

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BAYESCİ OTOREGRESİF ZAMAN SERİLERİNDE ÖNSEL DAĞILIMLARIN
SEÇİMİ VE KARŞILAŞTIRILMASI**

Mustafa GAZİOĞULLARI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2022**

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAYESÇİ OTOREGRESİF ZAMAN SERİLERİNDE ÖNSAL DAĞILIMLARIN SEÇİMİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

Mustafa GAZİOĞULLARI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN

Zaman serisi, belirli ya da dönemsel zaman aralıklarında gözlenen ölçümlerin bir dizisidir. Böyle bir diziden gelecek dönemlere ait öngöründe bulunabilmenin bir yolu zaman serileri analiz yöntemlerini kullanmaktır. Bu yöntemin amacı; zaman serileri dizisi için belirli disiplinler altında uygun model bulup, sonuç çıkarımı yapmaktır.

Zaman serilerinde sonuç çıkarımı için kullanılan birçok yöntem ve model vardır. Ancak AR(1) olarak adlandırılan otoregresif süreç, zaman serileri analizinde en çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan modeldir. AR(1) sürecinin sonuç çıkarımları açısından farklı türde tahmin yöntemleri geliştirilmiş ve literatürde yerini almıştır. Bunlardan biri ise parametre tahmininde ve model seçiminde uzman görüşlerin modele entegre edilmesini öngören Bayes yöntemidir.

AR(1) modellerinde Bayes yaklaşımı getirilen model parametrelerine ait önsel dağılımın seçimi çok önemli olup bilgi içerip içermemesine göre sonsal dağılımı dolayısıyla modele ait parametre tahminini değiştirmektedir. Bu da model vasıtasıyla gelecek planlamalarına ait öngörülerini etkilemekte ve üzerinde durulması, araştırılması gereken bir konu haline gelmektedir.

Bu çalışmada amaç, önsel dağılımların seçiminde kullanılan yöntemleri ortaya koyarak, birinci dereceden otoregresif zaman serileri için farklı önsel dağılımlar ile elde edilen sonsal dağılıma ait hem parametre tahmini yapmak hem de model uyumu anlamında karşılaştırma yapmaktır. Sonuçlara ulaşma ve simülasyon çalışmalarında Matlab, Minitab, SPSS, Excel programlarından yararlanılmıştır.

Temmuz 2022, 81 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Otoregresif zaman serileri, Bayesci yaklaşım, Önsel dağılım, Sonsal dağılım

ABSTRACT

Master Thesis

SELECTION AND COMPARISONS OF PRIOR DISTRIBUTIONS IN BAYESIAN AUTOREGRESSIVE TIME SERIES

Mustafa GAZİOĞULLARI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN

A time series is a set of measurements taken at regular or fixed periods of time. Applying time series analysis techniques is one way to predict future periods based on such a series. This method's objective is to identify an appropriate model for time series set within certain disciplines and to draw conclusions.

There are several time series inference methods and models. Nevertheless, the autoregressive process known as AR(1) is the most well-known and commonly used model in time series analysis. Different types of estimation methods have been developed in terms of the inferences of the AR(1) process and have taken their place in the literature. One of them is the Bayesian method, which involves incorporating expert opinions into the model during parameter estimation and model selection.

In AR(1) models, the selection of the prior distribution of the model parameters using the Bayesian method is crucial, because it modifies the estimate of the model's parameters based on the posterior distribution, depending on whether or not it includes information. This characteristic influences the model's predictions of future planning and so becomes an issue that requires investigation.

The purpose of this research was to reveal the methods utilised in prior distribution selection and to compare the model fit and parameter estimation of the posterior distribution produced with different prior distributions for first order autoregressive time series. The applications Matlab, Minitab, SPSS, and Excel were utilised to get the results and conduct the simulation experiments.

July 2022, 81 Pages

Key Words : Autoregressive Time Series, Bayesian Approach, Prior Distributions, Posterior Distributions

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

2005 yılında eğitimine başladığım Ankara Üniversitesi İstatistik bölümünde gerek lisans eğitimim boyunca gerekse lisansüstü eğitimimin her aşamasında bilgisi ve mesleki tecrübesiyle bana yol gösteren, her koşulda bana yardımcı olan ve inanmaktan vazgeçmeyen, büyük bir şevkle çalıştığım “ Bayesci Yaklaşım” alanına özverisiyle, bilgi donanımıyla ilgi duymamı sağlayan ve bu konuda bana hayal edemeyeceğim ufuklar açan çok saygı değer, kıymetli hocam ve danışmanım Sayın Doç. Dr. Esin Köksal Babacan’a teşekkürlerimi sunarım.

Her ihtiyaç duyduğumda bilgisini esirgemeyen ve bilgi birikimi ile bana her daim destek olan değerli dostum Ankara Üniversitesi akademisyeni Dr. Abdullah YALÇINKAYA ’ya teşekkürü bir borç bilirim.

Bu dönem boyunca çalışmalarımı nihayete erdirmem adına bana her zaman destek olan, inanan, fedakârlığını hiçbir zaman esirgemeyen, inancımı kaybettiğimde bana moral olan ve beni manevi destekleriyle ayağa kaldıran sevgili eşim Esra GAZİOĞULLARI’ na ve bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan çok kıymetli anne ve babama teşekkür ederim.

Mustafa GAZİOĞULLARI
Ankara, Temmuz 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. PARAMETRE TAHMİNİ.....	3
2.1 Parametre Tahmin Yöntemleri.....	6
2.1.1 Nokta tahmini	6
2.1.1.1 Momentler yöntemi.....	6
2.1.1.2 En çok olabilirlik yöntemi	7
2.1.1.3 En küçük kareler yöntemi	9
2.1.1.4 Bayesci yaklaşım ile tahmin	11
2.1.2 Aralık tahmini	12
3. BAYESCİ YAKLAŞIM.....	14
3.1 Bayes Teoremi	14
3.2 Önsel Dağılımlar	18
3.2.1 Bilgi içeren önsel dağılımlar	19
3.2.1.1 Eşlenik (conjugate) önsel dağılım	20
3.2.2 Bilgi içermeyen önsel dağılımlar	26
3.2.2.1 Düzgün (uniform) önsel dağılım	26
3.2.2.2 Jeffreys önsel dağılımı.....	28
3.2.2.3 Belirsiz (diffuse) önsel dağılım	29
3.3 Sonsal Dağılım	29
3.3.1 Markov zinciri monte carlo (mzmc) simülasyon teknikleri.....	30
3.3.1.1 Monte-Carlo integrasyonu	31
3.3.1.1.1 Beklenen değer yöntemi.....	31

3.3.1.1.2 Kabul-Red yöntemi	32
3.3.1.2 Metropolis-Hasting (MH) algoritması.....	33
3.3.1.3 Gibbs algoritması	35
3.4 En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi (H.P.D.R).....	36
4. ZAMAN SERİLERİ	38
4.1 Zaman Serilerinde Durağanlık	38
4.2 Otoregresif (AR) Zaman Serileri	40
4.3 Zaman Serilerinde Modelleme.....	40
5. OTOREGRESİF ZAMAN SERİLERİNDE BAYESÇİ SONUÇ ÇIKARIMI	45
5.1 AR(1) Zaman Serilerinde Bayesci Sonuç Çıkarımı	45
5.1.1 Jeffreys önsel dağılımı kullanılarak AR(1) zaman serisi için bayesci sonuç çıkarımı	46
5.1.2 Eşlenik önsel dağılım kullanılarak AR(1) zaman serisi için bayesci sonuç çıkarımı	50
5.1.3 Kırpılmış normal önsel dağılım kullanılarak AR(1) zaman serisi için bayesci sonuç çıkarımı	52
6. UYGULAMA ÇALIŞMALARI	58
6.1 Simülasyon Çalışması	58
6.2 Gerçek Veri Çalışması	61
6.2.1 Model seçimi	62
6.2.2 Klasik yöntem ile parametre tahmini.....	66
6.2.3 Bayesci sonuç çıkarımı	68
6.2.3.1 Jeffreys önsel dağılımı kullanılarak bayesci sonuç çıkarımı	68
6.2.3.2 Eşlenik önsel dağılım kullanılarak bayesci sonuç çıkarımı	69
6.2.3.3 Kırpılmış normal önsel dağılım kullanılarak bayesci sonuç çıkarımı	69
7. SONUÇ VE TARTIŞMA	72
KAYNAKLAR	75
EKLER	77
EK 1 AR(1) modelinden sayı üretip Jeffreys Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı	78
EK 2 AR(1) modelinden sayı üretip Eşlenik Önsel Dağılım Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı	79
EK 3 AR(1) modelinden sayı üretip Kırpılmış Normal Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı	80
ÖZGEÇMİŞ	81

SİMGELER DİZİNİ

θ	Teta
λ	Lamda
Γ	Gamma
β	Beta
p	Parametre
μ	Beklenen Değer
σ	Sigma
σ^2	Varyans
π	Pi (önsel dağılım olasılık (yoğunluk) fonksiyonu)
τ	Tau
ϕ	Fi (otoregresif (AR) parametresi)
ρ	Ro
e, ε	Hatalar (artıklar)
Q	Parametre Vektörü
Θ	Parametre Kümesi
Ω	Omega (olasılık uzayı)
α	Alfa (anlam düzeyi)
P	Olasılık
∂	Türev
m	Karakteristik Kök
p	Otoregresif(AR) Derecesi
n	Örneklem Genişliği
$\psi(.)$	Kırpılmış Normal Dağılım Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$\Psi(.)$	Kırpılmış Normal Dağılım Kümülant Dağılım Fonksiyonu
L	Likelihood Fonksiyonu
f, g	Olasılık (yoğunluk) Fonksiyonu
J	Jakobian Matrisi
E	Beklenen Değer Operatörü
VAR	Varyans
$\log, \ln$	Logaritma
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
N	Normal Dağılım
G	Gamma Dağılım
Π	Çarpım
Σ	Toplam
$\int$	İntegral
$ \cdot $	Determinant
∞	Sonsuz
$\propto$	Orantısal Olarak
$\in$	Elemanıdır
$\emptyset$	Boş Küme

Kısaltmalar

AR	Autoregressive
MA	Moving Average
ARMA	Autoregressive Moving Average
ACF	Auto-Correlation Function
PACF	Partial Auto-Correlation Function
BIC	Bayesian Information Criteria
AIC	Akaike's Information Criteria
MZMC	Markov Zinciri Monte Carlo
HPDR	Higest Posterior Density Region
RMSE	Root Mean Square Error
ANOVA	Analysis of Variance
WN	White Noise
KN	Kırpılmış Normal
min	Minimum

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 (X,Y) Rasgele Vektör Alanı.....	32
Şekil 6.1 Verilere Ait Zaman Serisi Grafiği.....	63
Şekil 6.2 Seriyeye Ait Otokorelasyon Grafiği (ACF)	65
Şekil 6.3 Seriyeye Ait Parçalı Otokorelasyon Grafiği (PACF)	65
Şekil 6.4 Hatalara Ait Otokorelasyon Grafiği (ACF)	67
Şekil 6.5 Hatalara Ait Histogram Grafiği.....	67
Şekil 6.6 Hatalara Ait Kolmogorov-Smirnov Testi	67
Şekil 6.7 Hatalar ile Seri Arasındaki Yayılım Grafiği	67
Şekil 6.8 Seriyeye Ait Kolmogorov-Smirnov Testi.....	68
Şekil 6.9 Seriyeye Ait Histogram Grafiği.....	68



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 İstatistiksel Yöntemler Diyagramı	5
Çizelge 3.1 Önsel Dağılımlar Diyagramı	19
Çizelge 3.2 Eşlenik Aile Önseli ile Hesaplanan Sonsal Dağılım Tablosu	21
Çizelge 3.3 Farklı Dağılımlar İçin Jeffreys Önselleri	28
Çizelge 6.1 Farklı Önseller Kullanılarak Bayesci Yöntemle Parametre Tahmini ve Bunlara Ait RMSE Değerleri	59
Çizelge 6.2 Farklı Önseller Kullanılarak Bayesci Yöntemle En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi(HPDR) Yüzdelikleri ve Alt-Üst Sınırları	60
Çizelge 6.3 Zaman Serisi Analiz Uygulama Sırası	62
Çizelge 6.4 Dickey-Fuller Birim Kök Testi	64
Çizelge 6.5 Dickey-Fuller Test İstatistiği	64
Çizelge 6.6 AIC (Akaike Information Criterion) Değerleri	65
Çizelge 6.7 AR(1) Model Tablosu	66
Çizelge 6.8 ϕ 'nin Bayesci Yöntemle Tahminleri ve En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi	71

1. GİRİŞ

Zaman serileri analizlerinde kullanılan birçok model vardır. AR(1) olarak adlandırılan birinci dereceden otoregresif süreç, zaman serileri analizinde en çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan modeldir. AR(1) zaman serilerinde istatistiki sonuç çıkarımı için farklı türde parametre tahmin yöntemleri geliştirilmiş ve literatürde yerini almıştır. Klasik (frekansçı) istatistik yöntemlerinde en yaygın kullanılanlar; momentler, en çok olabilirlik, koşullu en çok olabilirlik ve koşullu en küçük kareler yöntemidir. Diğer bir yöntem ise mevcut tahmin argümanlarını geliştirmek için göz önünde bulundurulmuş ve özellikle küçük örneklemelerde başarılı sonuçlar veren Bayesci yaklaşımdır. Bayesci yaklaşım, temeli Bayes Teoremine dayandırılarak geliştirilmiş bir yaklaşımdır. Bayesci yaklaşımda parametre, önsel olarak adlandırılan bir dağılıma sahip rasgele değişken gibi düşünülmektedir. Parametreye ait bu önsel dağılım, örneklem verisi ile birleştirilerek parametre için sonsal (posterior) dağılım elde edilir. Sonsal dağılıma ait beklenen değer, model parametresinin Bayes tahmin edicisi olarak adlandırılır.

AR modellerinde Bayes Analizi; Zellner ve Tiao (1964) tarafından AR(1) modelleri üzerine çalışılması ile başlamıştır. Zellner (1971), Box ve arkadaşları (1976), Monahan (1984), Monahan ve Smith (1982), “AR Modellerine Bayesci Yaklaşımı” olarak çeşitli çalışmalar yapmışlar ve yöntemler geliştirmişlerdir. Lahiff (1980), AR(1) modelinde sonsal dağılım için sayısal bir algoritma geliştirmiş, Philips (1991) durağan olmayan AR modellerinde sonsal dağılımı geliştirmek için farklı önsel dağılımların uygulamaları üzerinde çalışmıştır. Broemeling and Cook (1993) p . dereceden AR modellerinde sonsal olasılık dağılımının beklenen değerini belirlemede yöntemler geliştirmişler, Ibazizen ve Fellag (2003) durağanlık varsayımını göz önünde bulundurmeyen AR(1) modellerinde bilgi içermeyen (objektif) önsel dağılım varsayımını ortaya atmıştır ve literatürde AR(1) modelleri üzerine yapılan birçok Bayes analizi bu varsayım altında yapılmaktadır.

Bu çalışmada amaç; durağan bir AR(1) modeline Bayesci yöntemle yaklaşımda bulunup, model parametresine ilişkin farklı önsel dağılımlar kullanarak sonsal dağılımın beklenen değerini elde etmek ve süreci gerçek bir veri seti üzerinde uygulayarak model için önerilen uygun önsel dağılımlar arasında karşılaştırma yapmaktır.

Çalışmanın 2. bölümünde, istatistiksel tahmin yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. 3. bölümde Bayesci yaklaşım, klasik yaklaşımla karşılaştırılarak ifade edilmiş, Bayes Teoremi açıklanmış ve teoreme ait bilgi güncelleme yöntemi incelenmiştir. Daha sonra önsel ve sonsal dağılımlar teorik olarak ifade edilerek sonsal dağılıma ulaşmada kullanılan simülasyon tekniklerine değinilmiştir. 4. Bölümde, otoregresif (AR) zaman serilerinin genel yapısı verilmiş ve zaman serilerinde modelleme konusuna değinilmiştir. 5. Bölümde, AR(1) zaman serilerine Bayesci yaklaşımdan bahsedilmiş ve üç farklı önsel dağılım altında AR(1) model parametresi için Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Ayrıca sonuç çıkarımında ele alınan önsellerden olan Kırpılmış Normal Dağılım (Truncated Normal Distribution) hakkında genel bilgilere de yer verilmiştir. 6. Bölüm uygulama çalışmalarına ayrılmıştır. İlk olarak simülasyon çalışması ile AR(1) modelinden veriler üretilmiş, üç farklı önsel dağılım altında Bayesci yaklaşım ele alınarak AR(1) model parametresine ait Bayes tahminleri elde edilmiştir. Daha sonra gerçek bir veri seti kullanılarak yine aynı üç önsel dağılım göz önüne alınmış ve AR(1) modeline ait parametre için klasik ve Bayesci yaklaşım ile parametre tahmini yapılmıştır. Tezin son bölümü olan 7. Bölümde, elde edilen sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmış ve önsel dağılımlar hakkında sonuç çıkarımı yapılmıştır.

2.PARAMETRE TAHMİNİ

Bir araştırmaya konu olan kitleyi karakterize eden ve diğer kitlelerden ayırt edilmesini sağlayan ölçülere **parametre** denir. Örneğin bir gölde yaşayan sazan balıklarının ağırlıkları, boy uzunlukları ve cinsiyetleri birer parametredir. Bir kitlenin parametreleri hakkında sonuç çıkarımı yapabilmek için tam sayım yapmak ve parametrelere ilişkin değerleri doğrudan belirlemek gerçek hayatta mümkün değildir. Böyle durumlarda örnekleme yöntemlerine başvurulur. Kitleden örnekleme yöntemlerine göre alınan veriler ile istatistiksel tahmin yöntemleri kullanılarak kitleye ait parametreler tahmin edilmeye çalışılır.

Tanım 2.1

Ω boş olmayan bir küme ve U , Ω 'nın alt kümelerinden oluşan bir sınıf olsun. U sınıfının her bir elemanına **olay** denir. U sınıfı aşağıda belirtilen özelliklere sahip ise U sınıfına Ω üzerinde bir **sigma-cebir**, (Ω, U) ikilisine de **ölçülebilir bir uzay** adı verilir,

- 1) $\Omega \in U$
- 2) Her $A \in U$ için $A' \in U$ (A' , A 'nın tümleyenidir)
- 3) $A_n \in U$, $n=1,2,3,\dots$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

(Akdi 2012).

Tanım 2.2

(Ω, U) ölçülebilir bir uzay olmak üzere U üzerinde $P:U \rightarrow [0,1]$ ve $A \rightarrow P(A)$ küme fonksiyonu tanımlansın. Aşağıdaki özellikleri P küme fonksiyonu sağlar ise bu küme fonksiyonuna bir **olasılık ölçüsü** ve $P(A)$ değerine A olayının **olasılığı** denir. (Ω, U, P) ise **olasılık uzayı** olarak adlandırılır. Özellikler;

$$1) P(A) \geq 0, \forall A \in U$$

$$2) P(\Omega) = 1$$

3) A_n 'ler U da ayrık $A_k \cap A_j = \emptyset, k \neq j$ olaylarının bir dizisi ise

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

dir (Akdi 2012).

Tanım 2.3

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere, Ω örnek uzayından $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlı;

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow X(w) \end{aligned}$$

Bişiminde bir X fonksiyonu tanımlansın. Eğer X fonksiyonu, $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\{w : X(w) \leq a\} \in U$ özelliğine sahipse X fonksiyonuna bir **rasgele değişken** denir (Akdi 2012).

Tanım 2.4

X bir rasgele değişken olmak üzere, X ile aynı dağılıma sahip ve birbirinden bağımsız $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenlerine bu dağılımdan bir **örneklem** denir. Ölçüm sonucunda $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemdeki rasgele değişkenlerin aldığı $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerine **veri veya örnek** denir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ lerin olabilecek tüm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gözlem noktalarının kümesine **örneklem uzayı** denir. Örneklem uzayı $\mathbb{C}$ ile gösterilsin. $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^n$ dir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemdeki rasgele değişkenlerin gözlenen değerleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olmak üzere $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}$ 'dir (Öztürk 2006).

Tanım 2.5

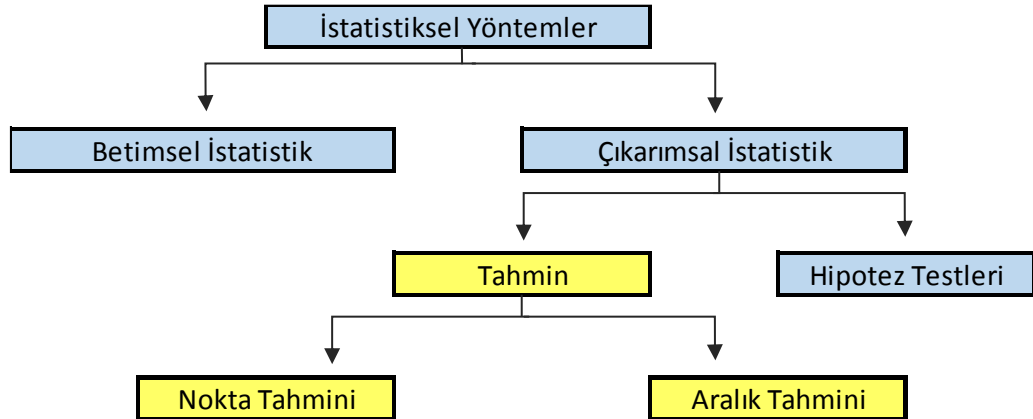
$X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminin parametre içermeyen bir fonksiyonuna **istatistik veya tahmin edici** denir. Yani $X_1, X_2, \dots, X_n$ bir örneklem ve $T(X)$ bir tahmin edici ise bu tahmin edicinin dağılımına **örneklem dağılımı**, tahmin edicinin aldığı değere ise bir **tahmin** denir. Yani, $T(x)$ değeri bir tahmindir.

Her istatistik bir rasgele değişken veya bir rasgele vektördür. Örneğin $X_1, X_2, \dots, X_n$ bir

örneklem olmak üzere; $\sum_{i=1}^n X_i$ bir istatistik olup rasgele değişkendir. $\left| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{array} \right|$ de bir istatistik olup rasgele vektördür (Öztürk 2006).

Rasgele değişkenler için bir olasılık dağılımı mevcuttur ve araştırmanın konusu bu olasılık dağılımını belirlemek olabilir. Bu dağılımın ortaya çıkarılması veya dağılımla ilgili medyan, mod, beklenen değer, varyans gibi bazı karakteristik değerlerin tahmin edilmesi istatistiksel sonuç çıkarımının konusudur. İstatistik biliminin temel amacı; örneklem verilerinden yola çıkarak kitleyi karakterize eden parametreler hakkında tahminlerde bulunmaya çalışmaktır.

Çizelge 2.1 İstatistiksel yöntemler diyagramı



2.1 Parametre Tahmin Yöntemleri

Örneklemden hareketle kitle parametrelerini tahmin etme iki şekilde yapılır; ***nokta tahmini ve aralık tahmini***. Tahmin sadece tek bir değer olarak elde ediliyorsa buna ***nokta tahmini*** denir. Eğer elde edilen tahmin, belirli bir olasılıkla (%95, %99 gibi) kitle parametrelerinin bulunabileceği bir aralık biçiminde ise buna da ***aralık tahmini*** denir.

2.1.1 Nokta tahmini

Kitle parametresine ait istatistikleri, kitledeki tüm birimleri gözlemlemenin imkânsız olduğu durumlarda hesaplamak mümkün değildir. Böylesi durumlarda, üzerinde çalışılan kitleden, kitleyi temsil edebilecek nitelikte örnek çekilerek, örneklem istatistikleri elde edilmekte ve bu istatistikler kitle parametre tahmin değeri olarak kullanılmaktadır. Örneklem istatistiklerinden yola çıkarak *kitle parametresini tahmin etme yöntemlerinden biri nokta tahminidir*. Bu yöntem örneklem istatistiğini, kitle parametresinin tahmini değeri olarak kabul etmektedir. Dolayısıyla nokta tahmini, örneklem istatistiği üzerinden bilinmeyen kitle parametresini tek bir değer şeklinde tahmin etme işlemidir. Örneğin, kitle varyansı tahmin edilmek istendiğinde yapılması gereken kitle içinden bir örneklem çekmek, sonrasında çekilen örneklemin aritmetik ortalamasını hesaplayarak örneklem varyansını elde etmek ve bu değeri kitle varyansına ait tahmin değeri olarak kullanmak olacaktır. İlgilenilen kitlede birim sayısının çok fazla olması muhtemel olduğundan, ilgili kitleden çekilmesi mümkün olan çok sayıda farklı örneklem olduğu anlaşılır. Dolayısıyla, kitle parametresinin tahmini değeri çekilen her örnekleme göre değişecektir. Momentler, en çok olabilirlik, en küçük kareler ve Bayes yöntemleri çalışmalarda çok yaygın kullanılan nokta tahmin yöntemleridir.

2.1.1.1 Momentler yöntemi

Nokta tahmin edicilerinin türetilmesi için geliştirilen en eski yöntemdir. Kitle parametrelerine ilişkin momentler tahmin edicilerini elde edebilmek için kitle momentlerinin var olması gerekir (Akdi 2005). Momentler yöntemi çok basit bir işleme

sahiptir. Kitle parametre sayısı kadar, gözlemlenen örnekleme ilişkin örneklem momentlerinin kitle momentlerine eşitlenmesiyle moment tahmin edicileri elde edilir.

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)' \in \delta \subset \mathbb{R}^s$ olmak üzere $s(s \geq 1)$ bileşenli θ parametre vektörü tahmin edilmek istenilsin. Burada δ parametre uzayıdır. $X_1, X_2, \dots, X_n$, $\theta \in \delta$ olan dağılımdan bir örneklem ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\cdot; \theta)$ olmak üzere kitle dağılımının momentleri;

$$a_k = E_{\theta}(X_1^k) \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

ve örneklem momentleri;

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

olsun. Kitle ve örneklem momentlerinden ilk s tanesi eşitlenerek elde edilen ve $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ bilinmeyen parametrelere göre s denklemlili sistemin çözümü olan;

$$\tilde{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \tilde{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, \tilde{\theta}_s(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.3)$$

istatistiklerine **momentler tahmin edicileri** denir (Öztürk 2006).

2.1.1.2 En çok olabilirlik yöntemi

Araştırmacılar tarafından tahmin edicileri bulmak için istatistik ve ekonomi alanında en sık kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemin en dikkat çeken özelliği küçük varyanslı ve asimptotik olarak yansız olmalarıdır. En çok olabilirlik yöntemi, kitleden çekilen örneklem değerlerinin gerçekleşme olabilirliğini maksimum yapan kitle parametrelerini elde etmeye çalışır.

X bir rasgele değişken ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \theta)$ olsun ve θ parametresi tahmin edilmeye çalışılsın. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örnekleminin çekilmesi ile elde edilen değerler $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. O halde örneklemin çekilmesi ile $A = (X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ olayı meydana gelir. Bu olayın olasılığı şu şekildedir;

$$P(A) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \quad (2.4)$$

Burada $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, X_i lerin ortak yoğunluk fonksiyonudur. X_i ler aralarında bağımsız olduklarından

$$P(A) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta), \dots, f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (2.5)$$

yazılabilir. θ parametresine bağlı bir fonksiyon olarak düşünölebilen bu olasılığa, $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleminin **olabilirlik fonksiyonu** denir ve $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ ile veya $L(\theta)$ ile gösterilir. Yani;

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (2.6)$$

dir. En çok olabilirlik yöntemi genel olarak şu ana düşünceye dayanır; $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemini çekildiğinde $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinen değerleri elde edilir. Yani A olayı gerçekteşir. Bu olayın olasılığı $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, θ parametresine bağlıdır. A olayı meydana geldiğine göre bu olasılık ya büyük olmalı ya da bu olaya mümkün olan en büyük olasılık değeri verilmelidir. O halde θ parametresinin tahmin değeri olarak $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ yı maksimum yapan θ değeri araştırılır. Bu değer $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerine bağlıdır. θ yerine $\hat{\theta}$ alınırsa;

$$\left. \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (2.7)$$

denklemini sağlayan değer olarak elde edilir. Buradan işlemleri kolaylaştırmak ve fonksiyonu maksimum yapan değerleri bulabilmek için $L(\theta)$ nın logaritması alınır;

$$\left. \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left. \frac{\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}}{L(\theta)} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (2.8)$$

(2.7) ve (2.8) eşitliğinin her ikisinde de $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$ olur. Buna göre θ parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicisi;

$$\left. \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \ln f(x_i; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (2.9)$$

denkleminin çözümü olarak elde edilir.

2.1.1.3 En küçük kareler yöntemi

Uygulamada en yaygın ve tercih edilen yöntemlerden biridir. Bu yöntemin prensibi, hata terimlerinin sıfır ortalamalı, sabit ve homojen varyanslı olması durumunda hata terimlerinin kareleri toplamını en küçük yapacak şekilde model parametrelerini tahmin etmektir.

Y_i : bağımlı değişken,

X_i : bağımsız değişken,

ε_i : hatalar,

β_0, β_1 : regresyon katsayıları(parametreler),

n : örneklem hacmi ve $i = 1, 2, \dots, n$,

olmak üzere doğrusal bir regresyon modeli;

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

şeklinde yazılır. Regresyon denklemlerinde kestirim yapılabilmesi için; hata terimlerinin $(\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i)$ rasgele olup Normal dağılıma uygun olması, hatalara ait beklenen değerin sıfır, varyanslarının homojen ve sabit olup σ^2 ye eşit olması, $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ yani hata terimlerinin ilişkisiz olması, bağımlı değişken ile hata terimlerinin birbiri ile korelasyonsuz olması gibi bir takım varsayımların sağlanması gereklidir. Kitle regresyon denkleminde bulunan β_0 ve β_1 parametrelerinin örneklemden elde edilen kestirimleri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ şeklinde elde edildiğinde, tek değişkenli doğrusal regresyon denklemi;

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

olarak yazılır.

Y_i gözlem değerleri ile $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri arasındaki farklar modele ait hata terimlerini verir. En küçük kareler yöntemi, β_0 ve β_1 parametrelerinin tahmin edicileri olan $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$

$$\text{en küçük} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \text{en küçük} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (2.12)$$

farkını minimum yapacak şekilde ile belirler. Buradan gerekli hesaplamalar yapıldığında $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ nın kestirimleri;

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.13)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (2.14)$$

olarak elde edilir.

2.1.1.4 Bayesci yaklaşım ile tahmin

Bayes tahmin yönteminde θ parametresi, kendine ait dağılımı olan bir rasgele değişken olarak düşünülür. Örneklem seçilmeden önce, θ parametresinin dağılımı hakkındaki bilgiye önsel dağılım bilgisi denir ve θ nın olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $\pi(\theta)$ ile gösterilir. Bayes yöntemi ile tahmin yapabilmek için ilk olarak örneklem bilgisi ve önsel bilgi harmanlanarak;

$$f(x; \theta) = \pi(\theta) f(x | \theta) \quad (2.15)$$

ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu yazılır veya buna denk olmak üzere;

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \quad (2.16)$$

yazılır. (2.16) eşitliğinden X in marjinal olasılık (yoğunluk) fonksiyonu bulunur. Bu fonksiyon $d(x)$ ile gösterilsin. Son olarak X bilindiğinde θ nın sonsal olasılık (yoğunluk) fonksiyonu;

$$\pi(\theta | x) = \frac{f(x, \theta)}{d(x)} \quad (2.17)$$

biçiminde elde edilir. Sonsal olasılık (yoğunluk) fonksiyonu kullanılarak θ parametresinin Bayes tahmin edicisi;

$$\hat{\theta}_B = E(\theta | X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.18)$$

olarak yazılır (Akdi 2005).

2.1.2 Aralık tahmini

Nokta tahmininde, kitle parametresi θ için tek bir tahmin değeri elde edilmekte idi. Ancak daha önce belirtildiği üzere kitleden çok sayıda örneklem alınabilir. Bu örneklemelerden elde edilen tahmin değerlerinin bir kısmı kitle parametresinden büyük ya da küçük olacaktır. Dolayısı ile kitle parametresinin gerçek değeri ile tahmini arasında bir fark olacaktır. Hata terimi de denilen bu farkın, belirlenen bir olasılık ile ne kadar olacağını tahmin etmek için aralık tahmin yöntemine başvurulur.

Örneğin, bir şehirde koronavirüse yakalanmayan 40-75 yaş arası erkeklerin yaş ortalaması tahmin edilmek istenilsin. Kitle ortalaması olan μ yü tahmin etmek için örneklem ortalaması olan $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i / n$ kullanılabilir. Yaş ortalamasının $N(\mu, \sigma^2)$ gibi Normal dağılıma sahip olduğu varsayıldığında;

$$\bar{X}_n = N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \quad (2.19)$$

ve

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / n} \sim N(0,1) \quad (2.20)$$

dır. Ayrıca α anlam düzeyinde;

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

olmak üzere,

$$P(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

yazılabilir. $(\bar{X}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ aralığına μ için güven aralığı, $(1 - \alpha)$ 'ya da

güven düzeyi denir. Örneğin, $\alpha = 0.05$ olmak üzere $(\bar{X}_n - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

aralığına $1 - \alpha = \%95$ lik ***güven aralığı*** denir. Burada yorum, *ilgili aralığın μ 'yü içeren aralıklardan biri olması olasılığı %95'tir* olarak yapılmaktadır.

3. BAYESCI YAKLAŞIM

İstatistik biliminin gelişme sürecinde sonuç çıkarımı açısından temel olarak iki görüşün öne çıktığı görülmektedir. Bunlar frekansçı yaklaşım da denilen klasik yaklaşım ve Bayesci yaklaşımdır. İstatistik bilimine konu olan birçok kavram ve problemlere bakış açısında bu yaklaşımlar her zaman birbirlerine alternatif olmuştur.

Bayesci yaklaşım, temeli Bayes Teoremine dayandırılarak geliştirilmiş, kendi içinde dinamikleri olan, uzman görüşlerin sürece dâhil olduğu istatistiki bir yaklaşım olup istatistiğin birçok problemde sıklıkla uygulanmaktadır. Klasik yaklaşımda, kitleye ait bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için genellikle en küçük kareler ya da en çok olabilirlik yöntemleri kullanılmaktadır. Bayesci yaklaşım, nokta tahmini ve güven aralıklarına, hipotez testlerine bir alternatif oluşturur. Bayesci yaklaşımın temelinde, araştırma ile ilgili tüm tecrübelerin, bilgilerin sonuç çıkarımına eklenmesi süreci yer almaktadır ve Bayesci uygulamalarda, bilinmeyen kitle parametresi için ek bilgilerle sonuç çıkarımı yapmak temel amaçtır. Buradan hareketle Bayesci yaklaşımın ana hedefi; belirsiz olan kitle parametreleri ile ilgili bir önsel dağılım ortaya koymak ve gözlemler sonucu elde edilen verilerle belirsiz olan model parametreleri hakkında güncelleme yaparak sonsal dağılıma ulaşmaktır. Yani, Bayes yaklaşımında bilinmeyen parametreler birer rasgele değişken olup veriler gözlendikçe elde edilen dağılımlar güncelleştirilmektedir.

3.1 Bayes Teoremi

Bayes Teoremi, istatistik biliminin önemli teoremlerinden biridir. Karar süreçlerinde ve bir olayın gerçekleşme olasılığının hesaplanmasında kullanılır. Bu teoremi ilk açıklayan kendi adını taşıyan İngiliz matematikçi Thomas Bayes'tir. Bayes, 1763 yılında yayınlanan ve olasılık üzerine yazılan bir eseri ile ün yapmıştır. İngiltere'de vaiz olan arkadaşı Richard Price, Bayes'in vefatından iki yıl kadar sonra eseri yayınlanmıştır. Thomas Bayes bu eserde ters olasılık problemi üzerine çalışmalar yapmış ve bunu ortaya koyan ilk kişi olduğu için teorem kendisine atfedilmiştir.

Bayes teoremi, dayanağını koşullu olasılık tanımından alan bir teoremdir. Buna göre B olayı gözlemlendiğinde A olayının gerçekleşme olasılığı;

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)} \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, $B \in U$, $P(B) > 0$ olmak üzere A nın B ye göre **koşullu olasılığı** $P(A \cap B)/P(B)$ dir. Koşullu olasılık genellikle $P(A|B)$ şeklinde gösterilir (Öztürk 2006).

Burada;

$P(A)$: A olayının gerçekleşmesi olasılığını

$P(B)$: B olayının gerçekleşmesi olasılığını

$P(A|B)$: B olayı bilindiğinde A olayının gerçekleşmesi olasılığını

$P(B|A)$: A olayı bilindiğinde B olayının gerçekleşmesi olasılığını

$P(A \cap B)$: A ve B olayının birlikte gerçekleşme olasılığını

ifade etmektedir.

Tanım 3.1

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k \in U$ olmak üzere;

a) $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, k$

b) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq k$ ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ ler ayrık)

$$c) A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k = \Omega$$

olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_k$ olaylarına Ω nın bir *parçalanması (sonlu parçalanma)* denir.

Buna göre bu örnek uzayda tanımlı bir olay,

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) = \bigcup_{i=1}^k (B \cap A_i) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k) \quad (3.2)$$

biçiminde ifade edilmek üzere olasılığı,

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^k (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^k P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^k P(A_i) / P(B/A_i) \quad (3.3)$$

olarak hesaplanabilir. Buna göre Bayes Teoremi, (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ ayrık olayları Ω nın bir sonlu parçalanması ve $P(B) \neq 0$, $B \in U$ olmak üzere;

$$P(A_r | B) = \frac{P(A_r) \times P(B | A_r)}{\sum_{i=1}^k P(A_i) \times P(B | A_i)}, r = 1, 2, \dots, k \quad (3.4)$$

biçiminde ifade edilir (Öztürk 2006).

Bayesci bilgi güncelleme esası itibarıyla üç olasılık dağılımının matematiksel olarak ifade edilmesinden oluşmaktadır. Bunlar önsel dağılım, olabilirlik fonksiyonu ve sonsal dağılımdır.

Önsel dağılım (prior); olaylar gözlemlenmeden ve veriler elde edilmeden önce, parametre değerine ilişkin oluşmuş fikirler ve tecrübeler ile bir araya gelen olasılık dağılımıdır. Başka bir ifade ile parametre hakkında zaman içindeki bilgi birikimini yansıtır. Subjektif veriler, önsel olasılık yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesinde kullanılır.

Olabilirlik fonksiyonu (ek bilgi) ; örneklemin olabilirliğini tanımlar ve önsel dağılımı güncelleştirmek için kullanılır.

Sonsal dağılım (posterior); önsel dağılım ile olabilirlik fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilmektedir. Başka bir deyişle, önsel bilgi ile örneklemden hesaplanan ek bilgiyi bir araya getiren dağılımdır. Sonsal dağılıma ait beklenen değer kitle parametresinin Bayes tahmin edicisidir.

Bayesci sonuç çıkarımı için ilk olarak, θ için $\pi(\theta)$ ile gösterilen bir önsel olasılık dağılımı belirlenmelidir. Önsel dağılım, veri elde edilmeden önce kitle parametresi hakkındaki araştırma yapan kişinin edindiği bilgileri ifade etmektedir. Gözlem (deney) sonucunda elde edilen veri seti için, θ bilindiğinde x in dağılımını tanımlayan bir $L(x|\theta)$ olabilirlik fonksiyonu belirlenmelidir. Olabilirlik fonksiyonu ve önsel dağılım bir arada güncellenerek $\pi(\theta|x)$ sonsal olasılık (yoğunluk) fonksiyonu elde edilmeli ve θ parametresine ilişkin tüm istatistiksel sonuç çıkarımları bu fonksiyon kullanılarak yapılmalıdır. Bu ifadenin şematik hali aşağıda verilmiştir.

$$sonsalsal = \begin{cases} \frac{\text{olabilirlik dağılımı} \times \text{önsel dağılım}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \text{olabilirlik dağılımı} \times \text{önsel dağılım}}, & \text{kesikli dağılım} \\ \frac{\text{olabilirlik dağılımı} \times \text{önsel dağılım}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{olabilirlik dağılımı} \times \text{önsel dağılım}}, & \text{sürekli dağılım} \end{cases} \quad (3.5)$$

Yukarıdaki eşitlikte paydada yer alan ifadeler (kesikli dağılımlar için toplama işlemleri ve sürekli dağılımlar için integral alma işlemleri), matematiksel karmaşıklıkları ve zorlukları gidermek amacıyla tahmin sürecine ve sonucuna etki etmediğinden göz ardı edilip işleme alınmaz. Sonuç olarak (3.5) eşitliğindeki ifade sonsal olasılık (yoğunluk) fonksiyonu olup orantısal olarak;

$$\pi(\theta|x) \propto L(x|\theta) \times \pi(\theta) \quad (3.6)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bayesci sonuç çıkarımının genel özelliklerinden biri, örneklem genişliği arttıkça önsel dağılımın sonsal dağılıma açıklama oranının azalmasıdır. Örneklem genişliğinin artmasıyla birlikte olabilirlik fonksiyonu, önsel dağılımın baskınlığını azaltır ve böylece önselin sonsal dağılım üzerinde etkisi azalır. Dağılım grafiği basık şeklinde bir önsel dağılım, kuyrukları geniş olduğundan sonsal dağılımın şekillenmesinde önemli bir rol oynamaz. Bunun sonucunda hesaplanan parametre tahmin değerleri klasik yaklaşımla benzerlik gösterir (Güner 2014).

3.2 Önsel Dağılımlar

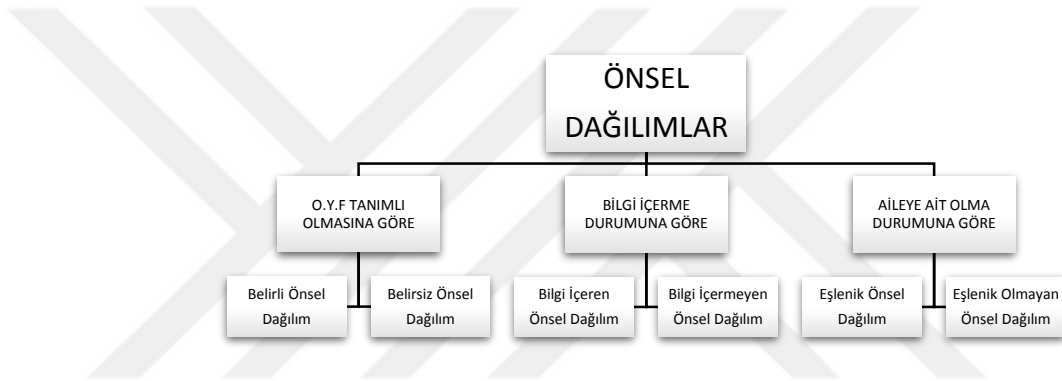
Bayesci sonuç çıkarımında en önemli konu, önsel dağılımın seçilmesi ve olabilirlik fonksiyonunun (ek bilgi) belirlenmesidir. Klasik yaklaşımda kitle parametresine dair bir önsel bilgi kullanılmadığından sürecin tarafsızlığından bahsedilebilir. Araştırmacı, klasik yaklaşımda parametre tahmini yaparken sadece gözlemlenen verilerden faydalanır. Bayesci yaklaşımda ise gözlem bilgisi yanında parametrelere ilişkin önceden edinilmiş bilgiler de analize dâhil edilir. Bu yaklaşımda örneklemden elde edilen verilerin yanında önsel bilgi dağılımlarının kullanılması, parametre hakkında bilginin var olup olmamasına göre bir takım sorunları da beraberinde getirmektedir. Gelişen süreç içerisinde bu soruna bağlı olarak önsel dağılımların seçiminde üç farklı uygulama ön plana çıkmıştır. Bunlar; bilgi içeren (informative) önsel dağılım, bilgi içermeyen (noninformative) önsel dağılım ve eşlenik (conjugate) önsel dağılımdır.

Kitle parametresi ile ilgili önsel bilginin belirsiz olmadığı düşünüldüğünde, elde edilen önsel dağılım, doğal eşlenik aileler denilen uygun matematiksel özellikte ailelerden birine üye ise **eşlenik önsel dağılım adını alır** ve bu dağılımlar kapalı formda elde edilen sonsal dağılımlara imkân sağladığı için kullanıma oldukça elverişlidir. Parametreye dair önsel dağılım ile eşlenik aileden seçilen dağılımın uyumlu olması beklense de bazı uygulamalarda eşlenik önsel dağılımlar sonuç çıkarımı açısından gerçekten uzaklaşabilir.

Araştırmacı, ilgilenmiş olduğu parametreye dair yeterli bilgilere ulaşamamış ya da elindeki verilerin önsel bilgiden çok farklı olmadığına inanıyorsa **bilgi içermeyen önsel** kullanabilir. Bu önsellerden en sık kullanılanı Jeffreys önsel dağılımıdır. Jeffreys, uygun

dönüşümler altında sabit bir önsel dağılım önererek düzgün önsel olasılıklara alternatif sunmuştur. Bu önsel dağılım, eldeki tahmin ediciye ait, en çok olabilirlik tahmin edicisi komşuluğundaki hassasiyeti ölçen Fisher bilgi matrisi ile hesaplanır. Parametre hakkında bilgi içermeyen bir önsel seçildiğinde varılan sonuç klasik yaklaşımla elde edilenle hemen hemen aynı olmakta iken, bilgi içeren önsel ya da eşlenik önsel dağılım seçildiğinde ise tahmin değerleri klasik yaklaşımdan farklı olmaktadır. Bunun sebebi ise her iki önsel dağılımın, kullanılan ek bilgileri analize önsel bilgi olarak dâhil etmesidir (Güner 2014).

Çizelge 3.1 Önsel dağılımlar diyagramı



Tanım aralığı sınırları içinde bir önsel dağılımın olasılık fonksiyonunun toplamı veya integrali 1'e eşit oluyorsa böyle önsel dağılımlara **belirli önsel dağılım**, eğer sonsuz olarak hesaplanıyorsa **belirsiz önsel dağılım** denir. Matematiksel ifade ile $\sum \pi(\theta) = \infty$ veya $\int \pi(\theta)d\theta = \infty$ ise $\pi(\theta)$ önsel dağılımının belirsiz olduğu söylenir (Öztürk ve Cengiz 2017).

3.2.1 Bilgi içeren önsel dağılımlar

Parametreler hakkındaki önsel bilgi daha önce yapılan gözlemlerden, verilerden ve yeterli uzman görüşlerinden, çalışmalarından elde edilebiliyorsa böyle önsel dağılımlara **bilgi içeren önsel dağılımlar** denir. Bu dağılımlar model içinde olabilirlik fonksiyonu tarafından baskılanmamıştır.

Bilgi içeren önsel dağılımlar; araştırmacının zaman içinde edindiği tecrübeyi yansıtan, sonsal dağılım üzerine etkisi olan ancak olabilirlik fonksiyonuna etkisi olmayan dağılımlardır. Önsel bilginin modele eklenmesi ile birlikte elde edilen sonsal dağılım ulaşmak istenilen dağılım olacağından bilgi içeren önsel dağılıma karar verildiğinde, önsel dağılımın tanımlamaları net bir biçimde ortaya konmalı ve sonsal dağılım üzerinde etkisini test etmek için sonuçlar bilgi içermeyen önsel dağılım ile karşılaştırılmalıdır (Güner 2014).

Genel olarak bilgi içeren önsel dağılımlar kendi parametrelerine sahiptir ve bunlara **hiper parametre (hyper parameter)** denir. Bayesci yaklaşımda bilgi içeren önsellerin uygulamada pek çok artıları vardır. Örneğin, bir araştırmacı üzerinde çalıştığı konu ile ilgili kitle parametrelerini her defasında baştan tahmin etmek durumunda olmayıp daha önce yapılan araştırmaları, gözlemleri, kendisinin elde ettiği verilerle birleştirip araştırmaya farklı bir bakış açısı getirebilir.

Diğer yandan bilgi içeren önsel dağılımlar, örneklem hatası varyansından kaynaklı öngörülemez olan küçük örneklemelerde daha iyi çalışmaktadır. Bilgi içeren önseller, elde edilen verilerden hesaplanan olasılıkla tutarlı olur ise sonuç çıkarımında kullanılan sonsal dağılımdaki varyans azalır ve hipotez testlerinin sağlıklı işlemesine yardımcı olur (Erkan 2019).

3.2.1.1 Eşlenik (conjugate) önsel dağılım

Bayesci yaklaşımda, bilgi içeren önsel dağılım seçimine karar verilirken uygulamadaki kolaylığı sebebiyle eşlenik (conjugated) önsel dağılımlar sıklıkla kullanılmaktadır. θ parametresine ait eşlenik önsel $\pi(\theta)$, parametreye ait sonsal dağılım olan $\pi(\theta|x)$ ile aynı aileden gelmektedir. Analizlerde, bilinen veya daha önce tecrübe edilen önseller mevcut ise bu önsellere öncelik verilir. Eğer önsellere ait bilgiler net değilse, küçük varyanslı olan önseller modele dâhil edilir. Bayesci yaklaşımda en sık kullanılan eşlenik(conjugate) önsel dağılımlar çizelge 3.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2, Eşlenik Aile Önseli ile Hesaplanan Sonsal Dağılım Tablosu

Dağılımlara Ait Olabilirlik Fonksiyonu	Parametre	Eşlenik Önsel	Sonsal Dağılım
1.Bernoulli Olabilirlik: $f_{x \theta}^{(x p)} \propto p^{n\bar{x}} (1-p)^{n(1-\bar{x})}$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\theta = p$	$\theta \sim \text{beta}(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{d.y} \end{cases}$	$\theta X \sim \text{beta}(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + n\bar{x}$ $\beta' = \beta + n(1-\bar{x})$
2.Poisson Olabilirlik: $f_{x \theta}^{(x \lambda)} \propto \begin{cases} \lambda^{n\bar{x}} e^{-n\lambda}, & x_i = 0, 1, \dots \text{ ve } i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{d.y} \end{cases}$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\theta = \lambda$	$\theta \sim G(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha}, & \theta > 0 \\ 0, & \text{d.y} \end{cases}$	$\theta X \sim G(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + n\bar{x}$ $\beta' = \frac{\beta}{1+n}$
3.Negatifbinom Olabilirlik: $f_{x \theta}^{(x p)} \propto \begin{cases} p^{nr\bar{x}} (1-p)^{n(\bar{x}-r)}, & x_i \geq r \text{ ve } i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{d.y} \end{cases}$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\theta = p$	$\theta \sim \text{beta}(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{d.y} \end{cases}$	$\theta X \sim \text{beta}(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + nr$ $\beta' = \beta + n(\bar{x}-r)$

Çizelge 3.2, Eşlenik Aile Önseli ile Hesaplanan Sonsal Dağılım Tablosu (devam)

Dağılımlara Ait Olabilirlik Fonksiyonu	Parametre	Eşlenik Önsel	Sonsal Dağılım $f_{\theta x}^{(\theta x)}$
4. Düzgün Dağılım Olabilirlik: $f_{x \theta}^{(x L)} \propto \begin{cases} \frac{1}{L^n} & , L > \max \{x_i\} \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta = L$	$\theta \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha \beta^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} & , \theta > \beta \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta X \sim \text{Pareto}(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + n$ $\beta' = \max \{x_1, x_2, \dots, x_n, \beta\}$
5. Pareto Olabilirlik: $x b \sim \text{Pareto}(a, b) \quad (b \text{ biliniyor iken})$ $f_{x \theta}^{(x b)} \propto \begin{cases} b^{na} & , \min \{x_1, \dots, x_n\} > b \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta = b$	$\theta \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha \beta^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} & , \theta > \beta \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta X \sim \text{Pareto}(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha - \alpha n, \beta' = \beta$ $\alpha > n\alpha$
6. Pareto Olabilirlik: $x a \sim \text{Pareto}(a, b) \quad (a \text{ biliniyor iken})$ $f_{x \theta}^{(x a)} \propto \begin{cases} \frac{a^n b^{na}}{m^{a+1}} & , \min \{x_1, \dots, x_n\} > b \\ 0 & , d.y \end{cases}$ $m = \prod_{i=1}^n x_i$	$\theta = a$	$\theta \sim G(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} & , \theta > 0 \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta X \sim G(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + n, \beta' = \frac{1}{\frac{1}{n} + \log(m) - n \log(b)}$ $\beta < \frac{1}{n \log(b) - \log(m)}$

Çizelge 3.2, Eşlenik Aile Önseli ile Hesaplanan Sonsal Dağılım Tablosu (devam)

Dağılımlara Ait Olabilirlik Fonksiyonu	Parametre	Eşlenik Önsel	Sonsal Dağılım
7.Üstel Olabilirlik: $f_{x \theta}^{(x \lambda)} \propto \begin{cases} \lambda^n e^{-n\bar{x}\lambda}, & x_i > 0 \text{ ve } i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , d.y \end{cases}$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\theta = \lambda$	$\theta \sim G(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, & \theta > 0 \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta X \sim G(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + n$ $\beta' = \frac{\beta}{1 + n\bar{x}}$
8.Gamma Olabilirlik: $x \frac{1}{b} \sim G(a, b) \quad (b \text{ biliniyor iken})$ $f_{x \theta}^{(x \frac{1}{b})} \propto \begin{cases} \frac{e^{-\frac{n\bar{x}}{b}}}{b^{na}}, & x_i \geq 0 \text{ ve } i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta = \frac{1}{b}$	$\theta \sim G(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, & \theta > 0 \\ 0 & , d.y \end{cases}$	$\theta X \sim G(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + na$ $\beta' = \frac{\beta}{1 + n\bar{x}}$
9. Gamma Olabilirlik: $x a \sim G(a, b) \quad (a \text{ biliniyor iken})$ $f_{x \theta}^{(x a)} \propto \begin{cases} \frac{m^{a-1}}{b^{-na}\Gamma(a)^n}, & x_i \geq 0 \text{ ve } i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , d.y \end{cases}$ $m = \prod_{i=1}^n x_i$	$\theta = a$	$g(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha^{\theta-1} b^{\theta\gamma}}{K\Gamma(\theta)^\beta}, & \theta > 0 \\ 0 & , d.y \end{cases}$ $K = \int_0^\infty \frac{\alpha^{\theta-1} b^{\theta\gamma}}{\Gamma(\theta)^\beta} d\theta, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$	$\theta x = \begin{cases} \frac{(\alpha')^{\theta-1} b^{\theta\gamma'}}{K\Gamma(\theta)^{\beta'}}, & \theta > 0 \\ 0 & , d.y \end{cases}$ $\alpha' = \alpha m, \beta' = \beta + n, \gamma' = \gamma + n$

Çizelge 3.2, Eşlenik Aile Önseli ile Hesaplanan Sonsal Dağılım Tablosu (devam)

Dağılımlara Ait Olabilirlik Fonksiyonu	Parametre	Eşlenik Önsel	Sonsal Dağılım
10.Normal Dağılım Olabilirlik: $x \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$ (μ biliniyor iken) $f_{x \theta}^{(x \mu)} \propto e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2}$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\theta = \mu$	$\theta \sim N(m, v^2)$ $g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2v^2}}$	$\theta x \sim N(m', (v')^2)$ $m' = \frac{m}{v^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}, (v')^2 = v^2 + \frac{n}{\sigma^2}$
11.Normal Dağılım Olabilirlik: $x \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 biliniyor iken) $f_{x \theta}^{(x \sigma^2)} \propto \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}}{(\sigma^2)^{n/2}}$	$\theta = \sigma^2$	$\theta \sim G(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} & , \theta > 0 \\ 0 & , \text{d.y} \end{cases}$	$\theta x \sim G(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + \frac{n}{2}, \beta' = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}$
12.Normal Dağılım Olabilirlik: $x \mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ (μ, σ^2 biliniyor iken) $f_{x \theta}^{(x \mu, \sigma^2)} \propto \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$	$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ $\theta_1 = \mu$ $\theta_2 = \sigma^2$	$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ $\theta_2 \sim G(\alpha, \beta)$ $(\theta_1 \theta_2) \sim N(m, \tau\theta_2^2)$ $g(\theta) = g(\theta_1 \theta_2)g(\theta_2)$	$\theta x \sim (\theta_1, \theta_2) x$ $\theta_2 x \sim G(\alpha', \beta'), \theta_1 (\theta_2, x) \sim N(m', \tau'\theta_2^2)$ $\alpha' = \alpha + \frac{n}{2}, \beta' = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2} + \frac{n\tau(\bar{x} - \mu)^2}{2(n+\tau)}\right)^{-1}$ $m' = \frac{m\tau + n\bar{x}}{n+\tau}, \tau' = n+\tau$

Çizelge 3.2, Eşlenik Aile Önseli ile Hesaplanan Sonsal Dağılım Tablosu (devam)

Dağılımlara Ait Olabilirlik Fonksiyonu	Parametre	Eşlenik Önsel	Sonsal Dağılım $f_{\theta x}^{(\theta x)}$
13.Lognormal Dağılım Olabilirlik: $x \mu \sim \log normal(\mu, \sigma^2)$ (μ biliniyor iken) $f_{x \theta}^{(x \mu)} \propto e^{-\frac{n}{2\sigma^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \log x_i - \mu}{n} \right)^2}$	$\theta = \mu$	$\theta \sim N(m, v^2)$ $g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2v^2}}$	$\theta x \sim N(m', (v')^2)$ $m' = \frac{m}{v^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}, (v')^2 = v^2 + \frac{n}{\sigma^2}$
14.Lognormal Dağılım Olabilirlik: $x \sigma^2 \sim \log normal(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 biliniyor iken) $f_{x \theta}^{(x \sigma^2)} \propto \frac{e^{-\frac{n}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \mu)^2}}{\sigma^n}$	$\theta = \sigma^2$	$\theta \sim G(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} & , \theta > 0 \\ 0 & , \text{d.y} \end{cases}$	$\theta x \sim G(\alpha', \beta')$ $\alpha' = \alpha + \frac{n}{2}, \beta' = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}$
15.Lognormal Dağılım Olabilirlik: $x \mu, \sigma^2 \sim \log normal(\mu, \sigma^2)$ (μ, σ^2 biliniyor iken) $f_{x \theta}^{(x \mu, \sigma^2)} \propto \frac{e^{-\frac{n}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \mu)^2}}{\sigma^n}$	$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ $\theta_1 = \mu$ $\theta_2 = \sigma^2$	$\theta = (\theta_1, \theta_2)$ $\theta_2 \sim G(\alpha, \beta), \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0$ $g(\theta) = \sqrt{\frac{\tau\beta}{2\pi}} \frac{\Gamma(2\alpha+1)(1+\frac{\tau\beta}{2}(\theta_1-m')^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)}$	$\theta_2 x \sim G(\alpha', \beta')$ $g(\theta_1 x) = \sqrt{\frac{\tau'\beta}{2\pi}} \frac{\Gamma(2\alpha+1)(1+\frac{\tau'\beta}{2}(\theta_1-m')^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)}$ $\alpha' = \alpha + \frac{n}{2}, \beta' = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^n (\log x_i - \mu)^2}{2} + \frac{n\tau(\bar{x} - \mu)^2}{2(n+\tau)} \right)^{-1}$ $m' = \frac{m\tau + n\bar{x}}{n+\tau}, \tau' = n+\tau$

3.2.2 Bilgi içermeyen önsel dağılımlar

Bu önsel dağılımlar, parametre hakkında ön bilginin yeterli olmadığı ya da elde edilen verilerden başka kaynağa ihtiyaç duyulmadığı inancı oluştuğunda kullanılan önsel dağılımlardır. Kitle parametresi θ 'ya ait belirlenen tanım aralığı haricinde herhangi bir bilgiye ulaşılamaması veya gözlemler dışında başka bilgiye gerek kalmadığında bilgi içermeyen önsel dağılımlar uygulamalarda kullanılmaktadır. Belirtmek gerekir ki bilgi içermeyen önsellere karar verildiğinde, klasik yaklaşım ile Bayesci yaklaşımın tahmin sonuçları arasında pek bir fark olmayacaktır (Karadağ 2011). Bunun nedeni; parametre tahmininde, araştırma sonucundaki veri bilgisi dışında farklı bir bilgi kullanılmamasıdır.

Tahmin yapmakta amaç; bilinmeyen kitle parametreleri hakkında mümkün olduğu kadar bilgi sahibi olmaktır. Ancak, bilgi içermeyen önsel dağılımlar parametre için minimal düzeyde açıklayıcıdır. Günlük yaşamda öyle araştırmalar vardır ki maliyeti çok fazla olabilmektedir. Örneğin, uzay çalışmalarındaki maliyet hem çok yüksek hem de ilgilenilen kitle için veri elde etmek uzun yıllara mal olmaktadır. İşte böyle bir kitle için bilgi içermeyen bir önsel kullanıldığında, eldeki yetersiz veri Bayesci analizin devamını sağlamaktadır.

Uygulamalarda, Jeffreys önsel dağılımı, düzgün (uniform) önsel dağılım ve belirsiz (diffuse) önsel dağılım yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

3.2.2.1 Düzgün (uniform) önsel dağılım

Kitle parametreleri hakkında yeterince bilginin olmaması ya da herhangi bir bilginin olmaması durumunda, $\pi(\theta) \propto L$, $\theta \in \mathbb{R}_0$ biçiminde bir düzgün önsel kullanılır. Burada L sabit bir sayıyı ifade etmekte olup;

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq \theta \leq b \\ 0, & \text{d.y} \end{cases}, \mathbb{R}_\theta \text{ } a \text{ ile } b \text{ arasında sınırlıdır.} \quad (3.7)$$

Örneğin;

$$a=1, b=6 \text{ için } \pi(\theta) = \begin{cases} 1/5, & 1 \leq \theta \leq 6 \\ 0, & \text{d.y} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$a=0, b=1 \text{ için } \pi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0, & \text{d.y} \end{cases} \quad (3.9)$$

dır.

Burada $1/5$ ve 1 birer sabit olduğundan 1 ile orantılıdır. Bu nedenle $\pi(\theta) \propto 1$ dir. Eğer

$-\infty < \theta_{\mathbb{R}_\theta} < \infty$ olacak biçimde $\mathbb{R}_\theta$ sınırsız ise $\int_{a=-\infty}^{b=\infty} \pi(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} d\theta = \infty$

olduğundan $\pi(\theta)$ düzgün dağılımlı değildir. O halde $\pi(\theta)$, düzgün olmayan (improper) bir önseldir. Böyle bir sorunu aşmak için bölgesel düzgün önseller kullanılır. $\mathbb{R}_\theta$ sınırlı olursa;

$$(1 \leq \theta \leq 7) \text{ için } \pi(\theta) = \begin{cases} 1/6, & 1 \leq \theta \leq 7 \\ 0, & \text{d.y} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\int_1^7 \frac{1}{7-1} d\theta = \frac{\theta}{7-1} \Big|_1^7 = \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{6}\right) = 1 \text{ olup önsel dağılım;}$$

$$\pi(\theta | a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \theta \in (a, b) \\ 0, & \theta \notin (a, b) \end{cases} \quad (3.11)$$

dır.

3.2.2.2 Jeffreys önsel dağılımı

Bilgi içermeyen önsel dağılımlar içinde, literatürde en yaygın kullanılan önsellerdir. Jeffreys, uygun matematiksel dönüşümlerle düzgün önsel olasılıklara seçenek sunmuş ve sabit bir önsel olasılık önermiştir. Buna göre orantısal olarak önsel dağılım, Fisher bilgi matrisinin determinantının kareköküne eşit olup aşağıdaki eşitlik gibidir.

$$\pi(\theta) \propto |J(\theta)|^{1/2} \quad (3.12)$$

Ayrıca Fisher bilgi matrisi eşitlik (3.13)'teki gibi tanımlanmıştır.

$$J(\theta) = \int \left[\frac{d^2 \log \pi(x|\theta)}{d\theta^2} \right] \pi(x|\theta) d\theta . \quad (3.13)$$

Jeffreys'in önseli, parametrelerin tanımlı olduğu aralık dışında büyük değerleri içermediği gibi düzgün dağılım özelliğine de sahiptir. Diğer yandan olabirliğin uygun olduğu bölgede pek değişmeyen ve Fisher bilgi matrisi ile elde edilen kullanışlı bir önseldir. Farklı dağılımlar için hesaplanan uygun Jeffreys önsel dağılımları çizelge 3.3'te verilmiştir.

Çizelge 3.3 Farklı dağılımlar için Jeffreys Önselleri

Olabilirlik Fonksiyonu	Parametreler	Önsel Dağılım
Bernoulli	$\theta = p$	$(p(1-p))^{-1/2}$
Binom	$\theta = p$	$(p(1-p))^{-1/2}$
Poisson	$\theta = \lambda$	$\lambda^{-1/2}$
Normal (σ^2 biliniyor)	$\theta = \mu$	1
Normal (μ biliniyor)	$\theta = \sigma^2$	σ^{-1}
Normal (μ ve σ^2 bilinmiyor)	$\theta = \mu, \sigma^2$	σ^{-1}

3.2.2.3 Belirsiz(diffuse) önsel dağılım

Bir parametreye ait önsel dağılımın türü, dağılım fonksiyonuna şeklini veren parametrelerin değişmesi ile değişir. Örneğin, konum parametresi için önsel dağılım olarak Normal dağılım seçilebilir. Şekil parametresi için önsel dağılım olarak da Gamma dağılımı seçilebilir. Büyük varyansa sahip olan dağılımlarda belirsizlik hâkim olduğu için, böyle dağılımlara ait şekil parametresine öyle değerler verilir ki yaklaşık düzgün önsel dağılım kadar düz ve çok geniş aralık içinde yer alan bilgilendirici olmayan önsel bir dağılım ortaya çıkar. $\pi(\theta) \sim N(\mu, \sigma^2)$ olmak üzere σ^2 ye büyük bir değer verilir. $\pi(\sigma) \sim G(\alpha, \beta)$ olmak üzere α ve β ya 0.0003 gibi küçük değerler verilir. Böyle oluşturulan bir belirsiz önsel dağılımın en iyi tarafı uygun dağılımlı olmasıdır. Dolayısıyla hesaplamalarda kolaylık sağladığı için düzgün bir önsel kullanmak yerine belirsiz bir önsel dağılım kullanmak daha sağlıklı olacaktır.

3.3 Sonsal Dağılım

Sonsal dağılım, parametre ile ilgili tüm bilgiye sahip olduğundan bu dağılımın verimli ve efektif bir şekilde özetlenmesi gerekir. Hangi önsel dağılımın kullanılacağına karar verildikten sonra, sürecin devamında sonsal dağılımdan parametre hakkında bilgiye ulaşma sürecin bir diğer önemli kısmıdır. Bayesci sonuç çıkarımı, $\pi(\theta)$ önsel olasılık (yoğunluk) fonksiyonu seçimi ile başlayıp $\pi(\theta|x)$ sonsal olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna ulaşma süreciyle biten bir akıştır. Sonsal dağılım, θ için belirlenen önsel dağılıma nispeten çok az değişkendir. Çünkü bu dağılım veri yoluyla elde edilen bilgiyi de barındırmaktadır (Güner 2014).

Sonsal dağılım elde edildiğinde, artık bu dağılıma ilişkin karakteristik özellikleri ortaya çıkaran beklenen değer, varyans, ortanca, mod gibi istatistikler matematiksel olarak hesaplanabilir. Tüm bu istatistiklerin yanında, bu dağılıma ait grafikler çizdirilerek sonsal dağılım görsel olarak da özetlenebilir.

3.3.1 Markov zinciri monte carlo (mzmc) simülasyon teknikleri

Genel olarak Bayesci uygulamalarda, gözlenen veri ve uygun bir önsel dağılım ile koşullu sonsal olasılık (yoğunluk) fonksiyonu hesaplanabilmektedir. Bununla birlikte, pek çok durumda matematiksel işlemlerin zorluğundan dolayı parametreye ilişkin marjinal olasılık dağılımlarının kapalı bir formunu elde etmek zordur. Bu gibi durumlarda matematiksel çözümleme teknikleri fayda sağlamaz. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için sayısal integrasyon yöntemleri kullanılabilir. Bunun yanında, MZMC simülasyon yöntemleri bu problemlerin üstesinden gelmek için son zamanlarda en yaygın kullanılan yöntemlerdendir.

MZMC yöntemlerinin önemli bir özelliği, zincirin başlangıç değerine bakılmaksızın dağılıma en uygun benzetim algoritmasının seçilmesi halinde sonsal dağılımın yakınsamasını sağlamasıdır. Zinciri uzun bir süreçte çalıştırmak sonsal dağılımın daha doğru elde edilmesini sağlayacaktır. Zincir sayısı, başlangıç değeri, modelin sağlıklı işlemesi sonsal dağılıma ulaşmadaki iterasyon sayısını belirler. İz grafikleri (traceplot) gibi bu konuda uygulamada kullanılan yöntemler vardır. İz grafiklerinde titreşimin ya da salınımın çok olması, benzetim algoritmasının sonsal dağılıma hızlı bir şekilde yakınsadığı ve yeni alanlara hızla geçiş yaparak Markov Zincirinin (MZ) beklentilerini karşıladığını göstermektedir. MZ algoritması kullanılarak yapılan tahminin standart hatası MC hatası ile ifade edilir. Standart hatayı parametre tahmininin standart hatasına oranladığımızda bu oranın çoğunlukla 0.05'ten küçük olması tercih edilir. MC hata değeri dikkate alınarak zincir sayısı da tespit edilir. Modeldeki parametre sayısı fazla ise MZMC nin uzun çalıştırılması gerekmektedir (Avcı 2012).

MZMC uygulamalarında en sık kullanılan yöntemler; Gibbs Örnekleme Algoritması ve Metropolis-Hastings Algoritmasıdır. Ayrıca verimli bir yazılım programı olan WinBUGS Paket Programı Bayesci analizlerin sonuca ulaşmasına büyük katkı sağlamaktadır. İlk olarak Monte Carlo simülasyonunun dayanağı kabul edilen Monte Carlo İntegrasyonu'ndan bahsedilecektir.

3.3.1.1 Monte-Carlo integrasyonu

Monte Carlo simülasyonu, rasgele sayılar üretilerek integral hesaplamaları için geliştirilmiş bir yöntemdir. Özellikle Bayesci istatistikte, fizikte ve daha pek çok alanda oldukça yoğun bir biçimde kullanılmaktadır. Burada Monte Carlo İntegrasyonu ile ilgili iki yöntemden bahsedilecektir.

3.3.1.1.1 Beklenen değer yöntemi

$U_1, U_2, \dots, U_N$, $U(0,1)$ düzgün dağılımdan üretilen N tane rasgele sayı ve $g: R^N \rightarrow R$ şeklinde bir fonksiyon olmak üzere, $g(U_1, U_2, \dots, U_N)$ rasgele değişkeni ele alınsın. Belirtilen rasgele değişkenin beklenen değeri;

$$E(g(U_1, U_2, \dots, U_N)) = \int_0^1 \dots \int_0^1 g(u_1, u_2, \dots, u_N) du_1 du_2 \dots du_N \quad (3.14)$$

olmak kaydıyla, bu beklenen değer $g(U_1, U_2, \dots, U_N)$ rasgele değişkeninin simülasyondan elde edilen değerler ile gözlenen değerlerin aritmetik ortalaması olarak belirlenir. Bu amaç doğrultusunda $U(0,1)$ düzgün dağılımından alınan n tane N birimlik;

$$u_{11}, u_{21}, \dots, u_{N1}$$

$$u_{12}, u_{22}, \dots, u_{N2}$$

.

.

.

$$u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{Nn}$$

sayılarına dayalı olarak

$$g_1 = g(u_{11}, u_{21}, \dots, u_{N1})$$

$$g_2 = g(u_{12}, u_{22}, \dots, u_{N2})$$

.

.

.

$$g_n = g(u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{Nn})$$

sayılarının $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{Nk})$ aritmetik ortalaması, integralin yaklaşık değerini verecektir (Öztürk ve Özbek 2015).

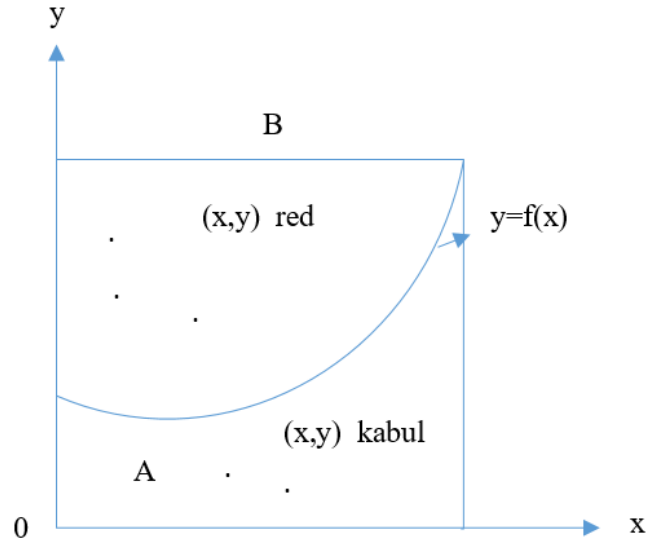
3.3.1.1.2 Kabul-Red yöntemi

$I = \int_0^1 f(x) dx$, $x \in (0,1)$ olmak üzere $0 \leq f(x) \leq c$ olacak şekilde bir c sabiti seçilsin ve

$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq c\}$ üzerinde düzgün dağılıma sahip (X, Y) rasgele vektörü göz önüne alınsın. (X, Y) noktasının şekil 3.1 'deki $A = \{(x, y) : y \leq f(x)\}$ bölgesine ($y \leq f(x)$ olması olayı) düşmesi olasılığı;

$$p = \frac{\text{Alan}(A)}{\text{Alan}(B)} = \frac{\int_0^1 f(x) dx}{c} = \frac{I}{c} \quad (3.15)$$

olacaktır (Öztürk ve Özbek 2015).



Şekil 3.1 (X, Y) rasgele vektör alanı

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, B bölgesinde üretilmiş noktalar olmak üzere $f(x_i) \geq y_i$ koşulu sağlanırsa (x_i, y_i) noktası $f(x)$ fonksiyonunun altında olacak yani A olayı gerçekleşmiş olacaktır. A olayının gerçekleşmesi olasılığı p , A olayının göreceli frekansı olarak tahmin edilebilir. p olasılığının tahmini; B'den üretilen düzgün dağılıma sahip n tane rasgele nokta arasından A bölgesine düşenlerin sayısı n_1 olmak üzere $\frac{n_1}{n}$ göreceli frekansı olacaktır. Böylelikle I integralinin tahmini, bu rasgele deney sayesinde;

$$I = c \times \frac{n_1}{n} \quad (3.16)$$

olarak bulunur (Öztürk ve Özbek 2015).

3.3.1.2 Metropolis-Hastings (MH) algoritması

Karmaşık bir $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonundan örneklem dizileri elde etmek, Monte Carlo integrasyonunun uygulanmasını güçleştiren sorunların başında gelmektedir. Böyle karmaşık bir fonksiyonun çözümü, MZMC yöntemlerinin temelini oluşturmaktadır. Burada, Metropolis-Hastings algoritmasının temel mantığından bahsedilecektir.

θ parametresi için, $f(\theta) = \frac{g(\theta)}{c}$ ile belirtilen bir dağılımdan örneklem çekmek amacıyla $f(\theta)$ şeklinde bir olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanabilir. Eşitlikte verilen c , normalleştirme sabiti olarak bilinmektedir. Algoritmadaki iterasyonlara $\pi(\theta_0) > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir θ_0 başlangıç değeriyle başlanmakta olup herhangi bir t . iterasyon için geçerli bir θ_{t-1} değeri kullanılarak, $q(\theta^* / \theta_{t-1})$ şeklinde önerilen dağılımdan θ^* aday noktası çekilmektedir. Algoritmada, $q(\theta^* / \theta_{t-1})$ dağılımına getirilen tek kısıtlama simetriklik şartıdır. Yani $[q(\theta_{t-1} / \theta_t) = q(\theta_t / \theta_{t-1})]$ olarak ifade

edilebilmesidir. Olasılık yoğunluk fonksiyonlarının oranı $l = \pi(\theta^*) / \pi(\theta_{t-1})$ eşitliği ile hesaplanır. Seçilen başlangıç noktası, olasılık yoğunluk fonksiyonunu arttırırsa ($l < 1$ ise) l olasılığı ile kabul edilip diğer durumlarda reddedilmektedir. Seçilen aday noktaya ret geldiğinde zincir devam etmez, yani $\theta_t = \theta_{t-1}$ olur ve yeniden bir aday nokta seçilir. Algoritma için aday noktasının kabul olasılığı olan ℓ hesaplanır (Tektaş 2006).

$$\ell = \min\left(\frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta_{t-1})}, 1\right). \quad (3.17)$$

Algoritma sayesinde, θ_t den θ_{t+1} 'e geçiş olasılıkları yalnızca θ_t ye bağlı olan ve $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m, \dots)$ olacak şekilde bir Markov zinciri oluşturulmaktadır. Başlangıç değerlerinin etkisini ortadan kaldırmak için yeterli sayıda iterasyon yapılırsa (yeterli iterasyon sayısı m ile gösterilmekte) zincir durağanlaşmakta ve $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m, \dots)$ zincir vektöründen çekilen örneklemeler, $f(\theta)$ dağılımından örneklemelere denk düşmektedir. Hastings, isteğe bağlı geçişli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanmak suretiyle Metropolis algoritmasını genelleştirmiş ve başlangıç noktasının kabul edilme olasılığını;

$$l = \min\left(\frac{\pi(\theta^*)q(\theta_{t-1} / \theta^*)}{\pi(\theta_{t-1})q(\theta^* / \theta_{t-1})}, 1\right) \quad (3.18)$$

biçiminde tanımlamıştır (Tektaş 2006).

(3.18) eşitliğindeki geçiş dağılımını ve kabul olasılığını kullanan algoritmaya **Metropolis-Hastings Algoritması** denmektedir. Bu algoritmada, $q(\theta^* / \theta_{t-1})$ dağılımı için getirilen herhangi bir kısıtlama yoktur yani simetrik olmasına gerek yoktur. Algoritmanın işletilmesinde tekli uzun bir zincir veya farklı başlangıç değerleri olan birden çok zincir kullanılabilir. Zincirin başlangıç değerinin etkisinden sıyrılması adına aşması gereken döngü uzunsa veya zincirlerin otokorelasyon değeri yüksek ise tek bir uzun zincir kullanmak yerine birden fazla zincir kullanmanın daha sağlıklı neticeler vereceği

belirtilmektedir. Bu nedenle, araştırmacılar tarafından pratikte birden fazla zincir kullanılan hesaplamalar daha yaygındır (Tektaş 2006).

3.3.1.3 Gibbs algoritması

Markov zincirinden faydalanan Gibbs örnekleme, sonsal dağılımın koşullu bir dağılım dizisi ile açıklanabildiği süreçlerde kullanılmaktadır. Metropolis-Hastings algoritmasının özel bir durumu olan Gibbs örneklemesindeki ana hedef, koşullu ilişkiler yardımıyla tahmin sürecini periyodik şekilde sürdürerek, parametrelerin bileşik dağılımlarını elde edebilmektir (Demirci 2016).

$\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ olmak üzere, ilgilenilen parametreye ait dağılımın $\pi(\theta)$ olduğu varsayılın. Ayrıca Θ ile θ vektörüne ilişkin parametre kümesi gösterilsin. Θ parametre kümesi üzerinde herhangi bir θ_i için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak zor olsun. Bu durumda, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu hesaplamasının bir alternatifi Θ parametre kümesi üzerinde aşağıdaki adımları uygulayarak bir Markov zinciri oluşturmaktır. Bu algoritma, Gibbs örnekleme algoritması olarak bilinir. Algoritmadaki iterasyon sayacı j olmak üzere, Gibbs örnekleme süreci aşağıdaki gibidir:

1. Parametrelere ait başlangıç değerleri seçilmelidir.

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_k^0) \quad (3.19)$$

2. j 'den başlamak üzere, j . iterasyon için k tane parametrenin koşullu dağılımlar kümesi meydana getirilmeli ve bunlardan peş peşe sayılar çekilerek j . zincir oluşturulmalıdır. k tane parametrenin koşullu dağılımlar kümesi:

$$\theta_1^j \text{ değeri } \pi(\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)})$$

$$\theta_2^j \text{ değeri } \pi(\theta_2 | \theta_1^{(j-1)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)})$$

$$\theta_3^j \text{ değeri } \pi(\theta_3 | \theta_1^{(j-1)}, \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)})$$

.

.

.

$$\theta_k^j \text{ değeri } \pi(\theta_k | \theta_1^{(j-1)}, \theta_2^{(j-1)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)})$$

3. Yakınsamaya ulaşıncaya kadar her iterasyonda j bir birim artırılıp ikinci adıma geri dönülerek zincir tamamlanmaya devam edilmelidir (Demirci 2016).

İkinci adımdaki eşitliklere dikkat edilirse, koşullu dağılımlar kümesinin birbiri ardı gelen değerlerin üretimi ile meydana geldiği görülmektedir. Kümedeki ilk zincir ilk satırda oluşturulduktan sonra, yeni değer bir diğer safhada ikinci bileşenin hesaplanmasında kullanılmaktadır. Parametrelerin öncelik sıralaması önemsizdir ancak en güncel örnekleme tercih edilmesi ve kullanılması daha faydalı olacaktır. Gibbs örneklemesinde, iterasyonlar yeterince uzun ise algoritmada bulunan tüm döngüler koşullu dağılımları kullanarak, θ parametresine ait bütün bileşenlerine örneklem üretebilecektir. Ancak algoritma, θ parametreleri için tüm koşullu dağılımlarının basit olarak elde edilebilir olduğu durumda çalışmaktadır. Bu durumda parametrelere dair Metropolis-Hastings algoritması uygulanarak güncelleştirme yapılabilecektir (Demirci 2016).

3.4 En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi (HPDR)

Güven aralığı, kitle parametresinin alt ve üst sınırdan oluşan belirli aralıklar içinde yer aldığı bilgisini içeren çıkarımsal istatistik yöntemlerinden biridir. Klasik yaklaşımdaki güven aralığı, Bayesci yaklaşımda yerini “**güvenilir aralık**” a bırakır. Literatürde, “**Bayes Aralığı**” veya “**En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi (Higest Posterior Density Region)**” tanımlamaları da kullanılmaktadır.

θ kitle parametresi olmak üzere; θ 'ya ait sonsal dağılımın elde edilmesiyle birlikte, θ nın olası tüm değerleri için çıkarım yapmak mümkün olup, $0 < a < 1$ olmak üzere; $f(\theta \in R_a) = 1 - a$ olacak şekilde bir R_a bölgesi bulunabilir. Burada R_a , sonsal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu maksimum yapan θ parametre değerlerini içeren olası en küçük bölgesidir ve en yüksek sonsal yoğunluk bölgesi olarak tanımlanır. θ_L , R_a bölgesinin en küçük değeri ve θ_U da en yüksek değeri olmak üzere θ 'nın en yüksek sonsal yoğunluk aralığı;

$$\int_{\theta_L}^{\theta_U} f(\theta|x) d\theta = 1 - a \quad (3.20)$$

dır.

4. ZAMAN SERİLERİ

Araştırmacı tarafından sınırları belirlenmiş aralıklarda ve dönemsel gözlemlenen ölçümlerin dizisine **zaman serisi** denir. Zaman serileri, endüstri ve teknoloji üretim süreçlerinde ve bilim dünyasında özellikle ekonomi ve istatistiğin önemli bir uygulama alanıdır. Yurtdışından ithal edilen kalem bazında aylık ürün miktarları, okulların eğitim düzeylerindeki yıllık başarı oranları, bir ülkede günlük kişi başı tüketilen et miktarı, periyodik olarak yapılan bir deneydeki gözlem sayıları, aylık tüketici fiyat endeksleri, hasta üzerinde uygulanan tedavinin olumlu ya da olumsuz cevap verme süresi zaman serilerinin tipik örneklerindendir.

Tanım 4.1

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere, T bir indis kümesi olsun. O halde bir zaman serisi;

$$\begin{aligned} X(.,.): \Omega \times T &\rightarrow \mathbb{R} \\ (w, t) &\rightarrow X(w, t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan, $\Omega \times T$ çarpım uzayından reel sayılara giden bir fonksiyondur. Zaman serisi $X_t(w)$ veya X_t ile gösterilmekte olup, bu fonksiyon her sabit t için bir rasgele değişkendir (Akdi 2012).

4.1 Zaman Serilerinde Durağanlık

Zaman serileri, sabit bir ortalama etrafında gösterdikleri yayılıma göre durağan seriler ve durağan olmayan seriler olarak incelenmektedir. Zaman serilerinde, model parametreleri hakkında sonuç çıkarımları durağanlık varsayımına bağlı olduğundan, durağanlık konusu oldukça önemlidir. Serinin durağan olmaması durumunda seriye dönüşüm yapma, fark alma gibi bir takım matematiksel teknikler uygulanır ve seri durağan hale getirilir. Uygulamada, durağanlık denildiğinde zayıf durağanlık anlaşılır (Akdi 2012).

Tanım 4.2

Bir $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi olmak üzere;

- 1) $E(X_t) = \mu$ (beklenen değer zamana göre değişmiyor),
- 2) $Cov(X_t, X_s)$ sadece $|t - s|$ nin bir fonksiyonu,

koşullarını sağlıyorsa, $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisine **zayıf durağandır** (ya da sadece **durağandır**) denir. Tanımdaki 2. koşula göre; $Cov(X_t, X_{t+h})$ kovaryansı, $|t + h - t|$ ye göre sadece h nin bir fonksiyonu olup buna serinin **otokovaryans fonksiyonu** denir ve $\gamma(h)$ ile gösterilir. $\gamma(h)$ daha açık olarak yazılmak istenirse, serinin beklenen değeri μ olmak üzere;

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)] \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır. Otokovaryans fonksiyonu, bir zaman serisi model derecesini belirlemede ve serinin durağan olup olmadığının ön tespitinde çok kullanışlı özelliklere sahiptir (Akdi 2012).

Tanım 4.3

$\{X_t : t \in T\}$ durağan bir zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu eşitlik 4.1’de verilmiş olup, korelasyon tanımından;

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+h})}} \quad (4.2)$$

fonksiyonuna serinin **otokorelasyon fonksiyonu** denir. Seri durağan ise $\gamma(h) = \text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t+h})$ dir (Akdi 2012).

Bir zaman serisinin durağanlığını bozan temelde iki neden vardı. Bunlar, serinin ya ortalamasının ya da otokorelasyonlarının zamana bağlı olmasıdır. Serinin ortalaması zamana bağlı ise böyle seriler deterministik trende sahiptir ve zamana bağımlılığından arındırılması kolaydır. Ancak seride otokorelasyonlar zamana bağlı ise böyle seriler stokastik trende sahip olup, arındırılması için bir takım matematiksel dönüşüm ya da fark işlemleri uygulanır. Bu sebeple, analiz sürecine başlamadan önce seride nasıl bir trend olduğunun ortaya konması gerekmektedir (Akdi 2012).

Uygulamalarda Otoregresif (AR), Hareketli Ortalama (MA), Otoregresif Hareketli Ortalama (ARMA) ve Mevsimsel modeller, $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi için yaygın kullanılan modellerdir. Çalışmanın amacına uygun olarak Otoregresif (AR) zaman serilerinin tanımından bahsedilecektir.

4.2 Otoregresif (AR) Zaman Serileri

$AR(p)$ olarak adlandırılan p . dereceden otoregresif süreç, zaman serileri analizinde en çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan modeldir. $AR(p)$ süreci hakkında sonuç çıkarımları için farklı istatistiksel tahmin yöntemleri geliştirilmiş ve literatürde yerini almıştır. Klasik (frekansçı) istatistik yöntemlerinde en yaygın kullanılanlar; momentler, koşullu en küçük kareler, en çok olabilirlik ve koşullu en çok olabilirlik tahmin yöntemleridir. Bu yöntemlerden farklı olarak Bayesci istatistik yöntemleri de son yıllarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Tanım 4.4

$\{X_t : t \in T\}$ olarak tanımlanan bir zaman serisi için, μ serinin beklenen değerini ve $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültüyü göstermek üzere;

$$AR(p) = X_t - \mu = \sum_{i=1}^p \phi_i (X_{t-i} - \mu) + e_t \quad (4.3)$$

modeline *p nci dereceden AR modeli* denir (Akdi 2012).

(4.3) eşitliğindeki model;

$$X_t - \mu = -\mu \sum_{i=1}^p \phi_i + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + e_t = \mu \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \right) + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + e_t \quad (4.4)$$

olarak yazılabildiğinden, $AR(p)$ zaman serisi modeli;

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + e_t \quad (4.5)$$

olarak ifade edilir. Matematiksel işlemlerde kolaylık sağlaması açısından $\mu = 0$ alarak, $AR(p)$ modeli;

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + e_t \quad (4.6)$$

şeklinde yazılsın. Modelin durağan olması halinde $\mu = 0$ olarak alınması sorun yaratmaz.

Aksi halde, $Y_t = X_t - \mu$ dönüşümü yaparak beklenen değeri 0 olan bir modele dönülür.

AR süreçlerinde, durağanlık koşullarını sağlamak kolay olmadığından, serinin karakteristik denkleminin köklerine bakılarak durağanlık belirlenebilir. Eğer model durağan ise karakteristik denkleme ait tüm kökler mutlak değer olarak 1'den küçüktür. $AR(p)$ modeli için elde edilen karakteristik denklem;

$$m^p - \sum_{i=1}^p \phi_i m^{p-i} = 0 \quad (4.7)$$

olarak yazılır.

Bu kısımda, $AR(1)$ modeli ele alınsın ve modele ait hataların $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ olması ile;

$$(X_t - \mu) = \phi(X_{t-1} - \mu) + e_t \quad (4.8)$$

şeklinde yazılsın. $AR(1)$ modeline ait karakteristik eşitlik $m - \phi = 0$ dır ve $m_1 - \phi = 0$ ise denklemin köküdür. **Böylelikle $AR(1)$ modeli, ϕ mutlak değerce 1'den küçükse durağandır, 1'den büyük ise durağan değildir.** Ayrıca model $\phi_0 = \mu(1 - \phi)$ eşitliği ile,

$$X_t = \phi_0 + \phi X_{t-1} + e_t \quad (4.9)$$

olarak da ifade edilebilir. Eğer $\phi = 1$ ise serinin beklenen değeri μ , modele dahil edilmez ve (4.9) eşitliği;

$$X_t = X_{t-1} + e_t \quad (4.10)$$

eşitliğine dönüşür. $X_0 = 0$ için, X_t 'ler daha geniş ifade edildiğinde model;

$$X_t = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_t \quad (4.11)$$

olarak yazılır ve $E(X_t) = 0$ olarak elde edilmesine karşın $Var(X_t) = t\sigma^2$ dir. Sonuç olarak, varyans zamana bağlı olup bu $AR(p)$ modeli durağan değildir. Ayrıca

$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t \quad (4.12)$$

şeklindeki AR modeli $|\phi| < 1$ için durağandır (Akdi 2012).

Bir AR serisi, istatistiki sonuç çıkarımları açısından bazı varsayımlara gereksinim duymaktadır. Bu varsayımlar:

- 1) $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ hata terimleri birbirinden bağımsız, beklenen değeri 0 ve sabit varyansa sahip olan beyaz gürültü (white noise) sürecine sahiptir.
- 2) e_t ler ile x_t ler birbirinden bağımsızdır.
- 3) $x_1, x_2, \dots, x_t$ ler zayıf durağandır.

4.3 Zaman Serilerinde Modelleme

Bir zaman serisini modelleme sürecinde Box-Jenkins metodu kullanılarak, seriye ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının irdelenmesiyle uygun gecikme değerleri tespit edilir. Bu yöntem metoduyla model seçimi için uygulanacak adımlar aşağıda belirtilmiştir. Buna göre;

1. Serinin nokta grafiği (plot) ile otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayıları hesaplanır ve durağanlığı irdelenir. Birim kök testi yapılarak serinin durağanlığı tespit edilir. Serinin durağan çıkmaması halinde, uygun fark alma işlemi uygulanarak seri durağan hale getirilir.

2. Daha sonra otokorelasyon fonksiyonu (ACF) ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının (PACF) grafik seyri model belirlemek için incelenir. Otokorelasyon grafiği, otoregresif modeller için harmonik veya üstel şeklinde azalırken hareketli ortalama modellerinde q gecikmeden sonra birden kesilir. Kısmi otokorelasyon grafiğinde ise, otoregresif modellerde p gecikmeden sonra otokorelasyonlar birden kesilirken hareketli ortalama modelleri için harmonik veya üstel şeklinde azalır. ACF ve

PACF grafiklerinin her ikisinde periyodik bir düşüş varsa model için ARMA süreci önerilir.

3. Daha sonra ACF ve PACF grafik yapısına bakarak p ve q model derecelerine kanaat getirilir ve parametrelere dair tahminler yapılır. Bu tahminleri elde etme yöntemleri genellikle en çok olabilirlik, en küçük kareler ya da momentler yöntemlerinden biri ile yapılır. Parametre tahminleri ile birlikte seçilen modelin uygunluğu irdelenir. Bu süreç hataların incelenmesine dayalı bir testtir. Hataların white-noise(beyaz gürültü) ve Normal dağılıma sahip olması, hatalara ait otokorelasyonların sıfır olması durumları incelenir. Uygun modele ait ACF ve PACF grafiklerinin, white-noise(beyaz gürültü) sürecinin ACF ve PACF yapısına benzer olması istenir. İlgilenilen herhangi bir zaman serisi modeli için önerilebilecek birden fazla uygun model olabilir. İyi bir öngörü için uygun modeli seçmek her zaman kolay olmayabilir ve literatürde kullanılan birçok model belirleme ölçütleri vardır. Bunlardan ilki, kestirim sonuçlarına göre en uygun modeli belirlemek. Bir diğeri, Bayesian Information Criterion (BIC), Akaike Information Criterion (AIC) gibi kriterlere göre seçim yapmaktır.

5. OTOREGRESİF ZAMAN SERİLERİNDE BAYESCI SONUÇ ÇIKARIMI

Araştırmacılar, sonuç çıkarımı açısından kullanılan yöntemlere yenilerini eklemek suretiyle mevcut bilgileri yeniden gözden geçirerek bir olaya daha geniş ve farklı bir yelpazeden bakılmasını sağlamaktadırlar. Yapılan bu araştırmalar neticesinde gerçek hayattaki sorunları minimize etmek ve bunlara çözümler üretmek için ileriki dönemlere dair tahminler çok önemlidir. Geleceğe yönelik öngöründe bulunmak kolay bir iş olmayıp, aynı zamanda oldukça büyük bir risk teşkil etmektedir. Alınan bu riskler neticesinde karar mekanizmalarında, şirketlerde ciddi maddi kayıplara sebep olabilir. Ancak istatistiksel kestirim yöntemleri, geleceğe dair oluşabilecek riskleri minimize etmek adına güvenilir modeller vasıtasıyla doğru kararlar alınmasına yardımcı olur. Başka bir deyişle, hataları minimum yapan kestirimler elde etmek, uygun modellerin kullanılmasıyla mümkündür.

Seriler için uygun modeller belirlemek ayrı bir uzmanlık ve bakış açısı gerektirmektedir. Bu modelleri belirlemede kullanılan bir yöntem ise mevcut tahmin argümanlarını geliştirmek için göz önünde bulundurulmuş ve özellikle küçük örneklemelerde başarılı sonuçlar veren Bayesci yaklaşımıdır. Bayesci yaklaşımın karakteristik özelliklerinden en göze çarpanı modelde önsel bilgi kullanmasıdır. Bu zaman serileri analizi için de geçerlidir. Daha önce ifade edildiği gibi, Bayesci yaklaşımda olaylar için gözlemler yapılmadan önce parametreye dair daha önceki araştırmalardan edinilen ön bilgiye göre parametreye ait olasılık yoğunluk fonksiyonu analize dâhil edilir. Yapılan deneylerde ya da gözlemlenen olaylarda, her zaman önsel bilgi mevcut olmayabilir ya da bilgi düzeyi farklı olabilir. Elbette ki önsel bilginin miktarında da aşamalar olacaktır. Bilgi olması, az bilgi olması ya da hiç bilgi olmaması durumu olabilir. Bu yüzden Bayesci zaman serilerinde de sonuç çıkarımı açısından önsellerin bilgi içerip içermemesi kritik bir aşamayı teşkil eder (Gasım 2013).

5.1 AR(1) Zaman Serilerinde Bayesci Sonuç Çıkarımı

Çalışmanın bu bölümünde kullanılan örneklem serisinin dağılımına uygun farklı önseller kullanarak $\hat{\phi}$ tahmininin elde edilmesi anlatılacaktır.

5.1.1 Jeffreys önsel dağılımı kullanılarak AR(1) zaman serisi için bayesci sonuç çıkarımı

$x_{1:T} = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ ile 1'den T 'ye kadar olan rasgele gözlem vektörü gösterilmek üzere AR(1) sürecine ait model;

$$x_t = c + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,T \quad \text{ve} \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (5.1)$$

ve $x_1 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2})$ olarak verilsin ve $Q = (\phi, \sigma)$ olarak tanımlansın. AR(1) modeline ait ϕ parametresi için önerilen Jeffreys önsel dağılımı;

$$\pi(\phi) \propto |I(\phi)|^{1/2} \quad (5.2)$$

dır (Berger ve Yang 1994). Burada $I(\phi)$, Fisher bilgi matrisini gösterir. ϕ için $I(\phi)$ hesaplanmak istenirse;

$$\begin{aligned} I(\phi) &= -E_{\phi} \left[\frac{\partial \log f(X | \phi)}{\partial \phi^2} \right] \\ &= -E_{\phi} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma_{\phi}^2} & \frac{2(\phi-d)}{\sigma_{\phi}^2} \\ \frac{2(\phi-d)}{\sigma_{\phi}^2} & \frac{3}{\sigma_{\phi}^4} (\phi-d)^2 - \frac{1}{\sigma_{\phi}^2} \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{\phi}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{\phi}^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

dır.

Buradan $I(\phi)$ 'nın determinatı $\left(\frac{1}{\sigma_\phi^2}\right)^2$ olup $|I(\phi)|^{1/2} = \frac{1}{\sigma_\phi^2}$ olarak elde edilir. Dolayısıyla önsel dağılım $\pi(\phi) \propto \frac{1}{\sigma_\phi^2}$ dır. Ancak bu önsel dağılımın zayıf yaklaşım özelliklerinden dolayı Harold Jeffreys $\pi(\phi) \propto \frac{1}{\sigma_\phi}$ 'yı önsel dağılım olarak önermiştir (Jordan 2010).

Ayrıca koşullu olabilirlik fonksiyonu;

$$L(x_{2:T} | x_1, Q) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{T-1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (x_t - \phi x_{t-1})^2\right] \quad (5.4)$$

ve x_1 in olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x_1 | Q) = \left(2\pi \left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)}\right] \quad (5.5)$$

dır.

Benzer olarak $x_2 | x_1 \sim N(\phi x_1, \sigma^2)$ olmak üzere;

$$f(x_2 | x_1, Q) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x_2 - \phi x_1)^2\right] \quad (5.6)$$

dır. Böylelikle genel olarak yazılmak istenirse, $x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_t \equiv x_t | x_{t-1} \sim N(\phi x_{t-1}, \sigma^2)$

olmak üzere $f(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_t, Q)$ in olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_t, Q) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_t - \phi x_{t-1})^2\right] \quad (5.7)$$

olarak hesaplanır. $Q = (\phi, \sigma)$ verildiğinde olabilirlik fonksiyonu;

$$\begin{aligned} L(Q) &= \left\{ \left(2\pi \left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \right) \right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)}\right] \right\} \prod_{t=2}^T (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x_t - \phi x_{t-1})^2\right] \\ &\propto (1-\phi^2)^{1/2} \sigma^{-T} \exp\left[-\frac{\sum_{t=2}^T (x_t - \phi x_{t-1})^2 + x_1^2(1-\phi^2)}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

dır. $Q = (\phi, \sigma)$ nın koşullu olabilirlik fonksiyonunda T çok büyük olduğunda $(1-\phi^2)$ değeri küçük olur. Dolayısıyla tam olabilirlik fonksiyonu benzer olarak;

$$L(x_{2:T} | x_1, Q) \propto \sigma^{-(T-1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (x_t - \phi x_{t-1})^2\right] \quad (5.9)$$

olarak karşımıza çıkar. O halde seçilen $\pi(\phi) \propto \frac{1}{\sigma_\phi}$ önsel dağılımı ile birlikte hesaplanan sonsal dağılım;

$$\begin{aligned}
f(Q | x_{1:T}) &\propto \sigma_{\phi}^{-1} \sigma^{-(T-1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (x_t - \phi x_{t-1})^2 \right] \\
&= \sigma_{\phi}^{-1} \sigma^{-(T-1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (x_t^2 - 2\phi x_t x_{t-1} + \phi^2 x_{t-1}^2) \right] \\
&= \sigma_{\phi}^{-1} \sigma^{-(T-1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{t=2}^T x_t^2 - 2\phi \sum_{t=2}^T x_t x_{t-1} + \phi^2 \sum_{t=2}^T x_{t-1}^2 \right) \right] \\
&\propto \exp \left[-\frac{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}{2\sigma^2} \left(\phi - \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} \right)^2 \right] \\
&= \exp \left[-\frac{1}{\frac{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}{2\sigma^2}} \left(\phi - \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

dır. Bu eşitlikte σ bilindiğinde;

$$\phi | \sigma, x_{1:T} \sim N \left(\frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} \right) \tag{5.11}$$

olarak Normal dağılır. Buna göre ϕ 'nın Bayes tahmin edicisi;

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} \tag{5.12}$$

olarak elde edilir.

5.1.2 Eşlenik önsel dağılım kullanılarak AR(1) zaman serisi için bayesci sonuç çıkarımı

$x_{1:T} = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ ile 1'den T 'ye kadar olan rasgele gözlem vektörü gösterilmek üzere AR(1) sürecine ait model;

$$x_t = c + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad \text{ve} \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1) \quad (5.13)$$

olsun. $Q = (\phi, \sigma)$ verildiğinde eşitlik 5.6, 5.7 ve 5.8'den tam olabilirlik fonksiyonu;

$$L(x_{2:T} | x_1, Q) \propto \sigma^{-(T-1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (x_t - \phi x_{t-1})^2 \right] \quad (5.14)$$

dır. (5.14) ile verilen modelde ϕ parametresi Normal dağılımın beklenen değeri olduğundan, AR(1) modeline ilişkin ϕ parametresi için eşlenik önsel dağılım olarak Normal dağılım önerilebilir. Buna göre, beklenen değeri d ve varyansı σ_ϕ^2 olarak alınan otoregresif ϕ parametresine ait önsel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \pi(\phi | \sigma_\varepsilon^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \exp \left[\frac{-(\phi - d)^2}{2\sigma_\phi^2} \right] \\ &\propto \exp \left[\frac{-(\phi - d)^2}{2\sigma_\phi^2} \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece, $\pi(\phi)$ önsel dağılımı ile birlikte hesaplanan sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
f(Q | x_{1:T}) &\propto \pi(\phi | \sigma_\varepsilon^2) \times L(x_{2:T} | x_1, Q) \\
f(Q | x_{1:T}) &\propto \exp\left[-\frac{(\phi - d)^2}{2\sigma_\phi^2}\right] \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (x_t - \phi x_{t-1})^2\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^T (x_t^2 - 2\phi x_t x_{t-1} + \phi^2 x_{t-1}^2) - \frac{(\phi - d)^2}{2\sigma_\phi^2}\right] \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_s^2} \left(\phi - \frac{\sigma_\phi^2}{\frac{\sigma^2}{T} + \sigma_\phi^2} \times U + \frac{\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{T} + \sigma_\phi^2} \times d\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{5.16}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$\sigma_s^2 = \left(\frac{1}{\sigma_\phi^2} + \frac{T}{\sigma^2}\right)^{-1}$$

ve

$$U = \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}$$

dır. 5.15 eşitliğinde σ, σ_ϕ, d bilindiğinde;

$$\phi | \sigma, x_{1:T} \sim N\left(\frac{\sigma_\phi^2}{\frac{\sigma^2}{T} + \sigma_\phi^2} \times \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} + \frac{\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{T} + \sigma_\phi^2} \times d, \left(\frac{1}{\sigma_\phi^2} + \frac{T}{\sigma^2}\right)^{-1}\right) \tag{5.17}$$

dır. Buradan ϕ nın Bayes tahmin edicisi;

$$\hat{\phi} = \frac{\sigma_{\phi}^2}{\frac{\sigma^2}{T} + \sigma_{\phi}^2} \times \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} + \frac{\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{T} + \sigma_{\phi}^2} \times d \quad (5.18)$$

olarak elde edilir.

5.1.3 Kırılmış normal önsel dağılım kullanılarak AR(1) zaman serisi için bayesci sonuç çıkarımı

$(X_t, t \geq 1)$ rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere olmak üzere; AR(1) modeli $x_t = c + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, T$ olarak tanımlansın. Durağan bir AR(1) modelinde $-1 < \phi < 1$ olduğu eşitlik 4.12'den bilinmektedir. O halde AR(1) modeline ait koşullu olabilirlik fonksiyonu (Hamilton 1994).

$$L(\phi | x_1, \dots, x_T, \sigma_{\varepsilon}^2) = \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varepsilon}^2}} \exp \left[\frac{-(x_t - \phi x_{t-1})^2}{2\sigma_{\varepsilon}^2} \right] \quad (5.19)$$

dır. Durağan varsayılan bir AR(1) modelinde $-1 < \phi < 1$ ise ϕ parametresinin önsel dağılımı **Kırılmış Normal** dağılım olarak önerilebilir (Johnson vd. 1970).

Kırılmış Normal dağılım; Normal dağılıma sahip bir rasgele değişkenin sınırlarının üstten, alttan ya da her iki taraftan sınırlandırılmasıyla elde edilen olasılık dağılımıdır. Kırılmış Normal dağılımın istatistikte ve ekonometride geniş uygulamaları vardır. Örneğin nüfus sayım formunu gönderen ilk 1000 kişinin gelir verileri incelenmek istensin. Sadece ilk 1000 kişi incelendiği için gelire ait sınırlar belirli bir aralık içinde kalacak ve dolayısıyla nüfus sayımına dahil olan vatandaşların gelir sınırına göre kırılacaktır. Yine bir okulda yetenekli öğrencilerin katıldığı bir eğitim programı ve programdaki tüm öğrencilerin 130 veya daha yüksek bir IQ' su olduğu bilinsin. Okula yakın bölgede yaşayan okul çağındaki çocukların, IQ'sunun Normal olarak 100 ortalama

ve 15 standart sapma ile dağıldığı varsayılın. Eğitime katılan bu grubun ortalama IQ değeri ile ilgilenildiğinde 130' un altındaki her şey kırılmıştır ve üst sınır yoktur.

Bir rasgele değişken; $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahip olsun ve (α, β) aralığında kırılmış olsun. O halde, aralığın dışında kalan alan 0'a ayarlanarak değiştirilir ve aralığın içindeki alanın olasılığı 1 olacak şekilde tekrar hesaplanır. Kırılma aralığına göre dört durum söz konusudur;

- a) Kırılmamış durum : $-\infty = \alpha, \beta = +\infty$;
- b) Alttan kırılmış durum : $-\infty < \alpha, \beta = +\infty$;
- c) Üstten kırılmış durum : $-\infty = \alpha, \beta < +\infty$;
- d) Çift taraflı kırılmış durum: $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$;

O halde, Kırılmış Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $\psi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, \alpha, \beta; x)$ olarak gösterilebilir. Burada $\bar{\mu}$ ve $\bar{\sigma}^2$, ana Normal dağılımın beklenen değeri ve varyansı, α ve β ise kırılma aralıklarını belirtmektedir.

Kırılmış Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$\psi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, \alpha, \beta; x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq \alpha \\ \frac{\omega(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; x)}{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \beta) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \alpha)} & \text{if } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{if } \beta \leq x \end{cases} \quad (5.20)$$

dır. Burada $\omega(\cdot)$, Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $\varphi(\cdot)$ ise standart Normal dağılımın dağılım fonksiyonunu belirtmektedir.

Kırılmış Normal dağılımın dağılım fonksiyonu ise (5.20) eşitliğinin $\alpha < x < \beta$ kısıtı altında aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\Psi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, \alpha, \beta; x) = \int_{-\alpha}^x \psi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, \alpha, \beta; t) dt$$

$$= \int_{\alpha}^x \frac{\omega(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; t)}{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \beta) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \alpha)} dt$$

$$= \frac{\int_{\alpha}^x \omega(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; t) dt}{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \beta) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \alpha)}$$

$$= \frac{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; x) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \alpha)}{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \beta) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \alpha)} \quad (5.21)$$

$$\Psi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2, \alpha, \beta; x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq \alpha \\ \frac{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; x) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \alpha)}{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \beta) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; \alpha)} & \text{if } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{if } \beta \leq x \end{cases} \quad (5.22)$$

Buradan Kırpılmış Normal dağılım için beklenen değer ve varyans:

$$a = \frac{\alpha - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\beta - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \quad \text{olmak üzere ;}$$

$$\mu = \bar{\mu} - \bar{\sigma} \times \frac{\omega(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; b) - \omega(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; a)}{\varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; b) - \varphi(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2; a)} \quad (5.23)$$

$$\sigma^2 = \sigma^{-2} \times \left(1 - \frac{b\omega(0,1;b) - a\omega(0,1;a)}{\varphi(0,1;b) - \varphi(0,1;a)} - \left(\frac{\omega(0,1;b) - \omega(0,1;a)}{\varphi(0,1;b) - \varphi(0,1;a)}\right)^2\right) \quad (5.24)$$

olarak elde edilmektedir.

O halde, beklenen değeri $\mathbf{d}$ ve varyansı σ_ϕ^2 olan otoregresif ϕ parametresine ait önsel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\pi(\phi | \sigma_\varepsilon^2) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \exp\left[-\frac{(\phi - d)^2}{2\sigma_\phi^2}\right]}{\varphi\left(\frac{\beta - d}{\sigma_\phi}\right) - \varphi\left(\frac{\alpha - d}{\sigma_\phi}\right)} \quad (5.25)$$

dır. Burada α ve β Kırpılmış Normal dağılımın alt ve üst kesim noktaları ve $\varphi(\cdot)$ standart Normal dağılımın birikimli dağılımıdır. Buradan $\alpha = -1$ ve $\beta = 1$ olmak üzere önsel dağılımı

$$\pi(\phi | \sigma_\varepsilon^2) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} \exp\left[-\frac{(\phi - d)^2}{2\sigma_\phi^2}\right]}{\varphi\left(\frac{1 - d}{\sigma_\phi}\right) - \varphi\left(\frac{-1 - d}{\sigma_\phi}\right)} \quad (5.26)$$

olarak yazılabilir. Buradan önsel dağılıma ait beklenen değer ve varyans

$$a = \frac{-1 - d}{\sigma_\phi} \quad \text{ve} \quad b = \frac{1 - d}{\sigma_\phi} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$E(\phi) = d + \sigma_{\phi} \frac{\omega(a) - \omega(b)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \quad (5.27)$$

$$VAR(\phi) = \sigma_{\phi}^2 \times \left(1 + \frac{a\omega(a) - b\omega(b)}{\varphi(b) - \varphi(a)} - \left(\frac{\omega(a) - \omega(b)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\right)^2\right) \quad (5.28)$$

olarak hesaplanır (Johnson vd. 1970). ϕ parametresi için, önsel dağılım olarak Kırpılmış Normal dağılımlı alındığında parametreye ait sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(\phi | x_1, \dots, x_T, \sigma_{\varepsilon}^2, \sigma_{\phi}^2, d) = \frac{\sqrt{f} \exp\left(-\frac{e}{2} \left(\phi - \frac{e}{f}\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi} (\varphi(\sqrt{f}(1 - \frac{e}{f})) - \varphi(\sqrt{f}(-1 - \frac{e}{f})))} \quad (5.29)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$e = \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sigma_{\varepsilon}^2} + \frac{d}{\sigma_{\phi}^2}$$

ve

$$f = \frac{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2} + \frac{1}{\sigma_{\phi}^2}$$

dır. O halde otoregresif AR(1) modeline ait ϕ parametresinin Kırpılmış Normal önsel dağılımı altında Bayes tahmin edicisi;

$$\phi = \mu_1 + \sigma_1 \times \frac{\phi(\frac{-1-\mu_1}{\sigma_1}) - \phi(\frac{1-\mu_1}{\sigma_1})}{\varphi(\frac{1-\mu_1}{\sigma_1}) - \varphi(\frac{-1-\mu_1}{\sigma_1})}$$

$$^*\mu_1 = \frac{e}{f} \text{ ve } \sigma_1 = \sqrt{f^{-1}} \quad (5.30)$$

olarak elde edilir (Karakani vd. 2016).

6. UYGULAMA ÇALIŞMALARI

Bu bölümde, ilk olarak farklı önsellerin sonuçlara olan etkisini görebilmek amacı ile simülasyon ile türetilen veriler kullanılarak Bayesci sonuç çıkarımı yapılmıştır. Daha sonra, gerçek bir veri seti gözönüne alınarak klasik ve Bayesci yöntemlerle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

6.1 Simülasyon Çalışması

Bu çalışmanın temel dayanağı; farklı AR(1) modellerinden üretilen verileri kullanarak seçilen önsellerle, belirlenen sayıda denemeler yaparak Bayes tahminlerini elde etmektir. Amaç; seçilen önsel dağılımların farklı örneklem genişliklerinde model üzerindeki etkinliğini test etmektir. Test aşaması sürecinde yapılan hesaplamalar Matlab2015a'da yapılmıştır. Buna göre yapılan simülasyonlarda;

- Hatalar, $e_t \sim WN(0, \sigma^2 = 1)$ olan dağılımdan üretilmiştir.
- Uygulamada Jeffreys, Eşlenik Normal ve Kırpılmış Normal önselleri kullanılmıştır.
- Üretilen AR(1) serilerinde başlangıç değeri $X_0 = 3$ olarak alınmıştır.
- $\sigma_\phi^2 = 1$, $d=0$ olarak seçilmiştir.
- Her bir model için deneme (tekrarlama) sayısı $R=1000$ olup örneklem genişlikleri $T = 30, 50, 100, 500$ olarak belirlenip karşılaştırma yapılmıştır.
- AR(1) modeline ait ϕ parametresi sırasıyla $-0.75, -0.50, 0.50$ ve 0.75 olarak seçilmiş olup tüm modeller için durağanlık varsayımı kabul edilmiştir.
- ϕ 'nın her bir denemede elde edilen $\hat{\phi}$ 'ya göre duyarlılığını ölçmek için karekök hata kareler ortalaması (Root Mean Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{1-R} \sum_{i=2}^R \left(\hat{\phi}_i - \phi \right)^2} \quad (6.1)$$

kullanılmıştır.

- Çizelge 6.1’de ϕ ’nin farklı değerleri için 1000 kez yapılan simülasyonda farklı önsel ve örneklem genişliklerinde hesaplanan sonsal dağılımın beklenen değeri yani $\hat{\phi}$ ’nin aldığı değerler ve hesaplanan RMSE değerleri verilmiştir.
- Çizelge 6.2’de, simülasyondan elde edilen sonsal dağılımlara ait en yüksek sonsal yoğunluk bölgesi (HPDR) yüzdelikleri ve değerleri verilmiştir.

Çizelge 6.1 Farklı Önseller Kullanılarak Bayesci Yöntemle Parametre Tahmini ve Bunlara Ait RMSE Değerleri

ϕ	T	Bayes Tahmin Değerleri			RMSE		
		Jeffreys	Eşlenik Normal	KN	Jeffreys	Eşlenik Normal	KN
-0.75	30	-0.6829	-0.6866	-0.7034	0.1446	0.1365	0.1354
	50	-0.7054	-0.7120	-0.7252	0.1071	0.1032	0.1004
	100	-0.7273	-0.7309	-0.7344	0.0745	0.0709	0.0703
	500	-0.7444	-0.7465	-0.7496	0.0298	0.0286	0.0284
-0.50	30	-0.4304	-0.4554	-0.4664	0.1778	0.1588	0.1580
	50	-0.4585	-0.4760	-0.4759	0.1252	0.1245	0.1224
	100	-0.4771	-0.4869	-0.4910	0.0931	0.0888	0.0852
	500	-0.4948	-0.4974	-0.4995	0.0403	0.0393	0.0387
0.50	30	0.4666	0.4611	0.4829	0.1619	0.1498	0.1493
	50	0.4856	0.4749	0.4856	0.1184	0.1221	0.1225
	100	0.4866	0.4858	0.4975	0.0855	0.0862	0.0828
	500	0.4976	0.4962	0.5003	0.0386	0.0394	0.0390
0.75	30	0.7093	0.6834	0.7074	0.1371	0.1261	0.1236
	50	0.7257	0.7080	0.7260	0.0996	0.1010	0.0957
	100	0.7304	0.7322	0.7352	0.0694	0.0677	0.0669
	500	0.7468	0.7449	0.7476	0.0302	0.0299	0.0294

Çizelge 6.2 Farklı Önseller Kullanılarak Bayesci Yöntemle En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi(HPDR) Yüzdelikleri ve Alt-Üst Sınırları

ϕ	T	HPDR Yüzdelikleri(%) ve Değerleri		
		Jeffreys	Eşlenik Normal	KN
-0.75	30	96.4	96.5	96.9
		(-0.9688 -0.4380)	(-0.9541 -0.4191)	(-0.9663 -0.4375)
	50	95.8	96.3	96.9
		(-0.9263 -0.5241)	(-0.9080 -0.5160)	(-0.9153 -0.5255)
	100	95.4	95.6	95.8
		(-0.8734 -0.5954)	(-0.8687 -0.5921)	(-0.8733 -0.5993)
-0.50	30	94.9	95.7	96.7
		(-0.7776 -0.1552)	(-0.7701 -0.1497)	(-0.7759 -0.1587)
	50	95.5	95.7	96.6
		(-0.7199 -0.2319)	(-0.7159 -0.2361)	(-0.7039 -0.2331)
	100	94.9	95.3	95.6
		(-0.6650 -0.3170)	(-0.6539 -0.3199)	(-0.6506 -0.3192)
0.50	30	94.9	94.7	94.9
		(-0.5759 -0.4231)	(-0.5733 -0.4215)	(-0.5738 -0.4225)
	50	95.4	95.7	96.6
		(0.1493 0.7839)	(0.1675 0.7547)	(0.1903 0.7755)
	100	95.4	95.2	95.8
		(0.2535 0.7177)	(0.2356 0.7142)	(0.2455 0.7057)
0.75	30	95.0	95.1	95.2
		(0.3190 0.6542)	(0.3168 0.6548)	(0.3352 0.6598)
	50	94.9	94.9	95.1
		(0.4219 0.5733)	(0.4190 0.5734)	(0.4239 0.5767)
	100	95.7	96.7	96.7
		(0.4406 0.9780)	(0.4362 0.9306)	(0.4651 0.9497)
0.75	30	96.5	96.4	96.6
		(0.5305 0.9209)	(0.5100 0.9060)	(0.5384 0.9136)
	50	96.1	96.2	96.3
		(0.5944 0.8664)	(0.5995 0.8649)	(0.6041 0.8663)
	100	95.4	95.6	95.5
		(0.6876 0.8060)	(0.6863 0.8035)	(0.6900 0.8052)

Simülasyon sonucunda çizelge 6.1 incelendiğinde; ϕ 'nin alınan tüm değerler eşliğinde genel olarak RMSE değerlerinin birbirine çok yakın olduğu, ancak küçük örneklem genişliklerinde ($T=30,50$) kırılmış Normal önsel kullanılarak elde edilen tahminlerin daha iyi performans gösterdiği, örneklem genişliği arttıkça RMSE değerlerinin birbirine

yaklaştığı görülmektedir. Yani, $T > 50$ olduğunda her üç önsel kullanılarak elde edilen tahmin sonuçları birbirine yakın değerler almaktadır.

Çizelge 6.2 ile farklı önsellerden elde edilen sonsal dağılımlar kullanılarak parametre için HPDR'ler elde edilmiştir. Buna göre örneğin, $\phi = -0.75$ ve $T=30$ için Kırpılmış Normal Önsel dağılım kullanılarak elde edilen sonsal dağılımın beklenen değeri %96.9 olasılıkla $(-0.9663, -0.4375)$ aralığına düşmektedir. Bu şekilde, çizelge 6.2 yorumlandığında Kırpılmış Normal Önseli diğer önsellere göre daha yüksek HDPR yüzdeliği sunmaktadır. Yani tüm örneklem genişliklerinde Kırpılmış Normal önseli diğer önsellere göre daha dar “güvenilir aralık” sunmakta olup özellikle küçük örneklem genişliklerinde ($T=30,50$) çok daha dar güvenilir aralık sunmasıyla daha iyi performans göstermektedir. Örneklem genişliği arttıkça tüm önsellerin sunduğu HPDR yüzdesinin birbirine çok yakın olduğu tespit edilmiştir.

6.2 Gerçek Veri Çalışması

Çalışmanın materyalini; böcek popülasyon dinamikleri üzerine uzmanlaşmış Avustralyalı entomolog Alexander John Nicholson' ın 1950 yılında koyun sinekleri (*lucilia cuprina*) üzerine yapmış olduğu deneyin gözlemleri oluşturmaktadır. Koyun sineklerinin, koyunların kuyruğuna yakın veya açıkta kalan yaralardan bırakmış olduğu kurtçuklar yumurtalardan çıkar ve onları daha da büyüten koyun etiyle beslenir. Sineklerin yumurtlamaları için yemeğe ihtiyaç duymaları nedeniyle, popülasyonları üzerindeki yoğunluk etkileri Nicholson tarafından incelenmiştir. Bu amaçla Nicholson, öncelikle deney amacına uygun olarak bir kafes yapmıştır. Bu kafese dengeli sayıda olacak biçimde erkek ve dişi koyun sineklerinden bırakarak popülasyonu oluşturmuştur. Kafesteki sinek popülasyonuna gerekli miktarda su ve koyun eti verip, iki günde bir kontrol ederek iki yıl boyunca kafesteki popülasyon sayısını incelemiştir.

Deneye ait gözlem sayısı $n=364$ olup bu çalışmanın amacına uygun olarak $X_t, t=1,2,...,364$ olmak üzere $218 \leq t \leq 299$ arasındaki 82 adet veri incelenmiştir.

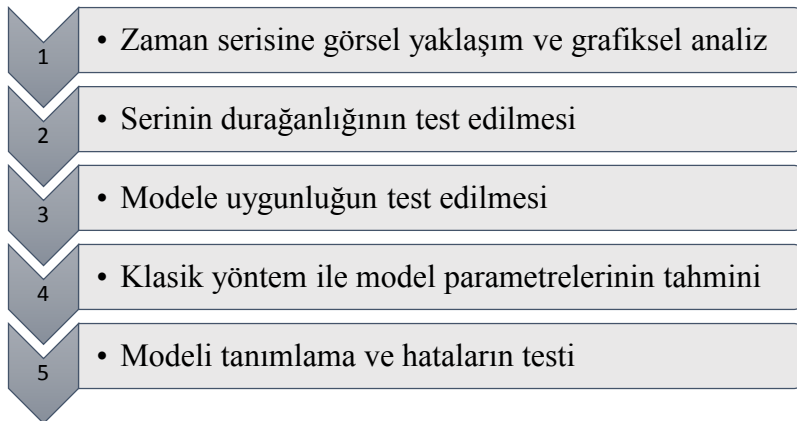
Veriler William W.S. Wei’ nin “Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods “ kitabı sayfa 569’ tan alınmıştır.

Bu çalışmada veriler, otoregresif zaman serileri yöntemleri ile analiz edilmiş olup parametre tahmin yönteminde Bayesci yaklaşım ele alınmıştır. Öncelikle verilerin durağanlığı test edilmiş, ACF ve PACF grafikleri çizdirilerek AR(1) modeline uygunluğuna sezgisel olarak bakılmış ve bazı testler yardımıyla önerilen modele uygunluğu ölçülmüştür. Daha sonra model parametresi için uygun farklı önsel dağılımlar kullanılarak parametreye ait Bayes tahmin edicileri elde edilmiş ve sonuçları karşılaştırılmıştır. Veriler için uygulanan analizler ve hesaplamalar için Matlab R2015a, Minitab 17.0, SPSS 22, Excel paket programlarından faydalanılmıştır.

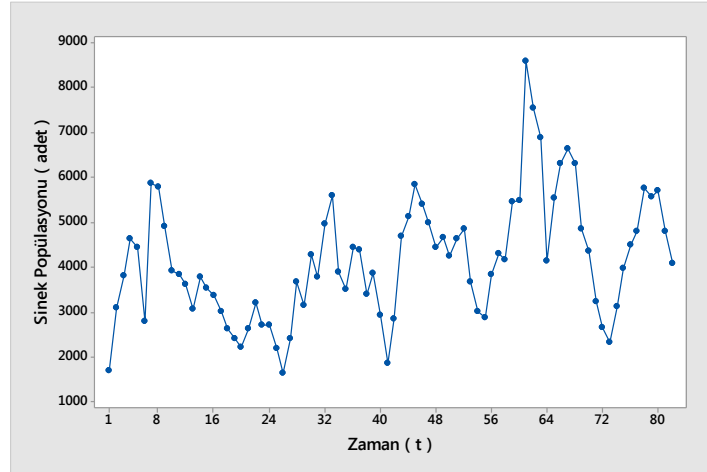
6.2.1 Model seçimi

Zaman serisi analizi farklı adımlardan oluşur ve güvenilir bir zaman serisi modeli bulmak için tüm bu adımların dikkatle incelenmesi gerekir. Bir zaman serisi olduğu düşünülen veriye yaklaşımın nasıl olduğu aşağıdaki tabloda verilmiş olup, bu metodoloji çalışmada kullanılan verilere adım adım uygulanmıştır.

Çizelge 6.3 Zaman Serisi Analiz Uygulama Sırası



Koyun sinekleri popülasyonuna ait verilerin zaman serisi grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 6.1 Verilere Ait Zaman Serisi Grafiği

Şekil 6.1 incelendiğinde, seriye ait herhangi bir döngü, trend veya mevsimsel bir hareket gözlemlenmemiş olup veriler arasında düzensiz varyasyonlardan bahsedilebilir. Bu nedenle serinin durağan olduğu söylenebilir. Ancak durağanlık varsayımının sağlanması için matematiksel testlere ihtiyaç vardır.

H_0 : Birim kök vardır (Seri durağan değildir)

H_1 : Birim kök yoktur (Seri durağandır)

Phillips-Perron ve Dickey-Fuller birim kök testi bir seriye ait durağanlığın sınanmasında en sık kullanılan yöntemler arasındadır. Bu bölümde çalışmada kullanılan serinin durağanlığının test edilmesi için Dickey-Fuller birim kök testi uygulanacaktır. Bu test için Excel programı kullanılarak elde edilen test sonuçları Çizelge 6.4 ve 6.5 ile verilmiştir.

Dickey-Fuller Birim Kök Testi:

Çizelge 6.4 Dickey-Fuller Birim Kök Testi

ANOVA				
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
Regresyon	1	10289760.12	10289760.12	12.87
Fark	78	62353352.62	799401.95	
Toplam	79	72643112.75		

	<i>katsayı</i>	<i>Standart hata</i>	<i>t-istatistiği</i>	<i>p-değeri</i>	<i>%95'lik alt sınır</i>	<i>%95'lik üst sınır</i>
Orjinal_Seri	1123.84	318.50	3.52	0.0007	489.75	1757.94
Fark_Seri	-0.26	0.073	-3.58	0.0005	-0.41	-0.12

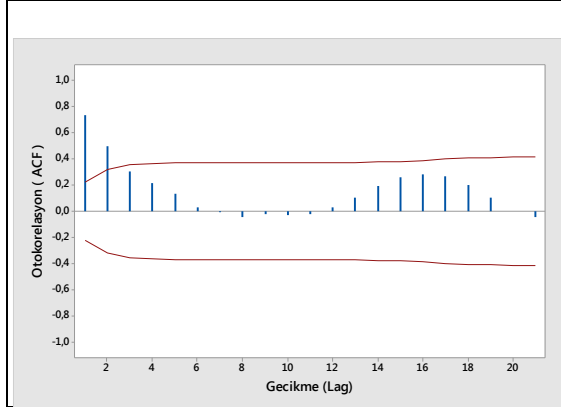
***Fark_Gecikme_Seri:** Orijinal Serinin 1. dereceden fark serisi

Çizelge 6.5 Dickey-Fuller Test İstatistiği

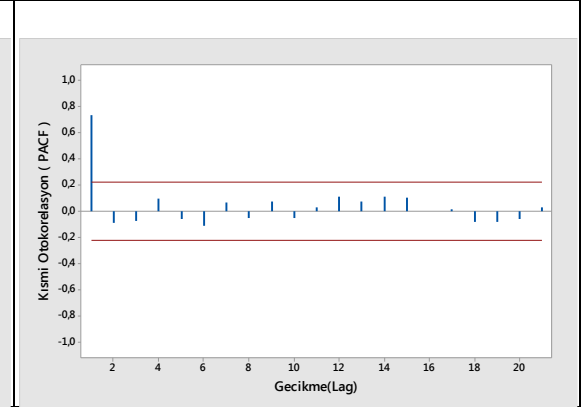
	Uyarlanmış t-istatistiği
Augumented Dickey-Fuller Test İstatistiği	-3.58
	%1 düzey -2.56
Kritik Değerler	%5 düzey -1.94
	%10 düzey -1.62

Çizelge 6.4 ve çizelge 6.5 incelendiğinde Dickey-Fuller birim kök testi için hesaplanan t-istatistiği değeri $\delta = (-3.58)$ olup %5 anlam düzeyinde hesaplanan kritik değerden **(-1.94)** daha küçük olduğu için H_0 hipotezi reddedilir. Yani orijinal serinin durağan olduğuna karar verilir.

Serinin durağanlığının testinin ardından, veriler için model önermesi yapılması gerekmektedir. Bu öneri iki aşamada gerçekleşir. İlk adımda serinin ACF ve PACF grafikleri birlikte yorumlanır ve model için görsel tahmin yapılır. İkinci adımda ise önerilen modele olan uygunluğu test edilir. Buna göre seriye ait ACF ve PACF grafikleri;



Şekil 6.2 Seriyeye Ait Otokorelasyon Grafiği (ACF)



Şekil 6.3 Seriyeye Ait Parçalı Otokorelasyon Grafiği (PACF)

biçiminde elde edilir.

Serinin otokorelasyon grafiği incelendiğinde, otokorelasyonların normal bir şekilde azaldığı görülmektedir. Buradan serinin durağan olabileceği öngörüsü yapılabilir ki, yukarıda yapılan Dickey-Fuller durağanlık testi bu öngörüü istatistiksel olarak desteklemektedir. Kısmi otokorelasyon grafiği incelendiğinde 1. gecikmenin anlamlı, daha sonraki gecikmelerin anlamlı olmadığı görülmektedir. Bu ise serinin 1.dereceden otoregresif (AR(1)) süreci olabileceği ihtimalini kuvvetlendirmektedir.

Bir araştırmacının elindeki örnekleme dair öne sürmüş olduğu modellerin hangisinin daha uygun olduğuna dair birçok hesaplama yöntemi vardır. Bunlardan biri AIC bilgi kriteridir.

Çizelge 6.6 AIC (Akaike İnformation Criterion) Değerleri

	MA(0)	MA(1)	MA(2)
AR(0)	*	8.329518	10.40252
AR(1)	7.894606	10.27835	12.42395
AR(2)	8.461519	10.28046	12.56719

Modele uygunluk testi için AIC değerleri incelendiğinde, en küçük değer 7.894606 olduğundan model için AR(1) sürecinin uygun olduğuna karar verilir. Buna göre verilere ait model; AR(1) modeli $x_t = c + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \dots, T$ olarak tanımlanabilir.

6.2.2 Klasik yöntemle parametre tahmini

Bu kısımda, ϕ parametresinin klasik yöntemlerle tahmine ilişkin sonuçlar verilecektir.

AR(1) modeli $x_t = c + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \dots, T$ olmak üzere;

Çizelge 6.7 AR(1) Model Tablosu

Final Estimates of Parameters				
	<i>Katsayılar</i>	<i>Standart Hata</i>	<i>t-değeri</i>	<i>p-değeri</i>
AR(1)	0.7563	0.0723	10.6	0.000
Constant	946.1	98.9	9.56	0.000
Mean	4045	423		

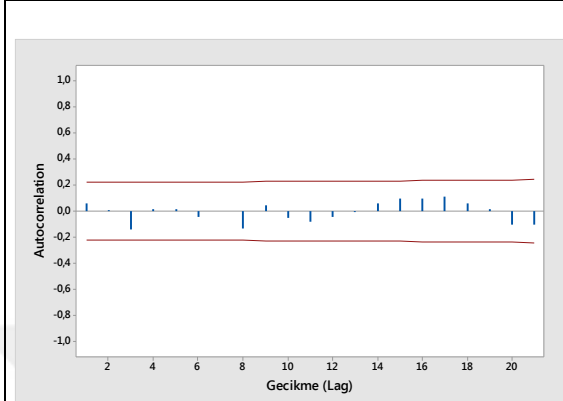
Uyarlanmış Box-Pierce(Ljung-Box) Chi-Square İstatistiği				
<i>Lag</i>	<i>12</i>	<i>24</i>	<i>36</i>	<i>48</i>
Chi-Square	5.19	12.23	27.49	31.36
df	10	22	34	46
p-değeri	0.878	0.952	0.777	0.951

olmak üzere model;

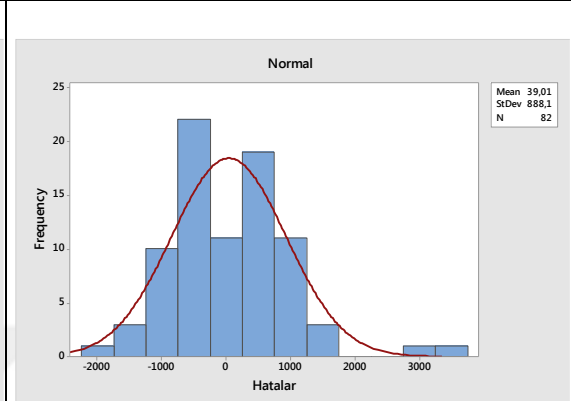
$$x_t = 946.1 + 0.7563x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.2)$$

olarak tahmin edilmiştir. Buna göre, AR(1) modeline ait ϕ parametresinin en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen tahmin değeri $\hat{\phi}_{MLE} = 0.7563$ dır.

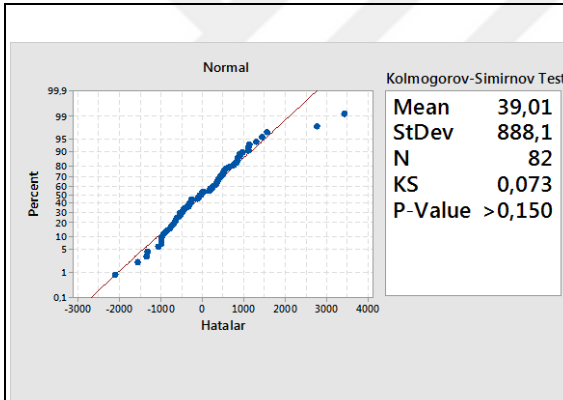
Bölüm 4.2’de bahsedildiği üzere, bir serinin otoregresif süreç olması için hataların birbirinden bağımsız, beyaz gürültü süreci olması ($e_t \sim WN(0, \sigma^2)$) ve e_t ler ile x_t lerin birbirinden bağımsız olması gerekmektedir.



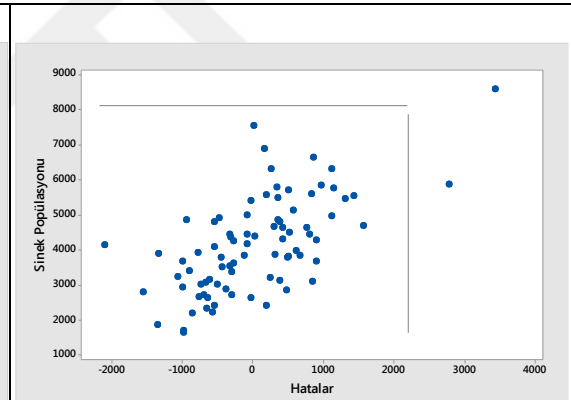
Şekil 6.4 Hatalara Ait Otokorelasyon Grafiği (ACF)



Şekil 6.5 Hatalara Ait Histogram Grafiği



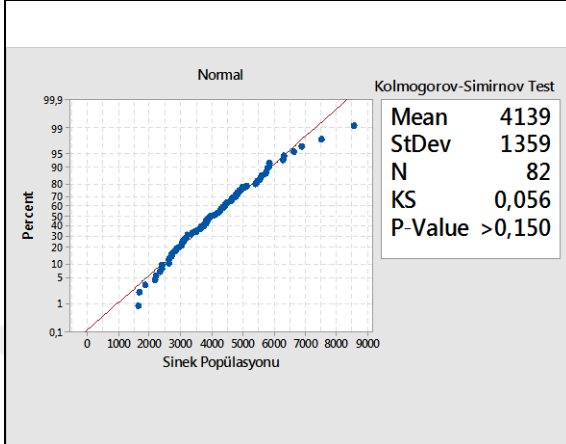
Şekil 6.6 Hatalara Ait Kolmogorov-Smirnov Testi



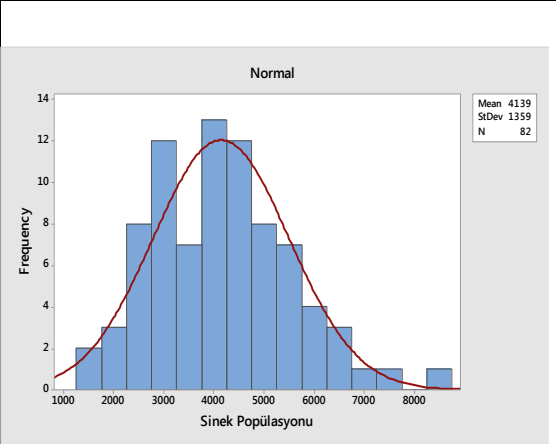
Şekil 6.7 Hatalar İle Seri Arasındaki Yayılım Grafiği

Şekil 6.4, 6.5, 6.6 ve 6.7 birlikte değerlendirildiğinde Kolmogorov-Smirnov testi sonucunda hataların Normal dağılımlı ve histogram grafiği eşliğinde sıfır etrafında yaklaşık simetrik bir dağılım gösterdiği, hatalara ait otokorelasyon grafiğinden otokorelasyonlarının %95 lik güven düzeyi aralığında kaldığı ve hataların birbirlerinden bağımsız olduğu, korelasyon grafiğinden ise e_t ler ile x_t lerin birbirinden bağımsız olduğu, aralarında bir korelasyonun olmadığı görülmektedir.

Ayrıca örneklem serisinin Normal dağılıp dağılmadığı test edildiğinde aşağıdaki şekil 6.8 ve 6.9'dan görüleceği üzere; $x_t \sim N(4139, 1359^2)$ olarak Normal dağılmaktadır.



Şekil 6.8 Seriyeye Ait Kolmogorov-Smirnov Testi



Şekil 6.9 Seriyeye Ait Histogram Grafiği

6.2.3 Bayesci sonuç çıkarımı

Çalışmanın bu bölümünde, kullanılan örneklem serisinin dağılımına uygun farklı önseller kullanarak $\hat{\phi}$ tahmin edilip bu önseller sonuç açısından karşılaştırılacaktır.

6.2.3.1 Jeffreys önsel dağılımı ile bayesci sonuç çıkarımı

Bir önceki bölümde Jeffreys önseli kullanıldığında parametreye ilişkin sonsal dağılım,

$$\phi | \sigma, x_{1:T} \sim N \left(\frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} \right) \quad (6.3)$$

olarak elde edilmiştir. ϕ 'nın Bayes tahmin edicisi sonsal dağılımın beklenen değeri olduğundan $y_t = x_t - \hat{\mu}_{x_t}$ dönüşümü altında $\sum y_t y_{t-1}$ ve $\sum y_{t-1}^2$ olmak üzere Bayes tahmini:

$$\hat{\phi}_{Jeffreys} = 0.7658 \quad (6.4)$$

olarak elde edilir.

6.2.3.2 Eşlenik önsel dağılım ile bayesci sonuç çıkarımı

Bir önceki bölümde eşlenik Normal önsel dağılım kullanıldığında parametreye ilişkin sonsal dağılım σ , σ_ϕ , d bilindiğinde;

$$\phi | \sigma, x_{1:T} \sim N \left(\frac{\frac{\sigma_\phi^2}{\sigma^2 + \sigma_\phi^2} \times \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_\phi^2} \times d, \left(\frac{1}{\sigma_\phi^2} + \frac{T}{\sigma^2} \right)^{-1} \right) \quad (6.5)$$

biçiminde elde edilmiştir. ϕ 'nın Bayes tahmin edicisi sonsal dağılımın beklenen değeri olduğundan $y_t = x_t - \hat{\mu}_{x_t}$ dönüşümü altında, $\sum y_t y_{t-1}$ ve $\sum y_{t-1}^2$ olmak üzere Bayes tahmini;

$$\hat{\phi}_{Eşlenik} = 0.7566 \quad (6.6)$$

olarak elde edilir.

6.2.3.3 Kırılmış normal önsel dağılım ile bayesci sonuç çıkarımı

Bir önceki bölümde, ϕ parametresi için önsel dağılım olarak kırılmış Normal dağılım alındığında parametreye ait sonsal dağılımın;

$$f(\phi | x_1, \dots, x_T, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\phi^2, d) = \frac{\sqrt{f} \exp(-\frac{e}{2}(\phi - \frac{e}{f})^2)}{\sqrt{2\pi}(\varphi(\sqrt{f}(1 - \frac{e}{f})) - \varphi(\sqrt{f}(-1 - \frac{e}{f})))} \quad (6.7)$$

olduğu gösterilmiştir. Burada,

$$e = \frac{\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}}{\sigma_\varepsilon^2} + \frac{d}{\sigma_\phi^2}$$

ve

$$f = \frac{\sum_{t=2}^T x_{t-1}^2}{\sigma_\varepsilon^2} + \frac{1}{\sigma_\phi^2}$$

dır. O halde otoregresif AR(1) modeline ait ϕ parametresine ilişkin Bayes tahmini,

$$\phi_{KırpılmışNormal} = \mu_1 + \sigma_1 \times \frac{\phi(\frac{-1-\mu_1}{\sigma_1}) - \phi(\frac{1-\mu_1}{\sigma_1})}{\varphi(\frac{1-\mu_1}{\sigma_1}) - \varphi(\frac{-1-\mu_1}{\sigma_1})} = 0,7560$$

$$*\mu_1 = \frac{e}{f} \text{ ve } \sigma_1 = \sqrt{f^{-1}} \quad (6.8)$$

$$\hat{\phi}_{KırpılmışNormal} = 0.7560 \quad (6.9)$$

olarak elde edilir.

Buna göre, AR(1) modeli parametresi için farklı önseller alınarak elde edilen Bayes tahminleri ve Bayesci güvenilir aralıklar çizelge 6.8 ile verilmiştir.

Çizelge 6.8, ϕ 'nın Bayesci Yöntemle Tahminleri ve En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi

Önsel	ϕ Tahmini	95% HPDR
Jeffreys' önseli	0.7658	[0.7150, 0.8166]
Eşlenik(Conjugate) önsel	0.7566	[0.7131, 0.8001]
Kırpılmış Normal önseli	0.7560	[0.7180, 0.7940]

7. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bayesci yaklaşım, temeli Bayes Teoremine dayanan ve bu teoreme göre yapılandırılmış istatistiksel bir yaklaşımdır. Klasik yaklaşımdan farklı olarak hiçbir varsayıma ihtiyaç duymayan bu yaklaşımda parametreler birer rasgele değişken olarak düşünülmektedir. Bu doğrultuda parametrelere ait bir dağılımın varlığı söz konusudur. Önsel dağılım olarak bilinen bu dağılım ile örneklem verisi birleştirilerek sonsal dağılım elde edilir. Bayesci yaklaşımda sonuç çıkarımları sonsal dağılım kullanılarak yapılır. Dolayısıyla sonsal dağılımın elde edilmesinde araştırmacının bilgisini ve tecrübesini temsil eden önsel dağılımın seçimi çok hassas ve önemli bir konudur.

Bayesci yöntem ile sonuç çıkarımlarında diğer önemli bir konu ise güven aralığıdır. Parametrenin belirli değerler arasında yer aldığı bilgisi ilgilenilen kitleyi tanımada, bilgi sahibi olmada önemli bir araçtır. Bu noktada önemli bir husus olarak Bayesci yaklaşımda, Klasik yaklaşımda “güven aralığı” tanımlaması yerine “güvenilir aralık”, diğer bir deyişle “ En Yüksek Sonsal Yoğunluk Bölgesi” (HPDR) tanımı kullanılır. Yorumlamada da farklı olarak; örneğin sonsal dağılımın ortalaması için %95’lik bir güven aralığından bahsediliyorsa, ilgili aralığın sonsal dağılımın ortalamasını içermesi olasılığı %95’tir biçiminde yorum yapılır.

Bayesci yaklaşıma konu olan birçok istatistiksel analiz yöntemi vardır. Bunlardan biri de zaman serileri analizidir. Bu yöntem; belirli bir dönem (zaman) içinde gözlemlenen veri dizisine uygun modeller sunarak sonuç çıkarımı sağlamaktadır. Bu modeller arasında en yaygın kullanılan ve bilinen otoregresif (AR) zaman serileridir. Birçok iktisadi veri AR zaman serisi olarak modellenir.

Bu çalışmada, ilk olarak parametre tahmin yöntemlerine değinilmiştir. Bu tahmin yöntemlerinde biri olan Bayesci Yaklaşım ele alınarak önsel dağılımlar ve bu dağılımlarla birlikte elde edilen sonsal dağılım hakkında bilgiler verilmiştir. Önsel dağılımın seçiminin önemi vurgulanarak bilgi içeren ve bilgi içermeyen önsel dağılımlara örnekler verilmiş ve bu dağılımlar teorik olarak açıklanarak sonsal dağılımın elde edilmesinde

kullanılan simülasyon tekniklerine yer verilmiş, sonsal dağılım parametresine ilişkin en yüksek sonsal yoğunluk bölgesinin elde edilmesi teorik olarak açıklanmıştır.

Daha sonra, otoregresif AR(1) modelinin genel model yapısı ve modelin durağanlığı ile ilgili klasik yöntemler altında genel bilgilere yer verilmiştir. Ayrıca çalışmada, Bayesci yöntemde önsel dağılım olarak seçilen kırılmış normal dağılımı daha iyi kavramak amacıyla dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, birikimli dağılım fonksiyonu, beklenen değer ve varyansının hesaplanması teorik olarak açıklanmıştır.

Son olarak AR(1) modellerinden Matlab R2015a programı yardımıyla farklı örneklem genişliklerinde sayılar üretilmiş, üç farklı önsel dağılım yardımıyla elde edilen sonsal dağılımın ortalamasına ilişkin Bayes tahminleri ve RMSE değerleri elde edilmiş, bunlara ilişkin güvenilir aralıklar (HPDR) hesaplanarak önsel dağılımların performansı test edilmiştir. Simülasyon çalışmasının verimliliğini görmek adına böcek popülasyon dinamikleri üzerine uzmanlaşmış Avustralyalı entomolog Alexander John Nicholson' ın 1950 yılında koyun sinekleri (*Lucilia cuprina*) üzerine yapmış olduğu deneyin gözlemleri gerçek veri çalışmasında kullanılmıştır. Buna göre; 82 adet veri için öncelikle klasik yöntemlerle AR(1) zaman serisi analizi yapılarak parametre tahmini yapılmış, daha sonra Bayesci yaklaşım ile Jeffreys, Eşlenik Önsel ve Kırılmış Normal Önsel Dağılımı kullanılarak bulunan sonsal dağılımların beklenen değerleri Bayes tahmin edicisi olmak üzere modele ilişkin parametre tahmin değerleri ve güvenilir aralıkları hesaplanmıştır.

Çalışmada görüleceği üzere; otoregresif AR(1) zaman serilerinde parametre tahmini yapılırken klasik yöntemlerin hesaplamada kolaylık sağladığı ancak başlangıç varsayımlarına ihtiyaç duyması sebebiyle bu varsayımları sağlatmanın kolay olmadığı görülmüştür. Bayesci yaklaşımda başlangıç varsayımlarına ihtiyaç duyulmadan analiz yapılması pratiklik sağlasa da önsel dağılımların seçimi sonrasında parametre tahmini için sonsal dağılıma ulaşmak birçok matematiksel zorluğu beraberinde getirmektedir.

AR(1) modeline Bayesci yaklaşım için üç farklı önsel dağılım seçilmiş, bunlardan Eşlenik(Conjugate) Önsel eşlenik önsel dağılıma, Jeffreys bilgi içermeyen önsel dağılıma ve Kırılmış Normal Önsel, bilgi içeren önsel dağılıma örnek teşkil etmiştir. Simülasyon

alışmasında, üç farklı önselin önerilmesiyle birlikte sonsal dağılıma ilişkin parametre tahmin değeri ve güvenilir aralıkları değerlendirildiğinde Kırpılmış Normal Önsel dağılımın diğerlerine nazaran daha iyi sonuçlar verdiği, özellikle parametreye ilişkin daha dar güvenilir aralıklar sunduğu gözlemlenmiştir. Gerçek veri çalışması, simülasyon çalışmasını teyit ederek diğer iki önsel dağılımdan farklı olarak Kırpılmış Normal Önsel Dağılım ile elde edilen sonsal dağılımın Bayes tahmin değeri en çok olabilirlik tahmin edici değerine daha yakın sonuç vermiş ve daha dar güvenilir aralık ortaya koymuştur.

Bilgi içeren önsel dağılımların kullanılması parametrenin gerçek değerine daha yakın sonuçlar vermesini sağlayacaktır. Buradan yola çıkarak, Eşlenik (Conjugate) Normal Önsel ile Kırpılmış Normal Önsel Dağılımın teorik temelinde benzer olması gerek simülasyon gerekse gerçek veri çalışmasında sonuçların birbirine yakın olmasına sebep olmuştur. Jeffreys Önsel Dağılımı, parametre hakkında önsel bir bilgi içermediğinden sonsal dağılımın parametresine ilişkin Bayes tahmini gerçek değerinden uzaklaşmıştır.

KAYNAKLAR

- Akdi, Y. 2005. Matematiksel İstatistiğe Giriş. Bıçaklar Kitabevi, 404, Ankara.
- Akdi, Y. 2012. Zaman Serileri Analizi (Birim Kökler ve Kointegrasyon). Gazi Kitabevi, 377, Ankara.
- Avcı, E. 2012. Bayesci Sağkalım Analizi ve Meme Kanseri Verileri Üzerine Bir Uygulama, Doktora Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Berger, O.J. ve Yang, R. 1994. Noninformative Priors and Bayesian Testing for the AR(1) Model, Cambridge University Press, 461-482.
- Demirci, M. 2016. Bayes Teoremi ve Teoremin İşletme Alanında Uygulamaları, The Journal of Academic Social Science Studies, 43, 439-462.
- Erkan, G. 2019. Klasik ve Bayesci Yapısal Eşitlik Modellerinde Parametre Tahminlerinin Karşılaştırılması: Sıralı Kategorik Verilerle Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Gasım, N. 2013. Bayesci Model ile Doğrusal Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması Üzerine Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir.
- Güner, A. 2014. Bayesci Yaklaşımda Eşlenik Aileleri Önseli ile Jeffreys Önselinin Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Hamilton, J. 1994. Time Series Analysis. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Johnson, N. , Kotz, S. & Balakrishnan, N. 1970. Continuous Univariate Distributions. New Jersey, United States of America: John Wiley and Sons.
- Jordan, M.I. 2010. Jeffreys Priors and Reference Priors, Bayesian Modeling and Inference.
- Jordan, M.I. 2010. The Conjugate Prior For The Normal Distribution, Bayesian Modeling and Inference.
- Karadağ, Ö. 2011. Bayesci Hiyerarşik Modeller, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Karakani, H. M. Niekerk, J. V. and Staden, P. V. 2016. Bayesian Analysis of AR(1) Model. University of Pretoria, South Africa.
- Öztürk, F. 2006. Websitesi: <http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/ist102/Ders10/Orneklem.pdf> (Erişim tarihi: 04.01.2022)
- Öztürk, F. 2006. Websitesi: <http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/ist202/Ders6/Ders6.pdf> (Erişim tarihi: 04.01.2022)

- Öztürk.F.2006.Websitesi:<http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/ist101/Ders5/OlasilikUzayi.pdf> (Erişim tarihi: 13.02.2021)
- Öztürk, F. , Özbek, L. 2015. Matematiksel Modelleme ve Simülasyon. Pigeon Yayıncılık, 356, Ankara.
- Öztürk Z. , Cengiz M.A. 2017. Bayesci Genelleştirilmiş Lineer Karma Modellerde Önsel Seçimleri ve Karşılaştırılması, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 3(21), 999-1010
- Tektaş, D. 2006. İki Düzeyli Lojit ve Probit Modellerde Parametre Tahminlerine Bayesci Bir Yaklaşım, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Wei, William W.S. 1989. Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods, United States of America



EKLER

EK 1 AR(1) modelinden sayı üretip Jeffreys Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı

EK 2 AR(1) modelinden sayı üretip Eşlenik Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı

EK 3 AR(1) modelinden sayı üretip Kırpılmış Normal Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı

EK 1 AR(1) modelinden sayı üretip Jeffreys Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı

```
clc
clear all
syms n;
n=30;
x0=3; % X(0) başlangıç değeri
teta=0.75;

simsay = 2000; % Simülasyon Sayısı
Q = zeros(1,simsay);
for s=1:simsay

    hata=random('Normal',0,1,n,1); %hatalardan N(0,1) sayı üretme
    y(1,1)=teta*x0+hata(1,1);
    for i=2:n
        y(1,i)=teta*y(1,i-1)+hata(i,1); % X(t)= Q*X(t-1)+e(t) lerin
hesaplama ve sayı üretme
    end
    t=y' % Üretilen X(t) lerin transpozu
    for j=2:n
        TA(1,j-1)=(t(j,1)*t(j-1,1)); % X(j)*X(j-1) ler - pay
        TB(1,j-1)=t(j-1,1)^2; % X(j-1)^2 ler - payda
    end
    A=sum(TA) % Toplam X(j)*X(j-1) - pay
    B=sum(TB) % Toplam X(j-1)^2 - payda
    Q(1,s)=A/B % Jeffreys Önsel ile Tetanın Bayes Tahmin Edicisi

end

mteta = mean(Q)
mse =(1/(simsay-1))*sum((Q-teta).^2);
rmse = sqrt(mse)
cil=mteta-1.96*rmse
ciu=mteta+1.96*rmse
sayac=0;
for s=1:simsay
    if cil<Q(1,s) && Q(1,s)<ciu
        sayac=sayac+1;
    end
end
pp=(sayac/simsay)*100
```

EK 2 AR(1) modelinden sayı üretip Eşlenik Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı

```
clc
clear all
syms n;
n=30;
x0=3; % X(0) başlangıç değeri
teta=0.75;
v1=1;
v2=1;
d=0;

simsay = 2000; % Simülasyon Sayısı
Q = zeros(1,simsay);
for s=1:simsay

    hata=random('Normal',0,1,n,1); %hatalardan N(0,1) sayı üretme
    y(1,1)=teta*x0+hata(1,1);
    for i=2:n
        y(1,i)=teta*y(1,i-1)+hata(i,1); % X(t)= Q*X(t-1)+e(t) lerin
        hesaplama ve sayı üretme
    end
    t=y' % Üretilen X(t) lerin transpozu
    for j=2:n
        TA(1,j-1)=(t(j,1)*t(j-1,1)); % X(j)*X(j-1) ler - pay
        TB(1,j-1)=t(j-1,1)^2; % X(j-1)^2 ler - payda
    end
    A=sum(TA) % Toplam X(j)*X(j-1) - pay
    B=sum(TB) % Toplam X(j-1)^2 - payda
    Q(1,s)=(v2/((v1/n)+v2))*(A/B)+(v1/((v1/n)+v2))*d % Eşlenik Önsel
    İle Tetanın Bayes Tahmin Edicisi

end

mteta = mean(Q)
mse = (1/(simsay-1))*sum((Q-teta).^2);
rmse = sqrt(mse)
cil=mteta-1.96*rmse
ciu=mteta+1.96*rmse
sayac=0;
for s=1:simsay
    if cil<Q(1,s) && Q(1,s)<ciu
        sayac=sayac+1;
    end
end
pp=(sayac/simsay)*100
```

EK 3 AR(1) modelinden sayı üretip Kırpılmış Normal Önsel Dağılımı Kullanılarak Elde Edilen Sonsal Dağılımın Bayes Tahminini Bulan ve İstenilen Sayıda Tekrarlayan MATLAB Programı

```
clc
clear all
syms n;
n=30;
x0=3; % X(0) başlangıç değeri
teta=0.75;

simsay = 2000; % Simülasyon Sayısı
Q = zeros(1,simsay);
for s=1:simsay

    hata=random('Normal',0,1,n,1); %hatalardan N(0,1) sayı üretme
    y(1,1)=teta*x0+hata(1,1);
    for i=2:n
        y(1,i)=teta*y(1,i-1)+hata(i,1); % X(t)= Q*X(t-1)+e(t) lerin
hesaplama ve sayı üretme
    end
    t=y' % Üretilen X(t) lerin transpozu
    for j=2:n
        TE(1,j-1)=(t(j,1)*t(j-1,1)); % X(j)*X(j-1) ler - pay
        TF(1,j-1)=t(j-1,1)^2; % X(j-1)^2 ler - payda
    end
    E=sum(TE)+1 % Toplam X(j)*X(j-1) - pay
    F=sum(TF)+1 % Toplam X(j-1)^2 - payda
    M1=E/F
    Z1=sqrt(1/F)
    pay=normpdf((-1-M1)/Z1,0,1)-normpdf((1-M1)/Z1,0,1)
    payda=normcdf((1-M1)/Z1,0,1)-normcdf((-1-M1)/Z1,0,1)

    Q(1,s)=M1+Z1*(pay/payda) % Kırpılmış Önsel Önsel ile Tetanın Bayes
Tahmin Edicisi

end
mteta = mean(Q)
mse =(1/(simsay-1))*sum((Q-teta).^2);
rmse = sqrt(mse)
cil=mteta-1.96*rmse
ciu=mteta+1.96*rmse
sayac=0;
for s=1:simsay
    if cil<Q(1,s) && Q(1,s)<ciu
        sayac=sayac+1;
    end
end
pp=(sayac/simsay)*100
```