb{Z}}(N)$  eriyebilir olmayan bir elemana sahiptir. Bunu görmek için  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in S_N$  olsun. Burada  $a = c = 0$  ve  $b \neq 0$  durumu için  $A$  bir eriyebilir ayrışma sahip değildir. Gerçekten,  $b = 1$  ve  $A = B + C$  olacak şekilde bir sol sıfır bölen  $B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & t \end{pmatrix} \in S_N$  ve bir sol sıfır bölen olmayan eleman  $C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in S_N$  mevcut olsun. O zaman  $C \in S_N$  matrisinin sol sıfır bölen olmaması için gerek ve yeter şart  $x \neq 0$  ve  $z \neq 0$  olmasıdır. Buna karşılık,  $r \neq 0$  ve  $t \neq 0$  dır. Böylece  $B$  sıfır bölen değildir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak,  $N$  endo-eriyebilir değildir.

Aşağıdaki örnekte, endo-eriyebilir modüllerin direkt toplamının da endo-eriyebilir olup olmadığı araştırılmaktadır.

**Örnek 5.1.4**  $F$  bir cisim ve  $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$  olsun. O zaman  $R$ -modül  $M = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ve  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$  için  $R = M \oplus N$  bir sağ  $R$ -modüldür. Bir taraftan, Lemma 2.1.23 gereğince  $R$  endo-eriyebilir değildir. Diğer taraftan,  $\text{End}_R(M) = F = \text{End}_R(N)$  olduğundan  $M$  ve  $N$  endo-eriyebilir.

Şimdi hangi şartlar altında endo-eriyebilir modüllerin direkt toplamının da endo-eriyebilir olduğu incelenmektedir.

**Önerme 5.1.5**  $I$  bir indis kümesi olmak üzere  $R$ -modüllerin bir sınıfı  $\{M_i\}_{i \in I}$  ve her  $i \in I$  için  $M_i$  modülü  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  nin bir tam değişmez altmodülü olsun. O zaman  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  nin sol endo-eriyebilir olması için gerek ve yeter şart her  $i \in I$  için  $M_i$  nin sol endo-eriyebilir olmasıdır.

**İspat:** Her  $i \in I$  için  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  de  $M_i$  tam değişmez olduğundan,  $\text{End}_R(\bigoplus_{i \in I} M_i) \cong \prod_{i \in I} \text{End}_R(M_i)$  dir. Önerme 2.1.44 gereğince ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 5.1.6** Her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $D_i$  bölme halkası olmak üzere endomorfizma halkası  $S = M_1(D_1) \oplus M_2(D_2) \oplus \dots \oplus M_n(D_n)$  olan modül  $M$  olsun. O zaman  $M$  endo-eriyebiliridir.

**İspat:**  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bölme halkası olduğundan, Teorem 4.1.17 gereğince  $i = 1, 2, \dots, n$  için her  $M_i(D_i)$  eriyebiliridir. Ayrıca, Önerme 2.1.44 gereğince  $S$  eriyebilir ve dolayısıyla  $M$  endo-eriyebiliridir.  $\square$

Teorem 5.1.6'nın bir sonucu aşağıda verilmektedir.

### Sonuç 5.1.7

- (1) Her yarı basit Artinian modül endo-eriyebiliridir.
- (2) Her basit modül endo-eriyebiliridir.
- (3) Bir cisim üzerindeki her sonlu boyutlu vektör uzayı endo-eriyebiliridir.

Aşağıda eriyebilir modüllerin endo-eriyebilir ve endo-eriyebilir modüllerin de eriyebilir olmak zorunda olmadığına dair örnekler verilmektedir.

**Örnek 5.1.8**  $\mathbb{Z}$ -modül olarak  $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$  göz önüne alınsın. Bir taraftan,  $M$  burulmasız olduğundan  $M$  eriyebiliridir. Diğer taraftan, Örnek 5.1.3 gereğince  $M$  endo-eriyebilir değildir.

**Örnek 5.1.9**  $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  bir  $\mathbb{Z}$ -modül olarak ele alınsın. O zaman her  $p$  asal sayısı için,  $p$ -adik tamsayıların halkası  $\mathbb{Z}_p$  olmak üzere  $S = \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$  dir. Bu yüzden,  $S$  eriyebilir ve böylece  $M$  endo-eriyebiliridir. Ayrıca,  $M$  burulmalı olduğundan eriyebilir değildir.

1998 yılında Crivei, sıfırdan farklı endomorfizmalarının monomorfizma olduğu sıfırdan farklı bütün  $R$ -modüllerin oluşturduğu  $\mathcal{M}$  sınıfını tanıtmaktadır. Şimdi sol endo-eriyebilir modüller sınıfının,  $\mathcal{M}$  ve endomorfizma halkaları sağ tekil olmayan modüller sınıfı arasında yer aldığı kanıtlanmaktadır.

**Teorem 5.1.10**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $M \in \mathcal{M}$  ise, o zaman  $M$  sol endo-eriyebiliridir.

**İspat:**  $M$  sıfırdan farklı her endomorfizması monomorfizma olan bir modül ve  $0 \neq f \in S$  olsun. Kabul edilsin ki bir  $g \in S$  için  $fg = 0$  olsun. Bu durumda  $f(g(M)) = 0$  dır. Ayrıca  $f$  monomorfizma olduğundan  $g(M) = 0$  ve buradan  $g = 0$  dır. O halde,  $f \in S$  nin  $f = f + 0$  olacak şekilde bir eriyebilir ayrışımı vardır. Dolayısıyla  $M$  sol endo-eriyebilirdir.  $\square$

Teorem 5.1.10 un karşıtı her zaman doğru değildir. Çünkü,  $\mathbb{Z}_6$ -modül olarak  $\mathbb{Z}_6$  endo-eriyebilirdir, fakat  $\mathcal{M}$  sınıfına ait değildir.

**Teorem 5.1.11** Eğer  $M$  bir sol endo-eriyebilir modül ise, o zaman  $S$  sağ tekil olmayandır.

**İspat:**  $M$  sol endo-eriyebilir olsun. O halde,  $S$  sol eriyebilirdir. Önerme 2.1.47 gereğince  $S$  sağ tekil olmayandır.  $\square$

Teorem 5.1.11 in karşıtı her zaman doğru değildir.

**Örnek 5.1.12**  $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle & \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle \end{pmatrix}$  sağ tekil olmayandır, fakat Önerme 2.1.48 gereğince  $R$  sol endo-eriyebilir olmayan bir  $R$ -modüldür.

Bu kısmın devamında bazı endo-eriyebilir modül örnekleri verilmektedir. Buna ek olarak, endo-eriyebilir olmayan Rickart ve dual Rickart modül örnekleri sunulmaktadır.

**Örnek 5.1.13**  $S = \{(a_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \mid a_n \text{ belli bir yerden sonra sabit}\}$  halkası ve  $S$  nin  $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$  ideali göz önüne alınsın. O halde,  $R = \begin{pmatrix} S & S/I \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$  halkası Önerme 2.1.48 gereğince sağ eriyebilir değildir ve böylece  $R$  endo-eriyebilir bir sağ  $R$ -modül değildir. Ayrıca Örnek 2.1.53 gereğince  $R$  bir Rickart halkadır.

Bir sonraki teoremde Rickart modüllerin hangi koşullar altında endo-eriyebilir olduğu araştırılmaktadır.

**Teorem 5.1.14**  $M$  bir Rickart modül olsun.

- (1) Eğer  $M$  ayrıştırılmaz ise, o zaman sol endo-eriyebilirdir.
- (2) Eğer  $M$  abelyen ise, o zaman endo-eriyebilirdir.
- (3) Eğer  $M$  bir Artinian eş modül ise, o zaman endo-eriyebilirdir.

**İspat:**

- (1)  $M$  bir ayrıştırılmaz Rickart modül ve  $0 \neq f \in S$  olsun.  $M$  bir Rickart modül olduğundan  $M$  nin bir direkt toplananı  $\text{Ker} f$  dir. Ayrıca  $M$  ayrıştırılmaz bir modül olduğundan  $M$  nin sıfır ve  $M$  den farklı bir direkt toplananı yoktur. Böylece  $\text{Ker} f = 0$  elde edilir. Buradan  $f$  bir monomorfizmadır. Teorem 5.1.10 gereğince  $M$  sol endo-eriyebilirdir.
- (2)  $M$  bir abelyen Rickart modül ve  $0 \neq f \in S$  olsun.  $M$  bir Rickart modül olduğundan  $\text{Ker} f = eM$  olacak şekilde bir  $e^2 = e \in S$  vardır.  $M$  abelyen olduğundan  $ef = fe = 0$  dir. Şimdi  $f = e + (f - e)$  ayrışımının  $f$  nin bir eriyebilir ayrışımı olduğu iddia edilsin. O halde,  $f \neq 0$  olduğundan  $e \neq 1$  dir ve böylece  $e$  bir sıfır bölendir. Kabul edilsin ki  $g \in S$  ve  $(f - e)g = 0$  olsun. Böylece  $fg = eg$  ve buradan  $efg = eg$  elde edilir. O zaman  $eg = 0$  bulunur. Böylece  $g(M) \leq \text{Ker} f = eM$  ve buradan  $eg = g$  dir. Dolayısıyla  $g = 0$  dir. Bu durumda  $f - e$  sol sıfır bölen değildir. Benzer şekilde,  $g(f - e) = 0$  olsun. O zaman  $gf = ge$  dir ve buradan  $gfe = ge = 0$  elde edilir.  $M$  abelyen olduğundan  $eg = ge = g$  dir. Böylece  $g = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $f - e$  sağ sıfır bölen değildir. Sonuç olarak  $M$  endo-eriyebilirdir.
- (3)  $M$  bir Artinian eş Rickart modül olsun. O zaman Önerme 2.1.55 gereğince  $M_i$  ayrıştırılmaz Artinian Rickart modül ve  $\text{End}_R(M_i)$  bir bölme halkası olmak üzere  $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$  olacak şekilde bir ayrışım vardır. O halde,  $\text{End}_R(M_i)$  bir bölme halkası olduğundan eriyebilirdir ve böylece  $M_i$  endo-eriyebilirdir. Önerme 5.1.5 gereğince  $M$  endo-eriyebilirdir.  $\square$

Teorem 5.1.14 deki çıkarımların karşıtları her zaman doğru olmak zorunda değildir.

**Örnek 5.1.15**  $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  bir  $\mathbb{Z}$ -modül olarak ele alınsın. O zaman  $S = M_2(\mathbb{Z})$  dir. Teorem 4.1.17 gereğince  $S$  eriyebilirdir ve böylece  $M$  endo-eriyebilirdir. Teorem

2.1.60 gereğince  $M$  bir Rickart  $\mathbb{Z}$ -modüldür, fakat  $M_2(\mathbb{Z})$  abelyen değildir ve böylece  $M$  abelyen değildir. Ayrıca,  $M$  ayrıştırılmaz ve Artinian değildir.

**Sonuç 5.1.16**  $R$  bir sağ Rickart halka olsun.

- (1) Eğer  $R$  sağ ayrıştırılmaz ise, o zaman sol eriyebilir.
- (2) Eğer  $R$  abelyen ise, o zaman  $R$  eriyebilir.
- (3) Eğer  $R$  sağ Artinian sağ eş ise, o zaman  $R$  eriyebilir.

Önerme 2.1.52 gereğince aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır.

**Sonuç 5.1.17**  $M$  bir  $\pi$ -Rickart modül ve  $S$  indirgenmiş bir halka olsun.

- (1) Eğer  $M$  ayrıştırılmaz ise, o zaman  $M$  sol endo-eriyebilir.
- (2) Eğer  $M$  abelyen ise, o zaman  $M$  endo-eriyebilir.
- (3) Eğer  $M$  Artinian eş ise, o zaman  $M$  endo-eriyebilir.

Aşağıdaki örnek dual Rickart modüllerin her zaman endo-eriyebilir olmadığını göstermektedir.

**Örnek 5.1.18**  $\mathbb{Z}$ -modül olarak  $M = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Q}$  göz önüne alınsın. Bu durumda  $S$  endomorfizma halkası  $\begin{pmatrix} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$  halkasına izomorftur. Önerme 2.1.48 gereğince  $S$  sağ eriyebilir değildir, bu yüzden  $M$  endo-eriyebilir değildir. Diğer yandan, Önerme 2.1.63 gereğince  $M$  bir dual Baer modüldür. Teorem 2.1.64(2) gereğince  $M$  dual Rickarttır.

Abelyen dual Rickart modüllerin endomorfizmaları, Teorem 4.1.8 de eriyebilirlik kavramı açısından incelenmektedir. Bir sonraki sonuçta dual Rickart modüllerin hangi koşullar altında endo-eriyebilir oldukları araştırılmaktadır.

**Teorem 5.1.19**  $M$  bir dual Rickart modül olsun.

- (1) Eğer  $M$  ayrıştırılmaz ve kısıtlanabilir ise, o zaman  $M$  endo-eriyebilir.

- (2) Eğer  $M$  ayrıştırılmaz ve Hopfian ise, o zaman  $M$  sol endo-eriyebilir.
- (3) Eğer  $M$  Noetherian eş ise, o zaman  $M$  endo-eriyebilir.

**İspat:**

- (1)  $M$  nin bir altmodülü  $0 \neq N$  olsun. O zaman  $M$  dual Rickart ve kısıtlanabilir olduğundan  $\varphi(M) = eM \leq N$  olacak şekilde  $e^2 = e \in S$  ve  $0 \neq \varphi \in S$  vardır. Ayrıca  $M$  ayrıştırılmaz olduğundan  $e = 1_S$  ve  $N = M$  dir. Buradan  $M$  basittir ve böylece Sonuç 5.1.7(2) gereğince  $M$  endo-eriyebilir.
- (2)  $0 \neq f \in S$  olsun. O halde  $M$  dual Rickart ve ayrıştırılmaz olduğundan  $f(M) = M$  elde edilir. Ayrıca  $M$  Hopfian olduğundan  $f \in \mathcal{M}$  dir. Teorem 5.1.10 gereğince  $M$  sol endo-eriyebilir.
- (3)  $M$  bir Noetherian eş dual Rickart modül olsun. Bu durumda, Önerme 2.1.56 gereğince  $M_i$  ayrıştırılmaz Noetherian dual Rickart modül ve her  $i \in I$  için  $\text{End}_R(M_i)$  bölme halkası olmak üzere  $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$  ayrışımı vardır. Böylece Önerme 5.1.5 gereğince  $M$  endo-eriyebilir.  $\square$

Teorem 5.1.19(1) de modülün kısıtlanabilir ve dual Rickart olması göz ardı edilemez, çünkü endo-eriyebilir olmayan ayrıştırılmaz modüller de vardır. Aşağıda buna bir örnek verilmektedir.

**Örnek 5.1.20**  $k$  karakteristiği  $p > 0$  olan bir cisim ve  $G$  ise  $x, y$  tarafından üretilen, mertebesi  $p^2$  olan elementer abelyen bir  $p$ -grup olsun. Ayrıca  $V$  tabanı  $\{e_1, e_2, e_3\}$  olan 3-boyutlu bir sağ  $kG$ -modül olsun ve çarpım  $e_1x = e_1, e_2x = e_1 + e_2, e_3x = e_3, e_1y = e_1, e_2y = e_2, e_3y = e_1 + e_3$  şeklinde tanımlansın. O zaman  $S = \text{End}_{kG}(V)$  matris

halkası  $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in k \right\}$  ye izomorftur. Örnek 2.1.65 gereğince  $R$

yerel olduğundan  $V_{kG}$  ayrıştırılmazdır. O halde  $V_{kG}$  nin endo-eriyebilir bir modül olduğu iddia edilsin. Gerçekten,  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in R$  olsun. Eğer  $a \neq 0$  ise, o

zaman  $A$  nın  $B = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  ve  $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in R$  olmak üzere  $A = B + C$  olacak şekilde bir eriyebilir ayrışımı vardır. Buradan  $B \in R$  bir sol sıfır bölen eleman,  $C \in R$  bir sol sıfır bölen olmayan elemandır. Eğer  $a = 0$  ise, o zaman  $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  bir eriyebilir ayrışımına sahip değildir. Ayrıca  $B = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{12}b + e_{13}c \in R$  ile tanımlanan dönüşüm bir epimorfizma olmadığından  $V_{kG}$  dual Rickart değildir.

Teorem 5.1.19 un karşısı aşağıdaki örnek ile görüleceği üzere, her zaman doğru olmak zorunda değildir.

**Örnek 5.1.21** Örnek 2.1.66 gereğince  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  bir dual Rickart  $\mathbb{Z}$ -modüldür. Ayrıca  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  ayrıştırılamazdır. Bir taraftan,  $S = \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$  bir tamlık bölgesi olan  $p$ -adik tamsayılar halkasıdır ve dolayısıyla eriyebilir. O halde  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  endo-eriyebilir bir  $\mathbb{Z}$ -modüldür. Diğer yandan,  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  ne Hopfian ne de Noetherian bir modüldür ve ayrıca kısıtlanabilir de değildir.

Teorem 5.1.19 ışığında aşağıdaki örnek verilmektedir.

**Örnek 5.1.22**  $F$  bir cisim,  $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$  ve  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  olsun. Burada  $R$ -modül  $M = eR = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  göz önüne alınsın.  $S = \text{End}_R(M)$  bir cisim olduğundan,  $M$  endo-eriyebilir. Ayrıca Örnek 2.1.67 gereğince  $M$  bir dual Rickart  $R$ -modüldür ve  $M$  nin Noetherian, Hopfian, ayrıştırılamaz, kısıtlanabilir ve eş bir modül olduğu açıktır.

**Sonuç 5.1.23**  $R$  bir von Neumann düzenli halka olsun.

- (1) Eğer  $R$  sağ ayrıştırılamaz ise, o zaman  $R$  eriyebilir.
- (2) Eğer  $R$  sağ Noetherian ve sağ eş ise, o zaman  $R$  eriyebilir.

Önerme 2.1.69 ışığında aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

**Sonuç 5.1.24**  $M$  bir dual  $\pi$ -Rickart modül ve  $S$  bir indirgenmiş halka olsun.

- (1) Eğer  $M$  ayrıştırılamaz ve kısıtlanabilir ise, o zaman  $M$  endo-eriyebilirdir.
- (2) Eğer  $M$  ayrıştırılamaz ve Hopfian ise, o zaman  $M$  sol endo-eriyebilirdir.
- (3) Eğer  $M$  Noetherian eş ise, o zaman  $M$  endo-eriyebilirdir.

**Teorem 5.1.25** Her birim endo-düzenli modül endo-eriyebilirdir.

**İspat:**  $M$  bir birim endo-düzenli modül olsun. Teorem 2.1.73 gereğince keyfi  $0 \neq \varphi \in S$  için  $\varphi = \mu + e$  ve  $S\varphi \cap Se = 0$  olacak şekilde bir  $e^2 = e \in S$  ve  $\mu \in S$  izomorfizması vardır. O halde  $\varphi = e + \mu$  eşitliğini sağlayan  $e$  eşkare elemanı,  $M$  nin birim endomorfizması olamaz. Aksi takdirde,  $S\varphi \cap Se = 0$  eşitliğinden  $S\varphi = 0$  elde edilir, yani  $\varphi = 0$  olur ve bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\varphi$  nin bir eriyebilir ayrışımı  $\varphi = e + \mu$  olarak bulunur.  $\square$

Bir sonraki örnekte Teorem 5.1.25 in karışıtının her zaman doğru olmak zorunda olmadığı gösterilmektedir.

**Örnek 5.1.26**  $\mathbb{Z}_{(2)}$ -modül olarak  $M = \mathbb{R} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  göz önüne alınsın. Örnek 2.1.74 gereğince  $M$  birim endo-düzenli değildir. Ayrıca  $S = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{pmatrix}$  dir. Önerme 2.1.48 gereğince  $S$  eriyebilirdir ve böylece  $M$  endo-eriyebilirdir.

**Sonuç 5.1.27** Her birim-düzenli halka eriyebilirdir.

Sonuç 5.1.27 nin karışıtı her zaman doğru değildir. Örneğin;  $\mathbb{Z}$  eriyebilirdir, fakat birim-düzenli değildir.

Tanım 2.1.76 da ince halka tanımı verilmektedir. Endomorfizma halkaları ince olan modüller sınıfı şu şekilde tanımlanmaktadır:

**Tanım 5.1.28**  $M$  bir modül olsun. Eğer  $S$  bir ince halka ise, o zaman  $M$  ye *endo-ince (endofine) modül* denir.

Endo-ince modül tanımı gereğince aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

**Önerme 5.1.29** Her endo-ince modül endo-eriyebilir.

Her endo-eriyebilir modül endo-ince olmak zorunda değildir. Aşağıda buna bir örnek verilmektedir.

**Örnek 5.1.30**  $\mathbb{Z}$ -modül olarak  $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ele alınsın. Bu durumda  $S = M_2(\mathbb{Z})$  dir. Bir taraftan, Teorem 4.1.17 gereğince  $S$  eriyebilir ve dolayısıyla  $M$  endo-eriyebilir. Diğer taraftan, Teorem 2.1.77 gereğince  $S$  ince değildir ve buradan  $M$  endo-ince değildir.

**Teorem 5.1.31**  $M$  bir sürekli modül ve  $S$  bir  $J$ -normal halka olsun. O zaman  $S/J(S)$  sol eriyebilir.

**İspat:**  $M$  bir sürekli modül ve  $T = S/J(S)$  olsun. Teorem 2.1.79 gereğince her sürekli modül yarı-sürekli olduğundan Teorem 2.1.81 gereğince  $T$  deki eşkare elemanlar  $S$  ye yükselir. Ayrıca Önerme 2.1.82 ve Lemma 2.1.81 gereğince  $T$  sağ sürekli, buradan yarı-sürekli ve düzenlidir. Ayrıca  $T$  nin eşkare elemanları  $J(S)$  ye yükselir.  $T$  düzenli olduğundan tekil değildir.  $T$  nin sağ maksimal bölüm halkası  $Q = Q_{max}^r$  düzenlidir.  $S$  nin bir  $J$ -normal halka olduğu kabul edilsin. Teorem 2.1.84 gereğince  $T$  abelyendir. Böylece Sonuç 2.1.85 gereğince  $Q$  birim-düzenlidir. Şimdi  $t \in T$  olsun. Camillo-Khurana Teoremi gereğince  $\bar{e}^2 = \bar{e} \in Q$ ,  $u \in Q$  tersinir ve  $\bar{t}Q \cap \bar{e}Q = 0$  olmak üzere  $\bar{t} \in Q$  için  $\bar{t} = \bar{e} + \bar{u}$  dur. Buradan  $\bar{e} \neq 1$  dir. Ayrıca  $T$  ve  $Q$  daki eşkare elemanlar aynı olduğundan  $e^2 = e \in T$  ve  $e \neq 1 \in T$  olduğu kabul edilsin. Buradan  $t - e \in T$  dir. Şimdi  $r_T(t - e) = \{x \in T \mid (t - e)x = 0\}$  ve  $r_Q(\bar{t} - \bar{e}) = \{q \in Q \mid (\bar{t} - \bar{e})q = 0\}$  göz önüne alınsın. O zaman  $\bar{t} - \bar{e}$  tersinir olduğundan  $r_Q(\bar{t} - \bar{e}) = 0$  dır. Böylece  $r_T(t - e) \subseteq r_Q(\bar{t} - \bar{e}) = 0$  olduğundan  $r_T(t - e) = 0$  elde edilir. O halde  $t - e \in T$  sol sıfır bölen değildir. Sonuç olarak,  $T$  sol eriyebilir.  $\square$

Bir sonraki sonuç, Teorem 5.1.31 in doğrudan bir çıkarımıdır.

**Sonuç 5.1.32** Yarı-ilkel  $J$ -normal endomorfizma halkasına sahip her sürekli modül sol endo-eriyebilir.

## 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada modül teorisinde eriyebilir modül kavramı incelenmektedir ve bu kavramın yapısal özellikleri detaylı bir şekilde ortaya konmaktadır. İlk olarak, eriyebilir modüllerin tanımı verilmektedir ve burulmasızlık, tekillik, altmodül ve bölüm modülü özellikleri bakımından kapsamlı bir analiz yapılmaktadır. Bu incelemeler sonucunda eriyebilir modüllerin burulmasız ve tekil olmayan modül sınıfları arasında kaldığı gösterilmektedir. Ayrıca burulmalı modüllerin eriyebilir olmadığı ifade edilmektedir.

Ayrıca çalışmada, eriyebilirlik ile endomorfizma halkaları arasındaki ilişki ele alınmaktadır. Burada elde edilen bulgular, modülün endomorfizma halkasının yapısının modülün eriyebilirliği hakkında önemli ipuçları verdiğini göstermektedir. Bu bağlamda, dual Rickart ve  $\pi$ -Rickart gibi modüller ile endo-eriyebilir modüller arasındaki ilişkiler ayrıntılı olarak tartışılmaktadır. Bu incelemeler, modül sınıfları arasındaki ilişkilerin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır. Bunlara ek olarak, endo-eriyebilir modüller tanımlanmaktadır ve bu modül sınıfının temel özellikleri incelenmektedir. Elde edilen sonuçlar, endo-eriyebilir modüllerin diğer modül sınıfları (örneğin Rickart ve dual Rickart modüller) ile yakın ilişkiler taşıdığını ortaya koymaktadır. Ayrıca çeşitli örnekler üzerinden bu kavramın sınırları tartışılmaktadır.

Bu tezde yapılan çalışmalar, modül teorisi ile halka teorisi arasındaki etkileşimi güçlendirmekte ve eriyebilirlik kavramını daha geniş bir perspektiften ele almaktadır. Elde edilen sonuçlar, yalnızca eriyebilir modüllerin özelliklerini ortaya koymakla kalmayıp aynı zamanda endomorfizma halkaları üzerinden yeni bağlantılar kurarak literatüre katkı sağlamaktadır.

# KAYNAKLAR

- Akalan, E. ve Vas L. 2013. Classes of almost clean rings. *Algebras Represent. Theory* 16(3), 843-857.
- Alkan, M. ve Harmancı, A. 2002. On summand sum and summand intersection property of modules. *Turk. J. Math.*, 26, 131-147.
- Anderson, F. W. ve Fuller, K. R. 1992. *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag, 385, New York.
- Anderson, D. D. ve Juett, J. R. 2021. Endoregular modules. *J. Pure Appl. Algebra*, 225(1), 106475.
- Birkenmeier, G. F. 1983. Idempotents and completely semiprime ideals. *Comm. Algebra.*, 11, 567-580.
- Breaz, S., Călugăreanu, G. ve Schultz, P. 2011. Modules with Dedekind finite endomorphism rings. *Mathematica*, 53:76, 15-28.
- Camillo, V. P. ve Khurana, D. 2001. A Characterization of unit regular rings. *Comm. Algebra*, 29(5), 2293-2295.
- Călugăreanu, G. ve Lam, T. Y. 2016. Fine rings: a new class of simple rings. *J. Algebra Appl.* 15(9), 1650173.
- Chen, H., Nicholson, W. K. ve Zhou, Y. 2018. Unit-regular modules. *Glasg. Math. J.*, 60(1), 1-15.
- Crivei, S. 1998. On a class of modules whose non-zero endomorphisms are monomorphisms. *Studia Univ., Babeş-Bolyai Math.*, 43:1, 23-28.
- Dauns, J. 1994. *Modules and Rings*. Cambridge Univ. Press.
- Endo, S. 1960. Note on p.p rings. *Nagoya Math. J.*, 17, 167-170.
- Garcia, J. L. 1989. Properties of direct summands of modules. *Comm. Algebra*, 17(1), 73-92.
- Ghashghaei, E. ve McGovern, W. Wm. 2017. Fusible rings. *Comm. Algebra*, 45:3, 1151-1165.
- Goodearl, K. R. 1976. *Ring Theory: Nonsingular rings and modules*. Monographs on Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 33, New York.
- Keskin Tütüncü D. ve Tribak, R. 2010. On dual Baer modules. *Glasg. Math. J.*

- 52(2), 261-269.
- Khuri, S. M. 1979. Endomorphism rings and lattice isomorphism. *J. Algebra*, 56(2), 401-408.
- Köse, H., Kurtulmaz, Y., Üngör, B. ve Harmancı, A. 2020. Rings having normality in terms of the Jacobson radical. *Arab. J. Math.* 9(1), 123-135.
- Lam, T. Y. 1999. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Verlag, 557, New York.
- Lam, T. Y. 2001. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 388, New York.
- Lee, G., Rizvi S. T. ve Roman, C. S. 2010. Rickart modules. *Comm. Algebra*, 38:11, 4005-4027.
- Lee, G., Rizvi S. T. ve Roman, C. S. 2011. Dual Rickart modules. *Comm. Algebra*, 39:11, 4036-4058.
- Lee, G., Rizvi S. T. ve Roman, C. S. 2013. Modules whose endomorphism rings are von Neumann regular. *Comm. Algebra*, 41:11, 4066-4088.
- Lee, G., Rizvi S. T. ve Zhang, X. 2014. Modules whose endomorphism rings are division rings. *Comm. Algebra*, 42:12, 5205-5223.
- Lee, T. K. ve Zhou, Y. 2004. *Reduced Modules*. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 236; 365-377, Dekker, New York.
- Luo, X. ve Mao, L. 2019. Modules whose endomorphism rings are  $(m, n)$ -coherent. *Algebra Colloq.*, 26:2, 231-242.
- Mohamed, S. H. ve Müller, B. J. 1990. *Continuous and Discrete Modules*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 147, Cambridge.
- Nicholson, W. K. 1977. Lifting idempotents and exchange rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229, 269-278.
- Nicholson, W. K. 1999. Strongly clean rings and Fitting's lemma. *Comm. Algebra*, 27, 3583-3592.
- Nicholson, W. K. ve Campos, E. S. 2005. Morphyic modules. *Comm. Algebra*, 33:8, 2629-2647.
- Özcan, A. Ç., Harmancı, A. ve Smith, P. F. 2006. Duo modules. *Glasgow Math. J.*, 48(3), 533-545.

- Rizvi, S. T. ve Roman, C. S. 2004. Baer and quasi-Baer modules. *Comm. Algebra*, 32(1), 103-123.
- Rizvi, S. T. ve Roman, C. S. 2005. Baer property of modules and applications. In: *Advances in Ring Theory*, World Sci. Publ., 225-241, Hackensack, NJ.
- Roos, J. E. 1967. Sur les categories spectrales localement distributives. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B*, 265, 14-17.
- Rotman, J. J. 1979. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, 376, San Diego.
- Thierrin, G. 1960. On duo rings. *Canad. Math. Bull.*, 3:2, 167-172.
- Üngör, B., Halicioğlu S. ve Harmancı A. 2014. A generalization of Rickart modules. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 21(2), 303-318.
- Üngör, B., Kurtulmaz, Y., Halicioğlu, S. ve Harmancı A. 2012. Dual  $\pi$ -Rickart modules. *Rev. Colombiana Mat.*, 46(2), 167-183.
- Ware, R. 1971. Endomorphism rings of projective modules. *Trans. Amer. Math. Soc*, 155, 233-256.
- Wilson, G. V. 1986. Modules with the summand intersection property. *Comm. Algebra*, 14(1), 21-38.
- Zhang, X. ve Lee, G. 2016. Modules whose endomorphism rings are unit-regular. *Comm. Algebra*, 44:2, 697-709.
- Zhang, X. ve Lee, G. 2018. Characterizations and direct sums of unit-endoregular modules. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 61(4), 1103-1112.