ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MULTİSTATİK HEDEF TAKİBİ BAŞARIM ANALİZİNDE GÖZLENEN BİLGİ MATRİSİ KULLANIMI

Gökhan SOYSAL

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Gökhan Soysal tarafından hazırlanan **"Multistatik Hedef Takibi Başarım Analizinde Gözlenen Bilgi Matrisi Kullanımı"** adlı tez çalışması 08/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Murat EFE

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Orhan Arıkan
İhsan Doğramacı Bilkent Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ziya TELATAR
Ankara Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Cağatay Candan
Ortadoğu Teknik Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Murat EFE
Ankara Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cüneyt BARLAK
Ankara Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özer KOLSARICI

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

MULTİSTATİK HEDEF TAKİBİ BAŞARIM ANALİZİNDE GÖZELENEN BİLGİ MATRİSİ KULLANIMI

Gökhan SOYSAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat EFE

Son yirmi yılda elektromanyetik yayın kaynaklarının çoğalması ile pasif multistatik radar sistemleri büyük önem kazanmıştır. Bu tür sistemlerin tasarım ve başarımlarının analizinde kullanılabilecek iki istatistiksel araç, Fisher bilgi matrisi ve Gözlenen bilgi matrisidir. Tez çalışmasında, Fisher bilgi matrisinin değişimine bağlı olarak, hedef takibinin belirli bir doğrulukta gerçekleştirilebileceği multistatik radar ağı geometrisi önerilmiştir. Önerilen radar ağında, merkezi ve dağıtık bilgi birleştirme teknikleri kullanılarak hedef takibi başarımı incelenmiş ve parçacık filtre ve kovaryans kesişim yöntemleri temeline dayanan dağıtık hedef takip algoritması önerilmiştir. Önerilen yöntemin başarımı benzetim yoluyla incelenmiş ve hedef takibinin merkezi bilgi birleştirmeyle gerçekleştirildiği durum ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, Fisher bilgi matrisinin sadece kontrollü benzetim ortamında elde edilebiliyor olmasından dolayı, gerçek sistemlere de uygulanabilirliği olan sonsal gözlenen bilgi matrisi multistatik radar ağında incelenmiş ve sonsal gözlenen bilgi matrisinin özyinelemeli hesaplanması için gerekli türetim gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmalarda, sonsal gözlenen bilgi matrisinin, radar ağında hedef takip başarımının arttırılması ve ağ yönetimi için kullanılabileceği gösterilmiştir.

Haziran 2012, 168 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Multistatik hedef takibi, gözlenen bilgi matrisi, sonsal Cramer Rao alt sınırı, doğrusal olmayan filtreleme, sensör ağları

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

USE OF OBSEREVED INFORMATION MATRIX IN MULTISTATIC TARGET TRACKING PERFORMANCE ANALYSIS

Gökhan SOYSAL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electronics Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Murat EFE

In the last two decades, passive multistatic radar systems gained great importance and become a prolific research area. The Fisher information and the observed information matrices are the two statistical tools that can be exploited to design and analyze these kind of systems. In this thesis, a multistatic radar network geometry, where target tracking can be carry out with particular accuracy, has been proposed by analyzing the variation of the Fisher information matrix. Target tracking performance has been analyzed via central and distributed data fusion techniques in the proposed radar network. A distributed target tracking algorithm based on particle filtering and covariance intersection methods has been proposed. Performance of the proposed algorithm has been analyzed via simulations and the results have been compared with the cases where central data fusion was carried out. Since the Fisher information can only be calculated in a controlled simulation, the posterior observed information that can be calculated in real time systems, has also been analyzed in the multistatic radar network and required derivation for recursive computation of the posterior observed information matrix has been carried out. It has been shown with simulation results that the posterior observed information matrix can be utilized for both improving target tracking performance and managing the sensors deployed in the radar network.

June 2012, 168 pages

Key Words: Multistatic target tracking, observed information matrix, posterior Cramer Rao lower bound, nonlinear filtering, sensor Networks

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının her aşamasında, bilgisi ve tecrübesi ile bana yol gösteren, ortaya çıkan problemlerin aşılmasında yaptığı öneriler ile çalışmanın bu noktaya gelmesinde büyük payı olan danışmanım Doç Dr. Murat EFE'ye (Ankara Üniversitesi Elektronik Mühendisliği Bölümü) teşekkür ederim.

Tez çalışması süresince yapılan tez izleme toplantılarına katılan ve fikirleri ile katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Orhan ARIKAN (İhsan Doğramacı Bilkent Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü) ve Sayın Doç. Dr. Ziya TELATAR'a (Ankara Üniversitesi Elektronik Mühendisliği Bölümü) teşekkür ederim.

Gökhan SOYSAL
Ankara, Haziran 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET …….....i
ABSTRACT.....ii
TEŞEKKÜR iii
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
ÇİZELGELER DİZİNİ ix
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER.....9
2.1 Sistem Durum – Uzay Modeli 9
2.2 Filtreleme Problemi ve Bayes Çözümü 10
2.2.1 Sonsal dağılımın özyinelemeli hesaplanması 11
2.3 Filtreleme Problemi Çözümleri 13
2.3.1 Kalman filtre.....13
2.3.2 Genişletilmiş Kalman filtre 15
2.3.3 Unscented Kalman filtre.....16
2.3.3.1 UKF algoritması 18
2.3.3.1.1 Sigma noktalarının hesaplanması.....18
2.3.3.1.2 Zaman güncellemesi.....20
2.3.3.1.3 Ölçüm ile durum güncellemesi.....21
2.3.4 Parçacık filtre 21
2.3.4.1 Monte Carlo integrasyonu.....22
2.3.4.2 Önem örnekleme yöntemi 23
2.3.4.3 Ardışık önem örneklemesi yöntemi ile durum sonsal dağılımının kestirimi.....23
2.3.4.4 Örnekleme, önem yeniden örnekleme parçacık filtre.....28
2.3.5 Çoklu sensör ortamında filtreleme 29
2.4 Fisher Bilgisi ve Sonsal Cramer-Rao Alt Sınırı.....30
2.4.1 Sonsal Cramer-Rao Alt Sınırı.....32
2.4.1.1 Toplanır Gauss gürültüsü varlığında PCRLB 33
2.4.2 Çoklu sensör ortamında Fisher bilgisi 35
2.5 Gözlenen Bilgi Matrisi.....36
2.5.1 Çoklu sensör ortamında OIM.....38
2.6 Kovaryans Kesişim Yöntemi.....38

3. MULTİSTATİK RADAR AĞI MODELLEMESİ 41
3.1 Bistatik Menzil ve Menzil-Hızı Ölçümleri 41
3.2 Fisher Bilgisi ve CRLB 42
3.3 Alıcı – Verici Geometrisinin Fisher Bilgisine Göre İncelenmesi 43
3.4 Sonuç 55
4. SONSAL OIM'nin ÖZYİNEMELİ HESAPLANMASI 56
4.1 Doğrusal Gauss Durumu 63
4.2 Doğrusal Olmayan Sistem ile Toplanır Gauss Gürültüsü Durumu 66
5. DURUM SONSAL DAĞILIMINA GAUSS DAĞILIMI YAKLAŞIMI 70
5.1 Durum Öngörüm Dağılımının İncelenmesi 76
5.2 Olabilirlik Fonksiyonunun İncelenmesi 84
5.3 Sonuç 99
6. MULTİSTATİK RADAR AĞINDA HEDEF TAKİBİ VE SONSAL OIM 101
6.1 Benzetim Ortamı ve Başarım Ölçütleri 102
6.1.1 Başarım Ölçütleri 107
6.2 Merkezi Bilgi Birleştirme: SIR Parçacık Filtre ve UKF 109
6.3 Dağıtık Bilgi Birleştirme: SIR Parçacık Filtre ve Kovaryans Kesişim Yöntemi 126
6.4 Sonsal OIM'nin Ölçüm Seçiminde Kullanımı 134
7. TARTIŞMA VE SONUÇ 142
KAYNAKLAR 146
EKLER …. 151
EK 1 Fisher Bilgisi Matrisinin Elemanlarının Hesaplanması 152
EK 2 Sonsal OIM'in Hesaplanmasında Matris Çarpımları 157
EK 3 OIM için Olabilirlik Fonksiyonunun Logaritmasının Hesyanı 159
ÖZGEÇMİŞ 167

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Bistatik radar geometrisi 3

Şekil 2.1 İki boyutlu normal dağılımlı bir rasgele değişkenin doğrusal olmayan dönüşümün ardından ilk iki momentin gerçek değerleri ile EKF ve unscented dönüşüm yaklaşımları (Wan ve Van der Merwe 2001) 17

Şekil 2.2 2x2 boyutlu kovaryansların eşitlik (2.75) ile farklı çapraz ilinti değerleri birleştirilmesi (Julier ve Uhlmann 2001) 39

Şekil 2.3 Farklı ağırlıklar ile 2x2 boyutundaki kovaryansların birleştirilmesi..... 40

Şekil 3.1 XY düzleminde oluşturulan ızgara..... 45

Şekil 3.2 Toplam pozisyon belirsizliğinin alıcı sayısına göre değişimi 47

Şekil 3.3 Toplam hız belirsizliğinin alıcı sayısına göre değişimi..... 47

Şekil 3.4 Normalize kapsama alanının alıcı sayısına göre değişimi 48

Şekil 3.5 Normalize kapsama alanının artan alıcı çemberi yarıçapına göre değişimi 49

Şekil 3.6 Vericinin merkezde, 6 alıcının 30 *km* yarıçaplı çember üzerinde olduğu durum için durum kestirim bölgesi 50

Şekil 3.7 X eksenindeki pozisyon belirsizliğinin değişimi 50

Şekil 3.8 Y eksenindeki pozisyon belirsizliğinin değişimi 51

Şekil 3.9 Z eksenindeki pozisyon belirsizliğinin değişimi..... 51

Şekil 3.10 Konfigürasyon 2: 6 alıcının bulunduğu durum için durum kestirimi bölgesi 52

Şekil 3.11 Konfigürasyon 2: 10 alıcının bulunduğu durum için durum kestirim bölgesi 53

Şekil 3.12 Konfigürasyon 2: TBP'nin alıcı sayısına göre değişimi 54

Şekil 3.13 Konfigürasyon 2: TVB'nin alıcı sayısına göre değişimi..... 54

Şekil 5.1 Örnek benzetim ortamı: a. Alıcı – Verici konumları, b. XY düzleminde 3x8 boyutunda örnek ızgara 89

Şekil 5.2 *Alıcı 1* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri. 91

Şekil 5.3 *Alıcı 1* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 3km$, b. $Y = 0km$, c. $Y = -3km$ 91

Şekil 5.4 *Alıcı 2* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri..... 92

Şekil 5.5 *Alıcı 2* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 14km$, b. $Y = 18km$, c. $Y = 22km$ 93

Şekil 5.6 *Alıcı 3* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri..... 94

Şekil 5.7 *Alıcı 3* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 14km$, b. $Y = 18km$, c. $Y = 22km$. 94

Şekil 5.8 *Alıcı 4* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri 95
Şekil 5.9 *Alıcı 4* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 3km$, b. $Y = 0km$, c. $Y = -3km$ 95
Şekil 5.10 *Alıcı 5* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri 96
Şekil 5.11 *Alıcı 5* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = -6km$, b. $Y = -10km$, c. $Y = -14km$ 97
Şekil 5.12 *Alıcı 6* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri 97
Şekil 5.13 *Alıcı 6* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = -6km$, b. $Y = -10km$, c. $Y = -14km$ 98
Şekil 5.14 Bistatik menzil-hızı için yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri değişimi 99
Şekil 6.1 Radar ağı alıcı-verici konumları 102
Şekil 6.2 Radar ağı ve örnek hedef gezingesi 105
Şekil 6.3 SIR Parçacık filtre, *X* eksenindeki RMS konum hatası 109
Şekil 6.4 Parçacık filtre, Y eksenindeki RMS konum hatası 110
Şekil 6.5 Parçacık filtre, Z eksenindeki RMS konum hatası 111
Şekil 6.6 Parçacık filtre, kestirim kovaryansının *x* bileşeninin karekökü 112
Şekil 6.7 Parçacık filtre, kestirim kovaryansının *y* bileşeninin karekökü 113
Şekil 6.8 Parçacık filtre, kestirim kovaryansının *z* bileşeninin karekökü 113
Şekil 6.9 Parçacık filtre, NEES değişimi 114
Şekil 6.10 Parçacık filtre, her bir hedef hareketi için ortalama NEES 115
Şekil 6.11 Parçacık filtre, sonsal IOIM'nin *x* bileşeninin karekökü 116
Şekil 6.12 Parçacık filtre, sonsal IOIM'nin *y* bileşeninin karekökü 117
Şekil 6.13 Parçacık filtre, sonsal IOIM'nin *z* bileşeninin karekökü 118
Şekil 6.14 Parçacık filtre, her bir hedef hareketi için sonsal IOIM'ye göre ortalama NEES 119
Şekil 6.15 UKF, X eksenindeki RMS konum hatası 120
Şekil 6.16 UKF, Y eksenindeki RMS konum hatası 121
Şekil 6.17 UKF, Z eksenindeki RMS konum hatası 121
Şekil 6.18 UKF, kestirim kovaryansının *x* bileşeninin karekökü 122
Şekil 6.19 UKF, kestirim kovaryansının *y* bileşeninin karekökü 123
Şekil 6.20 UKF, kestirim kovaryansının *z* bileşeninin karekökü 123
Şekil 6.21 UKF, sonsal IOIM'nin *x* bileşeninin karekökü 124
Şekil 6.22 UKF, sonsal IOIM'nin *y* bileşeninin karekökü 125
Şekil 6.23 UKF, sonsal IOIM'nin *z* bileşeninin karekökü 125

Şekil 6.24 SIR Parçacık filtre – KK yöntemi, *X* eksenindeki RMS konum hatası..... 128
Şekil 6.25 SIR Parçacık filtre – KK yöntemi, *Y* eksenindeki RMS konum hatası..... 129
Şekil 6.26 SIR Parçacık filtre – KK, *Z* eksenindeki RMS konum hatası..... 129
Şekil 6.27 SIR Parçacık filtre – KK, kestirim kovaryansının *x* bileşeninin karekökü..... 130
Şekil 6.28 SIR Parçacık filtre – KK, kestirim kovaryansının *y* bileşeninin karekökü..... 131
Şekil 6.29 SIR Parçacık filtre – KK, kestirim kovaryansının *z* bileşeninin karekökü..... 131
Şekil 6.30 SIR Parçacık filtre – KK, sonsal IOIM'nin *x* bileşeninin karekökü 132
Şekil 6.31 SIR Parçacık filtre – KK, sonsal IOIM'nin *y* bileşeninin karekökü 133
Şekil 6.32 SIR Parçacık filtre – KK, sonsal IOIM'nin *z* bileşeninin karekökü..... 133
Şekil 6.33 2B Kartezyen uzaydaki alıcı – verici konumları..... 136
Şekil 6.34 Alıcı – verici konumları ve hedef hareketi..... 137
Şekil 6.35 X eksenindeki RMSE değişimi..... 139
Şekil 6.36 Y eksenindeki RMSE değişimi..... 139
Şekil 6.37 Z eksenindeki RMSE değişimi..... 140

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1 Alıcı ve verici konumları 89
Çizelge 6.1 Alıcı – verici konumları. 136

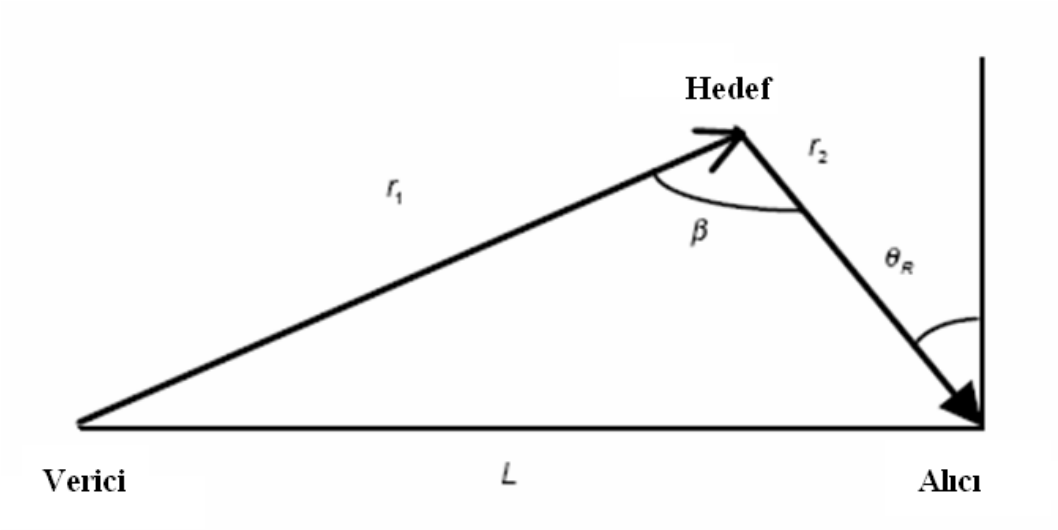
1. GİRİŞ

Radarlar, nesneleri tespit ve konumlarını belirleme amacıyla kullanılan sistemlerdir. Radarlar, belirli bir dalga şeklinin gönderilmesi ve geri dönen dalga şeklinin analiz edilerek yansıtıcının, yani hedefin, tespiti, konumlandırılması ve bazen de tanımlanması prensibi ile çalışır (Kulpa 2005). Radarlar alıcı ve verici antenlerinin konumlandırılma şekillerine göre iki sınıfta toplanırlar: *i)* Monostatik Radarlar; alıcı ve verici antenleri ölçülmeye çalışılan mesafelere oranla birbirlerine yakın konumlandırılır, *ii)* Bistatik Radarlar; alıcı ve verici antenleri ölçülmeye çalışılan mesafeye kıyasla bir birinden yeterince uzakta konumlandırılırlar. Radarlar ilk olarak yirminci yüzyılın ilk yarısında geliştirilmeye başlanmıştır. Dönemin teknolojik durumu gereği, alıcı ve verici anten arasında, radarı alma ya da iletme moduna geçiren anahtarlama yapılamadığından ilk radarlar bistatik yapılı olarak tasarlanmıştır. Bu radarlar, o dönemin önemli güvenlik sorunlarından olan, ilgilenilen bir bölgede hareketli bir hedefin olup olmadığını belirleme amacıyla tasarlanmıştır (Skolnik 1990). İlk Duplexer'ın 1936'da geliştirilmesi; ayını anteni kullanarak ortama ışıma yapma ve ortamdan geri dönüşleri dinleme kabiliyetinin kazanılmasını ve monostatik yapılı radarların geliştirilmesi çalışmalarının hızlanmasını sağlamıştır. Yine de bistatik radarlar üzerine çalışmalar 1950'lere kadar devam etmiş ve sonrasında radar çalışmaları monostatik yapılı radarlar üzerine yoğunlaşmıştır. Retrodirektif karıştırma ve antiradyasyon füzeleriyle (Antiradiation Missile - ARM) mücadele etmek için bistatik radarlar 1970 ve 1980'lerde yeniden incelenmeye başlamıştır. Alıcı ve verici antenlerin farklı bölgelerde konumlandırılmasından faydalanılarak, karıştırma durumunda alıcı antenin, ARM durumunda ise verici antenin savaş açısından stratejik önemi daha düşük bölgelere yerleştirilmesi ile hedef tespiti gerçekleştirilebilmiştir. Bu dönemde, gözetlenen bölgenin birden fazla bistatik yapılı alıcı – verici anten gurubuyla kapsanması temeline dayanan multistatik radar sistemleri geliştirilmiştir. Multistatik radar sistemleri, bistatik radarların avantajlarını bünyesinde toplarken birden fazla alıcı – verici kullanılması sebebiyle hedef tespit olasılığının artmasını ve sistemin hayatta kalma süresinin uzamasını sağlamıştır. Bistatik radarlar üzerine yapılan araştırmalar, ortamda bulunan elektromanyetik yayın kaynaklarının dinlenmesi ve bu kaynaklardan gelen sinyallerin

analizi ile hedef tespiti ve takibinin gerçekleştirilmesi yönünde de ilerleyerek pasif radar kavramının yeniden araştırma konusu olmasını sağlamıştır.

Pasif radar, en basit haliyle, “bir ya da daha fazla pasif alıcıya sahip olan, fakat kendisine ait aktif bir verici (aydınlatıcı) içermeyen radar sistemi” olarak tanımlanabilir. Sistemdeki aydınlatıcı(lar) ise, hâlihazırda ortamda bulunan, çeşitli özellikleri bilinen fakat işbirlikçi olmayan vericilerdir. Bu vericilere örnek olarak televizyon, radyo, mobil telefon şebekesi, haberleşme/yöngüdüm uydusu, hatta düşman radar sistemi vericileri gösterilebilir. Literatürde bu yayın kaynakları, “fırsat aydınlatıcısı” olarak adlandırılmaktadır (Griffiths 2003). Pasif radar kavramı 1935 yılında Arnold Wilkins tarafından bulunduğu yerden 12 km uzakta bir Heyford bombacısını tespit ettiği ‘Daventry Deneyi’ olarak adlandırılan çalışmayı yürütürken bulunmuştur. O zamanlarda, menzil – doppler ilinti fonksiyonunun gerçek zamanlı hesaplanması mümkün olmadığından pasif radar teknolojisi çok fazla ilgi uyandırmamış, gidebildiği noktalar savunma sanayi açısından yeterli bulunmamıştır (Davenport 2004). Sayısal alıcı ve işlemci teknolojilerinde meydana gelen ilerlemeler, sayısal sinyal işleme tekniklerinin çeşitli yayın sinyallerine uygulanabilmesini ve bu sinyallerden hedef tespiti ve takibinin yapılabilmesini olanaklı kılmıştır. Pasif radar kullanarak hedef tespiti literatürde, Pasif Uyumlu Konumlama (PUK) olarak adlandırılmaktadır. Bu sistemler bistatik radarların bir çeşidi olup, bistatik radarlardan, sisteme özel yayın kaynağı tasarımının olmayışı yönüyle ayrılmaktadır. PUK sistemlerinin temel özellikleri ve başarımları Griffiths ve arkadaşlarının yaptığı çalışmalarda gösterilmiştir. Griffiths ve Baker (2005) tarafından analog FM radyo, hücresel telefon baz istasyonları ve sayısal ses yayını (Digita Audio Broadcast – DAB) vericilerini yayın kaynağı olarak kullanan PUK sistemleri incelenerek, bu sistemlerdeki tespit menzili tahminleri yapılmış ve bu sistemler kullanılarak hedef tespiti yapılabilecek menziller belirlenmiştir. PUK sisteminde dalga biçimi özelliklerinin menzil ve doppler çözünürlüğü ve belirsizliği üzerindeki etkisi de incelenmiştir (Griffiths and Baker 2005). Howland vd. (2005), deneysel bir bistatik radar sistemini gerçekleyrek, FM verici yayınlarının dinlenmesi yoluyla *150km* mesafeden hedef tespit ve takibinin yapılabildiğini göstermiştir.

Tez çalışmasında sinyal bazında bistatik radar ve PUK sistemi incelenmediğinden bu noktadan sonra bistatik radar ve PUK sistemi birbirinin yerine kullanılarak devam edilmiştir. Bistatik radarlarda hedef tespiti monostatik radarlardakine benzer bir şekilde gerçekleştirilmektedir. Ancak, bistatik radar sistemlerinin tespit ettikleri hedeflerin konumlarıyla ilgili yaptıkları ölçümler monostatik radarlardan farklıdır. Şekil 1.1'de bir alıcı ve bir vericiden oluşan bistatik radarın hedef ile olan geometrisi, iki boyutlu Kartezyen uzayda verilmiştir. Burada alıcı ve verici arasındaki mesafe *L* olup, alıcı, verici ve hedefin oluşturduğu yapıya bistatik üçgen denilmektedir. Şekil 1.1'de verilen bistatik üçgende r_1, r_2, β ve θ_R sırasıyla verici ile hedef arasındaki mesafe, alıcı ile hedef arasındaki mesafe, bistatik açı ve alıcıya göre hedefin yanca açısıdır. Bistatik radarlar ölçüm yapabilme kabiliyetlerine göre; $r_1 + r_2$ toplamından oluşan bistatik menzil, bu menzilin zamana bağlı değişiminin ölçüsü olan bistatik doppler (bistatik menzil-hızı), hedefin alıcıya göre yanca açısı olan θ_R ve hedefin alıcıya göre yükseliş açısı olan, üç boyutlu Kartezyen uzayda XY düzlemi ile hedef – alıcı arasındaki doğru parçasının yaptığı açıyı ölçebilirler (Willis 2005).



Şekil 1.1 Bistatik radar geometrisi

Doğrusal olmayan bistatik radar ölçümleri kullanılarak ilgilenilen hedefin durumu hakkında bilgi çıkarma problemi doğrusal olmayan hedef takibi ya da hedef durum kestirimi olarak tanımlanmaktadır. Doğrusal olmayan ölçüm ya da durum dinamikleri varlığında hedef takibi problemine bir çözüm olarak (Bar-Shalom vd. 2001)'de

genişletilmiş Kalman Filtre (Extended Kalman Filter - EKF) verilmiştir. EKF, doğrusal olmayan sistem fonksiyonlarının Taylor serisi açılımı ile doğrusal hale getirilmesi yaklaşımı ile Kalman filtrenin (Kalman 1960) uygulanmasıdır. EKF'ye bir alternatif Julier ve Uhlman (1997)'de Unscented Kalman Filtre (UKF) verilmiştir. UKF; dağılım fonksiyonlarının doğrusal olmayan dönüşümleri yerine, o dağılımları temsil eden örneklemlerin doğrusal olmayan dönüşümlerinin daha kolay yapılabileceği gerçeğinden yola çıkılarak ortaya konmuştur.

UKF ile durum kestirimi doğrusal olmayan pasif ölçümler varlığında Zhan ve Wan (2007) tarafından verilmiştir. Çalışmada, pasif dinleme ile doppler, yanca ve yanca hızı ölçümlerini yapma kabiliyetine sahip bir sistem için hızlı ve yüksek doğrulukta çalışan UKF tabanlı hedef takip yöntemi önerilmiştir. Önerilen takip algoritmasında, yinelemeli EKF algoritmasından esinlenilerek UKF yinelemeli hale getirilmiştir.

Doğrusal olmayan sistem dinamikleri varlığında durum kestirimi yapabilmeyi sağlayan bir başka örneklem tabanlı yöntem ise Parçacık filtresidir. Parçacık filtresinde, hedef durum sonsal dağılımına parçacıklar türünden ayrık bir yaklaşım yapılmaktadır (Gordon vd. 1993). Durum sonsal dağılımına yapılan yaklaşım, ardışık Monte Carlo integrali yöntemi temeline dayanmaktadır.

Tobias ve Lanterman (2005), 2B Kartezyen uzayda hareket eden bir hedefin bistatik menzil ve menzil-hızı ölçümleri varlığında durum kestiriminin Parçacık filtresi aracılığı ile uygulanan PHD (Mahler 2004) filtre ile gerçekleştirilmiştir. Üç adet verici antenin bir alıcıyla dinlenildiği durumda, hedef başlatma, ölçüm hedef ilişikilendirme, hedef takip etme ve hedef sonlandırma işlemleri PDH filtre ile gerçekleştirilerek filtrenin başarımı gösterilmiştir.

Hedef takip yöntemlerinin başarımlarının ölçüsü ,takip ortamından elde edilebilecek bilgi ile sınırlıdır. Fisher bilgisi (Öztürk vd. 2006), durum kestiriminde ölçümlerden çıkarılabilcek maksimum istatistiksel bilgi olarak, hedef takibinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu bilginin tersi yansız durum kestiricilerinin ikinci dereceden kestirim hataları için bir alt sınır tanımlamaktadır ve literatürde Cramer-Rao Alt Sınırı

(Cramer- Rao Lower Bound - CRLB) (Ristic vd. 2004) olarak geçmektedir. CRLB'nin stokastik durum kestirimi problemlerinde özyinelemeli hesaplanması için Tichavsky vd. (1998)'de pratik bir yöntem sunulmuş ve CLRB sonsal CRLB (Postrior CRLB - PCRLB) olarak isimledirilmiştir. PCRLB pratikte hesaplanması zor bir nicelik olmasına karşın, PCRLB'nin gerçek hedef durumu yerine, durum kestirimi etrafında hesaplanması yoluyla PCRLB'ye yaklaşım yapılmaktadır. Bu yaklaşıma dayalı hesaplanan PCRLB'nin sensör yönetimi probleminde optimize edilecek maliyet fonksiyonun oluşturulmasında kullanıldığı birçok çalışma vardır. Hernandez vd. (2004)'te yüksek doğrulukta hedef durum kestirimi yapabilmek için, ölçüm sürecinin, kısıtlı sensör kaynaklarının kullanımı ile optimizasyonunda, PCRLB'yi durum kestiriminin doğruluğunun kontrol edilmesi amacıyla kullanılmıştır. Ayrıca, ölçüm belirsizliği varlığında, bu belirsizliğin PCRLB'ye olan etkisi çevrimdışı hesaplanabilir bir çarpan ile ifade edilmiştir. Bu çalışmada yapılan sensör konumlarının tam olarak bilindiği varsayımı Punithakumar vd. (2006)'da gevşetilerek, problem sensör konumlarının belirsiz ve zaman içerisinde yer değiştirebildiği duruma genişletilip çözülmüştür. Tharmarasa vd. (2007), çok sensörlü ortamlar için PCRLB'nin izine bağlı olarak bir maliyet fonksiyonu tanımlamış ve maliyet fonksiyonunu minimum yapan sensör ya da sensör gruplarının aktif edilmesi temeline dayanan sensör yöntemi metodu önermiştir. Yazarların aynı yıl yayınlanan bir başka çalışmasında da, PCRLB'yi belirli bir değerin altında tutarken, yeni hedef tespit olasılığını maksimize eden sensör yönetim yapısı incelenmiştir (Tharmarasa vd. 2007). PCRLB'nin sensör yönetiminde kullanılması için bir başka çalışma ise Tharmarasa vd. (2007)'de verilmiştir. Burada veri birleştirme merkezi ile iletişimde olacak sensör gruplarının belirlenmesi için Tharmarasa vd. (2007)'de tanımlanan maliyet fonksiyonu yeniden düzenlenmiştir. Maliyet fonksiyonunun minimize edilmesiyle, hedef takip doğruluğunu arttırırken harcanan gücü azaltan sensör grupları ve onların iletişim frekansları belirlenmiştir.

Fisher bilgi matrisinin hesaplanamadığı durumlarda, bilginin alternatifi olarak Gözlenen Bilgi Matrisi (Observed Information Matrix - OIM) pratik uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır (Streit 2010). OIM'nin tersi de kestirim kovaryansı ile ilişkilidir ve bazı uygulamalarda kestirim kovaryansının yerine kullanılan bir istatistiktir (Efron ve Hinkley 1978). Stokastik durum kestirimi problemlerinde OIM, sonsal OIM

olarak (Streit 2007)'de tanımlanmış ve Streit (2007) Gauss gürültüsü varsayımı altında sonsal OIM'nin özyinelemeli olarak hesaplanması için bir yöntem önermiştir.

Bu tez çalışmasında bistatik menzil ve mezil-hızı ölçme kabiliyetine sahip multistatik radar sisteminde, radar ağı geometrisi, hedef takibi ve radar ağında bilgi analizi üzerine araştırmalar geçekleştirilmiştir. Radar ağının, alıcı ve verici konumları açısından nasıl tasarlanması gerektiği, Fisher bilgisi hesaplanarak incelenmiş ve hedef takibinin belirli doğruluklarda yapılabilmesi için multistatik radar ağı geometrisi önerilmiştir (Soysal vd. 2009). Doğrusal olmayan bistatik ölçümler varlığında hedef durum kestirimi, merkezi ve dağıtık bilgi birleştirme teknikleri ile ayrı ayrı yapılmıştır. UKF ve Parçacık filtre algoritmaları, merkezi bilgi birileştirme tekniği altında denenerek filtrelerin başarımları ortaya konulmuştur. Dağıtık bilgi birleştirme için Parçacık filtre ve kovaryans kesişim yöntemi birleştirilmesinden oluşan bir algoritma önerilmiş ve önerilen algoritmanın hedef takip başarımı incelenmiştir (Soysal ve Efe 2011). Stokastik durum kestirimi problemlerinde sonsal OIM'nin özyinelemeli olarak hesaplanması için gerekli türetim yapılarak multistatik radar ağında sonsal OIM hesaplanmıştır. Yapılan incelemelerde sonsal OIM'nin tersinin ikinci dereceden kestirim hatası (kovaryans/ortalama kare hata) ile ilişkili olduğu ve hem merkezi hem de dağıtık bilgi birleştirmede hedef takibi sırasında bilginin bir ölçüsü olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

Bu tezin literatüre katkıları ve özgün değeri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Multistatik radar ağı tasarımı: Multistatik radar ağında bulunan alıcı ve vericilerin Fisher bilgisini en çok yapacak şekilde konumlandırıldığı ağ geometrisi önerilmiştir.
- Gözlenen Bilgi analizi: Sonsal OIM'nin özyinelemeli olarak hesaplanması için genel bir çıkarım yapılmıştır. Tez çalışmasında incelenen radar ağında OIM'nin bilginin ölçüsü olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.
- Sonsal durum dağılımı analizi: Multsitatik radar ağında doğrusal olmayan ölçümler varlığında, sonsal durum dağılımına Gauss dağılımı yaklaşımı yapılabilmesi için gerekli koşullar ortaya konmuştur.

- Merkezi bilgi birleştirme ile hedef takibi: Parçacık filtre ve UKF'nin çok sensörlü ortamda bistatik menzil ve menzil-hızı ölçümleri ile durum kestirimi başarımları ortaya konmuştur.
- Dağıtık bilgi birleştirme ile hedef takibi: Radar ağında bilginin dağıtık olarak birleştirilmesi durumu ele alınarak, Parçacık filtresi tabanlı durum kestiricisi kullanılarak elde edilen ilintili bilgilerin kovaryans kesişim yöntemi ile birleştirilebileceği ve dağıtık noktalarda bulunan durum kestiricilerde hedef takibinin sürdürülebileceği gösterilmiştir.
- Multistatik radar ağında hedef takibi başarımının arttırılmasında sonsal OIM'nin kullanılabileceği gösterilmiştir. Hedef takibinde kullanılacak ölçümlerin belirlenmesi probleminde, hedef durumu hakkında en çok bilgiyi içeren ölçüm grubunun Sonsal OIM'ye bağlı olarak oluşturulabilceği gösterilerek, hedef takip başrımındaki artış ortaya konmuştur.

Tez, yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez çalışmasının amacı ve kapsamı belirtilerek, konu ile ilgili daha önceki çalışmalar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, tez çalışmasında incelenen problemin ve önerilen çözüm yollarının anlaşılması için gerekli kuramsal temeller anlatılmıştır. Öncelikle, çalışmalarda incelenen sistem durum – uzay modeli tanımlanmış ve bu uzayda bayes sonuç çıkarım yöntemi verilmiştir. Daha sonra, doğrusal olmayan stokastik durum – uzayında durum kestirimi için temel yöntemler sunulmuştur. Bölümde son olarak, istatistiksel bilginin birbirine yakın iki ölçüsü olan Fisher bilgisi ve Gözlenen bilgi tarif edilmiştir.

Üçüncü bölümde, Fisher bilgisinin multistatik radar ağında alcı ve vericilerin konumlarının belirlenmesinde nasıl kullanılacağı anlatılmıştır. Öncelikle, bistatik menzil ve menzil hızlarından statik parametre kestirimi yapılırken Fisher bilgisinin nasıl hesaplanacağı gösterilmiş, daha sonra bilgiye bağlı alcı verici konumlarının belirlenmesi için yapılan çalışmalar ve ortaya konan alcı – verici geometrisi sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, stokastik durum kestiriminde sonsal OIM'nin özyinelemeli hesaplanması için yapılan türetim ve elde edilen özyinelemeli hesaplama yöntemi verilmiştir.

Beşinci bölümde, bistatik menzil ve menzil-hızı ölçümleri varlığında elde edilen durum sonsal dağılımına Gauss dağılımı yaklaşımı yapılması üzerine yapılan çalışmalar ve sonuçları sunulmuştur.

Altıncı bölümde, multistatik radar ağında hedef takibi ve bilgi analizi ile ilgili benzetim çalışmaları ve sonuçları anlatılmıştır. Öncelikle, benzetim ortamı detaylı olarak verilmiş ve çalışmalarda kullanılan başarım ölçütleri tanımlanmıştır. Daha sonra merkezi bilgi birleştirme ile hedef takibi ve sonsal OIM benzetimlerinin sonuçları sunularak yorumlanmıştır. Bir sonraki alt bölümde, dağıtık bilgi birleştirme için önerilen hedef takip yöntemi verilerek, yöntemin başarımının incelenmesi amacıyla yapılan benzetimlerin sonuçları sunulmuştur. Son olarak, sonsal OIM'nin hedef takip başarımının arttırılmasında nasıl kullanılabilceği gösterilerek bir uygulama örneği verilimiştir.

Son bölümde, yapılan çalışmaların genel bir değerlendirilmesi yapılarak, ileride yapılabilecek çalışmalar ile ilgili öneriler sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tezin bütününde kullanılan yöntemlerin anlaşılmasını sağlamak için kuramsal bilgilere yer verilmiştir. Bu bölüm altı alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, tez çalışmasında incelenen sistem için genel durum – uzay modeli tanımlanmıştır. İkinci alt bölümde, filtreleme problemi ve problemin kavramsal çözümü verilmiştir. Üçüncü alt bölümde, sistem durum – uzay modeli için yapılacak bazı varsayımlar altında filtreleme problemini özyinelemeli olarak çözme yöntemleri verilmiştir. Dördüncü alt bölümde, filtreleme probleminde teorik olarak erişilebilecek hata başarımının ölçüsü olarak sonsal Cramer-Rao alt sınırı (Posterior Cramer-Rao Lower Bound – CRLB) ve Fisher bilgisi anlatılmıştır. Beşinci alt bölümde, Gözlenen Bilgi Matrisi (Observed Information Matrix) konusu ele alınmıştır. Son alt bölümde ise, özellikle farklı kaynaklardan gelen ilintili bilgilerin birleştirilmesinde kullanılan kovaryans kesişimi (Covariance Intersection – CI) yöntemi incelenmiştir.

2.1 Sistem Durum – Uzay Modeli

$x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ sistemin zamanla değişen hedef durum vektörü olsun. Burada, $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesi, n_x hedef durum vektörünün boyutu ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, $k \in \mathbb{N}$ kesikli zaman indisi olarak tanımlanmaktadır. Hedef durum vektörü eşitlik (2.1)'de verilen stokastik durum denklemine göre zaman içerisinde durum değiştirmektedir.

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, v_{k-1}) \tag{2.1}$$

Burada $f_{k-1}(.)$, x_{k-1} ve v_{k-1}'nin doğrusal ya da doğrusal olmayan bilenen fonksiyonudur. v_{k-1}, hedef hareketindeki hatalı modellemeler ve öngörülemeyen bozucu etkenleri modelleyen süreç gürültüsü dizisidir. Durum vektörü ile ilişkili ölçümler $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ olarak tanımlanmaktadır. Burada n_z ölçüm vektörünün boyutudur. Ölçüm vektörü zaman içinde eşitlik (2.2)'de verilen ölçüm denklemine göre değişmektedir.

$$z_k = h_k\left(x_k, w_k\right) \tag{2.2}$$

Burada $h_k(.)$, x_k ve w_k'nın doğrusal ya da doğrusal olmayan bilinen fonksiyonudur. w_k, ölçüm sisteminden kaynaklanan hataları modelleyen gürültü dizisidir. *k=0* anındaki sistemin başlangıç durumu x_0, bilinen $p(x_0)$ dağılımına sahip rasgele değişkendir. Eşitlikler (2.1), (2.2) ve başlangıç durumu hedef durum – uzay modelinin en genel halini tanımlamaktadır. Bu bölümde verilen durum – uzay modelinin, durum, ölçüm fonksiyonları ve durum başlangıç değeri ile gürültü süreçleri hakkında yapılan varsayımlarla elde edilen özel halleri tez çalışması kapsamında incelenmiştir.

2.2 Filtreleme Problemi ve Bayes Çözümü

Eşitlikler (2.1), (2.2) ve başlangıç durumu ile tarif edilen durum – uzay modelinin parametresi olan durum vektörü hakkında ölçümler kullanılarak çıkarım yapılması, filtreleme problemi olarak tanımlanmaktadır (Ristic vd. 2004). Bir başka deyişle, durum vektörü ile ilişkili ölçümler kullanılarak durum vektörünün kestirilmesi, filtreleme problemidir. Bu bölümde durum vektörünün kestirimi için Bayes çözümü incelenmiştir. Bayes yaklaşımı ile filtreleme probleminin çözümünde amaç, *k* anına kadar elde edilmiş olan ölçümler ve başlangıç durumundan gelen önsel bilgi ile durum sonsal dağılımını oluşturmaktır (Fearnhead 1998). *k* anına kadar olan bütün ölçümlerin kümesi Z_k,

$$Z_k \triangleq \{z_1 \quad \cdots \quad z_k\} \tag{2.3}$$

ve *k=0* anı için tanımlanmış olan başlangıç durumunun dağılımı (önsel bilgi),

$$p(x_0) \triangleq p(x_0 \mid Z_0), \quad Z_0 \triangleq \varnothing \tag{2.4}$$

olmak üzere, bu bilgiler varlığında hesaplanacak $p(x_k \mid Z_k)$ durum sonsal dağılımı hedef durumunun istenilen optimalite kriterine göre kestirilmesi için yeterlidir. Hedef durum kestiriminin en küçük ortalama kare hata (Minimum Mean Square Error -

MMSE) kıstasına göre yapılmak isteniyorsa sonsal dağılıma bağlı olarak tanımlanan koşullu beklenen değer kestiricisi

$$\hat{x}_k^{MMSE} = E\left[x_k \mid Z_k\right] = \int x_k \, p\left(x_k \mid Z_k\right) dx_k \tag{2.5}$$

bu koşulu sağmaktadır (Van Trees 2001). Sonsal dağılıma bağlı olarak tanımlanan bir başka kestirici ise en büyük sonsal (Maximum a Posteriori – MAP) kestiricidir (Van Trees 2001) ve eşitlik (2.6)'da verildiği gibi tanımlanmaktadır.

$$\hat{x}_k^{MAP} = \arg\max_{x_k} \left\{ p\left(x_k \mid Z_k\right) \right\} \tag{2.6}$$

2.2.1 Sonsal dağılımın özyinelemeli hesaplanması

Eşitlikler (2.5) ve (2.6) ile ifade edilen kestirimlerin yapılabilmesi için öncelikle $p\left(x_k \mid Z_k\right)$'nın bulunması gerekmektedir. Bu bölümde $p\left(x_k \mid Z_k\right)$'nın özyinelemeli olarak hesaplanışı formülleştirilmiştir. Özyinelemeli yöntem sayesinde, sonsal dağılımın her bir yeni ölçüm ile güncellemesinin yerel olarak yapılması sağlanacak, böylece her adımda tüm ölçümlerin tekrar tekrar kullanıldığı toplu (*batch*) işleme gerek duyulmayacaktır. Sonsal dağılımın özyinelemeli olarak hesaplanabilmesi için sistem durum – uzay modeli için aşağıda verilen varsayımlar yapılmıştır.

- Süreç ve ölçüm gürültüleri bilinen dağılıma sahip birbirinden bağımsız beyaz gürültü dizileridir.
- Başlangıç hedef durumu bilinen $p\left(x_0\right)$ dağılımına sahiptir ve süreç ve ölçüm gürültülerinden bağımsızdır.
- Durum denklemi birinci dereceden Markov sürecidir.
- *k-1* anındaki sonsal dağılım $p\left(x_{k-1} \mid Z_{k-1}\right)$ bilinmektedir.

Sonsal dağılımın koşullu olduğu ölçüm kümesi Z_k, *k* anındaki ölçüm ve *k-1* anında kadar olan ölçümlerin birleşimi $\left(z_k, Z_{k-1}\right)$ şeklinde yazılıp Bayes kuralı uygulandığında

$$p\left(x_k \mid Z_k\right) = p\left(x_k \mid z_k, Z_{k-1}\right)$$
$$= \frac{p\left(z_k \mid x_k, Z_{k-1}\right) p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right)}{p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right)} \tag{2.7}$$
$$= \frac{p\left(z_k \mid x_k\right) p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right)}{p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right)}$$

eşitilik (2.7)'de verilen özyinelemeli sonsal dağılım hesaplama formülü elde edilir. Burada $p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right)$, *k* anındaki durumun dinamik önsel bilgisi (öngörüm/tahmin dağılımı), $p\left(z_k \mid x_k\right)$ olabilirlik fonksiyonu ve $p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right)$ ise standartlaştırma katsayısı olarak adlandırılmaktadır. Eşitlik (2.1)'de verilen durum denklemi ve Chapman – Kolmogorov eşitliği (Papoulis vd. 2002) kullanılarak öngörüm dağılımı *k-1* anındaki sonsal dağılıma ve geçiş dağılımı $p\left(x_k \mid x_{k-1}\right)$'e bağlı olarak yazılabilir.

$$p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right) = \int p\left(x_k \mid x_{k-1}\right) p\left(x_{k-1} \mid Z_{k-1}\right) dx_{k-1} \tag{2.8}$$

Ristic vd. (2004), eşitlik (2.7) ve (2.8) sırasyla, güncelleme ve öngörüm denklemleri olarak adlandırmaktadır. Eşitlik (2.8), *k* anında z_k ölçümü geldiğinde dinamik önsel bilginin bayes kuralı kullanılarak sonsal dağılıma nasıl dönüştürüleceğini tarif etmektedir. Sonsal dağılım elde edilirken standartlaştırmayı sağlayan paydadaki terim, olabilirlik fonksiyonun ve ölçüm gürültüsünün bir fonksiyonudur ve eşitlik (2.9)'da verilen integral ile hesaplanmaktadır.

$$p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right) = \int p\left(z_k \mid x_k\right) p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right) dx_k \tag{2.9}$$

Eşitlikler (2.7) ve (2.8) ile tarif edilen sonsal dağılımın özyinelemeli hesaplanması genellikle kavramsal çözüme sahiptir. Kısıtlı sayıdaki durum dışında eşitliklerin analitik çözümü yoktur.

2.3 Filtreleme Problemi Çözümleri

Bu bölümde durum sonsal dağılımı kullanılarak hedef durumunun kestirilmesi problemine literatürde önerilen başlıca yöntemler incelenmiştir. Bölüm 2.1'de tanımlanan sistem durum – uzay modelinde varsayımlar yapılarak, optimal kestirici ve optimal olmayan çözüm yöntemleri verilmiştir.

2.3.1 Kalman filtre

Eşitlikler (2.7) ve (2.8) ile ifade edilen filtreleme denklemlerinin kapalı form çözümü, sistem durum – uzay modelinde aşağıdaki varsayımlar yapılarak elde edilebilir.

- Durum denklemi sıfır ortalamalı bilenen kovaryanslı toplanır beyaz Gauss gürültüsü ile bozulmuş birinci derece Markov yapılı stokastik doğrusal fonksiyondur.

$$x_k = F_{k-1}x_{k-1} + v_{k-1} \tag{2.10}$$

- Ölçüm denklemi sıfır ortalamalı bilenen kovaryanslı toplanır beyaz Gauss gürültüsü ile bozulmuş stokastik doğrusal fonksiyondur.

$$z_k = H_k x_k + w_k \tag{2.11}$$

- Başlangıç durumu x_0'ın dağılımı $p(x_0) \triangleq N(\mu_0, P_0)$ şekildedir ve N Gauss dağılımını göstermektedir.
- v_k ve w_k gürültü süreçleri sırasıyla $N(0, Q_k)$ ve $N(0, R_k)$ dağılımlarına sahiptir.
- x_0, v_k ve w_k birbirinden bağımsızdır.
- $E\left[v_k v_j\right] = Q_k \delta_{k-j}$, $\quad \delta_{k-j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$
- $E\left[w_k w_j\right] = R_k \delta_{k-j}$, $\quad \delta_{k-j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

Bar-Shalom vd. (2001), yukarıda verilen varsayımları doğrusal Gauss varsayımları (durumu) olarak tanımlamaktadır. Bu varsayımlar için sonsal dağılımın çözümü Kalman filtresi (Kalman 1960) olarak bilinmektedir. Kalman filtresi sonsal dağılımın her güncelleme sonunda Gauss dağılımına sahip olduğunu varsayar. Böylelikle Gauss dağılımın bütün özelliklerini belirleyen ortalama ve kovaryans parametreleri sonsal dağılımın tarif edilmesi için yeterli olmaktadır. Kalman filtresinin türetimi Bar-Shalom vd. (2001)'de detaylı olarak verilmiştir. Burada, ortalama ve kovaryans parametrelerinin kestiriminin nasıl yapıldığının anlaşılması için filtre algoritmasını oluşturan sonuç denklemleri verilmiştir. Kalman filtresi ile hesaplanan öngörüm dağılımının ve sonsal dağılımın ortalama ve kovaryansı eşitlikler (2.12) – (2.15)'te verilmiştir.

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{x}_{k|k-1} \tag{2.12}$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^{T} + Q_{k-1} \tag{2.13}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k\left(z_k - H_k\hat{x}_{k|k-1}\right) \tag{2.14}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k S_k K_k^{T} \tag{2.15}$$

Burada, T matris transpozunu ve $k|k\text{-}1$ ile gösterilen zaman indisleri bir sonraki an için durum tahminini göstermektedir. Eşitlikler (2.14) ve (2.15)'te verilen S_k ve K_k sırsıyla inovasyon kovaryansı ve Kalman kazancıdır. Bu değerler eşitlikler (2.16) ve (2.17)'de verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$S_k = H_k P_{k|k-1}H_k^{T} + R_k \tag{2.16}$$

$$K_k = P_{k|k-1}H_k^{T}S_k^{-1} \tag{2.17}$$

Kalman filtresinin ve bu filtre ile yapılan kestirimlerin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Kalman filtresinin bazı özellikleri:

- Durum ve gözlem denklemleri doğrusal ve gürültüler normal dağılımlıysa MMSE ve MAP optimal ve yansız kestirim üretilir.

- Durum ve gözlem denklemleri doğrusal, fakat gürültüler normal dağılımlı değilse, kestirim MMSE optimal fakat MAP optimal değildir. Bu durumda kestirim aynı zamanda yanlıdır (Bar-Shalom 2001).

- Durum ve gözlem denklemleri doğrusal ve gürültüler normal dağılımlıysa etkin (efficient) kestirim yapılır. (kovaryans, sonsal Cramer-Rao alt sınırına eşit) (Bar-Shalom 2001).

- Filtre gürültü hakkında varsayımlar yaptığından gürbüz değildir.

- Modelleme hatalarına karşı oldukça hassastır.

- Sistem hakkında bilinen ek bilgilerin (durum kısıtları vb.) filtrelemeye ilave edilmesi olukça zordur.

2.3.2 Genişletilmiş Kalman filtre

Sistem durum uzay modelini tarif eden eşitlikler (2.1) ve (2.2)'de f ve/veya h fonksiyonlarının doğrusal olmaması ancak, süreç ve ölçüm gürültülerinin toplamsal, bir birinden bağımsız 0 ortalamalı Gauss gürültü süreçleri olması durumunda, durum kestiricisi olarak Kalman filtresini gerçeklemek mümkün olmamaktadır. Bu durumda yaygın olarak kullanılan ve optimal olmayan durum kestiricisi Genişletilmiş Kalman filtredir (Bar-Shalom, vd. 2001, Blackman ve Popoli 1999) (Extended Kalman Filter - EKF). EKF, optimal olmayan bir kestiricidir ve bu yöntemde doğrusal olmayan durum veya gözlem fonksiyonları Taylor serisi açılımı ile doğrusallaştırılarak Kalman filtre yapısı içerisinde kullanılır. Taylor açılımında sıklıkla birinci dereceden açılım ile yetinilerek doğrusal olmayan fonksiyonların doğrusal yaklaşımları elde edilir. Daha üst derecede Taylor açılımı kullanımı mümkün olmasına rağmen üst düzey türevlerin

hesaplanmasının zorluğu, açılım sonucunda ortaya çıkacak karmaşık ifadelerin hesaplanmasında gerekecek işlem gücü ve yapılacak işlemlerin nümerik kararlılığı açısından ikinci derecenin üzerinde açılımlar genellikle kullanılmaz. Birinci derece Taylor açılımı kullanan EKF için doğrusallaştırılmış durum $f_{k-1}(.)$ ve ölçüm $h_k(.)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}(x_{k-1})}{\partial x_{k-1}} \right|_{x_{k-1}=\hat{x}_{k-1|k-1}} \tag{2.18}$$

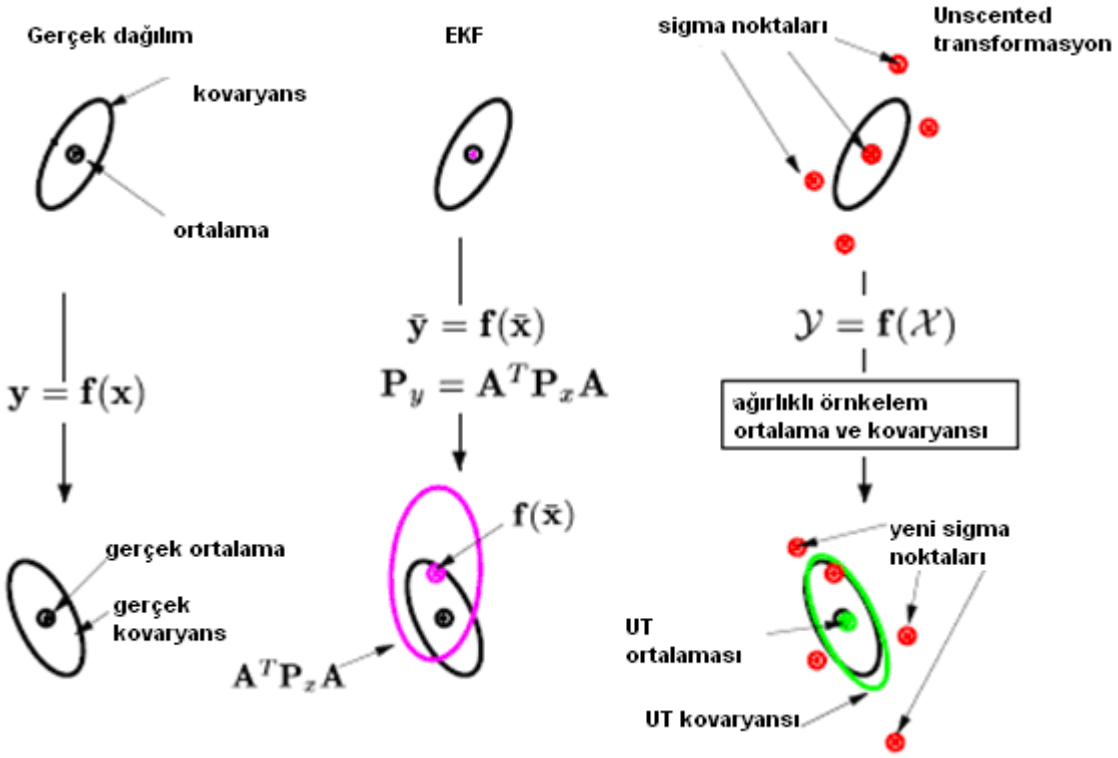
$$H_k = \left. \frac{\partial h_k(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k=\hat{x}_{k|k-1}} \tag{2.19}$$

Burada Taylor serisi açılımı durum fonksiyonu için durumun o anki kestirilen değeri etrafında yapılırken, ölçüm fonksiyonu için seri açılımı durum kestiriminin öngörüm değeri etrafında gerçekleştirilir. EKF ile durum ve durum kovaryansı kestirimi eşitlikler (2.18) ve (2.19) ile hesaplanan doğrusal olmayan fonksiyon yaklaşımlarının eşitlikler (2.12) – (2.17) arasında verilen Kalman filtre denklemlerinde yerine konulması ile gerçekleştirilmektedir. EKF ile ilgili en büyük problem, doğrusallaştırmanın doğasından kaynaklanan hatalar sebebiyle filtrenin ıraksama ihtimalinin bulunmasıdır. Özellikle düşük dereceden Taylor serisi açılımı ile yeterli doğrulukta yaklaşım yapılamayan doğrusal olmayan fonksiyonlar varlığında, EKF durum kestirimini kabul edilebilir hatalar ile gerçekleştirememektedir.

2.3.3 Unscented Kalman filtre

Filtreleme probleminde durum veya gözlem denklemleri yüksek doğrusal olmayan yapıda ise EKF algoritmasının kestirim başarımının düşmesinden dolayı filtre ıraksaması problemi ortaya çıkmaktadır. Filtre ıraksaması gerçekleşmese dahi, filtrenin yapmış olduğu kestirim ile gerçek parametrenin istatistiklerinin birbirlerini tutmaması ihtimali ile karşılaşılmaktadır (Julier ve Uhlman 1997). Bu duruma bir örnek Şekil 2.1'de gösterilmektedir. Şekilde doğrusal olmayan bir dönüşümün ardından EKF'nin yapmış olduğu kestirim ve kestirim kovaryansın gerçek parametre istatistiklerinden

uzakta olduğu gözlenmektedir. Bu soruna çözüm olarak Julier and Ulhman (1997) *unscented* dönüşüm (Unscented Transformation – UT) adında, örneklem tabanlı, Monte Carlo yöntemlerine benzer bir yöntem önermiştir. UT metodu Monte Carlo yöntemleri gibi, olasılık dağılımlarının parçacık (örneklem) bazlı yaklaşımlarını kullanır. UT yönteminde, Monte Carlo metotlarından farklı olarak örneklem kümesi rasgele oluşturulmaz. Bu yöntemde yaklaşımı yapılan olasılık dağılımının ortalaması etrafında deterministik olarak seçilen minimal sayıda parçacık kullanılır. Seçilen örneklerin ortalama ve kovaryanslarının gerçek dağılımın ortalama ve kovaryansına eşit olması amaçlanır. Bunun yanında, UT ile yalnızca ilk iki momentin değil, daha üst düzey momentlerin korunması da mümkündür. UT örneklemleri daha sonra doğrusal olmayan dönüşüme sokulur ve bunun ardından örneklemlerden yeni olasılık dağılımının ilk iki momenti oluşturulabilir. Şekil 2.1'de UT ile parçacık bazlı olasılık dağılım yaklaşımının gerçek dağılım istatistiklerini EKF'den çok daha iyi koruduğu görülmektedir.



Şekil 2.1 İki boyutlu normal dağılımlı bir rasgele değişkenin doğrusal olmayan dönüşümün ardından ilk iki momentin gerçek değerleri ile EKF ve unscented dönüşüm yaklaşımları (Wan ve Van der Merwe 2001)

Julier ve Jeffrey (1997), UT kullanan Kalman filtresi tabanlı bir kestirim algoritması önermiştir. Bu algoritma Kalman filtresi gibi tahmin ve gözlem güncellemesi kısımlarından oluşmaktadır.

2.3.3.1 UKF algoritması

Eşitlikler (2.1) ve (2.2) ile tanımlanan durum – uzay modelinde süreç ve ölçüm gürültülerinin sıfır ortalamalı Q_k ve R_k kovaryanslı ve birbirinden bağımsız toplanır gürültü olduğu varsayımı yapılarak, durum – uzay modeli eşitlikler (2.20), (2.21) ve (2.22)'de verildiği gibi yeniden yazılabilir. *k-1* anındaki hedef durum kestirimi $\hat{x}_{k-1|k-1}$ ve durum kovaryansı kestirimi $P_{k-1|k-1}$ olsun.

$$x_k = f(x_{k-1}) + v_{k-1} \tag{2.20}$$

$$z_k = h(x_k) + w_k \tag{2.21}$$

$$x_0 \sim p(x_0) \tag{2.22}$$

k anındaki durum sonsal dağılımına bağlı olarak en küçük ortalama kare hata kriterine göre hedef durum ve durum kovaryansı kestirimi UKF yöntemi ile sigma noktalarının hesaplanması, zaman güncellemesi ve ölçüm varlığında durum güncellemesi adımları ile gerçekleştirilmektedir.

2.3.3.1.1 Sigma noktalarının hesaplanması

k-1 anındaki durum sonsal dağılımının doğrusal olmayan dönüşüm yolu ile bir sonraki ana taşıyabilmek için hesaplanan, dağılımı temsil eden ve hedef durum uzayındaki yeri deterministik olarak belirlenen parçacıklar, sigma noktaları olarak adlandırılmaktadır. Bu noktalar *k-1* anındaki hedef durum kestirimi etrafında hedef durum kovaryansına bağlı olarak dağıtılmaktadır. $\chi_{i,k-1|k-1}$, *k-1* anında oluşturulan *i.* sigma noktası olmak üzere, *2L+1* tane nokta eşitlikler (2.23), (2.24) ve (2.25)'te verildiği gibi hesaplanmaktadır. Burada *L* durum vektörünün boyutunu göstermektedir.

$$\chi_{0,k-1|k-1} = \hat{x}_{k-1|k-1} \tag{2.23}$$

$$\chi_{i,k-1|k-1} = \hat{x}_{k-1|k-1} + \left(\sqrt{(L+\gamma)P_{k-1|k-1}}\right)_i, \qquad i = 1,\ldots,L \tag{2.24}$$

$$\chi_{i,k-1|k-1} = \hat{x}_{k-1|k-1} - \left(\sqrt{(L+\gamma)P_{k-1|k-1}}\right)_{i-L}, \qquad i = L+1,\ldots,2L \tag{2.25}$$

Burada γ, üretilen sigma noktasının konumunu ölçeklendiren parametre olup sigma noktasının $\hat{x}_{k-1|k-1}$'den ne kadar uzakta olacağına karar verilmesini sağlamaktadır ve eşitlik (2.26)'da verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\gamma = \alpha^2\left(L+\kappa\right) - L \tag{2.26}$$

α, sigma noktalarının $\hat{x}_{k-1}$ etrafındaki yayılımını belirleyen pozitif bir değer (1e-4$\leq \alpha \leq$ 1), κ genellikle değeri 0 seçilen, ikinci bir ölçeklendirme parametresidir. Eşitlikler (2.25) ve (2.26)'da yer alan $\left(\sqrt{(L+\gamma)P_{k-1|k-1}}\right)_i$ ise, karekökü alınan kovaryansın *i.* kolonunu göstermektedir. Sigma noktalarının her biri için eşitlikler (2.27), (2.28) ve (2.29) kullanılarak bir ağırlık hesaplanmaktadır.

$$\mathrm{w}_0^{(m)} = \frac{\gamma}{L+\gamma} \tag{2.27}$$

$$w_0^{(c)} = \frac{\gamma}{L+\gamma} + \left(1-\alpha^2+\beta\right) \tag{2.28}$$

$$w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2\left(L+\gamma\right)}, \qquad i = 1,2,\ldots,2L \tag{2.29}$$

β durum önsel dağılımını hesaba katmak için kullanılan parametredir. Önsel dağılımın Gauss dağılımı olduğu durum için $\beta = 2$ değeri optimal değerdir (Julier ve Ulhman 1997).

2.3.3.1.2 Zaman güncellemesi

Sigma noktaları doğrusal olmayan durum fonksiyonunda yerine konarak noktaların öngörüm değerleri elde edilmektedir. Daha sonra bu değerlerden durum öngörümü ve kovaryansı eşitlikler (2.31) ve (2.32) ile hesaplanmaktadır.

$$\chi_{i,k|k-1} = f_{k-1}\left(\chi_{i,k-1|k-1}\right) \tag{2.30}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1} \tag{2.31}$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} \left(\chi_{i,k|k-1} - x_{k|k-1}\right)\left(\chi_{i,k|k-1} - x_{k|k-1}\right)^T + Q_k \tag{2.32}$$

Sigma noktalarının öngörüm değerleri $h_k(.)$ fonksiyonuna uygulanarak ölçüm sigma noktaları elde edilmektedir.

$$z_{i,k|k-1} = h\left(\chi_{i,k|k-1}\right), \qquad i = 1,\ldots 2L \tag{2.33}$$

Eşitlikler (2.27) ve (2.29)'da verilen ağırlıklar kullanılarak ölçüm öngörüm değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$z_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} z_{i,k|k-1} \tag{2.34}$$

Ölçüm öngörümü ve ölçüm sigma noktaları kullanılarak ölçüm kovaryansı eşitlik (2.35)'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$P_{zz,k} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} \left(z_{i,k|k-1} - z_{k|k-1}\right)\left(z_{i,k|k-1} - z_{k|k-1}\right)^T + R_k \tag{2.35}$$

Durum için hesaplanan öngörüm sigma noktaları ile ölçüm öngörüm sigma noktaları kullanılarak durum ile ölçüm arasındaki çapraz kovaryans eşitlik (2.36)'ta verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$P_{xz,k} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} \left(\chi_{i,k|k-1} - x_{k|k-1} \right) \left(z_{i,k|k-1} - z_{k|k-1} \right)^T \tag{2.36}$$

2.3.3.1.3 Ölçüm ile durum güncellemesi

Durum güncellemesi, hedef kaynaklı ölçüm varlığında Kalman filtresindeki gibi yapılmaktadır. Öncelikle Kalman kazancı

$$K_k = P_{xz,k} P_{zz,k}^{-1} \tag{2.37}$$

olarak hesaplanmaktadır. Durum ve durum kovaryansı için hesaplanan öngörüm değerleri Kalman güncellemesinde olduğu gibi güncellenmektedir.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \left(z_k - z_{k|k-1} \right) \tag{2.38}$$

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k P_{zz,k} K_k^T \tag{2.39}$$

2.3.4 Parçacık filtre

Hedef durumunun ve kovaryansının durum sonsal dağılımı ile kestirimi olarak tanımlanan filtreleme probleminde, durum ve ölçüm fonksiyonlarının doğrusal olmadığı ve sistem gürültüsünün Gauss dağılımlı olmaması durumlarında parçacık filtre, filtreleme probleminin çözümü için önerilen bir yöntemdir. Parçacık filtre yöntemi (Sanjeev vd. 2007, Pitt ve Shephard 1999, Gordon, vd. 1993), Ardışık Monte Carlo kestirim yöntemine dayanarak durum sonsal dağılımının nokta kütleler (parçacıklar) aracılığı ile belirlemektedir. Parçacık filtre yöntemini anlamak için öncelikle Monte Carlo İntegrasyonu yöntemini incelemek gerekmektedir.

2.3.4.1 Monte Carlo integrasyonu

Ardışık Monte Carlo yöntemlerinin dolayısıyla parçacık filtrenin temelini Monte Carlo integrasyonu oluşturmaktadır (Ristic vd. 2004). Monte Carlo integrasyonu çok boyutlu integrallerin nümerik olarak hesaplanabilmesi için geliştirilmiş bir yöntemdir. Yöntemi anlamak için eşitlik (2.40)'ta tanımlanan integral örneği ele alınsın.

$$I = \int g(x)dx \tag{2.40}$$

Burada $x \in R^{n_x}$ olarak tanımlanan n_x boyutlu vektördür. Monte Carlo integrasyonunda, $\pi(x)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $g(x) = f(x)\pi(x)$ çarpımı şeklinde ifade edilir. Eşitlik (2.40)'ta verilen I integral sonucu $\pi(x)$ dağılımından üretilecek $(x_1,...,x_n)$ $N >> 1$ tane örneğe bağlı olarak aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$I_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x^i) \tag{2.41}$$

Eğer x^i örnekleri bağımsız ise eşitlik (2.41)'de verilen I_N eşitlik (2.40)'ta tanımlanan integralin yansız bir kestirimi olacaktır (Öztürk ve Özbek 2004).

Monte Carlo integrasyonu Bayes kestirimi kapsamında düşünüldüğünde $\pi(x)$ dağılımı kestirilmeye çalışılan sonsal dağılımın kendisi olmaktadır. Durum sonsal dağılımından örnekleme yapmak çoğunlukla mümkün olmamaktadır. Bu problemin çözümü için, örnekleme işleminin $\pi(x)$ fonksiyonuyla aynı destek kümesine sahip ve örnekleme yapmanın daha kolay olduğu $q(x)$ gibi bir fonksiyondan yapılması temeline dayanan yöntemler literatürde bulunmaktadır. Bu yöntemlerden başlıcalar Kabul – Ret yöntemi (Öztürk ve Özbek 2004), Monte Carlo Markov Zinciri yöntemi (Taşçıoğlu 2011) ve Önem Örnekleme yöntemidir (Ristic vd. 2004). Tez çalışmasında sonsal dağılımın Monte Carlo integrasyonu yoluyla elde edilmesinde önem örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu nedenle, bir sonraki bölümde önem örnekleme yöntemi daha detaylı olarak verilmiştir.

2.3.4.2 Önem örnekleme yöntemi

Monte Carlo (MC) integrali hesaplanırken $\pi(x)$ dağılımından örneklem elde edilememesi durumunda, aşağıda verilen koşulu sağlayan ve $\pi(x)$ dağılımına benzeyen bir $q(x)$ dağılımı kullanılarak MC integrali hesaplanabilir.

$$\pi(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0 \tag{2.42}$$

Eşitlik (2.42)'de verilen koşulu sağlayan $q(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna önem ya da öneri dağılımı adı verilir ve bu dağılım varlığında eşitlik (2.40)'ta tanımlanan integral aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$I = \int g(x)dx = \int f(x)\pi(x)dx = \int f(x)\frac{\pi(x)}{q(x)}q(x)dx \tag{2.43}$$

MC integrali $q(x)$ dağılımdan üretilecek N tane $(x_1,...,x_n)$ örneklemin ağırlıklı ortalaması olarak hesaplanır.

$$I_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x^i)\tilde{w}(x^i) \tag{2.44}$$

$$\tilde{w}(x^i) = \frac{\pi(x^i)}{q(x^i)} \tag{2.45}$$

2.3.4.3 Ardışık önem örneklemesi yöntemi ile durum sonsal dağılımının kestirimi

Önem örneklemesi, MC integralinin hesaplanabilmesini sağlayan önemli bir yöntemdir. Bu yöntemi kullanarak, doğrusal olmayan filtreleme problemlerinde durum sonsal dağılımının görgül dağılım fonksiyonu (emprical distribution function) türünden yaklaşımının yapılması, parçacık filtrelerin de temelini oluşturan Ardışık Önem Örneklemesi (AÖÖ) algoritması ile gerçekleştirilmektedir. AÖÖ algoritması Monte Carlo benzetimi yoluyla özyinelemeli Bayes filtrelemenin yapılabilmesini sağlayan bir

yöntemdir. Bu algoritmanın temeli, istenen sonsal dağılımın belirli ağılıklarla ilişkilendirilmiş rasgele örnekler kümesi ile temsili ve MC integrasyonu yöntemi ile dağılımın parametresinin kestirimidir.

Bu noktada kestirimi yapılmak istenen sonsal dağılımın bir hedefin durumuna ait olduğu varsayılırsa; $X_k = \{x_j, j = 0,...,k\}$ k anına kadarki hedef durum dizisi olmak üzere k anındaki birleşik sonsal dağılım $p(X_k \mid Z_k)$ ve marjinal dağılım $p(x_k \mid Z_k)$ olarak ifade edilsin. $\{X_i^k, w_k^i\}$ birleşik sonsal dağılım $p(X_k \mid Z_k)$'yı belirleyen rasgele bir ölçü olmak üzere, birleşik sonsal dağılım aşağıda verilen yaklaşım ile ifade edilebilir.

$$p(X_k \mid Z_k) \approx \sum_{i=1}^{N} w_k^i \delta(X_k - X_k^i) \tag{2.46}$$

Burada w_k^i'ler toplamları 1 olacak şekilde standartlaştırılmıştır. Eşitlik (2.46)'da verilen dağılım, gerçek sonsal dağılımın ağırlıklandırılmış ayrık bir yaklaşımıdır (görgül dağılım fonksiyonu). Standartlaştırılmış ağırlıklar ise önem örneklemesi yöntemi ile belirlenmektedir. Bu durumda X_k^i örnekleri $q(X_k \mid Z_k)$ dağılımından elde edilmiş ise w_k^i ağırlığı aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$w_k^i \propto \frac{p(X_k^i \mid Z_k)}{q(X_k^i \mid Z_k)} \tag{2.46}$$

AÖÖ algoritması için şu ana kadar verilen ifadeler k anına kadar bütün örnek noktaların ve bu noktalar ile ilişkili ağırlıkların elde olması ve bunların tek bir seferde hesaplanması durumunu göstermektedir. Algoritmanın özyinelemeli halinin elde edilmesi için *k-1* anında $p(X_{k-1} \mid Z_{k-1})$'in görgül dağılım fonksiyonun bilindiği varsayılsın. k anındaki ölçüm z_k'nın gelmesi ile yeni örnekler kullanılarak $p(X_k \mid Z_k)$ yaklaşımı hesaplanmak istensin. Eğer önem dağılımı aşağıda verildiği gibi çarpım halinde seçilirse,

$$q(X_k \mid Z_k) \sim q(x_k \mid X_{k-1}, Z_k) q(X_{k-1} \mid Z_{k-1}) \tag{2.47}$$

toplam örnek kümesi $X_k^i \sim p(X_k \mid Z_k)$, *k-1* anına ait örnekler $X_{k-1}^i \sim p(X_{k-1} \mid Z_{k-1})$'in yeni $x_{k-1}^i \sim p(x_k \mid X_{k-1}, Z_k)$'ler ile genişletilmesi ile elde edilebilir. Ağırlıkları elde etmek için sonsal dağılım $p(X_k \mid Z_k)$, $p(X_{k-1} \mid Z_{k-1})$ ve $p(x_k \mid X_{k-1})$ türünden ifade edilirse;

$$\begin{aligned} p(X_k \mid Z_k) &= \frac{p(z_k \mid X_k, Z_{k-1}) p(X_k \mid Z_{k-1})}{p(z_k \mid Z_{k-1})} \\ &= \frac{p(z_k \mid X_k, Z_{k-1}) p(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1}) p(X_{k-1} \mid Z_{k-1})}{p(z_k \mid Z_{k-1})} \\ &= \frac{p(z_k \mid x_k) p(x_k \mid x_{k-1})}{p(z_k \mid Z_{k-1})} p(X_{k-1} \mid Z_{k-1}) \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$p(X_k \mid Z_k) \propto p(z_k \mid x_k) p(x_k \mid x_{k-1}) p(X_{k-1} \mid Z_{k-1}) \tag{2.49}$$

Eşitlikler (2.47) ve (2.49), eşitlik (2.46)'da yerine konduğunda ağırlıklar,

$$\begin{aligned} w_k^i &\propto \frac{p(z_k \mid x_k^i) p(x_k^i \mid x_{k-1}^i) p(X_{k-1}^i \mid Z_{k-1})}{q(x_k^i \mid X_{k-1}^i, Z_k) q(X_{k-1}^i \mid Z_{k-1})} \\ &= w_{k-1}^i \frac{p(z_k \mid x_k^i) p(x_k^i \mid x_{k-1}^i)}{q(x_k^i \mid X_{k-1}^i, Z_k)} \end{aligned} \tag{2.50}$$

olarak elde edilir. Eğer $q(x_k \mid X_{k-1}, Z_k) = q(x_k \mid x_{k-1}, z_k)$ şeklinde ifade edilebiliyor ise, önem dağılımı sadece *k-1* anındaki durum x_{k-1} ve *k* anındaki ölçüm z_k'ya bağlı olarak ifade edilebilir. Bu durum çok kullanışlı bir sonuç olan, her *k* anında sadece hedef durum kestiriminin sonsal dağılımı $p(x_k \mid Z_k)$'nin bilinmesinin yeterli olduğu özyinelemeli algoritmanın elde edilmesinin sağlamaktadır. Böylelikle durum kestirim ve ölçüm geçmişinin saklanmasına gerek olmadan örnekler ve ağırlıklar hesaplanabilmektedir. X_{k-1}^i ve Z_{k-1}'e bağımlı olmadan ağırlıklar ve filtrelenmiş sonsal dağılım yaklaşımı eşitlikler (2.51) ve (2.52)'da verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(z_k \mid x_k^i)\, p(x_k^i \mid x_{k-1}^i)}{q(x_k^i \mid x_{k-1}^i, z_k)} \tag{2.51}$$

$$p(x_k \mid Z_k) \approx \sum_{i=1}^{N} w_k^i \delta(x_k - x_k^i) \tag{2.52}$$

Yukarıda verilen eşitlikler ile tanımlanan AÖÖ algoritması parçacık filtrenin birçok tipinin temelini oluşturmaktadır. Önem dağılımının seçimi parçacık filtrenin tasarımında önemli bir rol oynamaktadır. Burada üzerinde durulması gereken önemli bir nokta, AÖÖ algoritması ile belirlenen örnek noktaların ağırlıklarının varyanslarının zaman içerisinde büyümesi (Doucet vd. 2000) ve bunun sonucu olarak sonsal dağılımın kestirim doğruluğunun azalmasıdır. Bu durum bozulma olgusu (degeneracy phenomenon) olarak adlandırılmaktadır. Örneklemde bozulmanın meydana gelmesi, sonsal dağılımın kestirimi için kullanılan örneklerin büyük bir çoğunluğunun ağırlığının 0'a yaklaşması ve sonsal dağılımın çok az sayıda örnek ile temsil edilmesi anlamına gelmektedir. Bozulmanın bir ölçüsü olarak literatürde etkin örnek sayısı tanımlanmış ve eşitlik (2.53)'te verildiği gibi tarif edilmiştir.

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} (w_k^i)^2} \tag{2.53}$$

Eşitlik (2.53)'ten görülebileceği gibi $\hat{N}_{eff}$ $[1, N]$ kapalı aralığında değerler almaktadır. $\hat{N}_{eff}$'in belirli bir eşik seviyesinin altına düşmesi, örneklemin bozulduğu ve sonsal dağılım kestirim doğruluğunun azaldığı anlamına gelmektedir. Bu problemin çözümü olarak literatürde yeniden örnekleme yöntemi verilmiştir. Yeniden örnekleme yönteminde, ağılıkları 0'a yaklaşan örnekler örnek kümesinden atılıp yüksek ağırlıklı örnekler küme içerisinde çoklanarak bu örneklerin yerine geçirilmektedir. Bu işlem $\{x_k^i, w_k^i\}$ rasgele ölçüsünün $\{x_k^{i*}, 1/N\}$ rasgele ölçüsüne dönüştürülmesi olarak tarif edilmektedir (Ristic vd. 2004). Böylelikle yeni örnek kümesi düzgün dağılımlı bir küme olarak elde edilmektedir. Tez çalışmasında (Kitagava 1996)'da tarif edilen sistematik

örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem $O(N)$ işlem yüküne sahiptir ve yöntemin yalancı kodu (pseudo code) aşağıda verilmiştir.

Sistematik Yeniden Örnekleme

$\left\{x_k^i, w_k^i\right\}_{i=1}^N \rightarrow \left\{x_k^{j*}, N^{-1}\right\}_{i=1}^N$

kümülatif ağırlıklar c_i'leri üret.

$c_1 = w_k^1$
FOR *i=1:N*
    $c_i = c_{i-1} + w_k^i$
END FOR
i=1
$u_1 \sim U\left[0, N^{-1}\right]$ rasgele değişkenini üret
FOR *j=1:N*
    $u_j = u_1 + N^{-1}(j-1)$
    WHILE $u_j > c_i$
        $i = i+1$
    END WHILE
    $x_k^{j*} = x_k^i$
    $w_k^{j*} = N^{-1}$
END FOR

Bozulma olgusuna çözüm üreten yeniden örnekleme adımı, başka bir problem olan örneklem fakirleşmesine (sample impoverishment) neden olmaktadır. Örneklem fakirleşmesi, yeniden örnekleme sırasında yüksek ağrılığa sahip olan parçacıkların birçok kez seçilmesi ve yeni oluşturulan örneklemde parçacık çeşitliliğinin azalması olarak tanımlanabilir. Örneklem fakirleşmesinin önlemek için en basit yöntem, yeni örneklemdeki parçacıkların sıfır ortalamalı küçük varyanslı Gauss dağılıma sahip gürültü sürecinden üretilecek sayılar ile toplanması yoluyla, örneklem içerisinde kendini tekrar eden parçacık sayısını azaltmaktır. Ancak bu işlem yapılırken kullanılan gürültü sürecinin sonsal dağılım üzerindeki etkisinin ne olacağı hesaba katılmalıdır. Böyle bir yöntem kullanılacaksa sonsal dağılımın yapısını bozmayacak kadar küçük varyanslı dağılım seçilmelidir. Gilks ve Berzuini (2001), önem örneklemesi ve Monte Carlo Markov zincirleri ile örnekleme yöntemlerinin birleşiminden oluşan ve örneklem fakirleşmesini önleyen bir yöntem önermiştir. Bu yöntemde, parçacık kümesi ağrılıklara göre yeniden örneklendikten sonra her bir parçacık Markov zinciri geçiş çekirdeğine

(Markov chain transition kernel) göre hareket ettirilerek yeni parçacık kümesi elde edilmektedir. Örneklem fakirleşmesinin önlenmesi için bir başak yöntem ise (Musso vd. 2001)'de önerilmiştir. Çalışmada; yeniden örnekleme sonrasında elde edilen parçacıkların, simetrik olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olacak şekilde seçilen çekirdek dağılımı kullanılarak oluşturulan dağılımdan üretilmesi yoluyla düzenlenmesi (regularization) sağlanmıştır.

2.3.4.4 Örnekleme, önem yeniden örnekleme parçacık filtre

Örnekleme, önem yeniden örnekleme (Sampling Importance Resampling - SIR) parçacık filtre ilk olarak Julier vd. (2000)'de "bootstrap" filtre olarak sunulmuştur. Bu filtre aşağıdaki varsayımlar altında AÖÖ yöntemini kullanarak sonsal dağılımı kestirmektedir.

- Durum dinamiğini tanımlayan $f_{k-1}(.)$ ve ölçüm fonksiyonu $h_k(.)$ bilinmektedir.
- Süreç gürültüsünden örneklem üretilmesi mümkündür.
- Olabilirlik fonksiyonu $p(z_k \mid x_k)$ eldeki veriler ile yazılabilmelidir.

Yukarıdaki varsayımlar altında SIR parçacık filtre önem olasılık yoğunluk fonksiyonunun geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x_k \mid x_{k-1}^i)$ olarak seçilmesi ve her güncelleme anında yeniden örnekleme yapılması ile türetilmiştir. SIR parçacık filtrede bir örneğin $x_k^i \sim p(x_k \mid x_{k-1}^i)$ olarak üretilmesi, öncelikle süreç gürültüsünden $v_{k-1} \sim p_v(v_{k-1})$ örneğinin üretilmesi ve bu örneğin durum dinamik fonksiyonuna uygulanması $x_k^i = f_{k-1}(x_{k-1}^i, v_{k-1})$ şeklinde olmaktadır. Her *k* anında yeniden örnekleme yapıldığından algoritmanın her bir döngüsünde örnekler 1/N ağırlığını almaktadır. SIR parçacık filtrede parçacık ağrılıkları, eşitlik (2.50)'de verilen önem fonksiyonu $p\left(x_k \mid x_{k-1}^i\right)$'de yerine yazılarak eşitlik 2.54'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$w_k^i \propto p(z_k \mid x_k^i) \tag{2.54}$$

SIR parçacık filtre için yalancı kod aşağıda verilmiştir. Verilen kod parçasında *k-1* anındaki görgül sonsal dağılımı temsil eden parçacık kümesinin *k* anına nasıl taşındığı ve *k* anındaki görgül olasılık dağılımını oluşturan parçacık ve ağılık kümesinin nasıl elde edildiği anlatılmıştır.

SIR Parçacık Filtre

$k-1$ anındaki parçacık kümesi $\left\{x_{k-1}^i, N^{-1}\right\}_{i=1}^N$

Yeni parçacıkları geçiş olasılık dağılımında üret

FOR *i=1:N*

$$x_k^i \sim p\left(x_k \mid x_{k-1}^i\right)$$

$$w_k^i = p\left(z_k \mid x_k^i\right)$$

END FOR

Ağırlıkların toplamını hesapla: $S = \sum_{i=1}^{N} w_k^i$

Ağrılıkları standartlaştır:

FOR *i=1:N*

$$w_k^i = \frac{w_k^i}{S}$$

END FOR

Parçacıkları ağırlıklarına göre yeniden örnekle

Yukarıdaki algoritma ile elde edilecek görgül sonsal dağılımdan hedef durumu hakkında sonuç çıkarımı MC integrali yoluyla gerçekleştirilmektedir. *k* anındaki hedef durum kestirimi ve durum kovaryansı kestirimi eşitlikler (2.55) ve (2.56)'da verilmiştir.

$$\hat{x}_{k|k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_k^i \tag{2.55}$$

$$P_{k|k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{x}_{k|k} - x_k^i\right)\left(\hat{x}_{k|k} - x_k^i\right)^T \tag{2.56}$$

2.3.5 Çoklu sensör ortamında filtreleme

Her hangi bir *k* anında ilgilenilen hedef durumu hakkında birden fazla kaynaktan ölçüm alınıp, bu ölçümler ile hedef durumunun kestirilmesi çoklu sensör filtreleme

problemidir. Kalman filtresi tabanlı durum kestiricileri için, hedefle ilgili birden fazla ölçüm olması halinde durum kestiriminin nasıl gerçekleştirileceği Bar-Shalom ve Li (1995) tarafından verilmiştir. Bar-Shalom ve Li (1995), sıralı ve yığın güncelleme olmak üzere çoklu sensör ölçümlerinin Kalman filtresi yapısı altında nasıl birleştirileceğini göstermiştir. Sıralı güncellemede; her bir senör ölçümü ile Kalman filtresi sırayla güncellenmektedir. Her bir güncellemenin sonucu olan durum kestirimi ve kovaryansı, bir sonraki güncelleme adımına öngörüm değerleri olarak geri beslenmektedir. Son sensör ölçümü ile gerçekleştirilen durum kestirimi nihai kestirim olarak elde edilmektedir. Yığın güncellemede ise; ölçümlerin tamamının oluşturduğu ölçüm vektörü ve ona bağlı olarak boyutları genişletilen ölçüm fonksiyonu ve ölçüm kovaryanası ile durum güncellemesi tek seferde yapılmaktadır. Bu iki yöntem cebirsel olarak birbirine eşit olmasına rağmen, yığın güncelleme daha fazla işlem yüküne sahiptir.

Parçacık filtrenin çoklu sensör ölçümlerine uyarlanması da benzer şekilde yapılmaktadır. Birden fazla ölçümün varlığı, parçacık filtrenin durum sonsal dağılımı için hesapladığı görgül dağılım fonksiyonunun ağırlıklarının hesaplanmasında kendini göstermektedir. Eşitlik (2.51)'de görüldüğü gibi ölçümler, ağırlıkların hesaplanmasına olabilirlik fonksiyonu üzerinden katılmaktadır. Eğer sensör ölçümleri birbirinden bağımsız ise, eşitlik (2.51)'de verilen olabilirlik fonksiyonu her bir ölçümün olabilirlik fonksiyonunun çarpımı şeklinde tarif edilmektedir. Böylelikle, bütün sensör ölçümlerinin, ağrılıkların hesaplanmasına yapacağı katkı olabilirlik fonksiyonunda birleştirilmektedir.

2.4 Fisher Bilgisi ve Sonsal Cramer-Rao Alt Sınırı

Parametre kestiriminde ilgilenilen olguya ait ölçümlerin ihtiva ettiği bilgi miktarı, parametre kestiriminin kalitesinin ne kadar olacağının bir ölçüsünü vermektedir. İstatistik biliminde bilginin birçok tarifi olmasına karşın, en yaygın kullanılanı Fisher Bilgisi'dir (FB) (Kullback 1959). Fisher, bilgiyi olabilirlik prensibini (Casella ve Berger 1990, Öztürk vd. 2006) kullanarak tarif etmiştir. Fisher bilgisi, olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının parametreye göre ikinci türevinin beklenen değerinin negatifi olarak hesaplanmaktadır.

$x \in \mathbb{R}^{n_x}$ n_x boyutlu rasgele olmayan durum vektörü olmak üzere, $Z = \{Z_1, \ \ldots \ , Z_n\}$, x ile ilgili n tane bağımsız ölçüm rasgele değişkenleri olsun. Z ölçüm rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(Z;x) = \prod_{i=1}^{N} p(Z_i;x) \tag{2.57}$$

olarak tanımlanmaktadır. $Z = z = \{z_1, \ \ldots \ , z_n\}$ olarak gözlendiğinde x'in fonksiyonu olan eşitlik (2.57), verilen $z_i \ (i = 1,\ldots,n)$ için x'in olabilirlik fonksiyonudur (Öztürk vd. 2006) ve

$$L(x;z) = p(z;x) \tag{2.58}$$

şeklinde gösterilmektedir. x'in yansız bir kestiricisi $\hat{x}(z)$ olmak üzere kestiricinin kovaryansı eşitlik (2.59)'da verilen eşitsizliği sağlamaktadır.

$$E\left\{\left[\hat{x}(z)-x\right]\left[\hat{x}(z)-x\right]^T\right\} \geq J^{-1} \tag{2.59}$$

Burada *J* Fisher bilgisi olup, FB aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$J \triangleq -E\left\{\nabla_x\left[\nabla_x \ln L(x;z)\right]^T\right\} = E\left\{\left[\nabla_x \ln L(x;z)\right]^2\right\} \tag{2.60}$$

Eşitlik (2.60)'da ∇_x, x'e göre gradyanı göstermektedir. Dolayısı ile vektör değerli parametreler için FB, olabilirlik fonksiyonun logaritmasının parametreye göre hesyanının beklenen değerinin negatifi olarak tarif edilmektedir. Eşitlik (2.60)'da verilen FB, $n_x \mathrm{x}\, \mathrm{n}_x$ matris olduğundan genellikle Fisher Bilgi Matrisi (FBM) olarak isimlendirilmektedir. Eşitlik (2.59)'da görüldüğü gibi Fisher bilgisi, ilgilenilen hedef durum kestiricisinin kovaryansı ile ilgili bir sınır tanımlamaktadır. FBM'nin tersi olarak tanımlanan bu sınır, literatürde Cramer-Rao Alt Sınırı (Cramer – Rao Lower Bound - CRLB) olarak geçmektedir ve yansız, etkin bir kestiricinin kovaryansı CRLB'ye eşittir.

2.4.1 Sonsal Cramer-Rao Alt Sınırı

Kestirilmek istenen hedef durum vektörü hakkında önsel bilgi bulunması halinde, durum kestirimi Bayes çözümü kullanılarak durum sonsal dağılımının ortalaması olarak elde edilmektedir. Bu durumda FBM, birleşik sonsal dağılım fonksiyonunun logaritmasının durum vektörüne göre hesyanının beklenen değerinin negatifi olarak hesaplanmaktadır. FBM birleşik sonsal dağılım ile hesaplandığından, hedef durumu her güncellendiğinde FB matrisinin boyutu $n_x \mathrm{x}\, \mathrm{n}_x$ kadar büyümektedir. Bununla beraber FBM'nin tersi olan CRLB'nin hesaplanabilmesi için boyutu sürekli büyüyen bir matrisin tersinin hesaplanması gerekmektedir. CRLB'nin özyinelemeli olarak hesaplanması için bir yöntem Tichavsky vd. (1998)'de önerilmiştir ve bu yöntem ile hesaplanan CRLB Streit (2010), Tichavsky vd. (1998) ve Simandl vd. (2001) tarafından Sonsal Cramer-Rao Alt Sınırı (Posterior Cramer-Rao Lower Bound - PCRLB) olarak isimlendirilmiştir. Tichavsky, vd. (1998), *k* kesikli zaman indisi olmak üzere *k.* andaki PCRLB değerinin eşitlik (2.61)'de özyinelemeli hesaplama formunda verilen sonsal Fisher bilgisinin tersi olarak tarif etmektedir.

$$J_k = D_{k-1}^{22} - D_{k-1}^{21}\left(J_{k-1} + D_{k-1}^{11}\right)^{-1} D_{k-1}^{12}, \quad k > 0 \tag{2.61}$$

Eşitlik (2.61)'de görüldüğü gibi, *k* anındaki bilgi bir önceki andaki bilginin fonksiyonu olarak elde edilmektedir. Bu bilginin hesaplanması için gerekli olan D_{k-1}^{11}, D_{k-1}^{21} ve D_{k-1}^{22} 'nin nasıl hesaplanacağı sırasıyla eşitlik (2.62), (2.63) ve (2.64)'te verilmiştir.

$$D_{k-1}^{11} = -E\left\{\nabla_{x_{k-1}}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p\left(x_k \mid x_{k-1}\right)\right]^T\right\} \tag{2.62}$$

$$D_{k-1}^{21} = \left[D_{k-1}^{12}\right]^T = -E\left\{\nabla_{x_{k-1}}\left[\nabla_{x_k} \ln p\left(x_k \mid x_{k-1}\right)\right]^T\right\} \tag{2.63}$$

$$D_{k-1}^{22} = -E\left\{\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p\left(x_k \mid x_{k-1}\right)\right]^T\right\} - E\left\{\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p\left(z_k \mid x_k\right)\right]^T\right\} \tag{2.64}$$

Eşitlikler (2.62) ve (2.63)'teki beklenen değerler x_{k-1} ve x_k'ye göre alınırken, eşitlik (2.64)'teki beklenen değer x_{k-1}, x_k ve z_k'ya göre hesaplanmaktadır. Ayrıca eşitliklerdeki bütün kısmi türevler durum vektörünün gerçek değerinde hesaplanmaktadır. PCRLB'nin hesaplanması için gerekli olan beklenen değerlerin birçok problemde analitik çözümü yoktur. Ancak Monte Carlo integrasyonu yöntemi ile beklenen değerlere yaklaşım yapılabilmektedir. Sistem durum – uzay modelinde doğrusal Gauss varsayımı yapılarak PCRLB'nin hesaplanması için özel bir durum elde edilmektedir. Bu durum için hesaplanan PCRLB Kalman filtresinin hesapladığı kovaryansa eşit olmaktadır (Ristic vd. 2004).

2.4.1.1 Toplanır Gauss gürültüsü varlığında PCRLB

Eşitlikler (2.1), (2.2) ve başlangıç durumu ile tarif edilen sistem durum – uzay modelinde, gürültü terimlerinin birbirinden bağımsız 0 ortalamalı tersi alınabilir Q_k ve R_k kovaryanslarına sahip toplanır beyaz Gauss gürültüsü olduğu ve gürültülerin başlangıç durumundan bağımsız olduğu varsayımları yapılarak J_k'nın hesaplanması için gerekli terimler yazılabilir. $p\left(x_k \mid x_{k-1}\right)$ fonksiyonunun x_{k-1}'e ve $p\left(z_k \mid x_k\right)$ fonksiyonunun x_k'ye göre gradyanları eşitlikler (2.65) ve (2.66)'da verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}\nabla_{x_{k-1}} \ln p\left(x_k \mid x_{k-1}\right) &= \nabla_{x_k}\left[-\frac{1}{2}\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]\right] \\ &= \left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[x_{k+1} - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\nabla_{x_k} \ln p(z_k \mid x_k) = \left[\nabla_{x_k} h_k(x_k)\right]^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k(x_k)\right] \tag{2.66}$$

Buradan D_k^{11} matrisi aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} D_{k-1}^{11} &= E\left\{\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T\right\} \\ &= E\left\{\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[\nabla_{x_k} f_{k-1}(x_{k-1})\right]\right\} \\ &= E\left\{\tilde{F}_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} \tilde{F}_{k-1}\right\} \end{aligned} \tag{2.67}$$

Burada,

$$\tilde{F}_{k-1} = \left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right] \tag{2.68}$$

olarak tanımlanmaktadır. Benzer şekilde D_k^{12} ve D_k^{22} matrisleri de aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$D_{k-1}^{12} = \left[D_{k-1}^{21}\right]^T = -E\left\{\tilde{F}_{k-1}^T\right\} Q_{k-1}^{-1} \tag{2.69}$$

$$D_{k-1}^{22} = Q_{k-1}^{-1} + E\left\{\tilde{H}_k^T R_k^{-1} \tilde{H}_k\right\} \tag{2.70}$$

Burada,

$$\tilde{H}_k = \left[\nabla_{x_k} h_k(x_k)\right] \tag{2.71}$$

olarak tanımlanmaktadır. D_{k-1}^{11}, D_{k-1}^{21} ve D_{k-1}^{22} için bulunan ifadeler eşitlik (2.61)'da yerine konularak J_k eşitlik (2.72)'de verildiği gibi elde edilmektedir.

$$J_k = Q_{k-1}^{-1} + E\left\{\tilde{H}_k^T R_k^{-1} \tilde{H}_k\right\} - \\ Q_{k-1}^{-1} E\left\{\tilde{F}_{k-1}\right\}\left(J_{k-1} + E\left\{\tilde{F}_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} \tilde{F}_{k-1}\right\}\right)^{-1} E\left\{\tilde{F}_{k-1}\right\}^T Q_{k-1}^{-1} \quad (2.72)$$

Eşitlik (2.72) ölçüm vektörü z_k'yi içermemektedir. Dolayısı ile sadece durum vektörü x_k'ye göre beklenen değerlerin hesaplanması gerekmektedir. Ancak durum vektörüne göre beklenen değerlerin analitik bir çözümü yoktur. Beklenen değer hesabı için gerekli olan integraller, durum vektörünün her *k* anı için bir örneklem ile gerçeklenmesi ve bu örneklemler ile yapılacak Monte Carlo integrali hesabı ile gerçekleştirilebilir.

2.4.2 Çoklu sensör ortamında Fisher bilgisi

Bölüm 2.3.5'te anlatılan birden fazla sensör ölçümünün olması durumunda filtreleme yapılıyor ve Fisher bilgisi hesaplanmak isteniyorsa bu bölümde verilen FBM hesaplama yöntemlerini çoklu sensör durumu için uyarlamak gerekmektedir. Deterministik parametre kestirimi yapılan durum için tanımlanan FBM, hali hazırda birde fazla ölçüm olması halinde bilginin nasıl hesaplanacağını göstermektedir. Bu durumda FBM, eşitlik (2.57) ile verilen olabilirlik fonksiyonu kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu fonksiyon, birden fazla bağımsız ölçüm olması durumunda ölçümlerin olabilirlik fonksiyonunun çarpım halinde yazılabileceği istatistiksel gerçeği kullanılarak elde edilmiştir. Bu fonksiyonun logaritmasının durum vektörüne göre hesyanının beklenen değerinin negatifi olan FBM, logaritma operatörünün çarpmayı toplamaya çevirme özelliğinden dolayı her bir ölçüm olabilirlik fonksiyonu ile hesaplanacak FBM'lerin toplamı şeklinde elde edilmektedir. Benzer bir durum sonsal FBM'nin hesaplanmasında da söz konusudur. *k* anındaki sonsal FBM, o ana ait olabilirlik fonksiyonunun durum vektörüne göre hesyanına bağlıdır. Ölçümlerin bağımsız olması durumunda *k* anındaki olabilirlik fonksiyonu; o ana ait bütün ölçümlerin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu olan, her bir ölçümün olabilirlik fonksiyonunun çarpımı şeklide tarif edilmektedir. Dolayısı ile çarpım şeklinde tarif edilen olabilirlik fonksiyonunun logaritması toplama dönüşmekte ve her bir ölçüm sonsal Fisher bilgisine toplamsal olarak katkıda bulunmaktadır. Ancak, ölçümlerin bağımsız olmaması durumunda hem FBM hem de sonsal FBM için

ölçümlerin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesi ve gerekli türev işlemlerinin bu fonksiyon üzerinden yapılması gerekmektedir.

2.5 Gözlenen Bilgi Matrisi

Fisher Bilgi Matrisinin bir alternatifi olarak Gözlenen Bilgi Matrisi (Observed Information Matrix - OIM) tarif edilmektedir. FBM'inin türetilemsinin ve hesaplanmasının mümkün olmadığı durumlarda OIM, FBM yerine kullanılan bir istatistiksel araçtır (Streit, 2010). Benzer şekilde, OIM'nin tersi de FBM'nin tersi olan CRLB'nin yerine kullanılan ikinci derece hata başarımının bir ölçüsüdür. OIM literatürde, olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının durum vekötrüne göre hesyanının negatifinin, fonksiyonun maksimum değerinde hesaplanması olarak tarif edilmektedir (Efron ve Hinkley 1978, Louis 1982, Streit 2007, Streit 2010). Bir başka deyişle; deterministik parametre kestirimi halinde hesyan en çok olabilirlik kestirimi (Maximum Likelihood Estimation - MLE) etrafında hesaplanmakta, stokastik parametre kestirimi halinde ise hesyan MAP kestirimi etrafında hesaplanmaktadır.

$x \in \mathbb{R}^{n_x}$ n_x boyutlu rasgele olmayan durum vektörü olmak üzere, $Z = z = \{z_1, \ \dots \ , z_n\}$ x ile ilgili gözlenmiş n tane bağımsız ölçüm olsun. Bu durumda OIM eşitlikler (2.57) ve (2.58)'de verilen olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının durum vektörüne hesyanın negatifi olarak eşitlik (2.73)'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$J^{OIM} = -\nabla_x \left[\nabla_x \log L(x; z) \right]^T_{x=\hat{x}^{ML}} \tag{2.73}$$

Burada $\hat{x}^{ML}$, durum vektörünün en çok olabilirlik kestirimidir ve eşitlik (2.74)'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}\hat{x}^{ML} &= \arg\max_{x}\left\{\log L(x;z)\right\} \\ &= \arg\max_{x}\left\{\log p(z;x)\right\}\end{aligned} \tag{2.74}$$

OIM'nin tersinin ML kestiricisinin varyansını temsil ettiği durumları inceleyen Efron ve Hinkley (1978), tek bir parametrenin ML kestirimi durumunu inceleyerek gözlenen bilginin tersinin kestirim varyansı ile olan ilişkisini tartışmış ve OIM'nin tersinin FIM'nin tersine kıyaslayarak, daha doğru varyans kestiriminin OIM ile gerçekleştirildiğini göstermiştir. Kestirilmek istenen durum ile ilişkili ölçümlerde durum hakkında eksik bilgi varsa bu problem eksik veri problemi olarak tarif edilmektedir (Streit 2010). Bu duruma bir örnek; hedef takibinde, ilgilenilen hedef dışındaki hedefler ve ortam gürültüsünden kaynaklı ölçümler varlığında ilgilenilen hedefin durumu kestirilirken, hangi ölçümün ilgilenilen hedefe ait olduğu bilgisi eksik bilgi şeklinde tanımlanmaktadır. Eksik bilgi varlığında ML ya da MAP kestirimi yapabilmek için Dempster ve arkadaşları beklenen değer maksimizasyonu (Expectation Maximization – EM) yöntemini önermişlerdir. Louis (1982), eksik veri problemlerinde EM yöntemi ile ML kestirimi için OIM'nin hesaplanması için bir yöntem önermiştir. Bu yöntemde, EM metodunun eksik veri durumuna yaklaşımından faydalanılarak olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının gradyanı ve hesyanı, tam veri (complete data) dağılım fonksiyonun logaritmasının türevlerinin ölçüme koşullu beklenen değerleri üzerinden tanımlanmıştır. Böylelikle, EM yönteminin yinelemeli (iterative) yapısı içerisinde hem durum vektörünün ML kestirimi hem de OIM hesaplanabileceği gösterilmiştir. Louis (1982)'de önerilen yöntem, olasılıksal çoklu hipotez izleyici (Probabilistic Multi-Hypothesis Tracking – PMHT) (Streit ve Leginbuhl 1995) algoritmasının durum kestirim kovaryansının hesaplanması için Walsh (2006)'da kullanılmıştır. Çalışmada, PMHT'nin durum kestirimi kovaryasının yüksek doğrulukta, OIM'nin tersi olarak hesaplanabileceği gösterilmiştir. OIM'nin hesaplanması ile ilgili bir başka çalışma ise Streit (2007)'de verilmiştir. Streit (2007), multistatik hedef ve sensör alanı takibi problemi için OIM'yi inceleyerek, Gauss gürültüsü varlığında sonsal OIM'nin özyinelemeli olarak hesaplanması için Tichavsky ve arkadaşlarının PCRLB için önerdikleri yönteme paralel bir yöntem önermiştir.

2.5.1 Çoklu sensör ortamında OIM

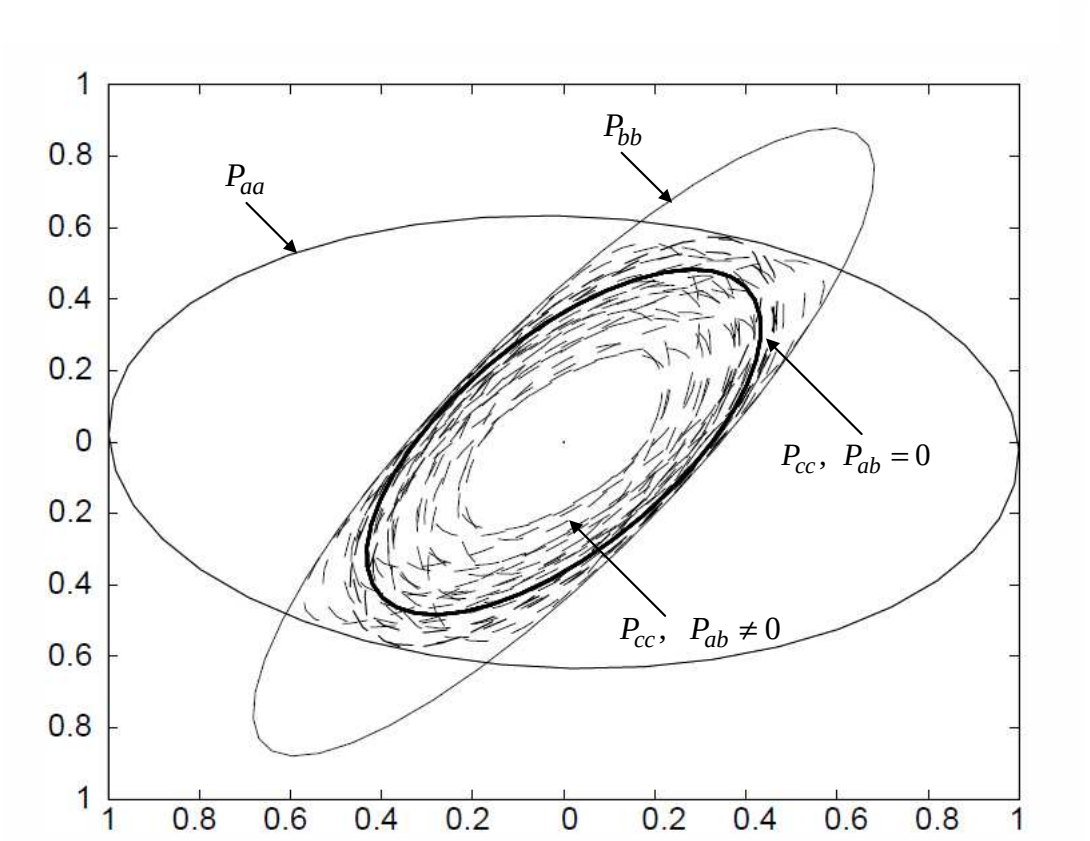
Fisher bilgisinde olduğu gibi OIM de olabilirlik fonksiyonuna bağlı olarak hesaplanmaktadır. Birden fazla sensör ölçümü olduğu durumlarda olabilirlik fonksiyonunun bütün sensör ölçümlerinin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu türünden ifade edilmesi gerekmektedir. Ölçümlerin bağımsız olması durumunda birleşik ölçüm olasılık yoğunluk fonksiyonu, her bir ölçümün olasılık yoğunluk fonksiyonunun çarpımı şeklinde olmaktadır. Dolayısı ile bağımsız ölçüm koşulunda, OIM her bir ölçüm için hesaplanacak OIM'lerin toplamı şekilde elde edilmektedir.

2.6 Kovaryans Kesişim Yöntemi

Julier ve Uhlmann (2001), aralarında ilinti olan bilgilerin birleştirilmesinin, ilinti bilinmeden yapılabilmesini sağlayan bir metot olarak Kovaryans Kesişim (Covariance Intersection - CI) yöntemini önermişlerdir. Bu yöntem ile *A* ve *B* iki bilgi parçası olmak üzere, bu bilgiler birleştirilerek *C*'nin elde edilmesi problemi çözülmektedir. Bu problemin *A* ve *B*'nin ilintisiz olması ve ikisi arasındaki ilintinin bilinmesi durumlarındaki çözümleri Bar-Shalom ve Li (1995) tarafından verilmiştir. Genel bir veri birleştirme problemi olan *A* ve *B*'nin birleştirilmesinde bu iki nicelik; gürültü ile bozulmuş sensör ölçümü, farklı durum kestiricilerinin kestirimleri ya da tahminleri vb. yapıda olabilirler. Bu durumda her iki terim de birer rasgele değişken olacaktır. CI yöntemi Kalman filtresi eşitliklerinin geometrik anlamından ilham alınarak ortaya konmuştur. *A* ve *B*'nin ortalama ve varyansları için sırasıyla $\{a, P_{aa}\}$ ve $\{b, P_{bb}\}$ tanımlamaları yapılıp, bu iki rasgele değişken arasındaki çapraz ilintinin P_{ab} olduğu varsayılarak, Kalman filtresi durum ve kovaryasn güncelleme eşitliklerinin genel formu eşitlik (2.75)'te verildiği gibi yazılmaktadır. Eşitlik (2.75)'te, W_a ve W_b ağrılık terimleri olup, P_{cc} kovaryansının izini (trace) minimum yapan değerler olarak hesaplanmaktadır.

$$c = W_a\, a + W_b\, b$$
$$P_{cc} = W_a P_{aa} W_a^T + W_a P_{ab} W_b^T + W_b P_{ba} W_a^T + W_b P_{bb} W_b^T \tag{2.75}$$

Eşitlik (2.75)'te verilen P_{aa}, P_{bb} ve P_{cc} kovaryansları çizilirse P_{cc} kovaryansının geometrik anlamı olan elipsoidin P_{aa} ve P_{bb} kovaryanslarının tarif ettiği elipsoidlerin kesişim bölgesinde yer aldığı görülecektir. Şekil (2.2)'de 2x2 boyutlu kovaryans matrisleri için bu durum farklı çapraz ilinti değerleri için gösterilmiştir.



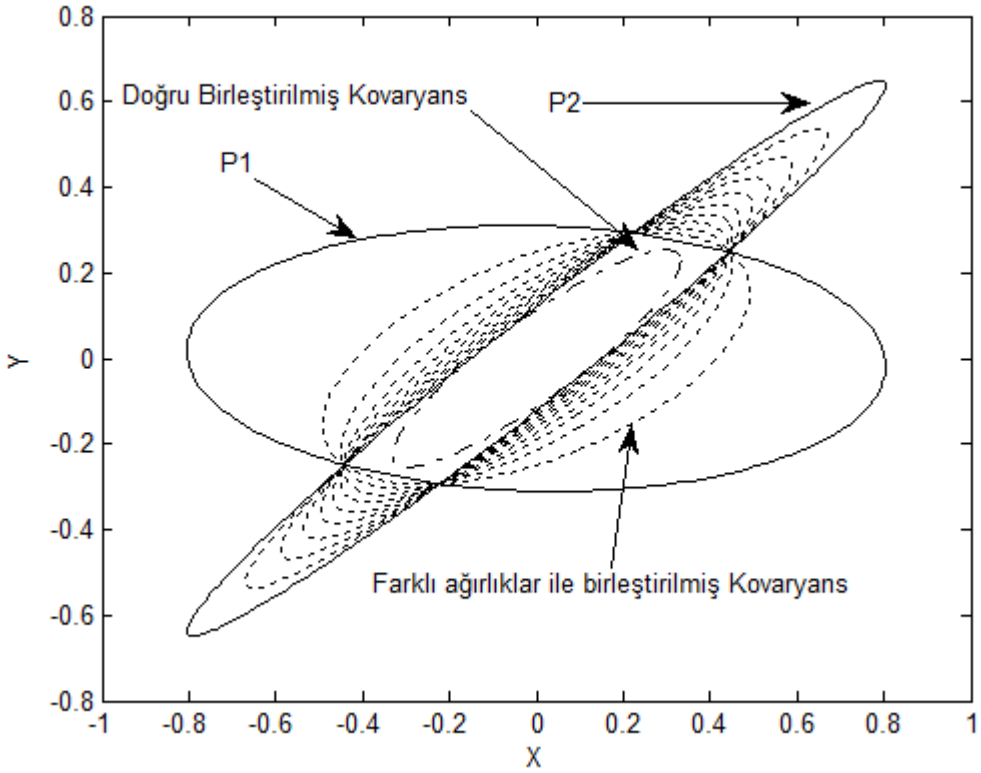
Şekil 2.2 2x2 boyutlu kovaryansların eşitlik (2.75) ile farklı çapraz ilinti değerleri birleştirilmesi (Julier ve Uhlmann 2001)

Kovaryans kesişim yöntemi eşitlik (2.1)'de verilen durumdan yola çıkılarak, kesişim bölgesini kapsayacak büyüklükteki birleştirilmiş kovaryansların tutarlı olacağı gerçeği ile geliştirilmiştir. CI yöntemi en genel anlamda ortalama ve kovaryansların kovenks toplamını bilgi uzayında (kovaryansı tersi) elde etme temeline dayanmaktadır ve eşitlikler (2.76) ve (2.77)'de birleştirme eşitlikleri verilmiştir.

$$P_{cc}^{-1}c = wP_{aa}^{-1}a + (1-w)P_{bb}^{-1}b \tag{2.76}$$

$$P_{cc}^{-1} = wP_{aa}^{-1} + (1-w)P_{bb}^{-1} \tag{2.77}$$

Burada $w \in [0,1]$ olmak üzere, bilginin birleştirilmesinde kullanılan ağırlığı göstermektedir. Ağrılık terimi P_{cc} kovaryansının izi ya da determinantı olarak tanımlanacak bir maliyet fonksiyonu minimize edilerek bulunabilir. 2x2 boyutundaki iki kovaryans matrisinin eşitlik (2.77) kullanılarak birleştirilmesi durumu farklı ağırlık seçimleri için şekil (2.3)'te verilmiştir. Ağırlık değerleri [0,1] aralığında değişirken hesaplanan birleştirilmiş kovaryans her zaman beklendiği gibi kesişim bölgesini kapsayacak şekilde oluşmuştur.



Şekil 2.3 Farklı ağırlıklar ile 2x2 boyutundaki kovaryansların birleştirilmesi

3. MULTİSTATİK RADAR AĞI MODELLEMESİ

Tez çalışmasında, bistatik menzil ve menzil-hızı ölçme kabiliyetine sahip multistatik radar ortamı modellemesi bilgi tabanlı olarak gerçekleştirilmiştir. Multistatik radarlar birden fazla bistatik radarın aynı ağ altında çalıştırılması ile elde edilmektedir. Ağ içerisinde çalışan bistatik radarların ortam dinlemesi sonucunda elde ettikleri bilgilerin, diğer radarlarla ya da bütün ağı yöneten merkez ile paylaşıldığı ve bunun sonucunda dinleme yapılan bölgede bulunan unsurların tespiti ve takibinin gerçekleştirildiği varsayılmıştır. Tez çalışmasında yapılan modellemede, ağ içerisinde kaç tane bistatik radar bulunacağı ve bu radarların alıcı ve verici antenlerinin nerelere konumlandırılacağı belirlenmiştir. Bu amaçla gerçekleştirilen çalışmalarda, bistatik radarların bistatik menzil ve menzil değişimini tarif eden bistatik menzil-hızını ölçebildikleri varsayılarak, bu ölçümler varlığında Fisher bilgisi değişimi incelenmiştir. Fisher bilgisinin değişimine bağlı olarak yapılan analizler sonucunda multistatik radar ağ yapısı oluşturulmuştur.

3.1 Bistatik Menzil ve Menzil-Hızı Ölçümleri

θ parametresi takip edilmek istenen bir hedefin üç boyutlu (3B) Kartezyen uzayda sırasıyla *x*, *y* ve *z* eksenlerine göre konum ve hız vektörünün bu üç eksene izdüşümleri olan $\dot{x}$, $\dot{y}$ ve $\dot{z}$ hız bileşenlerinden oluşsun. Benzer şekilde L_r ve L_t sırasıyla bistatik radar alıcı ve verici antenlerinin Kartezyen uzayda *x*, *y* ve *z* eksenlerine göre konumlarını belirtsin.

$$\theta = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \dot{\mathrm{x}} & \mathrm{y} & \dot{\mathrm{y}} & \mathrm{z} & \dot{\mathrm{z}} \end{bmatrix}^T \tag{3.1}$$

$$L_r = [\mathrm{x}_r \quad \mathrm{y}_r \quad \mathrm{z}_r]^T \tag{3.2}$$

$$L_t = [\mathrm{x}_t \quad \mathrm{y}_t \quad \mathrm{z}_t]^T \tag{3.3}$$

R_r ve R_t sırasıyla ilgilenilen hedefin bisatik alıcı ve vericye olan uzaklığını, $\dot{R}_r$ ve $\dot{R}_t$ hedefin sırasıyla alıcı ve vericye göre menzil değişim hızını (radayal hız) göstermesi

durumunda bistatik radarı oluşturan alıcı – verici çiftinin hedeften yapacağı R menzil ve $\dot{R}$ menzil-hızı ölçümleri eşitliler (3.4) ve (3.5)'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} R&=R_r + R_t + \varepsilon_R \\ R_r &= \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_r)^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y}_r)^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}_r)^2} \\ R_t &= \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_t)^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y}_t)^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}_t)^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} R&=\dot{R}_r + \dot{R}_t + \varepsilon_{\dot{R}} \\ \dot{R}_r &= \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_r)\dot{\mathrm{x}} + (\mathrm{y}-\mathrm{y}_r)\dot{\mathrm{y}} + (\mathrm{z}-\mathrm{z}_r)\dot{\mathrm{z}}}{R_r} \\ \dot{R}_t &= \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_t)\dot{\mathrm{x}} + (\mathrm{y}-\mathrm{y}_t)\dot{\mathrm{y}} + (\mathrm{z}-\mathrm{z}_t)\dot{\mathrm{z}}}{R_t} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Bu eşitliklerde ε_R ve $\varepsilon_{\dot{R}}$ ölçüm hatalarını göstermektedir.

3.2 Fisher Bilgisi ve CRLB

Bistatik radar ölçümleri varlığında Fisher bilgisinin hesaplanması için, öncelikle bu ölçümlerin olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlenmesi gerekmektedir. Eşitlikler (3.4) ve (3.5) ile tanımlanan ölçümlerdeki gürültü bileşenlerinin birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı σ_R^2 ve $\sigma_{\dot{R}}^2$ varyanslı Gauss dağılımına sahip olduğu varsayılırsa ölçüm olasılık yoğunluk fonksiyonu eşitlik (3.6)'da verildiği gibi elde edilmektedir.

$$p\left(R, \dot{R} \mid \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left(-\frac{\left(R_r + R_t - R\right)}{2\sigma_R^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{R}}} \exp\left(-\frac{\left(\dot{R}_r + \dot{R}_t - \dot{R}\right)}{2\sigma_{\dot{R}}^2} \right) \tag{3.6}$$

Birden fazla alıcı – verici çiftinden ölçüm alınabildiği ve yapılan ölçüm hatalarının birbirlerinden bağımsız olduğu varsayıldığında, tüm ölçümlerin olabilirlik fonksiyonu eşitlik (3.7)'de verildiği gibi tarif edilmektedir. Eşitlik (3.7)'de *N* toplam alıcı – verici çifti sayısı, *i* alt indisi ile gösterilen menzil ve menzil-hızı ölçümleri ise *i.* alıcı – verici çiftine ait ölçümleri göstermektedir.

$$p(Z \mid \theta) = \prod_{i=1}^{N} p\left(R_i, \dot{R}_i \mid \theta\right) \tag{3.7}$$

Eşitlikler (3.6) ve (3.7), ölçümlerin verilmesi durumunda hedef durumu θ'nın bir fonksiyonudur. Bölüm 2.4'te bu fonksiyon olabilirlik fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Fisher bilgisi olabilirlik fonksiyonunun hesyanının beklenen değerini negatifidir. Tek alıcı – verici çifti için Fisher bilgisi eşitlikler (3.8) ve (3.9)'da verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\varphi = \ln\left\{ p\left(R, \dot{R} \mid \theta\right)\right\} = -\ln\left(2\pi\sigma_R^2\sigma_{\dot{R}}^2\right) - \frac{\left(R_r + R_t - R\right)}{2\sigma_R^2} - \frac{\left(\dot{R}_r + \dot{R}_t - \dot{R}\right)}{2\sigma_{\dot{R}}^2} \tag{3.8}$$

$$FBM = J = -E\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{x}^2} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{x}\partial \dot{\mathrm{x}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{z}\partial \mathrm{x}} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{z}^2} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Birden fazla alıcı – verici çifti için FBM, eşitlik (3.7)'de verilen olabilirlik fonksiyonunun çarpımsal yapısı nedeniyle her bir alıcı – verici çifti için eşitlik (3.9) ile hesaplanacak FBM'lerin toplamı olacaktır. Eşitlik (3.9)'da verilen FBM'nin elemanlarının nasıl hesaplanacağı Ek 1'de verilmiştir.

3.3 Alıcı – Verici Geometrisinin Fisher Bilgisine Göre İncelenmesi

R^n uzayında sabit iki noktaya eş uzaklıktaki noktalar bir elipsoid tanımlar. Dolayısıyla, bir hedefin alıcı – verici çiftine olan toplam uzaklığının bilinmesi kartezyen uzayda noktasal bir hedef konum tahmininin yapılmasını mümkün kılmaz. Menzil bilgisinin yanı sıra menzil-hızı bilgisinin de bulunması, hedefin kartezyen hızı bilinmediği sürece hedef konum kestirimini yapılabilir kılmaz (Eş menzil elipsoidinin her bir noktası için ölçülen menzil oranı değerini sağlayabilecek en az bir hız vektörü bulunabilir). Sezgisel olarak kestirilebilen bu durum aynı zamanda tek alıcı – verici çifti için FBM matrisinin tersinin alınamadığı görülerek de gözlenebilir. Bundan ötürü, ölçümlerden 3B

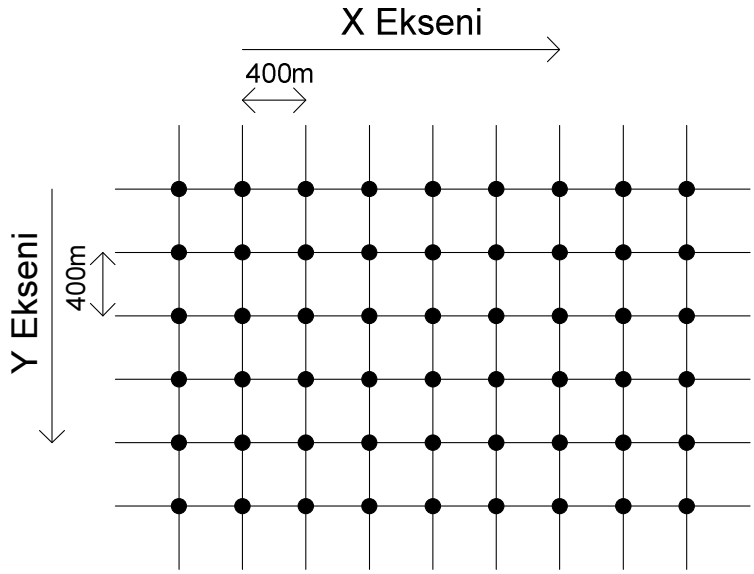
Kartezyen uzaydaki hedef konum ve hızlarının kestirilebilmesi için en az üç alıcı – verici çiftinin yapmış olduğu ölçümlerin birleştirilmesi gerekmektedir.

Tez çalışmasında multistatik radar ağı modellemesi bir vericinin ve birden fazla alıcının olduğu varsayımı ile yapılmıştır. Hedef durum kestiriminin yapılabilmesi için gerekeli minimum alıcı – verici çifti sayısı göz önünde bulundurularak, multistatik radar ağ yapısı en az üç alıcı – verici çiftinden oluşan iki temel konfigürasyonda incelenmiştir. Birinci konfigürasyonda, verici XY düzleminde (0,0) konumuna ve 0 *m* yüksekliğe (Z = 0 *m*) yerleştirilmiştir. İkinci konfigürasyonda ise verici XY düzleminde 75 *km* menzilde, 45° yanca açısında ve 0 *m* yükseklikte konumlandırılmıştır. Her iki konfigürasyon içinde alıcılar, XY düzlemi merkezi etrafında 30 *km* yarıçaplı çember üzerine eşit açısal aralıklar ile yerleştirilip, alıcı sayısı 3 ile 72 arasında değiştirilerek multistatik radar ağından elde edilen Fisher bilgisinin değişimi incelenmiştir. Ayrıca, alcıların yerleştirildiği çemberin yarıçapı da değiştirilerek bilgi değişimi üzerinde incelemeler gerçekleştirilmiştir.

Fisher Bilgisi analizi, XY düzleminde her iki eksende de 400m ayrıklığa sahip bir ızgara üzerinde ve sabit irtifadaki deterministik hedef durumlarında bilginin hesaplanması ile gerçekleştirilmiştir. Izgara büyüklüğü X ve Y eksenlerinde (-200km,200km) olarak belirlenmiş ve hedef durumunun *Z* bileşeninin sabit 5000m olduğu varsayılmıştır. Hedef durumunun hız bileşenlerinin *0 m/*sn olduğu varsayılmıştır. Şekil 3.1'de XY düzleminde oluşturulan ızgaranın bir kesiti verilmiştir. Hedefin ızgara üzerindeki her bir konumunda multistatik radar ağı tarafından gözlenebildiği ve hedeften menzil ve menzil-hızı ölçümleri yapılabildiği varsayılmıştır. Multistatik radar ağında bulunan her bir alıcı-verici çiftinin birbirinden bağımsız olarak hedeften ölçüm aldığı ve ölçümlerin sıfır ortalamalı toplanır Gauss gürültüsü ile bozulduğu varsayılmıştır. Çalışmalarda, ölçüm gürültülerinin standart sapmaları menzil için 100 *m* menzil hızı için ise 1 *m/sn* olarak seçilmiş ve ölçüm gürültülerinin kendi aralarında ve sensörler arasında bağımsız olduğu varsayılmıştır.

Çalışmalarda bilginin değişimini ölçmek için FBM'nin tersi olan CRLB kullanılmıştır. CRLB, kestirim belirsizliği olan kestirim kovaryansı ile ilişkili olduğundan, her bir alıcı

– verici geometrisi için hedef takip hatasının alt sınırı hakkında bilgi üretmek hedeflenmiştir.



Şekil 3.1 XY düzleminde oluşturulan ızgara

CRLB matrisinin köşegen elemanları, durum vektörünün elemanlarının varyansları ile ilişkilidir. Dolayısı ile çalışmalarda, durum vekötrünün her bir elemanının kestirim hatası için bir ölçüt, CRLB'nin köşegen elemanlarının karekökü türünden tarif edilmiştir (kestirim hatasının standart sapmasına yaklaşım yapılmaktadır). Bu ölçütün yanısıra ortalama Toplam Pozisyon Belirsizliği (TPB), ortalama Toplam Hız Belirsizliği (THB) ve Normalize Kapsama Alanı (NKA) ölçütleri de tanımlanmıştır. Eşitlikler (3.10) – (3.16)'da bu ölçütlerin matematiksel tanımları verilmiştir.

$$U_k = \sqrt{diag\left(CRLB_k\right)} = \left[\Sigma_{xx}^k \quad \Sigma_{x\dot{x}}^k \quad \Sigma_{yy}^k \quad \Sigma_{y\dot{y}}^k \quad \Sigma_{zz}^k \quad \Sigma_{z\dot{z}}^k\right] \tag{3.10}$$

$$P_k = \Sigma_{xx}^k + \Sigma_{yy}^k + \Sigma_{zz}^k \tag{3.11}$$

$$V_k = \Sigma_{x\dot{x}}^k + \Sigma_{y\dot{y}}^k + \Sigma_{z\dot{z}}^k \tag{3.12}$$

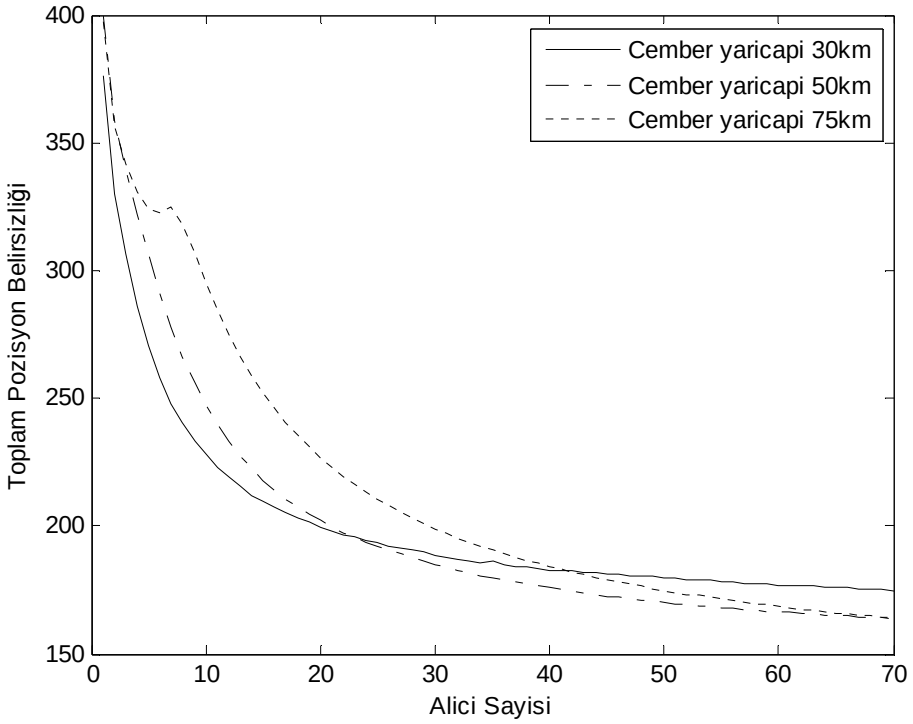
$$TPB = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P_k \tag{3.14}$$

$$THB = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} V_k \tag{3.15}$$

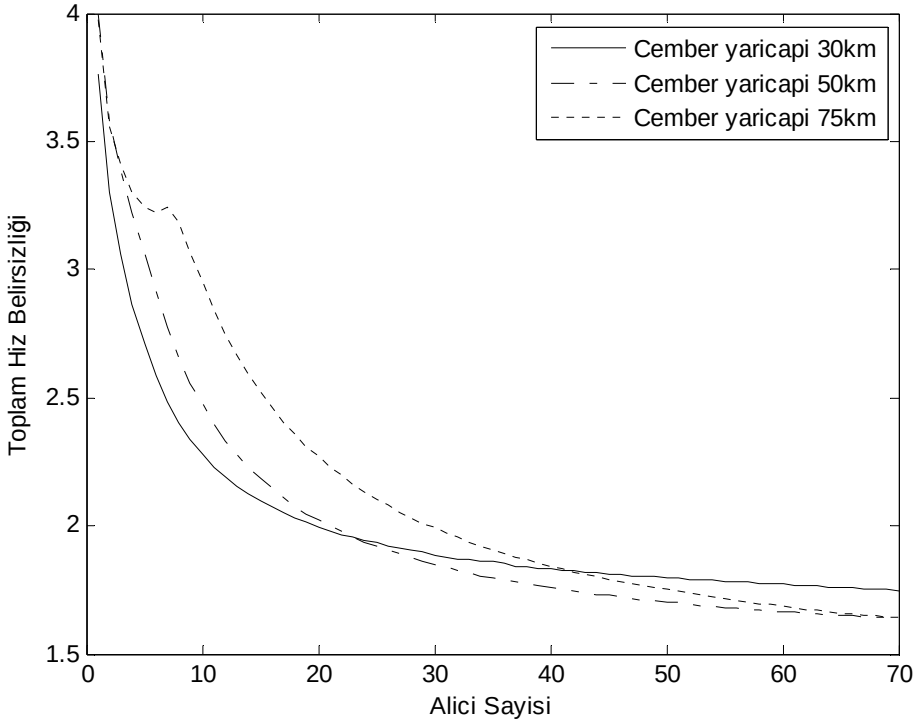
$$NKA = \frac{N\pi r_c^2}{\pi r^2} = \frac{N r_c^2}{r^2} \tag{3.16}$$

Eşitliklerde $CRLB_k$, ızgara üzerindeki *k.* hedef durumu için hesaplanan CRLB'yi, P_k, V_k sırsıyla *k.* hedef durumu için pozisyon ve hız belirsizlikleri toplamı ve r_c alıcıların oluşturduğu çemberin yarıçapını göstermektedir. Analizlerde pozisyon belisizliğinin 300 *m* ve hız belisizliğinin 3 *m/sn*'den küçük olduğu hedef durumu için, tanımlanan analiz ölçütleri hesaplanmıştır.

Vericinin merkezde olduğu durum için yapılan benzetim çalışmalarında, TPB ve THB'nin alıcı sayısındaki artışa bağlı olarak üstel olarak azaldığı sonucu gözlenmiş ve şekiller 3.2 ve 3.3'te bu durum için elde edilen TPB ve THB değişimi verilmiştir. Şekiller 3.2 ve 3.3'te alıcıların oluşturduğu çemberin yarıçapının 30-50-75 *km* olması durumları için TPB ve THB'nin değişimi gösterilmiştir. Pozisyon ve hız hatalarının verici sayısındaki artış ile azalması, alıcı – verici çifti sayısının artışı ile hedeften alınan bilginin artmasının doğal bir sonucudur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, alıcı sayısının 3 – 10 arasında değiştiği bölümde, hatanın çok hızlı azaldığı, ancak 10'dan daha fazla alıcının varlığında ise hatadaki iyileşme hızının azaldığıdır. Bu sonuç, Şekil 3.4'te verilen NKA grafiği ile de desteklenmiştir. NKA grafiğinde 10 alıcıya kadar hızlı bir artış görülürken, 10 alıcı sonrasında NKA'daki büyüme hızının azaldığı görülmektedir. Bu sonuçlar alıcıların oluşturduğu çemberin içersinde kalan bölgenin %100 kapsanması için gerekli alıcı sayısının 30 *km* yarıçap için 6, 50 *km* yarıçap için 8 ve 75 *km* yarıçap için 15 olduğunu göstermiştir. TPB, THB ve NKA analizleri multistatik radar ağında kullanılan alıcı – verici çifti sayısının, hedeften toplanan bilgi miktarı üzerinde önemli bir etkisi olduğunu göstermiştir.



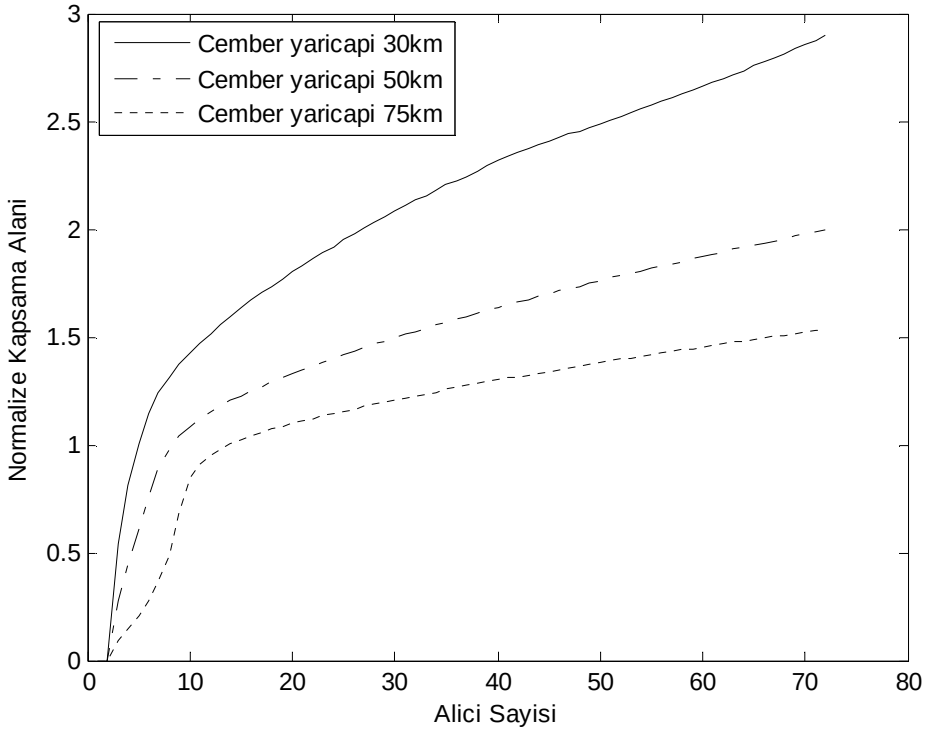
Şekil 3.2 Toplam pozisyon belirsizliğinin alıcı sayısına göre değişimi



Şekil 3.3 Toplam hız belirsizliğinin alıcı sayısına göre değişimi

Ancak gerçek yaşam uygulamalarında, alcı – verici çifti sayısının çok arttırmak sensörler arası bilgi paylaşımı sırasında oluşacak haberleşme yükünün ve hedef takibi

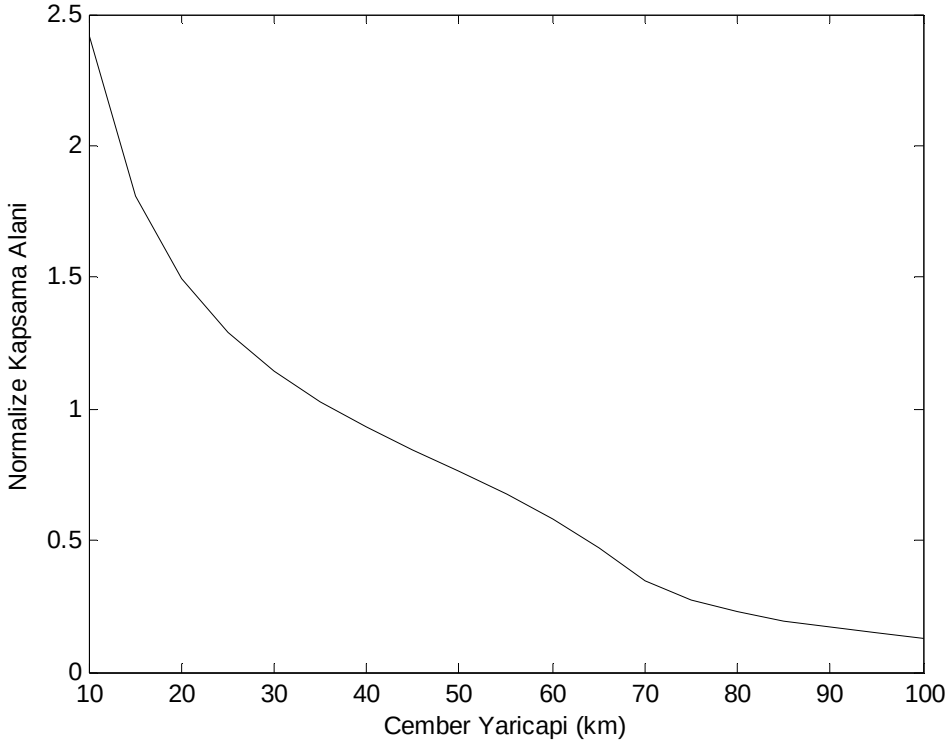
sırasında ölçümlerin hedefler ile eşleştirilmesi için yapılacak işlem miktarının çok artmasına sebep olacak ve bu süreçlerin gerçek zamanlı yapılmasını olanaksız kılacaktır. Dolayısı ile gerçeklenebilir bir sistemin kabul edilebilir sayıda alcı – verici çiftine sahip olması gerekmektedir. Benzetim çalışmaları sonuçları, ilgilenilen bölgenin %100 kapsanması ve bu kapsama için kullanılacak alıcı-verici çifti sayısının en az olması durumu için uygun konfigürasyonun 30 *km* yarıçaplı çember etrafına 6 alıcı yerleştirilmesi olduğunu göstermiştir. Altı alıcının kullanılması durumu için, alıcı çemberi yarıçapı 10-100 *km* arasında 5 *km*'lik adımlar ile değiştirilerek benzetimler yapılmış ve NKA'daki değişim şekil 3.5'te verilmiştir. Şekil 3.5'te NKA'nın 1'den büyük olduğu bölüm 10-37 *km* arasında olarak görülmektedir. Bunun anlamı, alıcı çemberinin yarıçapı bu aralıkta iken, ilgilenilen bölgenin tamamen kapsanıyor olmasıdır. Ancak 37 *km*'in ötesinde kapsanan alanın %100'ün altına düştüğü ve 100 *km*'de %20 seviyesinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 3.4 Normalize kapsama alanının alıcı sayısına göre değişimi

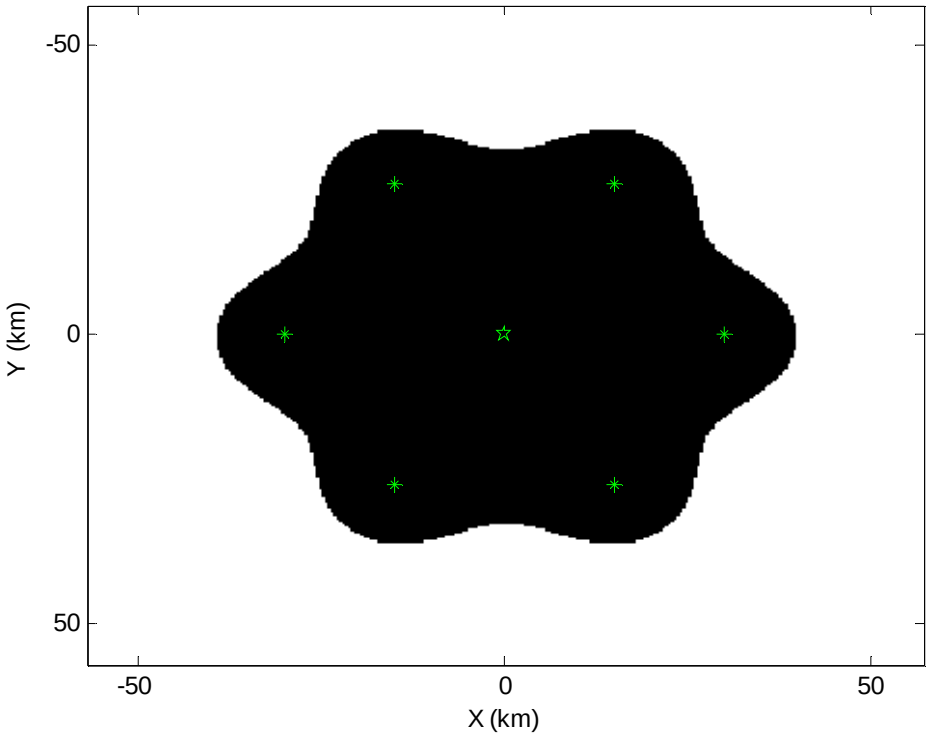
Alıcı çemberin yarıçapı 30 *km* ve çember üzerindeki alıcı sayısı 6 olduğu durum için NKA değeri 1,25 olarak elde edilmiştir. Bu değer çember içinde kalan alanın tamamen

kapsanabildiğini göstermiş ve kapsanan bölgenin resmi Şekil 3.6'da verilmiştir. Şekil 3.6'da gösterilen bölge, pozisyon ve hız hatalarının en büyük değerlerinin sırasıyla 300 *m* ve 3 *m/sn* olduğu alandır.

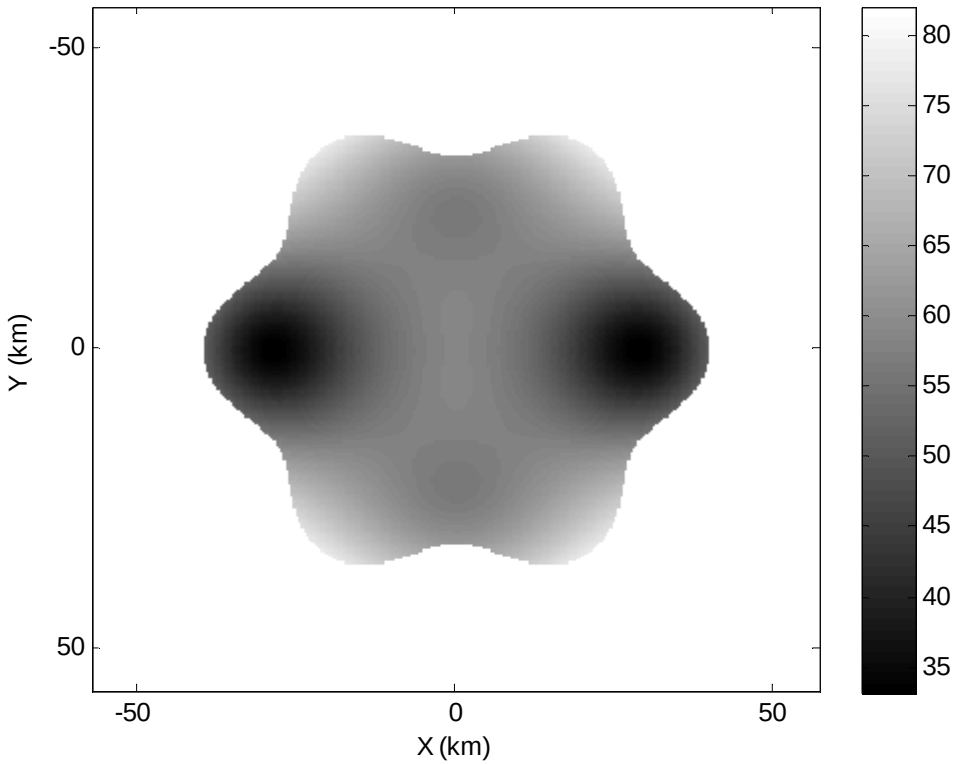


Şekil 3.5 Normalize kapsama alanının artan alıcı çemberi yarıçapına göre değişimi

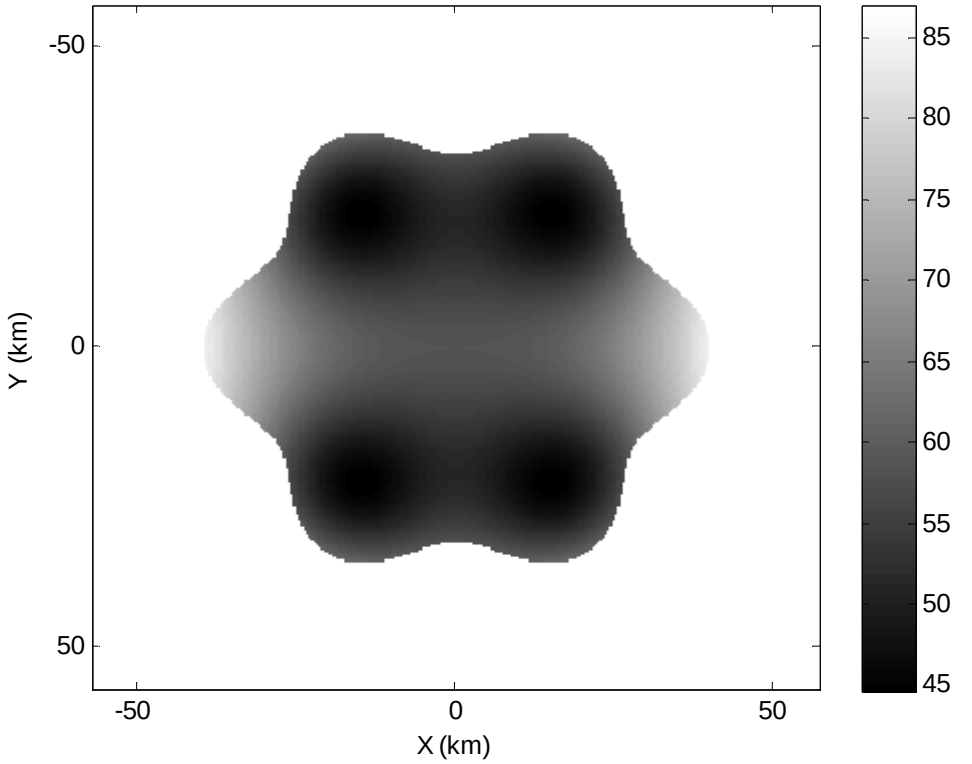
Merkezde verici ve 30 *km* yarıçaplı çember üzerinde 6 alıcının bulunduğu bu konfigürasyon için daha detaylı analizler yapılmış ve her bir eksende belirsizliğin değişimi ayrı ayrı incelenmiştir. Şekiller 3.7 – 3.9'da sırasıyla X, Y ve Z eksenlerindeki pozisyon belirsizliğinin değişimi verilmiştir. Yapılan analizlerde X ve Y eksenlerindeki pozisyon belirsizliklerinin 30 – 80 *m* arasında değiştiği gözlenirken Z ekseninde belirsizliğin 30 – 300 *m* arasında değiştiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç, Z eksenindeki belirsizliğin Şekil 3.6'da verilen bölgenin büyüklüğünü belirleyen ana unsur olduğunu göstermiştir. Eksenlerin ayrı ayrı incelenmesi ile elde edilen sonuçlar şekil 3.6'da gösterilen bölge içerisinde en çok olabilirlik kestiricisi ile hedef durumunun, pozisyonda 300 *m* ve hızda 3 *m/sn*'den daha az hatayla kestirilebileceğini göstermiştir.



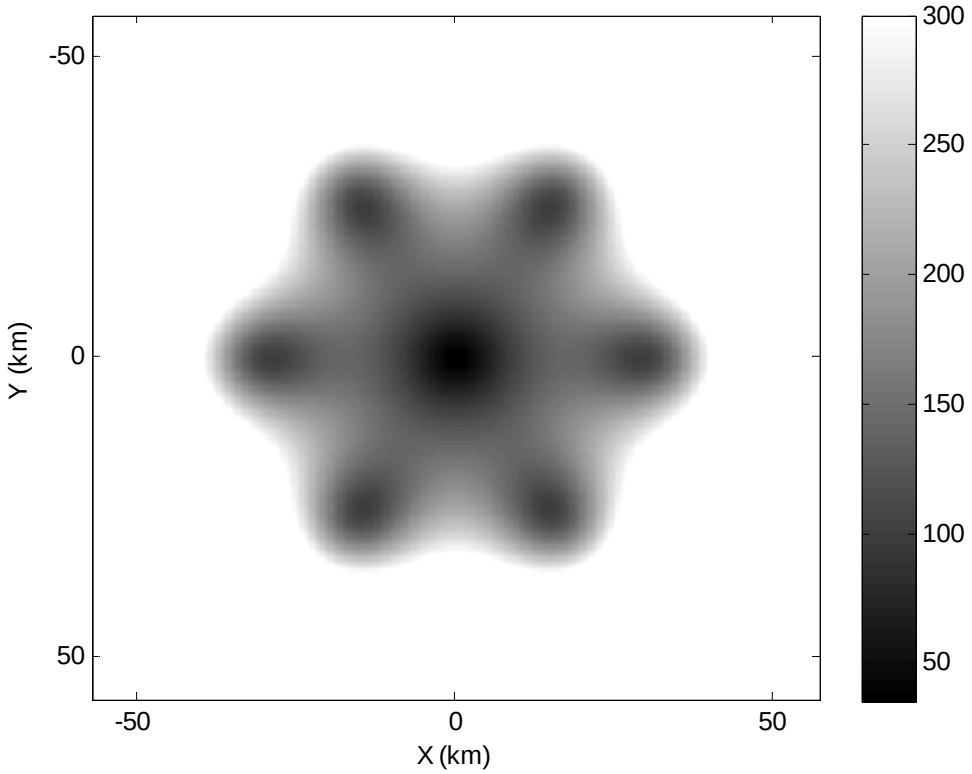
Şekil 3.6 Vericinin merkezde, 6 alıcının 30 *km* yarıçaplı çember üzerinde olduğu durum için durum kestirim bölgesi



Şekil 3.7 X eksenindeki pozisyon belirsizliğinin değişimi

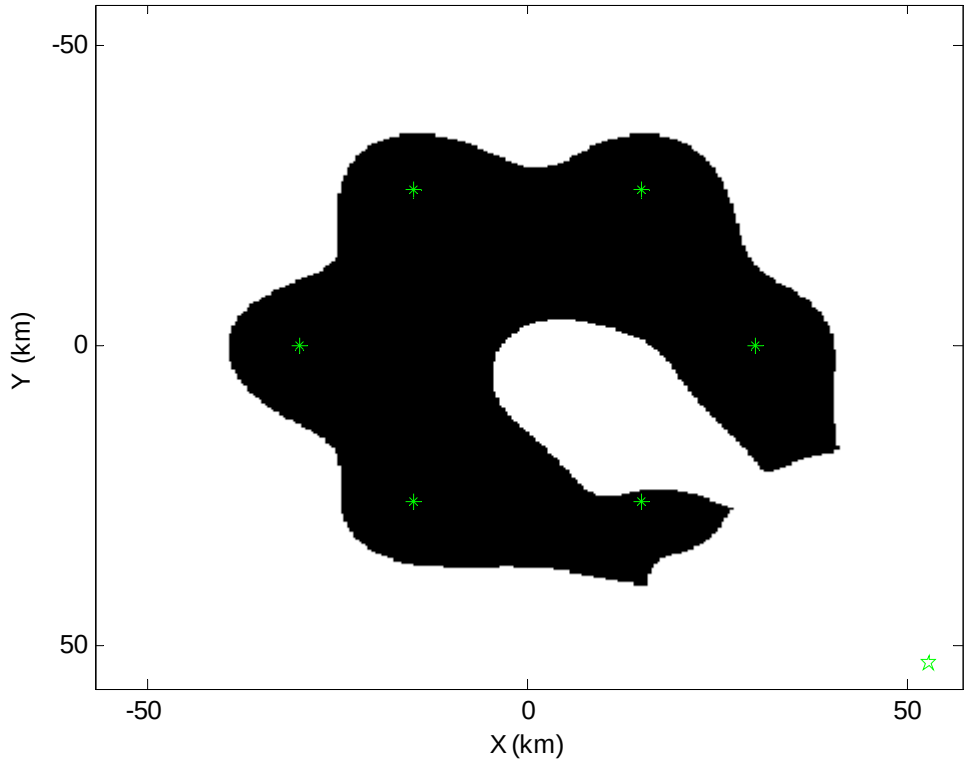


Şekil 3.8 Y eksenindeki pozisyon belirsizliğinin değişimi



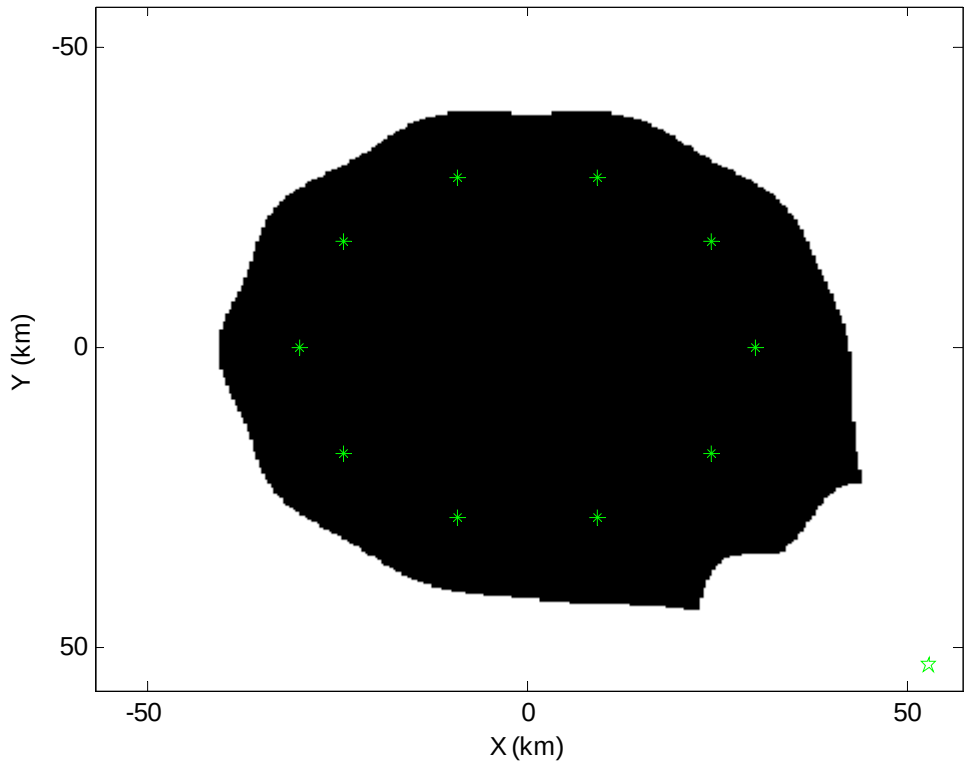
Şekil 3.9 Z eksenindeki pozisyon belirsizliğinin değişimi

Multistatik radar ağında hedeften alınan bilginin değişiminin incelenmesi çalışmalarına, verici konumunun alıcı çemberin dışında olduğu ikinci konfigürasyon için yapılan benzetimler ile devam edilmiştir. İkinci konfigürasyon ile yapılan çalışmalarda, vericinin merkezde olduğu durum için çalışmaların sonuçlarından faydalanılarak, 6 alıcılı durumunun analizi ile başlanmıştır. Alıcıların 30 *km* yarıçaplı çember üzerinde eşit açısal aralıklar ile yerleştirildiği ve vericinin 75 *km* menzil ve 45° yanca açısında bulunduğu durum için hedef durum kestiriminin pozisyonda 300 *m* ve hızda 3 *m/sn* hatanın altında yapılabileceği bölge hesaplanmış ve şekil 3.10'da verilmiştir. Şekil 3.10'da da açıkça görüldüğü gibi 6 alıcı ile alıcıların oluşturduğu çemberin içerisinde kalan bölgenin tamamen kapsanması mümkün olmamıştır. Kapsanamayan bölgenin de kapsanmasının sağlamak için bir çözüm yolu, 75 *km* menzil ve 225° yanca açısına ikinci bir verici yerleştirmektedir. Ancak 2. bir vericinin kullanılabilir olması toplam alıcı verici çifti sayısını 2 katına çıkaracak, iletişim ve veri işleme yüklerinin artmasına sebep olacaktır. Bu problemi çözmek için, sistemde kullanılan alıcı sayısını arttırarak gerçekleştirilen benzetimler sonucunda 10 alıcı kullanılması halinde ilgilenilen bölgenin tamamen kapsandığı sonucuna ulaşılmıştır.



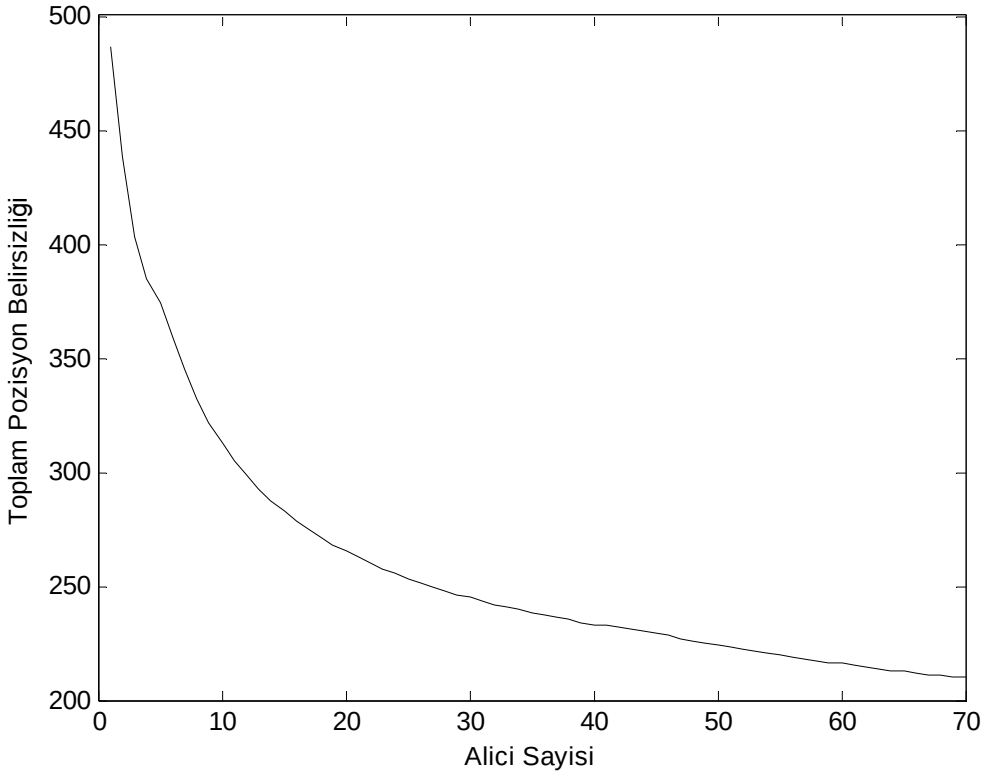
Şekil 3.10 Konfigürasyon 2: 6 alıcının bulunduğu durum için durum kestirimi bölgesi

10 alıcı durumu için elde edilen hedef durum kestiriminin belirli bir hatayla gerçekleştirilebileceği bölgenin resmi şekil 3.11'de verilmiştir. Şekil 3.11'de de görüldüğü gibi bu bölge, alıcıların oluşturduğu çemberin sınırladığı bölgenin alanından daha büyük bir alanı kapsamaktadır. Bu noktada incelemeler bir adım öteye taşınarak, 10 alıcı ile kapsanabilecek en büyük bölgenin belirlenmesi için çalışmalar yapılmış ve bu konfigürasyon ile en fazla 40 *km* yarıçaplı çemberin sınırladığı bölgenin kapsanabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

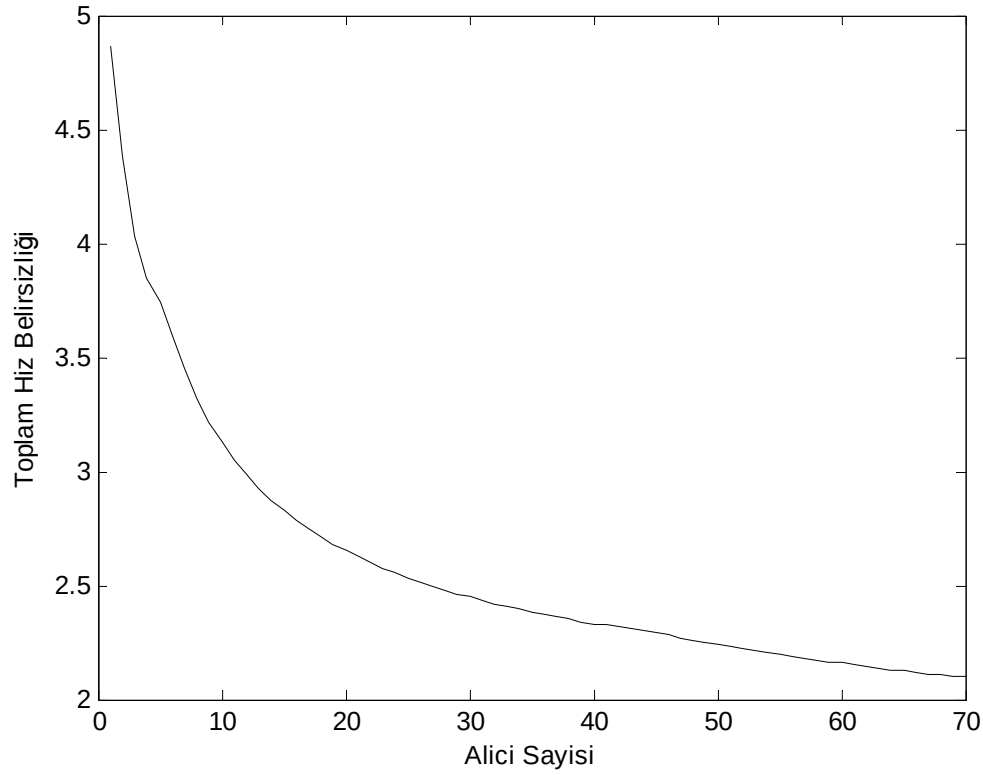


Şekil 3.11 Konfigürasyon 2: 10 alıcının bulunduğu durum için durum kestirim bölgesi

Vericinin alıcı çemberinin dışında bulunduğu 2. konfigürasyon için TPB ve THB hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar sırasıyla şekil 3.12 – 3.13'te verilmiştir. TPB ve THB sonuçları 1. konfigürasyon için elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldığında, pozisyonda 1. konfigürasyonunun yaklaşık 100 *m* daha az belirsizliğe sahip olduğu, hızda ise yine 1. konfigürasyonun yaklaşık 1 *m/sn* daha az belirsizlik değerine sahip olduğu görülmüştür. İkinci konfigürasyonda birinciye göre daha fazla alıcı bulunmasına rağmen TPB ve THB değerlerinin daha kötü olması, verici konumunun multistatik radar ağı tasarımı açısından önemli bir parametre olduğunu göstermiştir.



Şekil 3.12 Konfigürasyon 2: TBP'nin alıcı sayısına göre değişimi



Şekil 3.13 Konfigürasyon 2: TVB'nin alıcı sayısına göre değişimi

3.4 Sonuç

Multistatik radar ağında bilgi analizi için yapılan çalışmalarda, ağ içerisinde bulunan alıcı – vericilerin sayı ve konum bakımından durum kestirim hatası ve hedef durum kestirimi yapılacak bölgenin büyüklüğü üzerinde etkisi olduğu gözlenmiştir. Benzetim yolu ile yapılan analizlerde; hedef durum kestiriminin belirlenen bir bölge içerisinde en az sayıda alıcı – verici çifti kullanarak yapılabilmesi için vericinin alıcıların merkezinde olduğu bir geometri oluşturulması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Benzetimlerde, altı alıcının, merkezinde vericinin bulunduğu bir çember üzerinde eşit açısal aralıklar ile konumlandırılması ile elde edilen konfigürasyonun, hedef durum kestirimi için uygun geometri olduğu gözlenmiştir. Tezin devam eden bölümlerinde incelenen problemlerde ve yapılan analizlerde de bu konfigürasyon kullanılmıştır.

4. SONSAL OIM'nin ÖZYİNEMELİ HESAPLANMASI

Durum dinamiklerinin stokastik olarak modellendiği hallerde OIM durum birleşik olasılık dağılımı üzerinden tanımlanmakta ve her hangi bir andaki OIM, sonsal OIM olarak tarif edilmektedir. Streit (2007), sonsal OIM'in toplanır Gauss gürültüsü varlığında özyinelemeli olarak hesaplanması için bir yöntem önermiştir. Çalışmada (Tichavsky vd. 1998)'de sunulan yönteme paralel bir yol izlenerek geliştirilen yöntem ile sonsal OIM'in, mutltistatik hedef ve sensör alanı takibi probleminde hedef durumu ve senör durumu için nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir. Bu bölümde de, Tichavsky vd. (1998)'de, doğrusal olmayan filtreleme problemi için sonsal Cramer-Rao alt sınırının özyinelemeli hesaplanması için önerilen yönteme benzer şekilde sonsal OIM'in türetimi yapılmıştır.

Sistemin durum – uzay modeli eşitlik (4.1) – (4.2) – (4.3)'teki gibi tanımlansın.

$$x_k = f_{k-1}\left(x_{k-1}, v_{k-1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

$$z_k = h_k\left(x_k, w_k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

$$x_0 \sim p\left(x_0\right) \tag{4.3}$$

Burada x_k, z_k, x_0, f_{k-1}, h_k, v_{k-1} ve w_k sırasıyla n_xx1 boyutlu durum vektörü, n_zx1 boyutlu ölçüm vektörü, başlangıç durum vektörü, durum fonksiyonu, ölçüm fonksiyonu, beyaz süreç gürültüsü ve beyaz ölçüm gürültüsüdür. k anı için aşağıda verilen tanımlamalar varlığında OIM eşitlik (4.4)'teki gibi tarif edilmektedir.

- $X_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ gerçek durum vektörlerinin listesi
- $Z_k = \{z_1, z_2, \ldots z_k\}$ k anına kadar alınan ölçümlerin listesi
- $\hat{X}_k^{MAP}$, Z_k ölçümlerine göre X_k'nin MAP kestirimlerinin listesi

$$I_k = -\nabla_{X_k}\left[\nabla_{X_k}\log\left(p\left(X_k, Z_k\right)\right)\right]^T\Big|_{X_k=\hat{X}_k^{MAP}} \tag{4.4}$$

Burada $p\left(X_k, Z_k\right)$ birleşik olasılık dağılımı olup *T* matris transpozunu göstermektedir. Gradyan operatörü ∇_x durum vektörüne göre türevi tanımlamaktadır ve eşitlik (4.4)'te verilen gradyan ifadesi *k* anına kadar olan bütün durum vektörlerine göre türevi göstermektedir. Birleşik olasılık dağılım fonksiyonu toplam olasılık ve Bayes teoremleri kullanılarak yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
&p\left(X_k, Z_k\right) = p\left(X_k \mid Z_k\right) p\left(Z_k\right) \\
&= p\left(X_k \mid z_k, Z_{k-1}\right) p\left(z_k, Z_{k-1}\right) \\
&= \frac{p\left(z_k \mid X_k, Z_{k-1}\right) p\left(X_k \mid Z_{k-1}\right) p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right) p\left(Z_{k-1}\right)}{p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right)} \\
&= \frac{1}{C} p\left(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1}\right) p\left(x_k, X_{k-1} \mid Z_{k-1}\right) p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right) p\left(Z_{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{C} p\left(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1}\right) p\left(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1}\right) p\left(X_{k-1} \mid Z_{k-1}\right) p\left(Z_{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{C} p\left(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1}\right) p\left(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1}\right) p\left(X_{k-1}, Z_{k-1}\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Burada son terim *k-1* anı için tanımlanan birleşik olasılık dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Benzer şekilde bu fonksiyona da *k* anı için tanımlanan fonksiyona uygulanan dönüşümler uygulanırsa birleşik olasılık dağılımı için eşitlik (4.5)'te verilen ifade elde edilir.

$$p\left(X_K, Z_K\right) = \left\{\prod_{k=1}^{K} \frac{1}{C_k} p\left(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1}\right) p\left(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1}\right)\right\} p\left(x_0\right) \tag{4.5}$$

OIM hesaplanırken birleşik olasılık dağılımının logaritması kullanılmaktadır. Eşitlik (4.5)'in logaritması eşitlik (4.6)'da verilmektedir ve logaritma fonksiyonu çarpım halindeki ifadeyi 3 ayrı fonksiyonun toplamına dönüştürmüştür. Burada birinci terim olabilirlik fonksiyonu ile ilişkili olup, ikinci terim durum öngörüm dağılımı ile

ilişkilidir. Son iki terim ise sırasıyla, durum başlangıç dağılımının ve standartlaştırma katsayısının logaritmasıdır.

$$\log\{p(X_K, Z_K)\} = \log\left\{\left[\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{C_k}\, p(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1})\, p(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1})\right] p(x_0)\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{K}\log\{p(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1})\} + \sum_{k=1}^{K}\log\{p(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1})\} + \log\{p(x_0)\} + \qquad (4.6)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\log\frac{1}{C_k}$$

Eşitlik (4.6)'nın hesyanının negatifi olarak tarif edilen I_K, $(n_x K)\,\mathrm{x}\,(n_x K)$ boyutunda matristir.

$$I_K = \begin{bmatrix} \eta & \Upsilon_{0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Upsilon_{0,1}^T & \Psi_{1,1} & \Upsilon_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Upsilon_{1,2}^T & \Psi_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \Psi_{K-1,K-1} & \Upsilon_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Upsilon_{K-1,K}^T & \beta_K \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

I_K matrisinin her bir elemanı $n_x \mathrm{x}\, n_x$ boyutunda matrisler olup 0 ile gösterilen değerler de aynı boyutta sıfır matrisleridir. *m* ve *n* zaman indisleri olmak üzere, *m* ve *n*'nin farklı değerleri için I_K matrisinin bloklarını oluşturan hesyan matrisleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$m = n = 0$ *Durumu:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{x_n}\left[\nabla_{x_m}\log\left\{p\left(X_K, Z_K\right)\right\}\right]^T = \nabla_{x_0}\left[\nabla_{x_0}\log\left\{p\left(X_K, Z_K\right)\right\}\right]^T \\
&= \nabla_{x_0}\left[\nabla_{x_0}\log\left\{p\left(z_1 \mid x_1, X_0, Z_0\right)\right\}\right]^T + \nabla_{x_0}\left[\nabla_{x_0}\log\left\{p\left(x_1 \mid X_0, Z_0\right)\right\}\right]^T + \\
&\quad \nabla_{x_0}\left[\nabla_{x_0}\log\left\{p\left(x_0\right)\right\}\right]^T \\
&= -\eta
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$m = n = 1, 2, \cdots$ *Durumu:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{x_m}\left[\nabla_{x_m}\log\left\{p\left(X_K, Z_K\right)\right\}\right]^T = \sum_{k=m}^{m+1}\nabla_{x_m}\left[\nabla_{x_m}\log\left\{p\left(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1}\right)\right\}\right]^T + \\
&\sum_{k=m}^{m+1}\nabla_{x_m}\left[\nabla_{x_m}\log\left\{p\left(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1}\right)\right\}\right]^T \\
&= -\Psi_{m,m}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$m \neq n, n = m+1$ *Durumu:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{x_{m+1}}\left[\nabla_{x_m}\log\left\{p\left(X_K, Z_K\right)\right\}\right]^T = \nabla_{x_{m+1}}\left[\nabla_{x_m}\log\left\{p\left(z_{m+1} \mid x_{m+1}, X_m, Z_m\right)\right\}\right]^T + \\
&\nabla_{x_{m+1}}\left[\nabla_{x_m}\log\left\{p\left(x_{m+1} \mid X_m, Z_m\right)\right\}\right]^T \\
&= -\Upsilon_{m,m+1}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$m = n = K$ *Durumu:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{x_K}\left[\nabla_{x_K}\log\left\{p\left(X_K, Z_K\right)\right\}\right]^T = \nabla_{x_K}\left[\nabla_{x_K}\log\left\{p\left(z_K \mid x_K, X_{K-1}, Z_{K-1}\right)\right\}\right]^T + \\
&\nabla_{x_K}\left[\nabla_{x_K}\log\left\{p\left(x_K \mid X_{K-1}, Z_{K-1}\right)\right\}\right]^T \\
&= -\beta_K
\end{aligned} \tag{4.11}$$

I_K matrisinin blok elemanlarını oluşturan Hesyan matrisleri eşitliklerinin ispatı Ek-3'te verilmiştir. I_K matrisini kullanarak sonsal OIM'in özyinelemeli olarak hesaplanması için, matris sol üst köşesini oluşturan $2n_x \text{x} 2n_x$ boyutundaki matris (*k=0,1* anları) ele alınsın.

$$M = \begin{bmatrix} \eta & \Upsilon_{0,1} \\ \Upsilon_{0,1}^T & \Psi_{1,1} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Sadece *k=0* ve *1* anları ile ilgileniliyorsa $\Psi_{1,1} = \beta_1$ olur. Eğer *M* matrisinin tersi alınabiliyorsa eşitlik (4.13)'teki gibi yazılabilir.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

M matrisinin tersinde sol alt köşe bloğunu oluşturan *C* matrisi, *k=1* anındaki sonsal OIM'in tersine eşittir ve *M* matrisinin sol üst köşesindeki $n_x \text{x} n_x$ boyutundaki matrisin Schur tümleyenini (Schur Complement) (Zhang 2005) olarak tarif edilmektedir. J_1, *k=1* anındaki sonsal OIM olmak üzere

$$J_1 = C^{-1} = \beta_1 - \Upsilon_{0,1}^T \eta^{-1} \Upsilon_{0,1} \tag{4.14}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. I_K matrisinde *k=0,1,2* anlarını temsil eden $3n_x \text{x} 3n_x$ boyutundaki blok incelenirse *N* matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$N = \begin{bmatrix} \eta & \Upsilon_{0,1} & 0 \\ \Upsilon_{0,1}^T & \Psi_{1,1} & \Upsilon_{1,2} \\ 0 & \Upsilon_{1,2}^T & \beta_2 \end{bmatrix}, \qquad \Psi_{2,2} = \beta_2 \tag{4.15}$$

k=1 anı için yapılan işleme benzer şekilde *k=2* anındaki sonsal OIM J_2, *N* matrisinin sol üst köşesini oluşturan $2n_x \text{x} 2n_x$ matrisin Schur tümleyeni olarak hesaplanabilir.

$$J_2 = \beta_2 - \begin{bmatrix} 0 & \Upsilon_{1,2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta & \Upsilon_{0,1} \\ \Upsilon_{0,1}^T & \Psi_{1,1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Upsilon_{1,2} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Ortadaki matrisin tersi matris tersi özdeşliği (Hadley 1965) kullanılarak yeniden yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \eta & \Upsilon_{0,1} \\ \Upsilon_{0,1}^T & \Psi_{1,1} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\eta - \Upsilon_{0,1}\Psi_{1,1}^{-1}\Upsilon_{0,1}^T\right)^{-1} & -\eta^{-1}\Upsilon_{0,1}\left(\Psi_{1,1} - \Upsilon_{0,1}^T\eta^{-1}\Upsilon_{0,1}\right)^{-1} \\ \Psi_{1,1}^{-1}\Upsilon_{0,1}^T\left(\eta - \Upsilon_{0,1}\Psi_{1,1}^{-1}\Upsilon_{0,1}^T\right)^{-1} & \left(\Psi_{1,1} - \Upsilon_{0,1}^T\eta^{-1}\Upsilon_{0,1}\right)^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

elde edilir. Eşitlik (4.17), eşitlik (4.16)'da yerine konulup gerekli matris çarpımları ve sadeleştirmeler yapılarak J_2 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$J_2 = \beta_2 - \Upsilon_{0,1}^T\left(\Psi_{1,1} - \Upsilon_{0,1}^T\eta^{-1}\Upsilon_{0,1}\right)^{-1}\Upsilon_{0,1} \tag{4.18}$$

J_2, $\Psi_{1,1}$ ve β_1 matrislerinin eşitlik (4.9) ve eşitlik (4.11) ile verilen formları kullanılarak daha bilindik bir ifadeye dönüştürülebilir.

$$\Psi_{1,1} = -\sum_{k=1}^{2} \nabla_{x_1}\left[\nabla_{x_1}\log\left\{p\left(z_k \mid x_k, X_{k-1}, Z_{k-1}\right)\right\}\right]^T - \sum_{k=1}^{2} \nabla_{x_1}\left[\nabla_{x_1}\log\left\{p\left(x_k \mid X_{k-1}, Z_{k-1}\right)\right\}\right]^T \tag{4.19}$$

$$\beta_1 = -\nabla_{x_1}\left[\nabla_{x_1}\log\left\{p\left(z_1 \mid x_1, X_0, Z_0\right)\right\}\right]^T - \nabla_{x_1}\left[\nabla_{x_1}\log\left\{p\left(x_1 \mid X_0, Z_0\right)\right\}\right]^T \tag{4.20}$$

Eşitlik (4.20) eşitlik (4.19)'da yerine konularak

$$\Psi_{1,1} = \beta_1 - \nabla_{x_1}\left[\nabla_{x_1}\log\left\{p\left(z_2 \mid x_2, X_1, Z_1\right)\right\}\right]^T - \nabla_{x_1}\left[\nabla_{x_1}\log\left\{p\left(x_2 \mid X_1, Z_1\right)\right\}\right]^T$$
$$= \beta_1 + \alpha_{1,1} \tag{4.21}$$

$\Psi_{1,1}$ matrisi β_1'e bağlı olarak yazılabilir. Eşitlik (4.21) eşitlik (4.18)'de yerine konulup ifade yeniden düzenlenirse eşitlik (4.22)'de verilen sonsal dağılımın özyinelemeli olarak hesaplanması için gerekli ifadeye ulaşılır.

$$J_2 = \beta_2 - \Upsilon_{0,1}^T\left(\alpha_{1,1} + \underbrace{\beta_1 - \Upsilon_{0,1}^T\eta^{-1}\Upsilon_{0,1}}_{J_1}\right)^{-1}\Upsilon_{0,1}$$
$$= \beta_2 - \Upsilon_{0,1}^T\left(\alpha_{1,1} + J_1\right)^{-1}\Upsilon_{0,1} \tag{4.22}$$

Eşitlik (4.22)'de görüldüğü gibi *k=2* anındaki sonsal OIM *k=1* anındaki sonsal OIM'e ve $p\left(X_K, Z_K\right)$ birleşik olasılık dağılımının *k=2* anı ile ilişkili terimlerinin türevlerine bağlıdır. Sonsal OIM için yapılan bu çıkarım genelleştirilerek her hangi bir *k* anı için sonsal OIM eşitlik (4.23)'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$J_k = \beta_k - \Upsilon_{k-1,k}^T\left(\alpha_{k-1,k-1} + J_{k-1}\right)^{-1}\Upsilon_{k-1,k}$$
$$J_0 = \eta \tag{4.23}$$

Sistem durum – uzay modelinin iki özel durumu için sonsal OIM ilerleyen iki bölümde verilmiştir. İlk olarak durum ve ölçüm fonksiyonlarının doğrusal, süreç ve ölçüm gürültülerinin toplanır beyaz Gauss gürültüleri olduğu durum için sonsal OIM hesaplanmıştır. Daha sonra, durum ve ölçüm fonksiyonlarının doğrusal olmadığı, gürültü süreçleri üzerine yapılan varsayımların korunduğu durum için sonsal OIM verilmiştir.

4.1 Doğrusal Gauss Durumu

Sonsal OIM'in birleşik olasılık dağılımı kullanılarak özyinelemeli hesaplanışı bir önceki bölümde verilmişti. Bu bölümde eşitlik (4.1) – (4.3) ile tarif edilen sistem durum uzay modelinin aşağıda verilen varsayımlar ile tanımlanan özel bir hali için sonsal OIM türetilmiştir. Yapılan varsayımlar Bar-Shalom (2001)'de doğrusal Gauss durumu olarak tanımlanmıştır.

Varsayımlar:

- Durum denklemi sıfır ortalamalı bilenen kovaryanslı toplanır beyaz Gauss gürültüsü ile bozulmuş birinci derece Markov yapılı stokastik doğrusal fonksiyondur.

  $x_k = F_{k-1}x_{k-1} + v_{k-1}$
- Ölçüm denklemi sıfır ortalamalı bilenen kovaryanslı toplanır beyaz Gauss gürültüsü ile bozulmuş stokastik doğrusl fonksiyondur.

  $z_k = H_k x_k + w_k$
- Başlangıç durumu x_0'un dağılımı $p(x_0) \triangleq N(\mu_0, P_0)$ şekildedir ve N Gauss dağılımını göstermektedir.
- v_k ve w_k gürültü süreçleri sırasıyla $N(0, Q_k)$ ve $N(0, R_k)$ dağılımlarına sahiptir.
- x_0, v_k ve w_k birbirinden bağımsızdır.
- $E\left[v_k v_j\right] = Q_k \delta_{k-j}, \qquad \delta_{k-j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$
- $E\left[w_k w_j\right] = R_k \delta_{k-j}, \qquad \delta_{k-j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

Bu varsayımlar altında eşitlik (4.6)'da verilen birleşik olasılık dağılımının, sadece durum vektörüne bağlı logaritması eşitlik (4.24)'dak gibi yazılabilmektedir.

$$\log\{p(X_K, Z_K)\} = \sum_{k=1}^{K} \log\{p(z_k \mid x_k)\} + \sum_{k=1}^{K} \log\{p(x_k \mid X_{k-1})\} + \log\{p(x_0)\} \qquad (4.24)$$

Eşitlik (4.24)'ü oluşturan terimler sistem durum – uzay modeli için yapılan varsayımlar ile aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} &p(z_k \mid x_k) \sim N(z_k; H_k x_k, R_k) \\ &p(x_k \mid x_{k-1}) \sim N(x_k; F_k x_{k-1}, Q_{k-1}) \\ &p(x_0) \sim N(x_0; \mu_0, P_0) \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Eşitlik (4.23)'de verilen sonsal OIM'nin özyinelemeli hesaplama formülünde bulunan terimler Gauss dağılımının logaritmasının türevleri şeklinde hesaplanmaktadır. Hesaplamaların yapılabilmesi için öncelikle çok değişkenli bir Gauss dağılımının logaritmasının hesyanı hesaplanarak elde edilen sonuçlar eşitlik (4.23)'de yerine konulmuştur. x, ortalaması μ ve varyansı Σ olan çok değişkenli Gauss dağılımına sahip *n* boyutlu vektör değerli rasgele değişken olmak üzere

$$p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right\} \qquad (4.26)$$

şekilde tanımlanmaktadır. Eşitlik (4.26)'nın logaritması

$$\ln p(x; \mu, \Sigma) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \qquad (4.27)$$

şeklinde olup, burada logaritma "*e*" tabanına göre alınmıştır. Eşitlik (4.27)'nin μ'ye göre gradyanı ve hesyanı sırasıyla eşitlik (4.28) ve (4.29)'da verilmiştir.

$$\frac{\partial \ln p(x; \mu, \Sigma)}{\partial \mu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}{\partial \mu} = (x-\mu)\Sigma^{-1} \qquad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(x;\mu,\Sigma)}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 (x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}{\partial \mu^2} = \Sigma^{-1} \tag{4.29}$$

Sonsal OIM'yi oluşturan bileşenler eşitlik (4.25)'ta verilen fonksiyonların hesyanına bağlıdır. Bu fonksiyonlar Gauss dağılımı ile tarif edildiğinden eşitlik (4.28) ve (4.29)'da verilen gradyan ve hesyan ifadeleri kullanılarak sonsal OIM'nin bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k-1,k-1} = -\nabla_{x_{k-1}}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T \\
&\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1}) = (x_k - F_{k-1}x_{k-1})^T Q_{k-1}^{-1} F_{k-1} \\
&\nabla_{x_{k-1}}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T = -F_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} F_{k-1} \\
&\alpha_{k-1,k-1} = F_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} F_{k-1}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
&\Upsilon_{k-1,k} = \underbrace{-\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(z_k \mid x_k)\right]^T}_{0} - \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T \\
&\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1}) = (x_k - F_{k-1}x_{k-1})^T Q_{k-1}^{-1} F_{k-1} \\
&\Upsilon_{k-1,k} = \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T = -F_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
&\beta_k = -\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p(z_k \mid x_k)\right]^T - \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T \\
&\nabla_{x_k} \ln p(z_k \mid x_k) = (z_k - H_k x_k)^T R_k^{-1} H_k \\
&\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p(z_k \mid x_k)\right]^T = -H_k^T R_k^{-1} H_k \\
&\nabla_{x_k} \ln p(x_k \mid x_{k-1}) = -(x_k - F_{k-1}x_{k-1})^T Q_{k-1}^{-1} \\
&\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T = -Q_{k-1}^{-1} \\
&\beta_k = H_k^T R_k^{-1} H_k + Q_{k-1}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Eşitlikler (4.31), (4.32) ve (4.33) ile hesaplanan terimler sonsal OIM'yi oluşturmak için bir araya getirilirse

$$\begin{aligned} J_k &= \beta_k - \Upsilon_{k-1,k}^T \left(\alpha_{k-1,k-1} + J_{k-1} \right) \Upsilon_{k-1,k} \\ &= H_k^T R_k^{-1} H_k + Q_{k-1}^{-1} - Q_{k-1}^{-1} F_{k-1} \left(F_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} F_{k-1} + J_{k-1} \right) F_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Olarak elde edilmektedir. Eşitlik (4.34)'da görüldüğü gibi doğrusal Gauss durumunda sonsal OIM durum ve ölçümden bağımsızdır ve aynı durum için hesaplanacak Fisher bilgi matrisine eşittir. Eşitlik (4.34)'te J_{k-1}, $P_{k-1|k-1}^{-1}$ olarak tarif edilir ve matris tersi özdeşliği kullanılırsa Kalman filtresinin bilgi filtresi (Bar-Shalom vd. 2001) olarak tarif edildiği durumda karşılaşılan kovaryans güncelleme eşitliği elde edilir. Sonuç olarak doğrusal Gauss durumunda *k* anındaki sonsal OIM, Fisher bilgi matrisine eşittir ve sonsal OIM'in tersi Kalman filtresinin hesapladığı kovaryansa eşittir.

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{-1} &= \left(Q_{k-1} + F_{k-1} P_{k-1|k-1}^{-1} F_{k-1}^T \right)^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \\ P_{k|k}^{-1} &= P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \end{aligned} \tag{4.35}$$

Doğrusal Gauss durumu için tarif edilen sonsal OIM için üzerinde durulması gereken bir başka nokta ise sonsal OIM'nin durum vektörü x_k ve ölçüm vektörü z_k'den bağımsız olmasıdır. Dolayısı ile sonsal OIM'nin hesaplanması için durum vektörünün *MAP* kestirimine ve durum vektörü ile ilişkili gözlemlere (ölçümlere) gerek yoktur. Sistem durum – uzay modeli için başlangıçta yapılan ölçüm gürültüsü ve başlangıç durum dağılımı varsayımları sonsal OIM'nin hesaplanması için yeterlidir.

4.2 Doğrusal Olmayan Sistem ile Toplanır Gauss Gürültüsü Durumu

Bir önceki bölümde incelenen sistem durum – uzay modelinde, durum ve ölçüm fonksiyonlarının doğrusal olduğu varsayımı kaldırıldığında sonsal OIM'in nasıl hesaplanacağı bu bölümde gösterilmiştir. Sonsal OIM, eşitlik (4.23)'te verildiği gibi bir önceki ana ait sonsal OIM'nin fonksiyonu olarak hesaplanmaktadır. Dolayısı ile bu

bölümde *k* anındaki sonsal OIM'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan $\alpha_{k-1,k-1}$, $\Upsilon_{k-1,k}$ ve β_k ifadeleri hesaplanmıştır. Sonsal OIM'yi oluşturan bileşenler sistem durum – uzay modeli için yapılan varsayımlar altında eşitlik (4.36)'de tanımlanan çok değişkenli Gauss dağılımlarının logaritmasının hesyanının negatifidir. Bu noktada unutulmamalıdır ki, sonsal OIM *MAP* kestirimi etrafında hesaplanmaktadır. Dolayısı ile sonsal OIM'nin doğrusal olmayan stokastik durum – uzay modeli için türetildiği eşitliklerde hesaplamaların *MAP* kestirimi etrafında yapıldığı varsayılmıştır.

$$\begin{aligned} &p(z_k \mid x_k) \sim N\left(z_k; h_k(x_k), R_k\right) \\ &p(x_k \mid x_{k-1}) \sim N\left(x_k; f_{k-1}(x_{k-1}), Q_{k-1}\right) \\ &p(x_0) \sim N(x_0; \mu_0, P_0) \end{aligned} \tag{4.36}$$

Eşitlik (4.36) kullanılarak her bir terimin nasıl hesaplanacağı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} &\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1}) = \left[x_k - f_{k-1}(x_{k-1})\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right] \\ &\alpha_{k-1,k-1} = -\nabla_{x_{k-1}}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T = \\ &-\nabla_{x_{k-1}}\left\{\left[x_k - f_{k-1}(x_{k-1})\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right]\right\} \\ &= -\nabla_{x_{k-1}}\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[x_k - f_{k-1}(x_{k-1})\right] + \\ &\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right] \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} &\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1}) = \left[x_k - f_{k-1}(x_{k-1})\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right] \\ &\Upsilon_{k-1,k} = -\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_{k-1}} \ln p(x_k \mid x_{k-1})\right]^T = -\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}(x_{k-1})\right]^T Q_{k-1}^{-1} \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\beta_k = -\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p\left(z_k \mid x_k\right)\right]^T - \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p\left(x_k \mid x_{k-1}\right)\right]^T$$

$$\nabla_{x_k} \ln p\left(z_k \mid x_k\right) = \left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)$$

$$\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p\left(z_k \mid x_k\right)\right]^T = \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right] -$$

$$\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)$$

$$\nabla_{x_k} \ln p\left(x_k \mid x_{k-1}\right) = -\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]^T Q_{k-1}^{-1} \qquad (4.39)$$

$$\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} \ln p\left(x_k \mid x_{k-1}\right)\right]^T = \nabla_{x_k}\left\{-\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]^T Q_{k-1}^{-1}\right\}^T$$

$$= -Q_{k-1}^{-1}$$

$$\beta_k = -\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right] +$$

$$\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right) + Q_{k-1}^{-1}$$

Eşitlikler (4.37), (4.38) ve (4.39)'da verilen sonsal OIM'yi oluşturan bileşenler eşitlik (4.23)'te yerine konulursa

$$J_k = \beta_k - \Upsilon_{k-1,k}^T\left(\alpha_{k-1,k-1} + J_{k-1}\right)\Upsilon_{k-1,k}$$

$$= \left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right) + Q_{k-1}^{-1} -$$

$$\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right] - Q_{k-1}^{-1} \nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\mathbf{x}$$

$$\left\{\begin{matrix} -\nabla_{x_{k-1}}\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right] + \\ \left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]^T Q_{k-1}^{-1}\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}\left(x_{k-1}\right) + J_{k-1}\right] \end{matrix}\right\}^{-1} \mathbf{x} \qquad (4.40)$$

$$\left[\nabla_{x_{k-1}} f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]^T Q_{k-1}^{-1}$$

elde edilmektedir. Eşitlik (4.40)'da gradyan ve hesyan ifadeleri için eşitlik (4.41)'de verilen tanımlamalar yapılmış ve *k* anındaki sonsal OIM eşitlik (4.42)'de verilmiştir.

$$\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\Big|_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \tilde{H}_k, \qquad \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T{}_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \bar{H}_k$$
$$\nabla_{x_k} f_k\left(x_k\right)\Big|_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \tilde{F}_k, \qquad \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} f_k\left(x_k\right)\right]^T{}_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \bar{F}_k \tag{4.42}$$

$$J_k = \tilde{H}_k^T R_k^{-1}\tilde{H}_k - \bar{H}_k^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right] + Q_{k-1}^{-1} - \tag{4.43}$$
$$Q_{k-1}^{-1}\tilde{F}_{k-1}\left\{\tilde{F}_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1}\tilde{F}_{k-1} - \bar{F}_{k-1}Q_{k-1}^{-1}\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right] + J_{k-1}\right\}^{-1}\tilde{F}_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1}$$

Matris tersi özdeşliği kullanılarak *k* anındaki OIM için daha basit bir ifade eşitlik (4.44)'de elde edilmiştir.

$$J_k = \tilde{H}_k^T R_k^{-1}\tilde{H}_k + \tag{4.44}$$
$$\left[Q_{k-1}^{-1} + \tilde{F}_{k-1}^T\left(J_{k-1}^{-1} - \bar{F}_{k-1}Q_{k-1}^{-1}\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right]\right)^{-1}\tilde{F}_{k-1}\right]^{-1} -$$
$$\bar{H}_k^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right]$$

Durum fonksiyonun doğrusal olduğu varsayımı yapılarak eşitlik (4.44)'te verilen *k* anındaki sonsa OIM daha basit bir forma dönüşmektedir ve eşitlik (4.45)'te verilmiştir.

$$J_k = \tilde{H}_k^T R_k^{-1}\tilde{H}_k + \left[Q_{k-1}^{-1} + \tilde{F}_{k-1}^T J_{k-1}^{-1}\tilde{F}_{k-1}\right]^{-1} - \bar{H}_k^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right] \tag{4.45}$$

Eşitlikler (4.44) ve (4.45)'te verilen *k* anındaki sonsal OIM ifadelerinin biraz daha incelenmesi gerekmektedir. Sonsal OIM $n_x \mathrm{x}\, n_x$ boyutunda bir matristir. Ancak eşitlik (4.45)'in son terimi $n_z \mathrm{x} 1$ vektör görümündedir. Benzer bir durum eşitlik (4.44)'te, J_{k-1}^{-1} 'dan çıkarılan terimde de mevcuttur. Matris çarpımı ile ilgili bu garip durum daha detaylı inceleme yapıldığında ortadan kalkmaktadır. Ek-2'de bu durumun kaynağı ve sonsal OIM'in $n_x \mathrm{x}\, n_x$ olarak elde edilebileceği gösterilmiştir.

5. DURUM SONSAL DAĞILIMINA GAUSS DAĞILIMI YAKLAŞIMI

MAP kestirimi ile en küçük ortalama kare hata kestirimi (MMSE, koşullu beklenen değer) doğrusal Gauss varsayımı altında birbirine eşittir (Bar-Shalom vd. 2001). Doğrusal Gauss varsayım, kestirilmek istenen parametrenin sonsal dağılımının normal dağılıma sahip olmasını garanti ederek sonsal dağılımın maksimum değeri olan MAP kestiriminin, parametrenin beklenen değeri olarak hesaplanmasına olanak tanımaktadır. Parametrenin beklenen değeri ölçümlere koşullu olarak tarif edilen sonsal dağılım üzerinden hesaplanacak integral ile koşullu beklenen değer olarak elde edilmektedir. Doğrusal Gauss varsayımının temel koşullarından durum ve ölçüm fonksiyonlarının doğrusal olması koşulu gevşetilerek, bu fonksiyonlardan ölçüm fonksiyonunun doğrusal olmadığı durumda MAP ve MMSE kestirimlerinin karşılaştırılması bu bölümde incelenmiştir.

$x \in R^{n_x}$, n_x boyutlu durum değişkeni olmak üzere, x'in zaman içindeki değişimi eşitlik (5.1)'de verilen kesikli zaman stokastik durum denklemi ile tarif edilmiştir.

$$x_k = F_{k-1} x_{k-1} + v_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

Burada, k kesikli zaman indisi, F_{k-1} zamanla değişen ya da sabit doğrusal durum fonksiyonu, v_{k-1} bilinen bir olasılık dağılım fonksiyonuna göre bağımsız ve özdeşçe dağılımlı toplanır süreç gürültüsünü göstermektedir. Doğrusal F_{k-1} fonksiyonu n_xx n_x boyutunda matris olarak tarif edilmektedir. Durum denkleminde k=0 anındaki durum dağılımı olan $P(x_0)$' ın bilindiği varsayılmaktadır. Eşitlik (5.1)'e göre değişen x durumu hakkında çıkarımlarda bulunabilmek için kesikli zaman aralıklarında ölçümler alınabildiği varsayılmıştır. Ölçümlerin eşitlik (5.2)'de verilen ölçüm denklemine göre alındığı varsayılmıştır. Ölçüm denkleminde z_k n_z boyutunda ölçüm vektörü, $h_k(.)$ doğrusal olmayan ölçüm fonksiyonu ve w_k olasılık dağılımı bilinen bir fonksiyondan bağımsız ve özdeşçe dağılımlı ölçüm gürültüsüdür.

$$z_k = h_k\left(x_k\right) + w_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

Eşitlik (5.1) – (5.2) ve başlangıç durumu hakkında yapılan varsayım, parametresi durum vektörü x olan sistemin durum – uzay modelini tarif etmektedir. Bu sistemde durum vektörü hakkında her hangi bir *k* anında çıkarımda bulunmak için, o ana kadar olan ölçümlere koşullu durum sonsal dağılımını yazmak gerekmektedir. Aşağıda verilen varsayımlar altında Bayesçi bir yaklaşım kullanarak durum sonsal dağılımını için yinelemeli olarak ifade etmek mümkündür (Ristic vd. 2004).

- $Z_k = \left\{z_1, \ldots, z_k\right\}$ *k* anına kadar olan ölçümlerin listesidir.
- *k-1* anındaki $p\left(x_{k-1} \mid Z_{k-1}\right)$ dağılımının bilinmektedir.
- $p\left(x_0\right) \triangleq p\left(x_0 \mid z_0\right)$ bilinmektedir ve z_0 ölçüm olmaması durumunu modellemektedir.
- Eşitlik (5.1)'de verilen stokastik durum denklemi birinci dereceden Markov sürecidir.

Bu varsayımlar altında durum sonsal dağılımı eşitlik (5.3)'teki gibi tarif edilmektedir.

$$\begin{aligned} p\left(x_k \mid Z_k\right) &= p\left(x_k \mid z_k, Z_{k-1}\right) \\ &= \frac{p(z_k \mid x_k, Z_{k-1})\, p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right)}{p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right)} \\ &= \frac{p(z_k \mid x_k)\, p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right)}{p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Eşitlik (5.3)'te $p(z_k \mid x_k, Z_{k-1}) = p(z_k \mid x_k)$ olarak yazılabilmesi yukarıda verilen 4. varsayımın bir sonucudur. Burada $p(z_k \mid x_k)$, $p\left(x_k \mid Z_{k-1}\right)$, $p\left(z_k \mid Z_{k-1}\right)$ sırasıyla, olabilirlik fonksiyonu, durum öngörüm dağılımı ve ölçüm öngörüm dağılımı olarak adlandırılmaktadır (Ristic vd. 2004). Olabilirlik fonksiyonu, eşitlik (5.2)'de verilen ölçüm modeli ve ölçüm gürültüsü tarafından tanımlanmaktadır. Durum öngörüm dağılımı *k-1* anına kadar elde edilmiş olan bütün ölçümler ile gerçekleştirilen *k* anındaki durum vektörü tahminin dağılımını göstermektedir. Durum öngörüm dağılımı,

$p(x_{k-1} \mid Z_{k-1})$ dağılımına bağlı olarak Chapman–Kolmogorov eşitliğinden (Papaulis ve Pillai 2002) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$p(x_k \mid Z_{k-1}) = \int p(x_k \mid x_{k-1})\, p(x_{k-1} \mid Z_{k-1})\, dx_{k-1} \tag{5.4}$$

Benzer şekilde eşitlik (5.3)'te paydada yer alan $p(z_k \mid Z_{k-1})$ ölçüm öngörüm dağılımı eşitlik (5.4)'ü de kullanarak eşitlik (5.5)'teki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} p(z_k \mid Z_{k-1}) &= \int p(z_k \mid x_k)\, p(x_k \mid Z_{k-1})\, dx_k \\ &= \int p(z_k \mid x_k) \int p(x_k \mid x_{k-1})\, p(x_{k-1} \mid Z_{k-1})\, dx_{k-1} dx_k \end{aligned} \tag{5.5}$$

Durum sonsal dağılımının tam olarak bilinmesi/hesaplanması durum vektörünün istenilen kıstasa göre kestirimini olanaklı kılmaktadır. Durum vektörünün *k* anındaki MMSE ve MAP kestirimi sırasıyla eşitlik (5.6) ve (5.7)'de verilmiştir.

$$\hat{x}_{k|k}^{MMSE} = \int x_k\, p(x_k \mid Z_k)\, dx_k \tag{5.6}$$

$$\hat{x}_{k|k}^{MAP} = \arg\max_{x_k} \left\{ p(x_k \mid Z_k) \right\} \tag{5.7}$$

Bu noktada cevaplanmak istenen soru, bütün *k* anlarında durum sonsal dağılımının tek modlu simetrik dağılım olup olmadığıdır. Tek modlu simetrik dağılımların en bilineni Gauss dağılımı olup, ilerleyen bölümlerde durum sonsal dağılımının her *k* anı için Gauss dağılımlı olması durumu incelenmiştir. Eşitlik (5.1) ve (5.2) ile tarif edilen stokastik durum – uzay modelinde yer alan gürültü ve başlangıç koşulu için aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- Başlangıç durum vektörü parametreleri bilinen $x_0 \sim N(x_0; \mu_0, P_0)$ dağılımına sahiptir. Burada "*N*" çok değişkenli Gauss dağılım olup aşağıdaki gibi tarif edilmektedir.

$$N(y;\eta,\Sigma)=(2\pi)^{-n_y/2}\det(\Sigma)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\eta)^T\Sigma^{-1}(y-\eta)\right\}$$

Yukarıdaki ifadede , n_y y parametresinin boyutunu, *det*, matris determinantı ve *T*, matris transpozunu göstermektedir.

- Süreç gürültüsü parametreleri bilinen $v_k \sim N\left(v_k;0,\sigma_v^2\right)$ dağılımına sahiptir.
- Ölçüm gürültüsü parametreleri bilinen $w_k \sim N\left(w_k;0,\sigma_w^2\right)$ dağılımına sahiptir.
- $E\left[x_0 v_k\right]=0, \quad k=1,2,...$
- $E\left[x_0 w_k\right]=0, \quad k=1,2,...$
- $E\left[v_j w_k\right]=0, \quad j,k=1,2,...$
- $E\left[v_k v_j\right]=Q_k\delta_{kj}$, burada δ_{jk} Kronecker Delta fonksiyonudur.
- $E\left[w_k w_j\right]=R_k\delta_{kj}$

Yukarıdaki varsayımlar altında eşitlik (5.3)'te verilen sonsal dağılımın her *k* anında Gauss dağılımına sahip olması için, eşitliğin payında bulunan olabilirlik fonksiyonu ve durum öngörüm dağılımının çarpımının Gauss dağılımı ile orantılı olması (bir başka deyişle Gauss fonksiyonu olması) gerekmektedir. Eşitliğin paydasında bulunan integral bir standartlaştırma (normalizasyon) katsayısıdır ve durum sonsal dağılımın R^{n_x} üzerindeki integralinin bire eşit olmasını garanti etmektedir. Dolayısı ile paydada yer alan integral, durum sonsal dağılımının sahip olacağı dağılım fonksiyonunun türüne etki etmemektedir. Bu noktada öncelikle, iki Gauss fonksiyonunun çarpımının yine bir Gauss fonksiyonu olduğu ispatlanıp, daha sonra eşitlik (5.3)'te verilen olabilirlik ve durum öngörüm fonksiyonlarının Gauss fonksiyonu oldukları gösterilecektir.

Önerme 1: $f(x)$ ve $g(x)$ iki Gauss fonksiyonu olmak üzere $h(x)=f(x)g(x)$ de bir Gauss fonksiyonudur.

Ispat:

$a_f, b_f, a_g, b_g \in R$, $c_f, c_g \in R^+$ ve $\exp \triangleq e \approx 2,718281828$ (Euler sayısı) olmak üzere $f(x)$ ve $g(x)$ Gauss fonksiyonu (Abramowitz ve Stegun 1972) olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$f(x) = a_f \exp\left\{-\frac{\left(x-b_f\right)^2}{2c_f^2}\right\} \tag{5.8}$$

$$g(x) = a_g \exp\left\{-\frac{\left(x-b_g\right)^2}{2c_g^2}\right\} \tag{5.9}$$

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpımı

$$h(x) = f(x)g(x) = a_f a_g \exp\left\{-\frac{\left(x-b_f\right)^2}{2c_f^2} - \frac{\left(x-b_g\right)^2}{2c_g^2}\right\} \tag{5.10}$$

olup, eşitlik (5.10)'da yer alan üstel ifade eşitlik (5.11)'de verildiği şekli ile yeniden düzenlenebilir.

$$\frac{\left(x-b_f\right)^2}{2c_f^2} + \frac{\left(x-b_g\right)^2}{2c_g^2} = \frac{\left(c_f^2+c_g^2\right)x^2 - 2\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2\right)x + b_f^2 c_g^2 + b_g^2 c_f^2}{2c_f^2 c_g^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\dfrac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2\right)}{c_f^2+c_g^2}x + \dfrac{b_f^2 c_g^2 + b_g^2 c_f^2}{c_f^2+c_g^2}}{2\dfrac{c_f^2 c_g^2}{c_f^2+c_g^2}} \tag{5.11}$$

Eşitlik (5.11) karesel bir biçime sahiptir ve yine bir Gauss fonksiyonunu tarif etmektedir. Eşitlik (5.11)'in payına aşağıda α ile verilen terim eklenip çıkarılır ve pay ifadesi yeniden düzenlenirse

$$\alpha = \left[\frac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} \right]^2 \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(x - b_f \right)^2}{2c_f^2} + \frac{\left(x - b_g \right)^2}{2c_g^2} &= \frac{x^2 - 2\dfrac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} x + \dfrac{b_f^2 c_g^2 + b_g^2 c_f^2}{c_f^2 + c_g^2}}{2\dfrac{c_f^2 c_g^2}{c_f^2 + c_g^2}} + \\ &\quad \frac{\left[\dfrac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} \right]^2 - \left[\dfrac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} \right]^2}{2\dfrac{c_f^2 c_g^2}{c_f^2 + c_g^2}} \\ &= \frac{\left[x - \dfrac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} \right]^2}{2\dfrac{c_f^2 c_g^2}{c_f^2 + c_g^2}} - \beta, \qquad \beta = \left[\frac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} \right]^2 - \frac{b_f^2 c_g^2 + b_g^2 c_f^2}{c_f^2 + c_g^2} \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. Eşitlik (5.13), eşitlik (5.10)'da yerine yazılır ve ifade yeniden düzenlenirse iki Gauss fonksiyonunun çarpımı olan $h(x)$ fonksiyonu yine bir Gauss fonksiyonu olarak eşitlik (5.14)'te gibi elde edilir.

$$h(x) = a_f a_g \exp\left\{ -\frac{\left[x - \frac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} \right]^2}{2\frac{c_f^2 c_g^2}{c_f^2 + c_g^2}} - \beta \right\}$$

$$= a_f a_g e^{-\beta} \exp\left\{ -\frac{\left[x - \frac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2} \right]^2}{2\frac{c_f^2 c_g^2}{c_f^2 + c_g^2}} \right\} \qquad (5.14)$$

$$h(x) = a_h \exp\left\{ -\frac{(x - b_h)^2}{2c_h^2} \right\}$$

$$a_h = a_f a_g \exp(-\beta), \qquad b_h = \frac{\left(b_f c_g^2 + b_g c_f^2 \right)}{c_f^2 + c_g^2}, \qquad c_h = \left(\frac{c_f^2 c_g^2}{c_f^2 + c_g^2} \right)^{1/2}$$

Eşitlik (5.14) ile tanımlanan $h(x)$ üstel fonksiyonu $a_h, b_h \in R$, $c_h \in R^+$ şartlarını sağladığından bir Gauss fonksiyonudur. Bu sonuç kolayca ikiden fazla Gauss fonksiyonunun çarpımının da Gauss fonksiyonu olacağı sonucuna genelleştirilebilir.

5.1 Durum Öngörüm Dağılımının İncelenmesi

Eşitlik (5.4)'te verilen durum öngörüm dağılımı *k=1* anı için yeniden yazılarak eşitlik (5.15)'te verilmiştir. Başlangıç durumu ve gürültü süreçleri için yapılan varsayımlar ile eşitlik (5.1) kullanılarak, eşitlik (5.15)'te verilen integralde yer alan terimler Gauss dağılımı fonksiyonları türünden yazılarak eşitlik (5.16) ve (5.17) verilmiştir.

$$p(x_1 \mid Z_0) = \int p(x_1 \mid x_0)\, p(x_0 \mid Z_0)\, dx_0 \qquad (5.15)$$

$$p(x_1 \mid x_0) = (2\pi)^{-n_x/2} \det(Q_0)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - F_0 x_0)^T Q_0^{-1}(x_1 - F_0 x_0)\right\} \tag{5.16}$$

$$p(x_0 \mid Z_0) = p(x_0) = (2\pi)^{-n_x/2} \det(P_0)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)^T P_0^{-1}(x_0 - \mu_0)\right\} \tag{5.17}$$

Eşitlik (5.16) ve (5.17) kullanılarak $p(x_1 \mid Z_0)$ yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} p(x_1 \mid Z_0) &= \int p(x_1 \mid x_0)\, p(x_0 \mid Z_0)\, dx_0 \\ &= \int \left\{ (2\pi)^{-n_x/2} \det(Q_0)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1 - F_0 x_0)^T Q_0^{-1}(x_1 - F_0 x_0)\right] \mathrm{x} \right. \\ &\qquad \left. (2\pi)^{-n_x/2} \det(P_0)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)^T P_0^{-1}(x_0 - \mu_0)\right] \right\} dx_0 \\ &= C \int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - F_0 x_0)^T Q_0^{-1}(x_1 - F_0 x_0) - \frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)^T P_0^{-1}(x_0 - \mu_0)\right\} dx_0 \\ C &= (2\pi)^{-n_x/2} \det(Q_0)^{-1/2} (2\pi)^{-n_x/2} \det(P_0)^{-1/2} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Burada C x_0'dan bağımsız olan katsayıların tamamını göstermektedir ve integralin dışına alınmıştır. Eşitlik (5.18)'de verilen integral ifadesinde, üstel fonksiyonun üs kısmı yeniden düzenlenerek eşitlik (5.23)'te $p(x_1 \mid Z_0)$ yeniden yazılmıştır.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}(x_1 - F_0 x_0)^T Q_0^{-1}(x_1 - F_0 x_0) - \frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)^T P_0^{-1}(x_0 - \mu_0) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 - x_0^T F_0^T Q_0^{-1} x_1 - x_1^T Q_0^{-1} F_0 x_0 + x_0^T F_0^T Q_0^{-1} F_0 x_0 + \right. \\ &\qquad \left. x_0^T P_0^{-1} x_0 - \mu_0^T P_0^{-1} x_0 - x_0^T P_0^{-1} \mu_0 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right) - \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} -x_0^T F_0^T Q_0^{-1} x_1 - x_1^T Q_0^{-1} F_0 x_0 + \\ x_0^T Q_{1|0}^{-1} x_0 - \mu_0^T P_0^{-1} x_0 - x_0^T P_0^{-1} \mu_0 \end{array} \right) \\ Q_{1|0}^{-1} &= F_0^T Q_0^{-1} F_0 + P_0^{-1} \end{aligned} \tag{5.19}$$

Eşitlik (5.19) ile verilen α ifadesi aşağıdaki özdeşlikler kullanılarak daha sade hale dönüştürülebilir.

$$
\begin{aligned}
x_1^T Q_0^{-1} F_0 x_0 &= \left(x_1^T Q_0^{-1} F_0 x_0 \right)^T = x_0^T F_0^T Q_0^{-1} x_0 \\
x_0^T P_0^{-1} \mu_0 &= \left(x_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right)^T = \mu_0^T P_0^{-1} x_0
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right) - \frac{1}{2}\left(-2 x_1^T Q_0^{-1} F_0 x_0 + x_0^T Q_{1|0}^{-1} x_0 - 2\mu_0^T P_0^{-1} x_0 \right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right) - \left[\left(x_1^T Q_0^{-1} F_0 + \mu_0^T P_0^{-1} \right) x_0 - \frac{1}{2} x_0^T Q_{1|0}^{-1} x_0 \right]
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

elde edilir. Eşitlik (5.21) ve aşağıda tanımlanan değişkenler kullanılarak eşitlik (5.18) ile verilen integral daha tanıdık bir forma dönüştürülüp eşitlik (5.23)'te verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
A &= Q_{1|0}^{-1} \\
J^T &= \left(x_1^T Q_0^{-1} F_0 + \mu_0^T P_0^{-1} \right)
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(x_1 \mid Z_0 \right) &= C \int \exp\left(\alpha \right) dx_0 \\
\alpha &= -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right) - \left(J^T x_0 - \frac{1}{2} x_0^T A x_0 \right) \\
P\left(x_1 \mid Z_0 \right) &= C \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right) \right\} \int \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^T A x_0 + J^T x_0 \right) dx_0 \\
&= C_1 \int \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^T A x_0 + J^T x_0 \right) dx_0, \quad C_1 = C \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

$P\left(x_1 \mid Z_0 \right)$ fonksiyonunu tanımlayan integral Gauss integrali formundadır. Gauss integrallerinin yapısı ve özellikleri kısa ve öz bir şekilde (Straub 2009)'da verilmiştir. (Straub 2009)'da verilen sonuçlar kullanılarak eşitlik (5.23)'teki integral hesaplanırsa

$$P(x_1 \mid Z_0) = C_1 \int \exp\left(-\frac{1}{2} x_0^T A x_0 + J^T x_0\right) dx_0$$
$$= C_1 \frac{(2\pi)^{n_x/2}}{\det(A)^{1/2}} \exp\left(\frac{1}{2} J^T A^{-1} J\right) \tag{5.24}$$

şeklinde elde edilir. C_1 ve J ifadeleri yerine konulup eşitlik (5.24) yeniden düzenlenirse

$$P(x_1 \mid Z_0) = C_1 \frac{(2\pi)^{n_x/2}}{\det(A)^{1/2}} \exp\left(\frac{1}{2} J^T A^{-1} J\right)$$
$$= C \frac{(2\pi)^{n_x/2}}{\det\left(\left(F_0^T Q_0^{-1} F_0 + P_0^{-1}\right)^{-1}\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0\right)\right\} \text{x} \tag{5.25}$$
$$\exp\left\{\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} F_0 + \mu_0^T P_0^{-1}\right)\left(F_0^T Q_0^{-1} F_0 + P_0^{-1}\right)\left(x_1^T Q_0^{-1} F + \mu_0^T P_0^{-1}\right)^T\right\}$$

elde edilir. Eşitlik (5.25) bu hali ile Gauss fonksiyonuna benzememektedir. Eşitlite, üstel fonksiyonun üs kısmında bazı cebirsel manevralar (algebraic manipulations) yaparak ifadeyi daha sade hale getirmek mümkündür. İfadenin üs kısmındaki çarpımlar açılarak yazılırsa eşitlik (5.26) elde edilir.

$$\alpha' = -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0\right) +$$
$$\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} F_0 + \mu_0^T P_0^{-1}\right)\left(F_0^T Q_0^{-1} F_0 + P_0^{-1}\right)\left(x_1^T Q_0^{-1} F + \mu_0^T P_0^{-1}\right)^T$$
$$= -\frac{1}{2} x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \frac{1}{2} x_1^T Q_0^{-1} F_0 \left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} F_0^T Q_0^{-1} x_1 + \tag{5.26}$$
$$-\frac{1}{2} \mu_0^T P_0^{-1} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^T P_0^{-1} \left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} P_0^{-1} \mu_0 +$$
$$\frac{1}{2} x_1^T Q_0^{-1} F_0 \left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} P_0^{-1} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_0^T P_0^{-1} \left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} F_0^T Q_0^{-1} x_1$$

Eşitlik (5.26)'ya aşağıda verilen 1, 2, 3 numaralı ifadeler eklenip çıkarılarak daha sade bir ifade elde etmek için gerekli alt yapı oluşturulabilir. Sadeleştirmenin yapılabilmesi için gerekli bir başka yardımcı araç, matris tersi özdeşliğidir ve eşitlik (5.27)'de verilmiştir.

$$-\frac{1}{2}\mu_0^T F_0^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} F_0 \mu_0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} x_1^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} F_0 \mu_0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}\mu_0^T F_0^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} x_1 \qquad (3)$$

$$(1)+(2)+(3) = -\frac{1}{2}\left(x_1 - F_0\mu_0\right)^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} \left(x_1 - F_0\mu_0\right) + \frac{1}{2} x_1^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} x_1$$

$$\left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} = Q_0^{-1} - Q_0^{-1} F_0 \left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} F_0^T Q_0^{-1} \qquad (5.27)$$

Eşitlik (5.26)'nin gerekli cebirsel manevralar kullanılarak sadeleştirilmesi aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

$$\begin{aligned}
\alpha' = & -\frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} x_1 + \mu_0^T P_0^{-1}\mu_0\right) + \\
& \frac{1}{2}\left(x_1^T Q_0^{-1} F_0 + \mu_0^T P_0^{-1}\right)\left(F_0^T Q_0^{-1} F_0 + P_0^{-1}\right)\left(x_1^T Q_0^{-1} F + \mu_0^T P_0^{-1}\right)^T \\
= & -\frac{1}{2} x_1^T \left[Q_0^{-1} - Q_0^{-1} F_0 \left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} F_0^T Q_0^{-1}\right] x_1 + \qquad (i) \\
& -\frac{1}{2}\mu_0^T P_0^{-1}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_0^T P_0^{-1}\left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} P_0^{-1}\mu_0 + \qquad (ii) \qquad (5.28) \\
& \frac{1}{2} x_1^T Q_0^{-1} F_0 \left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} P_0^{-1}\mu_0 + \qquad (iii) \\
& \frac{1}{2}\mu_0^T P_0^{-1}\left(P_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0\right)^{-1} F_0^T Q_0^{-1} x_1 \qquad (iv) \\
& -\frac{1}{2}\left(x_1 - F_0\mu_0\right)^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} \left(x_1 - F_0\mu_0\right) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x_1^T\left(Q_0+F_0P_0F_0^T\right)^{-1}x_1 \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{2}\mu_0^TF_0^T\left(Q_0+F_0P_0F_0^T\right)^{-1}F_0\mu_0 \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{2}x_1^T\left(Q_0+F_0P_0F_0^T\right)^{-1}F_0\mu_0 \qquad (3)$$

$$-\frac{1}{2}\mu_0^TF_0^T\left(Q_0+F_0P_0F_0^T\right)^{-1}x_1 \qquad (4)$$

Eşitlik (5.28)'de (*i*) ve (*1*) ifadeleri birbirine eşit ve ters işaretli olduğu eşitlik (5.27)'de verilen matris tersi özdeşliği kullanılarak kolayca gösterilebilir. Benzer ilişkiler (*ii*) – (*2*), (*iii*) – (*3*) ve (*iv*) – (*4*) ifadeleri arasında da vardır. Ancak bu ilişki kolayca görülmemektedir. Bu ifadeler arasındaki ilişki matris tersi özdeşliği kullanılarak ve ifadeler beraber işleme alınarak sıra ile gösterilecektir.

(*ii*) – (*2*)

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\mu_0^TP_0^{-1}\mu_0+\frac{1}{2}\mu_0^TP_0^{-1}\left(P_0^{-1}+F_0^TQ_0^{-1}F_0\right)^{-1}P_0^{-1}\mu_0\\
&+\frac{1}{2}\mu_0^TF_0^TQ_0^{-1}F_0\mu_0-\frac{1}{2}\mu_0^TF_0^TQ_0^{-1}F_0\left(P_0^{-1}+F_0^TQ_0^{-1}F_0\right)^{-1}F_0^TQ_0^{-1}F_0\mu_0\\
&=-\frac{1}{2}\mu_0^T\left(P_0^{-1}-F_0^TQ_0^{-1}F\right)\mu_0+\\
&\quad-\frac{1}{2}\mu_0^T\left[F_0^TQ_0^{-1}F_0\left(P_0^{-1}+F_0^TQ_0^{-1}F_0\right)^{-1}F_0^TQ_0^{-1}F_0-P_0^{-1}\left(P_0^{-1}+F_0^TQ_0^{-1}F_0\right)^{-1}P_0^{-1}\right] \qquad (5.29)\\
&=-\frac{1}{2}\mu_0^T\left(P_0^{-1}-F_0^TQ_0^{-1}F\right)\mu_0+\\
&\quad-\frac{1}{2}\mu_0^T\left[\left(P_0^{-1}+F_0^TQ_0^{-1}F\right)\left(P_0^{-1}+F_0^TQ_0^{-1}F_0\right)^{-1}\left(F_0^TQ_0^{-1}F-P_0^{-1}\right)\right]\mu_0 \qquad (*)\\
&=-\frac{1}{2}\mu_0^T\left(P_0^{-1}-F_0^TQ_0^{-1}F\right)\mu_0+\frac{1}{2}\mu_0^T\left(P_0^{-1}-F_0^TQ_0^{-1}F\right)\mu_0\\
&=0
\end{aligned}$$

(*) ifadesi eşitlik (5.20)'de verilen özdeşliklerin benzerinin bu ifadeye uygulanması ile elde edilmiştir.

(*iii*) – (*3*)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x_1^T Q_0^{-1}F_0\left(P_0^{-1}+F_0^T Q_0^{-1}F_0\right)^{-1}P_0^{-1}\mu_0-\frac{1}{2}x_1^T Q_0^{-1}F_0\mu_0+\\
&\frac{1}{2}x_1^T Q_0^{-1}F_0\left(P_0^{-1}+F_0^T Q_0^{-1}F_0\right)^{-1}F_0^T Q_0^{-1}F_0\mu_0\\
&=-\frac{1}{2}x_1^T Q_0^{-1}F_0\mu_0+\frac{1}{2}x_1^T Q_0^{-1}F_0\left(P_0^{-1}+F_0^T Q_0^{-1}F_0\right)^{-1}\left(P_0^{-1}+F_0^T Q_0^{-1}F_0\right)\mu_0\\
&=-\frac{1}{2}x_1^T Q_0^{-1}F_0\mu_0+\frac{1}{2}x_1^T Q_0^{-1}F_0\mu_0\\
&=0
\end{aligned} \tag{5.30}$$

(*iv*) – (*4*)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mu_0^T P_0^{-1}\left(P_0^{-1}+F_0^T Q_0^{-1}F_0\right)^{-1}F_0^T Q_0^{-1}x_1-\frac{1}{2}\mu_0^T F_0^T Q_0^{-1}x_1+\\
&\frac{1}{2}\mu_0^T F_0^T Q_0^{-1}F_0\left(P_0^{-1}+F_0^T Q_0^{-1}F_0\right)^{-1}F_0^T Q_0^{-1}x_1\\
&=-\frac{1}{2}\mu_0^T F_0^T Q_0^{-1}x_1+\frac{1}{2}\mu_0^T\left(P_0^{-1}+F_0^T Q_0^{-1}F_0\right)^{-1}\left(F_0^T Q_0^{-1}F_0+P_0^{-1}\right)F_0^T Q_0^{-1}x_1\\
&=-\frac{1}{2}\mu_0^T F_0^T Q_0^{-1}x_1+\frac{1}{2}\mu_0^T F_0^T Q_0^{-1}x_1\\
&=0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

α' ifadesi eşitlik (5.29) – (5.30) – (5.31)'de elde edilen sonuçlar kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\alpha'=-\frac{1}{2}\left(x_1-F_0\mu_0\right)^T\left(Q_0+F_0P_0F_0^T\right)^{-1}\left(x_1-F_0\mu_0\right) \tag{5.32}$$

elde edilir. α' ve *C* ifadeleri eşitlik (5.25)'te yerine konulup, $P(x_1 \mid Z_0)$ aşağıdaki gibi yazılabilir. Eşitlik (5.33)'te verilen $P(x_1 \mid Z_0)$ fonksiyonu bir Gauss fonksiyonudur.

$$
\begin{aligned}
P(x_1 \mid Z_0) &= (2\pi)^{-n_x} \det(Q_0)^{-1/2} \det(P_0)^{-1/2} \frac{(2\pi)^{n_x/2}}{\det\left(F_0^T Q_0^{-1} F_0 + P_0^{-1}\right)^{-1/2}} \text{x} \\
&\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - F_0\mu_0)^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} (x_1 - F_0\mu_0)\right\} \\
&= \frac{\det(Q_0)^{-1/2} \det(P_0)^{-1/2}}{(2\pi)^{n_x/2} \det\left(F_0^T Q_0^{-1} F_0 + P_0^{-1}\right)^{-1/2}} \text{x} \\
&\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - F_0\mu_0)^T \left(Q_0 + F_0 P_0 F_0^T\right)^{-1} (x_1 - F_0\mu_0)\right\}
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

k=1 anı için yapılan işlemler ile elde edilen bu sonuç, iki Gauss fonksiyonunun integralinin yine Gauss fonksiyonu olduğunu göstermiştir. Elde edilen sonucun bütün *k* anlarına genelleştirilmesi eşitlik (5.4)'te verilen $P(x_k \mid Z_{k-1})$ fonksiyonu oluşturan bileşenlerin yeniden incelenmesi ile yapılabilir. $P(x_k \mid Z_{k-1})$ fonksiyonu durum değişkeninin *k-1* anında *k* anına geçişini modelleyen $P(x_k \mid x_{k-1})$ ve durum değişkeninin *k-1* anındaki sonsal dağılımını belirleyen $P(x_{k-1} \mid Z_{k-1})$ fonksiyonlarından oluşmaktadır. $P(x_k \mid x_{k-1})$ fonksiyonu eşitlik (5.1) ile tarif edilen stokastik durum denklemine bağlı bir fonksiyondur. Stokastik durum denklemi için yapılan varsayımlar bu fonksiyonun eşitlik (5.16)'da verildiği gibi Gauss dağılımı fonksiyonu ile modellenmesine olanak sağlamaktadır. Bir başka deyişle her *k* anı için $P(x_k \mid x_{k-1})$ eşitlik (5.1) ve çalışmada yapılan varsayımlar kullanılarak

$$
p(x_k \mid x_{k-1}) = N(x_k ; F_{k-1} x_{k-1}, Q_{k-1}) \tag{5.34}
$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, eşitlik (5.33) ile verilen sonucun her *k* anı için geçerli olması için tek şart $P(x_{k-1} \mid Z_{k-1})$ durum sonsal dağılımının Gauss dağılımı olması ya

da Gauss dağılımı olarak modellenebilmesidir. Bu bölümde ulaşılmaya çalışılan sonuç olan durum sonsal dağılımın Gauss dağılımına sahip olması durumu, eşitlik (5.3)'te verilen olabilirlik fonksiyonunun Gauss fonksiyonu olduğu ya da Gauss fonksiyonu olarak modellenebileceği gösterilerek, önerme (5.1) ve eşitlik (5.33)'te verilen sonuç kullanılarak kanıtlanabilir.

5.2 Olabilirlik Fonksiyonunun İncelenmesi

Bayesçi istatistiksel çıkarımda, durum sonsal dağılımı önsel bilginin (prior information) olabilirlik fonksiyonu kullanılarak değiştirilmesiyle elde edilmektedir. Olabilirlik fonksiyonu ölçümden gelen bilginin durum sonsal dağılımının oluşturulması sürecine katılmasını sağlayan fonksiyondur. Bu çalışmada incelenen sistemin olabilirlik fonksiyonu, eşitlik (5.1) ve (5.2)'de verilen sistem durum – uzay modelinin ölçüm denkleminin bir fonksiyonudur. Dolayısı ile olabilirlik fonksiyonu hem doğrusal olmayan ölçüm fonksiyonuna hem de istatistikî özellikleri bilinen ölçüm gürültüsüne bağlıdır. Ölçüm gürültüsünün istatistiksel özellikleri bu bölüm başında yapılan varsayımlarda verilmişti. Tez çalışmasında incelenen multistatik radar sisteminde ölçümlerin bistatik menzil ve bistatik menzil-hızı (bistatik menzilin değişim hızı) olduğu varsayılmıştı. Dolayısı ile eşitlik (5.2)'de verilen doğrusal olmayan ölçüm fonksiyonu alıcı, verici ve hedef arasındaki ilişkiyi kurarak bistatik menzil ve mezil-hızı ölçümlerini modelleyecek şekilde oluşturulmuştur.

k anındaki hedef durum vektörü x_k 3B Kartezyen uzayda eşitlik (5.35) ile tanımlanmıştır.

$$x_k = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_k & \dot{\mathrm{x}}_k & \mathrm{y}_k & \dot{\mathrm{y}}_k & \mathrm{z}_k & \dot{\mathrm{z}}_k \end{bmatrix}^T \tag{5.35}$$

Burada $\dot{\mathrm{x}}_k$ x_k'nın zamana göre türevi, bir başka deyişle Kartezyen hız vektörünün x yönündeki bileşenini göstermektedir. Benzer şekilde $\dot{\mathrm{y}}_k$ ve $\dot{\mathrm{z}}_k$ da ilgili yönlerdeki hız bileşenleridir. Multistatik radar sisteminde yer alan alıcılara ve vericilere ait konumlar 3B Kartezyen uzayda eşitlik (5.36)'da tanımlanmıştır.

$$L_r^i = [\mathrm{x}_r^i \quad \mathrm{y}_r^i \quad \mathrm{z}_r^i]^T, \qquad i = 1,\ldots,N$$
$$L_t^j = [\mathrm{x}_t^j \quad \mathrm{y}_t^j \quad \mathrm{z}_t^j]^T, \qquad j = 1,\ldots,M \tag{5.36}$$

Burada L_r^i *i.* alıcının konumunu, L_t^j *j.* vericinin konumunu, *N* alıcı sayısı ve *M* verici sayısını göstermektedir. Eşitlik (5.35) ve (5.36) kullanılarak *k* anında *i.* alıcı ve *j.* verici çiftinden elde edilecek ölçüm için ölçüm fonksiyonu eşitlik (5.37)'de verilmiştir. Eşitlik (5.37)'de R_k, $\dot{R}_k$, $R_{r,k}^i$, $R_{t,k}^j$, $\dot{R}_{r,k}^i$, $\dot{R}_{t,k}^j$ sırasıyla bistatik menzil, bistatik menzil-hızı, *k* anında *i.* alıcı ile hedef arasındaki menzil, *k* anında *j.* verici ile hedef arasındaki menzil, *k* anında *i.* alıcı ile hedef arasındaki menzilin değişim hızı ve *k* anında *j.* verici ile hedef arasındaki menzilin değişim hızıdır. Ayrıca, ölçüm fonksiyonu oluşturulurken, ölçüm fonksiyonu girdilerinden olan alıcı ve verici konumlarının zamanla değişmediği ve kesin olarak bilindiği varsayılmıştır. Rasgele değişken x_k'nın bir fonksiyonu olan ölçüm fonksiyonu, bu değişkeni bir başka vektör değerli rasgele değişkene dönüştürmekte ve olabilirlik fonksiyonu, her bir *k* anında ölçüm fonksiyonunun ürettiği rasgele değişken ile ölçüm gürültüsü w_k'ya bağlı bir fonksiyon olmaktadır. Bu fonksiyonun analitik olarak yazılabilmesi için ölçüm fonksiyonunun ürettiği rasgele değişkenin dağılımının analitik olarak yazılması gerekmektedir.

$$h_k^{ij}\left(x_k, L_r^i, L_t^j\right) = \begin{bmatrix} R_k \\ \dot{R}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{r,k}^i + R_{t,k}^j \\ \dot{R}_{r,k}^i + \dot{R}_{t,k}^j \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_{r,k}^i &= \sqrt{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_r^i)^2 + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_r^i)^2 + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_r^i)^2} \\ R_{t,k}^j &= \sqrt{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_t^j)^2 + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_t^j)^2 + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_t^j)^2} \\ \dot{R}_{r,k}^i &= \frac{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_r^i)\dot{\mathrm{x}}_k + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_r^i)\dot{\mathrm{y}}_k + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_r^i)\dot{\mathrm{z}}_k}{R_r^i} \\ \dot{R}_{t,k}^j &= \frac{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_t^j)\dot{\mathrm{x}}_k + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_t^j)\dot{\mathrm{y}}_k + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_t^j)\dot{\mathrm{z}}_k}{R_{t,k}^j} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Alıcı ve verici konumlarının sabit olduğu varsayımı altında, eşitlik (5.37) ile verilen ölçüm fonksiyonu n_x-değişkenli Normal (Gauss) dağılıma sahip olan x_k durum vektörünün bir fonksiyonudur. Durum vektörü x_k n_x-değişkenli Normal dağılıma sahip olduğundan, x_k'nın her bir bileşeni de tek değişkenli Normal dağılıma sahiptir (Giri 2004). Dolayısı ile Normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerin doğrusal olmayan katışımları (combination) ölçüm fonksiyonunu oluşturmaktadır. Bu fonksiyonun çıktısı olan bistatik menzil ve menzil-hızı değişkenlerinin dağılımı için ulaşılabilen literatürde kesin bir ifade bulunamamıştır. Ölçüm fonksiyonun çıktıları olan bistatik menzil ve mezil-hızı rasgele değişkenlerinin dağılımlarının, bu rasgele değişkenleri oluşturan diğer değişkenlerin (durum vektörünün bileşenleri) cebiri (Melvin 1979) yoluyla tarif etmek, eşitlik (5.37)'nin içerdiği matematiksel operasyonlar nedeniyle oldukça zordur. Bistatik menzil ve menzil-hızı rasgele değişkenlerinin dağılımının cebirsel çıkarım yolu yerine benzetim yolu ile de belirlenebilir. Çalışmada durum vektörünün dağılımının bilinmesi ve bu dağılımdan rasgele sayı üretilebiliyor olması durumundan faydalanılarak, durum vektörünün doğrusal olmayan dönüşümü sonrasında oluşan yeni rasgele değişkenlerin dağılımları benzetim yolu ile belirlenmiştir. Eşitlik (5.37) ile verilen doğrusal olmayan dönüşümün hem alıcı hem de verici konumu ile beraber durum vektörüne bağlı olması nedeniyle, farklı alıcı – verici konumlarında durum vektörünün değeri değişirken bistatik menzil ve menzil-hızı rasgele değişkenlerinin dağılımları incelenmiştir. Dağılım fonksiyonlarının belirlenmesi amacıyla bir benzetim ortamı hazırlanmıştır. Benzetim ortamı oluşturulurken alıcı, verici ve durum vektörü için aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- Benzetim ortamında altı adet alıcı bulunmaktadır ve alıcılar XY düzleminde bulunan 30km yarıçaplı çember üzerinde aralarında 60 derece açıklık olacak şekilde konumlandırılmıştır (Bölüm ^'te verilen sonuçlardan faydalanılmıştır).
- Benzetim ortamında bir adet verici bulunmaktadır ve verici alıcıların üzerinde yer aldığı hayali çemberin merkezinde yer alacak şekilde konumlandırılmıştır.
- Alıcıların ve vericilerin irtifaları 0km olduğu varsayılmıştır.
- Durum vektörünün X ve Y konum bileşenlerinin, alıcıların üzerinde bulunduğu varsayılan hayali çemberi kapsayan, merkezi çember merkezi ile çakışık olan 80km kenar uzunluğuna sahip kare ızgara üzerinde değiştiği varsayılmıştır.

- Izgaranın X ekseni yönünde 100m'lik parçalardan oluştuğu, Y ekseni yönünde ise 1000m'lik parçalardan oluştuğu varsayılmıştır.
- Durum vektörünün Z bileşenin sabit ve değerinin 5km olduğu varsayılmıştır.
- Durum vektörünün hız bileşenlerinin $\begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100 & 0 & 0\end{bmatrix} m/sn$ olduğu varsayılmıştır.

Yukarıda verilen varsayımlar ile oluşturulan benzetim ortamında ızgara üzerindeki her bir noktada durum vektörünün dağılımı $N(x_i, P)$ olarak modellenmiştir. Burada x_i ve P sırasıyla durum vektörünün ızgaranın *i.* noktasındaki değeri ve durum vektörünün kovaryansı olup, kovaryans, eşitlik (5.38)'de verilmiştir.

$$P = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Benzetimlerde, ızgaranın her bir noktasında $N(x_i, P)$ dağılımından 10000 değer üretilerek bu değerler *h(.)* fonksiyonuna uygulanmış ve ilgili nokta için bistatik menzil ve menzil hızı rasgele değişkenlerinin örneklem kümesi bulunmuştur. Bistatik menzil ve menzil-hızı için bulunan değerlerin histogramları (Pearson 1895) incelendiğinde her iki nicelik içinde Gauss dağılımına benzer histogramlar gözlenmiştir. Bu gözleme dayanarak durum vektöründen üretilen örneklerin dönüşümü yoluyla elde edilen örneklem kümesinin Gauss dağılımını temsil edip etmediği istatistiksel uyum iyiliği testi (goodness of fit) (Gentle 2010) yapılarak belirlenmiştir. Uyum iyiliği testleri, eldeki örneklem kümesinin ilgilenilen istatistiksel modele uygunluğunun ölçmektedir. Bu testlerde örneklemin önerilen model ile uyumlu olduğu sıfır hipotezi (null hypothesis – H_0) ile tanımlanmakta ve H_0, $1-\alpha$ anlamlılık düzeyi ile kabul edilmektedir. Burada α [0,1] aralığında bir sayı olup, örneklemin önerilen dağılımdan geldiği bilinirken H_0 hipotezinin reddedilme olasılığıdır. Casella ve Berger (1990)'da α değerinin anlamı, seçimi ve nasıl yorumlanması gerektiği detaylı olarak verilmiştir.

Gauss dağılım modeline uyumluluk için en güçlü uyum iyiliği testlerinden biri Anderson – Darling testidir (Anderson ve Darling 1952, Anderson ve Darling 1954). Anderson – Darling uyum iyiliği testi, görgül olasılık fonksiyonu (Empirical Probablity Function – EDF) temeline dayanmaktadır ve EDF temeline dayanan diğer testlere göre kuyruk olasılıklarına (tail probability) daha fazla ağırlık vermektedir. Bu testin EDF'yi kullanan diğer testler ile karşılaştırılması ve Gauss dağılımı için bu testin güçlü bir test olduğu (Stephens 1974)'te gösterilmiştir.

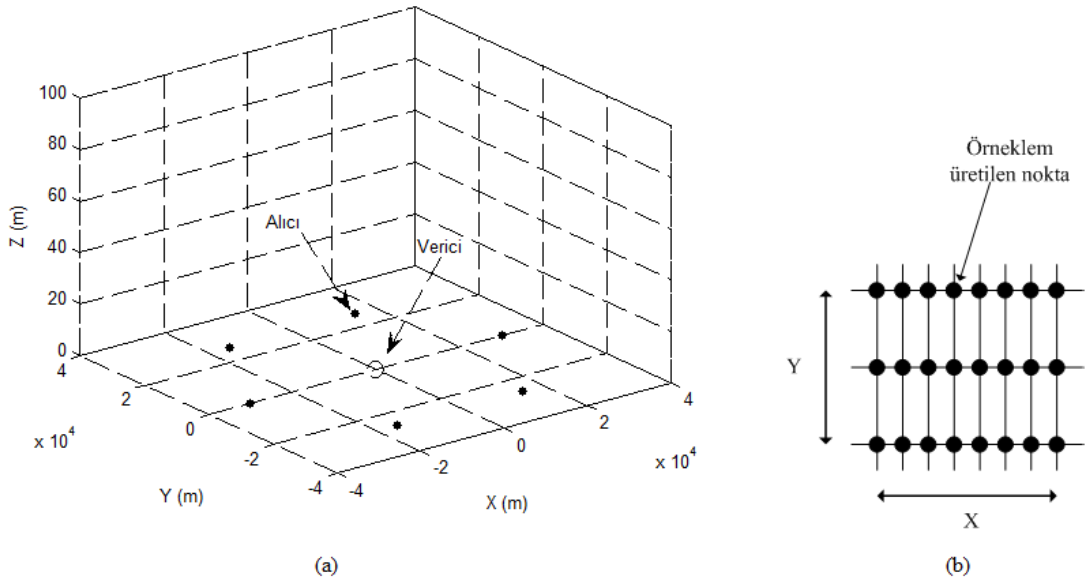
Anderson – Darling testi, EDF'in karesi ile ilişkili olan, EDF ile önerilen olasılık dağılım fonksiyonu arasındaki mesafeyi ölçen bir test istatistiğine sahiptir ve eşitlik (5.39)'da test istatistiği verilmiştir.

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(F_n(x) - F(x)\right)^2}{\left[F(x)\left(1-F(x)\right)\right]} dF(x) \tag{5.39}$$

Burada $F(x)$ ve $F_n(x)$ sırasıyla, önerilen olasılık dağılım fonksiyonu ve *n* adet örnekten oluşan örneklem üzerinde tanımlanan EDF'dir. Eşitlik (5.39)'da verilen istatistiğin olasılık dağılım fonksiyonunun bulunması üzerine bir çalışma (Lewis 1961)'de verilmiştir. Bu çalışmada nümerik integral hesaplama yöntemleri kullanılarak örneklemin eleman sayısı $n \leq 8$ durumlarında Anderson – Darling istatistiği için olasılık tabloları verilmiş ve (Anderson ve Darling 1954)'te verilen kritik değerler doğrulanmıştır. $n > 8$ durumu için test istatistiğinin dağılımına bir yaklaşım (Marsaglia 2004)'te verilmiştir. Bu çalışmada, limit durumdaki olasılık dağılım fonksiyonuna bir yaklaşım verilmiş ve bu yaklaşımdan faydalanılarak her hangi bir *n* değeri için olasılık değeri tarif edilmiştir.

Tez çalışmasında doğrusal olmayan *h(.)* fonksiyonu aracılığı ile dönüşüme uğramış örneklem kümesinin Gauss dağılımına sahip olup olmadığı Anderson – Darling testi yapılarak incelenmiştir. Test için hazırlanan benzetim ortamında, her bir nokta da 10000 örneklik örneklem yaratılarak, bu kümenin Gauss dağılımını sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir. Bu işlem her bir nokta 100 kere tekrar edilerek test sonuçlarının ortalaması hesaplanmıştır. Benzetim ortamında yer alan alıcı – verici konumları şekil

5.1.a'da, oluşturulan ızgara yapısı için örnek gösterim şekil 5.1.b'de verilmiştir.



Şekil 5.1 Örnek benzetim ortamı: a. Alıcı – Verici konumları, b. XY düzleminde 3x8 boyutunda örnek ızgara

Şekil 5.1.a'da gösterilen alıcıların ve vericinin 3B Kartezyen uzaydaki varsayılan konumları çizelge 5.1'de verilmiştir. Şekil 5.1.b'de gösterilen her bir siyah nokta, benzetimler için yapılan varsayımlarda tanımlanan x_i durum vektörünü temsil etmektedir.

Çizelge 5.1 Alıcı ve verici konumları

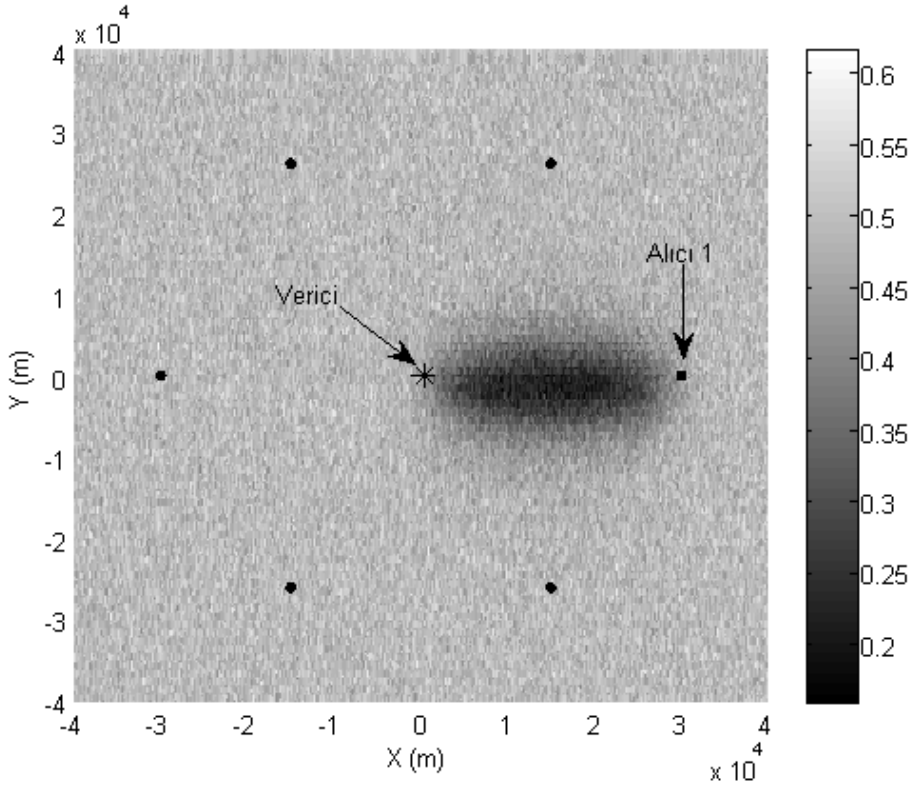
	Alıcı 1	Alıcı 2	Alıcı 3	Alıcı 4	Alıcı 5	Alıcı 6	Verici 1
X	30000m	15000m	-15000m	-30000m	-15000m	15000m	0m
Y	0m	25981m	25981m	0m	-25981m	-25981m	0m
Z	0m	0m	0m	0m	0m	0m	0m

x_i durum vektörünün dağılımından üretilen rasgele sayılar, benzetim ortamında modellenen altı alıcı – verici çifti için eşitlik (5.37) kullanılarak bistatik menzil ve menzil hızı değerlerine dönüştürülmüştür. Böylelikle her bir ölçüm için altı farklı örneklem kümesi elde edilmiştir. Örneklem kümeleri ayrı ayrı uyum iyiliği testine tabi tutularak, 100 Monte Carlo benzetimi ile her bir nokta da her bir örneklem seti için

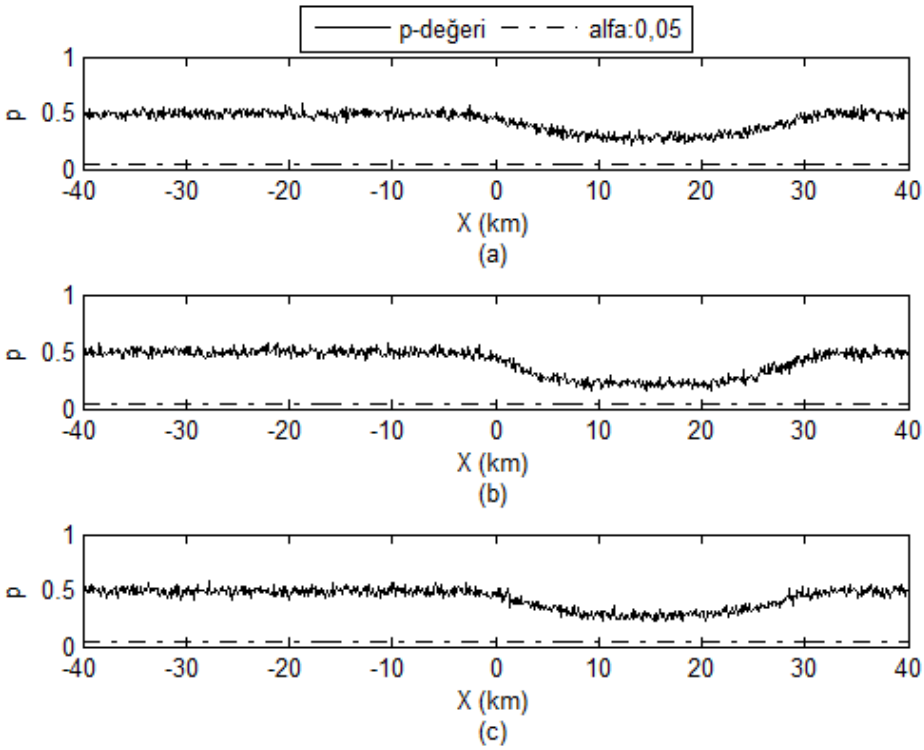
ortalama test sonuçları elde edilmiştir. Testlerde $\alpha = 0,05$ değeri kullanılmıştır. Sonuçlar; her bir alıcı – verici çifti için bütün test noktalarında elde edilen p-değerlerinin, test edilen noktaların X-Y konumları kullanılarak oluşturulan ızgara üzerine yazılması yoluyla resimler olarak düzenlenmiştir. p-değeri Johnson (1999)'un çalışmasında H_0 hipotezinin doğru olduğu verildiğinde, örneklemin olasılığı olarak tarif edilmiştir.

$$p = \Pr\left(Örneklem \mid H_0 : doğru\right) \tag{5.40}$$

p-değerinin bu çalışmada yapılan uyum iyiliği testindeki karşılığı, Anderson – Darling testi istatistiğinin H_0 hipotezinin doğru olduğu varsayımı altındaki olasılığıdır. Bu değerin α değerinden büyük olması, H_0 hipotezinin reddedilemeyeceğini göstermektedir. Şekil 5.2'de *Alıcı 1* ile yapılan benzetimlerde bistatik menzil için elde edilen p-değerleri verilmiştir. Şekil üzerinde alıcı ve verici konumlarının XY düzlemine izdüşümleri sırasıyla siyah noktala ve siyah yıldız ile gösterilmiştir. *Alıcı 1* ile yapılan benzetimlerde bistatik menzil için elde edilen p-değerlerinin, *Alıcı 1* ile verici arasında kalan test noktalarında diğer yerlere göre daha düşük değerler aldığı gözlenmiştir. Ancak, şekil 5.2'de koyu renkli olarak gösterilen bu bölgede dahi p-değeri $\alpha = 0,05$ değerinin altına düşmemiştir. Benzetimlerde en düşük p-değeri 0,1588 olarak gerçekleşmiştir. p-değerlerinin daha düşük olduğu bölgeden alınan kesitlerde gözlenen p-değeri değişimleri şekil 5.3'te verilmiştir. Şekil 5.3.a'da test noktalarının Y bileşenlerinin ortalama değerinin 3km olduğu durum gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi test noktalarının X bileşenleri 0 – 30km arasında değişirken bu noktalarda hesaplanan p-değerleri diğer yerlere göre azalmakta ancak kesikli çizgiler ile gösterilen $\alpha = 0,05$ değerinin altına inmemektedir. Test noktalarının Y bileşeninin ortalamasının 0km ve -3km olduğu durumlar için elde edilen sonuçlar sırasıyla şekil 5.3.b, c'de verilmiştir. Bu noktalarda alınan kesitlerde de, *Alıcı 1* ile verici arasında kalan bölümü temsil eden X eksenin 0 – 30km arasında kalan kısmında p-değerlerinin azaldığı gözlenmiştir. Burada da şekil 5.3.a ile uyumlu olarak p-değerleri hiçbir noktada belirlenen α değerinin altında gerçekleşmemiştir.

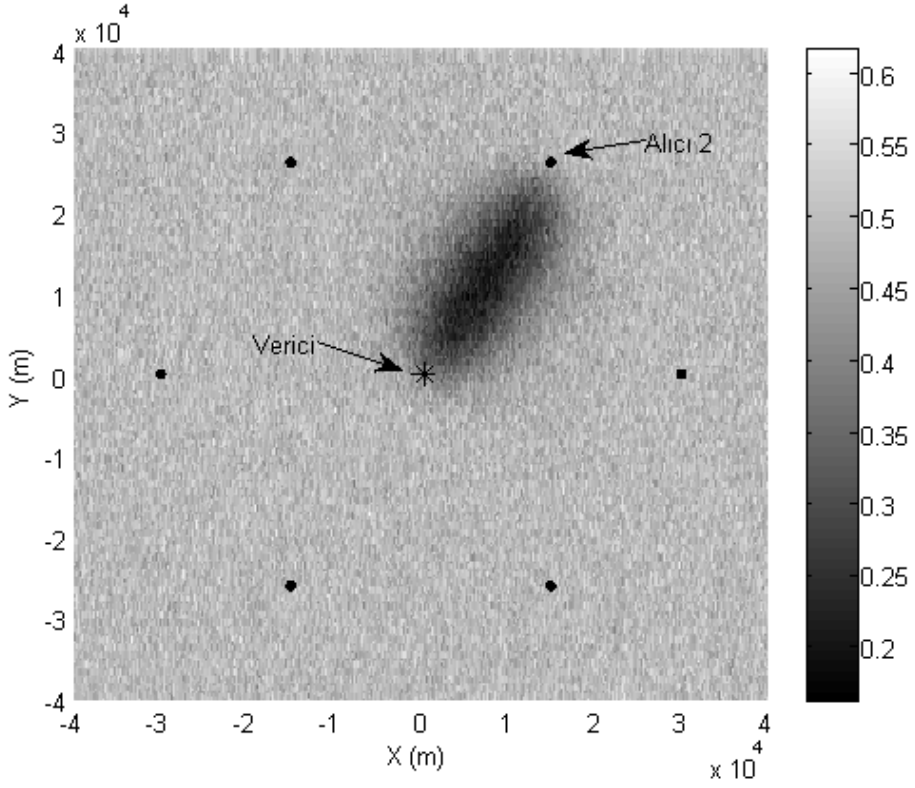


Şekil 5.2 *Alıcı 1* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri

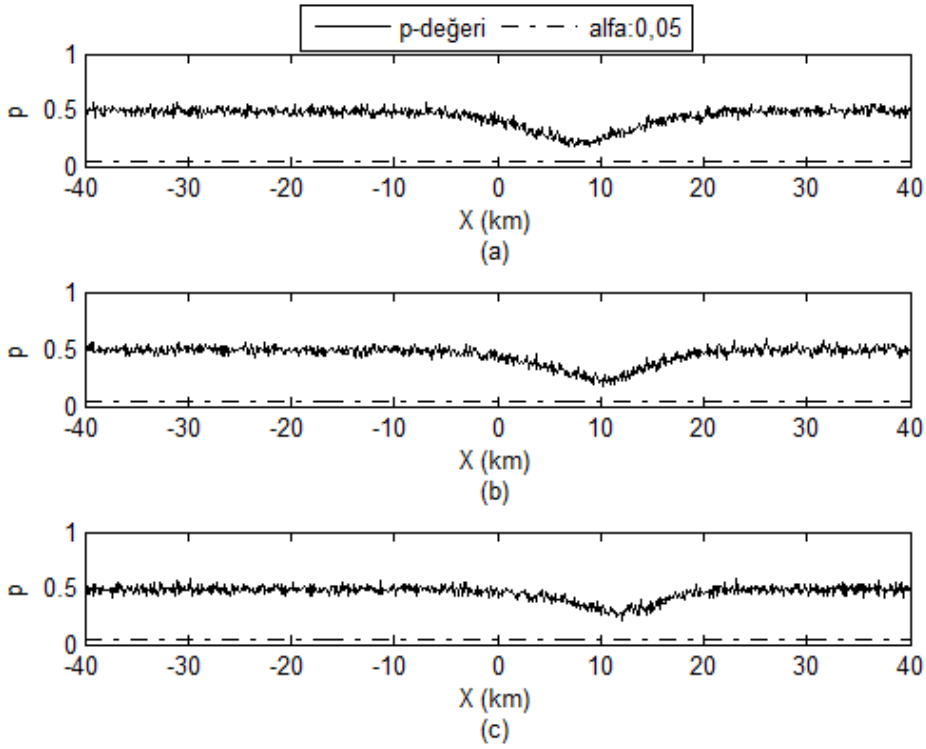


Şekil 5.3 *Alıcı 1* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 3km$, b. $Y = 0km$, c. $Y = -3km$

Alıcı 2'ye göre hesaplanan bistatik menzil değerleri için elde edilen p-değerlerinin değişimi şekil 5.4'te verilmiştir. Alıcı ile verici arasında kalan bölgede p-değerlerinin diğer bölgelere göre daha düşük değerlerde gerçekleşmesine rağmen, benzetimlerde kullanılan α değerinden daha büyük olduğu gözlenmiştir. Şekil 5.4.'te verilen benzetim sonuçlarında en düşük p-değeri 0,1624 olara gerçekleşmiştir. p-değerinin diğer test noktalarına göre küçük olduğu bölümden alınan kesitlerdeki değişim şekil 5.5.'te verilmiştir. Test noktalarının Y bileşenin ortalama değerinin 14km, 18km ve 22km olduğu durumlarda benzetimlerde elde edilen p-değeri değişimleri sırasıyla şekil 5.5.a,b, c'de verilmiştir. Şekil 5.5.a'da X eksenin -5km – 20km arasında kalan kısmında p-değerlerinin azalıp arttığı, şekil 5.5.b'de bu aralığın -3km – 19km olarak gerçekleştiği, şekil 5.5.c'de ise 2km – 20km arasında kalan bölgede olduğu gözlenmiştir. p-değerinin değişim gösterdiği bölge, kesit alınan Y değerine bağlı olarak değişim göstermekle birlikte, bütün test noktalarında şekil 5.5'te gösterilen α alt sınırından daha küçük p-değeri elde edilmemiştir.



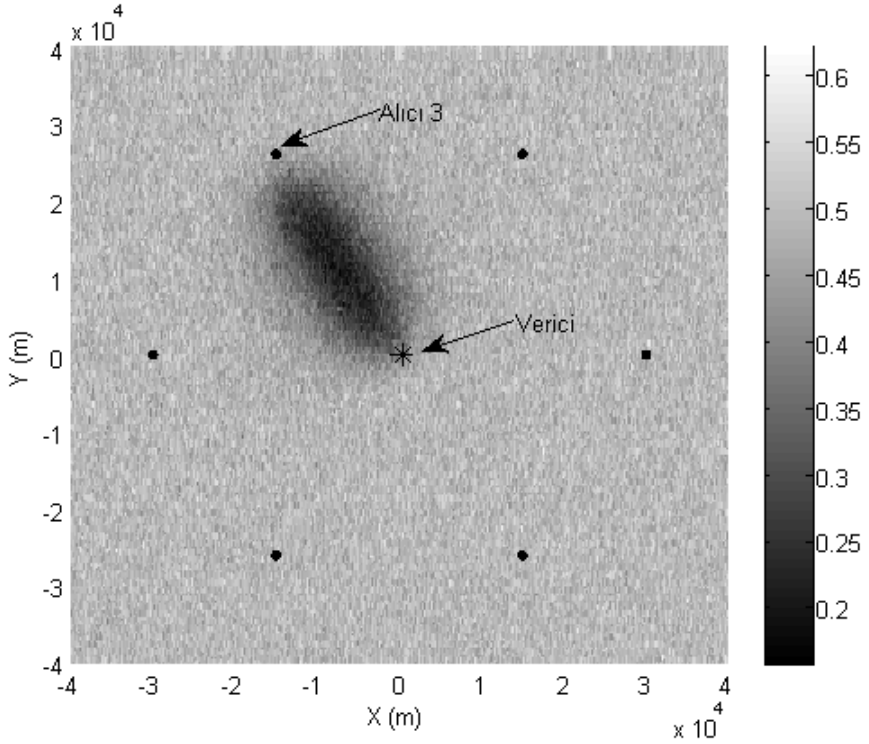
Şekil 5.4 *Alıcı 2* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri



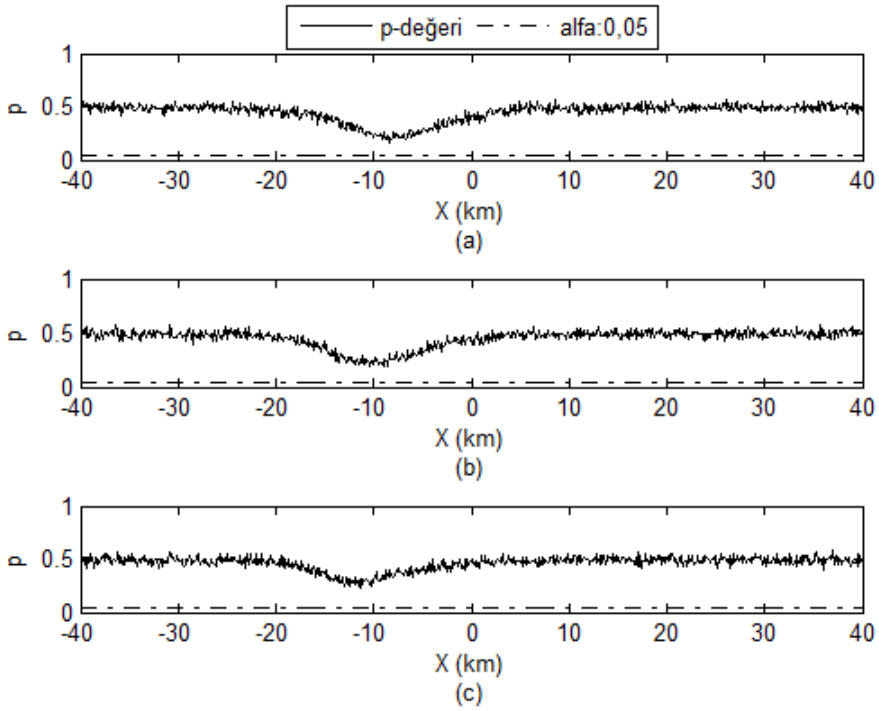
Şekil 5.5 *Alıcı 2* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 14km$, b. $Y = 18km$, c. $Y = 22km$

Bistatik menzil değerlerinin dağılımı için *Alıcı 3* kullanılarak yapılan benzetimler, beklendiği gibi *Alıcı 2* ile yapılan benzetim sonuçları ile benzer sonuçlar vermiştir. Tasarlanan alıcı – verici geometrisini simetrik olması ve test noktalarının bu geometri içerisinde simetrik dağılıyor olması böyle bir sonuca yol açmıştır. Şekil 5.6'da *Alıcı 3*'e göre yapılan benzetimler sonucunda elde edilen p-değerlerinin değişimi verilmiştir. Elde edilen sonuçlar yaklaşık olarak şekil 5.4'te verilen sonuçların Y eksenine göre simetriğidir. Şekil 5.7'de p-değerlerinin azaldığı bölgeden kesitler sunulmuştur. $Y = 14km$, $Y = 18km$ ve $Y = 22km$ değerleri için elde edilen p-değerleri değişimi sırasıyla şekil 5.7.a, b, c'de verilmiştir. Benzer şekilde her bir Y değerinde ulaşılan sonuçlar şekil 5.5'te sunulan sonuçların yaklaşık olarak Y eksenine göre simetriğidir. *Alıcı 3* ile yapılan benzetimlerde de p-değerlerinin α değerinden daha büyük gerçekleştiği ve en küçük p-değerinin 0,1580 olduğu sonucuna ulaşılmıştır. *Alıcı 4* ile gerçekleştirilen benzetimlerde *Alıcı 1* ile elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bütün test noktalarında p-değerinin değişimi şekil 5.8'de ve *Y=3km*, *Y=0km* ve *Y=–3km*'de alınan kesitlere ait p-değerleri sırasıyla şekil 5.9.a, b, c'de verilmiştir. p-

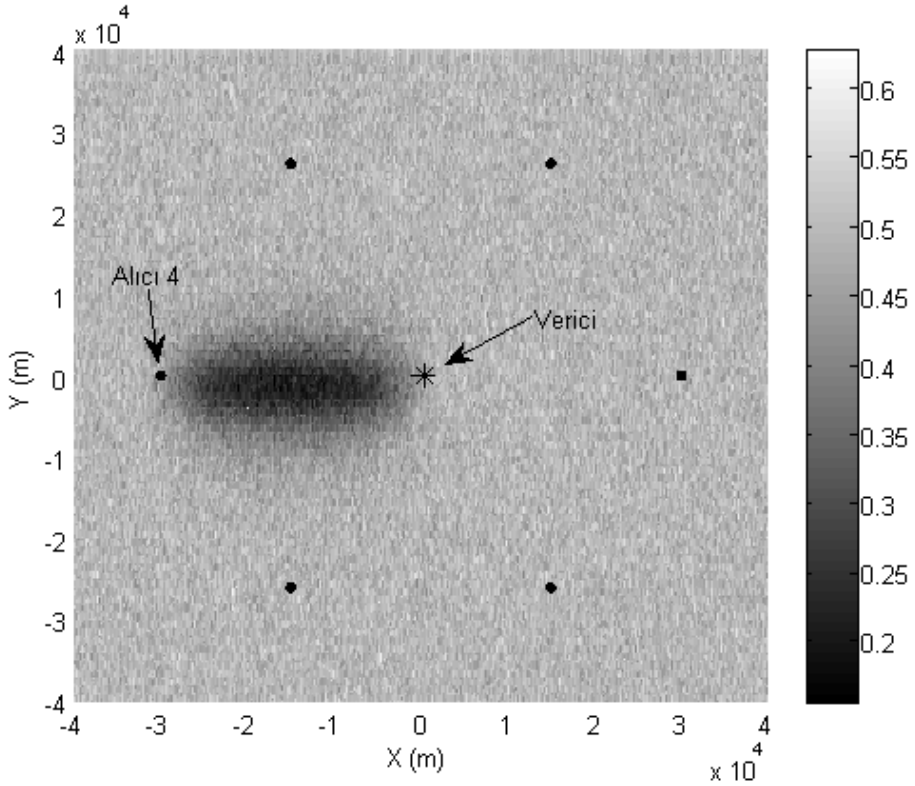
değeri bütün test noktalarında α değerinden daha büyük olarak elde edilmiş ve en küçük p-değeri 0,1553 olarak gözlenmiştir.



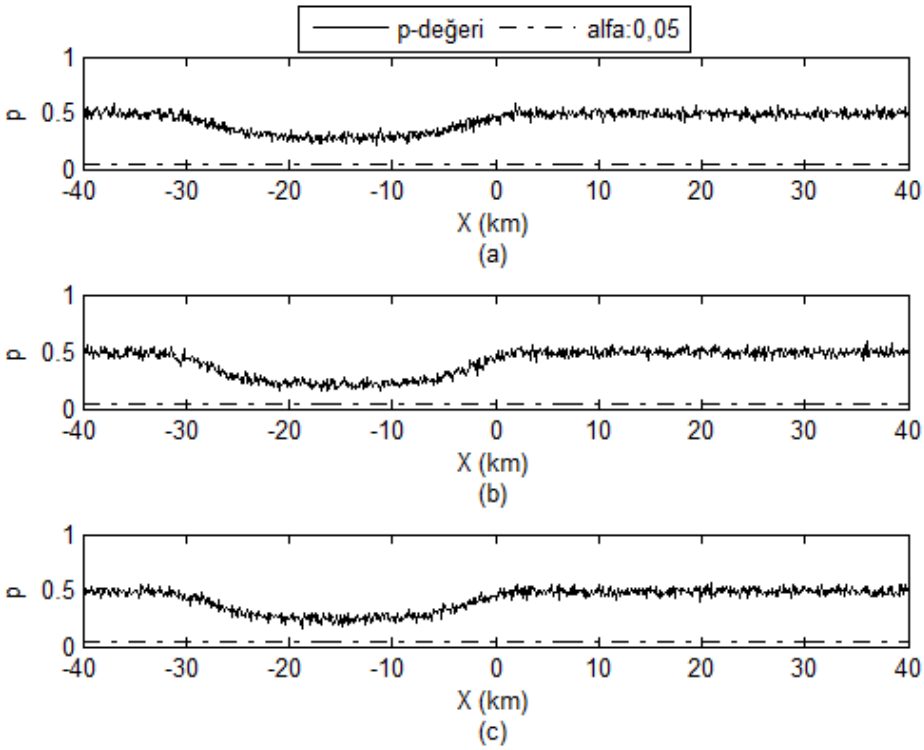
Şekil 5.6 *Alıcı 3* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri



Şekil 5.7 *Alıcı 3* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 14km$, b. $Y = 18km$, c. $Y = 22km$

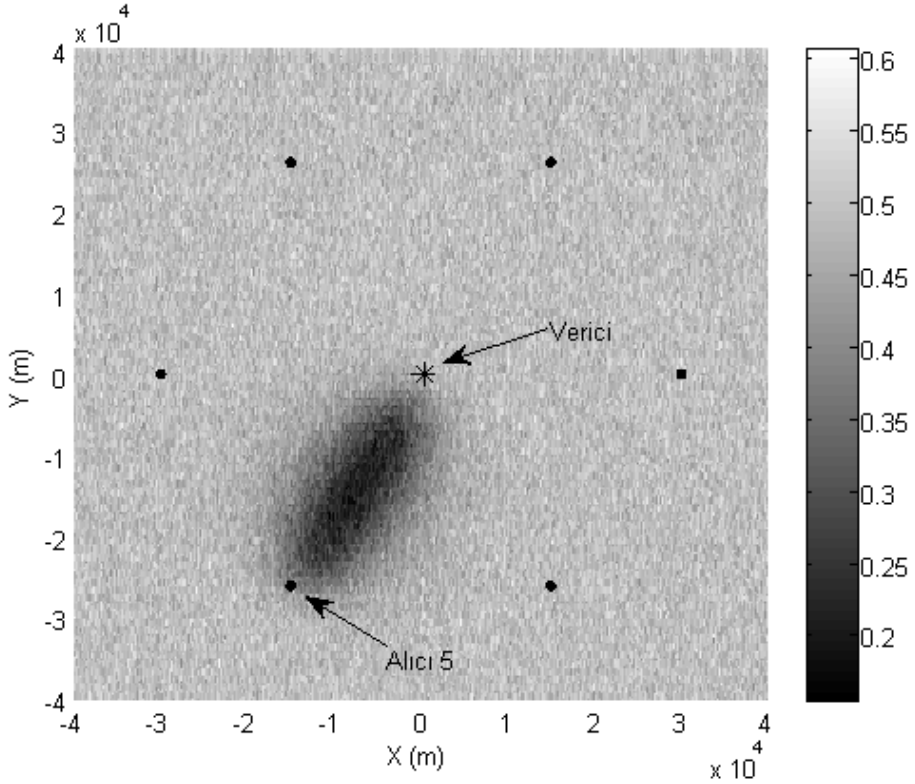


Şekil 5.8 *Alıcı 4* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri

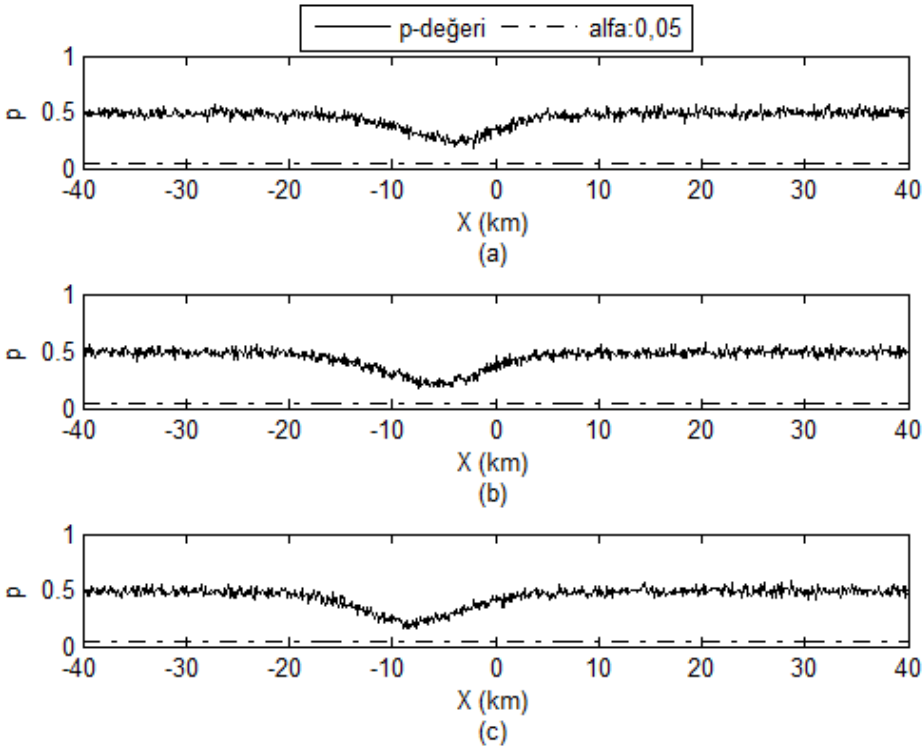


Şekil 5.9 *Alıcı 4* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y = 3km$, b. $Y = 0km$, c. $Y = -3km$

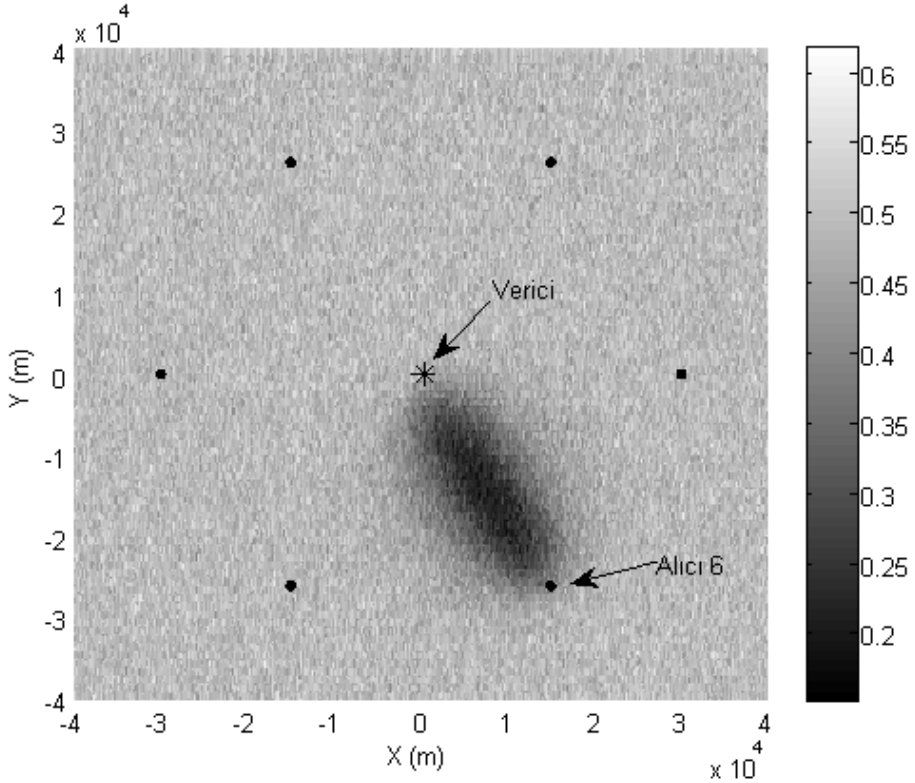
Alıcı 5 ile gerçekleştirilen benzetimlerde bistatik menzil değerlerinin testi sonucunda elde edilen p-değerleri şekil 5.10'da verilmiştir. Benzetimlerde diğer alıcılarda olduğu gibi, alıcı ile verici arasında kalan bölgede p-değerlerinin azaldığı ancak diğer yerlerde tutarlı şekilde yaklaşık 0,5 değerine sahip olduğu görülmüştür. p-değerlerinin azaldığı bölgede, $Y = -6km$, $Y = -10km$ ve $Y = -14km$ değerleri için alınan kesitler sırasıyla şekil 5.11.a, b, c'de verilmiştir. Kesit görüntülerinde görüldüğü gibi p-değerlerinde azalma olmasına rağmen hiçbir noktada $\alpha = 0,05$ değerinden daha düşük bir p-değeri gerçekleşmemiştir. *Alıcı 5* kullanılarak yapılan benzetimlerin tamamı göz önüne alındığında en küçük p-değeri 0,1549 olarak elde edilmiştir. *Alıcı 5*'in Y eksenine göre simetrik konumunda bulunan *Alıcı 6* ile yapılan benzetimlerde de benzer sonuçlar ortaya çıkmıştır. Alıcı ile verici arasında kalan bölgede azalan ancak 0,05 değerinin altına düşmeyen p-değeri değişimleri elde edilmiş ve şekil 5.12'de sunulmuştur. $Y = -6km$, $Y = -10km$ ve $Y = -14km$ değerlerinde alınan kesitler için p-değerleri değişimi sırasıyla şekil 5.13.a, b, c'de verilmiştir. Benzetimlerde en küçük p-değeri 0,1515 olarak elde edilmiştir.



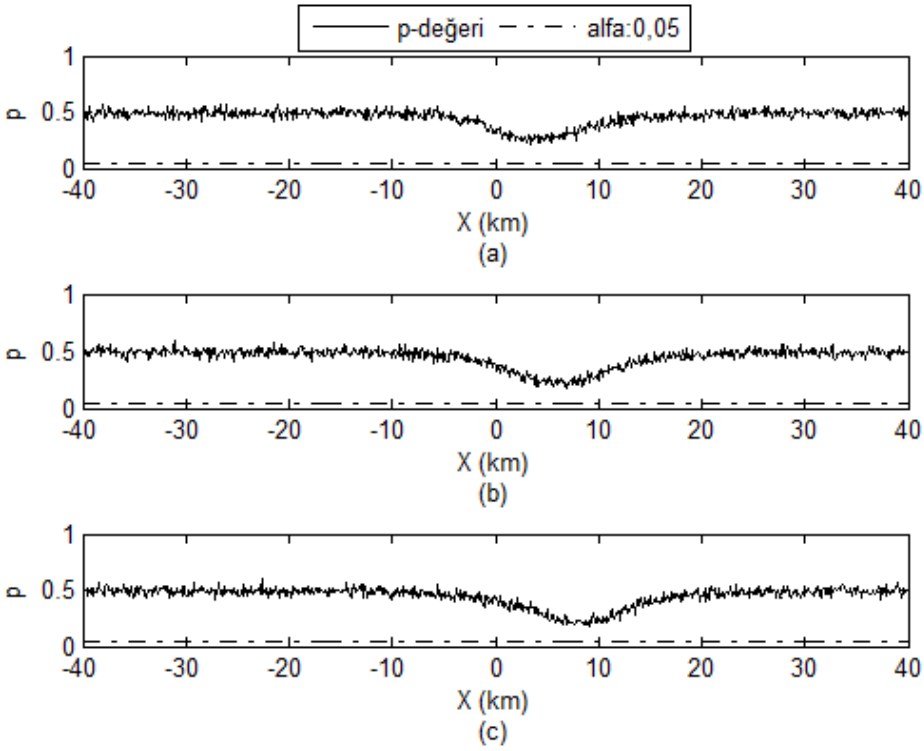
Şekil 5.10 *Alıcı 5* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri



Şekil 5.11 *Alıcı 5* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y=-6km$, b. $Y=-10km$, c. $Y=-14km$



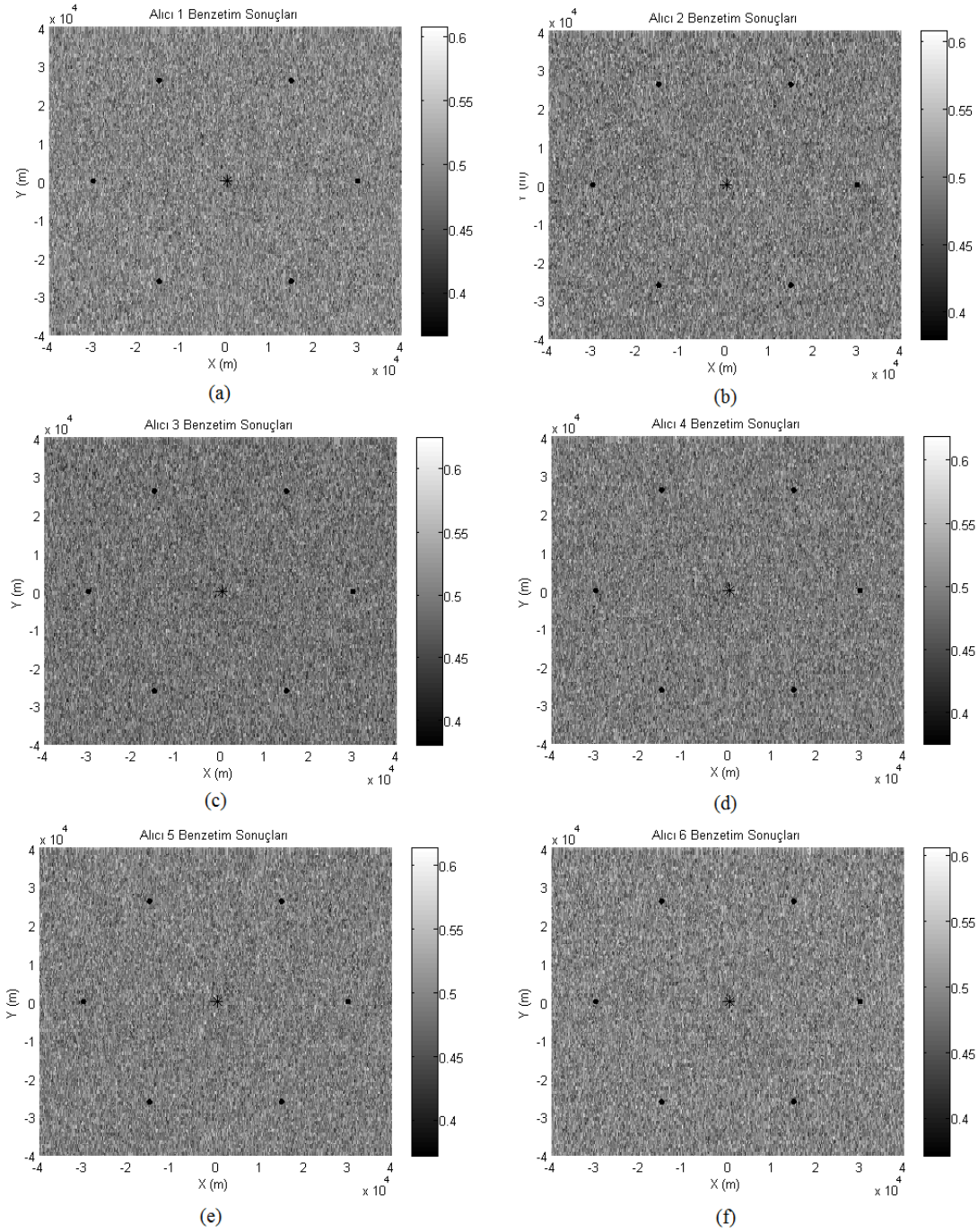
Şekil 5.12 *Alıcı 6* ile yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri



Şekil 5.13 *Alıcı 6* benzetimlerinde elde edilen p-değerinin Y ekseninde alınan kesitlerdeki değişimi: a. $Y=-6km$, b. $Y=-10km$, c. $Y=-14km$

Bistatik menzil-hızı için yapılan benzetimlerde elde edilen sonuçlar şekil 5.14'te sunulmuştur. Bütün alıcılara göre yapılan testlerde p-değeri tutarlı şekilde değişim göstermiş ve 0,05 olan α değerinden daha büyük olarak gerçekleşmiştir. Benzetimlerde en küçük p-değeri alıcı 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 için sırasıyla 0,3665, 0,3794, 0,3801, 0,3749, 0,3717, 0,3705 olarak elde edilmiştir.

Birleşik Gauss dağılımına sahip durum vektörünün doğrusal olmayan dönüşümü sonrasında elde edilen bistatik menzil ve menzil-hızı rasgele değişkenlerinin dağılımının incelendiği bu bölümde; benzetim yoluyla ortaya konulan Anderson – Darling uyum iyiliği testi sonuçları, hem bistatik menzil hem de menzil-hızı rasgele değişkenlerinin dağılımlarının Gauss dağılımı olduğu hipotezini destekler yönde çıkmıştır. Bu sonuçlar varlığında bistatik menzil ve menzil-hızı değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarına Gauss dağılımı yaklaşımı yapıldığında, sonsal dağılımı oluşturan fonksiyonlardan biri olan olabilirlik fonksiyonu da Gauss fonksiyonu olmaktadır.



Şekil 5.14 Bistatik menzil-hızı için yapılan benzetimlerde elde edilen p-değerleri değişimi: a. *Alıcı 1*'e göre p-değerleri, b. *Alıcı 2*'ye göre p-değerleri, c. *Alıcı 3*'e göre p-değerleri, d. *Alıcı 4*'e göre p-değerleri, e. *Alıcı 5*'e göre p-değerleri, f. *Alıcı 6*'ya göre p-değerleri.

5.3 Sonuç

Doğrusal olmayan bistaik menzil ve menzil-hızı ölçümleri varlığında durum sonsal dağılımının incelendiği bu bölümde, durum sonsal dağılımını oluşturan fonksiyonların

yapıları tek tek incelenmiştir. Bölüm 5.1'de öngörüm dağılımı irdelenerek, yapılan varsayımlar altında bu fonksiyonun Gauss fonksiyonu olduğu gösterilmiştir. Olabilirlik fonksiyonu benzetim yoluyla incelenerek, bu fonksiyona Gauss fonksiyonu olarak yaklaşım yapılabileceği bölüm 5.2'de gösterilmiştir. Hem olabilirlik fonksiyonunun hem de öngörüm dağılımının Gauss fonksiyonu olması sonuçlarının, önerme 1 kullanılarak bir araya getirilmesi, durum sonsal dağılımının da Gauss dağılımı olacağını göstermektedir.

Analitik sonuç çıkarma ve benzetim yoluyla yapılan çalışmalar, eşitlik 1 – 2 ve yapılan varsayımlar ile modellenen durum uzayında durum vektörünün MMSE kestirimi ile MAP kestirimin aynı olacağını göstermiştir.

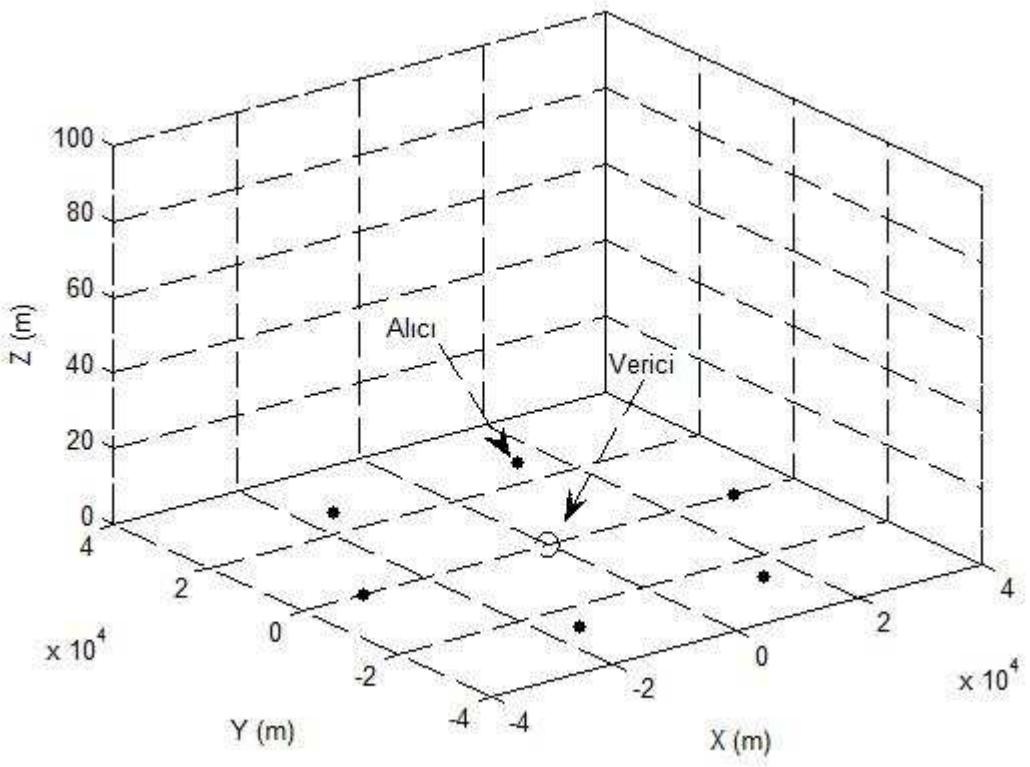
6. MULTİSTATİK RADAR AĞINDA HEDEF TAKİBİ VE SONSAL OIM

Tez çalışmasında multisatik radar ağında hedef takibi problemi, ağ yapısı içerisinde bulunan alıcı – verici çiftlerinden elde edilen bistatik menzil ve mezil-hızı ölçümlerinden hedefin 3B Kartezyen uzaydaki durumunun kestirilmesi olarak tanımlanmıştır. Bu bölümde; birden fazla sensörden oluşan ağ yapısında hedef takibinin gerçekleştirilmesi için merkezi bilgi birleştirme ve dağıtık bilgi birleştirme yöntemleri kullanılarak iki durum incelenmiştir. Merkezi birleştirmede, her bir alcı – verici çiftinin hedeften aldıkları ölçümleri bir merkeze gönderdikleri ve hedef durum kestiriminin bütün sensör ölçümleri kullanılarak bu merkezde yapıldığı durum ele alınmıştır. Merkezi birleştirmede durum kestiricisi olarak parçacık filtre ve Unscented Kalman filtre (UKF) kullanılarak, kestiricilerin başarımları belirlenmiştir. Durum kestiriminin yanı sıra sonsal OIM de hesaplanarak, hedef takibi sırasında bilginin değişimi incelenmiştir. Dağıtık bilgi birleştirmede ise, her alıcı – verici çiftinin kendi durum kestiricisi olduğu, alıcı – vericilerin kendi aralarında hedef durumu hakkında sahip oldukları yerel bilgiyi paylaştığı varsayılmış ve nihai durum kestirimi diğer alıcı – vericilerden gelen bilgilerin birleştirilmesi ile elde edilmiştir. Dağıtık bilgi birleştirmede durum kestiricisi Parçacık filtre ile kovaryans kesişim yönteminin birleştirilmesi elde edilmiştir. Kestiricinin başarımı ve hedef takibinde sonsal OIM'nin değişimi benzetimler ile ortaya konulmuştur.

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde; multistatik radar ağ yapısı, hedef senaryoları, durum kestirimi ve OIM için başarım ölçütleri ile benzetimlerde kullanılan parametreler tanımlanmıştır. İkinci alt bölümde; merkezi bilgi birleştirme ile durum kestiriminde SIR Parçacık filtre ve UKF'nin başarımları incelenmiştir. Ayrıca, durum kestiricileri için OIM tartışılımştır. Üçüncü alt bölümde, dağıtık bilgi birleştirme ile durum kestirimi için parçacık filtrenin kovaryans kesişim yöntemi ile birleştirilmesi ve elde edilen durum kestiricisinin başarımı verilmiştir. Dördüncü alt bölümde ise, sonsal OIM'nin durum kestiriminde kullanılacak ölçümlerin seçiminde kullanılması ve durum kestirimi başarımının arttırılması için bir uygulama örneği verilmiştir.

6.1 Benzetim Ortamı ve Başarım Ölçütleri

Tez çalışmasında multistatik radar ağı modellemesi, birden fazla bistatik radar birimi barındıran bir ağ yapısının oluşturulması ile bilgisayar ortamında benzetim yoluyla gerçekleştirilmiştir. Burada, multistatik radar ağı modellemesinden kasıt, ölçümlerin ve radar alıcı – verici konumlarının belirlenmesi olup, sinyal seviyesine inilmeden yapılan üst seviye bir modellemedir. Multistatik radar ağ yapısı, bölüm 3'te elde edilen ve Soysal vd. (2009)'da verilen sonuçlar kullanılarak altı verici ve bir alıcı antenden oluşan multistatik radar ağı olarak tasarlanmıştır. Alıcı antenler, verici anteni merkezi kabul eden *30 km* yarıçaplı çember üzerinde, aralarında *60* derece olacak şekilde konumlandırılmıştır. Ağ içerisinde bulunan her bir bistatik radar birimi (alıcı – verici çifti) özdeş kabul edilmiş ve birimlerin antenlerinin, 3B uzayda her yönde eşit kazanca sahip oldukları varsayılmıştır. Şekil 6.1'de radar ağının 3B Kartezyen uzaydaki görüntüsü verilmiştir. Şekil 6.1'de de görüldüğü gibi verici ve alıcılar, irtifada *0 m*'de konumlandırılmıştır ve dünyanın düz olduğu varsayılmıştır.



Şekil 6.1 Radar ağı alıcı-verici konumları

Çalışmalarda baz alınan radar ağının, gözetleme yaptığı ortamdaki hedefin, bistatik menzil ve menzil-hızını ölçebildiği ve saniyede bir ölçüm üretebildiği varsayımları yapılmıştır. 3B Kartezyen uzayda; k anındaki hedef durum vektörü $x_k = [\mathrm{x}_k \quad \dot{\mathrm{x}}_k \quad \mathrm{y}_k \quad \dot{\mathrm{y}}_k \quad \mathrm{z}_k \quad \dot{\mathrm{z}}_k]^T$, i. alıcının konumu $L_r^i = [\mathrm{x}_r^i \quad \mathrm{y}_r^i \quad \mathrm{z}_r^i]^T$ ve vericinin konumu $L_t = [\mathrm{x}_t \quad \mathrm{y}_t \quad \mathrm{z}_t]^T$ olsun. Bu durumda i. alıcı ile vericinin yapacağı bistaik menzil ve menzil-hızı ölçümleri eşitlikler (6.1) ve (6.2)'de verildiği gibi hesaplanmaktadırr.

$$R_k = R_{r,k}^i + R_{t,k} + \varepsilon_R^i$$

$$R_{r,k}^i = \sqrt{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_r^i)^2 + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_r^i)^2 + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_r^i)^2} \tag{6.1}$$

$$R_{t,k} = \sqrt{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_t)^2 + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_t)^2 + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_t)^2}$$

$$\dot{R}_k = \dot{R}_{r,k}^i + \dot{R}_{t,k} + \varepsilon_{\dot{R}}^i$$

$$\dot{R}_{r,k}^i = \frac{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_r^i)\dot{\mathrm{x}}_k + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_r^i)\dot{\mathrm{y}}_k + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_r^i)\dot{\mathrm{z}}_k}{R_r^i} \tag{6.2}$$

$$\dot{R}_{t,k} = \frac{(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_t)\dot{\mathrm{x}}_k + (\mathrm{y}_k - \mathrm{y}_t)\dot{\mathrm{y}}_k + (\mathrm{z}_k - \mathrm{z}_t)\dot{\mathrm{z}}_k}{R_{t,k}}$$

Burada R_k, $\dot{R}_k$, $R_{r,k}^i$, $R_{t,k}$, $\dot{R}_{r,k}^i$, $\dot{R}_{t,k}$ sırasıyla bistatik menzil, bistatik menzil-hızı, k anında i. alıcı ile hedef arasındaki menzil, k anında verici ile hedef arasındaki menzil, k anında i. alıcı ile hedef arasındaki menzilin değişim hızı ve k anında verici ile hedef arasındaki menzilin değişim hızıdır. Eşitlikler (6.1) ve (6.2)'de $\varepsilon_{\dot{R}}^i$ ve $\varepsilon_{\dot{R}}^i$ ile gösterilen terimler sırasıyla i. alıcı – verici çifti için bistatik menzil ölçüm gürültüsü ve bistatik menzil-hızı ölçüm gürültüsüdür. Tez çalışmasında, alıcı – verici çiftlerinin ölçüm gürültülerinin birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı, Σ_k kovaryanslı beyaz Gauss gürültü süreci oldukları varsayılmıştır. Ayrıca, alıcı – verici çiftleri arasında da ölçümlerin bağımsız olduğu varsayılmıştır. Benzetimlerde kullanılan ölçüm kovaryansı eşitlik

(6.3)'te verildiği gibi tanımlanmıştır ve ölçüm kovaryansının zamandan bağımsız olduğu kabul edilmiştir.

$$\Sigma_k = \Sigma = \begin{bmatrix} 10000\,m^2 & 0 \\ 0 & 1(m/sn)^2 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

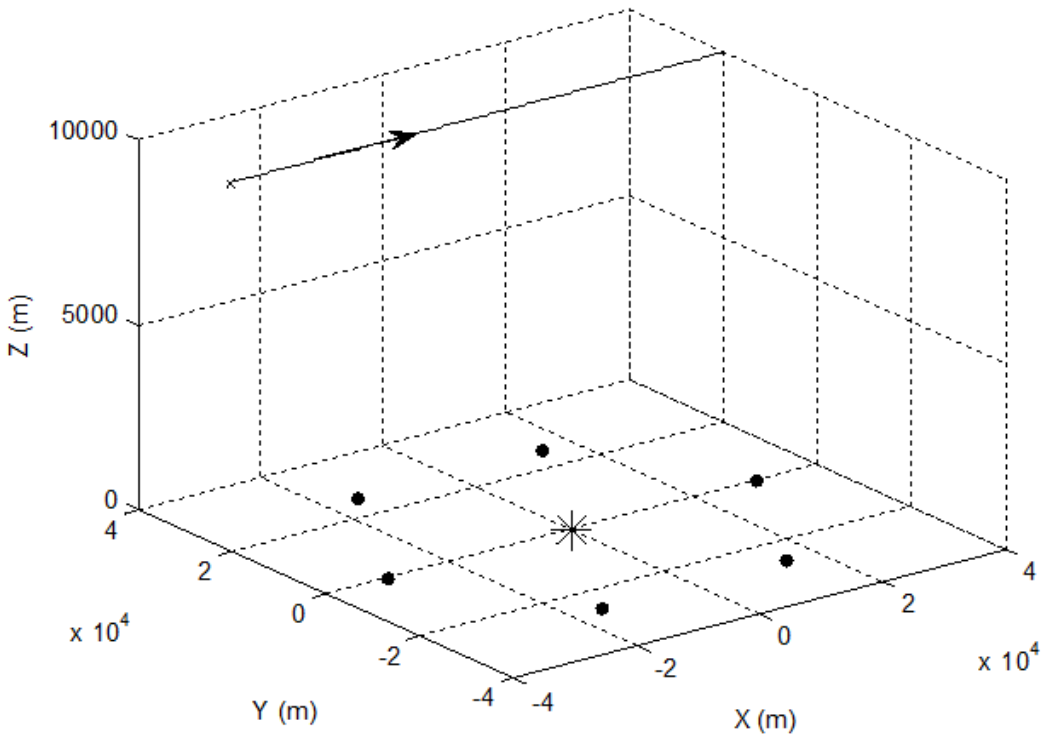
Şekil 6.1'de verilen radar ağında hedef takibi ve bilgi analizinin incelenmesi amacıyla hedef gezingesi tasarımı gerçekleştirilmiştir. Tasarlanan hedef hareketinde; hedef 3B Kartezyen uzayda $(-40 \quad 40 \quad 10)km$ konumundan hareketine başlamakta ve $(100 \quad 0 \quad 0)\,m/sn$ olarak tanımlanan hız vektörüne göre, Li ve Jilkov (2003)'te verilen kesikli zaman beyaz gürültü ivmelenme (KZBGİ) hareket modeline uygun olarak $+X$ yönünde 800 saniye boyunca hareket etmektedir. Hedefin *Y* ve Z eksenlerinde gürültünün etkisiyle konum değiştirdiği, gürültü olmadığında bu eksenlerde hareket olmadığı varsayılmıştır. Hedef hareketi boyunca radar ağını X ekseni göre bir uçtan diğer uca geçmektedir. Hedefin Y eksenindeki konum değişikliği bu senaryonun Y ekseninde 40km'den -40km'ye kadar *1 km*'lik aralıklar ile kaydırılması ile üretilen 81 benzer senaryo ile sağlanmıştır. Böylelikle 81x801 büyüklüğündeki bir ayrık ızgara oluşturularak, hedefin radar ağı üzerinde birçok noktada gözlenmesi ve bu noktalarda hedef takibi başarımı ile OIM değişimi analizi yapılabilmesi amaçlanmıştır. Şekil 6.2'de radar ağı ve ağ içinde hareket eden örnek hedef gezingesinin 3B Kartezyen uzaydaki görünümü verilmiştir. Burada verilen hedef gezingesi, hedefin hareketinin anlaşılabilmesi için KZBGİ modelinde gürültü sıfır kabul edilerek üretilmiştir. Hedef hareketlerinin üretilmesinde kullanılan KZBGİ hareket modeli, hareketin kesikli zaman aralıklarında ortalama hızın sabit olduğu durumu modellemektedir. Bu model için *k-1* anından *k* anına geçiş eşitlik (6.4)'te verilen durum denklemi ile gerçekleştirilmektedir.

$$x_k = Fx_{k-1} + \Gamma v_{k-1} \tag{6.4}$$

Burada F, Γ ve v_{k-1} sırasıyla, durum fonksiyonu (n_x durum vektörünün boyutu olmak üzere n_x x n_x matris), süreç gürültüsü kazanç matrisi ve süreç gürültüsüdür. t sürekli zaman değişkeni ve t_k, bu değişkenin kesikli hale getirilmesi halinde *k*. indise

karşılık gelen zaman olmak üzere, F ve Γ matrisleri $T \triangleq t_k - t_{k-1}$ şeklinde tanımlanan örnekleme aralığının fonksiyonu olarak eşitlik (6.5)'te verildiği gibi yazılmaktadır.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \tag{6.5}$$



Şekil 6.2 Radar ağı ve örnek hedef gezingesi

KBGZİ hareket modeline göre hedef hareketi tasarlanırken, ivmelenmeyi modelleyen süreç gürültüsü parametresi sıfır ortalamalı q_k kovaryanslı beyaz Gauss gürültüsü olarak seçilmiştir ve gürültü kovaryansı eşitlik (6.6)'da verilmiştir.

$$q_k = q = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} m^2 \tag{6.6}$$

Parçacık filtre ve UKF ile hedef takibi ile sonsal OIM'nin incelendiği benzetim çalışmalarında aşağıda verilen varsayımlar yapılmıştır.

- Ortamda tek bir hedef vardır.
- Hedef, her ölçüm anında tespit edilmektedir.
- Ortamda hedef dışı ölçüm bulunmamaktadır.
- Hedef izi başlatılmıştır ve izin başlangıç durumu ve kovarynansı aşağıda verildiği gibi tanımlanmıştır.

$$x_0 \sim N\left(x_0^{gerçek}, P_0\right),$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10000\,m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 225\left(m/sn\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000\,m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 225\left(m/sn\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000\,m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225\left(m/sn\right)^2 \end{bmatrix}$$

- Parçacık filtre için süreç gürültüsü kovaryansı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Q^{PF} = \begin{bmatrix} 5m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\left(m/sn\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\left(m/sn\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\left(m/sn\right)^2 \end{bmatrix}$$

- Parçacık filtresinde 12000 parçacık kullanılmıştır.

- UKF için süreç gürültüsü kovaryansı, eşitlik (6.5)'te verilen Γ matrisi ile örnekleme aralığı *1 sn*. olarak seçilerek aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Q^{UKF} = \Gamma \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma^T$$

$$= \begin{bmatrix} 25m^2 & 50m^2/sn & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50m^2/sn & 100(m/sn)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25m^2 & 50m^2/sn & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50m^2/sn & 100(m/sn)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25m^2 & 50m^2/sn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50m^2/sn & 100(m/sn)^2 \end{bmatrix}$$

- Parçacık filtre ve UKF için durum fonksiyonu eşitlik (6.5)'te verilen *F* fonksiyonu olarak belirlenmiştir.
- Her iki kestirici için yapılan benzetimlerde, her bir hedef senaryosu için 100 Monte Carlo benzetimi gerçekleştirilmiştir.

6.1.1 Başarım Ölçütleri

Multistatik radar ağında Parçacık filtre ve UKF ile hedef durum kestiriminin başarımını belirlemek için ortalama kare hatanın karekökü (Root Mean Square Error – RMSE) başarım ölçütü seçilmiştir. *i.* Monte Carlo benzetiminde, *k* anındaki hedefin gerçek durumu x_k^i ve durum kestirimi $\hat{x}_k^i$ olmak üzere, *k* anındaki durum vektörünün *j.* bileşeni için RMSE, eşitlik (6.7)'de verildiği gibi tanımlanmıştır.

$$RMSE_{k,j} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(x_{k,j}^i - \hat{x}_{k,j}^i\right)} \tag{6.7}$$

Burada *M* toplam Monte Carlo benzetimi sayısıdır. Durum kestiricilerinin ürettiği kestirimler ile kovaryansların tutarlı olup olmadığının incelenmesi amacıyla normalize kestirim hatası karesi (Normalized Estimation Error Squared – NEES) ölçütü

kullanılmıştır. Bu ölçütün Monte Carlo benzetimlerinde nasıl hesaplanacağı, eşitlik (6.8)'de verilmiştir.

$$NEES_k = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(x_k^i - \hat{x}_k^i\right)^T \left(P_k^i\right)^{-1}\left(x_k^i - \hat{x}_k^i\right) \tag{6.8}$$

Filtrelerin hesapladığı durum kestirim kovaryanslarının köşegen elemanları, durum vektörünün elemanlarının varyanslarını göstermektedir. Durum vektörünün tanımlı olduğu uzayda her bir eksendeki belirsizliği incelemek için kovaryanların köşegen elemanlarının karekökünün ortalaması (ortalama standart sapma) hesaplanmıştır. $P_{k,x}^i$, i. Monte Carlo benzetiminde k anındaki kestirim kovaryansının x bileşeni olmak üzere, durum vektörünü x bileşeni için ortalama standart sapma eşitlik (6.9)'da verildiği gibi hesaplanmıştır. Durum vektörünün diğer bileşenleri için de eşitlik (6.9)'da verilen fomülasyon kullanılarak ortalama standart sapmalar elde edilmiştir.

$$P_{k,x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sqrt{P_{k,x}^i} \tag{6.9}$$

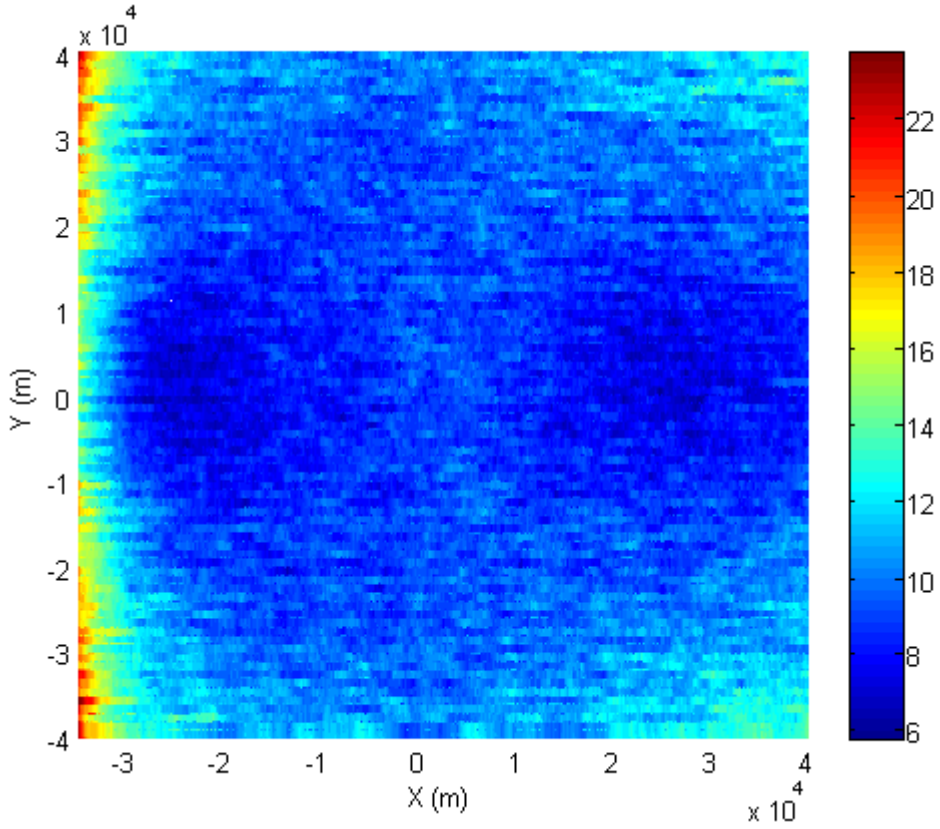
Multistatik radar ağında hedef takibi sırasında hesaplanan sonsal OIM'nin incelenmesi için sonsal OIM'nin tersi hesaplanmıştır. OIM'nin tersi "IOIM" olarak kısaltılıp tezin devamında bu şekilde kullanılmıştır. Sonsal IOIM kestirim kovaryansı ile ilişkili bir nicelik olduğundan, kestirim kovaryansının incelenmesinde izlenen yola benzer şekilde sonsal IOIM'nin köşegen elemanlarının karekökünün ortalaması değerlendirme ölçütü olarak verilmiştir. $B_{k,x}^i$, i. Monte Carlo benzetiminde k anındaki sonsal IOIM'nin x bileşeni olmak üzere, bu eksendeki bilginin tersinin karekökünün ortalaması eşitlik (6.10)'da verildiği gibi tarif edilmiştir.

$$B_{k,x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sqrt{B_{k,x}^i} \tag{6.10}$$

Diğer eksenlerdeki sonsal IOIM türünden belirsizlikler de eşitlik (6.10)'un ilgili eksen değişkenleri için çalıştırılmasıyla elde edilmiştir.

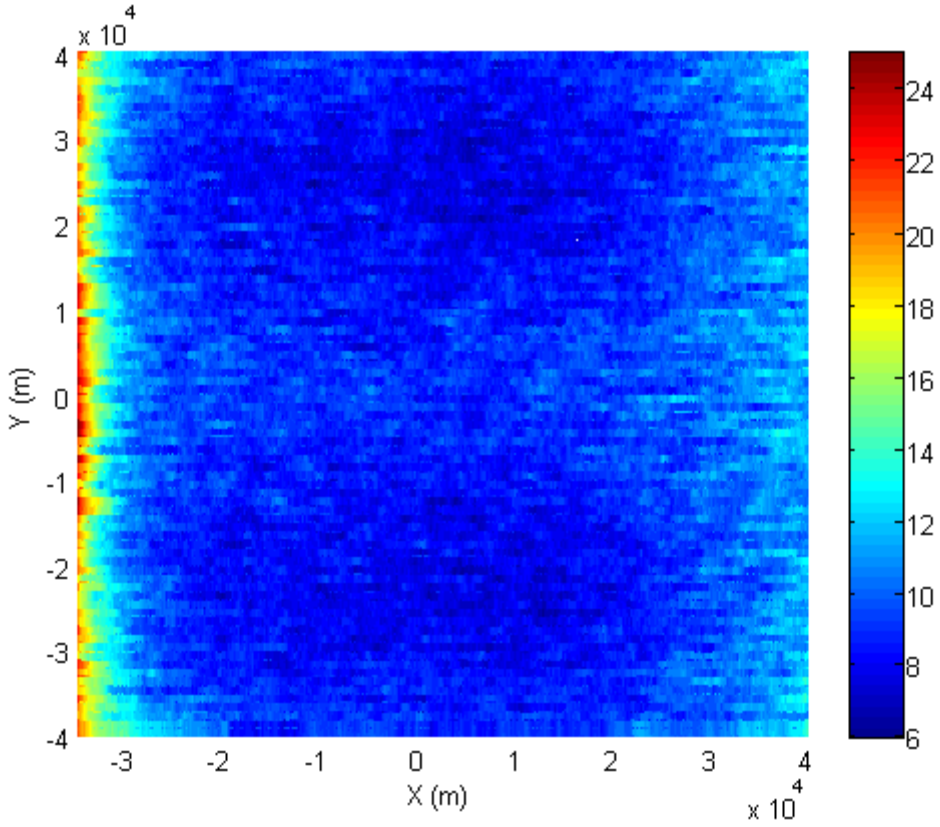
6.2 Merkezi Bilgi Birleştirme: SIR Parçacık Filtre ve UKF

Bu bölümde, multistatik radar ağında merkezi bilgi birleştirme yoluyla hedef takibi için yapılan benzetim çalışmaların sonuçları verilmiştir. Hedef takip filtresi olarak bölüm 2'de anlatılan SIR Parçacık filtre ve UKF algoritmaları gerçeklenerek, bir önceki bölümde verilen multistatik radar ağı senaryosu için filtrelerin başarımları ortaya konulmuştur. SIR Parçacık filtre ile yapılan benzetimlerde ulaşılan konum RMS hata sonuçları şekil 6.3, 6.4 ve 6.5'te verilmiştir. RMS hatalar bütün hedef hareketleri için ayrı gösterilmek yerine, ilgilenilen eksendeki hata değerleri bir bütün olarak resmedilmiştir. Şekil 6.3'te hedef takibi sırasında *X* ekseninde yapılan RMS hata sunulmuştur. Burada görülen resim, bir önceki bölümde tasarlanan hedef hareketlerinin oluşturduğu 81x801 boyutundaki ızgaranın *XY* düzlemine iz düşümüdür. Dolayısı ile şekil üzerinde her hangi bir *(x,y)* noktasına bakıldığında; o noktanın renk kodu, hedef o konumda iken yapılan RMS hatayı göstermektedir.



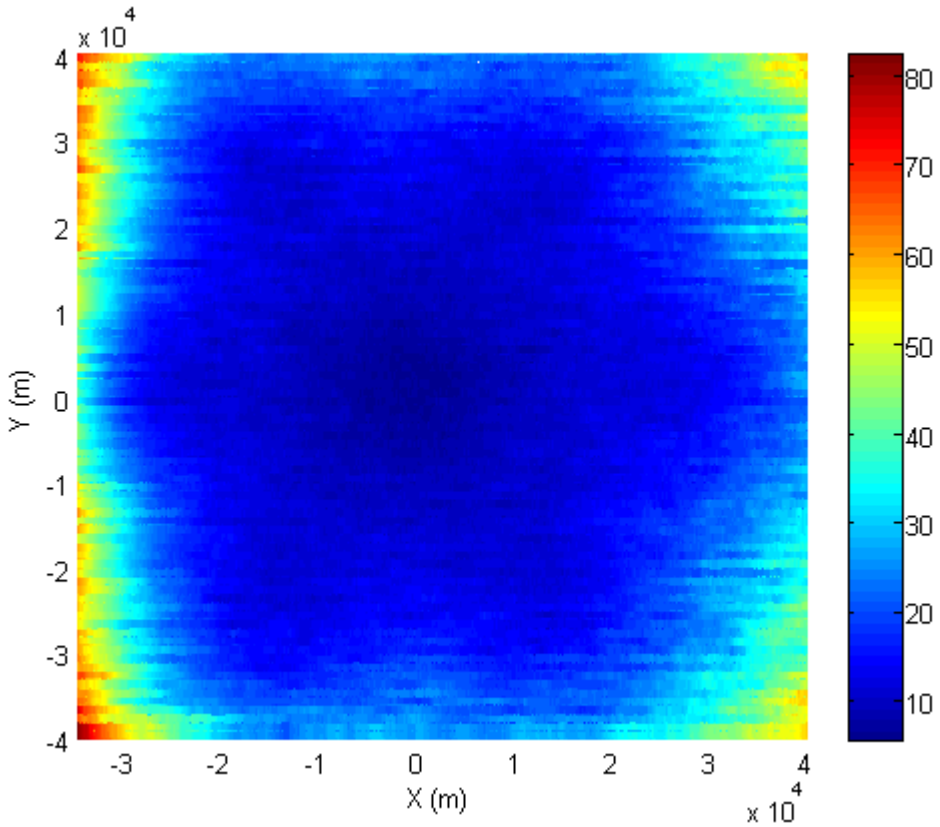
Şekil 6.3 SIR Parçacık filtre, *X* eksenindeki RMS konum hatası

Bu noktada unutulmamalıdır ki, şekil 6.3'te *Y* ekseni 81 tane hedef hareketi ile temsil edilirken *X* ekseni hedef hareketi boyunca durum kestirimi yapılabilen 801 nokta ile temsil edilmektedir. Dolayısı ile eksenler arasında çözünürlük farkı vardır. *X* eksenindeki RMS konum hataları incelendiğinde, vericilerin üzerinde bulunduğu varsayılan çemberin içerisinde kalan bölgede *X* eksenindeki RMS konum hatası *12m*'den daha az olarak gerçekleştiği görülmüştür. Özellikle konumu *X* eksenine yakın olan vericiler civarında, en düşük RMS hata seviyesi elde edilmiştir. Bu durum alıcıya yakın yerlerde ölçüm hatasının azalması ve durum kestirim kalitesinin artmasından kaynaklanmaktadır. Bu sonuç, Willis (2005)'te verilen alıcı etrafında sinyal gürültü gücü oranının yüksek olması, hedef tespit olasılığının yükselmesi ve ölçüm kalitesinin iyileşmesi sonuçları ile uyumludur. *Y* ekseni için elde edilen RMS konum hataları şekil 6.4'te verilmiştir. Bu eksendeki konum hataları, multistatik radar ağı tarafından kapsanan bölgede *12m*'nin altında gerçekleşmiştir. Özellikle *(-15km, 25km), (15km, 25km), (-15km, -25km)* ve *(15km,- 25km)* civarından bulunan alıcıların etrafında en düşük RMS konum hatası seviyeleri elde edilmiştir.



Şekil 6.4 Parçacık filtre, Y eksenindeki RMS konum hatası

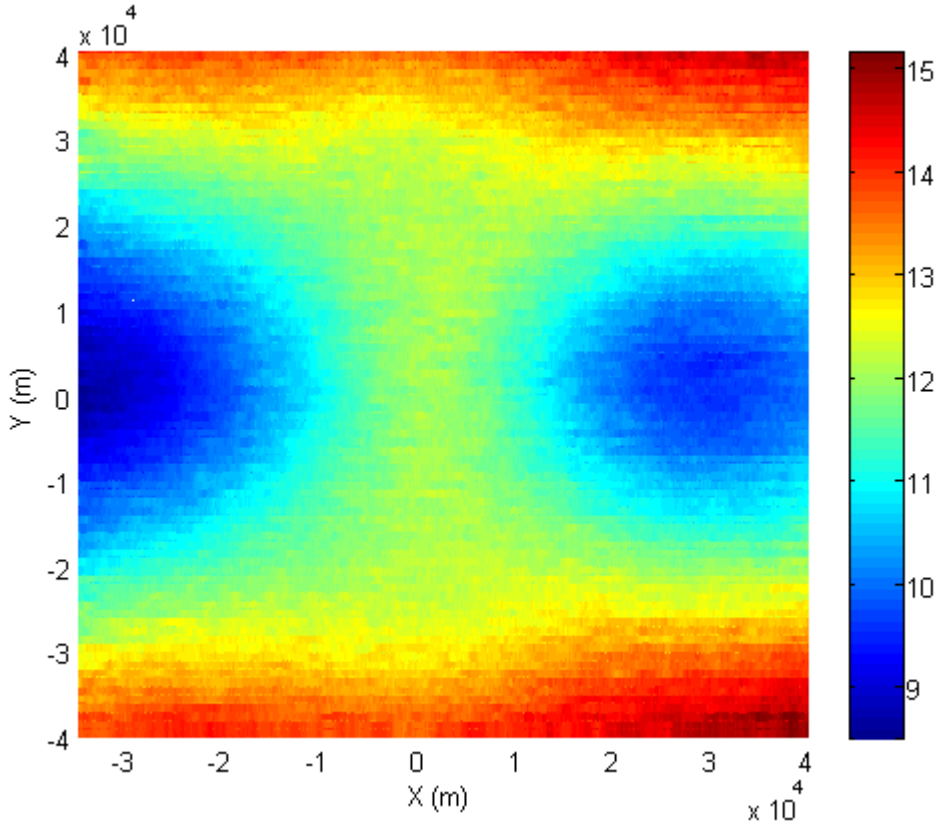
Şekil 6.5'te *Z* ekseni için ulaşılan RMS konum hatası sonuçları verilmiştir. *Z* ekseninde, diğer eksenlerde ulaşılan hata seviyelerinin üzerinde bir hata elde edilmiştir. Radar ağının kapsama alanı içerisinde *20m*'nin altında RMS konum hatası gözlenmiştir. *Z* eksenindeki RMS konum hatalarının diğer eksenlere göre büyük çıkması beklenen bir sonuçtur. Bölüm 3'te verilen Fisher bilgisi incelemelerinin sonuçları, bu eksende yüksek doğrulukta kestirim yapabilmek için yeterli bilginin elde edilemediğini göstermişti. *Z* ekseninde yapılan hatanın kaynağı alıcı – verici geometrisinin bu eksende hedef durumu ile ilgili yeterli bilgiyi toplayacak yapıda olmamasından kaynaklanmaktadır. Bu durum alıcıların ya da vericinin *Z* eksenindeki konumunun belirgin bir şekilde değiştirilmesi ile düzeltilebilir. Burada belirgin bir şekilde değiştirmekten kasıt, *XY* düzleminde alıcı verici ve hedef konumlarının dağılımının *XZ* ve *YZ* düzlemlerinde de oluşturulmasıdır.



Şekil 6.5 Parçacık filtre, Z eksenindeki RMS konum hatası

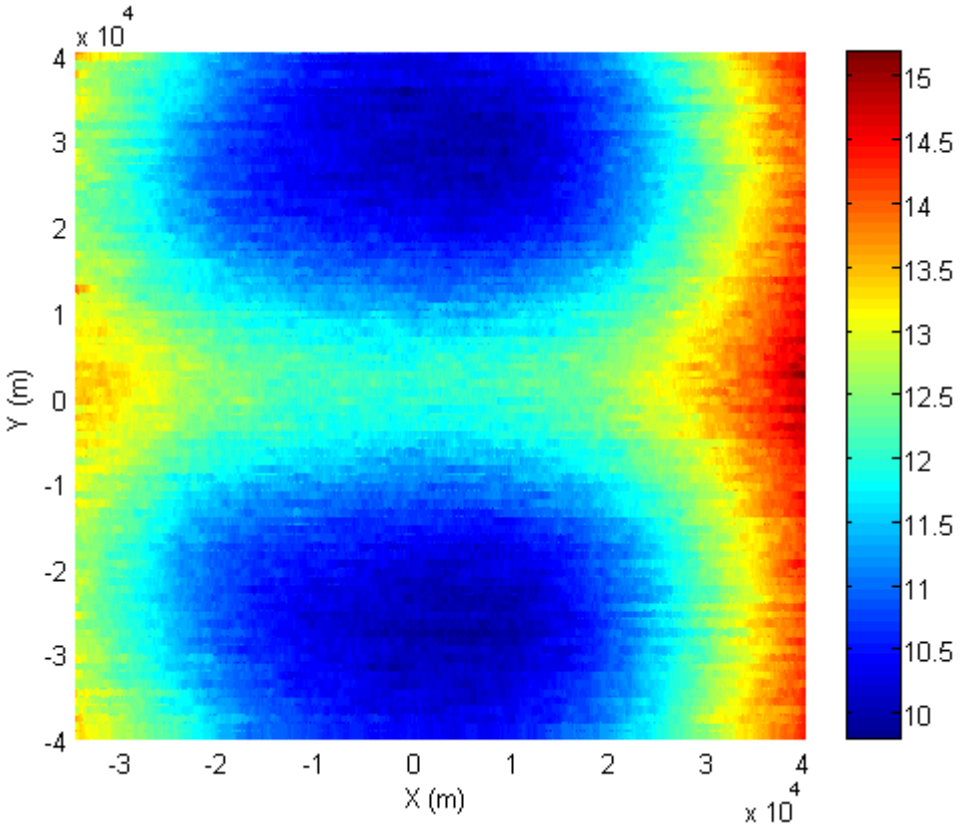
Kestirim kovaryanslarının konum bileşenleri için elde edilen ortalama standart sapma değerleri şekilde 6.6, 6.7 ve 6.8'de verilmiştir (ilerleyen bölümlerde standart sapma yerine belirsizlik kelimesi de kullanılacaktır). SIR parçacık filtrenin hedef durum kestirimi sırasında hesapladığı kovaryansların *x* bileşenlerinin karekökünün ortalaması

şekil 6.5'te sunulmuştur. *X* ekseni RMS konum hatası sonuçlarında olduğu gibi, *X* ekseni yakınındaki alıcıların civarında kovaryansın azaldığı, bir başka deyişle kestirim belirsizliğinin azaldığı gözlenmiştir. *X* eksenindeki RMS konum hatası ile bu eksen için elde edilen belirsizlik değerleri karşılaştırıldığında, filtrenin RMS hatasının düşük olduğu bölgelerde, RMS hataya kıyasla daha büyük belirsizlik öngördüğü sonucuna ulaşılmıştır.

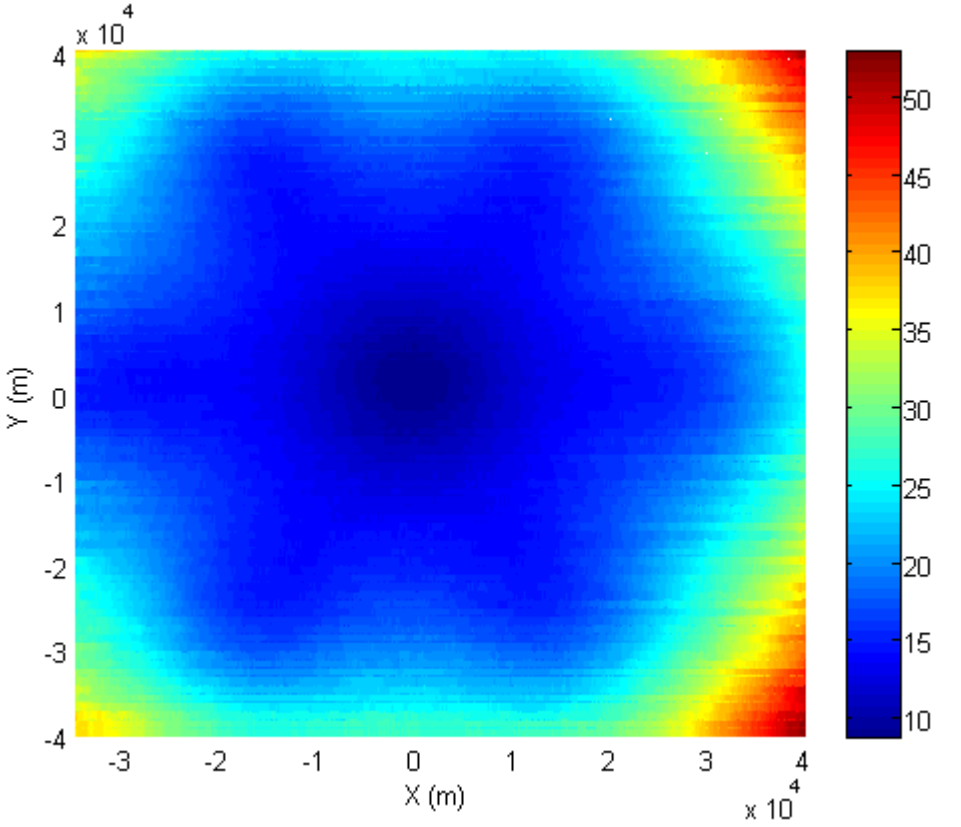


Şekil 6.6 Parçacık filtre, kestirim kovaryansının *x* bileşeninin karekökü

Şekil 6.7'de *Y* ekseni için elde edilen belirsizlik değerleri verilmiştir. *X* ekseni için elde edilen sonuçlara benzer şekilde, bu eksene yakın olan alıcıların etrafında filtrenin belirsizlik kestirimi diğer yerlere göre daha düşük seviyede olmuştur. Durum vektörünün *y* bileşeni için hesaplanan ortalama belirsizlik de, aynı bileşen için ulaşılan RMS hataya göre daha kötümser bir sonuç vermiştir. Durum vektörünün *x* ve *y* bileşenleri için elde edilen sonuçlardan farklı olarak; vektörün *z* bileşeni için elde edilen sonuçlar, aynı bileşenin RMS hataları ile diğer iki eksene göre daha tutarlı olduğu gözlemlenmiştir. Bu eksen için elde edilen belirsizlik sonuçları şekil 6.8'de verilmiştir.

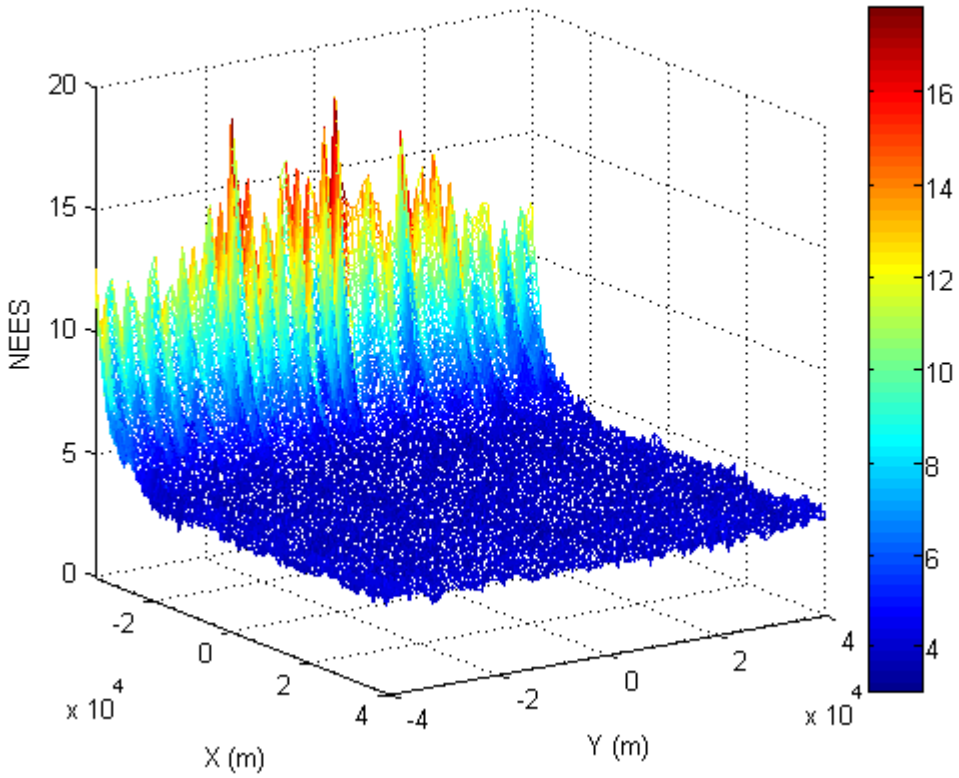


Şekil 6.7 Parçacık filtre, kestirim kovaryansının *y* bileşeninin karekökü



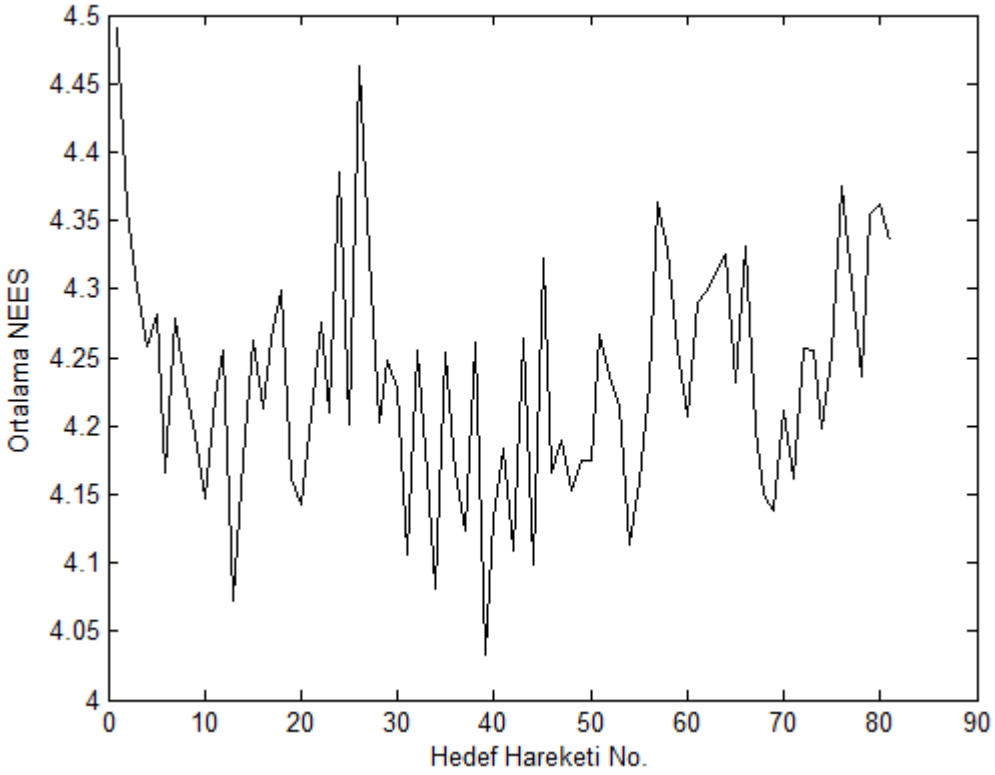
Şekil 6.8 Parçacık filtre, kestirim kovaryansının *z* bileşeninin karekökü

Hedef takip filtresinin durum kestiriminde yaptığı RMS hatalar ile filtre kestirim kovaryansı arasındaki tutarlılık ilişkisi, sadece resmedilen sonuçlar üzerinden yapılan gözlemler ile belirlenemez. Ancak, şekiller 6.3 – 6.8'de verilen sonuçlar SIR Parçacık filtrenin durum kestirim belirsizliğini olması gerekenden daha büyük kestirdiği sezgisini doğurmuştur. Bu durum, filtrenin hesapladığı NEES değerlerinin incelenmesi ile daha iyi anlaşılabilir. Eşitlik (6.8)'de tanımlanan NEES; RMS kestirim hatasının, kestirim kovaryansına oranı olarak tercüme edilebilir. Karesel bir ifade ile hesaplanan NEES, gürültü süreçlerinin Gauss gürültüsü olması halinde n_x (durum vektörünün boyutu) derece serbestliğe sahip ki-kare dağılımlı rasgele değişkendir (Bar-Shalom vd. 2001). Dolayısıyla kestirim hatası ile kestirim kovaryansının tutarlı olması için NEES değerinin ortalamasının n_x olması gerekmektedir. Bar-Shalom vd. (2001), NEES için bir hipotez testi vermiş ve ki-kare dağılım tabloları yardımıyla %95 güven aralığı tanımı yapılmıştır. Tez çalışmasında yapılan benzetimlerde NEES için % 95 güven aralığı 5,34 – 6,69 olarak belirlenmiştir. Benzetim çalışmaları sonucunda elde edilen NEES değerlerinin değişimi şekil 6.9'da verilmiştir.



Şekil 6.9 Parçacık filtre, NEES değişimi

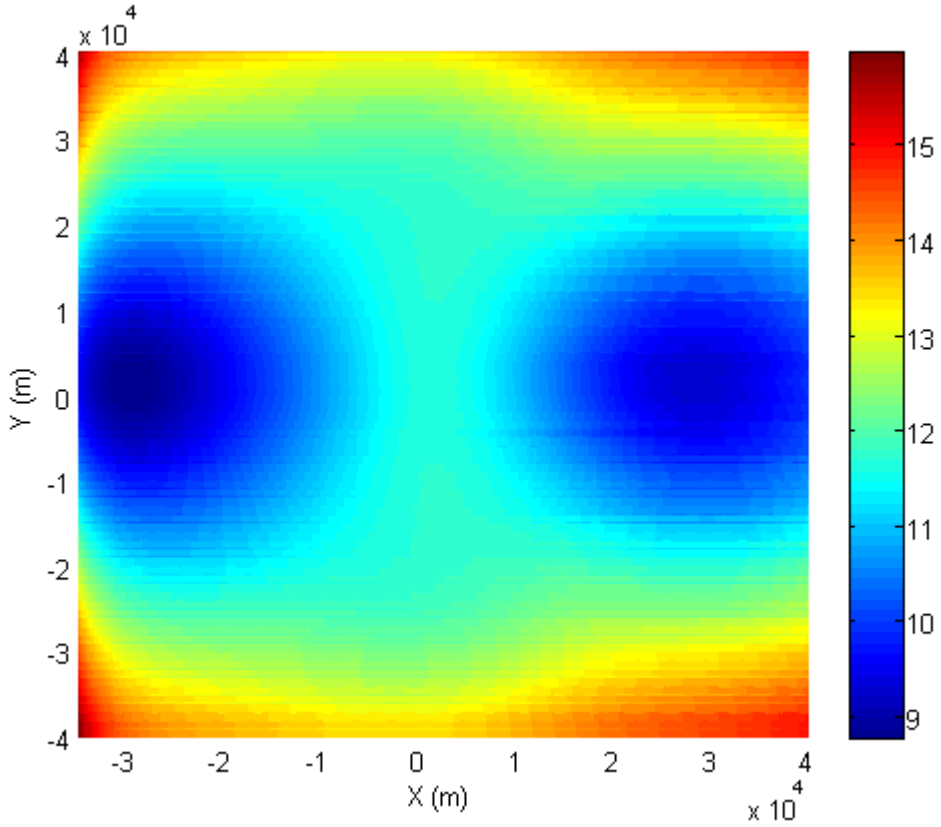
Hedef hareketinin başlangıç bölümlerinde gözlenen büyük NEES değerleri, filtrenin durum kestirim hatasının kestirim kovaryansına göre daha büyük olduğunu göstermektedir. Başlangıçta filtrenin yüksek kestirim hatası yapması beklenen bir durum olmakla birlikte, bu hatayı dengeleyecek kestirim kovaryasının da hesaplanabiliyor olması beklenmektedir. Hedef hareketinin ilerleyen bölümlerinde NEES'in azaldığı ve %95 güven aralığının alt sınırı olan 5,34 değerinin de altına indiği gözlenmiştir. Bu durum şekil 6.9'da net olarak görülemediğinden, her bir hedef hareketi için hesaplanan NEES değerlerinin ortalaması hesaplanarak şekil 6.10'da verilmiştir. Ortalama NEES değerleri şekil 6.9'da koyu mavi ile görünen kısımlardaki NEES değeri hakkında daha sağlıklı bilgi vermektedir. RMS konum hatası ve ortalama konum belirsizliklerinin incelenmesinde sezgisel olarak ulaşılan sonuçlar, NEES'nin analizi ile netlik kazanmıştır. NEES için elde edilen sonuçlar; SIR parçacık filtre ile hedef takibinde, filtrenin durum kestirim hatasından daha büyük kestirim belirsizliği öngördüğünü göstermiştir.



Şekil 6.10 Parçacık filtre, her bir hedef hareketi için ortalama NEES

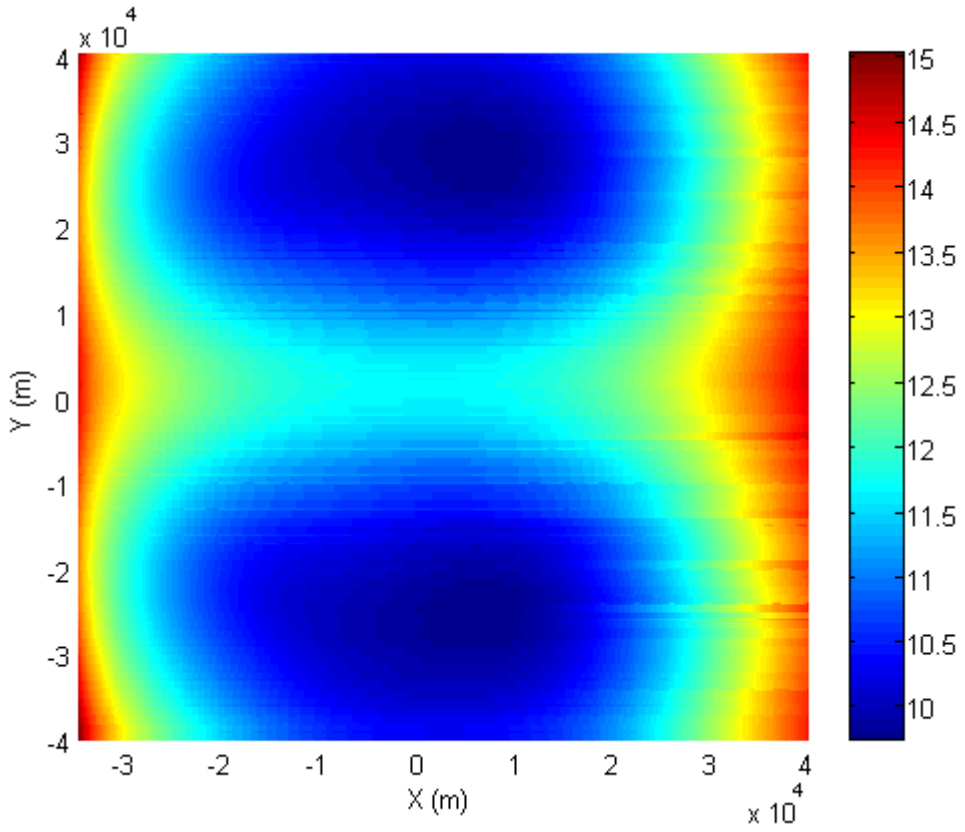
Durum kestirim kovaryansının, kestirim hatasından büyük olması Parçacık filtre ile durum kestirim açısından sorun olamamakla beraber, birden fazla hedefin olduğu ve ölçümlerin hangi hedeften geldiğinin bilinmediği problemlerde kestirim kovaryansının büyük olması, hedef ile ölçümlerin ilişkilendirilmesini güçleştirmektedir.

Multistatik radar ağında SIR parçacık filtre ile hedef takibi sırasında sonsal OIM türünden bilginin değişimi de hesaplanmıştır. SIR parçacık filtrenin ürettiği kestirimler ile OIM'nin hesaplanması bölüm 5'te sunulan sonuçlar kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Benzetim çalışmalarında elde edilen sonsal OIM, bilgi formu yerine sonsal OIM'nin tersi olan ve ikinci dereceden kestirim hatası (varyans) ile ilişkili olan sonsal IOIM türünden incelenmiştir. Eşitlik (6.10) ile tanımlanan belirsizlik ölçütü sonsal IOIM'nin multistatik radar ağındaki değişimini incelemek için kullanılmıştır. Şekil 6.11'de sonsal IOIM'nin *x* bileşeninin karekökü ne karşılık gelen belirsizlik değişimi verilmiştir. Elde edilen sonuçlar, kestirim kovaryansının ilgili bileşeni için ulaşılan sonuçlar ile benzer yapıda olup, sonsal IOM'nin tersinin bu eksen için şekilde 6.6'da

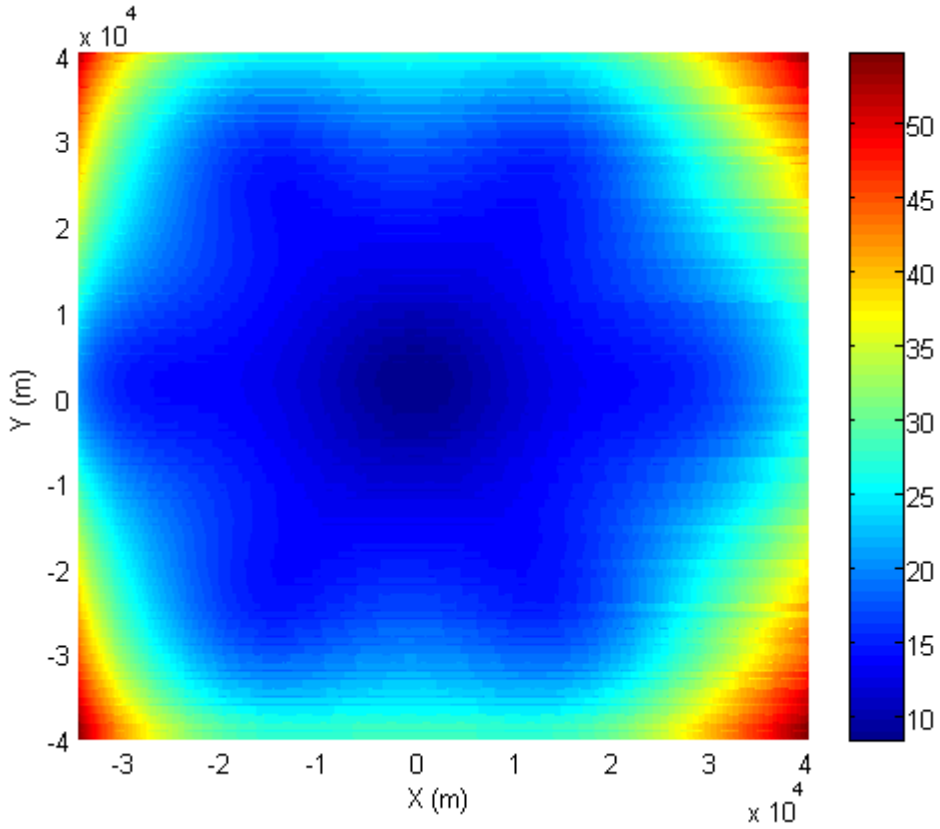


Şekil 6.11 Parçacık filtre, sonsal IOIM'nin *x* bileşeninin karekökü

verilen değerlerden çok az küçük olduğu gözlenmiştir. Sonsal IOIM'nin karekökünün *y* bileşeninin değişimi şekil 6.12'de verilmiştir. Durum vektörünün *y* bileşenine karşılık gelen sonsal IOIM türünden tanımlanan belirsizliklerin, aynı bileşene karşılık gelen RMS hata ve kestirim kovaryansı ile tanımlanan belirsizliklerle şekilsel olarak uyumlu olduğu sonucu gözlenmiştir. Benzetimlerde, RMS hatanın azaldığı bölgelerde bilginin arttığı (IOIM'nin tersi küçülmüş), buna karşın RMS hatanın arttığı yerlerde ise gözlenen bilginin azaldığı ortaya çıkmıştır. Sonsal IOM'nin x bileşenin de olduğu gibi *y* bileşeni için de elde edilen benzetim sonuçları, OIM ile hesaplanan belirsizliğin kestirim kovaryası ile hesaplanana göre çok az küçük olduğunu göstermiştir. *Z* eksenindeki, gözlenen bilginin tersi türünden belirsizliğin değişimi şekil 6.13'te verilmiştir. Sonuçlar multistatik radar ağının kapsama alanı içerisinde kalan bölgede bilginin en fazla olduğunu göstermiş ve RMS hata ve kestirim kovaryansına bağlı belirsizlik değişimi için elde edilen sonuçları destekler nitelikte çıkmıştır.



Şekil 6.12 Parçacık filtre, sonsal IOIM'nin *y* bileşeninin karekökü

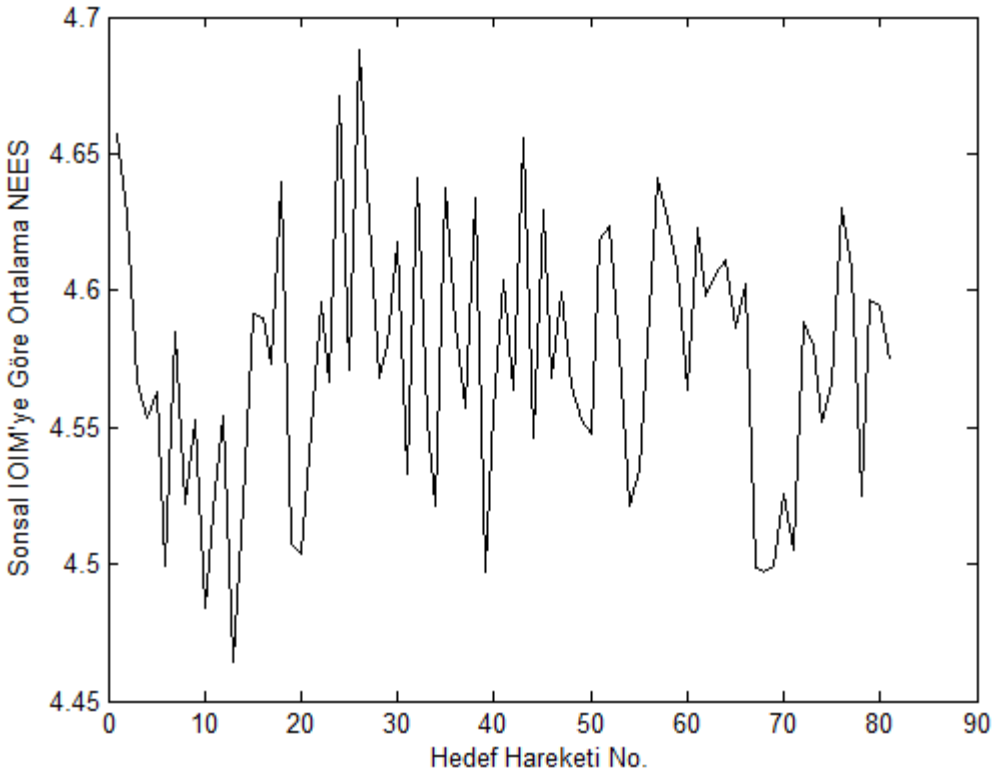


Şekil 6.13 Parçacık filtre, sonsal IOIM'nin *z* bileşeninin karekökü

Sonsal IOIM'ye bağlı olarak hesaplanan belirsizliklerin kestirim kovaryansına bağlı olarak hesaplanan belirsizliklerden çok az küçük olduğu gözlemi, NEES ölçütünün kestirim kovaryansı yerine sonsal IOIM ile hesaplanarak kanıtlanmıştır. Sonsal IOIM ile hesaplanan NEES bütün hedef hareketleri için verilmeyerek, her hedef hareketi için ortalama NEES şekil 6.14'te gösterilmiştir. Benzetimlerde elde edilen ortalama NEES yaklaşık olarak 4,6 değerinin etrafında salınmaktadır. Buna karşın kestirim kovaryansı ile hesaplanan ortalama NEES yaklaşık olarak 4,2 değerinin etrafında değişmektedir. Eşitlik (6.8)'de verilen NEES formülünde, kestirim hatası her iki hesaplama için de aynı olduğundan, NEES'nin büyümesi için paydada bulunan matrisin küçülmesi gerekmektedir. İki NEES arasındaki küçük fark, sonsal IOIM'nin kestirim kovaryansında biraz daha küçük olduğunu göstermektedir.

Multistatik radar ağında SIR Parçacık filtre ile hedef takibi sırasında gözlenen bilginin hesaplandığı benzetim sonuçları, sonsal OIM için aşağıda verilen çıkarımların yapılmasını olanaklı kılmıştır.

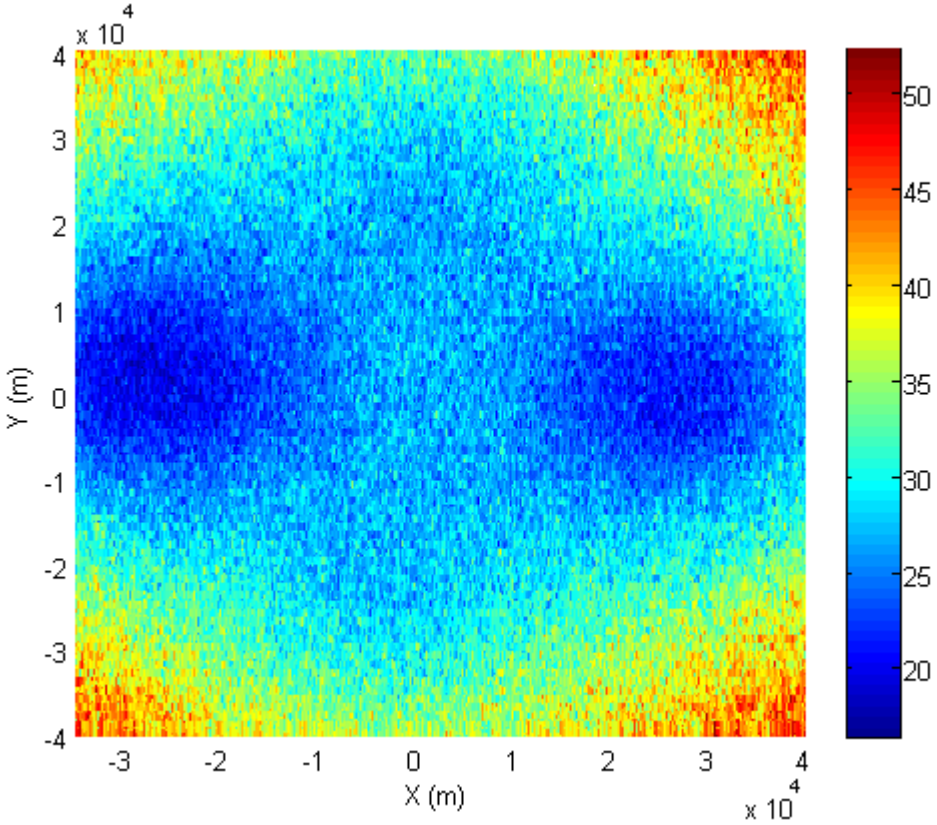
- Sonsal OIM'nin tersi ikinci derece kestirim belirsizliği ile ilişkilidir.
- Sonsal OIM'nin bütün benzetimlerde pozitif tanımlı bir matris olarak elde edilmesi, bölüm 5'te yapılan MAP kestirimi yaklaşımını doğruluğunu desteklemektedir.
- Sonsal OIM multistatik radar ağında bilginin arttığı ve azaldığı bölgeleri kovaryansa göre daha iyi belirlemektedir.



Şekil 6.14 Parçacık filtre, her bir hedef hareketi için sonsal IOIM'ye göre ortalama NEES

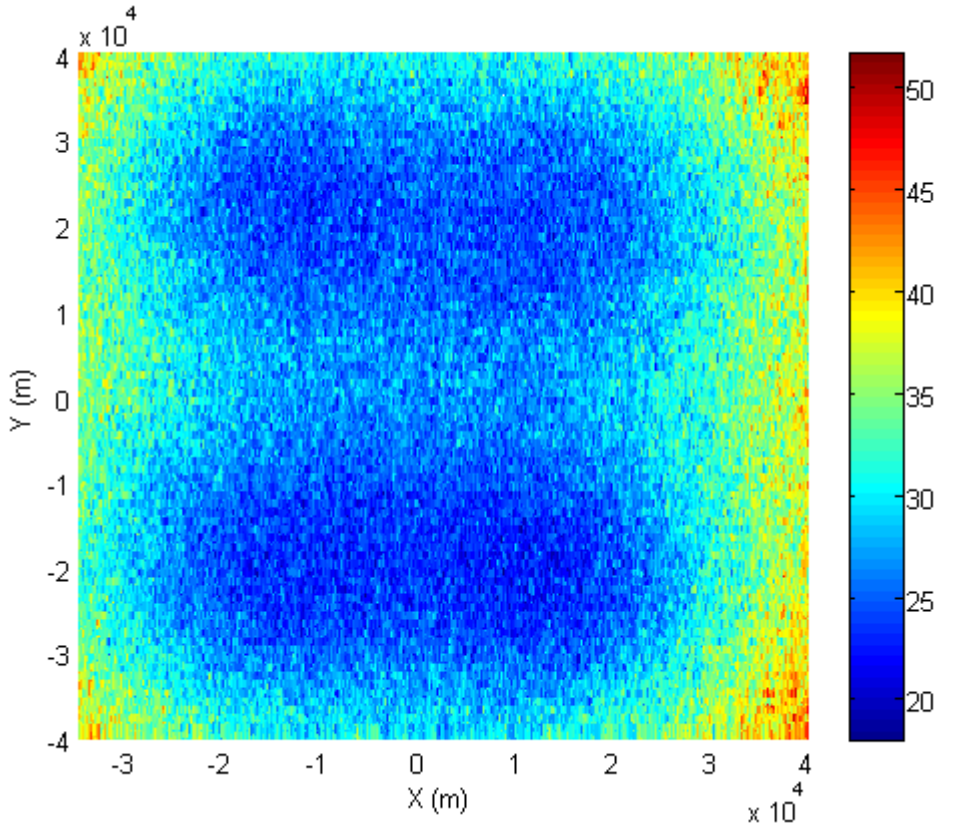
Hedef durum kestiricisi olarak Unscented Kalman filtrenin kullanıldığı benzetimlerde elde edilen RMS hata, kestirim belirsizliği ve sonsal IOIM'ye göre belirsizlik sonuçları ilerleyen sayfalarda verilmiştir. UKF'nin hesapladığı kestirimlerin *X* eksenindeki RMS konum hatalarının değişimi şekil 6.15'te gösterilmiştir. Hedef takibinin UKF ile yapılması durumunda durum vektörünün *x* bileşeni için en küçük hata *16,4m* olarak elde edilmiştir. Bu hata seviyesi, SIR parçacık filtrenin aynı eksen için yaptığı hatadan daha büyüktür. Ancak, hedefin multistatik radar ağındaki konumuna bağlı olarak değişen RMS konum hatasının, SIR Parçacık filtresi için ulaşılan sonuçlarla şekilsel olarak

benzerlik gösterdiği gözlenmiştir. Özellikle radar ağının kapsadığı bölgede hata azalırken, diğer bölgelerde kestirim hatası artmıştır.

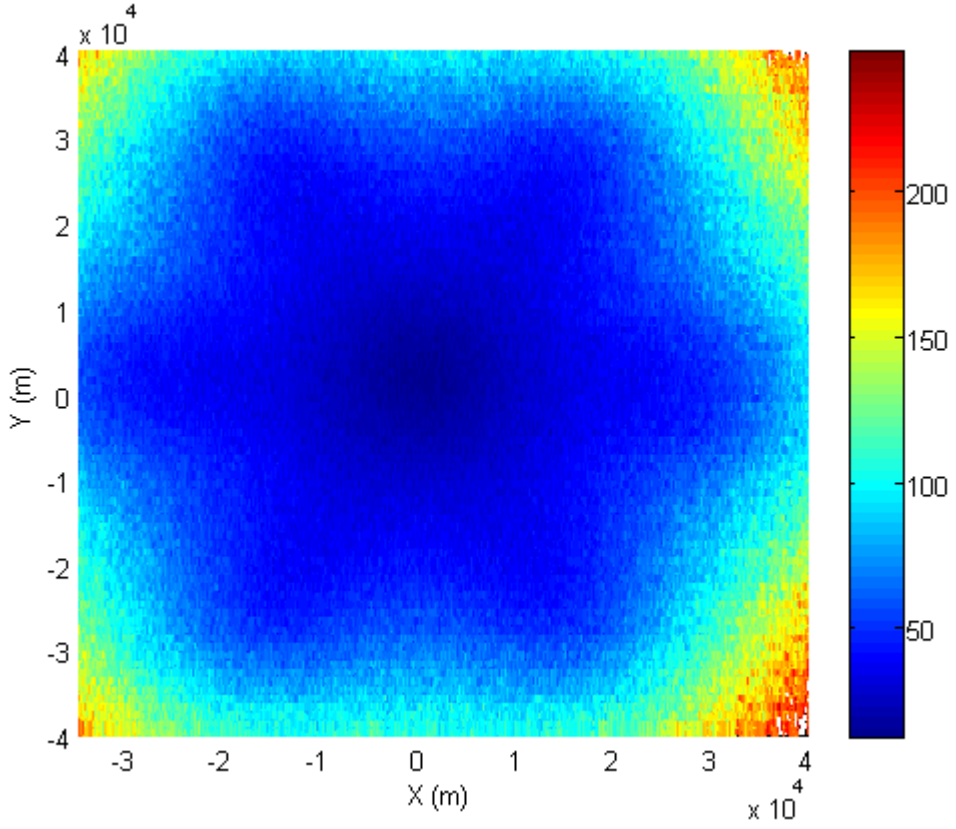


Şekil 6.15 UKF, X eksenindeki RMS konum hatası

Y ekseni için hesaplanan RMS konum hatası için de benzer bir durum olduğu gözlenmiş ve hatanın değişimi şekil 6.16'da verilmiştir. Bu eksen için elde edilen hata seviyelerinin, hedef takibinin yapılmasının amaçlandığı alcıların üzerinde bulunduğu sanal çemberin içerisinde yaklaşık olarak *18m – 32m* arasında değiştiği sonucuna ulaşılmıştır. Hedefin *Z* eksenindeki konumunun kestirilmesinde yapılan hatalar şekil 6.17'de verilmiştir. İlgilenilen bölge içerisinde UKF, *Z* ekseninde hedef takibini yaklaşık 50m hata ile başarabilmiştir. Bilginin az olduğunun bilindiği bu eksen için elde edilen sonuçlar, hata seviyesi yerine hedef takibinin devam ettirilebilmesi açısından değerlendirilirse UKF ile durum kestiriminin yine de başarılı olduğu sonucu çıkarılabilir. Her üç eksende de elde edilen RMS konum hatalarının değişimi, SIR Parçacık filtre ile durum kestirimi yapılırken elde edilen sonuçlarla şekilsel benzerlik göstermiştir.



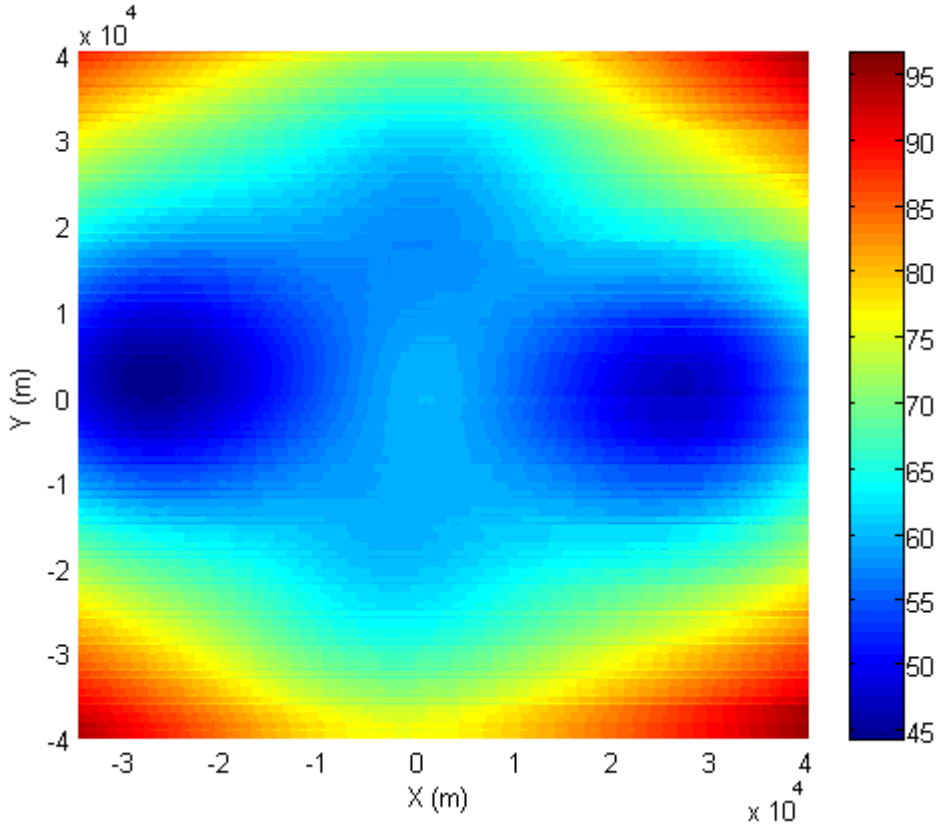
Şekil 6.16 UKF, Y eksenindeki RMS konum hatası



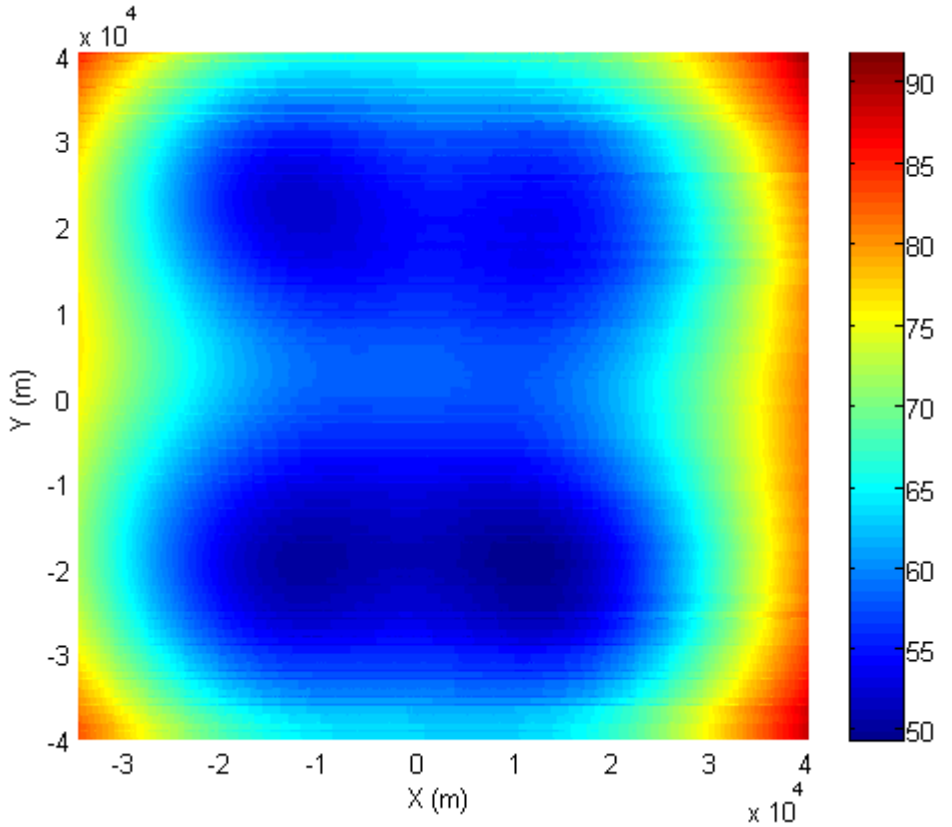
Şekil 6.17 UKF, Z eksenindeki RMS konum hatası

UKF ile elde edilen hata seviyeleri birçok hedef takibi uygulaması için kabul edilebilir olsa da SIR Parçacık filtre ile karşılaştırıldığında oldukça yüksektir. Ancak, SIR Parçacık filtre ile daha yüksek doğrulukta kestirim yapmanın maliyeti işlem yükü olarak karşımıza çıkmaktadır. Benzetim çalışmalarında SIR Parçacık filtrenin yaklaşık olarak yedi kat daha yavaş hedef durumu kestirimi hesapladığı sonucuna ulaşılmıştır. Benzetim sonuçları varlığında iki durum kestirim yönteminin kıyaslaması yapıldığında, SIR Parçacık filtrenin RMS konum hatası türünden başarımının UKF'ye göre daha iyi olduğu gözlenmiştir.

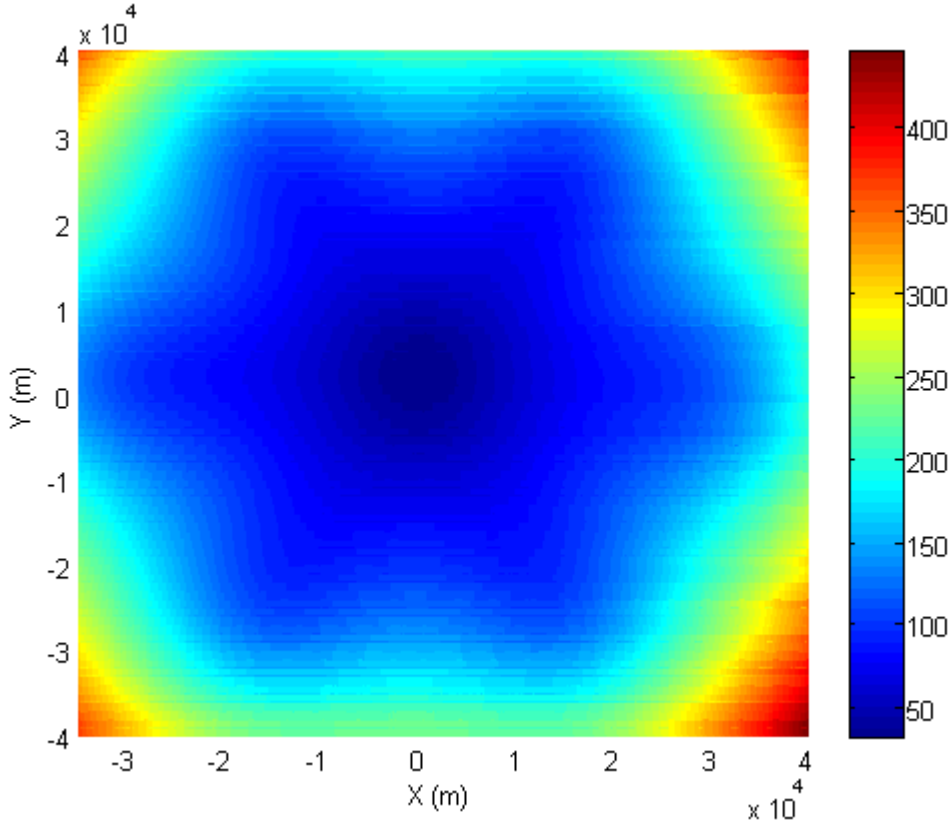
UKF'nin hesapladığı kestirim kovaryanslarının köşegen elemanlarının karekökü olarak tanımlanan belirsizliklerin değişimi *x*, *y* ve *z* bileşenleri için sırasıyla şekil 6.18, 6.19 ve 6.20'de verilmiştir. Üç eksen için de elde edilen belirsizlikler şekilsel olarak RMS konum hatası sonuçları ile uyumlu olsa da, belirsizlik seviyeleri kestirim hatalarından daha büyüktür. SIR Parçacık filtrede de karşılaşılan bu durum, UKF için NEES analizine ihtiyaç duyulmadan şekiller 6.18, 6.19 ve 6.20'de gözlenmiştir.



Şekil 6.18 UKF, kestirim kovaryansının *x* bileşeninin karekökü

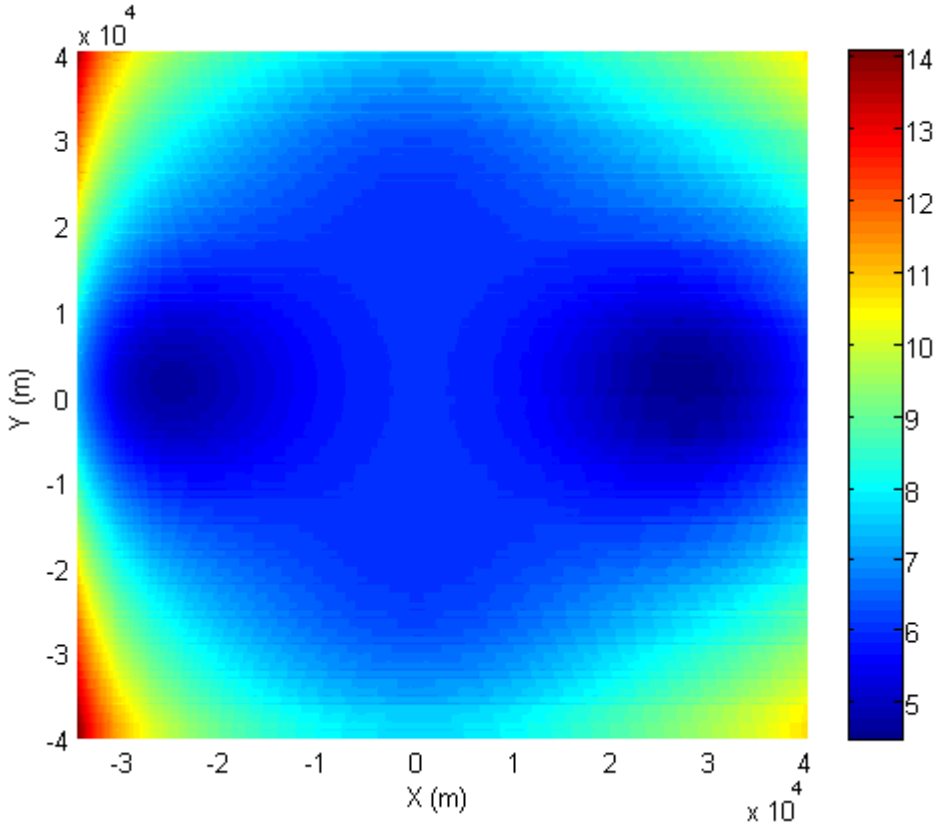


Şekil 6.19 UKF, kestirim kovaryansının *y* bileşeninin karekökü

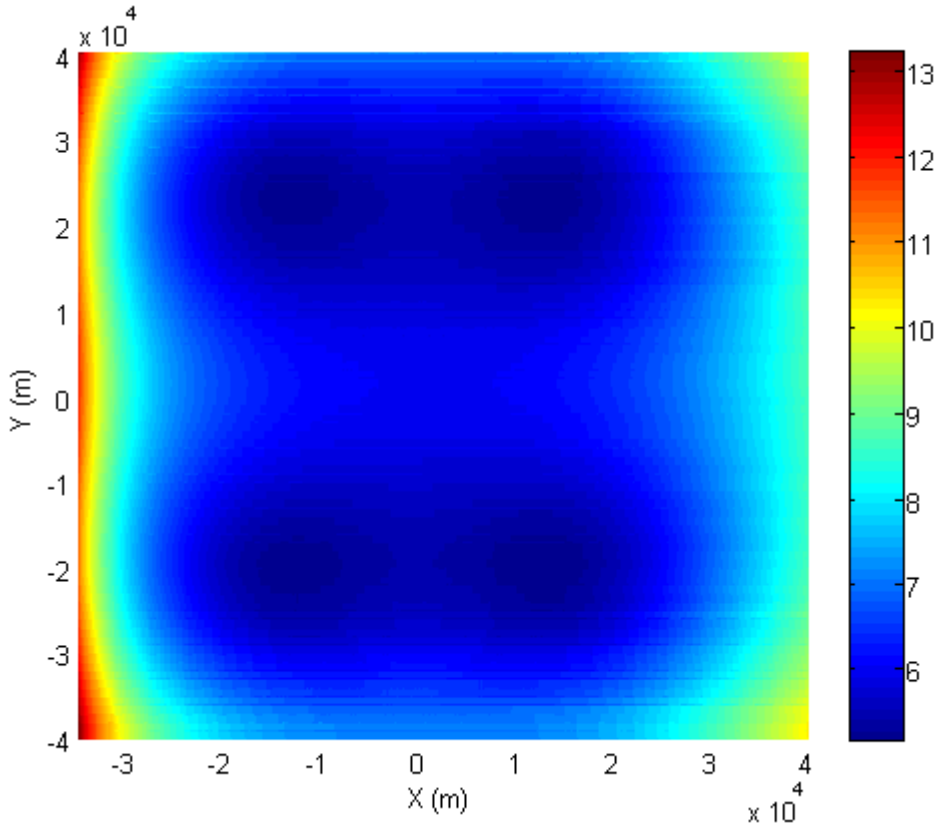


Şekil 6.20 UKF, kestirim kovaryansının *z* bileşeninin karekökü

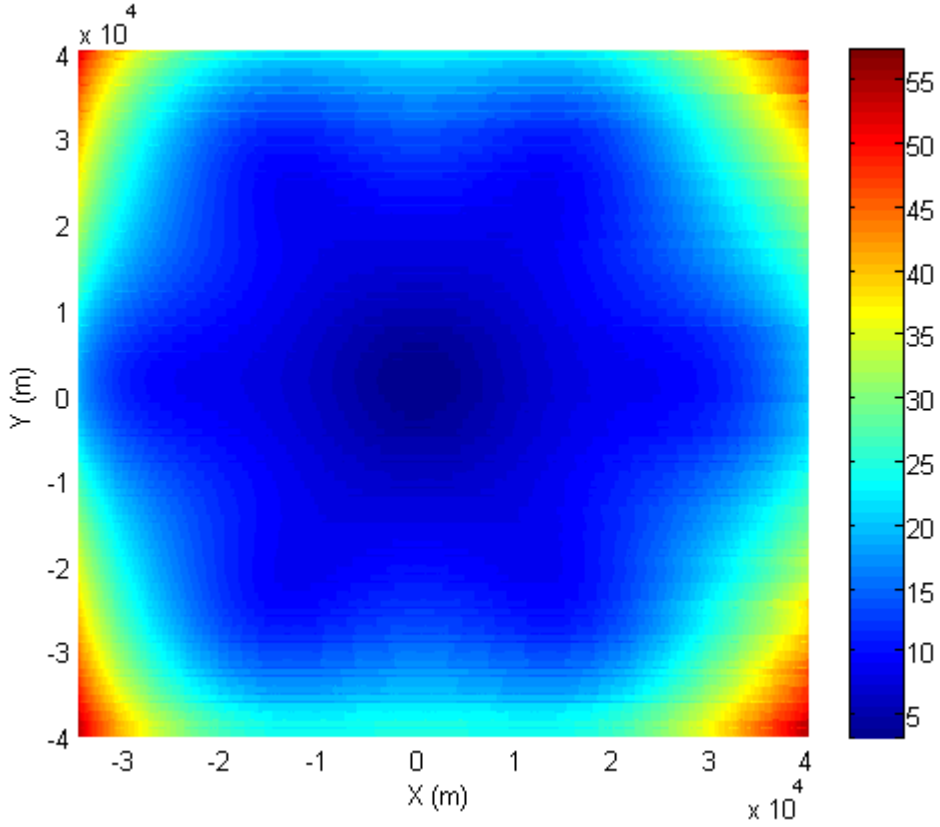
UKF ile yapılan benzetimlerde hesaplanan sonsal IOIM'ye bağlı olarak elde edilen belirsizlikler *x*, *y* ve *z* için sırasıyla şekil 6.21, 6.22 ve 6.23'te verilmiştir. Her üç eksen için elde edilen belirsizlik seviyeleri, hem UKF'nin hesapladığı kovaryans belirsizliklerinden hem de SIR Parçacık filtre ile hesaplanan sonsal IOIM'ye bağlı belirsizliklerden küçük çıkmıştır. UKF durum kestirimi etrafında hesaplanan OIM'nin daha büyük olması, filtrenin ölçümlere daha çok güvenerek kestirim yapmasından kaynaklanmaktadır. Ölçümlere daha çok güvenen UKF'de kestirim hatası büyürken, OIM'nin hesaplanma formülündeki ölçüm katkısından dolayı bilgi de büyümüş gibi görünmektedir. Belirsizliklerin radar ağı içerisindeki değişimi incelendiğinde, SIR parçacık filtre için elde edilen sonuçlara paralel şekilde, *X* ve *Y* eksenlerinde alıcıların çevresinde, *Z* eksenin de ise hem alıcıların hem de vericinin çevresinde belirsizlik azalmakta, bu bölgelerden uzaklaşıldıkça belirsizlik artmaktadır. Aynı değişimin konum kestiriminin RMS hatası ve kestirim kovaryansının değişiminde de gözleniyor olması, sonsal OIM'nin bilginin bir ölçüsü olarak kullanılabileceğini göstermiştir.



Şekil 6.21 UKF, sonsal IOIM'nin *x* bileşeninin karekökü



Şekil 6.22 UKF, sonsal IOIM'nin *y* bileşeninin karekökü



Şekil 6.23 UKF, sonsal IOIM'nin *z* bileşeninin karekökü

6.3 Dağıtık Bilgi Birleştirme: SIR Parçacık Filtre ve Kovaryans Kesişim Yöntemi

Çok sensörlü ortamlarda, sensör bilgilerini bir merkezde toplamak yerine her sensörde bulunan durum kestiricileri ile birleştirme ile hedef takibi dağıtık bilgi birleştirme olarak isimlendirilmektedir. Bütün bilginin bir merkez yerine farklı farklı noktalarda işlenmesi nedeniyle, her hangi bir noktanın işlev göremez hale gelmesi durumunda bile hedef takibinin devam ettirilebildiği dağıtık bilgi birleştirme, merkezi bilgi birleştirmeye göre daha gürbüz bir yöntemdir. Tez çalışmasında incelenen multistatik radar ağında, her bir alıcı – verici çiftinden elde edilen bilginin (ölçüm ya da durum kestirimi) dağıtık bilgi olarak birleştirilmesi için Parçacık filtre ve Kovaryans kesişim yöntemine dayanan bir algoritma geliştirilmiştir. Çalışmada; her alıcı – verici çiftinin kendi durum kestiricisi olduğu, alıcı – vericilerin kendi aralarında hedef durumu hakkında sahip oldukları yerel bilgiyi paylaştığı varsayılmış ve nihai durum kestirimi diğer alıcı – vericilerden gelen bilgilerin birleştirilmesi ile elde edilmiştir.

Dongbing (2007), çoklu sensör ortamında, durum sonsal dağılımını Gauss karışımı modeli (Gaussian Mixutre Modeli) ile modelleyerek, model parametrelerini parçacık filtresi ile kestirmiştir. Dağıtık bilgi birleştirmeyi kestirilen model parametrelerinin sensörler arasında paylaşılması yoluyla gerçekleştirmiştir. Liu vd. (2009), sensörler arasında paylaşılacak bilgiyi destek vektör makinesi algoritması ile özetleyip, bu bilgileri sensörler arasında paylaşmış ve dağıtık bilgi birleştirmeyi Parçacık filtresi tabanlı Konsensüs filtreleme ile gerçekleştirmiştir. Parçacık filtre ile dağıtık bilgi birleştirmeyi bir araya getiren bir başka çalışma (Lee-Ling vd. 2008)'de verilmiştir. Bu çalışmada, sensörlerin parçacık kümelerinin aynı geçmiş bilgiyi kullanmaları sebebiyle ortaya çıkan ilintili kestirimler probleminin üstesinden gelmek için parçacık dağılımlarına sürekli dağılım yaklaşımı yaparak bu sürekli dağılımları sensörler arasında paylaşmışlar ve bölme işlemi olarak tarif ettikleri yöntem ile kestirimlerdeki ilinti ortadan kaldırılmıştır.

Tez çalışmasında, Lee-Ling ve arkadaşlarının incelediği ilintili kestirimler problemi parçacık filtre ve kovaryans kesişim algoritmaları bir arada kullanılarak çözülmüştür. Önerilen yöntemde her alıcıda SIR Parçacık filtre tabanlı bir durum kestiricisi olduğu varsayılmış ve alıcıların ortam dinlemesi sonucunda elde ettikleri ölçümler ile hedef

durum kestirimlerini ürettikleri varsayılmıştır. Bölüm 5'te sunulan sonuçlar kullanılarak, her alıcının parçacık kümesinin temsil ettiği durum sonsal dağılımına Gauss dağılımı yaklaşımı yapılmış ve bu dağılımı tarif etmek için yeterli istatistikler olan ortalama ve kovaryans kestirimleri diğer alıcılar ile paylaşılmıştır. Alıcılar, hedef durumu hakkında ortak bilgi kullandıklarından, yapmış oldukları kestirimler ilintili olmaktadır. Bu problemin çözümü için bölüm 2.6'da verilen kovaryans kesişim yöntemi, kestirimlerin ve kestirim kovaryanslarının birleştirilmesinde kullanılmıştır. SIR Parçacık filtre ve kovaryans kesişim (KK) yönteminin birleştirilmesi ile oluşturulan dağıtık bilgi birleştirme tabanlı hedef takip yönteminin algoritması aşağıda verilmiştir.

SIR Paçacık filtre – KK Dağıtık Hedef Takibi Yöntemi

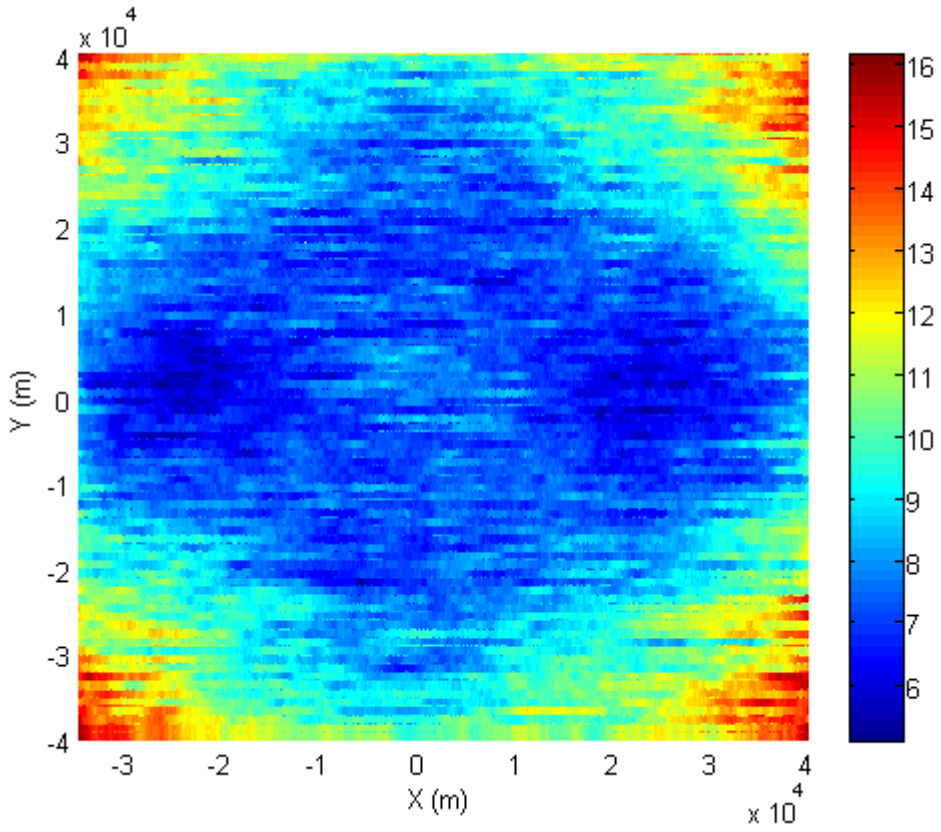
A) Her bir alcıda

1. Önem dağılımından *N* tane parçacık üret.
2. Parçacıkları durum denklemine göre zamanda ilerlet.
3. Ağırlıkları hesapla
4. Ağırlıkları normalize et.
5. Hedef durum kestirimini ve kovaryansını hesapla.
6. Hedef durum kestirimi ve kovaryansını diğer alıcılar ile paylaş.

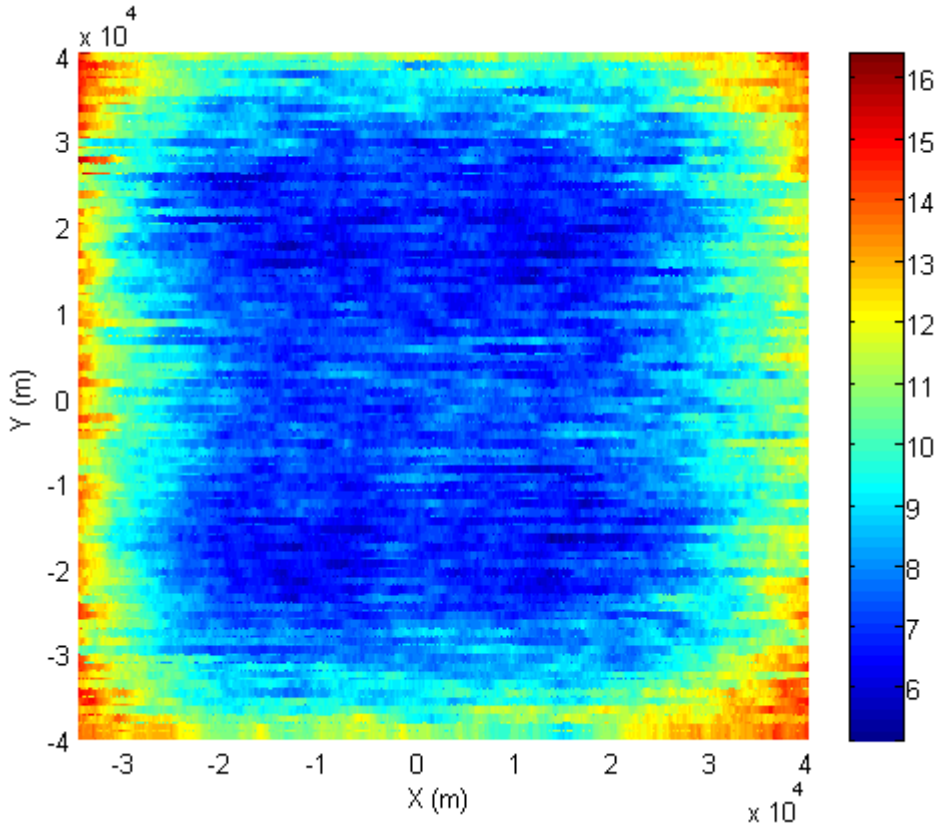
B) KK ile bilgi birleştirme adımı

1. Durum kestirimi ve kovaryansını, kovaryansın determinantına göre büyükten küçüğe doğru sırala.
2. Sıralı durum kestirimleri ve kovaryanslarından ilk ikisi ile bilgi birleştrimeye başla.
3. KK yöntemi ağrılıklarını birleştirilmiş kovaryansın determinantı minimum olacak şekilde hesapla.
4. Birleştirilmiş durum kestirimi ve kovaryansını bulunan ağırlıklar ile hesapla.
5. Bütün alıcı kestirimleri, bir önceki birleştirme sonucu ile birleştirilene kadar *B.3* adımına git.
6. KK bilgi birleştirmenin en son sonucunu nihai durum kestirimi ve kovaryansı olarak ata.

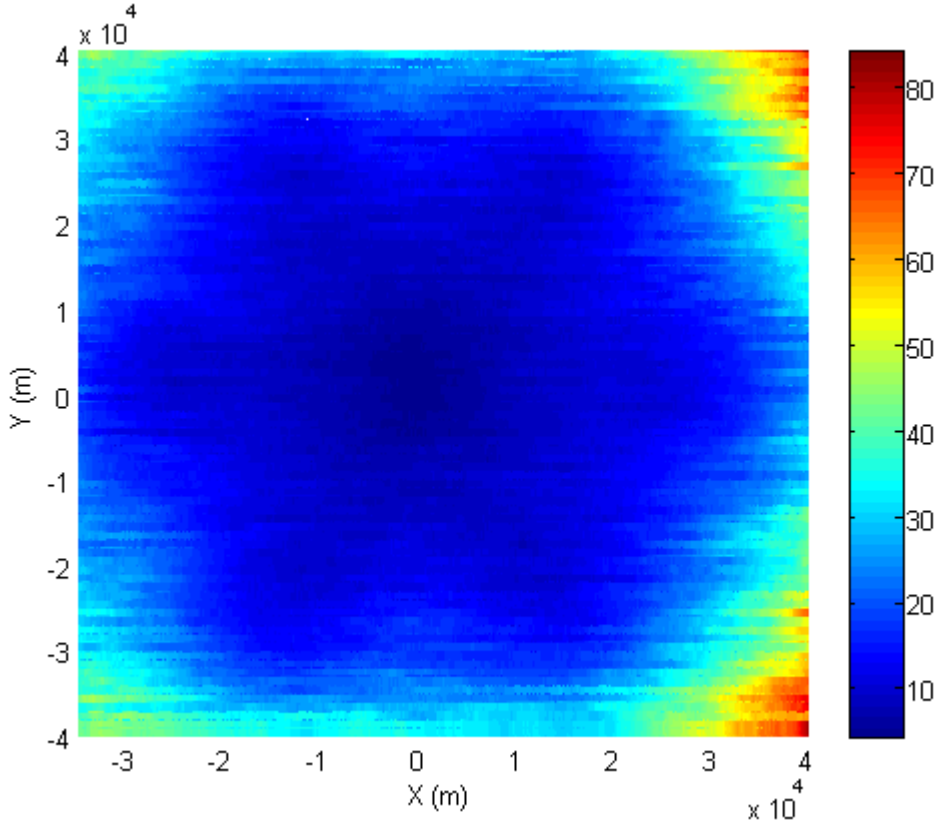
Yukarıda verilen algoritma ile multistatik radar ağında hedef takibinin başarımı benzetim yoluyla incelenmiştir. Sadece bir alıcıda hesaplanan benzetim sonuçları bu bölümde sunulmuştur. Benzetimlerde her bir alıcı için modellenen SIR parçacık filtresinde *2000* parçacık kullanılmıştır. Filtrenin diğer parametreleri bölüm 6.1.1'de verildiği gibi seçilmiştir. Benzetimlerde *X*, *Y* ve *Z* eksenleri için elde edilen RMS konum hataları şekiller 6.24, 6.25 ve 6.26'da verilmiştir. Her üç eksende de ulaşılan hata seviyelerinin, merkezi bilgi birleştirmede SIR Parçacık filtresi ile elde edilen hata seviyelerine benzer değerlerde olduğu sonucu gözlenmiştir. Ancak, dağıtık bilgi birleştirme ile hedef takibinde düşük hata seviyesi ile hedef takibinin gerçekleştirilebildiği bölgenin büyüklüğü, merkezi bilgi birleştirmeye kıyasla daha küçük olarak elde edilmiştir. RMS konum hatası sonuçları, dağıtık bilgi birleştirme için önerilen yöntem ile hedef takibinin kabul edilebilir, hatta merkezi bilgi birleştirme ile karşılaştırılabilir doğrulukta gerçekleştirilebileceğini göstermiştir.



Şekil 6.24 SIR Parçacık filtre – KK yöntemi, *X* eksenindeki RMS konum hatası

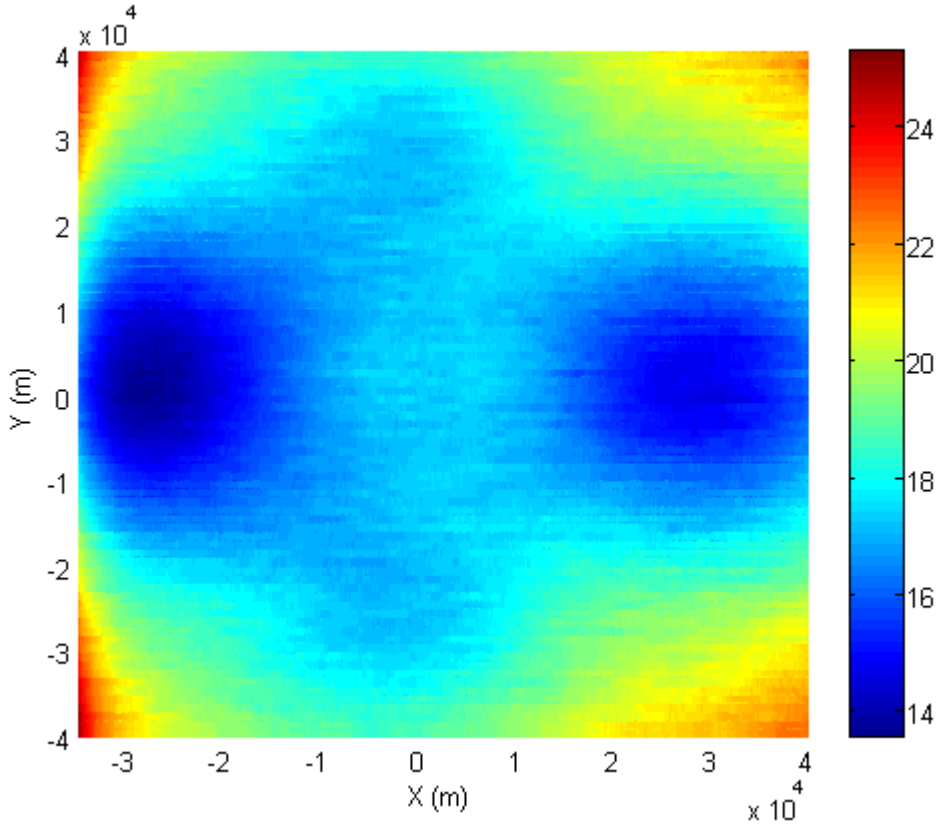


Şekil 6.25 SIR Parçacık filtre – KK yöntemi, *Y* eksenindeki RMS konum hatası

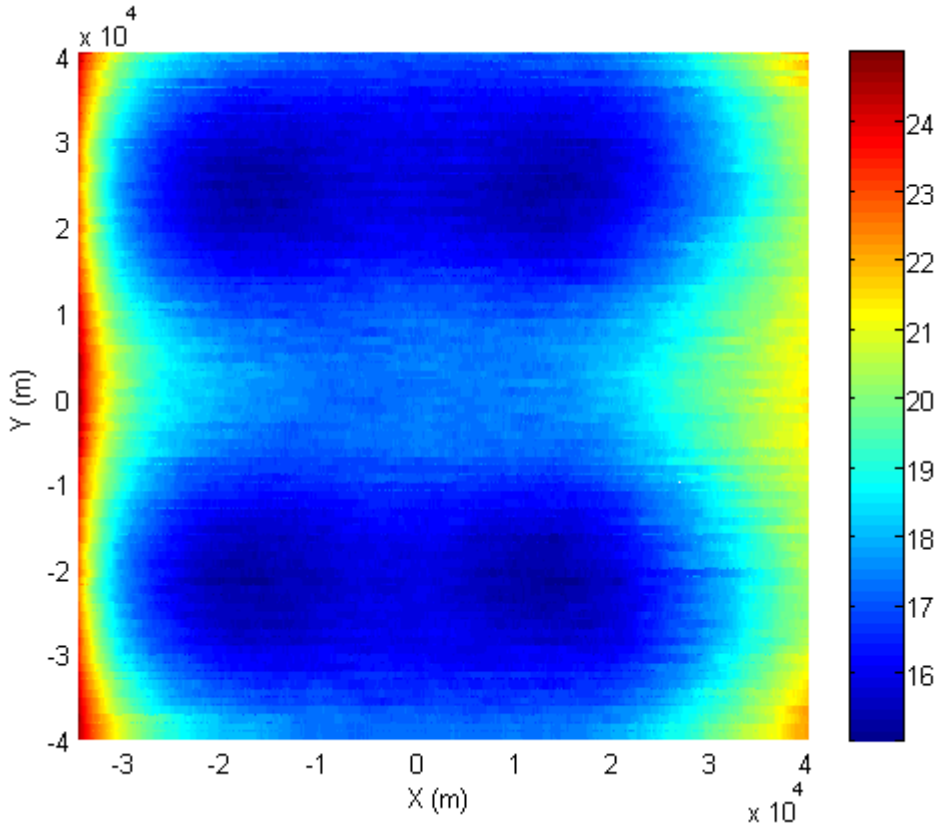


Şekil 6.26 SIR Parçacık filtre – KK, *Z* eksenindeki RMS konum hatası

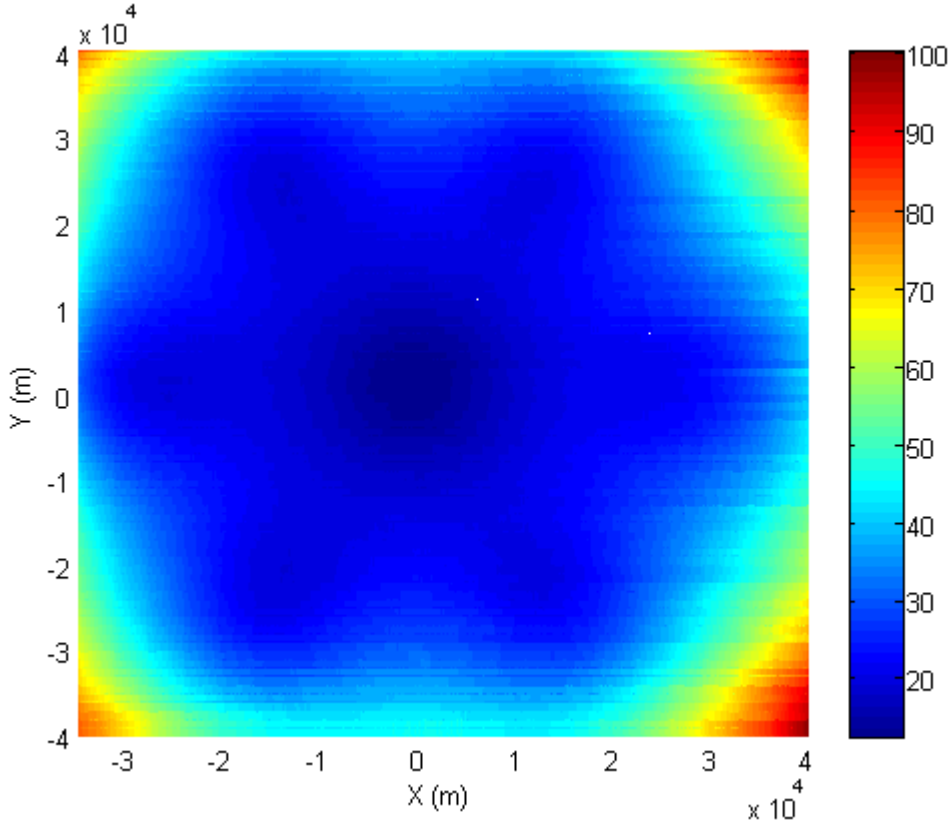
Önerilen algoritmada KK yönteminin bilgi birleştirmede kullanılmasının etkisi kovaryans kestirimlerinde de gözlenmiştir. KK yöntemi, birleştirilen kovaryansların kesişim bölgesini kapsayacak büyüklükte bir kovaryans hesaplamaktadır. Birleştirilen bilgilerin gerçek istatistiklerinin bilinmesi halinde ise birleştirilmiş kovaryans kesişim bölgesinin içinde kalmaktadır. Bu durum, kovaryansın *x*, *y* ve *z* bileşenleri için hesaplanan ve sırasıyla şekiller 6.27, 6.28 ve 6.29'da verilen belirsizlik değişimlerinde açıkça görülmüştür. Kovaryansa bağlı hesaplanan belirsizliklerin ağ içerisindeki değişim örüntüleri (pattern) merkezi bilgi birleştirme için elde edilen sonuçlar ile benzerlik gösterse de, belirsizliğin büyüklüğü yönünden karşılaştırma yapıldığında, beklendiği gibi önerilen algoritmanın daha başarısız olduğu sonucu gözlenmiştir. Ancak, algoritmanın RMS konum hatası ve belirsizlik kıstaslarına göre başarımının UKF yönteminden daha iyi olduğu sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 6.27 SIR Parçacık filtre – KK, kestirim kovaryansının *x* bileşeninin karekökü

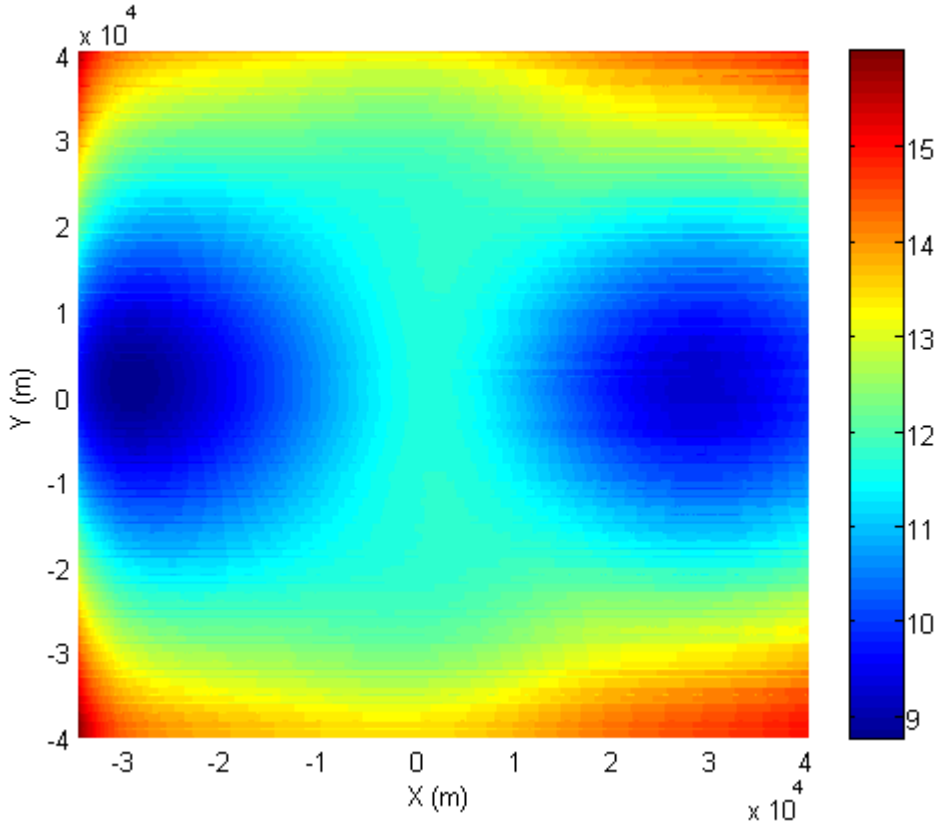


Şekil 6.28 SIR Parçacık filtre – KK, kestirim kovaryansının *y* bileşeninin karekökü

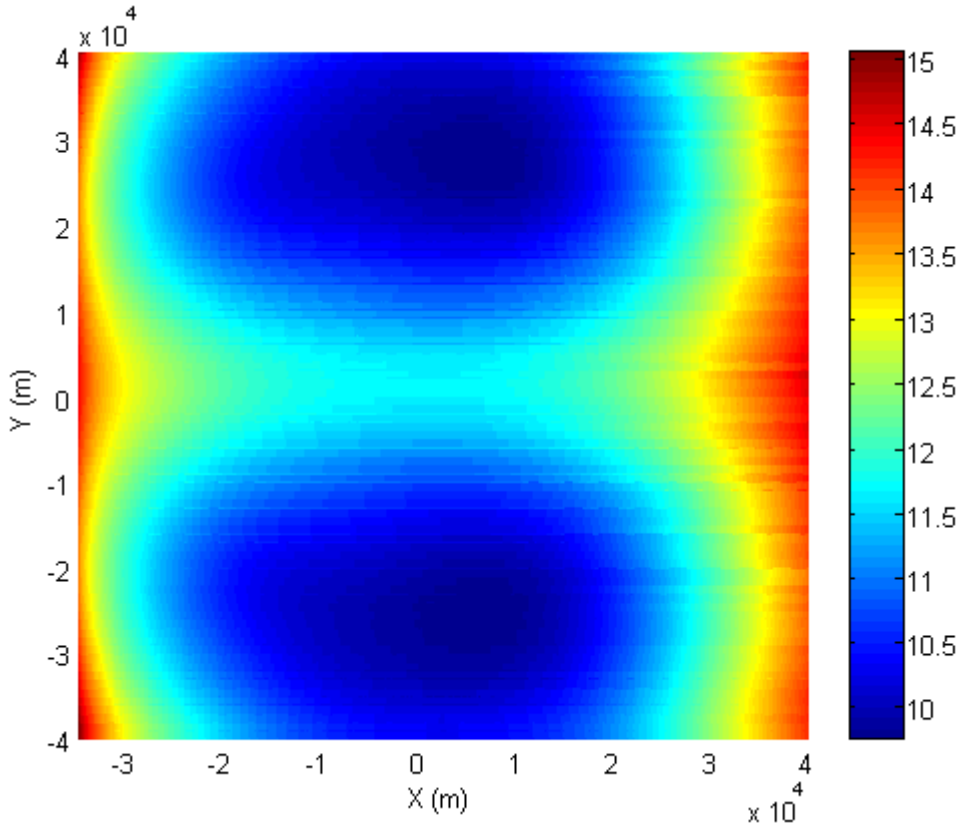


Şekil 6.29 SIR Parçacık filtre – KK, kestirim kovaryansının *z* bileşeninin karekökü

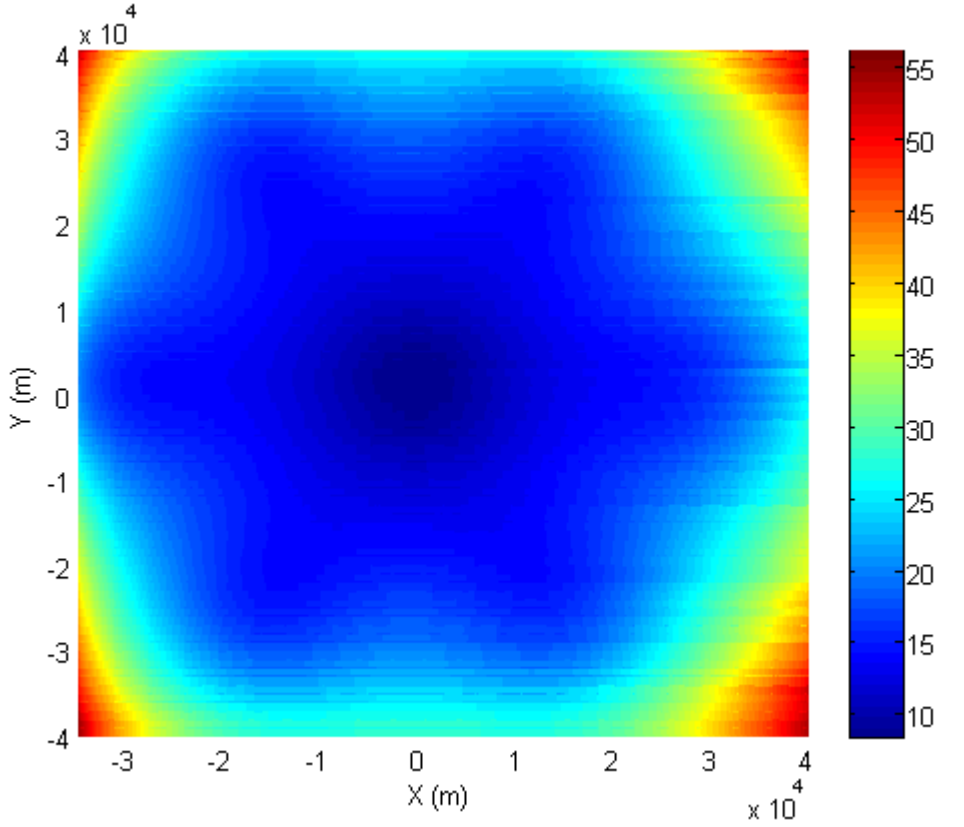
Önerilen yöntem ile gerçekleştirilen benzetimlerde sonsal OIM'nin değişimi için de sonuçlar elde edilmiştir. Sonsal IOIM'ye bağlı olarak tanımlanan belirsizliğin değişimi *x*, *y* ve *z* konum bileşenleri için sırasıyla şekiller 6.30, 6.31 ve 6.32'de verilmiştir. Kovaryansa bağlı hesaplanan belirsizliğin büyük olmasına karşın sonsa IOIM'ye bağlı elde edilen belirsizlikler, merkezi bilgi birleştirmede SIR Parçacık filtre ile ulaşılan kovaryans ve sonsal IOIM belirsizliklerine yakın seviyelerde elde edilmiştir. Ayrıca, hedef takibi sırasında yapılan RMS konum hataları ile gözlenen bilgiye bağlı tarif edilen belirsizliklerin daha tutarlı olduğu görülmüştür. Belirsizliklerin hem RMS konum hatası değişimi ile ilişkili olması hem de multistatik radar ağında bilginin yüksek ya da düşük olmasının beklendiği bölgelerde, bilgi ile ters orantılı olarak değişiyor olması, sonsal OIM'nin dağıtık bilgi birleştirme durumu için önerilen yöntem ile yapılan kestirimlerde de, bilgi ve belirsizlik ölçüsü olarak kullanılabileceğini göstermiştir. Elde edilen sonuçlar ışığında; KK yönteminin, birleştirilmiş kestirim kovaryansını olması gerekenden büyük hesaplamasından kaynaklanan dezavantajın, kestirim kovaryansı olarak sonsal IOIM'nin kullanılması ile giderilebileceği değerlendirilmektedir.



Şekil 6.30 SIR Parçacık filtre – KK, sonsal IOIM'nin *x* bileşeninin karekökü



Şekil 6.31 SIR Parçacık filtre – KK, sonsal IOIM'nin *y* bileşeninin karekökü



Şekil 6.32 SIR Parçacık filtre – KK, sonsal IOIM'nin *z* bileşeninin karekökü

6.4 Sonsal OIM'nin ölçüm seçiminde kullanımı

Bölüm 3'te sunulan sonuçlarda, durum kestiriminde kullanılan ölçüm sayısının artışının, kestirim hatasının azaltılması üzerindeki etkisinin üstel azalan bir fonksiyona sahip olduğu verilmişti. Dolayısı ile var olan bütün ölçümlerin durum kestiriminde kullanılması yerine, istenilen kestirim hatası seviyesini sağlayacak ölçüm alt kümesinin seçilmesi, durum kestirimi sırasında yapılacak işlem miktarını azaltacaktır. Bu bölümde, sonsal OIM'nin hedef durum kestiriminde kullanılacak ölçümlerin seçiminde kullanılması için gerekli kıstas tanımlanmıştır. Ayıca, sonsal OIM'den faydalanılarak belirlenecek ölçümlerin kullanılması ile hedef durum kestirimi başarımının iyileştirilebileceği ve gözlenen bilginin ağ içerisindeki sensörlerin seçimi için istatistiksel bir araç olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

Bu bölümde sunulan çalışmanın temel amacı; birçok alıcı – verici çifti tarafından bir merkeze rapor edilen ve aynı hedef ile ilişkili olduğu düşünülen ölçümlerden, hangilerinin ilgili hedefin durumunun kestirilmesinde kullanılacağının kararının verilmesidir. *k* anında bu kararın gözlenen bilgiye bağlı olarak verilebilmesi için, *k-1* anında hesaplanan sonsal OIM'nin öngörüm değerinin yeni gelen ölçümler varlığında hesaplanması gerekmektedir. *k-1* anındaki hedef durum kestirimi $\hat{x}_{k-1|k-1}$ ve sonsal OIM J_{k-1}^{OIM} olmak üzere, eşitlik (6.4)'te verilen durum denklemi kullanılarak durum öngörüm değeri eşitlik (6.11)'de verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} \tag{6.11}$$

Burada durumun zaman içerisinde doğrusal olarak değiştiği varsayılmıştır. Ancak, doğrusal olmayan fonksiyonlar için de durum öngörüm değeri *k-1* anındaki durumun ilgili fonksiyona uygulanması ile elde edilmektedir. Alıcı – verici çiftlerinin istatistiksel olarak bağımsız olduğu varsayımı ile bu sensörler tarafından *k* anında rapor edilen ölçümlerin listesi $Z = \left\{ z_k^1, \ \ldots \ z_k^M \right\}$ ve *M* toplam alcı –verici çifti sayısı olsun. Bu durumda, her bir ölçüm ve durum kestirimi öngörümü kullanılarak sonsal OIM'nin öngörümü eşitlik (6.12)'de verildiği gibi hesaplanmaktadır. Bilginin öngörümü için

eşitlik (6.12)'de verilen hesaplama formülü, eşitlik (4.23) ile özetlenen özyinelemeli sonsal OIM hesaplama yönteminin doğal bir sonucudur. Ancak burada, sonsal OIM'nin hesaplanması için gerekli olan türevler durum kestirimi yerine onun öngörüm değeri etrafında hesaplanmaktadır. *k* anında rapor edilen *M* tane ölçümden durum kestiriminin hesaplanmasında kullanılmak üzere *N* tanesinin seçimi, eşitlik (6.12)'de verilen bilgi öngörüm değerini en büyük yapan *N* tane ölçümü belirleme problemine dönüşmektedir. Hedef durumunun birden fazla elemanlı vektör olduğu durumlarda bilgi matris formunda tarif edildiğinden, en çok bilgiyi sağlayan ölçüm alt kümesinin belirlenmesi problemi için amaç fonksiyonu, bilginin determinantına bağlı olarak eşitlik (6.13)'teki gibi tanımlanmıştır.

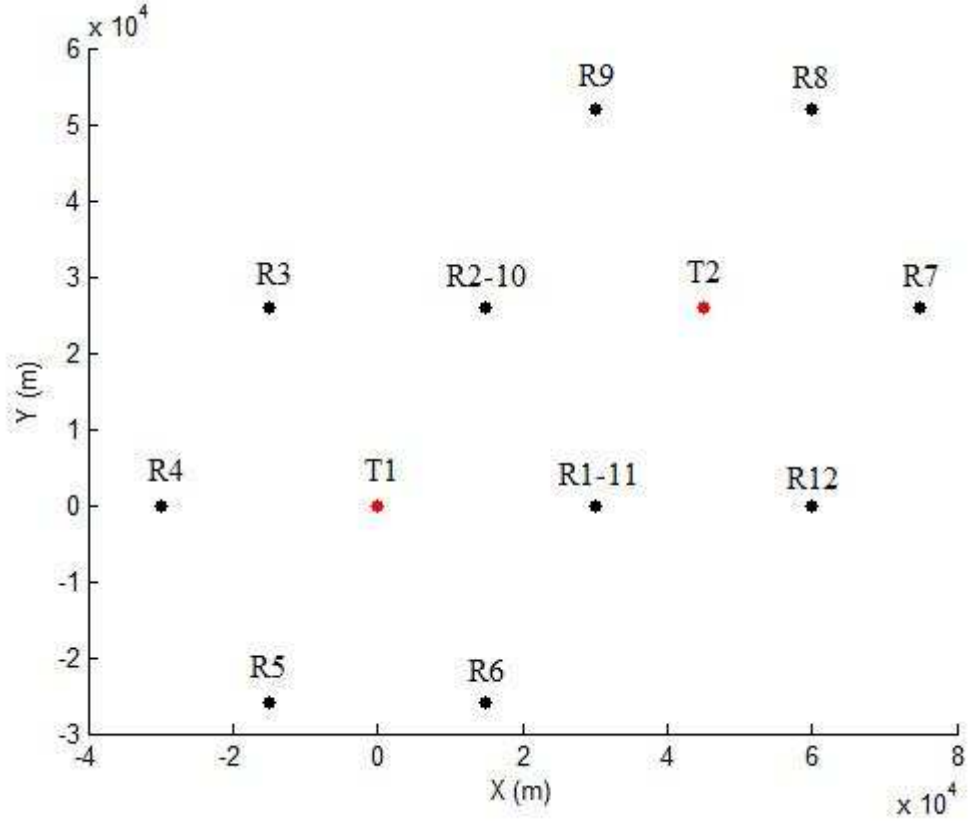
$$J_{k|k-1}^{OIM} = \sum_{i=1}^{M} \left\{ \begin{array}{c} -\nabla_{x_k} \left[\left(\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right) \right) R_k^{-1} \left(z_k^i - h_k\left(x_k\right) \right) \right]^T \Big|_{\hat{x}_{k|k-1}} + \\ \left[Q_{k-1}^{-1} + F_{k-1}^T \left(J_{k-1}^{OIM} \right)^{-1} F_{k-1} \right]^{-1} \end{array} \right\} \tag{6.12}$$

$$\max \left\{ J_{k|k-1,N}^{OIM} \right\} \tag{6.13}$$

Çalışmada, sonsal OIM'nin öngörüm değerinin determinantını en büyük yapan *N* tane ölçümün belirlenmesi ve belirlenen ölçümler ile hedef durum kestiriminin hesaplanması amacıyla bir benzetim ortamı hazırlanmıştır. Benzetim ortamı oluşturulurken bölüm 6.1'de verilen varsayımlar ve parametreler kullanılarak 10 alcı ve iki vericiden oluşan multistatik radar ağı tasarımı gerçekleştirilmiştir. Tasarlanan multistatik radar ağında yer alan alıcı ve vericilerin konum bilgileri çizelge 6.1'de verilmiştir. Çizelgede verilen ilk altı alıcı konumu ve verici konumu, tez çalışmasında kullanılan temel multistatik radar ağını tarif etmektedir. Radar ağına, konumları çizelge 6.1'de verilen dört alıcı ve bir verici daha eklenerek, şekil 6.33'te 2B Kartezyen uzaydaki görünümü verilen multistatik radar ağı elde edilmiştir. Şekilde, R1 – R11 ve R2 – R10 ile gösterilen alıcılar aynı alıcılar olup, vericiler ise kırmızı nokta ile işaretlermiş ve T1 ve T2 olarak isimlendirilmiştir.

Çizelge 6.1 Alıcı – verici konumları.

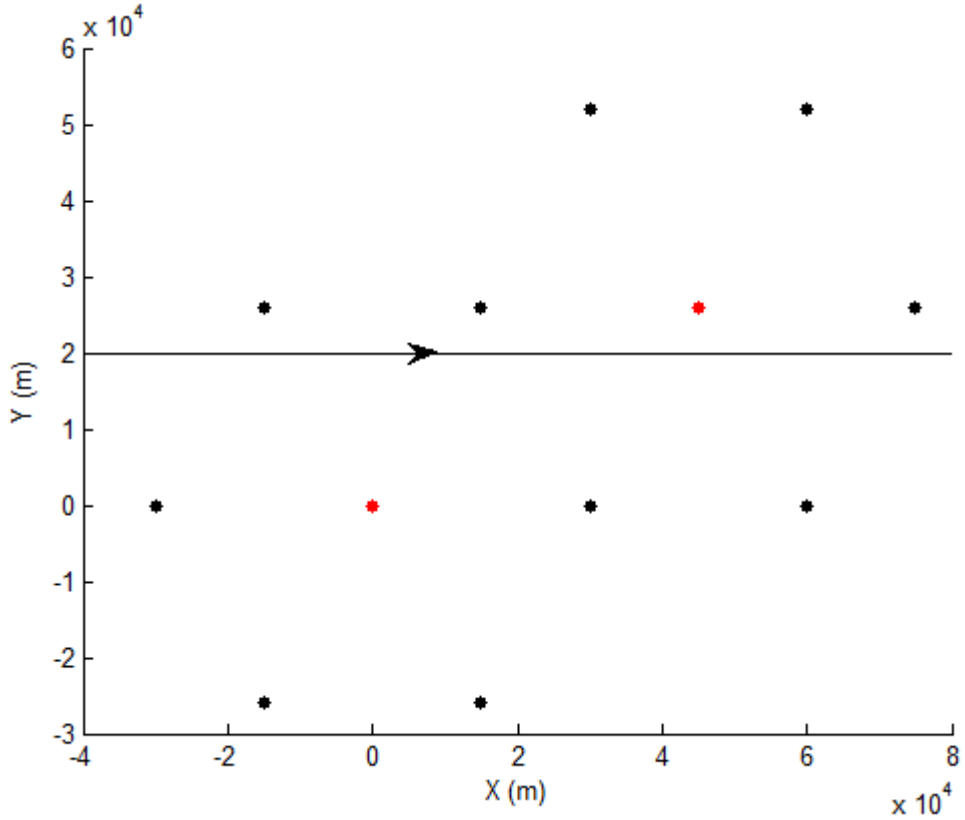
	Alıcı 1	Alıcı 2	Alıcı 3	Alıcı 4	Alıcı 5	Alıcı 6	Alıcı 7
X	30000m	15000m	-15000m	-30000m	-15000m	15000m	75000m
Y	0m	25981m	25981m	0m	-25981m	-25981m	25981m
Z	0m	0m	0m	0m	0m	0m	0m
	Alıcı 8	Alıcı 9	Alıcı 10	Verici 1	Verici 2		
X	60000m	30000m	60000m	0m	45000m		
Y	51962m	51962m	0m	0m	25981m		
Z	0m	0m	0m	0m	0m		



Şekil 6.33 2B Kartezyen uzaydaki alıcı – verici konumları

Multistatik radar ağında yer alan bütün alıcıların, iki vericiden gelen sinyalleri de dinleyebildiği ve bu sinyallerden bistatik menzil ve menzil-hızı ölçümlerini üretebildiği varsayılmıştır. Böylelikle, her ölçüm anında ilgilenilen hedefe ait 12 ölçüm elde edilmiştir. Sonsal OIM'nin hedef takibi başarımına olan etkisini incelemek amacıyla bir

hedef hareketi oluşturulmuştur. Hedefin başlangıçta 3B Kartezyen uzayda $(-40,\ 20,\ 10)km$ konumunda ve $(150,\ 0,\ 0)m/sn$ hız vektörüne sahip olduğu varsayılmıştır. Hedef, başlangıç durumundan, kesikli zaman beyaz gürültü ivmelenme modeline göre hareketine başlamakta ve 800 saniye boyunca hareket etmektedir. Böylelikle, hedef hareketinin ilk 400 saniyelik bölümünde, hedefin T1 vericisi ve çevresindeki alıcılara yakın bölgede, ikinci 400 saniyelik bölümde ise T2 vericisi ve çevresindeki alıcılara yakın bölgede hareket etmesi sağlanmıştır. Alcı – verici konumları ve hedef hareketinden oluşan senaryonun 2B Kartezyen uzaydaki görünümü şekil 6.34'te verilmiştir.



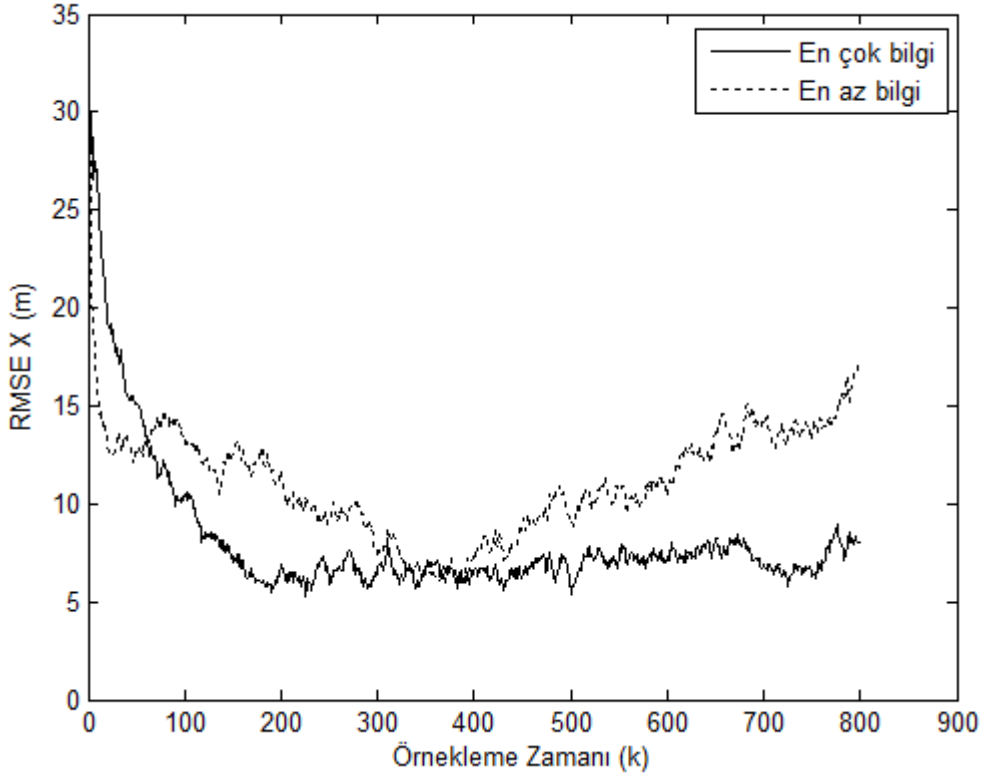
Şekil 6.34 Alıcı – verici konumları ve hedef hareketi

Çalışmada, hedef durum kestiriminin merkezi bilgi birleştirme yöntemi ile gerçekleştirildiği ve durum kestiricisinin ise SIR Parçacık filtre olduğu varsayılmıştır. Sonsal OIM'ye bağlı olarak seçilen ölçümler ile hedef takibi başarımı benzetim yoluyla incelenmiştir. Benzetimlerde başarım ölçütü olarak RMS konum hatası kullanılmıştır. Çalışmada, bilgiye bağlı olarak seçilecek ölçüm alt kümesinin takip başarımına katkısını

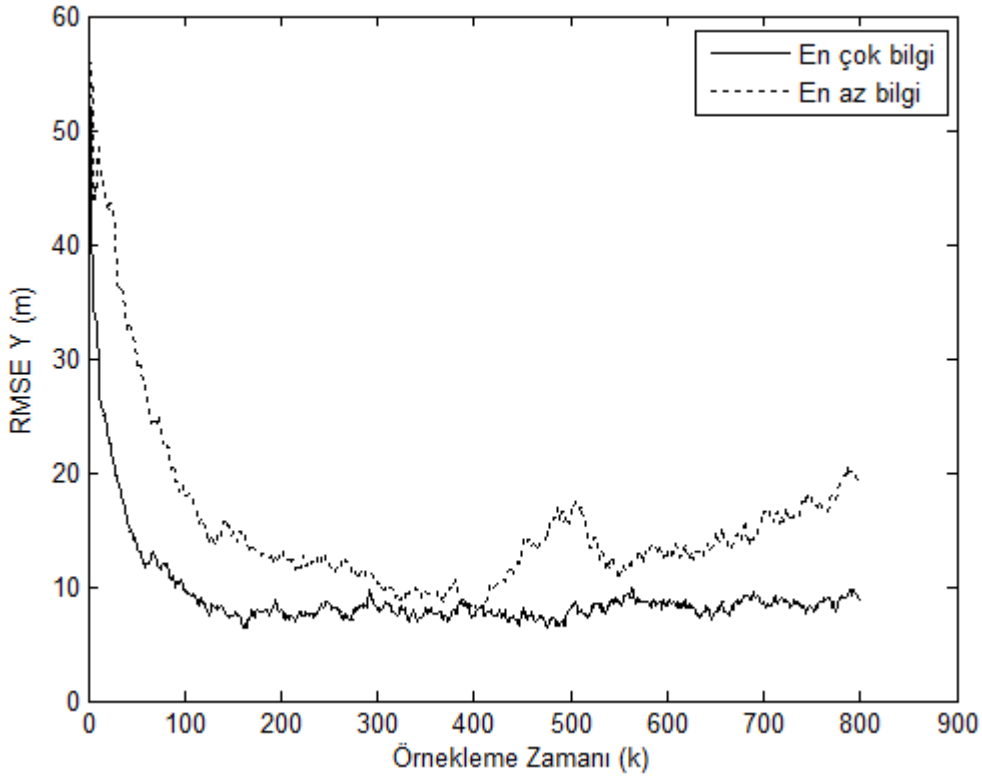
belirlemek amacıyla, bilginin en çok ve en az olduğu ölçüm alt kümeleri kullanılarak ayrı ayrı hedef takibi benzetimleri gerçekleştirilmiştir. Bilginin en çok olduğu durum eşitlik (6.13)'te verilen kıstas ile belirlenirken, bilginin en az olduğu durumun incelenmesi için eşitlik (6.14)'te verilen kıstas kullanılmıştır.

$$\min\left\{ J_{k|k-1,N}^{OIM} \right\} \tag{6.14}$$

Hedef durum kestirimi sırasında kullanılacak ölçümlerin eşitlik (6.13) ve eşitlik (6.14)'te tanımlanan kıstasların sağlanması ile belirlendiği iki durum için hedef takibi, 100 Monte Carlo benzetimi yapılarak gerçekleştirilmiştir. Benzetimler sonucunda elde edilen *X* eksenindeki RMS konum hatası değişimi şekil 6.35'te verilmiştir. Hedef takibinin başlangıcından itibaren, en çok bilgiyi kullanarak durum kestirimi yapan filtrenin, *X* ekseninde daha az hata yaparak takip gerçekleştirdiği görülmüştür. En çok bilgiyi sağlayan ölçümlerin seçilmesi ile özellikle 180. örnekleme zamanından sonra *X* eksenindeki RMS konum hatası, yaklaşık 6,5m seviyesinde gerçekleşmiştir. Buna karşın, en az bilgiyi ihtiva eden ölçümler ile yapılan benzetimlerde, *X* eksenindeki RMS konum hatası, 15m – 6,5m arasında değiştiği sonucuna ulaşılmıştır. İki durum için elde edilen sonuçlarda, sadece 350 – 400. örnekleme zamanları arasında, bilgiye bağlı ölçüm alt kümesi belirlemenin hata azaltıcı etkisi gözlenememiştir. Bu durum, hedefin birinci verici bölgesinden ikinci verici bölgesine geçtiği ve bilginin, bütün ölçüm alt kümelerine göre yaklaşık olarak benzer seviyede gerçekleştiği kısımda meydana gelmiştir. Ancak, *X* ekseni için elde edilen RMS konum hata değerleri incelendiğinde, hedef hareketinin genelinde sonsal OIM'yi en çoklayan ölçümlere bağlı olarak hedef durum kestirimi yapmanın takip hatasını azalttığı sonucuna ulaşılmıştır. Benzer bir sonuç *Y* ekseni için elde edilen RMS konum hatası değişimlerinde de gözlenmiştir. Şekil 6.36'da verilen *Y* ekseni RMS konum hataları değişim sonuçları da, en çok bilgiyi sağlayan ölçüm grubunun hedef durum kestirimi için kullanılmasının takip başarımını iyileştirdiğini göstermiştir.

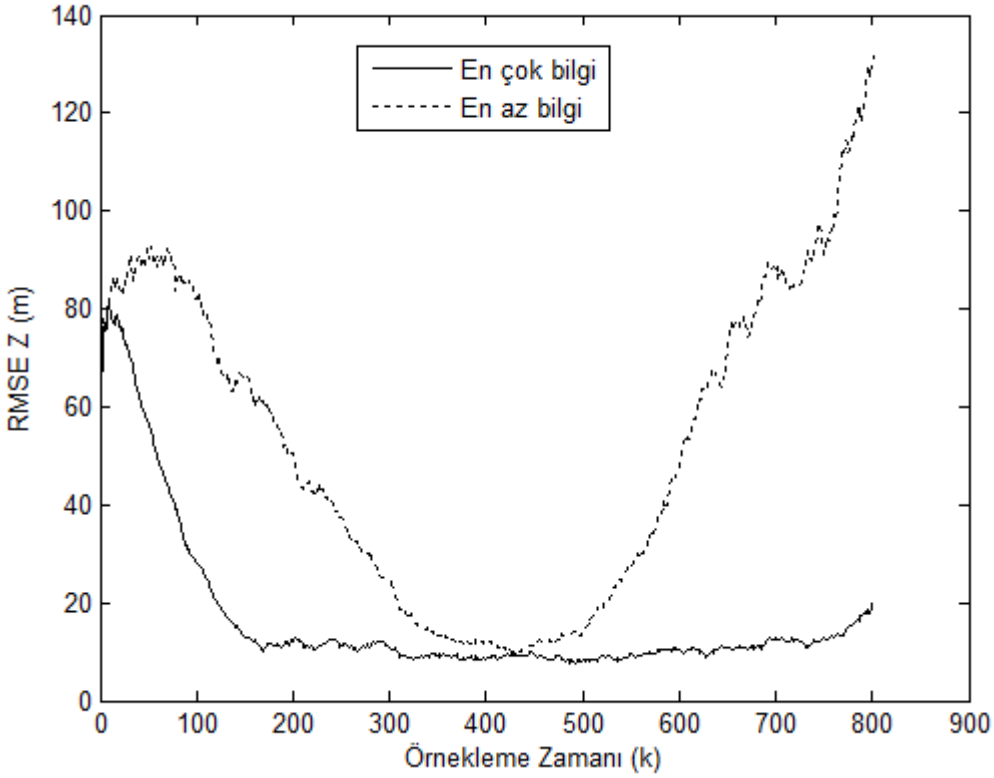


Şekil 6.35 X eksenindeki RMSE değişimi



Şekil 6.36 Y eksenindeki RMSE değişimi

Sonsal OIM'ye bağlı olarak hedef takibinde kullanılacak ölçümlerin seçilmesinin, takip başarımına olan etkisi, en belirgin olarak şekil 6.37'de verilen *Z* ekseni için elde edilen RMS konum hatası değişimlerinde görülmüştür. Multistatik radar ağının yapısı gereği elde edilebilecek bilginin az olduğu bu eksende, en az bilgiyi içeren ölçümlerin hedef durum kestirimi için kullanılması RMS konum hatasının yaklaşık 11m – 130m arasında değişmesi ile sonuçlanmıştır. Buna karşın, yüksek bilgiye sahip ölçümlerin hedef takibinde kullanımı, diğer eksenler için elde edilen sonuçları da destekler nitelikte olmuş ve RMS konum hatası değişimi yaklaşık olarak 11m civarında elde edilmiştir.



Şekil 6.37 Z eksenindeki RMSE değişimi

Sonsal OIM'nin hedef takibinin başarımını arttırılması için kullanım imkânının incelendiği bu bölümde sunulan sonuçlar; sonsal OIM'nin radar ağından elde edilen ölçümlerin hedef durumu hakkında içerdiği bilginin bir ölçüsü olduğunu ve sonsal OIM'yi en büyük yapan ölçümler ile hedef takibi yapılarak, durum kestirim hatasının azaltılabileceğini göstermiştir. Benzetimlerde elde edilen bir başka önemli sonuç ise; bilgiyi en çoklayan ölçüm alt kümesinin kullanılması ile bütün eksenlerde yaklaşık sabit

RMS hata değerine ulaşılabilmektedir. Bu sonuç; önceden belirlenecek takip hatası seviyeleri için gerekli ölçüm sayısı ve sensör konumlarının tespitinin, sonsal OIM kullanılarak yapılabileceğini göstermektedir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, multistatik radar ağlarında hedef takibi; ağ geometrisi, takip başarımı ve bilgi analizi açılarından incelenmiştir. Multistatik radar alıcı ve vericilerinin konumları olarak tanımlanan radar ağ geometrisinin, sinyal seviyesi incelemeler yerine durum kestirim hatasının istenen düzeyde gerçekleşmesi için nasıl tasarlanması gerektiği istatistiksel bilgi analizi ile gösterilmiştir. Fisher bilgisinin bir ölçüt olarak kullanıldığı çalışmalarda; hedef takibi yapılmak istenen bölgenin belirli bir kestirim hatası ile kapsanması için uygun geometrinin, alıcı antenlerin, vericinin merkezinde bulunduğu sanal çemberin üzerinde konumlandırılması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Benzer bir takip doğruluğu ve hedef takip bölgesi elde etmek için kullanılabilecek farklı geometrilerdeki ağ yapıları ve bunların avantaj/dezavantajları tartışılmıştır. Tez çalışmasında, bistatik menzil ve menzil-hızı ölçümleri üretme kabiliyetine sahip multistatik radar ağı; altı alıcıdan bir vericiden oluşan, alıcıların *30km* yarıçaplı çemberin üzerinde eşit açısal aralıklarla konumlandırıldığı ve vericinin çemberin merkezinde bulunduğu geometrik yapıda Fisher bilgisi analizinden elde edilen sonuçlar ile tasarlanmıştır.

Fisher bilgisinin gerçek durum etrafında ve hem durum hem de ölçüme göre beklenen değer alınarak hesaplanıyor olması, özel koşullar dışında bu bilginin hesaplanabilmesini olanaksız kılmaktadır. İstatistikî uygulamalarda, Fisher bilgisinin hesaplanamadığı durumlarda bu bilginin yerine Gözlenen bilgi matrisi (OIM) kullanılmaktadır. Tez çalışmasında Gözlenen bilgi matrisinin stokastik durum kestirimi problemlerinde hesaplanması için özyinelemeli fomülüzasyon yapılmıştır. Stokastik durum kestiriminde sonsal birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritmasının ikinci türevinin negatifi olarak tarif edilen Gözlenen bilginin, Tichavsky vd. (1998)'de verilen yönteme paralel bir şekilde özyinelemeli hesaplama mekanizması türetilmiştir. Türetilen hesaplama yöntemi ile sonsal OIM hesaplanmıştır. Sonsal OIM'nin *MAP* kestirimi etrafında hesaplanması gerekmektedir. Tez çalışmasında incelenen durum kestiricilerinin ürettikleri kestirimlere *MAP* kestirimi yaklaşımı yapılıp yapılamayacağı, durum sonsal dağılımının doğrusal olmayan dönüşüm altında (bistatik menzil ve menzil-hızı ölçüm fonksiyonu kaynaklı) Gauss dağılımı yapısına sahip olup olmamasına bağlıdır. Çalışmalarda durum sonsal dağılım için Gauss dağılımı yaklaşımının, sistem gürültülerinin Gauss dağılımlı ve durum başlangıç değerinin de Gauss dağılımlı rasgele

değişken olması koşullarında yapılabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç, koşullu beklenen değer kestircisi (çalışmalarda incelenen durum kestiricileri bu türde) ile *MAP* kestiricisinin aynı olduğunu göstermektedir. Dolayısı ile sonsal OIM, tez çalışmasında incelenen kestiricilerin ürettikleri kestirimler etrafında hesaplanabilmiştir. Sonsal dağılımın Gauss ya da simetrik tek modlu dağılım olmaması durumlarında koşullu beklenen değer kestiricisi ile *MAP* kestiricisi aynı olmayacağından, sonsal OIM'yi hesaplamak için sonsal dağılımın maksimum olduğu noktanın hesaplanması gerekmektedir. Çok boyutlu durum değişkeni varlığında dağılım fonksiyonunun tepe noktasının hesaplaması, analitik bir çözüm bulunamamışsa işlem yükü açısından oldukça maliyetlidir. Tez çalışmasında, bistatik menzil ve menzil-hızı ölçüldüğünde sonsal dağılıma Gauss dağılımı yaklaşımı yapılabileceğinin gösterilmesi, *MAP* kestirimine ihtiyaç duyulan uygulamalarda az işlem yükü ile istenilen kestirime ulaşılabilmesinin mümkün olduğunu göstermiştir.

Multistatik radar ağında hedef takibi merkezi bilgi birleştirme ve dağıtık bilgi birleştirme ile gerçekleştirilmiştir. Merkezi bilgi birleştirme tekniği altında durum kestiricisi olarak SIR Parçacık filtre ve UKF modellenmiştir. Her iki kestiricinin de başarımları RMS konum hatası türünden benzetimlerle ortaya konulmuştur. Benzetim sonuçlarında, SIR Parçacık filtrenin bütün hedef senaryoları için UKF'ye göre daha az konum hatası yaparak hedef takibini gerçekleştirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Ancak, konum hatasındaki başarımın işlem yükü gibi bir ödünleşimi olmuştur. SIR Parçacık filtre ile UKF'nin benzetim zamanları arasında kıyaslama yapıldığında, SIR Parçacık filtrenin yaklaşık yedi kat daha yavaş çalıştığı sonucuna ulaşılmıştır. Her iki hedef takibi yöntemi için elde edilen bir sonuç da, filtrelerin kestirim kovaryanslarının, filtrelerin kestirim hataları ile uyumlu olmamasıdır. Kestirim kovaryansları olması gerekenden büyük hesaplandığı için bu durum hedef durum kestirimi açısından sorun yaratmamaktadır. Ancak, ölçüm belirsizliği ve birden fazla ölçümün olduğu hedef ile ölçümlerin ilişkilendirilmesinin gerektiği uygulamalarda, filtre kovaryanslarının büyük olması doğru ilişkilendirme ihtimalini düşürecektir. Merkezi bilgi birleştirme ile hedef takibinde kestirim başarımı yanı sıra takip sırasında sonsal OIM'nin değişimi de incelenmiştir. Sonsal OIM'nin tersi türünden yapılan incelemelerde, bilginin değişimi ile kestirim hatasının ve kestirim kovaryansının değişimi arasında ilinti olduğu ve sonsal

OIM'nin multistatik radar ağında bilgiyi modellediği sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, sonsal OIM'nin bütün benzetimlerde pozitif tanımlı matris olarak hesaplanabilmesi, OIM'nin etrafında hesaplandığı *MAP* kestirimi yaklaşımının doğruluğunu teyit etmiştir.

Radar ağında dağıtık bilgi birleştirme ile hedef takibi, Parçacık filtre ve kovaryans kesişim yöntemlerinin birleştirilmesi ile ortaya konan yöntem ile gerçekleştirilmiştir. Sensörler arasında durum sonsal dağılımı yerine onun parametrelerini paylaşma temeline dayanan önerilen yöntem, durum sonsal dağılımına Gauss dağılımı yaklaşımı yapılabileceği sonucu varlığında oluşturulmuştur. Gauss dağılımını tanımlamak için yeterli istatistikler olan dağılımın ortalaması ve kovaryansı her sensörde SIR parçacık filtre ile kestirilerek sensörler arasında paylaşılmış ve her sensörden gelen bilgi aralarında ilinti olması sebebiyle kovaryans kesişim yöntemi ile birleştirilmiştir. Birleştirme sonucunda elde edilen nihai kestirimler için RMS konum hatası incelendiğinde, önerilen yöntemin, merkezi bilgi birleştirmede UKF ile ulaşılan hata seviyelerinden daha düşük hatalar ile hedef takibi yapabildiği gözlenmiştir. Önerilen yöntemin bir dezavantajı, bilgiler arasındaki ilintinin istatistiksel özellikleri bilinmediğinde, kestirim kovaryansının olması gerekenden daha büyük hesaplanmasıdır. Ancak, önerilen yöntem ile hedef takibinde hesaplanan sonsal OIM incelendiğinde, sonsal OIM'nin tersinin kestirim hatası ile filtrenin hesapladığı kestirim kovaryansına göre daha uyumlu olduğu gözlenmiştir. Önerilen yöntemin kovaryans hesaplama şeklinden kaynaklanan dezavantajının, filtrenin ürettiği kestirim kovaryansının parçacık uzayının modellenmesinde, sonsal OIM'nin tersi ile tarif edilen belirsizliğin ise gerçek kestirim kovaryansı olarak kullanılması ile çözülebileceği değerlendirilmektedir.

Tez çalışmasında, multistatik radar ağında hedef takip başarımının iyileştirilmesi için sonsal OIM'nin kullanılabilceği gösterilmiştir. Sonsal OIM bağlı olarak tanımlanacak kıstasa göre, radar ağından elde edilen ölçümlerden hangilerinin hedef durum kestiriminde kullanılacağı kararının verilmesi yoluyla hedef durum kestirimi hatasının azaltılabildiği gösterilmiştir. Ayrıca, sonsal OIM'den, hedef takibinde kullanılacak ölçümlerin belirlenmesinde faydalanılarak, yaklaşık olarak sabit kestirim hatası ile hedef takibi yapılabildiği sonucuna ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar varlığında; çok fazla sayıda sensörden oluşan ağ yapılarında, önceden tanımlanan kestirim hatası

seviyeleri için hangi sensörlerin kullanılması gerektiği probleminin sonsal OIM kullanılarak çözülebilceği değerlendirilmektedir.

Tez çalışmasında elde edilen sonuçlar varlığında, sonsal OIM için bir başka önemli uygulama alanının mobil sensör ağları olduğu düşünülmekedir. Mobil sensör ağlarında, sensörlerin bir sonraki anda nerede olmaları gerektiğinin kararının, en iyi ölçüm yapılabilecek bölgenin sonsal OIM kullanılarak hesaplanması ile verilebileceği değerlendirilmektedir. Mobil sensör ağlarında karşılaşılan problemin bir benzeri de askeri uygulamalarda sonarlı şamandıraların, iyi kalitede ölçüm alabilmek için nereye konumlandırılacağı kararı verilirken karşılaşılmaktadır. Özellikle şamadıra konumlarının dinamik olarak değiştirildiği uygulamalarda sonsal OIM kullanılarak bir sonraki şamandıra konumunun hesaplanabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover Publications, 1046p., USA.

Aderson, T. W. and Darling, D. A. 1952. Asymptotic Theory of Certain Goodness of Fit Criteria Based on Stochastic Process, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23; pp. 193 – 212.

Aderson, T. W. and Darling, D. A. 1954. Test of Goodness of Fit. Journal of the American Statistical Association, Vol. 49(268); pp. 765 – 769.

Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N. and Clapp, T. 2002. A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50(2); pp. 174 – 188.

Bar-Shalom, Y. and Li, X. 1995. Multitarget Multisensor Tracking: Principles and Techniques. YBS Publishing, 615p., USA.

Bar-Shalom, Y., Li, X. and Kirubarajan, T. 2001. Estimation with Application to Tracking and Navigation. Wiley – Interscience Publication, 558p., USA.

Blackman, S. and Popoli, R. 1999. Design and Analysis of Modern Tracking Systems. Artech House, 1230p., USA.

Bozdogan, A. O., Soysal, G. and Efe, M. 2009. Multistatic Tracking Using Bistatic Range and Range-Rate Measurements. 12th International Conference on Information Fusion, pp. 2107-2113.

Casella, G. and Berger R. L. 1990. Statistical Inference, Brooks/Cole Publishing, 650p., USA.

Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. 1977. Maximum Likelihood from Incomplete Data via th EM Algorithm, Journal of Royal Statistical Society, Series B, Vol. 39(1); pp. 1 – 39.

Dongbing, G. 2007. Distributed Particle Filter for Target Tracking, IEEE In. Con. on Robotics and Automation, pp. 3856 – 3861.

Doucet, A., Godsill, S. and Andrieu, C. 2000. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. Statistics and Computing, Vol.10(3); pp. 197 – 208.

Doucet, A. and Johansen, M. A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years later.
Web Sitesi. http://people.cs.ubc.ca/~arnaud/doucet_johansen_tutorialPF.pdf. Erişim tarihi: 25.05.2012.

Efron, B. and Hinkley, D. V. 1978. Assesing the Accuracy of the Maximum Likelihood Estimator: Observed versus Expected Fisher Information. Biometrika, Vol. 65; pp. 457 – 487.

Fearnhead, P. 1998. Sequential Monte Carlo Methods in Filter Theory. Phd Thesis, Metron College, University of Oxford.

Gentle, J. E. 2010. Random Number Generation and Monte Carlo Methods, Springer, 381p., USA.

Gilks, W. R. and Berzuini, C. 2001. Following a Moving Target – Monte Carlo Inference for Dynamic Bayesian Models, Journal of Royal Statistical Society, Vol. 63(B): pp. 127 – 146.

Giri, N. C. 2004. Multivariate Statistical Analysis, Marcel Dekker Inc, 558p., USA.

Gordon, N. J., Salmond, D. J. and Smith, A. F. M. 1993. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. IEE Proceedings-F, Vol. 140(2); pp. 107 – 113.

Griffiths, H. D. 2003. From a Different Perspective: Principles, Practice and Potential of Bistatic Radar. Proc. of International Radar Conference, pp. 1 – 7.

Griffiths, H. D. and Baker, C. J. 2005. Passive Coherent Location Radar Systems. Part 1: Performance Prediction. Proc.of IEEE Radar, Sonar and Navigation, Vol.152(3); pp. 153 – 159.

Griffiths, H. D., Baker, C. J. and Papoutsis, I. 2005. Passive Coherent Location Radar Systems. Part 2: Waveform Properties. Proc.of IEEE Radar, Sonar and Navigation, Vol. 152(3); pp. 160 – 168.

Hadley, G. 1965. Linear Algebra, Addison-Wesley Publishing, 290p., London.

Hernandez, M. L., Kirubarajan T. and Bar-Shalom, Y. 2004. Multisensor resource deployment using posterior Cramer-Rao bounds. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 40(2); pp. 399 – 416.

Howland, P. E., Maksimiuk, D. and Reitsma, G. 2005. FM Radio Based Bistatic Radar. Proc.of IEEE Radar, Sonar and Navigation, Vol. 152(3); pp. 107 – 115.

Johnson, D. H.1999. The Insignificance of Statistical Significance Testing, The Journal of Wildlife Management, Vol. 63(3); pp. 763 – 772.

Julier, J. and Uhlman, J. K. 1997 A New Extension to the Kalman Filter to Nonlinear Systems, In Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simul. and Controls, pp. 182 – 193.

Julier, S., Uhlmann, J. and Durrant-Whyte, H. F. 2000. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45(3); pp. 477 – 482.

Julier, S. and Uhlmann, J. 2001. General decentralized datafusion with Covariance Intersection (CI). In the Book, Handbook of Multisensor Data Fusion, ch. 12, pp. 12-1–12-25.

Kalman, R. E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Journal of Basic Engineering, Vol. 82(D); pp. 35 – 45.

Kitagawa, G. 1996. Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Non-Linear State Space Models, Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol. 5(1); pp. 1 – 25.

Kullback, S. 1959. Information Theory. John Wiley & Sons Inc, 395p., USA.

Kulpa, K. S. 2005. Multi-Static Entirely Passive Detection of Moving Targets and Its Limitations. Proc.of IEEE Radar, Sonar and Navigation, Vol. 152(3); pp. 169 – 173.

Kurtoğlu, A. 2006. Pasif Multistatik İzleme Radarları, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, 93s., Ankara.

Lee-Ling, O., Tim, B., Hugh, D.W. and Ben U. 2008. Decentralized Particle Filtering for Multiple Target Tracking in Wireless Sensor Networks, 11th Int. Con. on Inf. Fusion, pp. 1 – 8.

Lewis, P. A. W. 1961. Distribution of the Anderson – Darling Statistic, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 32(4); pp. 118 – 1124.

Li, X. and Jilkov, V. P. 2003. A Survey of Maneuvering Target Tracking Part I: Dynamic Models. IEEE Transaction On Aerospace and Electronic Systems, Vol. 39(4); pp. 1333 – 1364.

Liu, H. Q., So, H. C., Chan, F. K. W. and Liu, K. W. K. 2009. Distributed Particle Filter for Target Tracking in Sensor Networks, Progress In Electromagnetics Research C, 11; 171 – 182.

Louis, T. A. 1982. Finding the Observed Information Matrix when Using the EM Algorithm. Journal of Royal Statistical Society, Series B, Vol. 44(2); pp. 226 – 233.

Mahler, R.P.S. 2004. Statistics 101' for multisensor, multitarget data fusion, IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag., Vol. 19 (1); pp. 53–64.

Marsaglia, G. and Marsaglia, J. C. W. 2004. Evaluating the Anderson – Darling Distribution, Journal of Statistical Software, Vol. 9(2).

Melvin, D. 1979. The Algebra of Random Variables, Springer, 470p., USA.

Meng, H., Hernandez, M. L., Liu, Y. and Wang, X. 2009. Computationally Efficient PCRLB for in Clutterrd Environments: Measurement Existence Conditioning Approach. IET Signal Processing, Vol. 3(2); pp. 133 – 149.

Musso, C., Oudjane, N. and LeGland, F. 2001. Improved Regularized Particle Filters, In the Book, Squential Monte Carlo Methods in Practice, Springer.

Öztürk, F. ve Özbek, L. 2004. Matematiksel modelleme ve simülasyon, Gazi Kitabevi, 356s., Ankara.

Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H. ve Karabulut, İ. 2006. Parametre tahmini ve hipotez testi, Bıçaklar Kitabevi, 299s., Ankara.

Papaulis, A. and Pillai, S.U. 2002. Probablity, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 852p., USA.

Pearson, K. 1895. Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Skew Variation in Homogeneous Material, Phil. Trans. R. Soc.,Vol. 186; pp. 343 – 414.

Punithakumar, K., Kirubarajan, T. and Hernandez, M. 2006. Multisensor deployment using PCRLBS, incorporating sensor deployment and motion uncertainties. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 42(4); pp. 1474 – 1484.

Ristic, B., Arulampalam, M. S. and Gordon, N. 2004. Beyond the Kalman Filter. Artech House, 299p., USA.

Simandl, M., Kralovec, Y. and Tichavsky, P. 2001. Filtering, predictive, and Smoothing Cramer-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Dynamic Systems, Automatica, Vol. 37(11); pp. 1703 – 1716.

Skolnik, M. I. 1990. Radar Handbook. McGraw – Hill Book Company, USA.

Soysal, G., Bozdogan, A. O. and Efe, M. 2009. Information analysis for passive radar networks for target tracking. 12th International Conference on Information Fusion, pp. 1115 – 1122.

Soysal, G. and Efe, M. 2011. Data Fusion in a Multistatic Radar Network Using Covariance Intersection and Particle Filtering, 14th International Conference on Information Fusion, pp. 1-7.

Straub, W. O. 2009. A Brief Look at Integrals. Web Sitesi. http://www.weylmann.com/gaussian.pdf. Erişim tarihi: 25.05.2012.

Stephens, M. A. 1974. EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons, Journal of the American Statistical Association, Vol. 69(347); pp. 730 – 737.

Streit, R. L. and Leginbuhl, T. E. 1995. Probabilistic Multi-Hypothesis Tracking, Undersea Warfare Center Division, Technical Report, 50p.

Streit, R. L. 2007. Observed Information Matrices for Mulstistatic Sensor and Target Field Tracking, Oceans – Europe, pp. 1 – 6.

Streit, R. L. 2010. Poisson Point Processes: Imaging, Tracking and Sensing. Springer 273p., USA.

Tharmarasa, R., Kirubarajan, T., Hernandez, M.L. and Sinha A. 2007. PCRLB-Based Multisensor Array Management for Multitarget Tracking. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 43(2); pp. 539 – 554.

Tharmarasa, R., Kirubarajan, T. and Hernandez, M. L. 2007. Large-Scale Optimal Sensor Management for Multitarget Tracking. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part C: Applications and Reviews, Vol. 37(5); pp. 803 – 814.

Tharmarasa, R., Kirubarajan, T., Peng, J. and Lang, T. 2009. Optimization-Based Dynamic Sensor Management for Distributed Multitarget Tracking. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part C: Applications and Reviews, Vol. 39(5); pp. 534 – 546.

Tichavsky, P., Murvchik C. H. and Nehorai, A. 1998. Posterior Cramer-Rao Bounds for Discret-Time Nonlinear Filtering, IEEE Transaction on Signal Processing, Vol. 46(5); pp. 1386 – 1396.

Tobias, M. and Lanterman, A. D. 2005. Probability Hypothesis Density-Based Multitarget Tracking with Bistatic Range and Doppler Observations. IEE Proc. of Radar, Sonar and Navigation, Vol. 152(3); pp. 195 – 205.

Van Trees, H. L. 2001. Detection, Estimation, and Modulation Theory. Wiley Interscience, 697p., USA.

Willis, N. J. 2005. Bistatic Radar, Artech House, 330p., USA.

Wlash, M. J. 2006. Computing Observed Information Matrix for Dynamic Mixture Models, Naval Undersea Warfare Center Division, Technical Report, 76p.

Zhan, R. and Wan, J. 2007. Iterated Unscented Kalman Filter for Passive Target Tracking. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 43(3); pp. 1155 – 1163.

Zhang, F. 2005. The Schur Complement and Its Applications, Springer, 295p., USA.

EKLER

EK 1 Fisher Bilgisi Matrisinin Elemanlarının Hesaplanması 152

EK 2 Sonsal OIM'in Hesaplanmasında Matris Çarpımları 157

EK 3 OIM için Olabilirlik Fonksiyonunun Logaritmasının Hesyanı 159

EK 1 Fisher Bilgisi Matrisinin Elemanlarının Hesaplanması

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x^2}\right]=\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_r}\right)^2+ \frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot x}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot x}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)^2 \tag{A.1}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial y}\right]=\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right) + \frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot x}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot x}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{\dot y}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot R_r}{R_r^2}+\\ \frac{\dot y}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot R_t}{R_t^2}\end{array}\right) =-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y\partial x}\right] \tag{A.2}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial z}\right]=\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right) + \frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\begin{array}{l}\frac{\dot x}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot R_r}{R_r^2}+\\ \frac{\dot x}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot R_t}{R_t^2}\end{array}\right)\left(\frac{\dot z}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot z}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot R_t}{R_t^2}\right) =-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial x}\right] \tag{A.3}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial\dot{x}}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{x}}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{x}}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$

$$\left(\frac{(x-x_r)}{R_r}+\frac{(x-x_t)}{R_t}\right) \tag{A.4}$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial\dot{x}\partial x}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial\dot{y}}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{x}}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{x}}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$

$$\left(\frac{(y-y_r)}{R_r}+\frac{(y-y_t)}{R_t}\right) \tag{A.5}$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial\dot{y}\partial x}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial\dot{z}}\right]=+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{x}}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{x}}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$

$$\left(\frac{(z-z_r)}{R_r}+\frac{(z-z_t)}{R_t}\right) \tag{A.6}$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial\dot{z}\partial x}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y^2}\right]=\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_r}\right)^2+$$

$$\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{y}}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{y}}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)^2 \tag{A.7}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y\partial z}\right]=\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right)+$$

$$\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot y}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot y}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\left(\begin{array}{c}\frac{\dot z}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot R_r}{R_r^2}+\\ \frac{\dot z}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot R_t}{R_t^2}\end{array}\right) \tag{A.8}$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial y}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y\partial \dot x}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot y}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot y}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$

$$\left(\frac{(x-x_r)}{R_r}+\frac{(x-x_t)}{R_t}\right) \tag{A.9}$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot x\partial y}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y\partial \dot y}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot y}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot y}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$

$$\left(\frac{(y-y_r)}{R_r}+\frac{(y-y_t)}{R_t}\right) \tag{A.10}$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot y\partial y}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y\partial \dot z}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot y}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot y}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$

$$\left(\frac{(z-z_r)}{R_r}+\frac{(z-z_t)}{R_t}\right) \tag{A.11}$$

$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot z\partial y}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial z^2}\right]=\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_r}\right)^2$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)^2 \quad \text{(A.12)}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial \dot{x}}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$
$$\left(\frac{(x-x_r)}{R_r}+\frac{(x-x_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.13)}$$
$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{x}\partial z}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial \dot{y}}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$
$$\left(\frac{(y-y_r)}{R_r}+\frac{(y-y_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.14)}$$
$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{y}\partial z}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial \dot{z}}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\text{x}$$
$$\left(\frac{(z-z_r)}{R_r}+\frac{(z-z_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.15)}$$
$$=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{z}\partial z}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{x}^2}\right]=\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)^2 \quad \text{(A.16)}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}}\right] = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right) \quad \text{(A.17)}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{x} \partial \dot{z}}\right] = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right) \quad \text{(A.17)}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \Lambda(\theta)}{\partial y^2}\right] = \frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right)^2 \quad \text{(A.19)}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{y} \partial \dot{z}}\right] = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right) \quad \text{(A.20)}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{z}^2}\right] = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right)^2 \quad \text{(A.21)}$$

EK 2 Sonsal OIM'in Hesaplanmasında Matris Çarpımları

k anındaki sonsal OIM eşitlik (4.43) ile tarif edilmişti. Bu ifadede matris çarpımlarından kaynaklanan ve boyut uyumsuzluğu gibi görünen durum bu bölüm altında incelenmiştir. x_k ve z_k sırasıyla n_xx1boyutlu durum vektörü ve n_zx1 boyutlu eölçüm vektörü olmak üzere Eşitlik (A.22)'de verilen ifadeler *k* anındaki sonsal OIM'yi hesaplarken karşılaşılan ve matris boyutu uyumsuzluğu olduğunu düşündüren ifadelerdir. Bu ifadeler benzer yapıda olduğundan sadece (1) ile gösterilen ifade üzerinde yoğunlaşılarak, problemin sadece gösterim ile ilgili olduğu ve sonsal OIM'in n_xxn_x matris olarak hesaplanabileceği gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} &\bar{H}_k^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right], \qquad \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \bar{H}_k \qquad (1)\\ &\bar{F}_{k-1} Q_{k-1}^{-1}\left[x_k - f_{k-1}\left(x_{k-1}\right)\right], \quad \nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} f_k\left(x_k\right)\right]^T_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \bar{F}_k \qquad (2)\end{aligned} \tag{A.22}$$

(1) ifadesinde üç farklı değişkenin çarpımı vardır. İfadedeki son çarpan $\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right]$, n_zx1 boyutlu iki vektörün farkını içermektedir ve bütün ifadeyi n_zx1 boyutuna indiriyormuş gibi görünmektedir. Bu durumu daha iyi anlamak için (1) ifadesini ortaya çıkmasına sebep olan

$$\begin{aligned} &\nabla_{x_k} \underbrace{\left\{\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right\}^T}_{A}{}_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \\ &\underbrace{\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right]}_{\bar{H}_k^T R_k^{-1}\left[z_k - h_k\left(x_k\right)\right]} - \left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\end{aligned} \tag{A.23}$$

eşitliğini incelemek gerekmektedir. $h_k\left(x_k\right)$ $R^{n_x} \to R^{n_z}$ olmak üzere

$$h_k\left(x_k(1), \quad \cdots \quad x_k\left(n_x\right)\right) = \left(h_k(1) \quad \cdots \quad h_k\left(n_z\right)\right)^T \tag{A.24}$$

Şeklinde tanımlansın. $h_k(x_k)$'nin x_k'ye göre gradyanı eşitlik (A.24)'teki gibi tanımlanmaktadır ve $n_z \text{x} n_x$ boyutlu matristir.

$$\nabla_{x_k} h_k(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k(1)}{\partial x_{k\partial}(1)} & \frac{\partial h_k(1)}{\partial x_{k\partial}(2)} & \cdots & \frac{\partial h_k(1)}{\partial x_{k\partial}(n_x)} \\ \frac{\partial h_k(2)}{\partial x_{k\partial}(1)} & \frac{\partial h_k(2)}{\partial x_{k\partial}(2)} & \cdots & \frac{\partial h_k(2)}{\partial x_{k\partial}(n_x)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k(n_z)}{\partial x_{k\partial}(1)} & \frac{\partial h_k(n_z)}{\partial x_{k\partial}(2)} & \cdots & \frac{\partial h_k(n_z)}{\partial x_{k\partial}(n_x)} \end{bmatrix} \tag{A.25}$$

Gradyan ifadesi eşitlik (A.23)'de yerine konulursa süslü parantezler arasında bulunan *A* ifadesinin boyutu aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_{x_k} h_k(x_k) \rightarrow n_z \text{x} n_x \\ R_k^{-1} \rightarrow n_z \text{x} n_z \\ \left[z_k - h_k(x_k)\right]^T \rightarrow 1\text{x} n_z \end{array}\right\} \Rightarrow \left[z_k - h_k(x_k)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k(x_k) \rightarrow 1\text{x} n_x \tag{A.26}$$

$$A = \left\{\left[z_k - h_k(x_k)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k(x_k)\right\}^T \rightarrow n_x \text{x} 1$$

Boyutu $n_x \text{x} 1$ olan *A* ifadesinin x_k'ye göre gradyanı hesaplanırsa

$$\nabla_{x_k} \left\{\left[z_k - h_k(x_k)\right]^T R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k(x_k)\right\}^T_{x_k = \hat{x}_k^{MAP}} \rightarrow n_x \text{x} n_x \tag{A.27}$$

olarak elde edilmektedir. Bu sonuç eşitlik (A.22)'de (1) ile tarif edilen ifadenin kendisini oluşturan hesyan işlemi ile birlikte düşünülmesi gerektiğini ve böylelikle bu ifadeyi oluşturan hesyanın $n_x \text{x} n_x$ matris olarak elde edilebileceğini göstermektedir. Benzer şekilde eşitlik (A.22)'de (2) ile tarif edilen ve durum ölçüm fonksiyonu ile ilişkili olan ifadenin de $n_x \text{x} n_x$ matris olarak tarif edilen hesyan matrisinden kaynaklandığı gösterilebilir.

EK 3 OIM için Olabilirlik Fonksiyonunun Logaritmasının Hesyanı

Durum ve ölçüm fonksiyonlarının doğrusal olmadığı, gürültü süreçlerinin bağımsız toplanır beyaz Gauss gürültüsü olduğu ve başlangıç durumunun Gauss dağılımlı gürültü süreçlerinden bağımsız rasgele değişken olduğu stokastik durum – uzay modeline sahip sistem için *k* anındaki sonsal OIM aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$
\begin{aligned}
&J_k = \tilde{H}_k^T R_k^{-1} \tilde{H}_k + \left[Q_{k-1}^{-1} + \tilde{F}_{k-1}^T J_{k-1}^{-1} \tilde{F}_{k-1} \right]^{-1} - \bar{H}_k^T R_k^{-1} \left[z_k - h_k\left(x_k\right) \right] \\
&\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right)\Big|_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \tilde{H}_k, \qquad \nabla_{x_k} \left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right) \right]^T{}_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \bar{H}_k \\
&\nabla_{x_k} f_k\left(x_k\right)\Big|_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \tilde{F}_k, \qquad \nabla_{x_k} \left[\nabla_{x_k} f_k\left(x_k\right) \right]^T{}_{x_k=\hat{x}_k^{MAP}} = \bar{F}_k
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

Eşitlik (A.28)'de yer alan birinci ve ikinci terimler olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının durum vektörüne göre hesyanının negatifini göstermektedir.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}_k^T R_k^{-1} \tilde{H}_k - \bar{H}_k^T R_k^{-1} \left[z_k - h_k\left(x_k\right) \right] = \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right) R_k^{-1} \nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right) - \\
&\nabla_{x_k} \left[\nabla_{x_k} h_k\left(x_k\right) \right]^T R_k^{-1} \left[z_k - h_k\left(x_k\right) \right] \\
&= -\nabla_{x_k} \left[\nabla_{x_k} p\left(z_k \mid x_k\right) \right]^T
\end{aligned}
\tag{A.29}
$$

Olabilirlik fonksiyonu, durumun verilmesi halinde ölçümlerin fonksiyonudur ve 0 ortalamalı Σ_k kovaryanslı toplanır Gauss gürültüsü varsayımı altında

$$
p\left(z_k \mid x_k\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n_z/2} \left|\Sigma_k\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(z_k - h_k\left(x_k\right) \right)^T \Sigma_k^{-1} \left(z_k - h_k\left(x_k\right) \right) \right) \tag{A.30}
$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Olabilirlik fonksiyonunda zaman indisleri ihmal edilerek ölçüm fonksiyonunun analitik ifadesi yerine konulursa durum vektörüne göre türevi alınabilir bir ifade edilecektir. Bistatik menzil ve mezil-hızı ölçümleri durum vektörü için $\theta \triangleq x_k = \left[x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad z \quad \dot{z} \right]^T$, alıcı konumu $\left(x_r, \quad y_r, \quad z_r \right)$ ve verici konumu

$(x_t,\ y_t,\ z_t)$ şeklide tanımlansın. 3B Kartezyen uzayda tanımlanan bu bilgiler kullanılarak ölçüm fonksiyonu eşitlik (A.31)'de verildiği gibi tarif edilmektedir.

$$h(\theta)=\begin{bmatrix} R \\ \dot{R} \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} R = R_r + R_t \\ \dfrac{\dot{x}(x-x_r)+\dot{y}(y-y_r)+\dot{z}(z-z_r)}{R_r}+\dfrac{\dot{x}(x-x_t)+\dot{y}(y-y_t)+\dot{z}(z-z_t)}{R_t} \end{bmatrix} \tag{A.31}$$

k anındaki ölçümler $z_k \triangleq Z=\begin{bmatrix} Z_R & Z_{\dot{R}} \end{bmatrix}^T$ olarak tanımlanırsa olabilirlik fonksiyonunun logaritması eşitlik (A.32)'de verildiği gibi yazılabilir.

$$\ln p(Z\mid\theta)=\ln\left(2\pi\det(\Sigma)\right)-\frac{1}{2\sigma_R^2}\left(\begin{array}{l}\sqrt{(x-x_r)^2+(y-y_r)^2+(z-z_r)^2}+\\ \sqrt{(x-x_t)^2+(y-y_t)^2+(z-z_t)^2}-Z_R\end{array}\right)^2$$
$$-\frac{1}{2\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\dot{x}(x-x_r)+\dot{y}(y-y_r)+\dot{z}(z-z_r)}{R_r}+\\ \dfrac{\dot{x}(x-x_t)+\dot{y}(y-y_t)+\dot{z}(z-z_t)}{R_t}-Z_{\dot{R}}\end{array}\right)^2 \tag{A.32}$$

Burada σ_R^2 ve $\sigma_{\dot{R}}^2$ ölçüm kovaryansının bistatik menzil ve menzil-hızına karşılık gelen köşegen elemanlarıdır ve eşitlik (A.33)'te tanımlanan ölçüm kovaryansında verilmiştir.

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_R^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{R}}^2 \end{bmatrix} \tag{A.33}$$

Eşitlik (Ek.z.6)'da verilen olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının negatifinin hesyanı 6x6 boyutunda matris olacaktır ve eşitlik (A.34)'de bu matris için gerekli tanımlama yapılmıştır.

$$\nabla_{x_k}\left[\nabla_{x_k} p(Z\mid\theta)\right]^T = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial \dot{x}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial \dot{z}} \\ \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{x}\partial x} & \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{x}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{x}\partial \dot{z}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{z}\partial x} & \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{z}\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial^2 p(Z\mid\theta)}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{A.34}$$

Hesyan matrisinin bileşenleri eşitlik (A.35) – (A.55)'te verilmiştir.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sigma_R^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{R_r} - \dfrac{(x-x_r)^2}{R_r^3} + \\ \dfrac{1}{R_t} - \dfrac{(x-x_t)^2}{R_t^3} \end{pmatrix}(R - Z_R) + \frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r} + \frac{x-x_t}{R_r}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\begin{pmatrix} \dfrac{3(x-x_r)^2\dot{R}_r}{R_r^4} - \dfrac{2\dot{x}(x-x_r)}{R_r^3} - \dfrac{\dot{R}_r}{R_r^2} + \\ \dfrac{3(x-x_t)^2\dot{R}_t}{R_t^4} - \dfrac{2\dot{x}(x-x_t)}{R_t^3} - \dfrac{\dot{R}_t}{R_t^2} \end{pmatrix}(\dot{R} - Z_{\dot{R}}) \\ &+ \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{x}}{R_r} - \frac{(x-x_r)\dot{R}_r}{R_r^2} + \frac{\dot{x}}{R_t} - \frac{(x-x_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial y} &= -\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{(x-x_r)(y-y_r)}{R_r^3} + \frac{(x-x_t)(y-y_t)}{R_t^3}\right)(R - Z_R) + \\ &\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r} + \frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{y-y_r}{R_r} + \frac{y-y_t}{R_t}\right) \\ &- \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{x}(y-y_r)}{R_r^3} + \dfrac{\dot{y}(x-x_r)}{R_r^3} - \dfrac{3(x-x_r)(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^4} \\ + \dfrac{\dot{x}(y-y_t)}{R_t^3} + \dfrac{\dot{y}(x-x_t)}{R_t^3} - \dfrac{3(x-x_t)(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^4} \end{pmatrix}(\dot{R} - Z_{\dot{R}}) \\ &+ \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{x}}{R_r} - \frac{(x-x_r)\dot{R}_r}{R_r^2} + \frac{\dot{x}}{R_t} - \frac{(x-x_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{y}}{R_r} - \dfrac{(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^2} + \\ \dfrac{\dot{y}}{R_t} - \dfrac{(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y\partial x} \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial z}=-\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{(x-x_r)(z-z_r)}{R_r^3}+\frac{(x-x_t)(z-z_t)}{R_t^3}\right)(R-Z_R)+\\
&\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right)\\
&-\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\dot x(z-z_r)}{R_r^3}+\dfrac{\dot z(x-x_r)}{R_r^3}-\dfrac{3(x-x_r)(z-z_r)\dot R_r}{R_r^4}\\ +\dfrac{\dot x(z-z_t)}{R_t^3}+\dfrac{\dot z(x-x_t)}{R_t^3}-\dfrac{3(x-x_t)(z-z_t)\dot R_t}{R_t^4}\end{array}\right)(\dot R-Z_{\dot R})\\
&+\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\dot x}{R_r}-\dfrac{(x-x_r)\dot R_r}{R_r^2}+\\ \dfrac{\dot x}{R_t}-\dfrac{(x-x_t)\dot R_t}{R_t^2}\end{array}\right)\left(\frac{\dot z}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot z}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\\
&=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial x}
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial \dot x}=\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{1}{R_r}-\frac{(x-x_r)^2}{R_r^3}+\frac{1}{R_t}-\frac{(x-x_t)^2}{R_t^3}\right)(\dot R-Z_{\dot R})\\
&+\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot x}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot x}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(x-x_r)}{R_r}+\frac{(x-x_t)}{R_t}\right)\\
&=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot x\partial x}
\end{aligned}
\tag{A.38}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial \dot y}=-\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{(x-x_r)(y-y_r)}{R_r^3}+\frac{(x-x_t)(y-y_t)}{R_t^3}\right)(\dot R-Z_{\dot R})\\
&+\frac{1}{\sigma_{\dot R}^2}\left(\frac{\dot x}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot R_r}{R_r^2}+\frac{\dot x}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot R_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(y-y_r)}{R_r}+\frac{(y-y_t)}{R_t}\right)\\
&=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot y\partial x}
\end{aligned}
\tag{A.39}
$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial x\partial \dot{z}}=-\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{(x-x_r)(z-z_r)}{R_r^3}+\frac{(x-x_t)(z-z_t)}{R_t^3}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{x}}{R_r}-\frac{(x-x_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{x}}{R_t}-\frac{(x-x_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(z-z_r)}{R_r}+\frac{(z-z_t)}{R_t}\right) \qquad \text{(A.40)}$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{z}\partial x}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y^2}=\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\begin{matrix}\frac{1}{R_r}-\frac{(y-y_r)^2}{R_r^3}+\\ \frac{1}{R_t}-\frac{(y-y_t)^2}{R_t^3}\end{matrix}\right)(R-Z_R)+\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_r}\right)^2$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\begin{matrix}\frac{3(y-y_r)^2\dot{R}_r}{R_r^4}-\frac{2\dot{y}(y-y_r)}{R_r^3}-\frac{\dot{R}_r}{R_r^2}+\\ \frac{3(y-y_t)^2\dot{R}_t}{R_t^4}-\frac{2\dot{y}(y-y_t)}{R_t^3}-\frac{\dot{R}_t}{R_t^2}\end{matrix}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right) \qquad \text{(A.41)}$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{y}}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{y}}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)^2$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{(y-y_r)(z-z_r)}{R_r^3}+\frac{(y-y_t)(z-z_t)}{R_t^3}\right)(R-Z_R)+$$
$$\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right)$$
$$-\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\begin{matrix}\frac{\dot{y}(z-z_r)}{R_r^3}+\frac{\dot{z}(y-y_r)}{R_r^3}-\frac{3(y-y_r)(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^4}\\ +\frac{\dot{y}(z-z_t)}{R_t^3}+\frac{\dot{z}(y-y_t)}{R_t^3}-\frac{3(y-y_t)(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^4}\end{matrix}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right) \qquad \text{(A.42)}$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{y}}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{y}}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\begin{matrix}\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\\ \frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\end{matrix}\right)$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z|\theta)}{\partial y \partial \dot{x}} = -\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{(y-y_r)(x-x_r)}{R_r^3}+\frac{(y-y_t)(x-x_t)}{R_t^3}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{y}}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{y}}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(x-x_r)}{R_r}+\frac{(x-x_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.43)}$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z|\theta)}{\partial \dot{x} \partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z|\theta)}{\partial y \partial \dot{y}} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{1}{R_r}-\frac{(y-y_r)^2}{R_r^3}+\frac{1}{R_t}-\frac{(y-y_t)^2}{R_t^3}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{y}}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{y}}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(y-y_r)}{R_r}+\frac{(y-y_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.44)}$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z|\theta)}{\partial \dot{y} \partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z|\theta)}{\partial y \partial \dot{z}} = -\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{(y-y_r)(z-z_r)}{R_r^3}+\frac{(y-y_t)(z-z_t)}{R_t^3}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{y}}{R_r}-\frac{(y-y_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{y}}{R_t}-\frac{(y-y_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(z-z_r)}{R_r}+\frac{(z-z_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.45)}$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z|\theta)}{\partial \dot{z} \partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial z^2} = \frac{1}{\sigma_R^2}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{R_r}-\frac{(z-z_r)^2}{R_r^3}+\\ \frac{1}{R_t}-\frac{(z-z_t)^2}{R_t^3}\end{array}\right)(R-Z_R)+\frac{1}{\sigma_R^2}\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_r}\right)^2$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\begin{array}{c}\frac{3(z-z_r)^2\dot{R}_r}{R_r^4}-\frac{2\dot{z}(z-z_r)}{R_r^3}-\frac{\dot{R}_r}{R_r^2}+\\ \frac{3(z-z_t)^2\dot{R}_t}{R_t^4}-\frac{2\dot{z}(z-z_t)}{R_t^3}-\frac{\dot{R}_t}{R_t^2}\end{array}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right) \quad \text{(A.46)}$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)^2$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial \dot{x}} = -\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{(z-z_r)(x-x_r)}{R_r^3}+\frac{(z-z_t)(x-x_t)}{R_t^3}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(x-x_r)}{R_r}+\frac{(x-x_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.47)}$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{x}\partial z}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial \dot{y}} = -\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{(y-y_r)(z-z_r)}{R_r^3}+\frac{(y-y_t)(z-z_t)}{R_t^3}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(y-y_r)}{R_r}+\frac{(y-y_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.48)}$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{y}\partial z}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial z\partial \dot{z}} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{1}{R_r}-\frac{(z-z_r)^2}{R_r^3}+\frac{1}{R_t}-\frac{(z-z_t)^2}{R_t^3}\right)\left(\dot{R}-Z_{\dot{R}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{\dot{z}}{R_r}-\frac{(z-z_r)\dot{R}_r}{R_r^2}+\frac{\dot{z}}{R_t}-\frac{(z-z_t)\dot{R}_t}{R_t^2}\right)\left(\frac{(z-z_r)}{R_r}+\frac{(z-z_t)}{R_t}\right) \quad \text{(A.49)}$$
$$=-\frac{\partial^2 \ln p(Z\mid\theta)}{\partial \dot{z}\partial z}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{x}^2} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)^2 \quad \text{(A.50)}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right) \quad \text{(A.51)}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{x}\partial \dot{z}} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{x-x_r}{R_r}+\frac{x-x_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right) \quad \text{(A.52)}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{y}^2} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right)^2 \tag{A.53}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{y}\partial \dot{z}} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{y-y_r}{R_r}+\frac{y-y_t}{R_t}\right)\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right) \tag{A.54}$$

$$-\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\theta)}{\partial \dot{z}^2} = \frac{1}{\sigma_{\dot{R}}^2}\left(\frac{z-z_r}{R_r}+\frac{z-z_t}{R_t}\right)^2 \tag{A.55}$$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gökhan SOYSAL

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 17/06/1980

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Ankara Çankaya Ayrancı Lisesi (1998)

Lisans : Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü (2002)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilimdalı (2005)

Çalıştığı Kurum ve Yıl: Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi (2002 - …)

Yayınları:

1) Soysal, G. and Efe, M. 2006. Performance Comparison of Tracking Algorithms for a Ground Based Radar, The IEE Conference on Target Tracking: Algorithms and Applications, pp. 39-46.

2) Soysal, G. ve Efe, M. 2006. Manevralı Hedeflerin Takibi İçin Bir Uyarlamalı Kalman Filtre, IEEE Signal Processing and Communication Applications Conference, pp. 1-4.

3) Başkır, M., B., Soysal, G. ve Yağcı, B. 2008. Hedef Takibindeki Belirsizliğin Bulanık Yaklaşımla Modellenmesi ve Riski, 6. İstatistik Günleri Sempozyumu, 4pp. 5-52.

4) Bozdogan, A., O., Soysal, G. and Efe, M. 2009. Multistatic Target Tracking Using Bistatic Range – Range Rate Measurements, 12th International Conference on Information Fusion, pp. 2107-2113.

5) Soysal, G., Bozdogan, A., O. and Efe, M. 2009. Information Analysis in Passive Radar Networks for Target Tracking, 12th International Conference on Information Fusion, pp. 115-1122.

6) Soysal, G. ve Efe, M. 2010. Multistatik Radar Ağında Gözlenen Bilginin İncelenmesi, IEEE Signal Processing and Communication Applications Conference, pp. 808-811.

7) Soysal, G. and Efe, M. 2010. Kalman Filter Aided Cooperative Optical Beam Tracking, Journal of Radio Engineering, Vol. 20(2), pp. 242-248.

8) Soysal, G. and Efe, M. 2011. Data Fusion in a Multistatic Radar Network Using Covariance Intersection and Particle Filtering, 14th International Conference on Information Fusion, pp. 1-7.