

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZGİSEL BULANIK KÜMELER İÇİN BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE  
BAZI ÖRÜNTÜ TANIMA UYGULAMALARI

Noor Wajeeh NOORULDEEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2022

Her hakkı saklıdır

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## SEZGİSEL BULANIK KÜMELER İÇİN BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE BAZI ÖRÜNTÜ TANIMA UYGULAMALARI

Noor Wajeeh NOORULDEEN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat OLGUN

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bulanık küme gibi bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, teze adını veren Sezgisel bulanık küme kavramı detaylı bir şekilde tanıtılmıştır. Sezgisel üyelik dereceleri ve Sezgisel bulanık kümeler arasındaki bazı küme işlemlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak Sezgisel bulanık kümeler için benzerlik ölçüleri verilmiş ve sonrasında bazı kosinüs ve kotanjant tabanlı benzerlik ölçüleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Sezgisel bulanık kümeler ile bazı karar verme uygulamaları yapılmıştır. Aslında bir örüntü tanıma problemi incelenip yorumlanmıştır.

Son kısımda ise tezin genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

**Haziran 2022, 33 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Sezgisel bulanık kümeler, benzerlik ölçüleri, çok kriterli karar verme.

# ABSTRACT

Master Thesis

## SIMILARITY MEASURES FOR INTUITIONISTIC FUZZY SETS AND SOME PATTERN RECOGNITION APPLICATIONS

Noor Wajeeh NOORULDEEN

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Murat OLGUN

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In Chapter 2, some basic concepts such as fuzzy set are given.

In Chapter 3, the concept of the Intuitionistic fuzzy set, which gives its name to the thesis, is explained in detail. The Intuitionistic fuzzy membership degrees and some set theoretic operations between Intuitionistic fuzzy sets are given.

In Chapter 4, similarity measures are given for Intuitionistic fuzzy sets, and then some cosine and cotangent based similarity measures are examined.

In Chapter 5, some decision making applications with Intuitionistic fuzzy sets are discussed. Indeed, a pattern recognition problem is analyzed and interpreted.

In the last chapter, a general evaluation of the thesis is made

**June 2022, 33 pages**

**Key Words:** Intuitionistic Fuzzy Sets, Similarity Measure, Decision Making.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yön gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, öğrencisi olamtan her zaman gurur duyacağım tez danışmanım sayın Prof.Dr.Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, araştırmam boyunca bilgi ve deneyimleriyle büyük katkılar sunan, desteklerini hiç esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Şeymus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya ve Doç.Dr.Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca beni destekleyen ve haklarını asla ödeyemeyeceğim anneme, dayıma ve tüm aileme teşekkürümü sunarım.

Bu tez " TÜBİTAK 121F007 nolu Araştırma Projesi" tarafından desteklenmiştir.

Noor Wajeeh NOORULDEEN  
Ankara, Haziran 2022

## İÇİNDEKİLER

### TEZ ONAY SAYFASI

|                                                                                          |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ETİK . . . . .                                                                           | i    |
| ÖZET . . . . .                                                                           | ii   |
| ABSTRACT . . . . .                                                                       | iii  |
| TEŞEKKÜR . . . . .                                                                       | iv   |
| SİMGELER DİZİNİ . . . . .                                                                | vi   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .                                                                | vii  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .                                                              | viii |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                                       | 1    |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR . . . . .                                                             | 3    |
| 2.1 Bulanık Küme Teorisi . . . . .                                                       | 3    |
| 2.2 Bulanık Kümeler Üzerinde Küme işlemleri . . . . .                                    | 4    |
| 2.3 Çok Kriterli Karar Verme . . . . .                                                   | 7    |
| 2.4 Örüntü Tanıma ve Medikal Tanı . . . . .                                              | 8    |
| 3. SEZGİSEL BULANIK KÜMELER . . . . .                                                    | 9    |
| 3.1 İki Sezgisel Bulanık Küme Arasındaki Bazı Özellikler . . . . .                       | 9    |
| 3.2 Kartezyen Çarpım . . . . .                                                           | 16   |
| 4. SEZGİSEL BULANIK KÜMELER İÇİN BAZI BENZERLİK<br>ÖLÇÜLERİ . . . . .                    | 21   |
| 4.1 Bir Kosinüs Benzerlik Ölçüsü . . . . .                                               | 21   |
| 4.1.1 Ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü . . . . .                                       | 25   |
| 4.1.2 Sezgisel Bulanık Kümeler için benzerlik ölçülerinin<br>karşılaştırılması . . . . . | 25   |
| 5. BAZI UYGULAMALAR . . . . .                                                            | 27   |
| 5.1 Örüntü Tanıma . . . . .                                                              | 27   |
| 5.2 Tıbbi Teşhis . . . . .                                                               | 28   |
| 6. TARTIŞMA ve SONUÇ . . . . .                                                           | 30   |
| KAYNAKLAR . . . . .                                                                      | 31   |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                                                       | 33   |

## SİMGELER DİZİNİ

|              |                            |
|--------------|----------------------------|
| $SBK$        | Sezgisel bulanık kümeler   |
| $\mathbf{N}$ | Pozitif tam sayılar kümesi |



## 1. GİRİŞ

Klasik kümelerde bir nesnenin bir kümeye ait olması ve ait olmaması söz konusudur. Bu yaklaşıma göre istediğimiz özelliğe sahip olan bir eleman tanımlanmış olan bir kümeye ya aittir ya da değildir. Bu tür kümeleri ifade etmek için karakteristik fonksiyonlardan yararlanılmaktadır. Karakteristik fonksiyon her bir elemana 1 ve 0 değerlerinden birini üyelik durumuna göre atayarak evrensel küme üzerinde tanımlanan ve ilgilenilen özelliğe sahip elemanların oluşturduğu kümeyi belirlemektedir. Klasik küme teorisine karşın, bulanık küme teorisi ise gerçek hayatta belirsizliklerin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunmakta ve doğal dildeki belirsiz kavramların anlamlı bir şekilde ifade edilmesini de sağlamaktadır. Bulanık küme teorisinde bir elemanın bir kümeye ait olma derecesi de söz konusudur. Bu sebeple bulanık bir kümeye aitlik bir fonksiyonla tanımlanır. Bulanık küme teorisi, 1965 yılında Zadeh (Zadeh 1965) tarafından geliştirilen belirsizliğin üstesinden gelmede etkin bir araç olarak kabul görmüş ve ekonomi, mühendislik, yönetim gibi birçok farklı alanda başarı ile uygulanmıştır. Bulanık kümelerin temelini oluşturan üyelik derecesi, niteliklerin dereceli üyelik fonksiyonları ile ifade edilmesini önermektedir. Klasik kümelerde 0 ya da 1 değerini alan ait olma derecesi, bulanık kümelerde  $[0,1]$  aralığındaki herhangi bir değeri alabilmektedir.

Zadeh'in önerdiği bulanık küme teorisi, farklı araştırmacıların farklı eklemeleri ile farklı yaklaşımlar olarak genişletilmiştir. Bunlar arasında literatürde kabul görmüş ve birçok alanda uygulamaları bulunan sezgisel bulanık küme teorisi, Atanassov (1986) tarafından geliştirilmiştir. Zadeh'in bulanık küme teorisi sadece  $[0,1]$  aralığında tanımlı üyelik derecesini gösterecek şekilde modellenmişken, Atanassov'un sezgisel bulanık küme teorisinde, ait olma derecesine ek olarak ait olmama derecesi de tanımlanmıştır. Sezgisel bulanık küme teorisinde hem ait olma hem de ait olmama dereceleri  $[0,1]$  aralığında yer almaktadır. Bu bakış açısı ile değerlendirildiğinde geleneksel bulanık küme teorisinde ait olma ve ait olmama derecesi toplamı 1 olarak hesaplanmaktadır. Oysaki sezgisel bulanık küme teorisinde bu iki parametre-

nin toplamı 1 olmak zorunda değildir. Sezgisel bulanık küme teorisinde bir elemanın bir kümeye ait olma ve ait olmama dereceleri toplamı  $[0,1]$  aralığındadır. Sezgisel bulanık kümeler, pek çok teorik ve uygulamalı çalışma alanına sahiptir. Bunlardan biri olan çok kriterli karar verme, birden fazla çelişen kritere göre, alternatiflerin sıralanması sürecidir. Diğer yandan iki sezgisel bulanık küme arasındaki benzerlik derecesini tahmin etmek için benzerlik ölçüleri kullanılır. Örneğin, iki vektörün iç çarpımının uzunluklarının çarpımına bölünmesi olarak tanımlanan Bhattacharya'nın mesafesine dayanan kosinüs benzerlik ölçüsü bunlardan bir tanesidir. Bulanık kümeler arasındaki benzerlik ölçülerinin örüntü tanıma ve tıbbi teşhis gibi uygulama alanları mevcuttur.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, bulanık küme teorisinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

### 2.1 Bulanık Küme Teorisi

**Tanım 2.1**  $U$  bir evrensel küme olmak üzere  $A \subset U$  olsun. Her  $\omega \in A$  için

$$\chi_A(\omega) := \begin{cases} 1 & , \omega \in A \text{ ise} \\ 0 & , \omega \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$  fonksiyonuna  $A$  kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Örneğin,  $U = \mathbb{R}$  ve  $A = \mathbb{Z}$  alınırsa

$$\chi_{\mathbb{Z}}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \text{ bir tamsayı ise} \\ 0 & , \omega \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı  $\chi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  fonksiyonu  $\mathbb{Z}$  kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

Karakteristik fonksiyon aslında bir elemanın bir kümeye aitliğini modellemesine rağmen bazı gerçek hayat uygulamalarını modellemekte yetersiz kalmaktadır. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyebiliriz.

**Örnek 2.1** 100 cm ve üzeri uzunluğu “uzun” 100 cm altını “kısa” diye modellersek

$T = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 100\}$  kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_T(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \geq 100 \text{ ise} \\ 0 & , \omega < 100 \text{ ise} \end{cases}$$

$U = \{z \in \mathbb{Z} : 40 \leq z \leq 200\}$  kümesi üzerinde uzun ve kısayı modellemektedir. Burada  $\chi_T(110) = \chi_T(140) = 1$  olduğundan 110 cm ve 140 cm nin ikisi de uzun olarak nitelendirilir. Ancak bu ise pratikte çok da faydalı bir bilgi içermemektedir. Bunun gibi eksikliklerin üstesinden gelebilmek adına bulanık küme kavramı ortaya atılmıştır.

**Tanım 2.2**  $U$  bir evrensel küme olmak üzere,  $U$  kümesinden  $[0, 1]$  kapalı aralığına tanımlı her fonksiyona,  $U$  kümesi üzerinde bir bulanık küme denir. Yani  $U$  kümesi üzerinde bir bulanık  $A$  kümesi  $\gamma_A : U \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu yardımıyla karakterize edilir.  $A$  bulanık kümesi için

$$A = \{\langle \omega, \gamma_A(\omega) \rangle : \omega \in U\}$$

gösterimi kullanılır. Burada  $\gamma_A$  fonksiyonuna  $A$  bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu ve her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olma derecesi denir (Zadeh 1965).

Klasik küme teorisinde bir küme ile karakteristik fonksiyonu birebir eşlenmektedir. Bu durum ve Tanım 2.2 göz önüne alındığında bulanık kümelerin klasik kümelerin bir genelleştirmesi olduğu görülür. Aslında  $\gamma_A = \chi_A$  alınırsa klasik bir kümenin bir bulanık küme olduğu görülür.

**Örnek 2.2**  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  kümesi üzerinde  $\gamma_A(1) = 0.2$ ,  $\gamma_A(2) = 0.3$ ,  $\gamma_A(3) = 0.9$ ,  $\gamma_A(4) = 1$  ve  $\gamma_A(5) = 0.75$  ile tanımlı  $\gamma_A$  fonksiyonu bir bulanık kümedir. Bu küme

$$A = \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.3 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 0.75 \rangle\}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

Şimdi Örnek 2.1’de verilen gerçek hayat uygulamasını tekrar ele alalım.

**Örnek 2.3**  $U = \{z \in Z : 40 \leq z \leq 200\}$  olmak üzere  $\gamma_A(z) = \frac{z - 40}{160}$ , 40 cm en kısa ve 200 cm en uzun olmak üzere 40 cm ile 200 cm arasındaki uzunluğu modellemektedir. Burada Örnek 2.1’in aksine  $\gamma_A(80) = 0.25$  ve  $\gamma_A(200) = 1$  olur.

## 2.2 Bulanık Kümeler Üzerinde Küme işlemleri

Bu kısımda bulanık kümeler için tanımlanmış bazı temel kavramlar verilecektir. Bu kısım boyunca  $U$  boş kümeden farklı bir küme olarak göz önüne alınacaktır.

**Tanım 2.3** Ait olma fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşit olan bulanık kümeye bulanık boş küme denir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.4**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega) = \gamma_B(\omega)$  ise  $A$  bulanık kümesi ile  $B$  bulanık kümesi eşittir denir. Bu durum  $A = B$  veya  $\gamma_A = \gamma_B$  ile gösterilir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.5**  $A$  bir bulanık küme olmak üzere ait olma fonksiyonu  $1 - \gamma_A$  olan bulanık kümeye  $A$  bulanık kümesinin tümleyeni denir ve  $A^c$  ile gösterilir. Yani,  $A^c$  bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu  $\gamma_{A^c} = 1 - \gamma_A$  şeklindedir (Zadeh 1965).

Klasik kümelerde olduğu gibi bulanık kümelerde de kapsama bağıntısı önemli rol oynamaktadır. Şimdi bu kavram ve bununla ilişkili olan birleşim ve kesişim kavramlarını vereceğiz.

**Tanım 2.6**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega) \leq \gamma_B(\omega)$  oluyorsa  $A$  bulanık kümesi  $B$  bulanık kümesinin bir alt kümesidir veya  $B$  bulanık kümesi  $A$  bulanık kümesini kapsar denir. Bu durumda  $A \subset B$  veya  $B \supset A$  yazılır (Zadeh 1965).

**Tanım 2.7**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere ait olma fonksiyonu  $\gamma_C(\omega) = \max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}$  ile tanımlı  $C$  bulanık kümesine  $A$  bulanık kümesi ile  $B$  bulanık kümesinin birleşimi denir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.8**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere ait olma fonksiyonu  $\gamma_C(\omega) = \min \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}$  ile tanımlı  $C$  bulanık kümesine  $A$  bulanık kümesi ile  $B$  bulanık kümesinin kesişimi denir (Zadeh 1965).

**Önerme 2.1**  $A$ ,  $B$  ve  $C$  bulanık kümeler olmak üzere,

- i)  $A, B \subset A \cup B$ ,
- ii)  $A \cap B \subset A, B$ ,
- iii)  $(A^c)^c = A$ ,
- iv)  $A \cup B = B \cup A$ ,
- v)  $A \cap B = B \cap A$ ,
- vi)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,

vii)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

viii)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  ve  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (De Morgan Kuralları)

gerçeklenir (Zadeh 1965).

**İspat.**

i) Her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \leq \max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}$  olduğundan  $A, B \subset A \cup B$  gerçekleşir.

ii) Her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \geq \min \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}$  olduğundan  $A \cap B \subset A, B$  gerçekleşir.

iii) Her  $\omega \in U$  için  $1 - (1 - \gamma_A(\omega)) = \gamma_A(\omega)$  olduğundan  $(A^c)^c = A$  gerçekleşir.

iv) Her  $\omega \in U$  için  $\max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\} = \max \{\gamma_B(\omega), \gamma_A(\omega)\}$  olduğundan  $A \cup B = B \cup A$  gerçekleşir.

v) Her  $\omega \in U$  için  $\min \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\} = \min \{\gamma_B(\omega), \gamma_A(\omega)\}$  olduğundan  $A \cap B = B \cap A$  gerçekleşir.

vi)  $\omega \in U$  olmak üzere  $A, B$  ve  $C$  bulanık kümeleri için aşağıdaki altı durum mevcuttur:

$$\gamma_A(\omega) \geq \gamma_B(\omega) \geq \gamma_C(\omega), \gamma_A(\omega) \geq \gamma_C(\omega) \geq \gamma_B(\omega),$$

$$\gamma_B(\omega) \geq \gamma_A(\omega) \geq \gamma_C(\omega), \gamma_B(\omega) \geq \gamma_C(\omega) \geq \gamma_A(\omega),$$

$$\gamma_C(\omega) \geq \gamma_B(\omega) \geq \gamma_A(\omega), \gamma_C(\omega) \geq \gamma_A(\omega) \geq \gamma_B(\omega).$$

Bu durumlar göz önüne alındığında

$$\max \{\gamma_A(\omega), \min \{\gamma_B(\omega), \gamma_C(\omega)\}\} \tag{2.1}$$

$$= \min \{\max \{\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)\}, \max \{\gamma_A(\omega), \gamma_C(\omega)\}\}. \tag{2.2}$$

olduğu görülür. Örneğin  $\gamma_A(\omega) \geq \gamma_B(\omega) \geq \gamma_C(\omega)$  olduğunda

$$\max \{\gamma_A(\omega), \min \{\gamma_B(\omega), \gamma_C(\omega)\}\} = \gamma_A(\omega)$$

ve

$$\min \{ \max \{ \gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \}, \max \{ \gamma_A(\omega), \gamma_C(\omega) \} \} = \gamma_A(\omega)$$

olduğundan (2.1) eşitliği gerçekleşir. Benzer şekilde diğer beş durumda da (2.1) eşitliğinin doğruluğu gösterilebilir.

**vii)** İspat (vi) önermesinin ispatına benzer şekilde yapılır.

**viii)**  $\omega \in U$  olmak üzere  $A$  ve  $B$  bulanık kümeleri için  $\gamma_A(\omega) \leq \gamma_B(\omega)$  veya  $\gamma_B(\omega) \leq \gamma_A(\omega)$  durumları mevcuttur. Bu durumlar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \gamma_{(A \cup B)^c} &= 1 - \max \{ \gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \} \\ &= \min \{ 1 - \gamma_A, 1 - \gamma_B \} \\ &= \gamma_{A^c \cap B^c} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_{(A \cap B)^c} &= 1 - \min \{ \gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega) \} \\ &= \max \{ 1 - \gamma_A, 1 - \gamma_B \} \\ &= \gamma_{A^c \cup B^c} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

■

### 2.3 Çok Kriterli Karar Verme

Çok kriterli karar verme, birden fazla çelişen kriter üzerinde alternatiflerin değerlendirilip sıralanması sürecidir. Çok kriterli karar verme, kriterler oluşturup bunlara göre alternatifler üzerinden en iyi seçimi yapıp diğer alternatifleri sıralayan ve böylece seçimleri kolaylaştıran bir süreçtir. Çok kriterli karar verme, kullanım alanları düşünüldüğünde bir çok kolaylık sağlamaktadır ve son zamanlarda medikal tanı, örüntü tanıma, finansal- ekonomik-stratejik seçimlerde ve bunun gibi bir çok alanda yaygın şekilde kullanılmaktadır.

## 2.4 Örüntü Tanıma ve Medikal Tanı

Örüntü tanıma, örüntülerin özelliklerindeki benzerliğe bağlı olarak bir dizi örüntüyü sınıflara ayırma sürecidir. Buradaki süreç; bilinmeyen bir örüntü verisini bilinen veriler arasında sınıflandırmak ve en iyi sonucu bulma şeklinde işler. Medikal tanı da özel bir örüntü tanıma ve belirli semptomlara sahip bir hasta için verilen tanımlar üzerinden en doğru tanının bulunması sürecidir. Medikal tanı ve örüntü tanıma aslında çok kriterli karar verme problemleridir.



### 3. SEZGİSEL BULANIK KÜMELER

Bu bölümde 1986 yılında Atanassov tarafından verilen sezgisel bulanık küme ve bazı özellikleri verilecektir.

**Tanım 3.1**  $U$  kümesinden  $[0, 1]$  aralığına tanımlı ve her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega) + \eta_A(\omega) \leq 1$  olacak biçimde her  $(\gamma_A, \eta_A)$  fonksiyon ikilisine  $U$  üzerinde bir sezgisel bulanık küme denir. Yani  $U$  kümesi üzerinde bir  $A$  sezgisel bulanık kümesi  $\gamma_A : U \rightarrow [0, 1]$  ve  $\eta_A : U \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonları ile karakterize edilir.  $A$  sezgisel bulanık kümesi için

$$A = \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle : \omega \in U \}$$

gösterimi kullanılır. Burada  $\gamma_A$  fonksiyonuna  $A$  bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu ve  $\eta_A$  fonksiyonuna  $A$  kümesinin ait olmama fonksiyonu denir. Her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olma derecesi ve  $\eta_A(\omega)$  değerine  $\omega$  elemanının  $A$  bulanık kümesine olan ait olmama derecesi denir (Atanassov 1986).

**Örnek 3.1**  $U = \{x, y, z\}$  kümesi üzerinde  $\gamma_A(x) = 0.2$ ,  $\eta_A(x) = 0.5$ ,  $\gamma_A(y) = 0.3$ ,  $\eta_A(y) = 0.4$ ,  $\gamma_A(z) = 0.1$ ,  $\eta_A(z) = 0.4$  ile tanımlı  $(\gamma_A, \eta_A)$  fonksiyon ikilisi bir sezgisel bulanık küme tanımlar. Gerçekten  $\gamma_A(x) + \eta_A(x) \leq 1$ ,  $\gamma_A(y) + \eta_A(y) \leq 1$ ,  $\gamma_A(z) + \eta_A(z) \leq 1$  olur.

#### 3.1 İki Sezgisel Bulanık Küme Arasındaki Bazı Özellikler

Bu kısımda sezgisel bulanık kümeler için tanımlanmış bazı temel kavramlar verilecektir. Bu kısım boyunca  $U$  boş kümeden farklı bir küme olarak göz önüne alınacaktır.

**Tanım 3.2**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere her  $\omega \in U$  için  $\gamma_A(\omega) \leq \gamma_B(\omega)$  ve  $\eta_A(\omega) \geq \eta_B(\omega)$  ise  $A$  kümesi  $B$  kümesinin alt kümesidir denir ve  $A \subset B$  ile gösterilir (Atanassov 1986).

**Tanım 3.3**  $A$  ve  $B$  iki bulanık küme olmak üzere  $A \subset B$  ve  $B \subset A$  oluyorsa  $A$  kümesi  $B$  kümesine eşittir denir ve  $A = B$  yazılır (Atanassov 1986).

**Tanım 3.4**  $A$  bir sezgisel bulanık küme olmak üzere,  $A$  kümesinin tümleyeni

$$A^c = \{\langle \omega, \eta_A(\omega), \gamma_A(\omega) \rangle : \omega \in U\}$$

ile tanımlı sezgisel bulanık kümedir (Atanassov 1986).

**Tanım 3.5**  $A$  ve  $B$  iki sezgisel bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin birleşimi

$$A \cup B = \{\langle \omega, \max(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \min(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle : \omega \in U\}$$

şeklinde tanımlanır (Atanassov 1986).

**Tanım 3.6**  $A$  ve  $B$  iki sezgisel bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin kesişimi

$$A \cap B = \{\langle \omega, \min(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \max(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle : \omega \in U\}$$

şeklinde tanımlanır (Atanassov 1986).

**Tanım 3.7**  $A$  ve  $B$  iki sezgisel bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin çarpımı

$$A \cdot B = \{\langle \omega, \gamma_A(\omega) \gamma_B(\omega), \eta_A(\omega) + \eta_B(\omega) - \eta_A(\omega) \eta_B(\omega) \rangle \mid \omega \in U\}$$

şeklinde tanımlanır (Atanassov 1986).

**Tanım 3.8**  $A$  ve  $B$  iki sezgisel bulanık küme olsun.  $A$  ve  $B$  kümesinin toplamı

$$A + B = \{\langle \omega, \gamma_A(\omega) + \gamma_B(\omega) - \gamma_A(\omega) \gamma_B(\omega), \eta_A(\omega) \eta_B(\omega) \rangle \mid \omega \in U\}$$

şeklinde tanımlanır (Atanassov 1986).

Şimdi sezgisel bulanık kümelerde aşağıdaki iki operatör tanımlayacağız. Bu operatörler sayesinde her sezgisel bulanık kümeyi bulanık kümeye taşıyabileceğiz. Daha sonra bu operatörlerin bazı özellikleri inceleyeceğiz.

$$\Box A = \Box \{\langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U\} = \{\langle \omega, \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U\} \quad (3.1)$$

$$\Diamond A = \Diamond \{\langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U\} = \{\langle \omega, \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U\}. \quad (3.2)$$

**Teorem 3.1**  $A$  sezgisel bulanık bir küme olmak üzere aşağıdakiler gerçekleşir.

i)  $\Box A = (\Diamond A^c)^c$

$$\text{ii)} \quad \Diamond A = (\Box A^c)^c$$

$$\text{iii)} \quad \Box A \subset A \subset \Diamond A$$

$$\text{iv)} \quad \Box \Box A = \Box A$$

$$\text{v)} \quad \Box \Diamond A = \Diamond A$$

$$\text{vi)} \quad \Diamond \Box A = \Box A$$

$$\text{vii)} \quad \Diamond \Diamond A = \Diamond A$$

**İspat.** Sadece **iv).** ve **vii).** özellikler ispatlanacaktır. Diğerleri benzer şekilde ispatlanabilir.

**iv)** (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \Box \Box A &= \Box \Box \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \Box \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), 1 - \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), 1 - \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \Box A \end{aligned}$$

elde edilir.

**vii)** (3.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \Diamond \Diamond A &= \Diamond \Diamond \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \Diamond \{ \langle \omega, 1 - \eta_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \{ \langle \omega, 1 - \eta_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \Diamond A \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde diğer eşitlikler de ispatlanır. ■

**Teorem 3.2**  $A$  ve  $B$  sezgisel bulanık iki küme olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\text{i)} \quad \Box(A \cup B) = \Box A \cup \Box B$$

ii)  $\Diamond(A \cup B) = \Diamond A \cup \Diamond B$

**İspat.**

i) (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\Box(A \cup B) &= \Box \{ \langle \omega, \max(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \min(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \{ \langle \omega, \max(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \cup \{ \langle \omega, \gamma_B(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \Box A \cup \Box B\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde ispatlanır.

■

**Teorem 3.3**  $A$  ve  $B$  sezgisel bulanık iki küme olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i)  $\Box(A \cap B) = \Box A \cap \Box B$

ii)  $\Diamond(A \cap B) = \Diamond A \cap \Diamond B$

**İspat.**

i) (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\Box(A \cap B) &= \Box \{ \langle \omega, \min(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)), \max(\eta_A(\omega), \eta_B(\omega)) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \{ \langle \omega, \min(\gamma_A(\omega), \gamma_B(\omega)) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \cap \{ \langle \omega, \gamma_B(\omega) \rangle \mid \omega \in U \} \\ &= \Box A \cap \Box B\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde ispatlanır.

■

**Tanım 3.9**  $A$  sezgisel bir bulanık küme olsun.  $K = \max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega)$ ,  $L = \min_{\omega \in U} \eta_A(\omega)$ ,  $k = \min_{\omega \in U} \gamma_A(\omega)$  ve  $l = \max_{\omega \in U} \eta_A(\omega)$  dört reel sayı olmak üzere  $\bar{A} = \{\langle \omega, K, L \rangle \mid \omega \in U\}$  ve  $A^\circ = \{\langle \omega, k, l \rangle \mid \omega \in U\}$  kümelerine sırasıyla  $A$  kümesinin kapanışı ve içi denir.

**Teorem 3.4**  $A$ , sezgisel bir bulanık küme olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

i)  $\square(\overline{\square A}) \subset \bar{A}$

ii)  $(\square(\diamond A^c)^\circ)^c \subset \bar{A}$

iii)  $\square(\overline{\diamond A}) \supset \bar{A}$

iv)  $(\square(\square A^c)^\circ)^c \supset \bar{A}$

v)  $\square(\square A)^\circ \subset A^\circ$

vi)  $(\square(\overline{\diamond A^c}))^c \subset A^\circ$

vii)  $\diamond(\diamond A)^\circ \supset A^\circ$

viii)  $\diamond(\overline{\square A^c}) \subset (A^\circ)^c$

**İspat.**

i) (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \square(\overline{\square A}) &= \square(\overline{\square \{\langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U\}}) \\ &= \square(\overline{\square \{\langle \omega, \gamma_A(\omega), 1 - \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U\}}) \\ &= \square \left\{ \left\langle \omega, \max_{\omega \in E} \gamma_A(\omega), \min_{\omega \in E} (1 - \gamma_A(\omega)) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \omega, \max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega), 1 - \max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \\ &= \{\langle \omega, K, 1 - K \rangle \mid \omega \in U\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $1 - K \geq L$  olduğundan

$$\square(\overline{\square A}) \subset \{\langle \omega, K, L \rangle \mid \omega \in U\} = \bar{A}$$

elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned} 1 - \min_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)) &= 1 - \left[ 1 + \min_{\omega \in U} (-\gamma_A(\omega)) \right] = 1 - 1 - \min_{\omega \in U} (-\gamma_A(\omega)) \\ &= - \left( -\max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega) \right) = \max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega) \end{aligned}$$

$$\min_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)) = 1 + \min_{x \in E} (-\gamma_A(\omega)) = 1 - \max_{x \in E} \gamma_A(\omega)$$

olduğundan ve (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (\Box(\Diamond A^c)^\circ)^c &= (\Box(\Diamond \{ \langle \omega, \eta_A(\omega), \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \})^\circ)^c \\ &= (\Box(\{ \langle \omega, 1 - \gamma_A(\omega), \gamma_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \})^\circ)^c \\ &= \left( \Box \left\{ \left\langle \omega, \min_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)), \max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \right)^c \\ &= \left\{ \left\langle \omega, \min_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)), 1 - \min_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)) \right\rangle \mid \omega \in U \right\}^c \\ &= \left\{ \left\langle \omega, 1 - \min_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)), \min_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \omega, \max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega), 1 - \max_{\omega \in U} \gamma_A(\omega) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \\ &= \{ \langle \omega, K, 1 - K \rangle \mid \omega \in U \} \subset \{ \langle \omega, K, L \rangle \mid \omega \in U \} = \bar{A} \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \Box(\Diamond \bar{A}) &= \Box(\Diamond \{ \langle \omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \}) \\ &= \Box(\{ \langle \omega, 1 - \eta_A(\omega), \eta_A(\omega) \rangle \mid \omega \in U \}) \\ &= \Box \left\{ \left\langle \omega, \max_{\omega \in U} (1 - \eta_A(\omega)), \min_{\omega \in U} \eta_A(\omega) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \omega, \max_{\omega \in U} (1 - \eta_A(\omega)), 1 - \max_{\omega \in U} (1 - \eta_A(\omega)) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \omega, 1 - \min_{\omega \in U} \eta_A(\omega), \min_{\omega \in U} \eta_A(\omega) \right\rangle \mid \omega \in U \right\} \\ &= \{ \langle \omega, 1 - L, L \rangle \mid \omega \in U \} \supset \{ \langle \omega, K, L \rangle \mid \omega \in U \} = \bar{A} \end{aligned}$$

elde edilir.

iv) (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
(\Box(\Box A^c)^\circ)^c &= (\Box(\Box\{\langle\omega, \eta_A(\omega), \gamma_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\})^\circ)^c \\
&= (\Box(\{\langle\omega, \eta_A(\omega), 1 - \eta_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\})^\circ)^c \\
&= \left(\Box\left\{\left\langle\omega, \min_{x \in E} \eta_A(\omega), \max_{x \in E} (1 - \eta_A(\omega))\right\rangle \mid \omega \in U\right\}\right)^c \\
&= \left\{\left\langle\omega, \min_{x \in E} \eta_A(\omega), 1 - \min_{x \in E} \eta_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\}^c \\
&= \left\{\left\langle\omega, 1 - \min_{x \in E} \eta_A(\omega), \min_{x \in E} \eta_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \{\langle\omega, 1 - L, L\rangle \mid \omega \in U\} \supset \{\langle\omega, K, L\rangle \mid \omega \in U\} = \bar{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

v) (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\Box(\Box A)^\circ &= \Box(\Box\{\langle\omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\})^\circ \\
&= \Box(\{\langle\omega, \gamma_A(\omega), 1 - \gamma_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\})^\circ \\
&= \Box\left\{\left\langle\omega, \min_{\omega \in U} \gamma_A(\omega), \max_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega))\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \left\{\left\langle\omega, \min_{\omega \in U} \gamma_A(\omega), 1 - \min_{\omega \in U} \gamma_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \{\langle\omega, k, 1 - k\rangle \mid \omega \in U\} \subset \{\langle\omega, k, \ell\rangle \mid \omega \in U\} = A^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir.

vi) (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(\Box(\Box A^c))^\circ &= (\Box(\Box(\Box\{\langle\omega, \eta_A(\omega), \gamma_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\}))^\circ)^c \\
&= (\Box(\Box\{\langle\omega, 1 - \gamma_A(\omega), \gamma_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\}))^\circ \\
&= \left(\Box\left\{\left\langle\omega, \max_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)), \min_{\omega \in U} \gamma_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\}\right)^\circ \\
&= \left\{\left\langle\omega, \max_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)), 1 - \max_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega))\right\rangle \mid \omega \in U\right\}^\circ \\
&= \left\{\left\langle\omega, 1 - \max_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega)), \max_{\omega \in U} (1 - \gamma_A(\omega))\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \left\{\left\langle\omega, \min_{\omega \in U} \gamma_A(\omega), 1 - \min_{\omega \in U} \gamma_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \{\langle\omega, k, 1 - k\rangle \mid \omega \in U\} \\
&\subset \{\langle\omega, k, \ell\rangle \mid \omega \in U\} = A^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir.

**vii)** (3.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\Diamond(\Diamond A)^\circ &= \Diamond(\Diamond\{\langle\omega, \gamma_A(\omega), \eta_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\})^\circ \\
&= \Diamond(\{\langle\omega, 1 - \eta_A(\omega), \eta_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\})^\circ \\
&= \Diamond\left\{\left\langle\omega, \min_{\omega \in U}(1 - \eta_A(\omega)), \max_{\omega \in U}\eta_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \left\{\left\langle\omega, 1 - \max_{\omega \in U}\eta_A(\omega), \max_{\omega \in U}\eta_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \{\langle\omega, 1 - \ell, \ell\rangle \mid \omega \in U\} \supset \{\langle\omega, k, \ell\rangle \mid \omega \in U\} = A^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir.

**viii)** (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\Diamond(\Box A^c) &= \Diamond(\Box\{\langle\omega, \eta_A(\omega), \gamma_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\}) \\
&= \Diamond(\{\langle\omega, \eta_A(\omega), 1 - \eta_A(\omega)\rangle \mid \omega \in U\}) \\
&= \Diamond\left\{\left\langle\omega, \max_{\omega \in U}\eta_A(\omega), \min_{\omega \in U}(1 - \eta_A(\omega))\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \left\{\left\langle\omega, 1 - \min_{\omega \in U}(1 - \eta_A(\omega)), \min_{\omega \in U}(1 - \eta_A(\omega))\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \left\{\left\langle\omega, \max_{\omega \in U}\eta_A(\omega), 1 - \max_{\omega \in U}\eta_A(\omega)\right\rangle \mid \omega \in U\right\} \\
&= \{\langle\omega, \ell, 1 - \ell\rangle \mid \omega \in U\} \subset \{\langle\omega, 1 - k, 1 - \ell\rangle \mid \omega \in U\} = (A^\circ)^c
\end{aligned}$$

bulunur.

■

### 3.2 Kartezyen Çarpım

$U_1, U_2$  iki evrensel küme,  $A$  ve  $B$  sırasıyla  $U_1$  ve  $U_2$  üzerinde iki sezgisel bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  nin kartezyen çarpımı

$$A \times B = \{\langle\langle\omega_1, \omega_2\rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2), \eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_2)\rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$0 \leq \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2) + \eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_2) \leq \gamma_A(\omega_1) + \eta_A(\omega_1) \leq 1$$

olduğundan  $A \times B$  bir sezgisel bulanık kümedir.

**Teorem 3.5**  $U_1, U_2, U_3$  üç evrensel küme ve  $A$  ve  $B, U_1$  üzerinde,  $C, U_2$  üzerinde ve  $D$  de  $U_3$  üzerinde, sezgisel bulanık küme olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

i)  $A \times C = C \times A$

ii)  $(A \times C) \times D = A \times (C \times D)$

iii)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

**İspat.**

i) Kartezyen çarpım tanımından

$$\begin{aligned} A \times C &= \{\langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1\} \times \{\langle \omega_2, \gamma_C(\omega_2), \eta_C(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2\} \\ &= \{\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_C(\omega_2), \eta_A(\omega_1) \eta_C(\omega_2) \rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\ &= \{\langle \langle \omega_2, \omega_1 \rangle, \gamma_C(\omega_2) \gamma_A(\omega_1), \eta_C(\omega_2) \cdot \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_2 \in U_2, \omega_1 \in U_1\} \\ &= \{\langle \omega_2, \gamma_C(\omega_2), \eta_C(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2\} \times \{\langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1\} \\ &= C \times A \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Tanımdan

$$\begin{aligned} (A \times C) \times D &= \{\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_C(\omega_2), \eta_A(\omega_1) \eta_C(\omega_2) \rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \times \\ &\quad \{\langle \omega_3, \gamma_D(\omega_3), \eta_D(\omega_3) \rangle \mid \omega_3 \in U_3\} \\ &= \{\langle \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_C(\omega_2) \gamma_D(\omega_3), \eta_A(\omega_1) \eta_C(\omega_2) \eta_D(\omega_3) \rangle \\ &\quad \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2, \omega_3 \in U_3\} \\ &= \{\langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1\} \times \\ &\quad \{\langle \langle \omega_2, \omega_3 \rangle, \gamma_C(\omega_2) \gamma_D(\omega_3), \eta_C(\omega_2) \eta_D(\omega_3) \rangle \mid \omega_2 \in U_2, \omega_3 \in U_3\} \\ &= A \times (C \times D) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Tanımdan

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \times C &= \{\langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1\} \cup \{\langle \omega_1, \gamma_B(\omega_1), \eta_B(\omega_1) \rangle \\
&\mid \omega_1 \in U_1\} \times \{\langle \omega_2, \gamma_C(\omega_2), \eta_C(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2\} \\
&= \{\langle \omega_1, \max(\gamma_A(\omega_1), \gamma_B(\omega_1)), \min(\eta_A(\omega_1), \eta_B(\omega_1)) \rangle \mid \omega_1 \in U_1\} \\
&\times \{\langle \omega_2, \gamma_C(\omega_2), \eta_C(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2\} \\
&= \{\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \max(\gamma_A(\omega_1), \gamma_B(\omega_1)) \gamma_C(\omega_2), \min(\eta_A(\omega_1), \eta_B(\omega_1)) \eta_C(\omega_2) \rangle \\
&\mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\
&= \{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \max(\gamma_A(\omega_1) \gamma_C(\omega_2), \gamma_B(\omega_1) \gamma_C(\omega_2)), \\
&\min(\eta_A(\omega_1) \eta_C(\omega_2), \eta_B(\omega_1) \eta_C(\omega_2)) \rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\
&= \{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_C(\omega_2), \eta_A(\omega_1) \eta_C(\omega_2) \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\
&\cup \{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_B(\omega_1) \gamma_C(\omega_2), \eta_B(\omega_1) \eta_C(\omega_2) \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\
&= (A \times C) \cup (B \times C) \\
&\text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

■

**Önerme 3.1**  $a$  ve  $b$  iki reel sayı olmak üzere  $0 \leq a, b \leq 1$  için  $a + b \geq 2ab$  eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.6**  $U_1, U_2$  iki evrensel küme ve  $A, B$  sırasıyla  $U_1$  ve  $U_2$  üzerinde iki sezgisel bulanık küme olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

i)  $\square(A \times B) \subset \square A \times \square B$

ii)  $\overline{(A \times B)} \subset \overline{A} \times \overline{B}$

iii)  $(A \times B)^\circ \supset A^\circ \times B^\circ$

**İspat.**

i) Kartezyen çarpım tanımına (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\square(A \times B) &= \square(\{\langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1\} \\
&\times \{\langle \omega_2, \gamma_B(\omega_2), \eta_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2\}) \\
&= \square(\{\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2), \eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\
&= \{\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2), 1 - \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca Önerme (3.1) dan

$$1 - \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2) \geq (1 - \gamma_A(\omega_1)) (1 - \gamma_B(\omega_2))$$

olup

$$\begin{aligned} \square(A \times B) &\subset \{ \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2), (1 - \gamma_A(\omega_1)) (1 - \gamma_B(\omega_2)) \rangle \\ &\mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2 \} \\ &= \{ \langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), 1 - \gamma_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1 \} \times \{ \langle \omega_2, \gamma_B(\omega_2), 1 - \gamma_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2 \} \\ &= \square(\{ \langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1 \}) \times \square(\{ \langle \omega_2, \gamma_B(\omega_2), \eta_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2 \}) \\ &= \square A \times \square B \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Kartezyen çarpım tanımından

$$\begin{aligned} \overline{(A \times B)} &= \overline{(\{ \langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1 \} \times \{ \langle \omega_2, \gamma_B(\omega_2), \eta_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2 \})} \\ &= \overline{\{ \langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2), \eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2 \}} \\ &= \left\{ \left\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \max_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in U_1 \times U_2} (\gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2)), \min_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in U_1 \times U_2} (\eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_2)) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2 \right\} \\ &\subset \left\{ \left\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \max_{\omega_1 \in U_1} \gamma_A(\omega_1) \max_{\omega_2 \in U_2} \gamma_B(\omega_2), \min_{\omega_1 \in U_1} \eta_A(\omega_1) \min_{\omega_2 \in U_2} \eta_B(\omega_2) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2 \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \omega_1, \max_{\omega_1 \in U_1} \gamma_A(\omega_1), \min_{\omega_1 \in U_1} \eta_A(\omega_1) \right\rangle \mid \omega_1 \in U_1 \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left\langle \omega_2, \max_{\omega_2 \in U_2} \gamma_B(\omega_2), \min_{\omega_2 \in U_2} \eta_B(\omega_2) \right\rangle \mid \omega_2 \in U_2 \right\} \\ &= \overline{A} \times \overline{B} \end{aligned}$$

elde edilir.

iii)

$$\begin{aligned}
(A \times B)^\circ &= (\{\langle \omega_1, \gamma_A(\omega_1), \eta_A(\omega_1) \rangle \mid \omega_1 \in U_1\} \times \{\langle \omega_2, \gamma_B(\omega_2), \eta_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_2 \in U_2\})^\circ \\
&= \{\langle \langle \omega_1, \omega_2 \rangle, \gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2), \eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_2) \rangle \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\}^\circ \\
&= \left\langle \left\langle \omega_1, \omega_2 \right\rangle, \min_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in U_1 \times U_2} (\gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_2)), \max_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in U_1 \times U_2} (\eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_2)) \right\rangle \\
&\quad \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\
&\supset \left\langle \left\langle \omega_1, \omega_2 \right\rangle, \min_{\omega_1 \in U_1} \gamma_A(\omega_1) \min_{\omega_2 \in U_2} \gamma_B(\omega_2), \max_{\omega_1 \in U_1} \eta_A(\omega_1) \max_{\omega_2 \in U_2} \eta_B(\omega_2) \right\rangle \\
&\quad \mid \omega_1 \in U_1, \omega_2 \in U_2\} \\
&= \left\{ \left\langle \omega_1, \min_{\omega_1 \in U_1} \gamma_A(\omega_1), \max_{\omega_1 \in U_1} \eta_A(\omega_1) \right\rangle \mid \omega_1 \in U_1 \right\} \times \\
&\quad \left\{ \left\langle \omega_2, \min_{\omega_2 \in U_2} \gamma_B(\omega_2), \max_{\omega_2 \in U_2} \eta_B(\omega_2) \right\rangle \mid \omega_2 \in U_2 \right\} \\
&= A^\circ \times B^\circ
\end{aligned}$$

elde edilir.

■

## 4. SEZGİSEL BULANIK KÜMELER İÇİN BAZI BENZERLİK ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde sezgisel bulanık kümeler için bazı benzerlik ölçüleri incelenecektir.

### 4.1 Bir Kosinüs Benzerlik Ölçüsü

Kosinüs benzerlik ölçüleri bulanık kümeler arasındaki benzerliği modellemede etkili bir role sahiptir. Sezgisel bulanık kümeler arasında bir kosinüs benzerlik ölçüsü tanımlanırken bulanık kümelerin vektör temsillerinin arasındaki açının kosinüsü temel alınır. Şimdi sezgisel bulanık kümeler için tanımlanmış bir kosinüs benzerlik ölçüsünü inceleyelim.

$U = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in U \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in U \}$$

$U$  kümesi üzerinde iki sezgisel bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasındaki bir kosinüs benzerlik ölçüsü

$$C_{S.B.K}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A(\omega_j)\gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j)\eta_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)} \sqrt{\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_B^2(\omega_j)}} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Ye 2011).

**Teorem 4.1**  $C_{S.B.K}$  kosinüs benzerlik ölçüleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i)  $0 \leq C_{S.B.K}(A, B) \leq 1$
- ii)  $C_{S.B.K}(A, B) = C_{S.B.K}(B, A)$
- iii)  $A = B$  ise  $C_{S.B.K}(A, B) = 1$  olur.

**İspat.**

i) Her  $j = 1, 2, \dots, n$  için

$$\frac{\gamma_A(\omega_j)\gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j)\eta_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)}\sqrt{\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_B^2(\omega_j)}} \quad (4.2)$$

ifadesi  $(\gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j))$  ve  $(\gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j))$  vektörleri arasındaki açının kosinüsü olduğundan

$$0 \leq \frac{\gamma_A(\omega_j)\gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j)\eta_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)}\sqrt{\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_B^2(\omega_j)}} \leq 1$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (4.2) ifadesinin aritmetik ortalaması olan  $C_{S.B.K}(A, B)$  değeri  $[0, 1]$  aralığındadır.

ii) Tanımdan açıktır.

iii)  $A = B$  olduğunda her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\gamma_A(\omega_j) = \gamma_B(\omega_j)$  ve  $\eta_A(\omega_j) = \eta_B(\omega_j)$  olduğundan

$$\begin{aligned} C_{S.B.K}(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_A(\omega_j)\gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j)\eta_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)}\sqrt{\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_B^2(\omega_j)}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

■

Şimdi  $C_{S.B.K}$  benzerlik ölçüsü kullanılarak tanımlanan

$$d(A, B) = \arccos(C_{S.B.K}(A, B))$$

uzaklık ölçüsünün özelliklerini inceleyelim.

**Teorem 4.2**  $d$  uzaklık ölçüsü olmak üzere,

i)  $d(A, B) \geq 0$ ,

ii)  $A = B$  ise  $d(A, B) = 0$ ,

iii)  $d(A, B) = d(B, A)$ ,

iv)  $A \subseteq B \subseteq C$  olmak üzere  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$  özellikleri gerçekleşir.

**İspat.**

i)

$$\begin{aligned} C_{S.B.K}(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_A(\omega_j) \gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j) \eta_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)} \sqrt{\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_B^2(\omega_j)}} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{\gamma_A(\omega_1) \gamma_B(\omega_1) + \eta_A(\omega_1) \eta_B(\omega_1)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_1) + \eta_A^2(\omega_1)} \sqrt{\gamma_B^2(\omega_1) + \eta_B^2(\omega_1)}} \right. \\ &\quad + \frac{\mu_A(x_2) \mu_B(x_2) + \eta_A(x_2) \eta_B(x_2)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_2) + \eta_A^2(\omega_2)} \sqrt{\gamma_B^2(\omega_2) + \eta_B^2(\omega_2)}} \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\gamma_A(\omega_n) \gamma_B(\omega_n) + \eta_A(\omega_n) \eta_B(\omega_n)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_n) + \eta_A^2(\omega_n)} \sqrt{\gamma_B^2(\omega_n) + \eta_B^2(\omega_n)}} \right\} \\ &= \frac{1}{n} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \dots + \cos\theta_n) \end{aligned}$$

olup  $(C_{S.B.K}(A, B))$ ,  $[0, 1]$  aralığında değer alır.

$C_{S.B.K}(A, B) = 0$  ise  $d(A, B) = \arccos(C_{S.B.K}(A, B)) = \frac{\pi}{2}$

$C_{S.B.K}(A, B) = 1$  ise  $d(A, B) = \arccos(C_{S.B.K}(A, B)) = 0$

ve

$0 < C_{S.B.K}(A, B) < 1$  ise  $0 < d(A, B) = \arccos(C_{S.B.K}(A, B)) < 1$  sağlanır. Dolayısıyla

$$0 \leq C_{S.B.K}(A, B) \leq 1$$

iken

$$d(A, B) \geq 0$$

elde edilir.

ii)  $A = B$  ise öyleki her  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\gamma_A(\omega_j) = \gamma_B(\omega_j)$  ve  $\eta_A(\omega_j) = \eta_B(\omega_j)$  ve olduğundan

$$C_{S.B.K}(A, A) = 1$$

elde edilir. O halde

$$d(A, B) = \arccos(C_{S.B.K}(A, A)) = \arccos(1) = 0$$

elde edilir.

iii)  $C_{S.B.K}(A, B) = C_{S.B.K}(B, A)$  olduğundan

$$d(A, B) = d(B, A)$$

eşitliği sağlanır.

iv)

$$A = \{ \langle \omega_i, \gamma_A(\omega_i), \eta_A(\omega_i) \rangle \mid \omega_i \in U \}$$

$$B = \{ \langle \omega_i, \gamma_B(\omega_i), \eta_B(\omega_i) \rangle \mid \omega_i \in U \}$$

$$C = \{ \langle \omega_i, \gamma_C(\omega_i), \eta_C(\omega_i) \rangle \mid \omega_i \in U \}$$

ve

$$A \subseteq B \subseteq C$$

olsun. Şimdi, her  $i = 1, 2, \dots, n$  için vektörler arasındaki uzaklık ölçülerini düşünersek eğer:

$$d_i(A(\omega_i), B(\omega_i)) = \arccos(C_{S.B.K}(A(\omega_i), B(\omega_i)))$$

$$d_i(B(\omega_i), C(\omega_i)) = \arccos(C_{S.B.K}(B(\omega_i), C(\omega_i)))$$

$$d_i(A(\omega_i), C(\omega_i)) = \arccos(C_{S.B.K}(A(\omega_i), C(\omega_i)))$$

ve tanımdan

$$C_{S.B.K}(A(\omega_i), B(\omega_i)) = \frac{\gamma_A(\omega_i) \gamma_B(\omega_i) + \eta_A(\omega_i) \eta_B(\omega_i)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_i) + \eta_A^2(\omega_i)} \sqrt{\gamma_B^2(\omega_i) + \eta_B^2(\omega_i)}}$$

$$C_{S.B.K}(B(\omega_i), C(\omega_i)) = \frac{\gamma_B(\omega_i) \gamma_C(\omega_i) + \eta_B(\omega_i) \eta_C(\omega_i)}{\sqrt{\gamma_B^2(\omega_i) + \eta_B^2(\omega_i)} \sqrt{\gamma_C^2(\omega_i) + \eta_C^2(\omega_i)}}$$

$$C_{S.B.K}(A(\omega_i), C(\omega_i)) = \frac{\gamma_A(\omega_i) \gamma_C(\omega_i) + \eta_A(\omega_i) \eta_C(\omega_i)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_i) + \eta_A^2(\omega_i)} \sqrt{\gamma_C^2(\omega_i) + \eta_C^2(\omega_i)}}$$

sağlanır. Üçgen eşitsizliğinden her  $i = 1, 2, \dots, n$  için

$$d_i(A(\omega_i), C(\omega_i)) \leq d_i(A(\omega_i), B(\omega_i)) + d_i(B(\omega_i), C(\omega_i))$$

olup

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

elde edilir.

■

#### 4.1.1 Ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü

**Tanım 4.1**  $U = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  sonlu bir küme ,

$$A = \{ \langle \omega_j, \gamma_A(\omega_j), \eta_A(\omega_j) \rangle : \omega_j \in U \}$$

ve

$$B = \{ \langle \omega_j, \gamma_B(\omega_j), \eta_B(\omega_j) \rangle : \omega_j \in U \}$$

$U$  üzerinde iki sezgisel bulanık küme olmak üzere,  $A$  ve  $B$  arasında bir ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüsü

$$W_{S.B.K}(A, B) = \sum_{j=1}^n m_j \frac{\gamma_A(\omega_j)\gamma_B(\omega_j) + \eta_A(\omega_j)\eta_B(\omega_j)}{\sqrt{\gamma_A^2(\omega_j) + \eta_A^2(\omega_j)}\sqrt{\gamma_B^2(\omega_j) + \eta_B^2(\omega_j)}} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $m_j \in [0, 1]$  ve  $\sum_{j=1}^n m_j = 1$  şeklindedir (Ye 2011).

Ayrıca her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\omega_i = \frac{1}{n}$  olarak alınırsa  $W_{S.B.K}(A, B) = C_{S.B.K}(A, B)$  elde edilir.

**Teorem 4.3**  $A$  ve  $B$  iki sezgisel bulanık küme olmak üzere bu kümelerin ağırlıklı kosinüs benzerlik ölçüleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1.  $0 \leq W_{S.B.K}(A, B) \leq 1$ .
2.  $W_{S.B.K}(A, B) = W_{S.B.K}(B, A)$ .
3. Eğer  $A = B$  ise, öyleki  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\gamma_A(\omega_i) = \gamma_B(\omega_i)$  ve  $\eta_A(\omega_i) = \eta_B(\omega_i)$  olduğunda  $W_{S.B.K}(A, B) = 1$  olur.

**İspat.** İspatı daha önceki ispatlara benzer şekilde yapılır. ■

#### 4.1.2 Sezgisel Bulanık Kümeler için benzerlik ölçülerinin karşılaştırılması

$U = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  bir evrensel küme,  $A$  ve  $B$   $U$  üzerinde iki sezgisel bulanık küme olsun. Kosinüs benzerlik ölçüsü ve sezgisel bulanık kümelerin mevcut bazı benzerlik ölçüleri arasındaki karşılaştırmalar aşağıda verilmiştir.

$$S_C(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |S_A(\omega_i) - S_B(\omega_i)|}{2n} \quad (4.4)$$

burada  $S_A(\omega_i) = \gamma_A(\omega_i) - \eta_A(\omega_i)$  ve  $S_B(\omega_i) = \gamma_B(\omega_i) - \eta_B(\omega_i)$  ile tanımlıdır.

$$S_H(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (|\gamma_A(\omega_i) - \gamma_B(\omega_i)| + |\eta_A(\omega_i) - \eta_B(\omega_i)|)}{2n} \quad (4.5)$$

$$S_L(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |S_A(\omega_i) - S_B(\omega_i)|}{4n} - \frac{\sum_{i=1}^n (|\gamma_A(\omega_i) - \gamma_B(\omega_i)| + |\eta_A(\omega_i) - \eta_B(\omega_i)|)}{4n} \quad (4.6)$$



## 5. BAZI UYGULAMALAR

Sezgisel bulanık kümeler üzerinde kosinüs benzerliğinin önlemleri ve etkinliklerini göstermek için bazı örüntü tanıma ve tıbbi teşhis gibi uygulamaları aşağıdaki örneklerde göstereceğiz.

### 5.1 Örüntü Tanıma

Bu kısımda bir örüntü tanıma problemi incelenecektir. Sezgisel bulanık küme olarak temsil edilen

$$\tau = \{\langle \omega_1, 0.5, 0.3 \rangle, \langle \omega_2, 0.6, 0.2 \rangle, \langle \omega_3, 0.8, 0.1 \rangle\}$$

örüntüsünün

$$\gamma_1 = \{\langle \omega_1, 1.0, 0.0 \rangle, \langle \omega_2, 0.8, 0.0 \rangle, \langle \omega_3, 0.7, 0.1 \rangle\}$$

$$\gamma_2 = \{\langle \omega_1, 0.8, 0.1 \rangle, \langle \omega_2, 1.0, 0.0 \rangle, \langle \omega_3, 0.9, 0.0 \rangle\}$$

$$\gamma_3 = \{\langle \omega_1, 0.6, 0.2 \rangle, \langle \omega_2, 0.8, 0.0 \rangle, \langle \omega_3, 1.0, 0.0 \rangle\}$$

örüntülerine benzerliklerini inceleyerek verilen örüntüyü bu örüntülerden birinde sınıflandıracğız. Benzerliklerin

$$C_{S.B.K}(\gamma_1, \tau) = 0.9353$$

$$C_{S.B.K}(\gamma_2, \tau) = 0.9519$$

$$C_{S.B.K}(\gamma_3, \tau) = \mathbf{0.9724}$$

olduğı görülür. Buna göre  $\tau$  örüntüsü  $\gamma_3$  örüntüsü ile sınıflandırılabilir.

Şimdi aynı problemi ağırlıklı benzerlik ölçüsünü kullanarak çözelim.  $m_1, m_2$  ve  $m_3$  ağırlıklarının sırasıyla 0.5, 0.3 ve 0.2 olmak üzere

$$W_{S.B.K}(\gamma_1, \tau) = 0.9133$$

$$W_{S.B.K}(\gamma_2, \tau) = 0.9404$$

$$W_{S.B.K}(\gamma_3, \tau) = \mathbf{0.9712}$$

elde edilir. Buna göre  $\tau$  örüntüsü  $\gamma_3$  örüntüsü ile sınıflandırılabilir.

## 5.2 Tıbbi Teşhis

Bu kısımda özel bir örüntü tanıma uygulaması olan bir tıbbi teşhis problemi ele alınacaktır. Hastalıklar

$$Z = \{Z_1(\text{Viral ateş}), Z_2(\text{Sıtma}), Z_3(\text{Tifo}), Z_4(\text{Mide rahatsızlığı}), Z_5(\text{Göğüs rahatsızlığı})\}$$

olmak üzere bu hastalıkların her birinde ortak olarak bulunan

$$F = \{f_1(\text{Ateş}), f_2(\text{Baş ağrısı}), f_3(\text{Karın ağrısı}), f_4(\text{Öksürük}), f_5(\text{Göğüs ağrısı})\}$$

septomlarını göz önüne alalım. Bir hastanın

$$P(Hasta) = \{\langle f_1, 0.8, 0.1 \rangle, \langle f_2, 0.6, 0.1 \rangle, \langle f_3, 0.2, 0.8 \rangle, \langle f_4, 0.6, 0.1 \rangle, \langle f_5, 0.1, 0.6 \rangle\}$$

örüntüsü ile temsil edildiğini varsayalım. Diğer yandan hastalıklar

$$Z_1(\text{Viral ateş}) = \{\langle f_1, 0.4, 0.0 \rangle, \langle f_2, 0.3, 0.5 \rangle, \langle f_3, 0.1, 0.7 \rangle, \langle f_4, 0.4, 0.3 \rangle, \langle f_5, 0.1, 0.7 \rangle\}$$

$$Z_2(\text{Sıtma}) = \{\langle f_1, 0.7, 0.0 \rangle, \langle f_2, 0.2, 0.6 \rangle, \langle f_3, 0.0, 0.9 \rangle, \langle f_4, 0.7, 0.0 \rangle, \langle f_5, 0.1, 0.8 \rangle\}$$

$$Z_3(\text{Tifo}) = \{\langle f_1, 0.3, 0.3 \rangle, \langle f_2, 0.6, 0.1 \rangle, \langle f_3, 0.2, 0.7 \rangle, \langle f_4, 0.2, 0.6 \rangle, \langle f_5, 0.1, 0.9 \rangle\}$$

$$Z_4(\text{Mide rahatsızlığı}) = \{\langle f_1, 0.1, 0.7 \rangle, \langle f_2, 0.2, 0.4 \rangle, \langle f_3, 0.8, 0.0 \rangle, \langle f_4, 0.2, 0.7 \rangle, \langle f_5, 0.2, 0.7 \rangle\}$$

$$Z_5(\text{Göğüs rahatsızlığı}) = \{\langle f_1, 0.1, 0.8 \rangle, \langle f_2, 0.0, 0.8 \rangle, \langle f_3, 0.2, 0.8 \rangle, \langle f_4, 0.2, 0.8 \rangle, \langle f_5, 0.8, 0.1 \rangle\}$$

örüntüleri ile temsil edilsin.

Amacımız  $P$  örüntüsünü  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  ve  $Z_5$  örüntülerinden biri ile sınıflandırmaktır.

Önceki örüntü tanıma problemine benzer şekilde,  $P$  hastası için

$$C_{S.B.K}(P, Z_1) = \mathbf{0.9046}$$

$$C_{S.B.K}(P, Z_2) = 0.8602$$

$$C_{S.B.K}(P, Z_3) = 0.8510$$

$$C_{S.B.K}(P, Z_4) = 0.5033$$

$$C_{S.B.K}(P, Z_5) = 0.4542$$

benzerlikleri hesaplanır. Buna göre hastaya viral ateş ön tanısı konulabilir.



## 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında sezgisel bulanık kümeler arasında bazı kosinüs benzerlik ölçüleri tanıtılmıştır. Ayrıca örüntü tanıma problemlerinde bilinmeyen bir küme sezgisel bulanık bir küme olarak ifade edilerek, kosinüs benzerlik ölçüleri yardımıyla bilinen bir kümenin örüntüsü ile karşılaştırılmıştır. Son olarak bir tıbbi teşhis uygulaması verilmiştir.



## KAYNAKLAR

- Atanassov, K. T., 1986. *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 20, 87–96.
- Garg, H., 2016. *A new generalized Pythagorean fuzzy information aggregation using Einstein operations and its application to decision making*, International Journal of Intelligent Systems, 31(9), 998–999.
- Khan, M.S.A., Abdullah, S., Ali, A., Siddiqui, N., and Amin, F., 2017. *Pythagorean hesitant fuzzy sets and their application to group decision making with incomplete weight information*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 33(6), 3971–3985.
- Lu, M., Wei, G., Alsaadi, F.E., Hayat, T., and Alsaedi, A., 2017. *Hesitant Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 33(2), 1105–1117.
- Nguyen, X. T., Garg, H. 2019. *Exponential similarity measures for Pythagorean fuzzy sets and their applications to pattern recognition and decision-making process*, Complex and Intelligent Systems, 5(2), 217–228.
- Olgun, M., Ünver, M., Yardımcı, Ş., 2019. *Pythagorean fuzzy topological spaces*, Complex and Intelligent Systems, 5(2), 177–183.
- Olgun, M., Ünver, M., Yardımcı, Ş., 2019. *Pythagorean fuzzy points and applications in pattern recognition and pythagorean fuzzy topologies*, Soft Computing, 25(7), 5225–5232.
- Peng, X., and Yang, Y., 2015. *Some results for pythagorean fuzzy Sets*, International Journal of Intelligent Systems, 30(11), 1133–1160.
- Shi, L. L., Ye, j., 2013. *Study on fault diagnosis of turbine using an improved cosine similarity measure for vague sets.*, Journal Appl. Sci., 13(10), 1781–1786.
- Wei, G. , *Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and their application to multiple attribute decision making*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 33(4) (2017), 2119–2132, 1043–1070.
- Wei, G. and Wei, Y., *Similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on the cosine function and their applications*, International Journal of Intelligent Systems 33(3) (2018), 634–652.
- Wei, G., Wei, Y., 2018. *Similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on the cosine function and their applications*, International Journal of Intelligent Systems, 33(3), 634–652.
- Yager, R. R., 2013. *Pythagorean fuzzy subsets*, 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIBS Annual Meeting (IFSA/ NAFIBS), 57–61.

- Ye, J., 2011. *Cosine similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and their applications*, Mathematical and Computer Modelling, 53, 91–97.
- Zadeh, L. A., 1965. *Fuzzy sets*, Information and Control, 8, 338–353.
- Zeng, S., Chen J. and Li X. , A hybrid method for Pythagorean fuzzy multiple-criteria decision making, International Journal of Information Technology and Decision Making 15(02) (2016), 403–422.
- Zhang, X. and Xu, Z., Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets, International Journal of Intelligent Systems 29(12) (2014), 1061–1078.

