

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SAYMA SÜREÇLERİNE İLİŞKİN TREND TESTLERİ VE
KARŞILAŞTIRILMALARI**

Mustafa Hilmi PEKALP

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2013

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SAYMA SÜREÇLERİNE İLİŞKİN TREND TESTLERİ VE KARŞILAŞTIRILMALARI

Mustafa Hilmi PEKALP

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halil AYDOĞDU

Sayma süreçlerinden gelen veri kümesi yapısında sistematik değişimler bulunuyorsa model olarak durağan sayma süreçleri kullanılamaz. Bu durum, veri kümesi yapısında trendin olduğu ve ardışık olaylar arası geçen zamanların dağılımının aynı olmadığı anlamına gelmektedir. İstatistiksel olarak trendin ortaya çıkarılması önemli bir problemdir. Çalışmada trend testlerinin karşılaştırılması değişik sayma süreçleri üzerine yapılan simülasyon çalışması ile değerlendirilmiştir.

Eylül 2013, 112 sayfa

Anahtar Kelimeler: Trend, Trend testleri, Geometrik süreç, Homojen olmayan Poisson süreci.

ABSTRACT

Master Thesis

TREND TESTS FOR THE COUNTING PROCESSES AND THEIR COMPARISONS

Mustafa Hilmi PEKALP

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

If there are systematic changes in the pattern of data set arising from the counting processes, stationary counting processes cannot be used as a model. This situation means that there is a trend in the data set and successive interarrival times are not identically distributed. Statistical determination of the trend is an important problem. Comparison of trend tests are evaluated and compared by the simulation studies under various distributions such as exponential, gamma, weibull etc.

September 2013, 112 pages

Key Words: Trend, Trend tests, Geometric process, Nonhomogeneous Poisson process.

TEŞEKKÜR

“Sayma Süreçlerine İlişkin Trend Testleri ve Karşılaştırılmaları” ile ilgili yaptığım bu çalışmada bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın her aşamasında önerileriyle beni yönlendiren, her zaman ilgisini ve alakasını gördüğüm danışman hocam Sayın Doç. Dr. Halil AYDOĞDU’ya (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamın çeşitli aşamalarında yardımlarını gördüğüm hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT’a (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) ve Sayın Mahmut KARA’ ya teşekkür ederim.

İstatistik bilimini bana sevdiren ve öğrenmemde büyük katkıları olan Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü’ndeki hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme ve arkadaşlarıma bana karşı duydukları sarsılmaz inançlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa Hilmi PEKALP

Ankara, Eylül 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAMALAR	3
2.1 Rasgele Değişken ve Dağılım Fonksiyonu.....	3
2.2 Rasgele Değişken Dizilerinde Yakınsamalar	4
2.3 Güçlü Büyük Sayılar Kanunu.....	5
2.4 Lindeberg-Levy Merkezi Limit Teoremi	5
2.5 Asimptotik Normallik	6
2.6 Bazı Önemli Fonksiyonlar	6
2.6.1 $o(h)$ gösterimi.....	6
2.6.2 Hazard (Bozulma Oran) fonksiyonu	6
2.7 Bazı Önemli Dağılımlar	7
2.7.1 Üstel dağılım	7
2.7.2 Gamma dağılımı	8
2.7.3 Weibull dağılımı	8
2.7.4 Normal dağılım.....	9
2.7.5 Lognormal dağılım.....	9
3. STOKASTİK SÜREÇLER	10
3.1 Bazı Klasik Stokastik Süreçler.....	10
3.2 Sayma Süreçleri.....	12
3.3 Bazı Stokastik Süreçler ve Özellikleri	14
3.3.1 Ampirik süreç	14
3.3.2 Rasgele yürüyüş süreci	16
3.3.3 Brown hareketi.....	16
3.3.3.1 Uyum iyiliği testlerinin asimptotik açıdan değerlendirilmesi	21

3.3.3.2 Donsker teoremi	22
3.3.4 Homojen Poisson süreci.....	23
3.3.4.1 $N(t)$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_{N(t)}$ rasgele değişkenlerinin koşullu dağılımı ..	23
3.3.5 Homojen olmayan Poisson süreci	24
3.3.5.1 Homojen olmayan bir Poisson sürecinde olaylar arası geçen zamanların bağımsız ve aynı dağılımlı olup olmadığının incelenmesi.....	25
3.3.5.2 $N(t)$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_{N(t)}$ rasgele değişkenlerinin koşullu dağılımı ..	29
3.3.5.3 Şiddet fonksiyonu sınırlı iken varış zamanları.....	29
3.3.5.4 Homojen olmayan bir Poisson sürecinin bir Poisson sürecine dönüştürülmesi	30
3.3.6 Yenileme süreci	31
3.3.7 Geometrik süreç	32
3.3.7.1 Geometrik süreçte olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı	32
3.3.7.2 Sayma sürecinden gelen veri setinin geometrik sürece uygunluğunun incelenmesi	32
3.3.7.3 Sayma sürecinden gelen veri setinin bağımsız ve aynı dağılımlı olup olmadığının incelenmesi.....	33
4. TREND ANALİZİ.....	35
4.1 Grafikselsel Yöntemler.....	36
4.1.1 Birikimli olay sayısının, birikimli zamana göre grafiği.....	36
4.1.2 Ardışık zaman periyotlarında SBO tahminine dayalı grafik.....	38
4.1.2.1 Fisher kriteri.....	40
4.1.3 Nelson-Aalen grafiği	41
4.1.4 Testteki toplam zaman grafiği	44
4.2 Trend Testleri.....	46
4.2.1 Monoton trend için testler	47
4.2.1.1 Laplace testi	47
4.2.1.2 Military Handbook testi	47
4.2.1.3 Mann testi	48
4.2.1.4 Lewis-Robinson testi	49
4.2.2 Monoton olmayan trend için testler	49
4.2.2.1 V_1, V_2, V_3 testleri	49

4.2.2.2 Genelleştirilmiş Anderson Darling testi	50
5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	52
5.1 1.Tip Hata Çalışması.....	52
5.2 Güç Karşılaştırmaları.....	59
6. SONUÇLAR	106
KAYNAKLAR	110
ÖZGEÇMİŞ.....	112

SİMGELER DİZİNİ

$F(.)$	Yaşam fonksiyonu
$h \ t$	Bozulma oran fonksiyonu
$I(.)$	Gösterge fonksiyonu
$M \ t$	Sayma sürecinin ortalama değer fonksiyonu
$N(t)$	$(0, t]$ zaman aralığındaki olayların sayısı
S_n	n . olayın gerçekleşme zamanı
SBO	Sürecin bozulma oranı
X_n	$n - 1$. ve n . olaylar arası geçen zaman
$\lambda \ t$	Şiddet fonksiyonu
$\Gamma(.)$	Gamma fonksiyonu
$>_{st}$	Stokastik olarak büyük olma
$<_{st}$	Stokastik olarak küçük olma

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 USS Halfbeak denizaltısının 3 numaralı itici güç motoru için birikimli bozulma sayısının birikimli zamana göre grafiği.....	37
Şekil 4.2 Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin SBO tahminine dayalı grafiği.....	40
Şekil 4.3 Nelson-Aalen grafiği.....	44
Şekil 4.4 Testteki toplam zaman grafiği	46
Şekil 5.1 Homojen Poisson süreci.....	53
Şekil 5.2 Yenileme süreci gamma dağılımı	56
Şekil 5.3 Yenileme süreci normal dağılım.....	56
Şekil 5.4 Yenileme süreci lognormal dağılım.....	57
Şekil 5.5 Yenileme süreci kesilmiş normal dağılım.....	58
Şekil 5.6 Yenileme süreci Weibull dağılımı	59
Şekil 5.7 Gamma dağılımının şekil parametresi $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ ve 1.9 ile yenileme sürecinin simülasyonu.....	60
Şekil 5.8 Lognormal dağılımdan elde edilen yenileme sürecine ilişkin simülasyon çalışması	61
Şekil 5.9 Weibull dağılımının şekil parametresi $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ ve 1.9 ile yenileme sürecinin simülasyonu.....	62
Şekil 5.10 Üstel(1.5) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	64
Şekil 5.11 Gamma (0.5,3) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	66
Şekil 5.12 Gamma (1.5,3) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	68
Şekil 5.13 Gamma (3.4,3) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	70
Şekil 5.14 Gamma (3.6,3) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	72
Şekil 5.15 Normal (1,1/16) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	74
Şekil 5.16 Normal (5,1.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	76

Şekil 5.17 Lognormal (1,0.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	78
Şekil 5.18 Lognormal (1,2) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	80
Şekil 5.19 Kesilmiş Normal (4,2) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	82
Şekil 5.20 Weibull (1,0.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	84
Şekil 5.21 Weibull (1,1.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	86
Şekil 5.22 Weibull (1,3.4) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	88
Şekil 5.23 Weibull (1,3.6) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması	90
Şekil 5.24 Kuvvet yasası monoton şiddet fonksiyonu ile simülasyon çalışması	93
Şekil 5.25 Belli bir periyot $\beta = 1.5$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trende ilişkin simülasyon çalışması	94
Şekil 5.26 Belli bir periyot $\beta = 1.3$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trende ilişkin simülasyon çalışması	95
Şekil 5.27 Belli bir periyot $\beta = 1.1$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trende ilişkin simülasyon çalışması	96
Şekil 5.28 Belli bir periyot $\beta = 1.01$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trende ilişkin simülasyon çalışması	97
Şekil 5.29 Belli bir periyot $\beta = 0.99$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trende ilişkin simülasyon çalışması	98
Şekil 5.30 Belli bir periyot $\beta = 0.9$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trende ilişkin simülasyon çalışması	99
Şekil 5.31 Belli bir periyot $\beta = 0.7$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trende ilişkin simülasyon çalışması	100
Şekil 5.32 Belli bir periyot $\beta = 0.5$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trende ilişkin simülasyon çalışması	101
Şekil 5.33 Monoton olmayan kuvvet trend	102
Şekil 5.34 Monoton olmayan kuvvet trend	103
Şekil 5.35 Monoton olmayan kuvvet trend	104

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 USS Halfbeak denizaltısının 3 numaralı itici güç motoru için birikimli bozulma zamanları	36
Çizelge 4.2 Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin ardışık bozulmalar arası geçen zamanları	39
Çizelge 4.3 Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sistemi veri seti için bozulmaların sayısı ve tahmin edilen λt değerleri	39
Çizelge 4.4 Fisher kriteri kritik değer tablosu.....	41
Çizelge 4.5 Valf-Kayışı yenilemeleri.....	42
Çizelge 4.6 Testteki toplam zaman grafiği noktaları	45

1. GİRİŞ

Zamanın bir fonksiyonu olarak gerçekleşen olayların sayısını sayan bir sürece sayma süreci denilmektedir. Bu sayma sürecine göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zamanların oluşturduğu rasgele değişken dizisi sayma sürecini tek olarak belirler. Örnek olarak, olaylar arası geçen zamanlar bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyor ise bu sayma sürecinin modellenmesinde yenileme süreci kullanılabilir (Karlin 1975). Ancak uygulamada ortaya çıkan birçok bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenilirlik teorisindeki başka analizlerde sayma sürecinden gelen veri kümesi sistematik değişim gösteren rasgele değişkenlerden oluşur. Sistematik değişim, sayma sürecinden gelen veri kümesi yapısında trend olduğunu ve bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanların dağılımının aynı olmadığını ifade eder. Bu tür durumlarda model olarak homojen olmayan bir Poisson süreci ya da doğrudan stokastik monoton bir sayma süreci düşünülmelidir.

Stokastik olarak modelleme yapmak için ilk olarak sayma sürecinden gelen veri kümesi yapısında bir trendin varlığının araştırılması gerekir. Trendin varlığı durumunda bu trend uygulamalarda karşımıza çoğunlukla monoton olarak çıkmaktadır. Monoton bir trend aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sayma sürecinden gelen bir veri kümesi olsun. Burada $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'ler bu sayma sürecine göre gerçekleşen ilk n olay için olaylar arası geçen zamanları gösterir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olmak üzere $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $i < j$ iken $X_i >_{st} (<_{st}) X_j$, yani her $x > 0$ için $F_{X_i}(x) < (>) F_{X_j}(x)$ olması süreçte monoton bir trendin varlığını ifade eder.

Trendin ortaya çıkarılmasında literatürde birçok trend testi vardır. Bu testlerden hangisinin kullanılacağına karar verilmesi önemli bir problemdir.

Çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlar üzerinde durulmakta, rasgele değişken, dağılım fonksiyonu, stokastik artan veya azalan olma, rasgele değişken dizilerinde yakınsamalar, güçlü büyük sayılar kanunu, Lindeberg-Levy merkezi limit teoremi, asimptotik normallik ve bazı önemli fonksiyonlar ile dağılımlar hatırlatılmaktadır.

Üçüncü bölümde, stokastik süreç tanımı yapılarak, stokastik süreçlerle ilgili temel kavramlar verilip çalışmada sözü geçen bazı stokastik süreçler ile özellikleri özetlenmektedir.

Dördüncü bölümde, trendin tanımı yapıp, sayma süreçlerinden gelen bir veri kümesinde bir trend olup olmadığını görsel olarak inceleyen bazı grafiksel yöntemler verilmektedir. Son olarak literatürde bulunan, veri içerisindeki trendin istatistiksel olarak anlamlılığının testi için önerilen trend testleri tanıtılmaktadır.

Beşinci bölümde, sayma süreçlerinden gelen veri kümesindeki trendi ortaya çıkarmak için kullanılan literatürdeki trend testlerinin simülasyon ile karşılaştırılmaları yapılmaktadır.

Altıncı bölümde ise yapılan simülasyon çalışmasının değerlendirilmesi verilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAMALAR

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlar üzerinde durulmaktadır. Rasgele değişken, dağılım fonksiyonu, rasgele değişken dizilerinde yakınsamalar, güçlü büyük sayılar kanunu, Lindeberg-Levy merkezi limit teoremi, asimptotik normallik ve çalışma içinde kullanılacak bazı önemli fonksiyonlar ile dağılımlar hatırlatılmaktadır.

2.1 Rasgele Değişken ve Dağılım Fonksiyonu

Tanım (2.1.1) : (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

fonksiyonu, her $a \in \mathbb{R}$ için $\{\omega: X(\omega) \leq a\} \in U$ özelliğini sağlıyorsa, X fonksiyonuna bir rasgele değişken denir.

Bir rasgele değişkeninin değer kümesi $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesidir ve D_X ile gösterilir. Bu tanıma göre rasgele değişken örnek uzaya karşılık gelen Ω 'nın elemanlarını reel sayılara aktaran bir fonksiyondur.

Tanım (2.1.2) : (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve X bu uzay üzerinde tanımlı bir rasgele değişken olmak üzere

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna, X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

Dağılım fonksiyonu genellikle $F(x) = P(X \leq x)$ gösterimi ile kullanılır.

Teorem (2.1.1) : (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, X bu uzay üzerinde tanımlı bir rasgele değişken ve F , X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda

1. F azalmayan bir fonksiyon,
2. F sağdan sürekli,

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

dir.

Teorem (2.1.2) : X bir rasgele değişken ve F , X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda,

1. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $P(\{\omega : a < X \leq b\}) = F(b) - F(a)$
2. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$

dir, burada $F(a^-)$ F fonksiyonunun a noktasındaki soldan limitini göstermektedir.

Tanım (2.1.3) : X ve Y birer rasgele değişken olmak üzere her z reel sayısı için $P(X > z) \geq P(Y > z)$ eşitliği sağlanıyorsa X stokastik olarak Y 'den büyüktür ve $X \geq_{st} Y$ biçiminde gösterilir. Ayrıca $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisi her $n = 1, 2, \dots$ için $X_n \leq_{st} (\geq_{st}) X_{n+1}$ oluyorsa (X_n) stokastik artan (azalan) dizi olacaktır.

2.2 Rasgele Değişken Dizilerinde Yakınsamalar

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ve $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ birer rasgele değişken olmak üzere

$$1. \quad P(\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

oluyorsa, (X_n) dizisine hemen hemen her yerde X rasgele değişkenine yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{hhhy} X$ biçiminde gösterilir.

$$2. \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$$

oluyorsa, (X_n) dizisine X rasgele değişkenine olasılıkta yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{p} X$ biçiminde gösterilir.

3. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F ve $n = 1, 2, \dots$ için X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F_n olmak üzere, F' in sürekli olduğu x noktalarında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

oluyorsa, (X_n) dizisine X rasgele değişkenine dağılımda yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{d} X$ biçiminde gösterilir. Dağılımda yakınsamada X rasgele değişkeni X_n rasgele değişkenleri ile aynı olasılık uzayında tanımlı olmak zorunda değildir.

Rasgele değişkenlerin dizilerinde yakınsama türleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki teoremlerle ifade edilir.

Teorem (2.2.1) : (Arnold 1990)

1. $X_n \xrightarrow{hhhy} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$
2. $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$
3. c bir sabit olmak üzere $P(X = c) = 1$ iken (2)'nin tersi doğrudur, yani $X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c$.

Teorem (2.2.2) : (Arnold 1990) b bir sabit olmak üzere $X_n \xrightarrow{d} X$ ve $Y_n \xrightarrow{p} b$ olsun. Bu durumda

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + b$,
2. $X_n Y_n \xrightarrow{d} bX$,
3. $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/b$ ($b \neq 0$).

Teorem (2.2.3) : (Glivenko-Cantelli) X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F ve $n = 1, 2, \dots$ için X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F_n olmak üzere, F 'nin sürekli olduğu x noktalarında $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1$ 'dir.

2.3 Güçlü Büyük Sayılar Kanunu

X_n , sonlu ortalama μ ile bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{hhhy} \mu$ dür.

2.4 Lindeberg-Levy Merkezi Limit Teoremi

X_n , bağımsız ve ikinci momenti mevcut aynı dağılımlı (ortalaması μ , varyansı σ^2) olan rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$ ' dir. Burada $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ olarak ifade edilir.

2.5 Asimptotik Normallik

X_n rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere $\frac{X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$ olacak şekilde reel sayıların (a_n) ve yeterince büyük her n için pozitif reel sayıların (b_n) dizileri varsa X_n dizisine a_n ortalaması ve b_n^2 varyansı ile asimptotik normal denir ve $X_n \sim AN(a_n, b_n^2)$ biçiminde gösterilir. Burada a_n sayısı X_n ' in beklenen değeri ve b_n^2 sayısı X_n ' in varyansı olmayabilir. Bu sebepten dolayı a_n sayısına asimptotik ortalama ve b_n^2 sayısına asimptotik varyans denir (Serfling 1980).

2.6 Bazı Önemli Fonksiyonlar

2.6.1 $o(h)$ gösterimi

f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ ise $f(h) = o(h)$ yazılır. Yukarıdaki tanımdan, $f(h) = o(h)$ olduğunda $h \rightarrow 0$ iken $f(h)$ fonksiyonu h 'den daha hızlı sıfıra yaklaşacaktır.

$f(h) = o(h)$ ve $g(h) = o(h)$ iken $af(h) + bg(h) = o(h)$ olduğu açıktır.

2.6.2 Hazard (Bozulma Oran) fonksiyonu

X bir birimin bozulma zamanını gösteren rasgele değişken olsun. X ' in sürekli olduğu kabul edilsin. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(t) = P(X \leq t)$ ve yaşam fonksiyonu $S(t) = P(X > t) = 1 - F(t)$ dir. Böylece X rasgele değişkeni için yoğunluk fonksiyonu $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dS(t)}{dt}$ biçiminde yazılır. $P(t < X \leq t + \Delta t) = \Delta t f(t) + o(\Delta t)$ yazılabildiğinden Δt uzunluklu çok küçük bir $(t, t + \Delta t]$ zaman aralığında birimin bozulması olasılığı yaklaşık olarak $\Delta t f(t)$ dır. Benzer olarak t yaşında olan bir birimin yine aynı Δt uzunluklu çok küçük bir $(t, t + \Delta t]$ zaman aralığında bozulması olasılığı yaklaşık olarak $\frac{f(t)\Delta t}{S(t)}$ olacaktır. Bu noktadan hareketle $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$ ile tanımlanan h fonksiyonuna hazard yada bozulma

oran fonksiyonu denir. Bu fonksiyonun $F(t) < 1$ şartını sağlayan negatif olmayan t değerleri için tanımlı olduğunu hatırlatalım. Genel olarak, kabaca ifade edilecek olursa $h(t)$ t yaşında olduğu bilinen bir birimin hemen hemen anlık bozulmasının olasılığını verir. $H(t) = \int_0^t h(u)du$ ile tanımlanan H fonksiyonuna birikimli hazard fonksiyonu adı verilir. $S(t) = e^{-H(t)}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yukarıdaki tanımdan görülebileceği gibi f, F, S, h , ve H fonksiyonları matematiksel olarak denktirler, yani birbirlerini tek olarak belirlerler.

Eğer $h(t)$ fonksiyonu t' ye göre azalmayan ise X rasgele değişkeni artan bozulma oranına (IFR), t' ye göre artmayan ise X rasgele değişkeni azalan bozulma oranına (DFR), t' ye göre sabit ise X rasgele değişkeni sabit bozulma oranına (CFR) sahiptir denir.

2.7 Bazı Önemli Dağılımlar

2.7.1 Üstel dağılım

Bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0 ; \theta > 0$$

biçimde ise X rasgele değişkeni θ parametrelili üstel dağılıma sahiptir denir ve $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ ile gösterilir. Üstel dağılımda $E(X) = \theta$ ve $Var(X) = \theta^2$ dir. Ölçek parametresi θ nın her bir değeri için dağılımın şekli aynıdır. Üstel dağılıma ilişkin yaşam ve hazard fonksiyonları sırasıyla $S(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$ ve $h(t) = \frac{1}{\theta}$ 'dır. Üstel dağılımın sabit bozulma oranına (CFR) sahip olduğu açıktır.

Üstel dağılım birçok bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenilirlik teorisindeki başka analizlerde sıkça kullanılan bir dağılımdır. Bunun en büyük nedeni hafızasızlık özelliğini taşımasıdır. Hafızasızlık özelliği

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \forall s, t > 0 \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Böylece üstel dağılımlı t yaşındaki bir birimin en az $s + t$ süre çalışması olasılığı, yeni birimin en az s süre çalışması olasılığına eşit olacaktır. (2.1) ifadesi

$$\overline{F}(s+t) = \overline{F}(s)\overline{F}(t)$$

ifadesine denktir. Bilindiği üzere sürekli dağılımlar ailesi içerisinde yukarıdaki fonksiyonel denklemi, yani hafızasızlık özelliğini sağlayan tek dağılım üsteldir.

2.7.2 Gamma dağılımı

Bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}, x > 0; \alpha > 0; \theta > 0$$

biçiminde ise X rasgele değişkenine α ve θ parametrelili Gamma dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$ ile gösterilir. Gamma dağılımında $E(X) = \alpha\theta$ ve $\text{Var}(X) = \alpha\theta^2$ dir. α şekil parametresi, θ ise ölçek parametresi olarak adlandırılır. Genel olarak Gamma dağılımına ilişkin yaşam fonksiyonu kapalı bir formda yazılamaz. α tamsayı iken bu fonksiyon $S(t) = e^{-\frac{t}{\theta}} \left(1 + \frac{t}{\theta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^2 + \dots + \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha-1}\right)$ biçimindedir. Gamma dağılımının hazard fonksiyonu ise $\alpha < 1$ iken azalan bozulma oranına (DFR), $\alpha = 1$ iken sabit bozulma oranına (CFR), $\alpha > 1$ iken artan bozulma oranına (IFR) sahiptir. Ayrıca $\alpha = 1$ iken $X \sim \text{Üstel}(\theta)$ olur.

2.7.3 Weibull dağılımı

$Y \sim \text{Üstel}(\theta)$ olsun. $\alpha > 0$ için $X = Y^{1/\alpha}$ dönüşümü ile verilen X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^\alpha}{\theta}}, x > 0; \theta > 0; \alpha > 0$$

biçiminde elde edilir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir X rasgele değişkeni α ve θ parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \theta)$ ile gösterilir. Weibull dağılımında $E(X) = \theta^{1/\alpha} \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})$ ve $\text{Var}(X) = \theta^{2/\alpha} \Gamma(\frac{\alpha+2}{\alpha})$ dir. Burada α şekil parametresi, θ ise ölçek parametresidir. Weibull dağılımının yaşam fonksiyonu $S(t) = e^{-\frac{t^\alpha}{\theta}}$ ve hazard fonksiyonu $h(t) = \frac{\alpha}{\theta} t^{\alpha-1}$ şeklindedir. Weibull dağılımı $\alpha < 1$

iken azalan bozulma oranına (DFR), $\alpha = 1$ iken sabit bozulma oranına (CFR), $\alpha > 1$ iken artan bozulma oranına (IFR) sahiptir.

2.7.4 Normal dağılım

$\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma^2 > 0$ olmak üzere normal dağılıma sahip bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, x \in \mathbb{R}$$

biçimindedir. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir. X normal dağılıma sahip bir rasgele değişken ise $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ rasgele değişkeni standart normal dağılıma sahiptir. Yani, $Z \sim N(0, 1)$ olup olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

Normal dağılım tüm reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanmış olmasına rağmen bir ömür dağılımı olarak literatürde yer bulmaktadır.

2.7.5 Lognormal dağılım

$X > 0$ olmak üzere $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise X rasgele değişkeninin dağılımı μ ve σ^2 parametrelili lognormal dağılımdır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x)-\mu)^2}, x > 0$$

biçimindedir. Lognormal dağılımda $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ ve $Var(X) = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2}$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Normal ve lognormal dağılımlarının $S(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları başlangıçta artan olup $t \rightarrow \infty$ iken sifıra yakınsar ve eninde sonunda azalan bir biçime sahip olmaktadır.

3. STOKASTİK SÜREÇLER

Bu bölümde stokastik süreç tanımı yapılarak, stokastik süreçlerle ilgili temel kavramlar verilip çalışmada sözü geçen bazı stokastik süreçler ile özellikleri özetlenmektedir.

Tanım (3.1) : (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. T bir parametre kümesi olmak üzere

$$X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, w) \rightarrow X(t, w)$$

biçimindeki X fonksiyonunu göz önüne alalım. Her sabit $t \in T$ için $X(t, w)$ fonksiyonu bir rasgele değişken ise X fonksiyonuna bir stokastik süreç denir. Bu stokastik süreç genellikle $\{X(t), t \in T\}$ biçiminde gösterilir.

Her sabit $t \in T$ için $X(t, w)$ fonksiyonunun aldığı değerlerin kümesine E ile gösterilen durum uzayı, her sabit $w \in \Omega$ için bu sürecin verdiği t 'nin fonksiyonuna sürecin bir yörüngesi adı verilir.

$\{X(t), t \in T\}$ herhangi bir stokastik süreç olsun. Verilen herhangi bir $t \in T$ için $X(t)$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_{X(t)}(x; t) = P(X(t) \leq x), x \in \mathbb{R}$ ile verilir. $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ için $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu, $F_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X_1(t_1) \leq x_1, \dots, X_n(t_n) \leq x_n)$ ile tanımlanır ve sürecin n boyutlu dağılımı adı verilir.

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. İkinci momentin varlığı koşulu altında $M(t) = E(X(t)), V(t) = E(X^2(t)) - M^2(t)$ ile verilen M ve V fonksiyonlarına sırasıyla ortalama değer ve varyans fonksiyonları denir. $K(s, t) = Cov(X(s), X(t)) = E(X(s)X(t)) - M(s)M(t) \quad s, t \in T$ fonksiyonuna ise sürecin kovaryans fonksiyonu adı verilir.

3.1 Bazı Klasik Stokastik Süreçler

Bu kısımda çoğu stokastik sürecin tanımlanmasında kullanılan bağımsız artırlılık, durağan artırlılık, güçlü durağanlık ve zayıf durağanlık kavramları aşağıda verilmiştir.

Tanım (3.1.1) : $\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. T 'den alınan $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ şartını sağlayan sonlu tane $t_1, t_2, \dots, t_n$ 'nin her seçimi için $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ise $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine bağımsız artışıdır denir.

Benzer olarak, T parametre kümesinin en küçük bir elemanı varsa, t_0 bu elemanı göstermek üzere bağımsız artışı tanımını $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ rasgele değişkenlerinin bağımsızlığı ile verilir.

Tanım (3.1.2) : $\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. Her $t \in T$ ve her $h > 0$ için $t + h \in T$ olmak üzere $X(t + h) - X(t)$ rasgele değişkeninin dağılımı yalnızca h 'ye bağlı (t 'den bağımsız) ise $\{X(t), t \in T\}$ sürecine durağan artışıdır denir.

$T = [0, \infty)$ ya da $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere $\{X(t), t \in T\}$ bağımsız ve durağan artışı bir süreç ise bu sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonlarının lineer oldukları kolaylıkla gösterilebilir.

Gerçekte $\{X(t), t \in T\}$ durağan artışı iken

$$E(X(t)) = [E(X(1)) - E(X(0))]t + E(X(0)) \quad , \quad t \in T$$

ve $\{X(t), t \in T\}$ bağımsız ve durağan artışı iken

$$Var(X(t)) = [Var(X(1)) - Var(X(0))]t + Var(X(0)) \quad , \quad t \in T$$

dir. Ayrıca bu sürecin kovaryans fonksiyonu

$$Cov(X(s), X(t)) = Var(X(\min(s, t))), \quad s, t \in T$$

ile verilir.

Tanım (3.1.3) : $\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. Verilen bir n doğal sayısı için, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ve $h \in T$ olmak üzere $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$ ile $\{X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h)\}$ rasgele vektörleri aynı dağılımlı ise $\{X(t), t \in T\}$ süreci n . mertebeden güçlü durağandır ve her sonlu mertebeden güçlü durağan süreç güçlü durağan olarak adlandırılır.

Bir süreç güçlü durağan ise $X(t)$ rasgele değişkeninin dağılımı t ' den bağımsızdır ve tüm moment fonksiyonları sabittir.

Tanım (3.1.4) : $\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. T bir parametre kümesi ve bu sürecin kovaryans fonksiyonu $K(s, t)$ olmak üzere, $K(s, t)$ fonksiyonu yalnızca $|t - s|$ ' nin bir fonksiyonu olarak elde edilmiş ise $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine zayıf durağan veya kovaryans durağan denir.

Bir süreç zayıf durağan ise varyans fonksiyonu sabittir.

3.2 Sayma Süreçleri

Tanım (3.2.1) : $N(t), (0, t]$ aralığında gerçekleşen belli bir türden olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci $T = [0, \infty)$ ve $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ile sürekli parametre ve kesikli durum uzaylı bir süreçtir. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $N(t) \geq 0, \forall t \geq 0$,
2. $N(t)$ negatif olmayan tamsayı değerli bir rasgele değişkendir,
3. Eğer $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$ 'dir,
4. $s < t$ için $N(t) - N(s)$, $(s, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

Tanım (3.2.2) : $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu süreçte X_1 rasgele değişkeni ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olmak üzere X_n rasgele değişkeni $(n - 1)$. olay gerçekleştikten sonra n . olay gerçekleşinceye kadar geçen zamanı belirtsin. Bu şekilde oluşturulan $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisine $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinin varışlar arası geçen zaman dizisi adı verilir. Bu dizi sayma sürecini tek olarak belirler.

$S_0 = 0$ ve $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$ yazalım. Burada S_n sayma sürecinin n . olayının varış zamanını gösterir.

Her sabit $t \geq 0$ için $N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\{N(t) \geq n\}$ olayı $\{S_n \leq t\}$ olayına denk olduğundan $P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$ olacaktır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu sürece göre bir aralıkta gerçekleşen olayların sayısının dağılımı yalnızca o aralığın uzunluğuna bağlıysa bu sayma süreci durağan artışıdır. Literatürde durağan artışı bir sayma sürecine kısaca durağan denilmektedir (Ascher ve Feingold 1984). Ayrıca bir sayma sürecinin bağımsız artışı olması demek, ayrık aralıklarda gerçekleşen olay sayısının birbirinden bağımsız olması anlamına gelmektedir.

Genel anlamda durağan bir sayma süreci için varışlar arası geçen zaman dizisine ilişkin $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ süreci güçlü durağan değildir. Örneğin, Kısım 3.3.6' da tanımlanacak olan durağan bir yenileme sürecinde varışlar arası geçen zaman dizisi güçlü durağan değildir. Tersine, varışlar arası geçen zaman dizisinin güçlü durağan olması da sayma sürecinin durağan olmasını gerektirmez. Yenilemeler arası geçen zamanların dağılımı bilinmeyen θ ve bilinen $\gamma = 800$ saat garanti parametresi ile iki parametrelili üstel olan bir yenileme sürecinde $N(800) - N(0)$ ve $N(1000) - N(200)$ rasgele değişkenleri aynı dağılımlı olmayacağından süreç durağan değildir.

Tanım (3.2.3) : $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu sayma sürecinin $M(t) = E(N(t)), t \geq 0$ ile tanımlı $M(t)$ ortalama değer fonksiyonu sağdan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur. $M(t)$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu varsayımı altında

$$m(t) = M'(t), t \geq 0$$

ile tanımlanan m fonksiyonuna sürecin bozulma oranı (SBO) denir.

Gerçekte sürecin bozulma oran fonksiyonu $m(t)$ zamana göre bozulmaların beklenen sayısının anlık oranını ifade eder.

m fonksiyonu ile verilen SBO ile h bozulma oran fonksiyonu birbirine karıştırılmamalıdır. f_{S_n}, S_n rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{S_n}(t)$ olduğu açıktır. Bu durumda çok küçük bir Δt için $\Delta t m(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} P(t < S_n \leq t + \Delta t)$ yazılabildiğinden $\Delta t m(t)$ çok küçük bir $(t, t + \Delta t]$ aralığında bir olay olması olasılığı olarak ifade edilebilir. Halbuki, $h(t)$ bozulma oran

fonksiyonu Kısım 2.6.2' de ifade edildiği gibi çok küçük bir Δt için $\Delta t h(t)$, $(t, t + \Delta t]$ aralığında sadece bir olay olmasının koşullu olasılığını ifade eder.

Bir sayma sürecinin $m(t)$ bozulma oran fonksiyonunun yanı sıra süreç için ikinci bir ilginç fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanan şiddet fonksiyonudur.

Tanım (3.2.4) : $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 1)}{\Delta t}$$

biçiminde tanımlanan $\lambda(t)$ fonksiyonuna sürecin şiddet fonksiyonu denir.

Eğer $\lambda(t)$ mevcutsa küçük Δt değeri için $\Delta t \lambda(t)$, $(t, t + \Delta t]$ aralığında yaklaşık olarak en az bir olay olması olasılığını ifade eder.

Çok küçük bir zaman aralığında 2 yada daha fazla olayın gerçekleşmesi olasılığı yaklaşık olarak sıfır, yani

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t) \quad (3.1)$$

ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine regülerdir denir ve (3.1) ifadesine regülerlik şartı adı verilir.

Bir sayma sürecinin $m(t)$ bozulma oranı ve $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu mevcut ise (3.1)'deki regülerlik şartı altında $m(t) = \lambda(t)$ 'dir (Thompson 1981). Ayrıca sayma süreci durağan iken yine regülerlik şartı altında eşit olan bu iki fonksiyon aynı zamanda sabittir.

3.3 Bazı Stokastik Süreçler ve Özellikleri

3.3.1 Ampirik süreç

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenler ve $T = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F_n: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, w) \rightarrow F_n(t, w) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k(w) \leq t)$$

ile tanımlanan stokastik sürecine bir ampirik süreç adı verilir.

$\{F_n(t), t \in \mathbb{R}\}$ ampirik süreci $T = \mathbb{R}$ ve $E = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ ile sürekli parametre, kesikli durum uzaylı bir stokastik süreçtir. Her sabit $\omega \in \Omega$, yani sürecin her bir gerçekleşişi için karşılaşılan yörünge fonksiyonuna ampirik dağılım fonksiyonu adı verilir.

Her sabit $t \in \mathbb{R}$ için $F_n(t)$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımı $p = F(t)$ olmak üzere $\text{Binom}(n, p)$ 'dir. Bu sürecin beklenen değer ve varyans fonksiyonlarının sırasıyla

$$M(t) = F(t), t \geq 0$$

ve

$$V(t) = \frac{F(t)(1-F(t))}{n}, t \geq 0$$

oldukları açıktır. Sürece ilişkin kovaryans fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \text{Cov}(F_n(s), F_n(t)) = \text{Cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k(w) \leq s), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k(w) \leq t)\right) \\ &= \frac{1}{n^2} [\text{Cov}(I(X_1 \leq s), I(X_1 \leq t)) + \dots + \text{Cov}(I(X_n \leq s), I(X_n \leq t))] \\ &= \frac{1}{n} [E(I(X_1 \leq s)I(X_1 \leq t)) - E(I(X_1 \leq s))E(I(X_1 \leq t))] \\ &= \frac{1}{n} [F(\min(s, t)) - F(s)F(t)] \quad s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu süreç kovaryans fonksiyonu $|t - s|$ 'nin bir fonksiyonu olmadığından zayıf durağan bir süreç değildir.

Ampirik sürecin n boyutlu olasılık dağılımı $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P\left\{F_n(t_1) = \frac{k_1}{n}, F_n(t_2) = \frac{k_1+k_2}{n}, \dots, F_n(t_n) = \frac{k_1+k_2+\dots+k_n}{n}\right\} \\ = P\left\{\sum_{k=1}^n I(X_k \leq t_1) = k_1, \sum_{k=1}^n I(t_1 < X_k \leq t_2) = k_2, \dots, \sum_{k=1}^n I(t_{n-1} < X_k \leq t_n) = k_n\right\} \\ = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n! (n - (k_1 + k_2 + \dots + k_n))!} F_n(t_1)^{k_1} (F_n(t_2) - F_n(t_1))^{k_2} \dots \end{aligned}$$

$$(F_n(t_n) - F_n(t_{n-1}))^{k_n} (1 - F_n(t_n))^{(n - (k_1 + k_2 + \dots + k_n))}, 0 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq n$$

dir.

3.3.2 Rasgele yürüyüş süreci

$\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ birbirinden bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. X_0 sabit bir değer olmak üzere $X_n = X_0 + Y_1 + \dots + Y_n$ ile tanımlı $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik sürecine rasgele yürüyüş süreci denir.

$X_0 = 0, Y_1, Y_2, \dots$ 'ler birbirinden bağımsız ve aynı $P(Y_i = -1) = q$ ve $P(Y_i = 1) = p$ $p + q = 1, i = 1, 2, \dots$ dağılımına sahip olmak üzere $X_n = X_0 + Y_1 + \dots + Y_n$ ile verilen rasgele yürüyüş sürecini göz önüne alalım. Burada $E(Y_i) = p - q$ ve $Var(Y_i) = 1 - (p - q)^2$ olduğu açıktır. Böylece $E(X_n) = n(p - q)$, $Var(X_n) = 4npq$ ve $Cov(X_n, X_m) = 4 \min(n, m) pq$ olarak elde edilecektir. $p = q$ olduğunda rasgele yürüyüş sürecine simetrik rasgele yürüyüş süreci denir.

Teorem (3.3.2.1) : Her rasgele yürüyüş süreci bağımsız ve durağan artışıdır.

$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ rasgele yürüyüş sürecinin bir boyutlu olasılık dağılımı

$$P(X_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, \quad \begin{array}{l} n \text{ çift olduğunda } k \in \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm n\} \\ n \text{ tek olduğunda } k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm n\} \end{array}$$

biçimindedir. n boyutlu dağılımını elde edebilmek için rasgele yürüyüş sürecinin bağımsız ve durağan artırlılık özelliği kullanılır.

3.3.3 Brown hareketi

$X_0 = 0, Y_1, Y_2, \dots$ 'ler birbirinden bağımsız ve aynı $P(Y_i = -1) = P(Y_i = 1) = 1/2$ $i = 1, 2, \dots$ dağılımına sahip olmak üzere $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ ile verilen rasgele yürüyüş sürecini göz önüne alalım. Bu sürece göre başlangıçta orijinde olan bir parçacık eşit olasılık ile ya bir birim sola yada bir birim sağa gitmektedir. Şimdi daha küçük zaman aralıklarında daha küçük adımlar alarak bu süreci hızlandıracağımızı kabul edelim. Limite gittiğimizde elde edeceğimiz süreç Brown hareketi olarak adlandırılır. Kabul edelim ki $i = 1, 2, \dots$ için her bir Δt zaman biriminde Δx büyüklüğünde eşit olasılık ile bir birim sola yada bir birim sağa gidilsin.

$$Y_i = \begin{cases} \Delta x & , \Delta x \text{ uzunluğundaki } i. \text{ adım sağa} \\ -\Delta x & , \Delta x \text{ uzunluğundaki } i. \text{ adım sola} \end{cases}$$

iken $Y_1, Y_2, \dots$ 'ler birbirinden bağımsız ve aynı $P(Y_i = -\Delta x) = P(Y_i = \Delta x) = 1/2$ $i = 1, 2, \dots$ dağılımına sahip olmak üzere $X(t)$, parçacığın t zamanındaki konumunu göstermek üzere

$$X(t) = Y_1 + \dots + Y_{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor} \quad t \geq 0$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\left\lfloor \cdot \right\rfloor$ tam değer fonksiyonudur. Bu şekilde oluşturulan süreç için $E(X(t)) = 0$ ve $Var(X(t)) = (\Delta x)^2 \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor, t \geq 0$ olarak elde edilir.

$\Delta x = \Delta t$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ iken $E(X(t))$ ve $Var(X(t))$ 'nin her ikisinde 0'a yakınsayacağından parçacık olasılıksal anlamda hareket etmeyecektir. $X(t)$ rasgele değişkeni 0 değerini 1 olasılık ile alacaktır. Bundan dolayı σ pozitif bir sabit olmak üzere $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ seçilerek, $\Delta t \rightarrow 0$ ile limite geçilirse $E(X(t)) = 0$ ve $Var(X(t)) \rightarrow \sigma^2 t$ elde edilir. Şimdi $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ alınarak $\Delta t \rightarrow 0$ ile elde edilen bu limit sürecinin bazı özelliklerini verelim.

1. $X(t)$ sıfır ortalamalı ve $\sigma^2 t$ varyanslı normal dağılımlıdır,
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ süreci bağımsız artışıdır,
3. $\{X(t), t \geq 0\}$ süreci durağan artışıdır.

Tanım (3.3.3.1) : Aşağıdaki şartları sağlayan $\{X(t), t \geq 0\}$ sürecine Brown hareketi süreci yada Wiener süreci denir.

1. $X(0) = 0$,
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ süreci bağımsız ve durağan artışıdır,
3. $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$.

$\sigma^2 = 1$ alındığında Brown hareketi, standart Brown hareketi olarak adlandırılır. Rasgele yürüyüş sürecinin limiti olarak elde edilen Brown hareketinin yörüngeleri 1 olasılık ile süreklidir ancak yine 1 olasılık ile hiçbir yerde türevlenemezler.

$\{X(t), t \geq 0\}$ bir Brown hareketi sürecinin bir boyutlu dağılımının normal olduğu göz önüne alınarak, sürecin bağımsız ve durağan artışlılığı yardımıyla n boyutlu olasılık dağılımının normal, yani $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ olmak üzere

$$\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\} \sim N\left(\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \Sigma = [\sigma^2 t_{\min(i,j)}]_{n \times n}\right)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım (3.3.3.2) : $\{X(t), t \geq 0\}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t_1, t_2, \dots, t_n$ için $X(t_1), \dots, X(t_n)$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımı çok değişkenli normal dağılım ise $\{X(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine Gauss süreci denir.

Bir çok değişkenli normal dağılım marjinal beklenen değerler ve kovaryanslar ile tam olarak belirlendiğinden Brown hareketi süreci aynı zamanda aşağıdaki ortalama değer ve kovaryans fonksiyonu ile bir Gauss süreci olarak tanımlanabilecektir.

$$E(X(t)) = 0, t \geq 0 \text{ ve } Cov(X(s), X(t)) = \sigma^2 \min(s, t), s, t \geq 0.$$

$\{X(t), t \geq 0\}$ bir Brown hareketi süreci olsun ve bu sürecin $X(1) = 0$ üzerinden koşullandırma ile 0 ve 1 arasında değerler aldığını düşünelim. Böylece 0 ve 1 noktalarını bağlayan, $\{(X(t), 0 \leq t \leq 1 | X(1) = 0)\}$ ile tanımlı Brown hareketi sürecine bir Brown köprüsü denir. Brown köprüsü bir Gauss sürecidir. Brown köprüsüne ait beklenen değer ve kovaryans fonksiyonları,

$$E((X(s) | X(1) = 0)) = 0, s < 1$$

ve $s \leq t \leq 1$ için

$$\begin{aligned} Cov((X(s), X(t)) | X(1) = 0) &= E((X(s)X(t) | X(1) = 0)) \\ &= E(E(X(s)X(t) | X(t), X(1) = 0) | X(1) = 0) \\ &= E(X(t)E((X(s) | X(t)) | X(1) = 0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E\left(X(t) \frac{s}{t} X(t) \middle| X(1) = 0\right) \\
&= \frac{s}{t} E(X^2(t) | X(1) = 0) = \frac{s}{t} t(1-t) = s(1-t), s \leq t
\end{aligned}$$

biçimindedir. Böylelikle Brown köprüsü, 0 ortalama ve $s(1-t)$ kovaryans fonksiyonu ile bir Gauss süreci olarak elde edilir. Bu durum böyle bir süreci elde etmede kullanılabilecek bir kriteri aşağıdaki teorem ile verir.

Teorem (3.3.3.1) : $\{X(t), t \geq 0\}$ bir Brown hareketi süreci olsun. $Z(t) = X(t) - tX(1)$ ile tanımlı $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ süreci bir Brown köprüsü süreci olacaktır.

İspat : $\{X(t), t \geq 0\}$ bir Brown hareketi süreci olduğundan $\{Z(t), t \geq 0\}$ sürecinin bir Gauss süreci olduğu açıktır. Bu ispatın tamamlanabilmesi için $E(Z(t)) = 0$ ve $Cov(Z(s), Z(t)) = s(1-t)$, $s \leq t$ olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. $E(Z(t)) = 0$ olduğu açıktır. $Cov(Z(s), Z(t)) = s(1-t)$, $s \leq t$ olduğu gösterelim.

$$\begin{aligned}
Cov(Z(s), Z(t)) &= Cov(X(s) - sX(1), X(t) - tX(1)) \\
&= Cov(X(s), X(t)) - tCov(X(s), X(1)) - sCov(X(t), X(1)) + stCov(X(1), X(1)) \\
&= s - st - st + st = s(1-t), s \leq t
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Brown köprüsü süreci ampirik dağılım fonksiyonları üzerinde önemli bir role sahiptir. Ampirik dağılım fonksiyonu ve süreci Kısım 3.3.1’de $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k \leq t)$ olarak verilmişti. Şimdi özel olarak ampirik dağılım fonksiyonunun birbirinden bağımsız ve $(0,1)$ aralığında düzgün dağılımlı $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri ile tanımlandığını düşünelim. $N_n(t) = \sum_{k=1}^n I(X_k \leq t)$, $0 < t < 1$ biçiminde tanımlansın. $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri $(0,1)$ aralığında düzgün dağılımlı olduğundan $N_n(t) \sim \text{Binom}(n, t)$ dağılımına sahip olduğu açıktır. Güçlü büyük sayılar kanununa göre her sabit t için 1 olasılık ile $n \rightarrow \infty$ iken $F_n(t) \rightarrow t$ olacaktır. Böylece bu yakınsama Glivenko-Cantelli teoremine göre 1 olasılık ile t' ye göre düzgün olarak yakınsayacaktır, yani $P\left(\sup_{0 < t < 1} |F_n(t) - t| \rightarrow 0\right) = 1$ olacaktır. Ayrıca merkezi limit teoremi yardımıyla her

sabit t için $\sqrt{n}(F_n(t) - t)$ ortalaması 0 ve varyansı $t(1-t)$ olan asimptotik normal dağılıma sahiptir. Yani $\alpha_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ olmak üzere, $n \rightarrow \infty$ iken

$$P(\alpha_n(t) < x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2t(1-t)}y^2} dy$$

dır. Şimdi $\{\alpha_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ stokastik sürecinin $n \rightarrow \infty$ iken limit özelliklerini inceleyelim. Bu incelemenin yapılabilmesi için $s < t$ olmak üzere yukarıda tanımlanan $N_n(s)$ koşulu altında $N_n(t) - N_n(s) | N_n(s)$ rasgele değişkeninin $\text{Binom}(n - N_n(s), \frac{t-s}{1-s})$ dağılımına sahip olduğu göz önüne alınır. Böylece merkezi limit teoremi ile $\alpha_n(s)$ ve $\alpha_n(t)$ 'nin asimptotik ortak dağılımının iki değişkenli normal dağılım olduğu açıktır. Bu durum aynı zamanda limit sürecinin bir Gauss süreci olduğu beklentisini uygun çıkarır. Bu sürecin hangi Gauss süreci olduğunu göstermek için $E(\alpha_n(t))$ ve $\text{Cov}(\alpha_n(s), \alpha_n(t))$ hesaplanmalıdır.

$$E(\alpha_n(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ve $0 \leq s \leq t \leq 1$ için

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\alpha_n(s), \alpha_n(t)) &= n \text{Cov}(F_n(s), F_n(t)) \\ &= \frac{1}{n} \text{Cov}(N_n(s), N_n(t)) \\ &= \frac{1}{n} E(E(N_n(s)N_n(t) | N_n(s)) - n^2 st) \\ &= \frac{1}{n} \left(E \left(N_n(s) + (n - N_n(s)) \frac{t-s}{1-s} \right) - n^2 st \right) = s(1-t). \end{aligned}$$

Böylece limit sürecinin bir Brown köprüsü olduğu ortaya çıkar.

Gerçekleştirilen tüm bu analizler $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri $(0,1)$ aralığında düzgün dağılımına sahip olduğu varsayımı altında yapılmıştır. Bu analizler F dağılım fonksiyonu sürekli bir dağılım fonksiyonu olduğunda da yapılabilir. Yani X_i rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F sürekli olsun. Bu durumda $F(X_i)$ rasgele değişkeni $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olacaktır. $\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ dizisi göz

önüne alınsın. $F_n(x)$, F dağılımından gelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemeine dayalı ampirik dağılım fonksiyonunu gösterebilir. Böylece önceki sonuçtan aşağıdaki yazılabilir.

$$\begin{aligned}\alpha_n(t) &= \sqrt{n} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(F(X_i) \leq t) \right) - t \right] \\ &= \sqrt{n} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq F^{-1}(t)) \right) - t \right] \\ &= \sqrt{n} \left[(F_n(F^{-1}(t))) - t \right] \\ &= \sqrt{n} (F_n(y_t) - F(y_t)).\end{aligned}$$

Burada $y_t = F^{-1}(t)$ dir. Bu durumda $\{\alpha_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ süreci Brown köprüsü sürecine yakınsayacağından $\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ 'nin limit dağılımı Brown köprüsünün supremumunun yada süreklilikten dolayı maksimumunun dağılımı ile aynı olacaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)| < a) = P(\max_{0 \leq t \leq 1} |Z(t)| < a)$$

dir (Ross 1996). Burada $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ bir Brown köprüsü sürecidir.

3.3.3.1 Uyum iyiliği testlerinin asimptotik açıdan değerlendirilmesi

Uyum iyiliği testlerinde, verilen n bağımsız $X_1, X_2, \dots, X_n$ gözlemlerine ilişkin kitlenin yokluk hipotezinde yer alan sürekli dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'e sahip olduğu, örneklem dağılım fonksiyonu $F_n(x)$ ile karşılaştırarak elde edilir. $F_n(x)$ ile $F(x)$ arasındaki sapmaya dayanarak en çok kullanılan Kolmogorov-Smirnov ile Cramer-von Mises test istatistikleridir. Bu istatistikler sırasıyla, $D_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$ ve $W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x)$ biçimindedir. Gözlem değerleri büyüklük sırasına konulduğunda, yani $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ iken D_n ve W_n^2 istatistikleri sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\sqrt{n}D_n = \max_{j=1, \dots, n} (nF(x_j) - (j-1), j - nF(x_j))$$

$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n (F(x_j) - \frac{j-1}{2n})^2$$

Yokluk hipotezi içerisinde belirtilen $X_1, X_2, \dots, X_n$ gözlemlerinin dağılım fonksiyonu $F(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere D_n ve W_n^2 rasgele değişkenlerinin dağılımını elde etmek için $F(x)$ sürekli fonksiyonunun $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma ait dağılım fonksiyonu olduğunu kabul edelim. $0 \leq t \leq 1$ için $\alpha_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ olarak tanımlansın. Daha önce $\{\alpha_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ sürecinin $n \rightarrow \infty$ iken bir Brown köprüsü olduğu gösterildi. $\{\alpha(t), 0 \leq t \leq 1\}$ bir Brown köprüsü olsun. Böylece Kolmogorov-Smirnov istatistiğinin olasılık dağılımı

$$D_n = \max_{0 \leq t \leq 1} |\alpha_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D = \max_{0 \leq t \leq 1} |\alpha(t)|$$

biçiminde olacaktır. Cramer-von Mises istatistiğinin olasılık dağılımı ise

$$W_n^2 = \int_0^1 \alpha_n^2(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W^2 = \int_0^1 \alpha^2(t) dt$$

biçimindedir (Parzen 1964). Böylelikle uyum iyiliği testlerinin, D_n ve W_n^2 , asimptotik dağılımlarının bir Brown köprüsü olduğu ifade edilmiştir.

3.3.3.2 Donsker teoremi

(Ω, U, P) olasılık uzayında birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı, ortalaması 0 ve varyansı σ^2 olan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ rasgele değişkenleri tanımlansın. $S_0 = 0$ ve $S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ olmak üzere

$$X_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{(nt - [nt])}{\sigma\sqrt{n}} \varepsilon_{[nt]+1}, 0 < t < 1$$

yazılabilir. Burada $[.]$ tam değer fonksiyonu ifade eder. $X_n(t)$ fonksiyonunun $\frac{i}{n}$ noktasındaki değeri $X_n\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}$ $i = 1, \dots, n$ olmak üzere lineer interpolasyon ile elde edilen bir fonksiyon olarak düşünülecektir. Ayrıca her t için $X_n(t)$ bir rasgele değişken olduğundan $X_n(t)$ bir stokastik süreç olarak nitelenebilir. Örneğin $\varepsilon_i, \pm 1$ değerlerini, her biri için $\frac{1}{2}$ olasılık ile aldığı ve $\sigma = 1$ olduğunda $X_n(t)$ simetrik rasgele yürüyüş süreci olacaktır.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı, $E(\varepsilon_i) = 0$ ve $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ olan rasgele değişkenler olsun.

$$X_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)}{\sigma\sqrt{n}} \varepsilon_{\lfloor nt \rfloor + 1} \quad 0 < t < 1$$

ile tanımlanan süreç, $n \rightarrow \infty$ iken Brown hareketi sürecine dağılımda yakınsayacaktır (Billingsley 1999).

3.3.4 Homojen Poisson süreci

Tanım (3.3.4.1): $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun.

1. $N(0) = 0$,
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı,
3. t uzunluklu bir aralıkta gerçekleşen olayların sayısının dağılımı λt ortalamalı

$$\text{Poisson, yani } P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

özelliklerini sağlayan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine λ oranlı bir Poisson süreci denir.

Poisson sürecinin 3. özelliği, bu sürecin aynı zamanda durağan artışı olduğunu ifade etmektedir.

Bu sürece göre olaylar arası geçen zamanların dağılımı, yani $X_1, X_2, \dots$ bağımsız ve aynı $\frac{1}{\lambda}$ beklenen değeri ile üstel dağılımlıdır.

Poisson süreci için yukarıdaki tanıma denk olan diğer bir tanım aşağıda verilmektedir.

Tanım (3.3.4.2): $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdaki şartları sağladığında λ oranlı bir Poisson sürecidir.

1. $N(0) = 0$,
2. Süreç bağımsız ve durağan artışı bir süreçtir,
3. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$,
4. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

3.3.4.1 $N(t)$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_{N(t)}$ rasgele değişkenlerinin koşullu dağılımı

$N(t) = n$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanlarının koşullu dağılımı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci olsun. Bu durumda $N(t) = n$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanlarının koşullu dağılımı $(0, t)$ aralığındaki düzgün dağılımdan alınmış n -birimlik örneklemin sıra istatistiklerinin ortak dağılımı ile aynıdır.

Yani, $U_1, U_2, \dots, U_n$ 'ler $U(0, t)$ düzgün dağılımından alınan n -birimlik örneklem olmak üzere $S_1, S_2, \dots, S_n | N(t) = n \sim (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$ 'dir.

3.3.5 Homojen olmayan Poisson süreci

Tanım (3.3.5.1) : $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. $t \geq 0$ için $\lambda(t)$, t 'nin bir fonksiyonu olmak üzere

1. $N(0) = 0$,
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı,
3. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$,
4. $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci denir.

Hojen olmayan bir Poisson sürecinin şiddet fonksiyonu sabit, yani her $t \geq 0$ için $\lambda(t) = \lambda$ ise bu sürece λ oranlı bir Poisson süreci denir. $\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci iken her $t \geq 0$ için $N(t)$ λt ortalamalı Poisson dağılımlıdır ve bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanlar birbirinden bağımsız aynı $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağılımlı rasgele değişkenlerdir.

Teorem (3.3.5.1) : $\{N(t), t \geq 0\}$ $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan Poisson süreci olsun.

$M(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ olmak üzere $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(M(t+s) - M(s))$, yani

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-[M(t+s)-M(s)]} [M(t+s)-M(s)]^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \text{ dir (Ross 1996).}$$

Teorem 3.3.5.1'den her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$, $M(t)$ ortalamalı Poisson dağılımlıdır. Bundan dolayı $M(t)$ homojen olmayan bir Poisson sürecinin ortalama değer

fonksiyonudur. Bu fonksiyon aynı zamanda sürecin varyans fonksiyonudur. Ayrıca kovaryans fonksiyonunun bağımsız artırlılık ile

$$\text{Cov}(N(s), N(t)) = M(\min(s, t)) \quad s, t \geq 0$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Homojen olmayan Poisson süreci için uygulamalarda en çok karşılaşılan şiddet fonksiyonları kuvvet yasası (power law) ve loglineer yapılarıdır. İlgili şiddet fonksiyonu yapıları sırasıyla

$$\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}, \alpha, \beta > 0, t \geq 0$$

ve

$$\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t}, -\infty < \alpha, \beta < \infty, t \geq 0$$

biçimindedir.

3.3.5.1 Homojen olmayan bir Poisson sürecinde olaylar arası geçen zamanların bağımsız ve aynı dağılımlı olup olmadığının incelenmesi

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zamanları göstermek üzere S_n , n . olayın gerçekleşme zamanını gösterecektir. $n = 1, 2, \dots$ için $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olduğu açıktır. Burada $S_0 \equiv 0$ alınır.

$$P(X_1 > t) = P((0, t] \text{ aralığında sıfır olay olması}) = P(N(t) = 0) = e^{-M(t)}, t \geq 0$$

olduğundan

$$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-M(t)}, t \geq 0$$

ve

$$f_{X_1}(t) = \lambda(t)e^{-M(t)}, t \geq 0$$

olur.

X_2 rasgele değişkeninin dağılımını bulmak için X_1 rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile

$$P(X_2 > t) = \int_0^\infty P(X_2 > t | X_1 = s) \lambda(s) e^{-M(s)} ds$$

yazılabilir.

$$P(X_2 > t | X_1 = s) = P(N(t + s) - N(s) = 0 | X_1 = s)$$

$= P(N(t + s) - N(s) = 0)$ bağımsız artırlılık ile,

$$= e^{-(M(t+s)-M(s))} \quad (3.2)$$

Böylece

$$P(X_2 > t) = \int_0^\infty \lambda(s) e^{-M(t+s)} ds, t \geq 0$$

olduğundan

$$F_{X_2}(t) = 1 - \int_0^\infty \lambda(s) e^{-M(t+s)} ds, t \geq 0$$

ve

$$f_{X_2}(t) = \lambda(t) e^{-M(t)} \lambda(0), t \geq 0$$

bulunur. $\lambda(t)$ sabit olmadıkça (3.2) ifadesinden X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin bağımsız olmayacağı açıktır. Ayrıca X_1 ve X_2 'nin dağılım fonksiyonlarının ifadelerinden yine $\lambda(t)$ sabit olmadıkça aynı dağılıma sahip olmayacaklardır. Genelde

$n = 1, 2, \dots$ için

$$P(X_{n+1} > t | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = e^{-\int_0^t \lambda(x_1+x_2+\dots+x_n+s) ds}$$

$$= e^{-\int_{x_1+x_2+\dots+x_n}^{x_1+x_2+\dots+x_n+t} \lambda(u) du}$$

$$= e^{-[M(x_1+x_2+\dots+x_n+t)-M(x_1+x_2+\dots+x_n)]}, t \geq 0$$

olduğundan $\lambda(t)$ sabit olmadıkça $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenleri bağımsız olmayacaktır.

Şimdi herhangi bir $n \in \{1, 2, \dots\}$ için genel halde X_n rasgele değişkeninin dağılımını bulalım.

$$P(X_n > t | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

$$= e^{-[M(x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+t)-M(x_1+x_2+\dots+x_{n-1})]}$$

olduğundan

$$P(X_n > t | S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) = e^{-[M(s_{n-1}+t)-M(s_{n-1})]}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} P(X_n > t | S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) &= P(X_n > t | S_{n-1} = s_{n-1}) \\ &= e^{-[M(s_{n-1}+t)-M(s_{n-1})]} \quad (3.3) \end{aligned}$$

olacaktır. $n = 2, 3, \dots$ için

$$P(X_n > t) = \int_0^\infty P(X_n > t | S_{n-1} = s) f_{S_{n-1}}(s) ds \quad (3.4)$$

yazılabilir. (3.3) ifadesinden $P(X_n > t | S_{n-1} = s)$ koşullu dağılımının analitik ifadesini biliyoruz. Şimdi S_{n-1} rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulalım. $h > 0$ bir sabit olmak üzere

$$N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında bir olay olması} \Rightarrow t < S_n < t + h$$

olacağından

$$P(t < S_n < t + h) \geq P(N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında bir olay olması})' \text{ dir.}$$

Ayrıca h çok küçük iken

$$P(t < S_n < t + h) = P(N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında bir olay olması}) + o(h)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} P(t < S_n < t + h) &= P(N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında bir olay olması}) + o(h) \\ &= \frac{e^{-M(t)} (M(t))^{n-1}}{(n-1)!} (\lambda(t)h + o(h)) + o(h) \\ &= \lambda(t) \frac{e^{-M(t)} (M(t))^{n-1}}{(n-1)!} h + o(h) \end{aligned}$$

olduğundan S_n 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{e^{-M(t)}(M(t))^{n-1}}{(n-1)!}, t > 0$$

olacaktır. Bu ifadenin (3.4) ifadesinde göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} P(X_n > t) &= \int_0^\infty e^{-[M(t+s)-M(s)]} \lambda(s) \frac{e^{-M(s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds, t \geq 0 \\ &= \int_0^\infty \lambda(s) \frac{e^{-M(t+s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F_{X_n}(t) = 1 - \int_0^\infty \lambda(s) \frac{e^{-M(t+s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds, t > 0$$

ve

$$f_{X_n}(t) = \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) \frac{e^{-M(t+s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds, t > 0$$

olur.

X_n 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu incelendiğinde $\lambda(t)$ sabit olmadıkça $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenlerinin aynı dağılımlı olamayacağı görülür. Böylece homojen olmayan bir Poisson sürecinin ardışık olaylar arası geçen zamanları şiddet fonksiyonu sabit olmadıkça ne bağımsız ne de aynı dağılımlıdır.

$S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanları verildiğinde S_{n+1} varış zamanının koşullu dağılımını bulalım.

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} > t | S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) &= P(S_{n+1} - S_n > t - s_n | S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} > t - s_n | S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} > t - s_n | S_n = s_n) \\ &= e^{-[M(t)-M(s_n)]}, t > s_n \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$f_{S_{n+1}}(t | s_1, \dots, s_n) = f_{S_{n+1}}(t | s_n) = \lambda(t) e^{-[M(t)-M(s_n)]}, t > s_n.$$

Negatif değerler almayan bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu F ve bozulma oran fonksiyonunu h ile gösterelim. Bu durumda

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(s)ds}, \quad t \geq 0$$

olduğunu biliyoruz.

Homojen olmayan bir Poisson sürecinin ilk olayının gerçekleşme zamanı olan X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-M(t)}, \quad t \geq 0$$

olduğundan $h(t) = \lambda(t)$ elde edilir. Böylelikle ilk olayın gerçekleşme zamanı olan rasgele değişkenin bozulma oran fonksiyonu homojen olmayan bir Poisson sürecinin şiddet fonksiyonudur.

3.3.5.2 $N(t)$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_{N(t)}$ rasgele değişkenlerinin koşullu dağılımı

$N(t) = n$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanlarının koşullu dağılımı aşağıdaki şekilde verilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sürekli ortalama değer fonksiyonu $M(t)$ ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. Bu durumda $N(t) = n$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanlarının koşullu dağılımı aşağıdaki dağılımdan alınmış n -birimlik örneklemin sıra istatistiklerinin ortak dağılımı ile aynıdır (Parzen 1964).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(x)}{M(t)} & , 0 \leq x \leq t \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

3.3.5.3 Şiddet fonksiyonu sınırlı iken varış zamanları

$\{N(t), t \geq 0\}$ $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu sınırlı olduğunda homojen olmayan bir Poisson sürecinin varış zamanları homojen bir Poisson sürecinden rasgele bir örneklem olarak düşünülebilir. Özellikle λ her $t \geq 0$ için $\lambda(t) \leq \lambda$ olacak şekilde bir sayı olmak üzere λ oranlı bir $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson sürecini gözönüne alalım. Poisson sürecinin t zamanında

gerçekleşen bir olayının $\lambda(t)/\lambda$ olasılığı ile bir olay olarak sayıldığını kabul edersek, sayılan olayların sayma süreci $\{N_1(t), t \geq 0\}$ $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson sürecidir. Şimdi bunun böyle olduğunu gösterelim.

1. $N_1(0) = 0$
2. $(s, s + t]$ aralığında sayılan olayların sayısı sadece, s zamanından önce gerçekleşen olaylardan bağımsız olan $(s, s + t)$ aralığındaki Poisson sürecinin olaylarına bağlıdır. Sonuçta, $(s, s + t)$ aralığında sayılan olayların sayısı s 'den önce sayılan olayların sayısından bağımsızdır. Böylece $\{N_1(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışıdır.
3. $P(N_1(t + h) - N_1(t) \geq 2) \leq P(N(t + h) - N(t) \geq 2)$

Çünkü

$$P(N(t + h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

olduğundan

$$P(N_1(t + h) - N_1(t) \geq 2) = o(h)$$

olduğu açıktır.

$$4. \quad P(N_1(t + h) - N_1(t) = 1)$$

$$\begin{aligned} &= P(N_1(t + h) - N_1(t) = 1 | N(t + h) - N(t) = 0) P(N(t + h) - N(t) = 0) \\ &\quad + P(N_1(t + h) - N_1(t) = 1 | N(t + h) - N(t) = 1) P(N(t + h) - N(t) = 1) \\ &\quad + P(N_1(t + h) - N_1(t) = 1 | N(t + h) - N(t) \geq 2) P(N(t + h) - N(t) \geq 2) \\ &= P(N_1(t + h) - N_1(t) = 1 | N(t + h) - N(t) = 1) (\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= \frac{\lambda(t)}{\lambda} (\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= \lambda(t)h + o(h). \end{aligned}$$

3.3.5.4 Homojen olmayan bir Poisson sürecinin bir Poisson sürecine dönüştürülmesi

Hojen olmayan Poisson süreci bir Poisson sürecine dönüştürülebilir. $\{N(t), t \geq 0\}$ azalmayan sürekli $M(t)$ ortalama değeri fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson

süreci olsun. Bu süreç için varış zamanlarını $S_1, S_2, \dots, S_n$ ile gösterelim. $Z_i = M(S_i), i = 1, 2, \dots$ tanımlansın. Bu durumda $Z_1, Z_2, \dots$ 'ler $\lambda = 1$ oranlı bir Poisson sürecinin varış zamanlarıdır (Parzen 1964).

$Z_1, Z_2, \dots$ zamanlarına karşılık gelen sayma sürecini $\{G(t), t \geq 0\}$ ile gösterelim. Bu sürecin $\lambda = 1$ oranlı bir Poisson süreci olduğu gösterilirse yukarıdaki ifadenin ispatı yapılmış olur. M^{-1} ters fonksiyonu, $M^{-1}(t) = \inf\{s: M(s) \geq t\}, t > 0$ ile verilmek üzere $G(t) = N(M^{-1}(t)), t \geq 0$ olduğu açıktır.

1. $G(0) = N(M^{-1}(0)) = N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışı ve, $M^{-1}(t)$ 'nin azalmayan bir fonksiyon olduğunun göz önüne alınmasıyla $G(t) = N(M^{-1}(t))$ ifadesinden $\{G(t), t \geq 0\}$ sürecinde bağımsız artışı olacağı ortaya çıkar.
3. $h > 0$ için $G(t+h) - G(t) = N(M^{-1}(t+h)) - N(M^{-1}(t)) \sim \text{Poisson}(h), M^{-1}(t+h) > M^{-1}(t)$

Böylece $\{G(t), t \geq 0\}$ $\lambda = 1$ oranlı bir Poisson süreci olur. Bu sonucun tersi de doğrudur. M azalmayan sürekli bir fonksiyon ve $S_1, S_2, \dots, S_n$ 'ler bir sayma süreci için varış zamanlarını göstermek üzere $M(S_1), M(S_2), \dots, M(S_n)$ $\lambda = 1$ oranlı bir Poisson sürecinin varış zamanları ise $S_1, S_2, \dots, S_n$ 'ler ortalama değer fonksiyonu M olan homojen olmayan bir Poisson sürecinin varış zamanlarıdır.

3.3.6 Yenileme süreci

Tanım (3.3.6.1): $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinde olaylar (yenilemeler) arası geçen zamanlar birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenler ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine bir yenileme süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. X_n rasgele değişkeni $(n-1)$. ve n . yenilemeler arasında geçen zamanı gösterir. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olmak üzere, her sabit $t \geq 0$ için $N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$ 'dir. Yenileme rasgele değişkeni olarak adlandırılan $N(t)$, t zamanına kadar, yani $(0, t]$ zaman aralığında gerçekleşen yenilemelerin sayısını ifade eder.

Olaylar arası geçen zamanların dağılımı üstel olduğunda yenileme süreci homojen bir Poisson sürecine dönüşecektir.

3.3.7 Geometrik süreç

Tanım (3.3.7.1) : $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ negatif değerler almayan rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun. $\{a^{n-1}X_n, n = 1, 2, \dots\}$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olacak biçimde bir $a > 0$ sayısı varsa $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisi üzerine kurulan $\{N^G(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine a oranlı bir geometrik süreç denir.

Geometrik süreç stokastik olarak monotondur. $0 < a < 1$ için geometrik süreç stokastik artan iken $a > 1$ için stokastik azalandır (Lam 1988).

3.3.7.1 Geometrik süreçte olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı

$\{N^G(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç olsun. Bu sürecin tanımından, bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanlar olan X_n rasgele değişkenleri bağımsızdır. Fakat aynı dağılımlı değildir. Yalnızca $a = 1$ durumunda bu rasgele değişkenler aynı dağılımlıdır ve karşımıza çıkan geometrik süreç bir yenileme süreci olur.

$Y_n = a^{n-1}X_n, n = 1, 2, \dots$ diyelim. Bu durumda Y_n dizisi olaylar arası geçen zamanlarının dağılım fonksiyonu F ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan $N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$ ile tanımlı $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecini oluşturur. Böylelikle X_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = P(a^{n-1}Y_n \leq x) = P(Y_n \leq xa^{n-1}) = F(a^{n-1}x), n = 1, 2, \dots$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$E(X_n) = a^{-n+1}\mu \text{ ve } Var(X_n) = a^{-2n+2}\sigma^2$$

olduğu açıktır.

3.3.7.2 Sayma sürecinden gelen veri setinin geometrik sürece uygunluğunun incelenmesi

Bu incelemeyi gerçekleştirebilmek için aşağıdaki iki teoremden faydalanılabilir.

Teorem (3.3.7.2.1): $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisi bir geometrik süreç oluşturmak üzere,

$U_n = \frac{X_{2n}}{X_{2n-1}}, n = 1, 2, \dots$ ile verilen U_n 'ler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir (Lam 1992).

Teorem (3.3.7.2.2): $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisi bir geometrik süreç oluşturmak üzere, herhangi bir m doğal sayısı için $V_n = X_n X_{2m+1-n}, n = 1, 2, \dots, m$ ile verilen V_n 'ler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir (Lam 1992).

3.3.7.3 Sayma sürecinden gelen veri setinin bağımsız ve aynı dağılımlı olup olmadığının incelenmesi

Sayma sürecinden gelen veri setinin trende sahip olduğu belirlendikten sonra, bunların geometrik süreç olduğu test edilir. Bunun için daha önce verilen Teorem 3.3.7.2.1 ve Teorem 3.3.7.2.2 'den faydalanılır.

$$N = 2m \text{ için } U_n = \frac{X_{2n}}{X_{2n-1}}, V_n = X_n X_{2m+1-n}, n = 1, 2, \dots, m$$

ve

$$N = 2m + 1 \text{ için } U_n = \frac{X_{2n}}{X_{2n-1}}, V_n = X_{n+1} X_{2m+2-n}, n = 1, 2, \dots, m$$

ile verilen U_n ve V_n 'lerin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğu test edilir. Test istatistiklerinden en çok kullanılanları “Dönüm Noktası” ve “Fark İşareti” testleridir (Ascher ve Feingold 1984).

Bir sayma sürecinden gelen $\{W_n, n = 1, 2, \dots\}$ veri setinin bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olup olmadığının test edilmesi için yokluk hipotezi

$$H_0: W_n \text{ 'ler bağımsız ve aynı dağılımlıdır.}$$

ve alternatifi

$$H_1: W_n \text{ 'ler bağımsız ve aynı dağılımlı değildirler.}$$

şeklinde kurulur.

(1) Dönüm Noktası Testi

H_0 hipotezi altında, $T_W = \sum_{n=2}^{m-1} I((W_n - W_{n-1})(W_{n+1} - W_n) < 0)$ olmak üzere test istatistiği,

$$T_W^* = \frac{T_W - \frac{2(m-2)}{3}}{\sqrt{\frac{16m-29}{90}}}$$

büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher ve Feingold 1984).

(2) Fark İşareti Testi

H_0 hipotezi altında, $D_W = \sum_{n=2}^m I(W_n > W_{n-1})$ olmak üzere test istatistiği,

$$D_W^* = \frac{D_W - \frac{m-1}{2}}{\sqrt{\frac{m+1}{12}}}$$

büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher ve Feingold 1984).

4. TREND ANALİZİ

Bir sayma süreci için, olaylar arası geçen zamanların oluşturduğu dizi bu sayma sürecini tek olarak belirler. Örneğin, olaylar arası geçen zamanlar bağımsız ve aynı F dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyor ise bu sayma süreci bir yenileme süreci olacaktır. Uygulamalarda ortaya çıkan birçok bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenilirlik teorisindeki başka analizlerde sayma sürecinden gelen veri kümesi sistematik değişim gösteren rasgele değişkenlerden oluşur. Sistematik değişim, sayma sürecinden gelen veri kümesi içerisinde trend olduğunu ve bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanların dağılımının aynı olmadığını ifade eder. Bu tür durumlarda sayma süreçlerinden gelen veri kümesi bir yenileme süreci ile modellenemez ve böylece model olarak homojen olmayan bir Poisson süreci ya da doğrudan stokastik monoton bir sayma süreci düşünülmelidir.

Stokastik olarak modelleme yaparken ilk olarak sayma sürecinden gelen veri kümesi yapısında bir trendin varlığının araştırılması gerekir. Trendin varlığı durumunda bu trend karşımıza çoğunlukla monoton olarak çıkmaktadır. Monoton bir trend aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım (4.1) : $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sayma sürecinden gelen bir veri kümesi olsun. Burada $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'ler bu sayma sürecine göre gerçekleşen ilk n olay için olaylar arası geçen zamanları gösterir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olmak üzere $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $i < j$ iken $X_i >_{st} (<_{st}) X_j$, yani her $x > 0$ için $F_{X_i}(x) < (>) F_{X_j}(x)$ olması süreçte monoton bir trendin varlığını ifade eder.

1. $F_{X_i}(x) > F_{X_j}(x)$ $i, j = 1, 2, \dots, n$; $j > i$; her $x > 0$ (İYİLEŞEN SÜREÇ)
2. $F_{X_i}(x) < F_{X_j}(x)$ $i, j = 1, 2, \dots, n$; $j > i$; her $x > 0$ (KÖTÜLEŞEN SÜREÇ).

Sayma süreçlerinden gelen bir veri seti için ya da başka bir deyişle herhangi bir sistem yapısında meydana gelen hata, bozulma, yenileme, onarma gibi ifadelerle elde edilmiş olan veri seti için trend, bu veri setinin yapısında sistematik bir değişim olduğunu ifade etmektedir. Bu sistematik değişimin yapısına göre trend monoton veya monoton olmayan olabilir. Monoton trend, olaylar arası geçen zamanlar artma eğiliminde ise

azalan trend (iyileşen süreç), azalma eğiliminde ise artan trend (kötüleşen süreç) olarak ifade edilir. Monoton olmayan yapıya sahip olan trend ise döngüsel veya küvet biçiminde olabilir. Döngüsel trend, belli bir noktaya kadar azalan (artan) o noktadan itibaren artan (azalan) trend olarak meydana gelir. Küvet trend ise başlangıçta azalan (artan) trend, belli bir periyot trendsiz bir yapı ve son olarak artan (azalan) trend biçiminde elde edilir. Uygulamalarda karşımıza en çok çıkan trend yapısı, monoton artan trend veya küvet trend şeklidir.

4.1 Grafiksel Yöntemler

Sayma sürecinden gelen bir veri setinin incelenmesi ve sezgisel olarak nitelenebilmesi için en basit yol grafiksel bir yöntemdir. Genelde, trend içermeyen bir veri lineer bir doğru boyunca uzanan bir yapı ile karşımıza çıkacaktır. Lineerlikten sapma trendin var olduğundan şüphe duymamıza neden olacaktır. Veri yapısı içerisinde trendin varlığını, var olduğunda şeklinin ne olduğunu anlamamıza yardımcı olabilecek birçok grafiksel yöntem vardır.

4.1.1 Birikimli olay sayısının, birikimli zamana göre grafiği

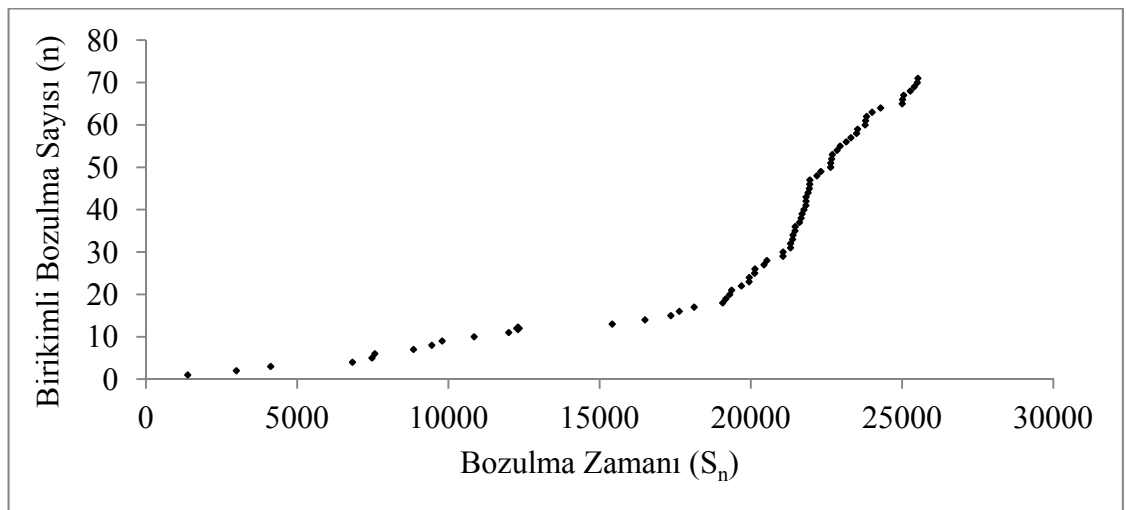
Olaylar arası geçen zamanlar, sistem yapısı iyileşen (kötüleşen) olduğunda büyüme (küçülme) eğiliminde olacaktır. Böylelikle birikimli olay sayısının, birikimli zamana göre grafiğini elde ettiğimizde iyileşen (kötüleşen) sistem için konkav (konveks) yapı karşımıza çıkacaktır.

Örnek 4.1 : Bir Amerikan denizaltısı olan USS Halfbeak'ın 3 numaralı ana itici güç motorunun birikimli bozulma zamanları saat olarak aşağıdaki çizelge 4.1'de verilmiştir (Ascher ve Feingold 1984). Burada sistemin 25518. saatteki 71. bozulmaya kadar gözlemlendiği kabul edilir.

Çizelge 4.1 USS Halfbeak denizaltısının 3 numaralı itici güç motoru için birikimli bozulma zamanları

1382	17632	21309	21943	23791
2990	18122	21310	21946	23822
4124	19067	21378	22181	24006
6827	19172	21391	22311	24286
7472	19299	21456	22634	25000
7567	19360	21461	22635	25010
8845	19686	21603	22669	25048
9450	19940	21658	22691	25268
9794	19944	21688	22846	25400
10848	20121	21750	22947	25500
11993	20132	21815	23149	25518
12300	20431	21820	23305	
15413	20525	21822	23491	
16497	21057	21888	23526	
17352	21061	21930	23774	

Birikimli hata sayısının, birikimli zamana göre grafiğini çizdiğimizde bu veri yapısı karşımıza konveks bir şekilde çıkmaktadır. Bu verinin artan bir trende sahip olabileceği grafiksel yöntem sonucunda söylenebilir.



Şekil 4.1 USS Halfbeak denizaltısının 3 numaralı itici güç motoru için birikimli bozulma sayısının birikimli zamana göre grafiği

4.1.2 Ardışık zaman periyotlarında SBO tahminine dayalı grafik

Birikimli hata sayısının doğasında bulunan monoton artanlıktan dolayı bazen yerel değişimler kendini gizleme eğilimi gösterebilmektedir. Bu durumda birikimli hata sayısının yerine alternatif bir yöntem toplam gözlem aralığını üç veya daha fazla alt aralığa bölmek ve her bir alt aralık için SBO tahmini yapmak olabilir. Böylece eğer sistem iyileşen (kötüleşen) olursa ardışık SBO tahminleri için azalan (artan) bir eğilim söz konusu olacaktır.

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu bilinmeyen homojen olmayan bir Poisson süreci ve $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ bu süreçten gelen bir veri kümesi olsun. $M(t)$ bu sürecin ortalama değer fonksiyonu olmak üzere

$$\lambda(t) = \frac{dM(t)}{dt}, t \geq 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin göz önüne alınmasıyla $\lambda(t)$ için doğal bir tahmin edici, uygun bir Δt ile

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n I(t < X_1 + X_2 + \dots + X_n < t + \Delta t) \quad (4.1)$$

olarak verilir. Burada $I(.)$ bir gösterge fonksiyonudur ve (4.1)'deki toplam, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kümesine bağlı olarak $(t, t + \Delta t]$ zaman aralığında gerçekleşen olay sayısını ifade eder.

Sürecin gözlem aralığı k tane $(0, a_1], (a_1, a_2], \dots, (a_{k-1}, a_k]$ alt aralığa parçalanırsa $j = 1, 2, \dots, k$ için $\lambda(\frac{1}{2}(a_{j-1} + a_j))$ 'nın bir tahmini

$$\hat{\lambda}(\frac{1}{2}(a_{j-1} + a_j)) = \frac{N(a_j) - N(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}$$

olur, böylelikle $b_j = \frac{1}{2}(a_j + a_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere b_j 'ye karşı $\hat{\lambda}(b_j)$ 'nin grafiğine ulaşılır. Bu grafik $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonunun şekline ilişkin olarak makul bir belirti verecektir.

Bu grafiği oluştururken k veya a_j 'lerin seçimi büyük önem taşımaktadır. Çünkü grafik ile verilen görsel izlenimin kullanılan sınıflandırmaya ciddi bir şekilde bağımlı

olmadığını kontrol etmek gereklidir. Farklı parçalanmaların seçimiyle farklı bilgiler edinilebilir. Bir histogramı oluştururken izlenen yol burada k veya a_j 'lerin seçimi için tavsiye edilebilir.

Örnek 4.2 : Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin ardışık bozulmalar arası geçen zamanları saat olarak çizelge 4.2'de verilmiştir (Proschan 1963).

Çizelge 4.2 Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin ardışık bozulmalar arası geçen zamanları

413	9	118	57
14	169	34	62
58	447	31	7
37	184	18	22
100	36	18	34
65	201	67	

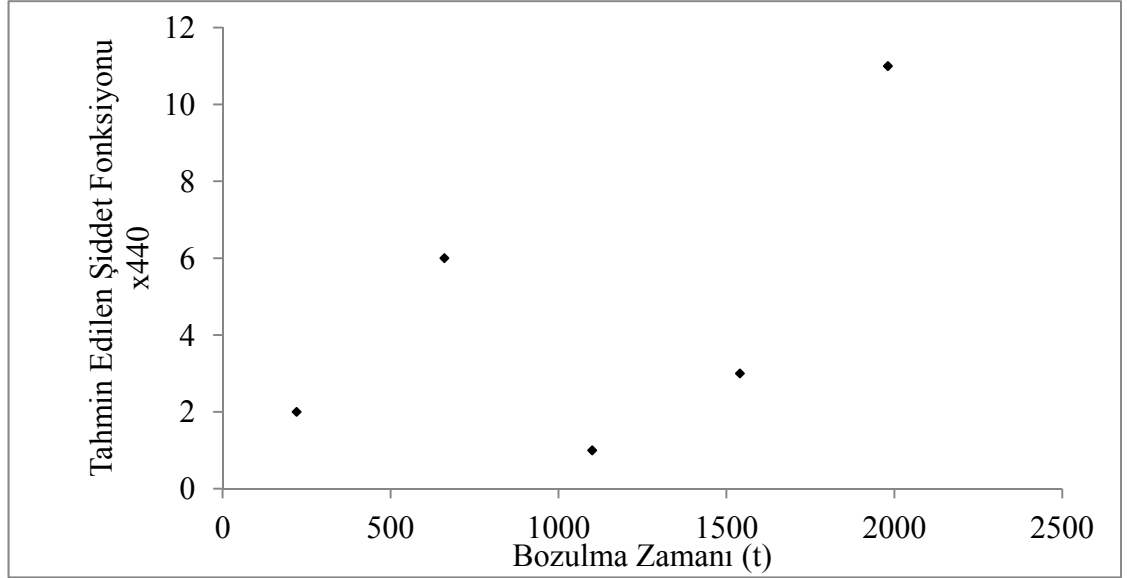
Bu gözlemlerin ardışık bozulmalar arası geçen zamanları $X_1, X_2, \dots, X_n$ olan bir $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinden geldiği açıktır. Bu veriye ilk bakışta meydana gelen olaylar sona doğru gidildikçe, başlangıçtakine göre çok daha sıklıkla gerçekleşme eğilimi göstermektedir. Bu veride bir trendin varlığını, yani rasgele değişkenlerin aynı dağılımlı olmadığı fikrini akla getirir.

$\lambda(t)$ şiddet fonksiyonunun tahminlerini elde etmek için 5 sınıf seçilip $\Delta t = 440$ alınarak aşağıdaki çizelge oluşturulur.

Çizelge 4.3 Bir Boeing 720 uçağının havalandırma sistemi veri seti için bozulmaların sayısı ve tahmin edilen $\lambda(t)$ değerleri

Sınıflar	b_j	Bozulmaların Sayısı	$\hat{\lambda}(b_j)$
(0,440]	220	2	2/440
(440,880]	660	6	6/440
(880,1320]	1100	1	1/440
(1320,1760]	1540	3	3/440
(1760,2201]	1980.5	11	11/440

Bu çizelgede verilenler kullanılarak $\lambda(t)$ 'nin tahminlerinin grafiği oluşturulur.



Şekil 4.2 Boeing 720 uçağının havalandırma sisteminin SBO tahminine dayalı grafiği

Böylelikle SBO tahminine dayanarak çizilen grafiğe göre, ilgili veri kümesinde trendin varlığı açık bir şekilde görülmektedir.

4.1.2.1 Fisher kriteri

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 'ler bir sayma sürecine göre gerçekleşen ilk n olay için olaylar arası geçen zamanları gösterebilir. $S_0 = 0$ ve $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere S_n, n . olayın gerçekleşme zamanını gösterir. Fisher kriterine göre olaylar arası geçen zamanların üstel dağılıma uygunluğunu gösterebilmek amacıyla oluşturulan test istatistiği $T = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} X_i}{S_n}$ ve hipotezler

H_0 : Olaylar arası geçen zamanların dağılımları üstel dağılımdır.

H_1 : Olaylar arası geçen zamanların dağılımları üstel dağılım değildir.

biçimindedir. Yokluk hipotezi altında bu test istatistiğinin olasılık dağılımı ise

$$P\left(\frac{X_{(n)}}{S_n} > x\right) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{j} (1-jx)^{k-1} & , \frac{1}{k} < x < \frac{1}{k-1} \\ 0 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$k = 2, 3, \dots, n$ için elde edilecektir (Fisher 1929). Böylelikle test istatistiği değerinin, kritik değerden büyük olması α anlam düzeyinde yokluk hipotezinin red edileceği anlamına gelecektir.

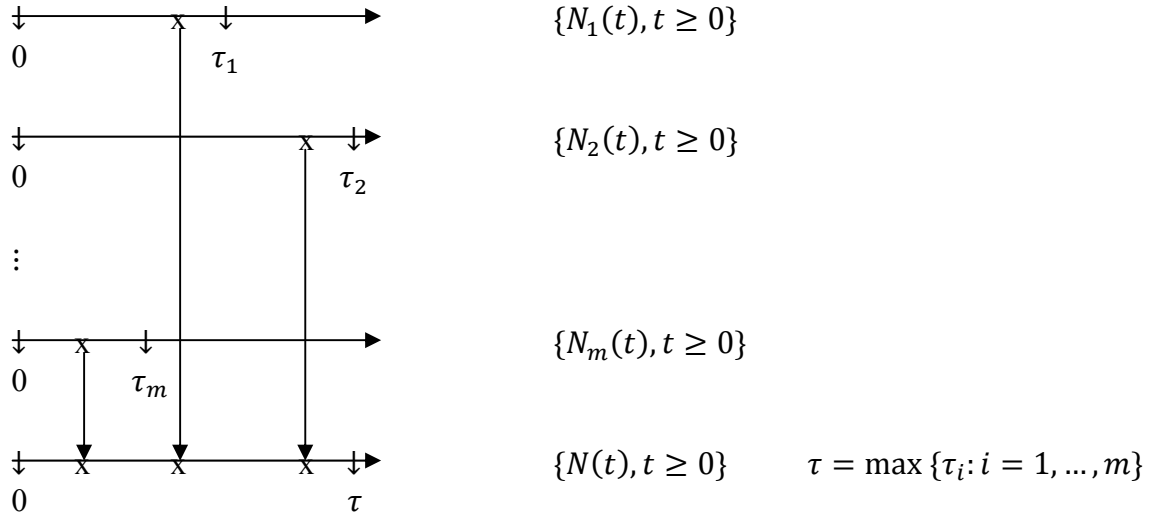
$\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde Fisher kriteri için kritik değerler çizelge 4.4’de verilmiştir.

Çizelge 4.4 Fisher kriteri kritik değer tablosu

1 – α = 0.95		1 – α = 0.95	
n	x	n	x
5	0.68377	30	0.19784
10	0.44495	35	0.17513
15	0.33462	40	0.15738
20	0.27040	45	0.14310
25	0.22805	50	0.13135

4.1.3 Nelson-Aalen grafiği

Varsayalım ki m sistem gözlensin. Herbir sisteme ait bireysel sayma süreçleri $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $i = 1, \dots, m$ olmak üzere bu süreçler birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı olsun. i . sürece ait gözlem aralığı $(0, \tau_i]$ biçiminde tanımlansın. t zamanında gözlem altında (tanımlı) olan süreç sayısını $y(t)$ fonksiyonu göstereyin. Burada $I(.)$ bir gösterge fonksiyonu olmak üzere $y(t) = \sum_{k=1}^m I(\tau_k \geq t)$ olduğu açıktır.



$N(t) = \sum_{k=1}^m N_k(t)$ olduğunda $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine üstüste gelmiş süreç denir. S_k , üstüste gelmiş süreç içerisindeki k . varış zamanını ifade etsin.

$0 < S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_N < \tau$ olmak üzere $M(t) = E(N(t))$ ortalama değer fonksiyonunun, parametrik olmayan Nelson-Aalen tahmin edicisi $\hat{M}(t) = \sum_{S_k \leq t} \frac{1}{y(S_k)}$ biçimindedir. Böylelikle bu tahmin edicinin birikimli zamana göre grafiği Nelson-Aalen grafiği olarak isimlendirilir.

Örnek 4.3 : Her biri 16 valf-kayışına sahip 41 dizel motorda meydana gelen valf kayışı yenilemeleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir (Nelson 1995).

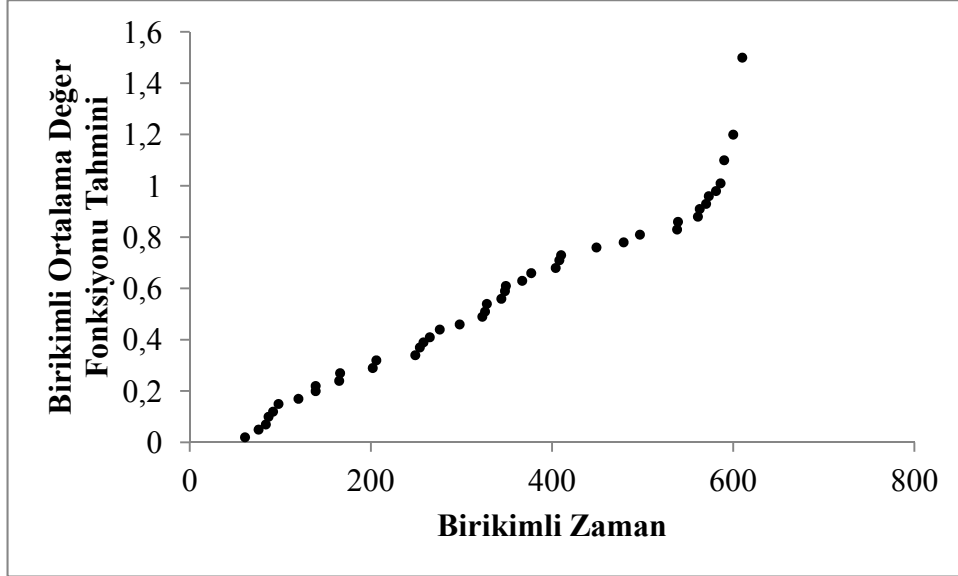
Çizelge 4.5 Valf-Kayışı yenilemeleri

Motor No.	Yenileme Zamanı	Çalışma Süresi: τ_i
1	-	761
2	-	759
3	98	667
4	326, 653, 654	667
5	-	665
6	84	667
7	87	663
8	646	653
9	92	653
10	-	651

Çizelge 4.5 Valf-Kayışı yenilemeleri (devamı)

11	258, 328, 377, 621	650
12	61, 539	648
13	254, 276, 298, 640	644
14	76, 538	642
15	635	641
16	349, 404, 561	649
17	-	631
18	-	596
19	120, 479	614
20	323, 449	582
21	139, 140	589
22	-	593
23	573	589
24	165, 408, 604	606
25	249	594
26	344, 497	613
27	265, 586	595
28	166, 206, 348	389
29	-	601
30	410, 581	601
31	-	611
32	-	608
33	-	587
34	367	603
35	202, 563, 570	585
36	-	587
37	-	578
38	-	578
39	-	586
40	-	585
41	-	582

$\hat{M}(t)$ tahmin değerleri $t < \tau$ için anlamlıdır. Her $t > \tau$ için sabittir ve bir anlamı yoktur. Valf-Kayışı veri setine ait parametrik olmayan $\hat{M}(t)$ tahmin değerleri elde edilip grafik oluşturulur. Örneğin $t = 98$ 'de $\hat{M}(t) = 0.15$ olarak elde edilir.



Şekil 4.3 Nelson-Aalen grafiği

İlk 550 günlük yenilemeler sabit olarak görülmektedir. Bu günden itibaren grafiğin sağ tarafı incelendiğinde konveks yapı ile karşılaşilmektedir. Bu durum veri yapısında trendin varlığını ifade etmektedir.

Özel olarak Nelson-Aalen grafiğinde $m = 1$ alınırsa birikimli hata sayısının birikimli zamana göre grafiği elde edilir.

4.1.4 Testteki toplam zaman grafiği

Varsayalım ki m sistem gözlemlensin. Her bir sisteme ait bireysel sayma süreçleri $\{N_i(t), t \geq 0\}$ $i = 1, \dots, m$ olmak üzere bu süreçler birbirinden bağımsız ve aynı $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan Poisson süreci olsun. S_i 'lerden bağımsız, τ_i 'lerin bir fonksiyonu olan $y(t)$, t zamanında gözlem altında olan süreç sayısını ifade etsin. $y(t) = \sum_{k=1}^m I(\tau_k \geq t)$ olduğu açıktır.

$k = 1, 2, \dots, m$ için $N_k(t)$ süreci $0 \leq t \leq \tau_k$ için gözlem altında olduğundan $N(t)$ üst üste gelmiş süreci t 'de tanımlı olan $N_k(t)$ süreçlerinin toplamı ile tanımlı olur. Yani

$N(t) = \sum_{k=1}^m N_k(t) I(\tau_k \geq t)$, $0 \leq t \leq \tau$ biçiminde ifade edilir. Böylece $\{N_k(t), t \geq 0\}$, $k = 1, 2, \dots, m$ bağımsız ve aynı $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan Poisson süreci olduğunda $M(t) = \sum_{k=1}^m M_k(t) dt = m M_1(t)$ olacağından $\{N(t), t \geq 0\}$ üst üste gelmiş süreci $\phi(t) = m \lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olacaktır.

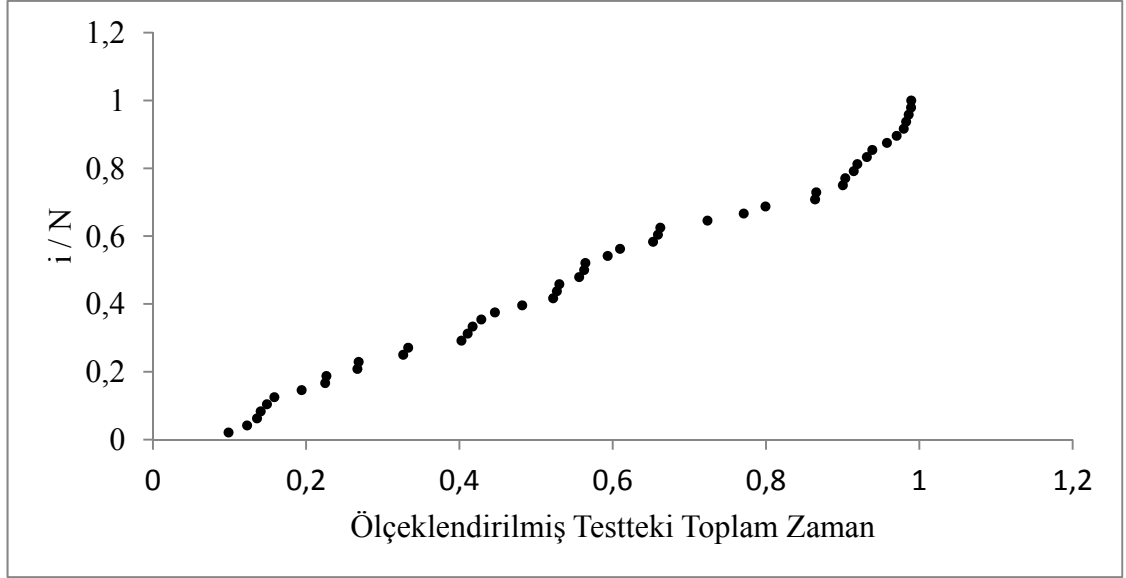
t zamanında testteki toplam zaman $r(t) = \int_0^t y(u) du$ olarak tanımlandığında, testteki toplam zaman grafiği $(\frac{i}{N}, \frac{r(S_i)}{r(\tau)})$ $i = 1, \dots, N$ noktaları ile belirlenecektir. Burada $r(\tau) = \sum_{i=1}^m \tau_i$ olduğu açıktır.

Örnek 4.4 : Her biri 16 valf-kayışına sahip 41 dizel motorda meydana gelen valf kayışı yenilemeleri tekrar ele alınsın.

Çizelge 4.6 Testteki toplam zaman grafiği noktaları

$\frac{i}{N}$	$\frac{r(S_i)}{r(\tau)}$	$\frac{i}{N}$	$\frac{r(S_i)}{r(\tau)}$	$\frac{i}{N}$	$\frac{r(S_i)}{r(\tau)}$
0,0208	0,0986	0,3541	0,4283	0,6875	0,7991
0,0416	0,1228	0,3750	0,4461	0,7083	0,8638
0,0625	0,1357	0,3958	0,4817	0,7291	0,8653
0,0833	0,1406	0,4166	0,5221	0,7500	0,9000
0,1041	0,1487	0,4375	0,5269	0,7708	0,9032
0,1250	0,1584	0,4583	0,5302	0,7916	0,9142
0,1458	0,1939	0,4791	0,5560	0,8125	0,9190
0,1666	0,2246	0,5000	0,5625	0,8333	0,9313
0,1875	0,2263	0,5208	0,5641	0,8541	0,9384
0,2083	0,2667	0,5416	0,5932	0,8750	0,9576
0,2291	0,2683	0,5625	0,6094	0,8958	0,9702
0,2500	0,3265	0,5833	0,6524	0,9166	0,9794
0,2708	0,3330	0,6041	0,6587	0,9375	0,9826
0,2916	0,4025	0,6250	0,6619	0,9583	0,9860
0,3125	0,4105	0,6458	0,7234	0,9791	0,9890
0,3333	0,4170	0,6666	0,7707	1,000	0,9893

Çizelge 4.6’da elde edilmiş olan verilere göre, testteki toplam zaman grafiği şekil 4.4’de elde edilir.



Şekil 4.4 Testteki toplam zaman grafiği

Testteki toplam zaman grafiğinin tanımına göre trendsiz bir verinin birim kare üzerindeki diagonal çizgi etrafında yayılım göstermesi beklenir. Alternatif yorumlamalar ise trendin varlığına yönelik olacaktır. Elde edilen grafiğe göre Nelson-Aalen grafiğinde olduğu gibi bu veri setinin trende sahip olduğu söylenebilir.

4.2 Trend Testleri

Sayma süreçlerinden gelen bir veri setinin yapısındaki sistematik değişimlerin istatistiksel olarak anlamlılığını test eden trend testleri, yokluk hipotezlerine veya alternatif hipotezlerine göre sınıflandırılır. Yokluk hipotezleri sayma sürecinin durağan bir süreç olduğunu ifade edecek biçimde homojen Poisson süreci veya yenileme süreci olabilir. Alternatif hipotezler ise trendin yapısına göre monoton trend veya monoton olmayan trend olarak kurulur. Bu çalışmada trend testleri alternatif hipotezlerine göre sınıflandırılmıştır. İlk olarak alternatif hipotezi monoton trendi işaret eden testler daha sonra ise alternatif hipotezi monoton olmayan trendi işaret eden testler verilmiştir.

4.2.1 Monoton trend için testler

Bu bölümde ilk olarak yokluk hipotezi homojen Poisson sürecini daha sonra ise yokluk hipotezi yenileme sürecini gösteren trend testleri verilir.

Yokluk hipotezi homojen Poisson süreci iken monoton trendin varlığını ortaya çıkarmak için önerilen testler Laplace ve Military Handbook testleridir.

4.2.1.1 Laplace testi

n . varış zamanı $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ olmak üzere yokluk hipotezi altında, ilk $(n - 1)$ varış zamanları olan $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ rasgele değişkenlerine $(0, S_n]$ aralığından alınmış düzgün dağılıma sahip $n - 1$ tane rasgele değişkenin sıra istatistikleri olarak bakılabilir. Bu durumda merkezi limit teoreminden

$$U = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_i - \frac{(n-1)S_n}{2}}{S_n \sqrt{\frac{1}{12(n-1)}}}}$$

rasgele değişkeni büyük n için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Cox ve Lewis 1966). $U > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $U < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ olduğunda H_0 red edilir. $n \geq 4$ %5 anlamlılık düzeyi için yeterlidir (Bates 1955).

Laplace testinin temelinde yatan düşünce olay zamanlarının beklenen değeri ile gözlem aralığının orta noktasını karşılaştırma esasına dayanır. Eğer sayma süreçlerinden gelen veri seti içerisinde monoton bir trendin varlığı söz konusu ise bu trend olay zamanlarının beklenen değerinin, gözlem aralığının orta noktalarından ne derece de sapmış olabileceğini gösterir. Monoton bir trendin varlığında $U < 0$ ise monoton azalan bir trende, $U > 0$ ise monoton artan bir trende işaret edecektir.

4.2.1.2 Military Handbook testi

Herhangi bir U rasgele değişkeni $(0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olsun. Bu rasgele değişkene ilişkin yapılan $-2\ln(U)$ dönüşümü ile elde edilecek olan rasgele değişkenin dağılımı 2 serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına uygunluk gösterecektir

(Kvaløy ve Lindqvist 1998). Bu noktadan hareketle n . varış zamanı $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ olmak üzere yokluk hipotezi altında, ilk $(n - 1)$ varış zamanları olan $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ rasgele değişkenleri $(0, S_n]$ aralığından alınmış düzgün dağılıma sahip $n - 1$ tane rasgele değişkenin sıra istatistikleri olacağından $\sum_{i=1}^n \ln S_i$ rasgele değişkeninin normalleştirilmesi sonucu aşağıdaki test istatistiği oluşturulur.

$$Z = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left(\frac{S_n}{S_i} \right) \sim \chi^2_{2(n-1)}$$

Eğer sayma süreçlerinden gelen veri seti içerisinde monoton artan bir trendin varlığı söz konusu ise Z test istatistiğinin yokluk hipotezindeki değere göre küçük olması, monoton azalan bir trendin varlığı söz konusu ise Z test istatistiğinin yokluk hipotezindeki değere göre büyük olması gerekecektir (Anonymous, 1981).

Yokluk hipotezi yenileme süreci iken monoton trendin varlığını ortaya çıkarmak için önerilen testler Mann ve Lewis-Robinson testleridir.

4.2.1.3 Mann testi

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sayma sürecinden gelen bir veri kümesi olsun. Sayma süreçlerinden gelen bu veri kümesi büyüklüklerine göre $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ biçiminde sıralansın. $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ve $j = 2, 3, \dots, n$ olmak üzere $X_i < X_j, i < j$ olacak biçimde yapılabilecek $n(n - 1)/2$ tane karşılaştırmaya dayanarak aşağıdaki test istatistiği oluşturulur.

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n I(X_i < X_j)$$

Burada $I(.)$ bir gösterge fonksiyonudur. M test istatistiğinin dağılımı $n \geq 10$ olduğunda asimptotik olarak normal dağılıma uygunluk göstermektedir. Yani, $M \sim AN \left(\frac{n(n-1)}{4}, \frac{2n^3+3n^2-5n}{72} \right)$, dir. $n < 10$ olduğunda ise M istatistiğinin dağılımına ilişkin tablo oluşturulmuştur (Mann 1945).

Bu test istatistiği ilgili veri kümesine ait rank değerlerini kullandığından nümerik değerleri kullanan test istatistiklerine göre yanıltıcı sonuçlar verebilir.

4.2.1.4 Lewis-Robinson testi

Mann testi veya diğer rank testlerinin verebileceği düşünülen yanıltıcı sonuçlar dolayısıyla, sayma süreçlerinden gelen veri kümesinin nümerik değerlerini kullanılarak oluşturulan bir test istatistiğidir. Lewis-Robinson test istatistiği, Laplace test istatistiğinin varyasyon katsayısına bölünmesi ile elde edilir.

$$LR = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_i - \frac{(n-1)S_n}{2}}{n\sqrt{\frac{n-1}{12}} S} \sim N(0,1)$$

Burada $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ ve $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 'dir. Standart sapmanın tahmini olan

S yanlı bir tahmin edici olduğundan bu tahmini $S = \sqrt{\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2}$ gibi alıp trendi ortaya çıkarmada daha hassas bir test oluşturulur. Böylece yeni test istatistiği,

$$J = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_i - \frac{(n-1)S_n}{2}}{\sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)}{12}} S} \sim N(0,1)$$

biçimindedir (Kvaløy ve Lindqvist 2003).

4.2.2 Monoton olmayan trend için testler

Bu bölümde ilk olarak yokluk hipotezi homojen Poisson sürecini daha sonra ise yokluk hipotezi yenileme sürecini gösteren trend testleri verilir.

Yokluk hipotezi homojen Poisson süreci iken monoton olmayan trendin varlığını ortaya çıkarmak için önerilen testler $V1, V2, V3$ testleridir.

4.2.2.1 $V1, V2, V3$ testleri

Yokluk hipotezinin HPS olması altında monoton olmayan trendi test etmek için $V1, V2, V3$ testleri tanımlanmıştır. $V1, V2$ test istatistikleri Laplace ve Lewis-Robinson

test istatistiklerine benzer biçimde oluşturulmuştur. Laplace ve Lewis-Robinson testleri hata zamanının beklenen değeri ile gözlem aralığının orta noktalarından ne derece sapmış olacağı yönünde kurulmuştur. $V1, V2$ ise her bir S_i değerinin orta nokta ile arasındaki ortalama uzaklığa göre oluşturulmaktadır. $V3$ ise Military Handbook testi ile ilişkili olarak elde edilmiştir.

$$V1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left| S_i - \frac{S_n}{2} \right| - \frac{(n-1)S_n}{4}}{S_n \sqrt{\frac{(n-1)}{48}}} \sim N(0,1)$$

$$V2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left| S_i - \frac{S_n}{2} \right|^2 - \frac{(n-1)S_n^2}{12}}{S_n^2 \sqrt{\frac{(n-1)}{180}}} \sim N(0,1)$$

$$V3 = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left(\frac{S_n}{|2S_i - S_n|} \right) \sim \chi^2(2(n-1))$$

$V1, V2$ değerleri negatif olduğunda X_i değerlerinin küvet-biçimi olduğu, pozitif olduğunda ise küvet-biçiminin tam tersi olduğu, $V3$ içinse sağ kuyruk değerlerinin küvet-biçimli olduğu ifade edilmektedir (Vaurio 1999).

Yokluk hipotezi yenileme süreci iken monoton olmayan trendin varlığını ortaya çıkarmak için önerilen test genelleştirilmiş Anderson Darling testidir.

4.2.2.2 Genelleştirilmiş Anderson Darling testi

Yokluk hipotezi altında $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ yenileme sürecinden gelen bir veri kümesidir. $E(X_i) = \mu$ ve $Var(X_i) = \sigma^2$ olmak üzere $\varepsilon_i = X_i - \mu$ ve $T_j = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j = \sum_{i=1}^j X_i - j\mu = S_j - j\mu$ olarak tanımlansın. Burada S_j , j . varış zamanını gösterir. $V_{n,\mu,\sigma}$ bir stokastik süreç olsun ve

$$V_{n,\mu,\sigma}(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor} - \lfloor nt \rfloor \mu}{\sigma \sqrt{n}} + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)}{\sigma \sqrt{n}} (X_{\lfloor nt \rfloor + 1} - \mu)$$

biçiminde tanımlansın. $\{Z(t), t \geq 0\}$ bir Brown hareketi süreci olmak üzere Donsker teoremine göre $n \rightarrow \infty$ iken $V_{n,\mu,\sigma} \xrightarrow{d} Z$ 'dir. Yani $V_{n,\mu,\sigma}$ $n \rightarrow \infty$ iken dağılımında Brown

hareketi sürecine yakınsayacaktır. Ayrıca $Z^0(t) = Z(t) - tZ(1)$ ile tanımlanan Brown hareketi sürecinin bir Brown köprüsü olduğu bilinmektedir. Böylece

$$V_{n,\sigma}^0(t) = V_{n,\mu,\sigma}(t) - tV_{n,\mu,\sigma}(1) = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma} \left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{S_n} + \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)}{S_n} X_{\lfloor nt \rfloor + 1} - t \right)$$

$\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $V_{n,\sigma}^0 \xrightarrow{d} Z^0$ olarak bir Brown köprüsüdür. σ yerine tahmin edicisi olan $\hat{\sigma}$ alınarak $V_{n,\hat{\sigma}}^0 \xrightarrow{d} Z^0$ sonucuna ulaşılır.

Yokluk hipotezinin doğruluğu altında, sayma sürecinden gelen veri seti içerisinde trend olmadığında $V_{n,\hat{\sigma}}^0$ yaklaşık olarak bir Brown köprüsü olacaktır. Böylece $V_{n,\hat{\sigma}}^0$ 'nın Brown köprüsünden sapmasını ölçen test istatistikleri aynı zamanda verideki trendin varlığını ölçen test istatistikleri olacaktır. Bu düşünceden yola çıkarak Anderson-Darling istatistiği

$$GAD = \int_0^1 \frac{V_{n,\hat{\sigma}}^0(t)^2}{t(1-t)} dt \xrightarrow{d} \int_0^1 \frac{Z^0(t)^2}{t(1-t)} dt$$

biçiminde elde edilir. Hesaplamalar sonucunda ise

$$GAD = \frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sum_{i=1}^n \left[q_i^2 \ln\left(\frac{i}{i-1}\right) + (q_i + r_i)^2 \ln\left(\frac{n+1-i}{n-i}\right) - \frac{r_i^2}{n} \right]$$

burada $q_i = \frac{(S_i - iX_i)}{S_n}$, $r_i = \frac{nX_i}{S_{n-1}}$, $q_1 = 0$ ve $q_n + r_n = 0$ biçimindedir. Ayrıca

$S = \sqrt{\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2}$ alınarak duyarlı bir test istatistiği oluşturulur (Kvaløy ve Lindqvist 2003).

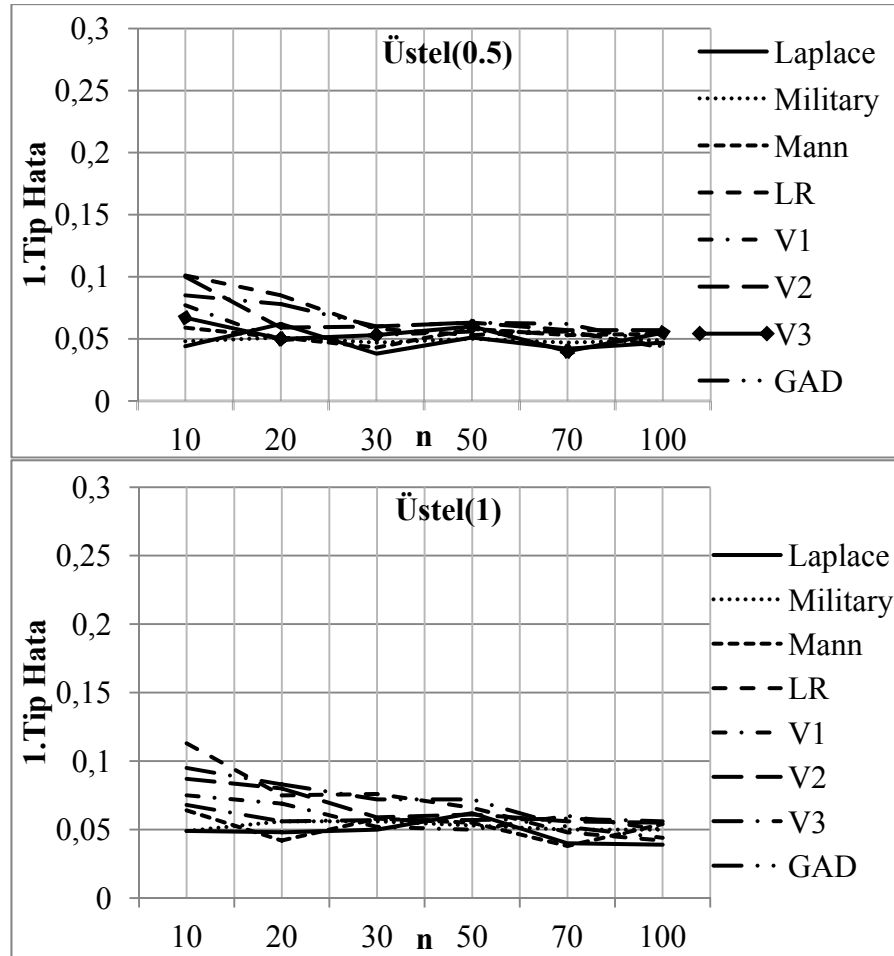
GAD istatistiğinin değeri $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyi için $GAD > 2.492$ ise yokluk hipotezi red edilir (Anderson ve Darling 1954).

5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

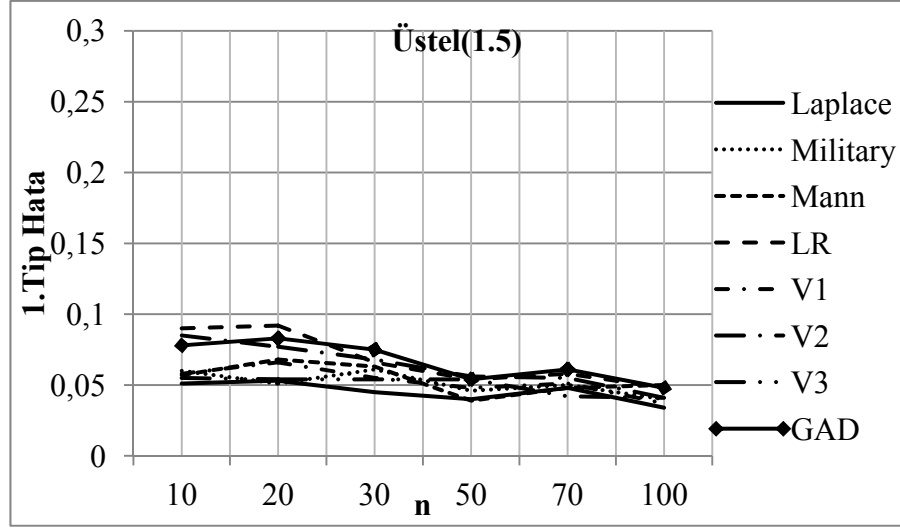
Bu bölümde literatürde yer alan trend testlerinin karşılaştırılması amacıyla simülasyon çalışması uygulanmıştır. İlk olarak yokluk hipotezi desteklenecek biçimde, daha sonra alternatif hipotez desteklenecek biçimde veri üretimi gerçekleştirilmiştir. Ayrıca karşılaştırılan trend testlerinin küçük ve büyük örneklem özelliklerini incelemek için n örneklem hacmi sırasıyla 10, 20, 30, 50, 70, 100 alınmıştır. 1.tip hata yapma olasılığı $\alpha = 0.05$ seçilmiştir. Tüm grafikler 1000 simülasyon üzerine kurulmuştur.

5.1 1.Tip Hata Çalışması

1. Yokluk hipotezi homojen Poisson süreci olduğunda, bu sürece göre veri üretimi olaylar arası geçen zaman dağılımları üstel ($\beta = 0.5, 1, 1.5$) biçiminde elde edilmiş ve şekil 5.1 oluşturulmuştur.



Şekil 5.1 Homojen Poisson süreci

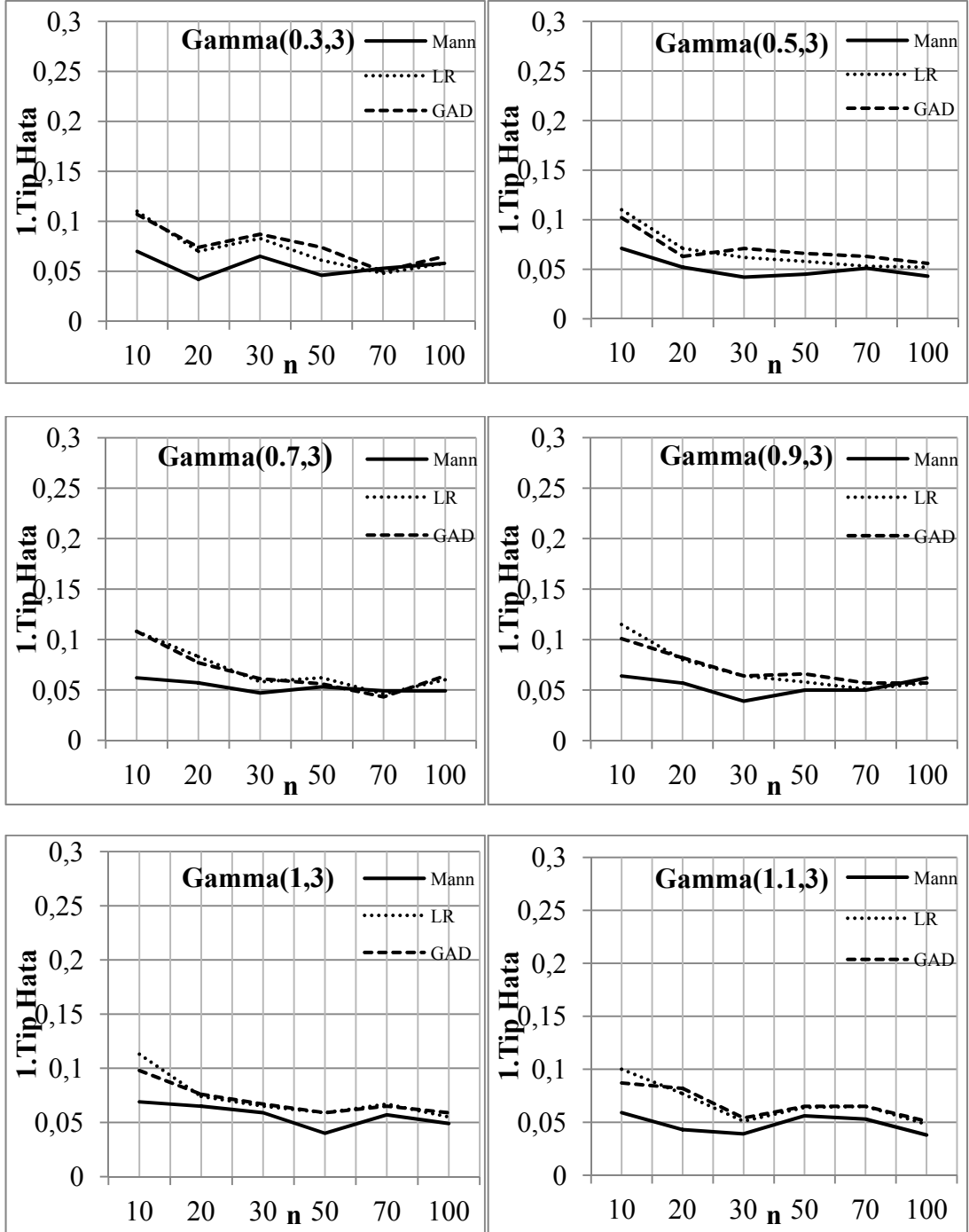


Şekil 5.1 Homojen Poisson süreci (devamı)

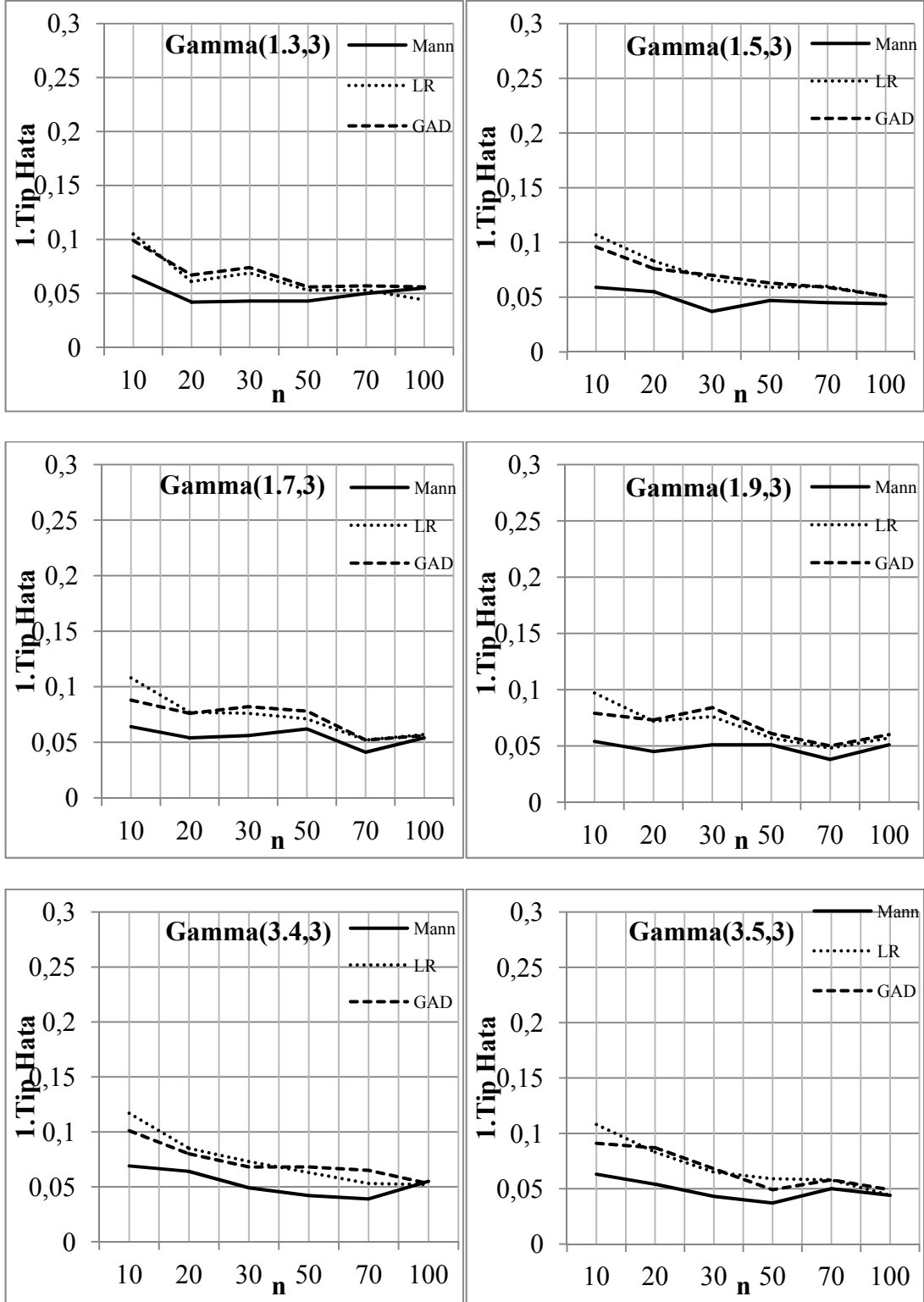
2. Yokluk hipotezi yenileme süreci olduğunda, bu sürece göre veri üretimi için olaylar arası geçen zamanların dağılımları aşağıdaki gibi seçilmiştir.

- Şekil parametresinin 1'den küçük veya büyük olmasına bağlı olarak gamma dağılımı ve şekil parametresi $\alpha = 3.4, 3.5, 3.6$ iken normal dağılıma yakınsamasını göz önüne alarak simetriklik özelliğinin testler üzerine etkisini araştırmak amacıyla gamma dağılımı,
- $\mu > 3\sigma$ koşulu altında normal dağılım,
- Lognormal dağılım,
- Kesilmiş normal dağılım,
- Şekil parametresinin 1'den küçük veya büyük olmasına bağlı olarak Weibull dağılımı ve şekil parametresi $\alpha = 3.4, 3.5, 3.6$ iken normal dağılıma yakınsamasını göz önüne alarak simetriklik özelliğinin testler üzerine etkisini araştırmak amacıyla Weibull dağılımı

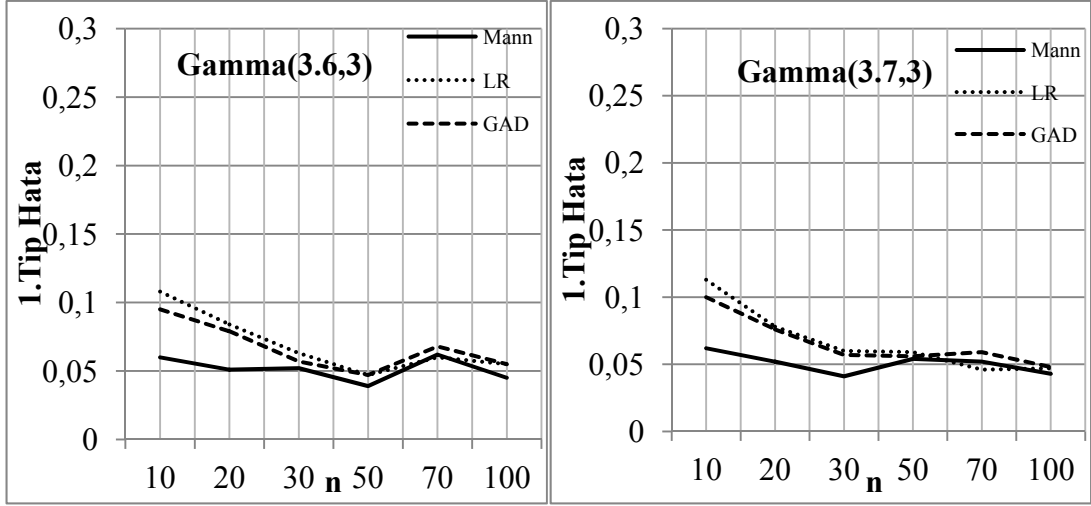
kullanılıp şekil 5.2-5.6'daki grafikler oluşturulmuştur. Burada gözden kaçırılmaması gereken nokta yokluk hipotezi yenileme süreci olan Mann, Lewis-Robinson ve genelleştirilmiş Anderson Darling testlerinin 1.tip hata olasılıklarına göre karşılaştırılmış olmasıdır.



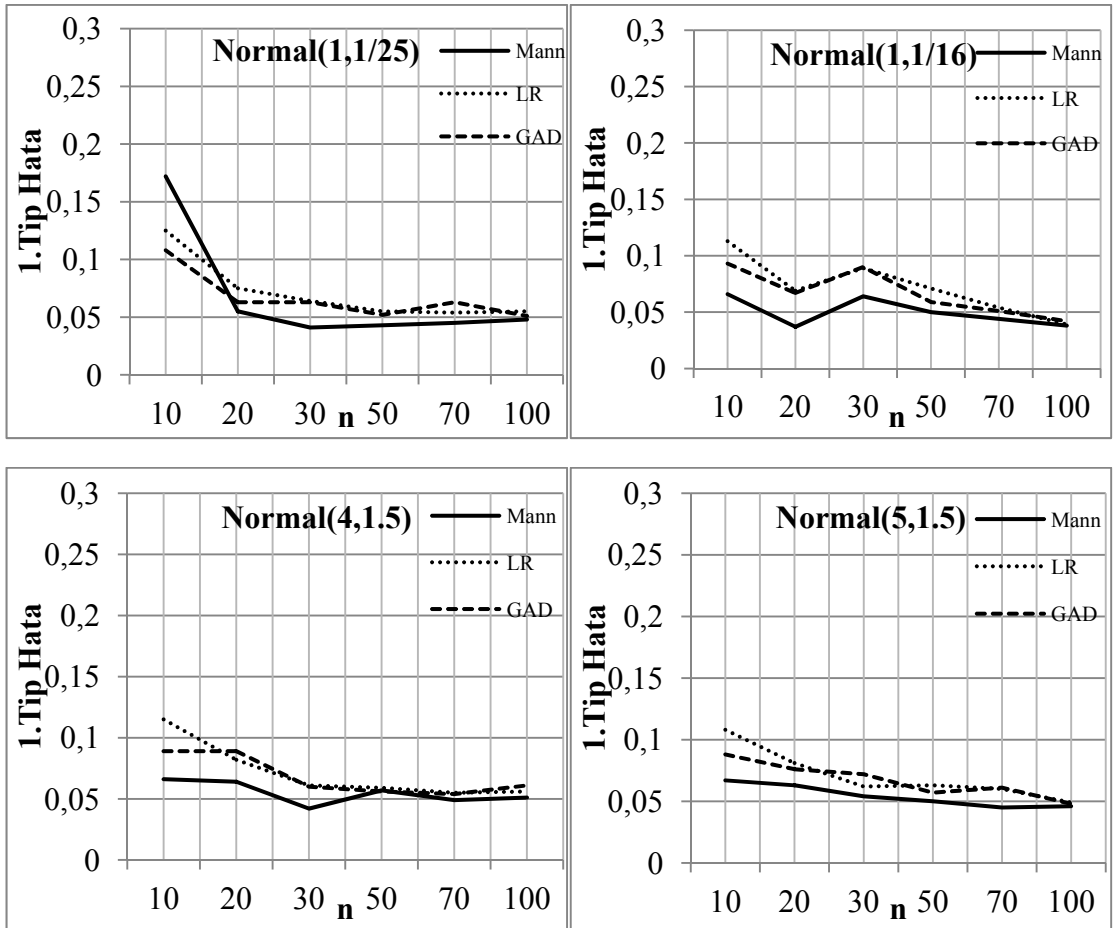
Şekil 5.2 Yenileme süreci Gamma dağılımı



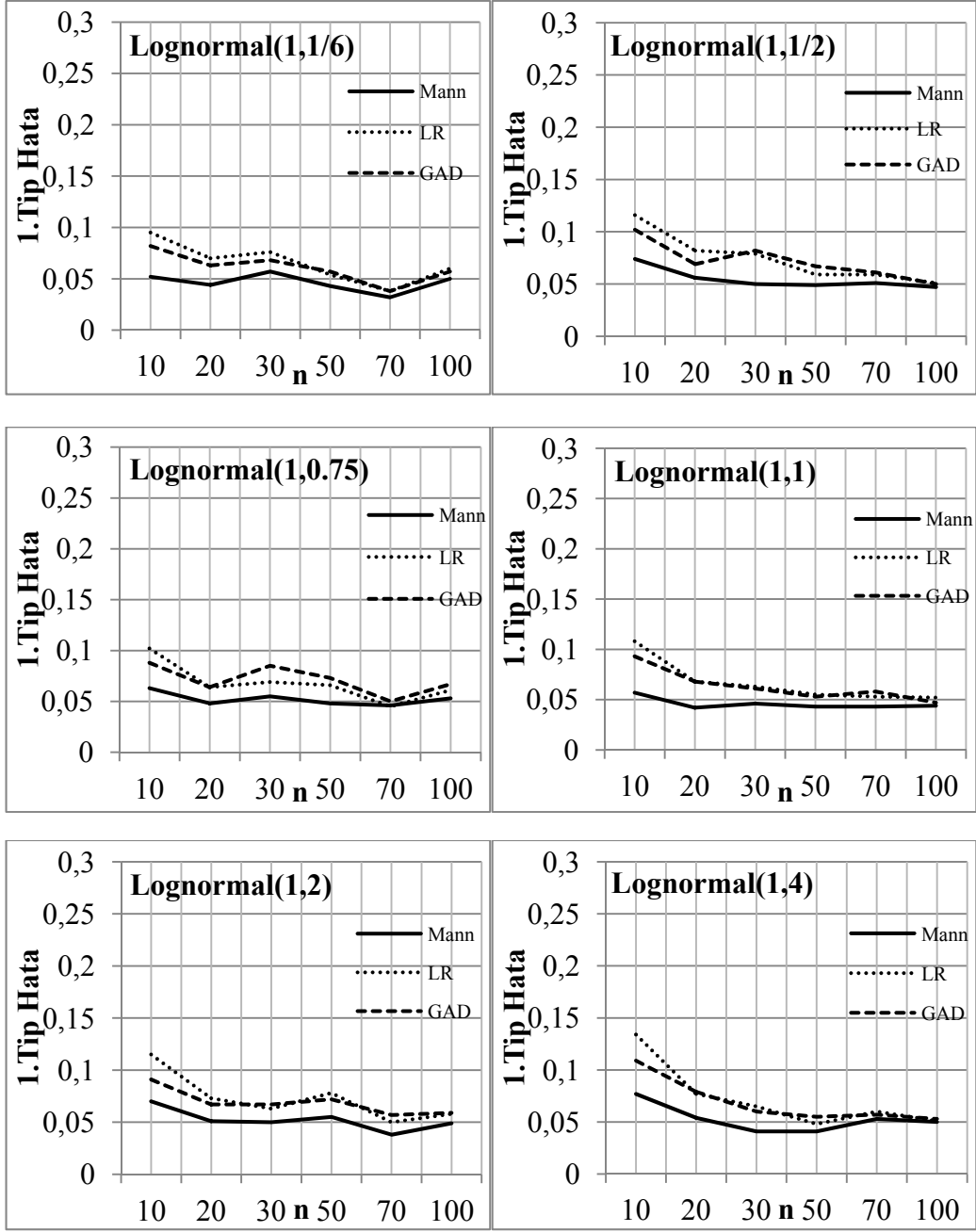
Şekil 5.2 Yenileme süreci Gamma dağılımı (devamı)



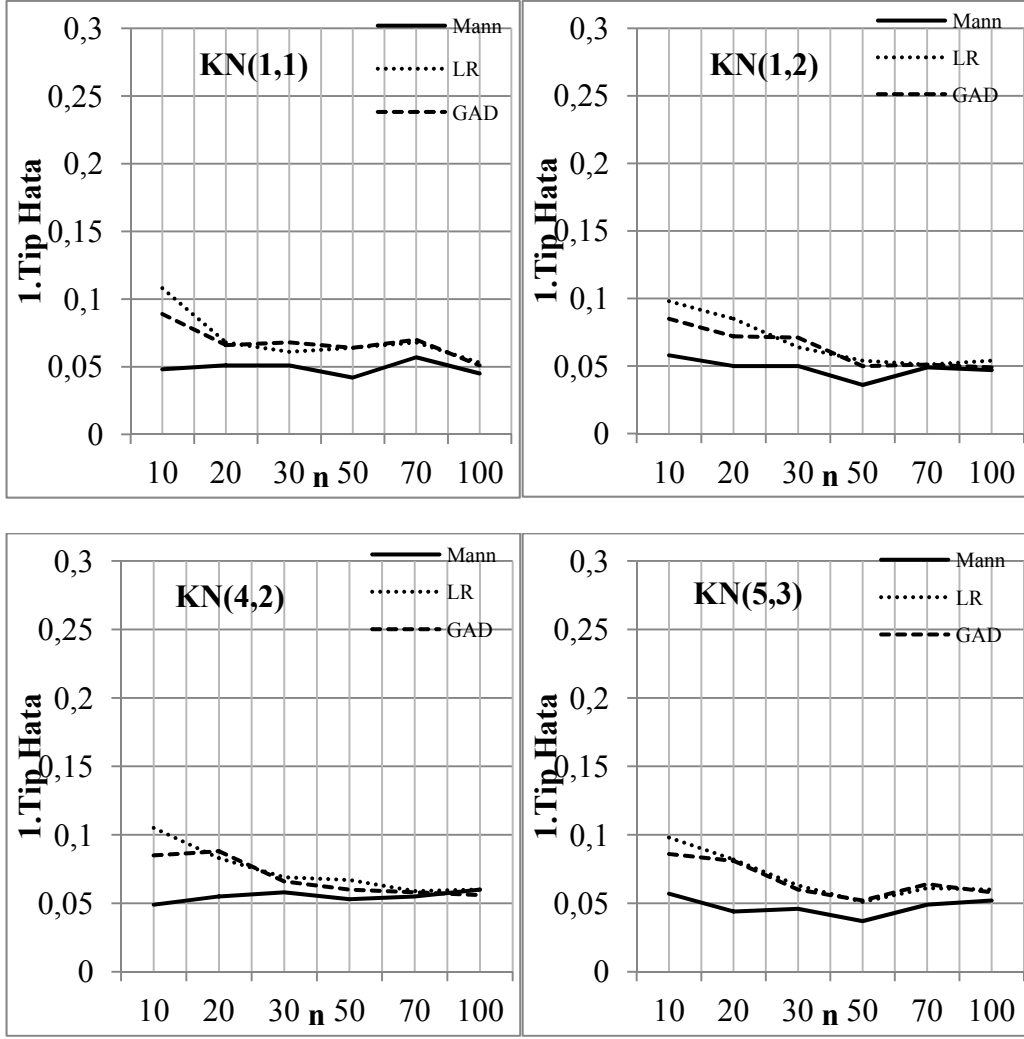
Şekil 5.2 Yenileme süreci Gamma dağılımı (devamı)



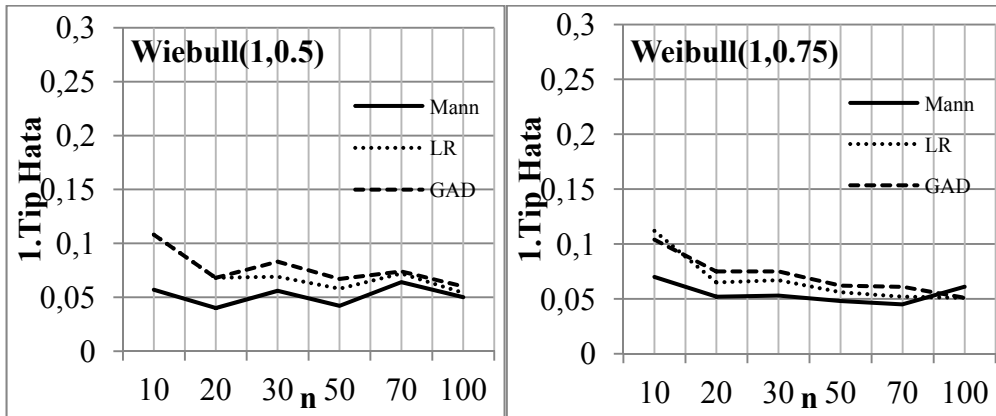
Şekil 5.3 Yenileme süreci normal dağılımı



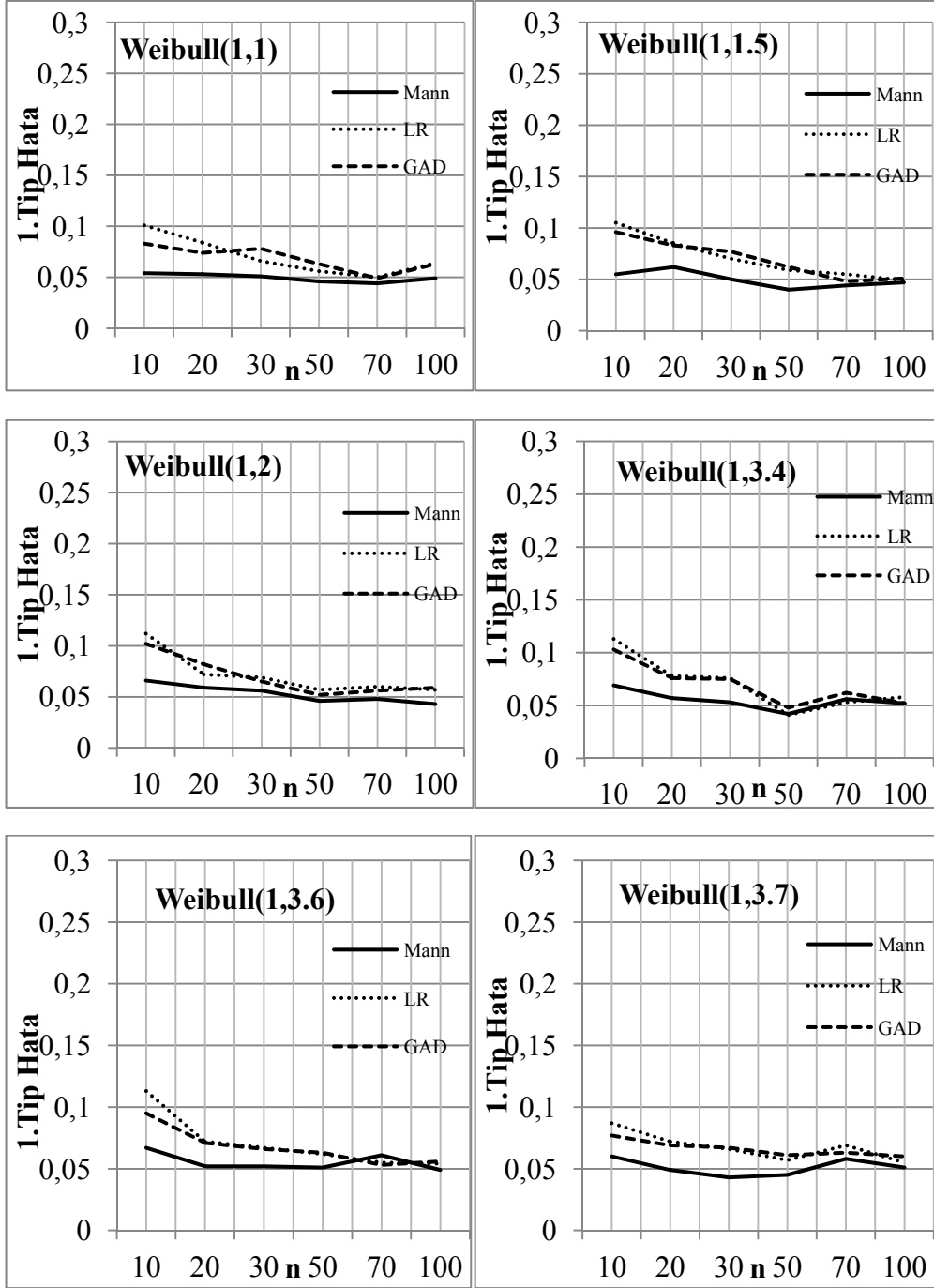
Şekil 5.4 Yenileme süreci lognormal dağılım



Şekil 5.5 Yenileme süreci kesilmiş normal



Şekil 5.6 Yenileme süreci Weibull dağılımı

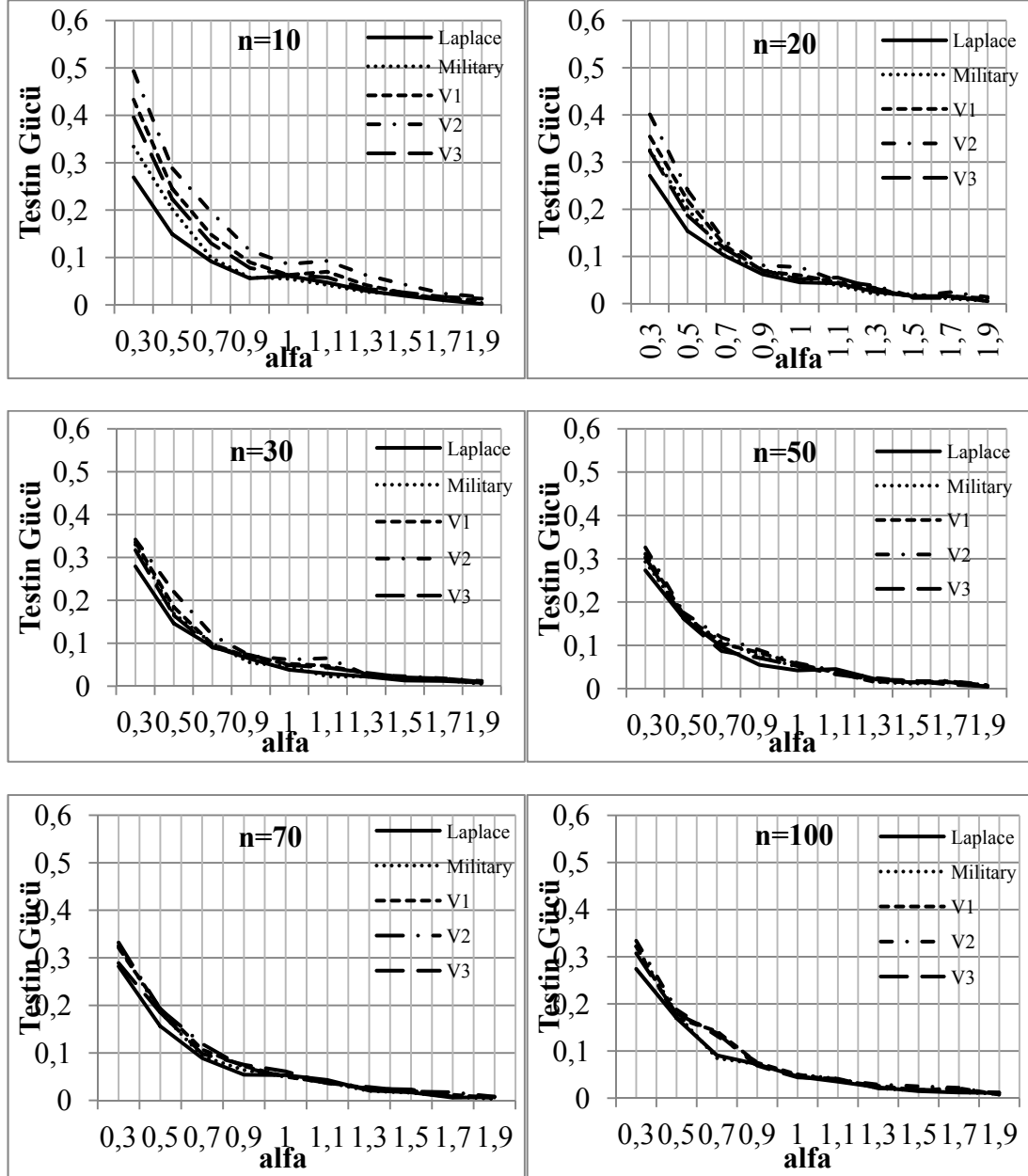


Şekil 5.6 Yenileme süreci Weibull dağılımı (devamı)

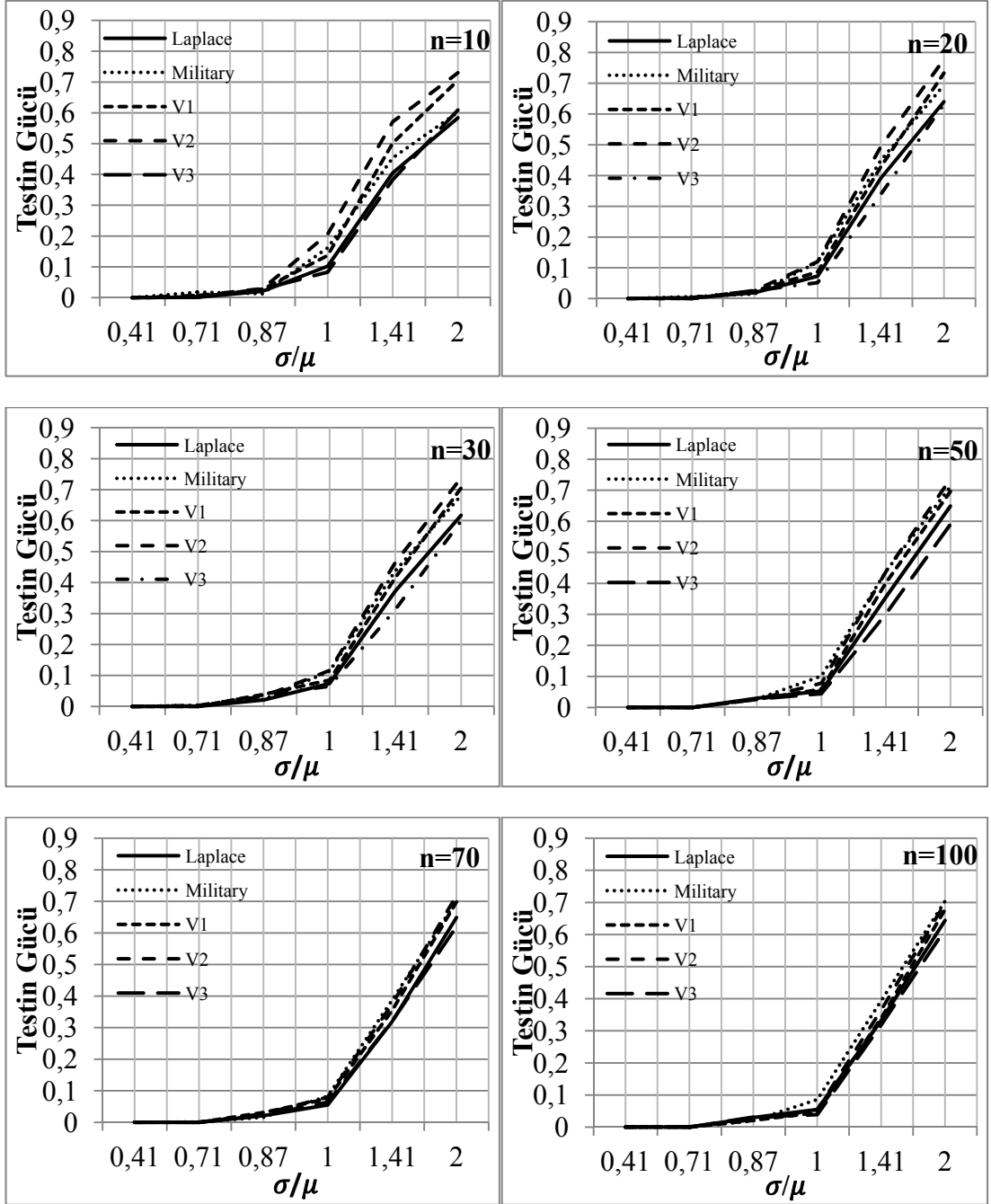
5.2 Güç Karşılaştırmaları

1. Sayma sürecinden gelen veri kümesi içerisinde trend olmadığında, yani daha genel olarak bu veri kümesi yenileme sürecine uygunluk gösterdiğinde, yokluk hipotezi homojen Poisson sürecini işaret eden Laplace, Military Handbook, V1, V2 ve V3 testleri için gamma, lognormal ve Weibull dağılımlarına ilişkin şekil 5.7-5.9'daki

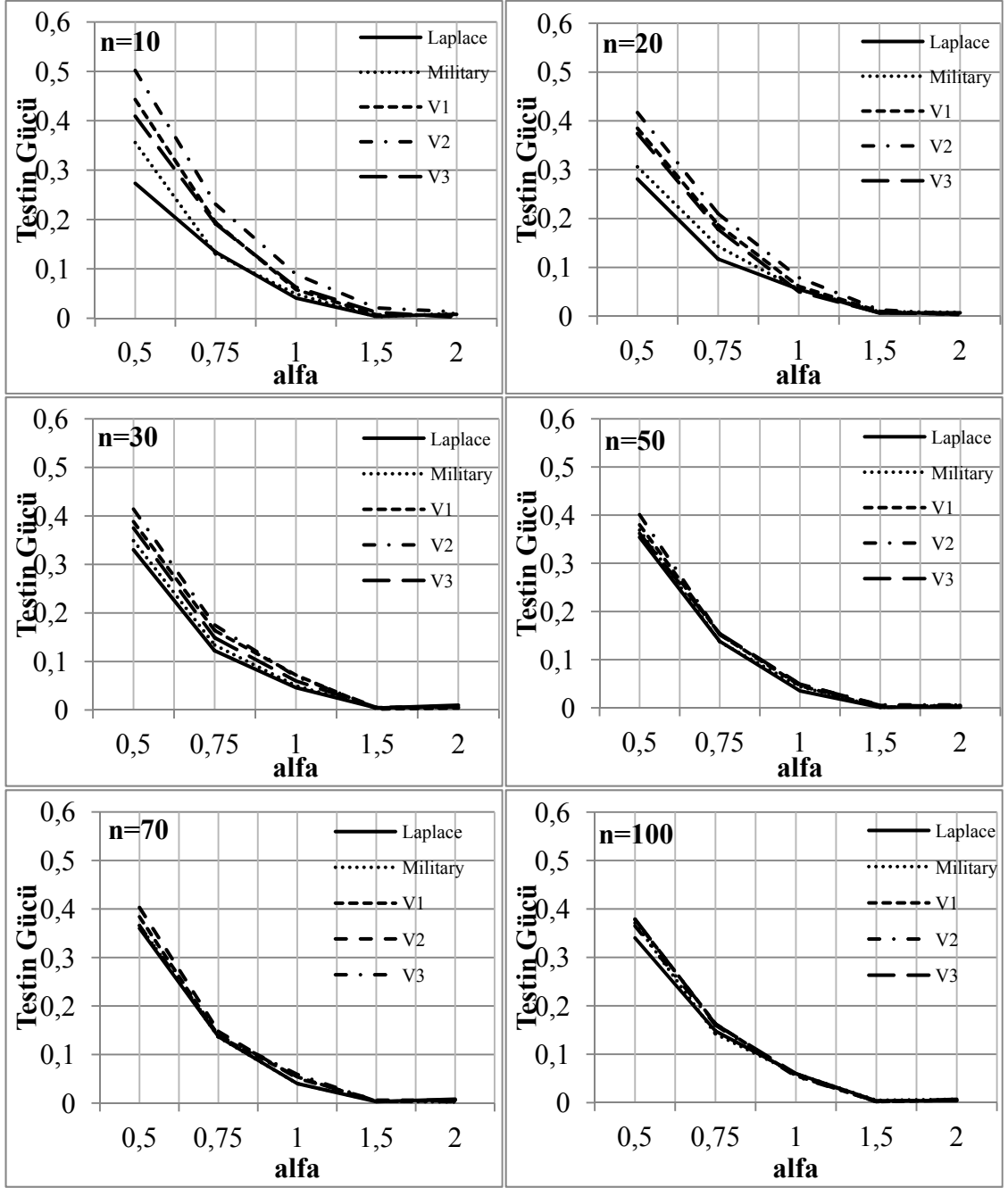
grafikler aşağıdaki gibidir. Normal dağılım ve kesilmiş normal dağılıma ilişkin grafiklerin bu bölümde neden yer almadığı bir sonraki sonuçlar bölümünde açıklanmıştır.



Şekil 5.7 Gamma dağılımının şekil parametresi $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ ve 1.9 ile yenileme sürecinin simülasyonu

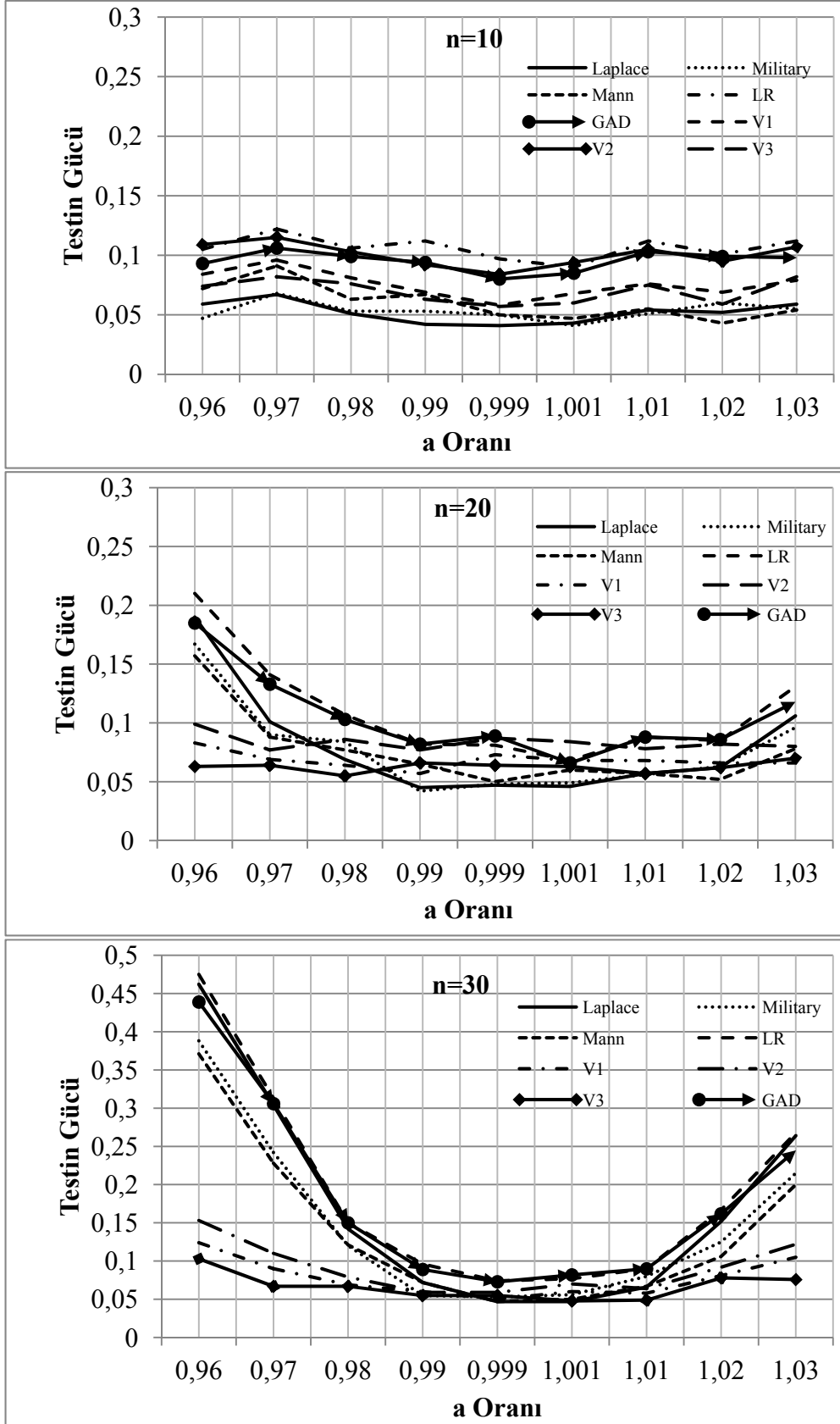


Şekil 5.8 Lognormal dağılımdan elde edilen yenileme sürecine ilişkin simülasyon çalışması

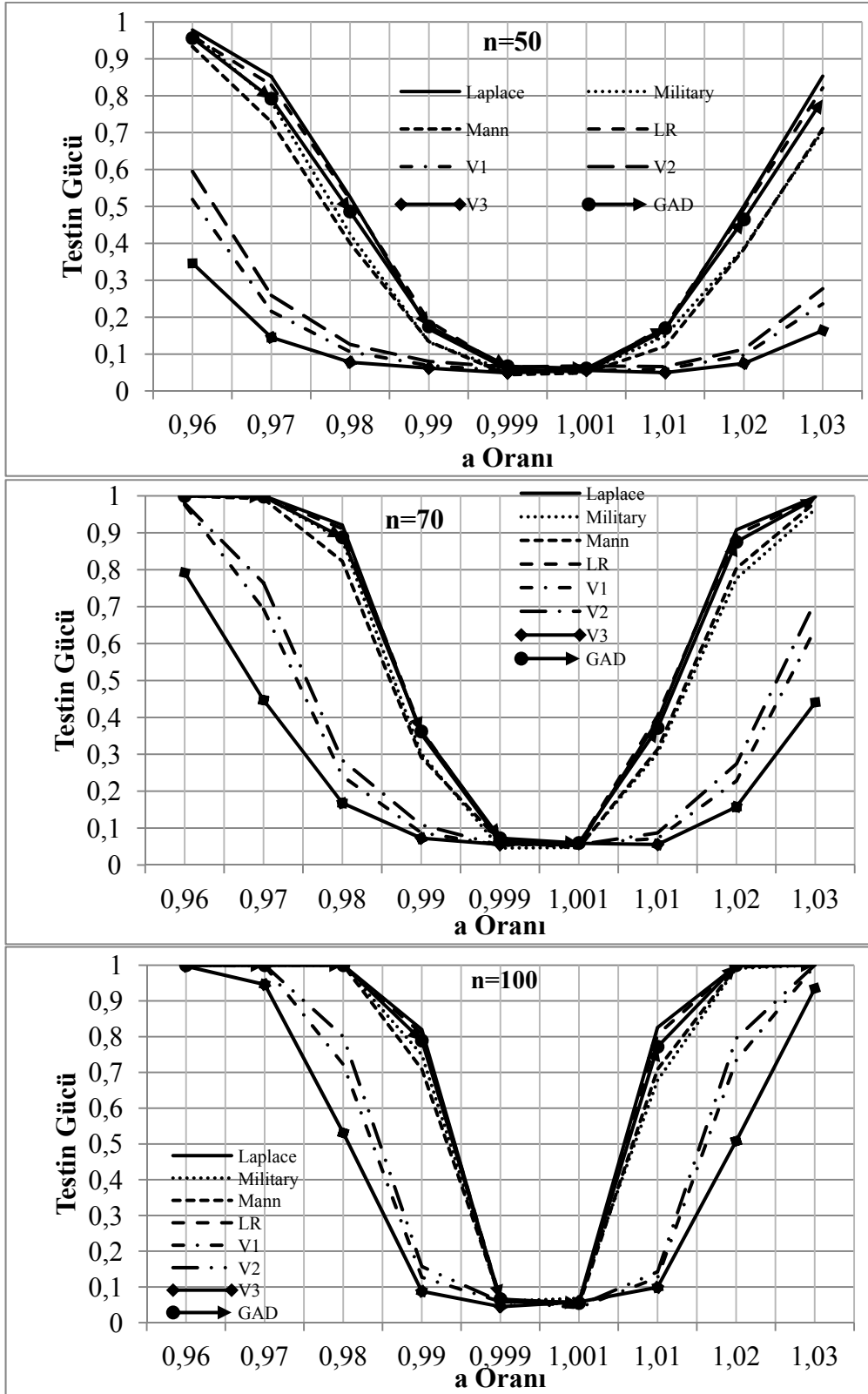


Şekil 5.9 Weibull dağılımının şekil parametresi $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ ve 1.9 ile yenileme sürecinin simülasyonu

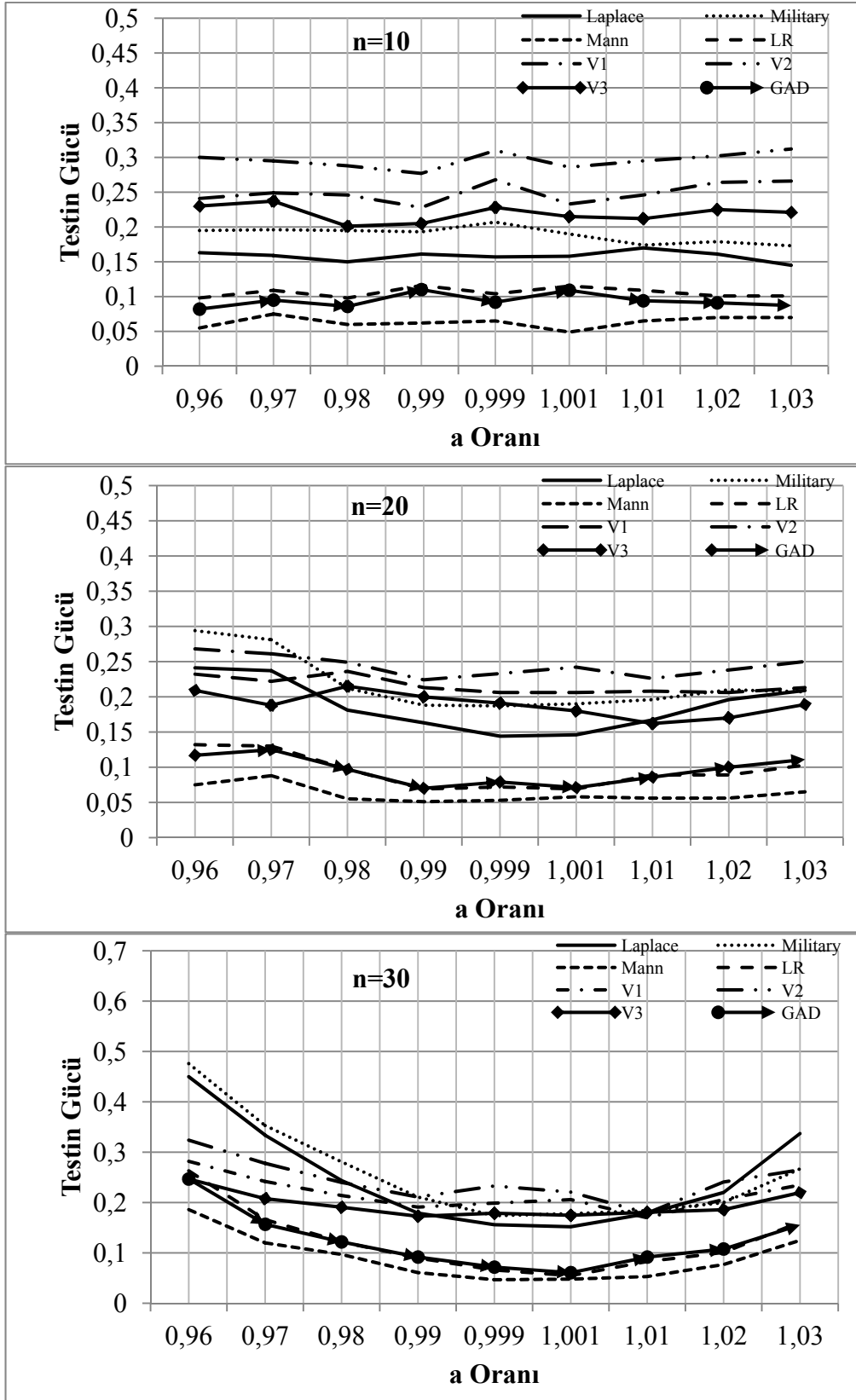
2. Geometrik sürece ilişkin olan a oranının uygulamalarda sık sık $0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 değerleri ile karşılaşıldığından üstel, gamma, normal, lognormal, kesilmiş normal ve Weibull dağılımlarında kullanılarak monoton trendi içeren veri üretimi gerçekleştirilmiş ve şekil 5.10-5.23'deki grafikler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



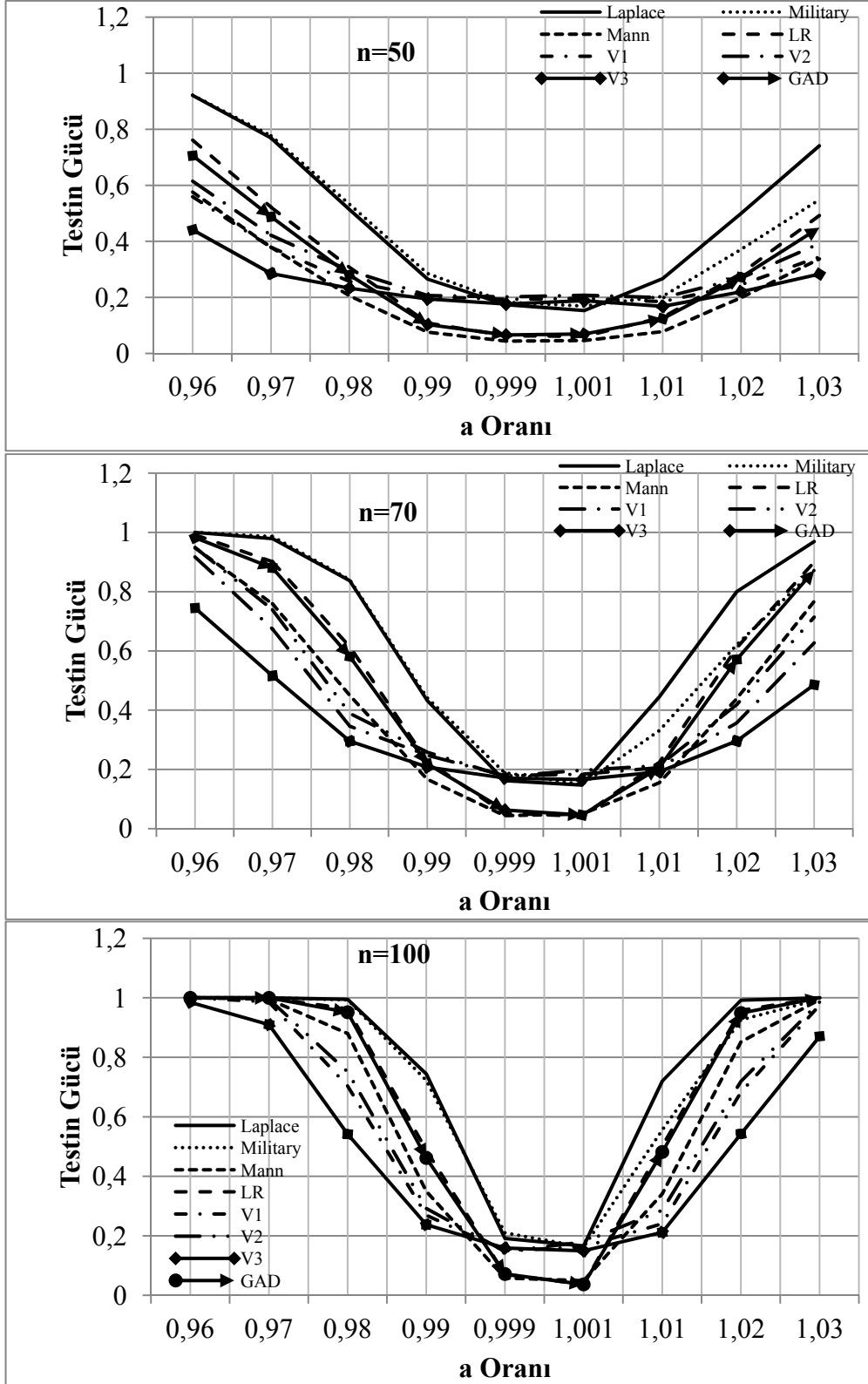
Şekil 5.10 Üstel(1.5) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$, ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



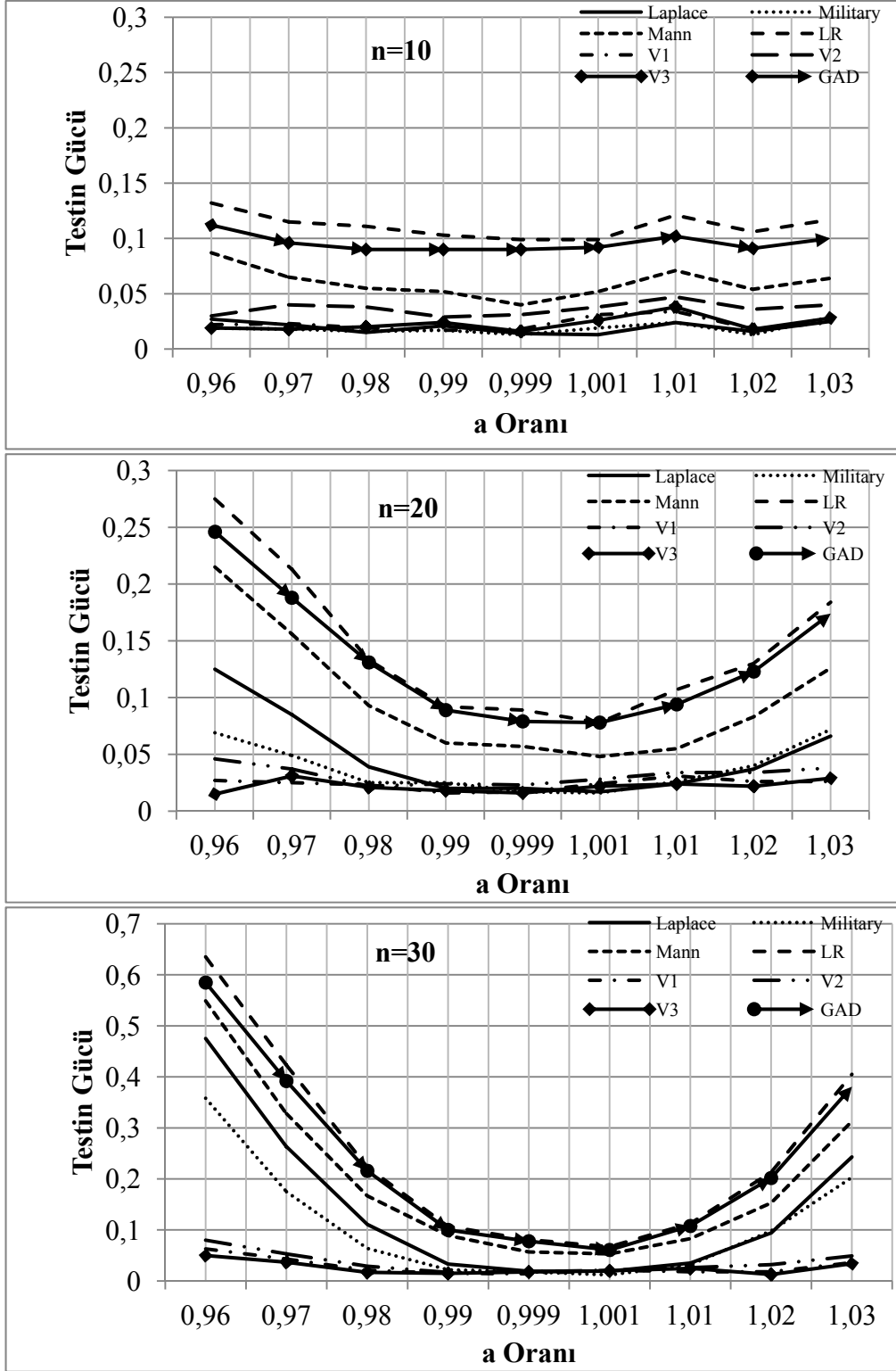
Şekil 5.10 Üstel(1.5) dağılımı ve $a = 0,96, 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$, ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



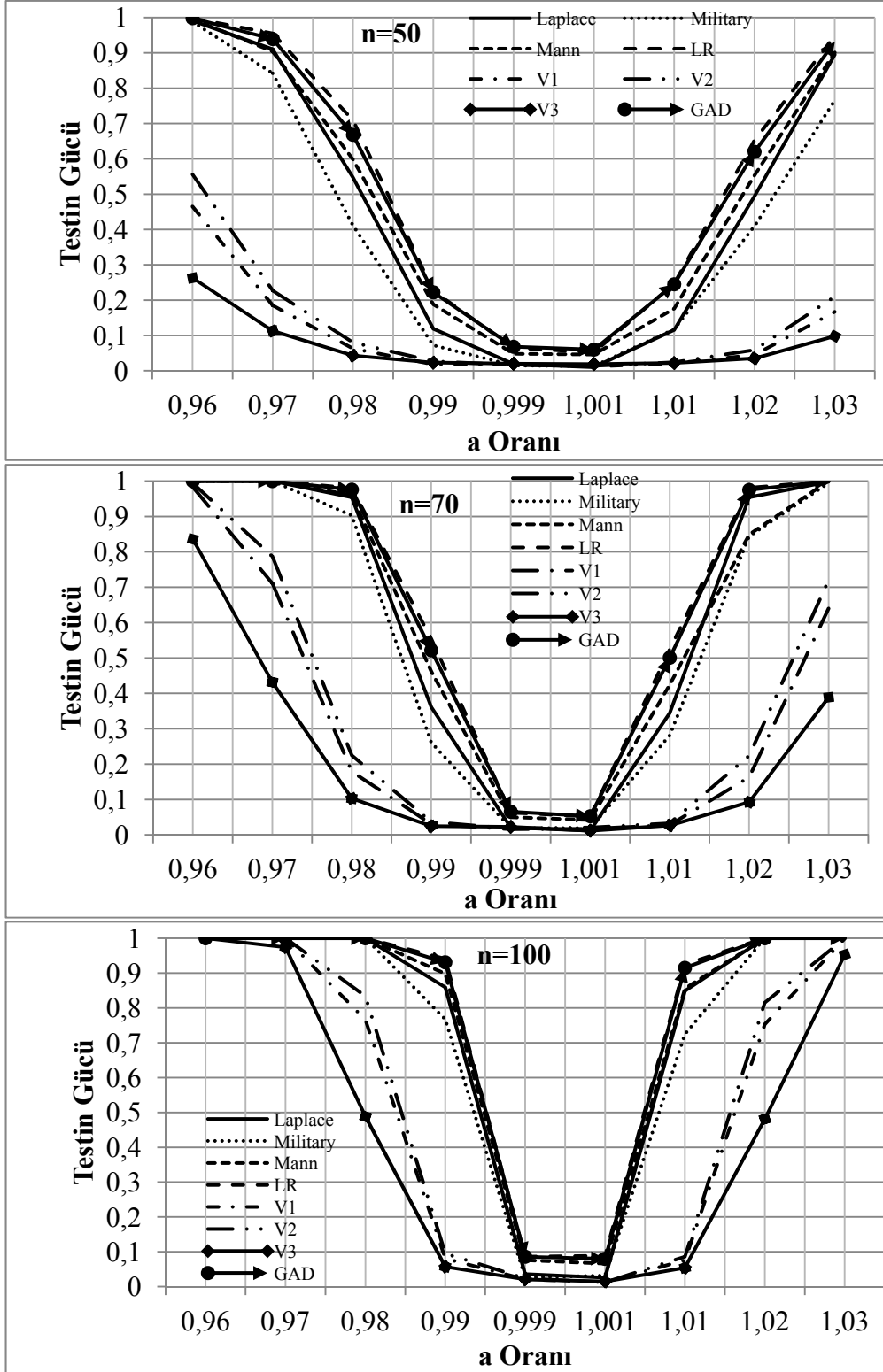
Şekil 5.11 Gamma (0.5,3) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



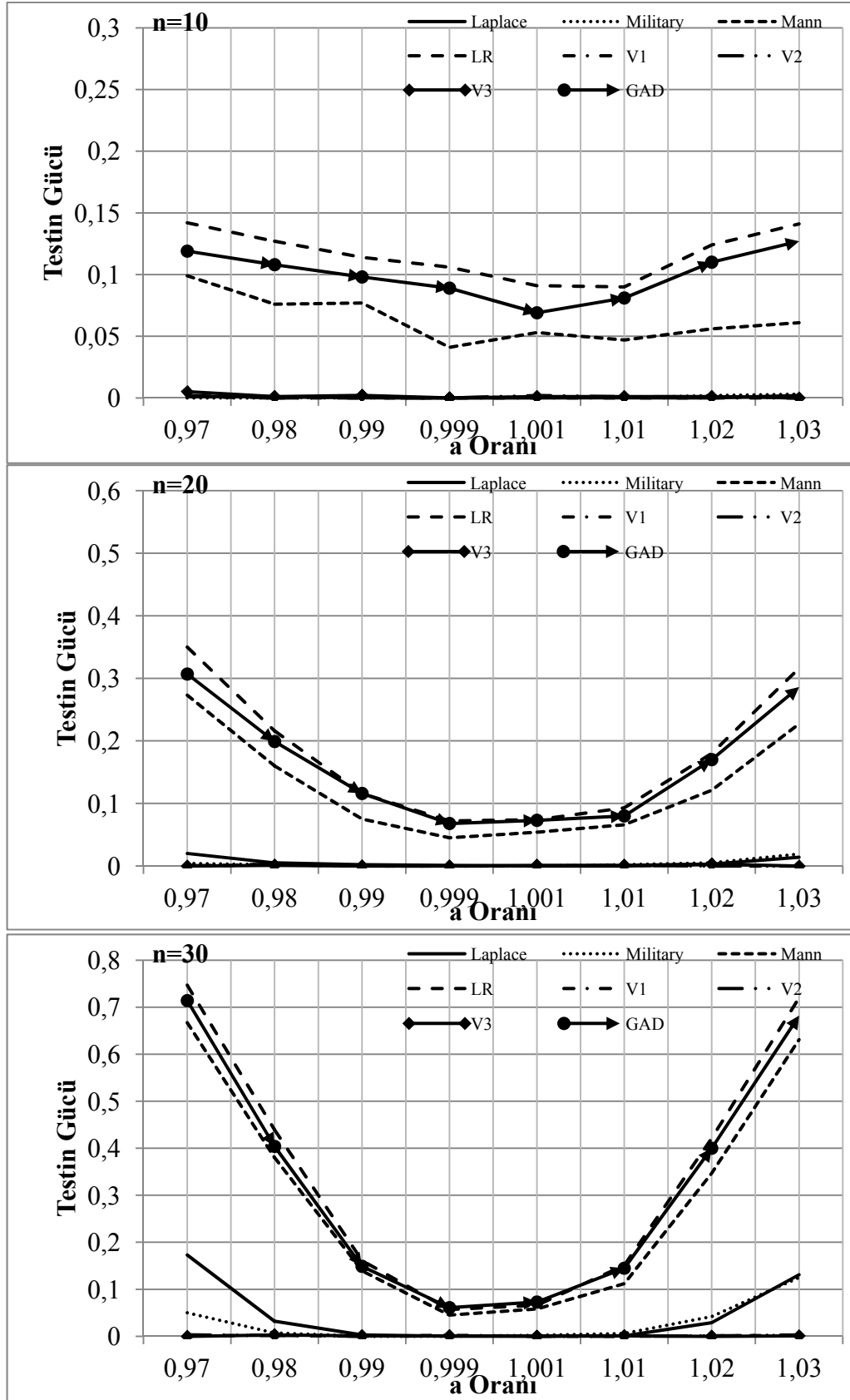
Şekil 5.11 Gamma (0.5,3) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



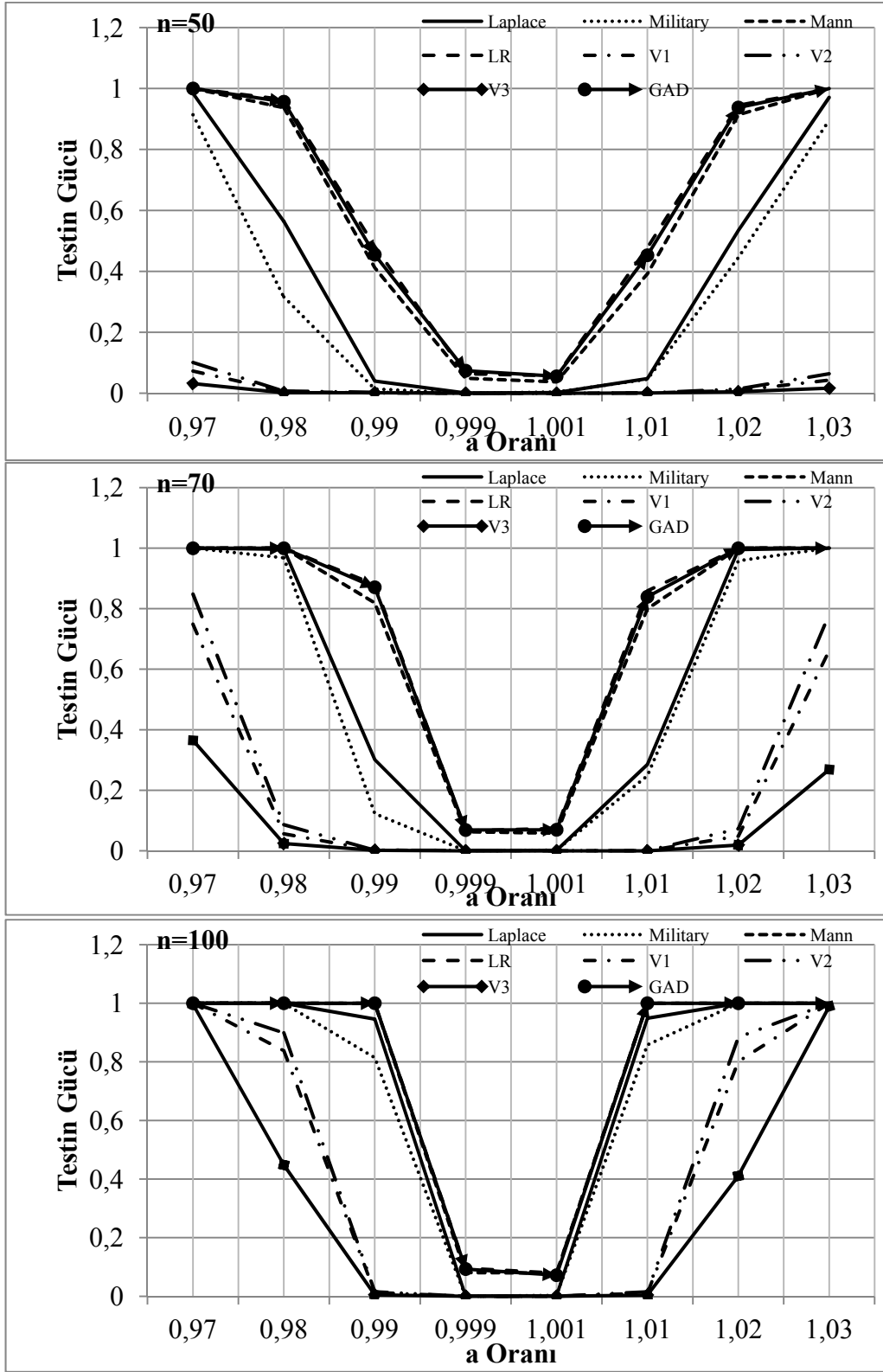
Şekil 5.12 Gamma (1.5,3) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



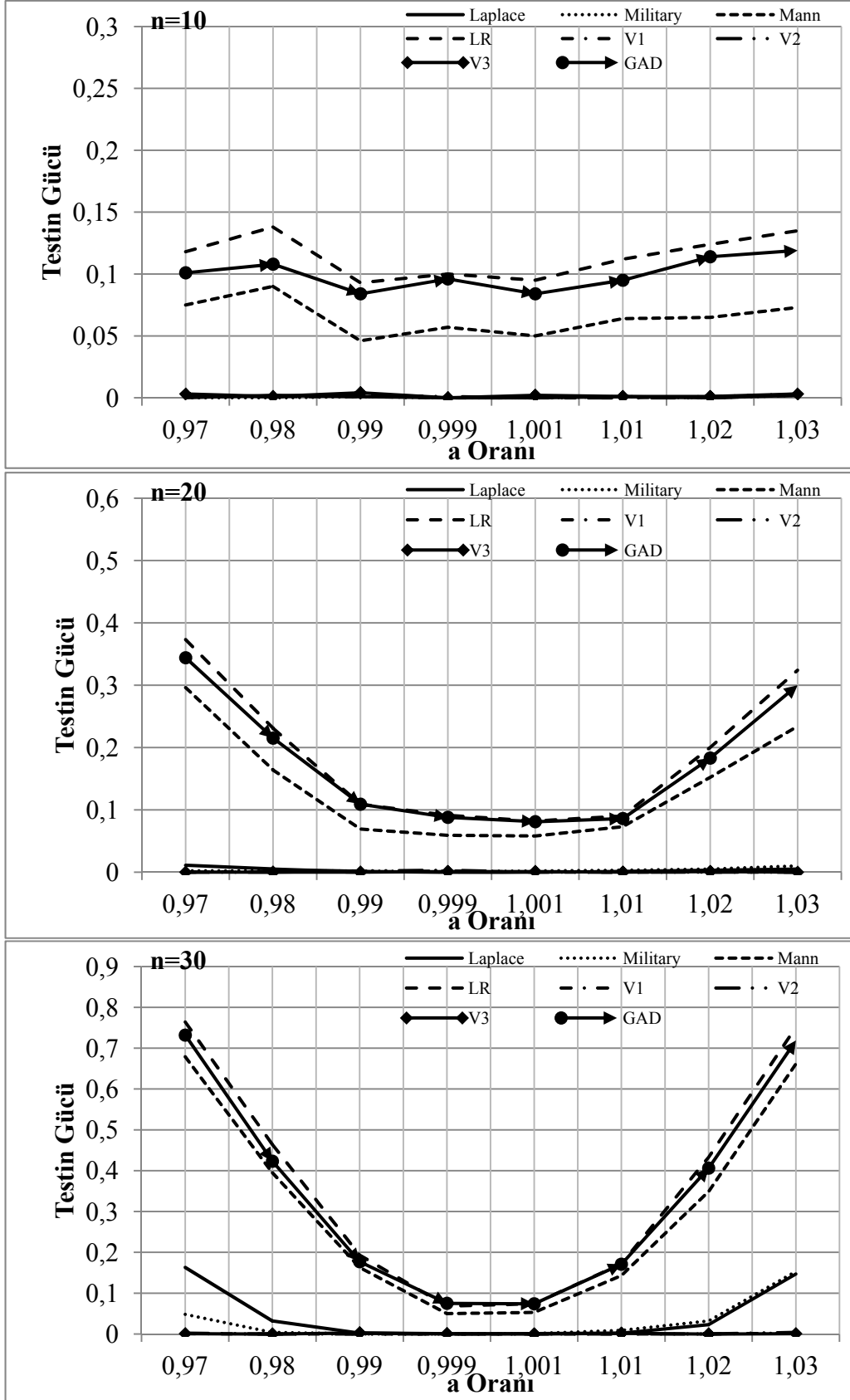
Şekil 5.12 Gamma (1.5,3) dağılımı ve $a = 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



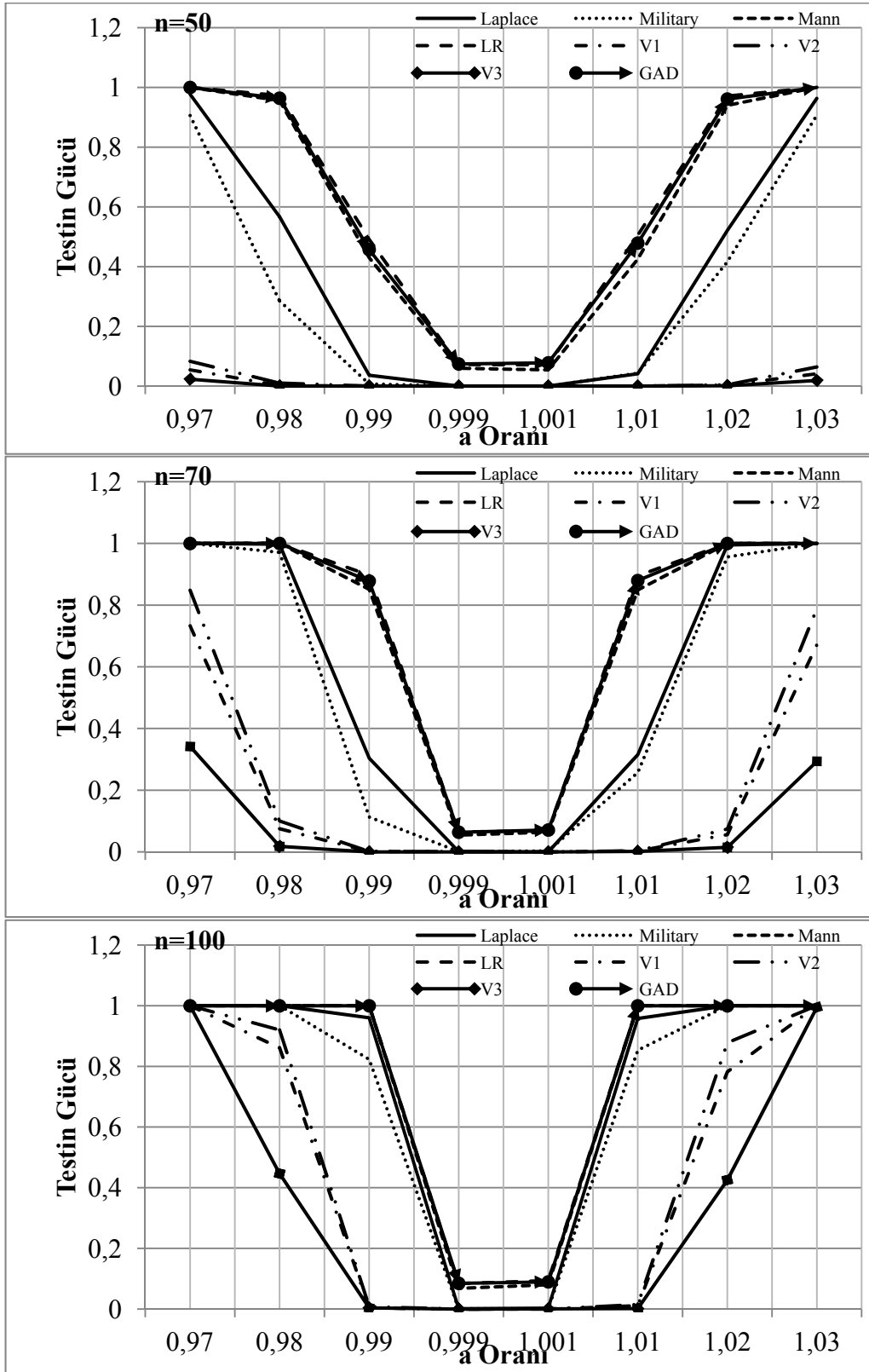
Şekil 5.13 Gamma (3.4,3) dağılımı ve $\alpha = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



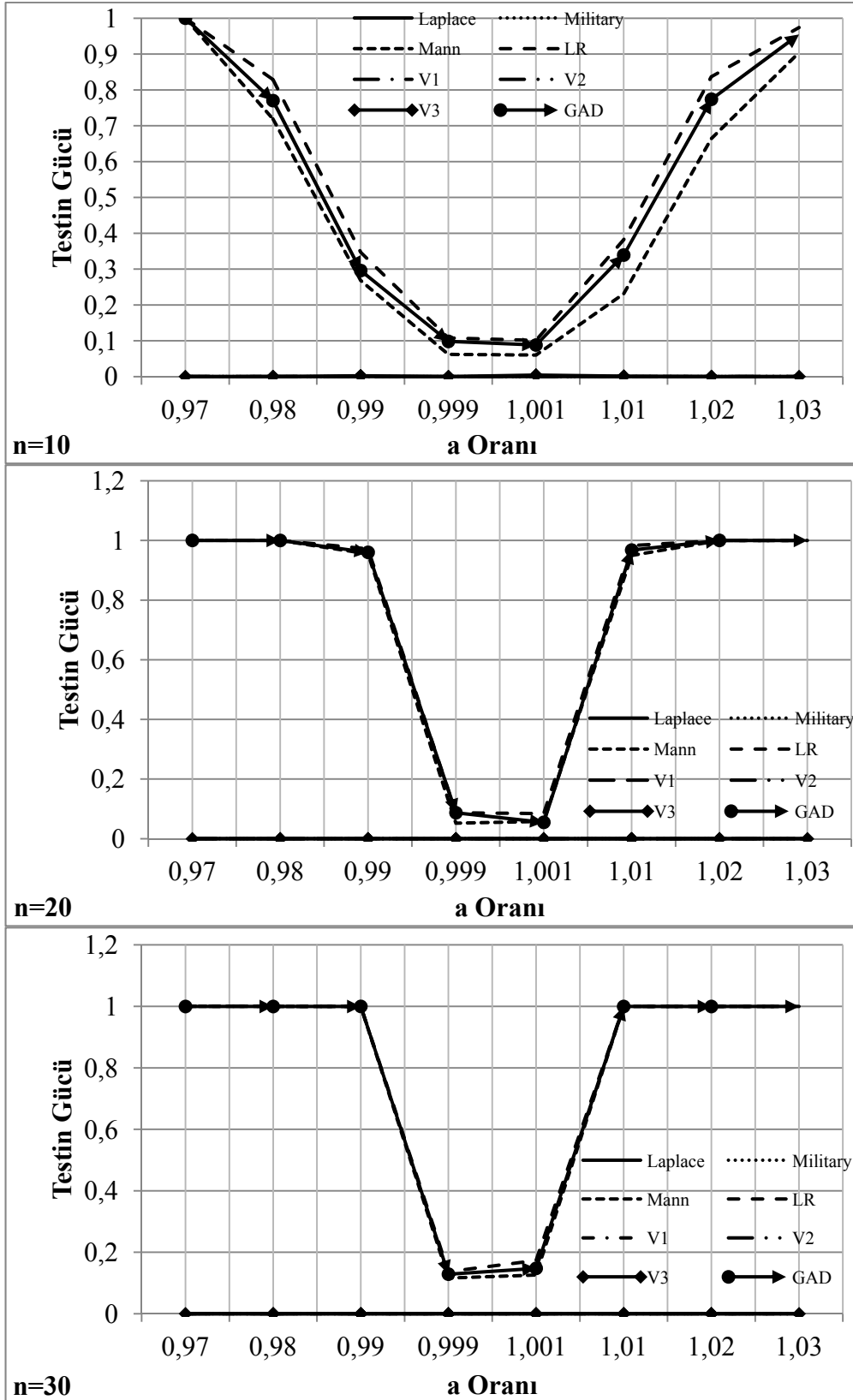
Şekil 5.13 Gamma (3.4,3) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



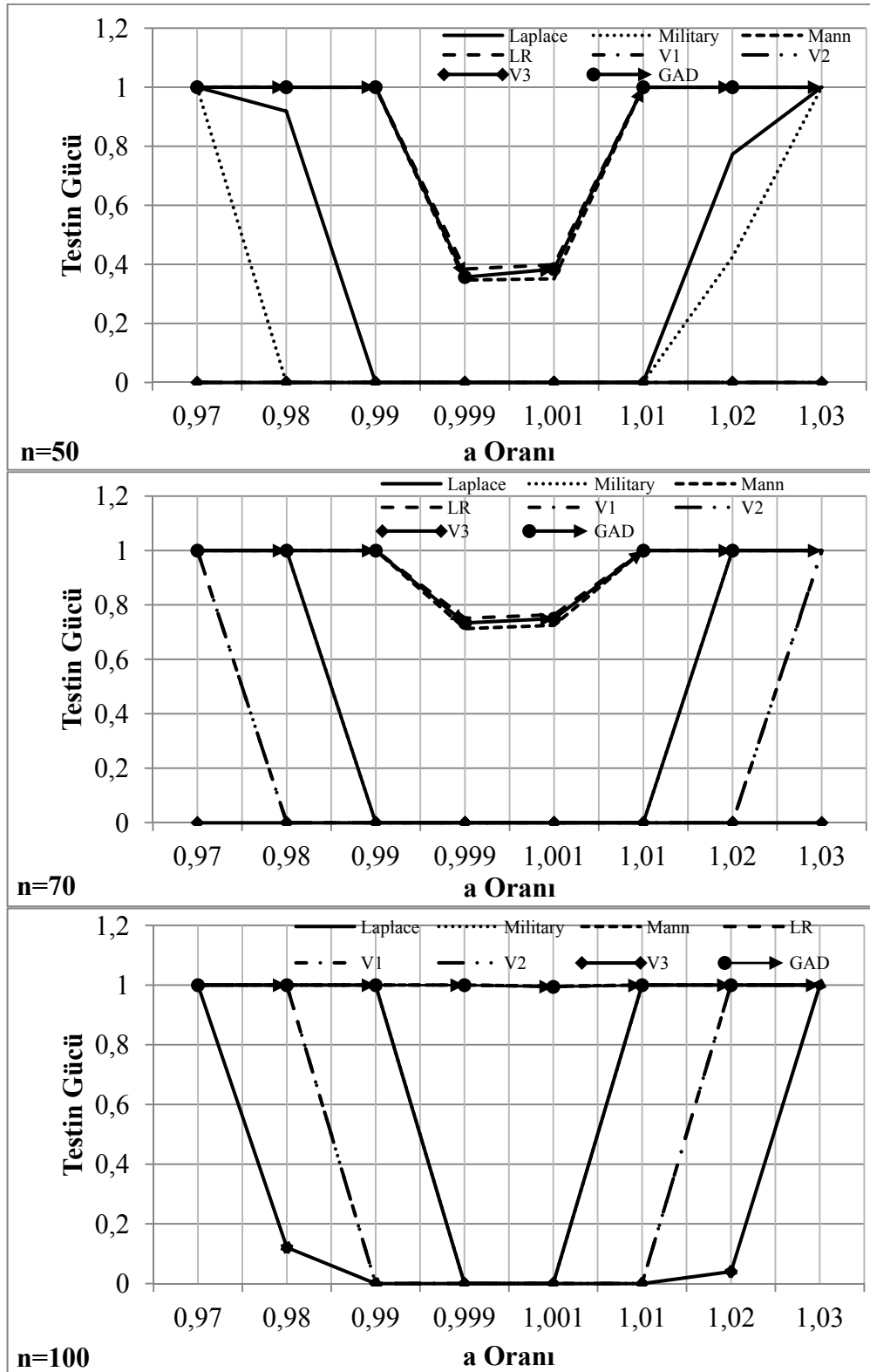
Şekil 5.14 Gamma (3.6,3) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



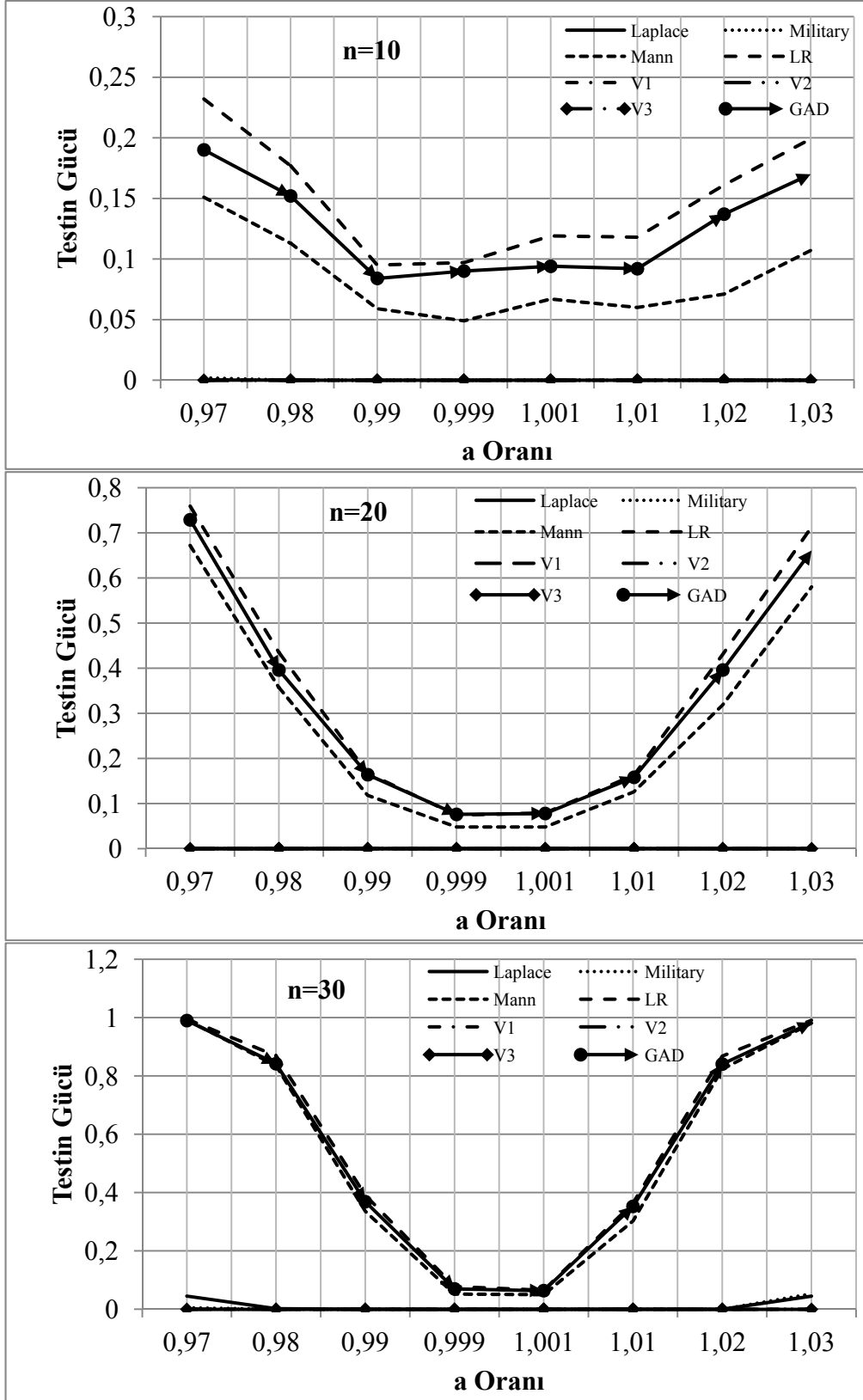
Şekil 5.14 Gamma (3,6,3) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



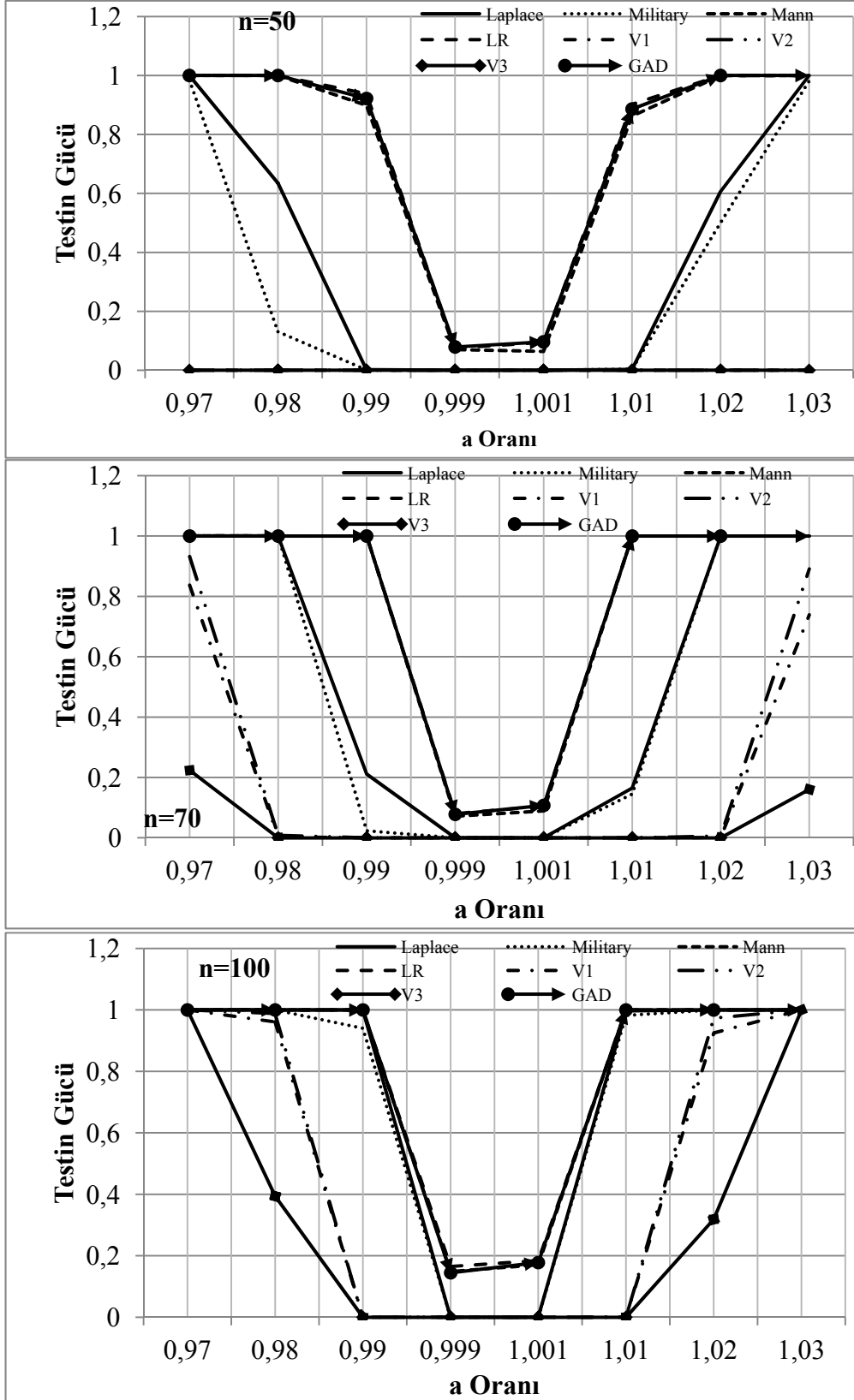
Şekil 5.15 Normal (1,1/16) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



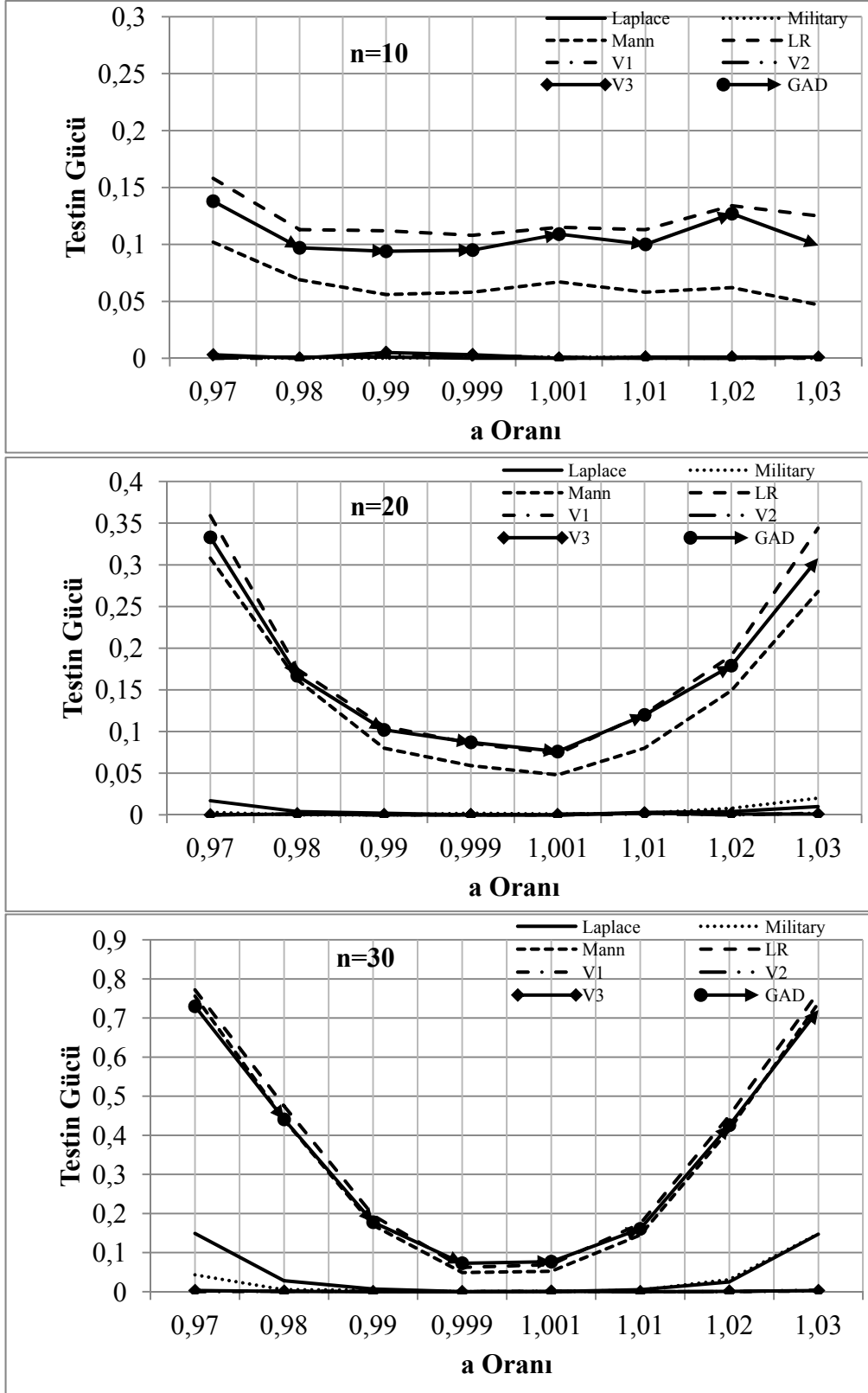
Şekil 5.15 Normal (1,1/16) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



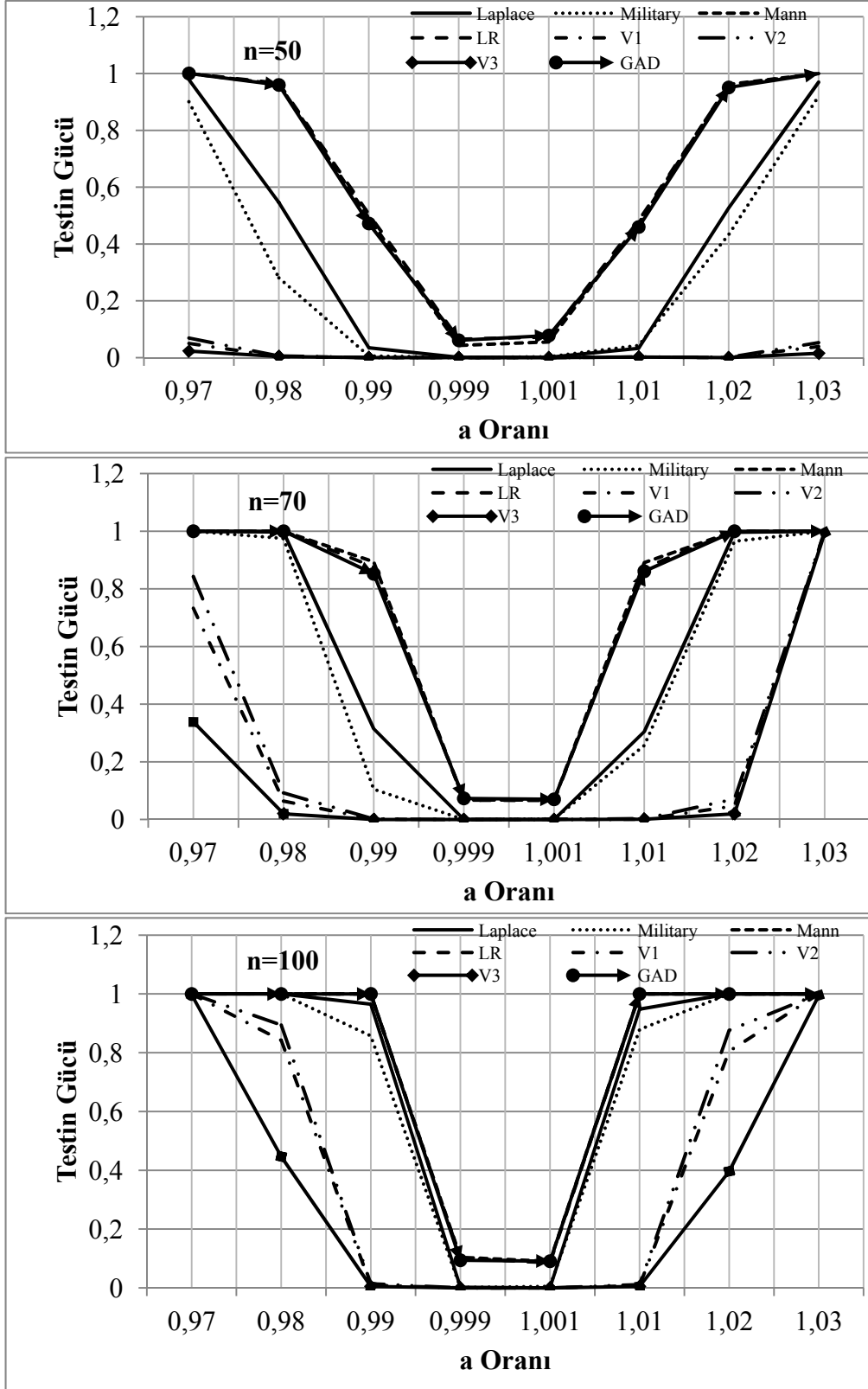
Şekil 5.16 Normal (5,1.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



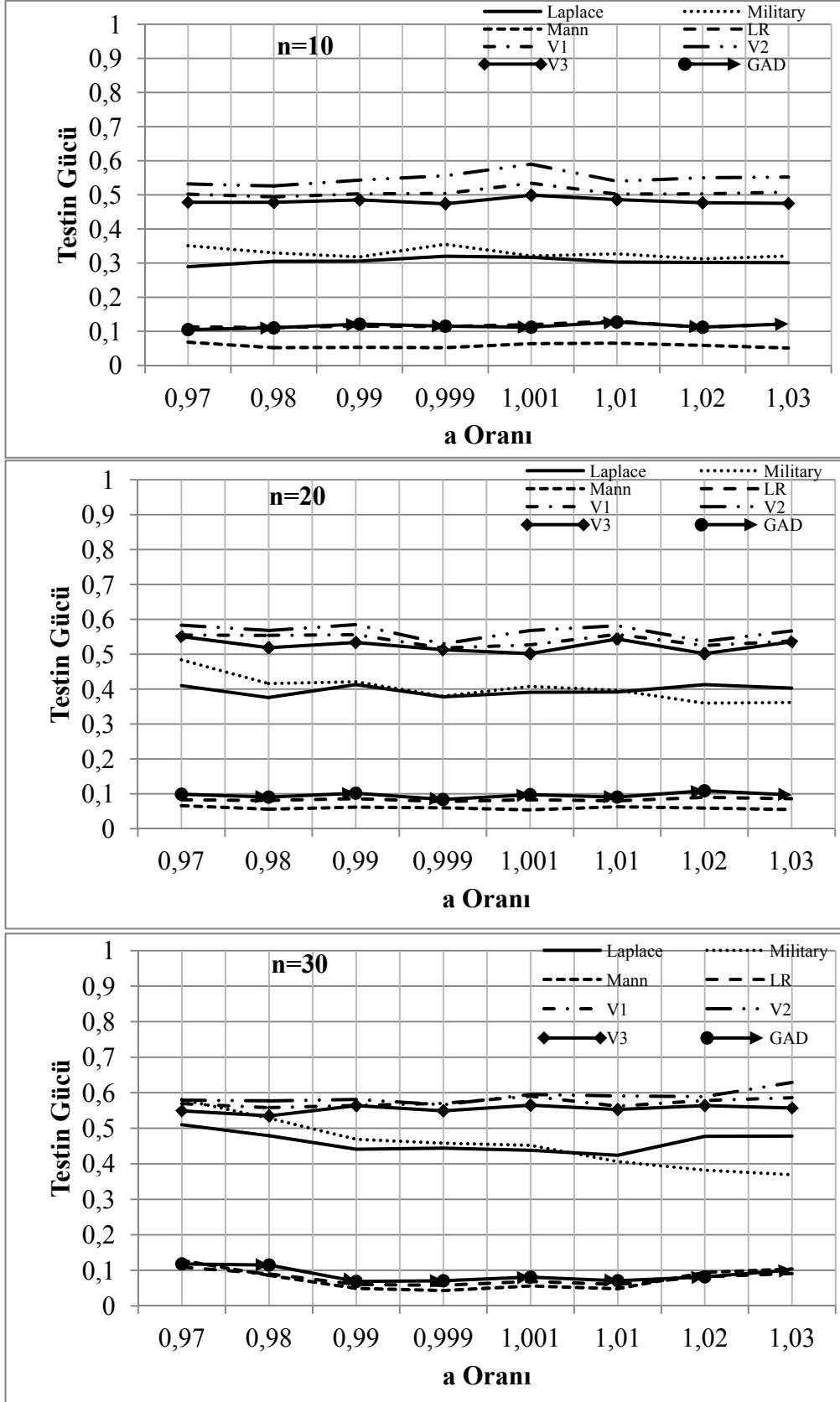
Şekil 5.16 Normal (5,1.5) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



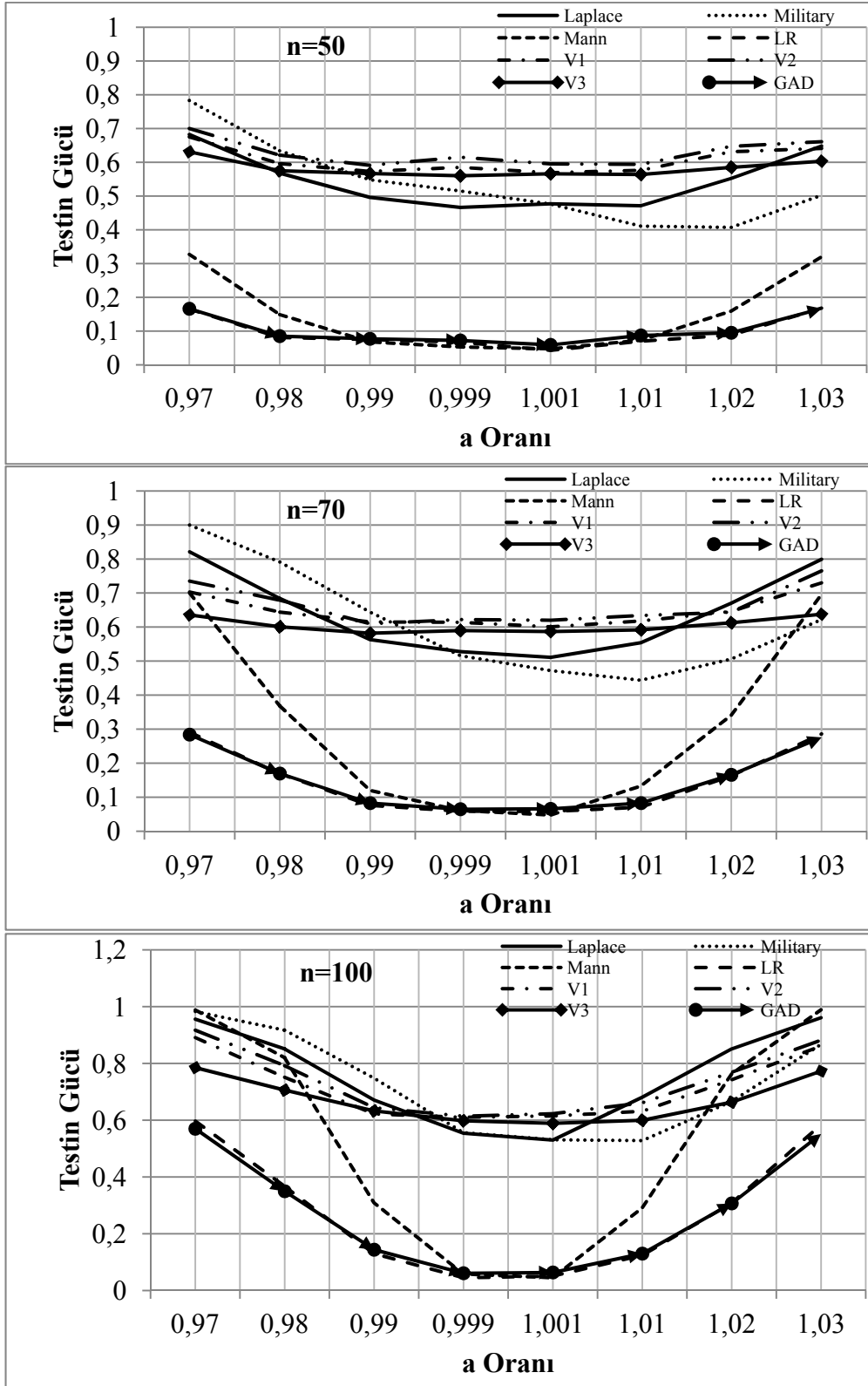
Şekil 5.17 Lognormal (1,0.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



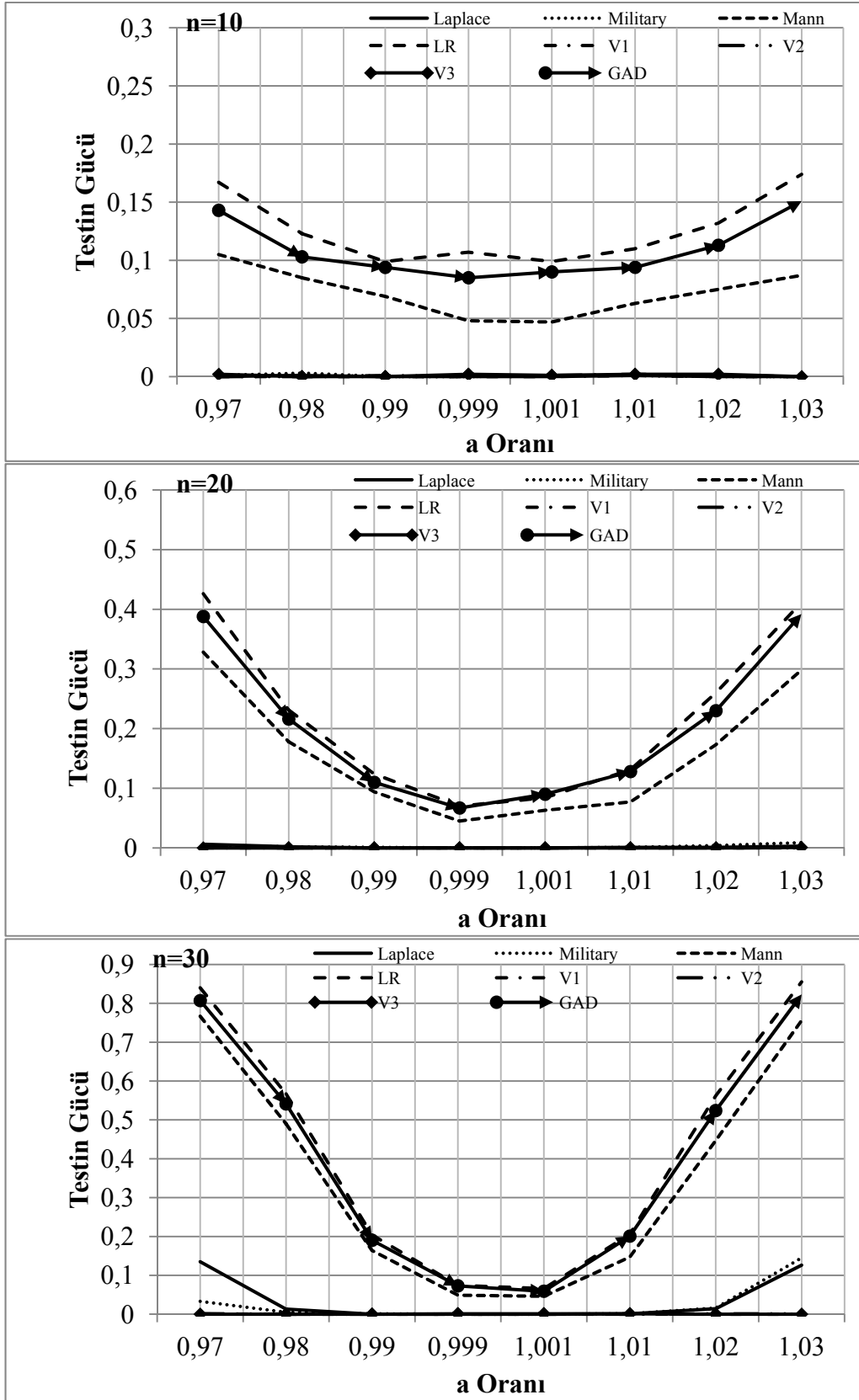
Şekil 5.17 Lognormal (1,0.5) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



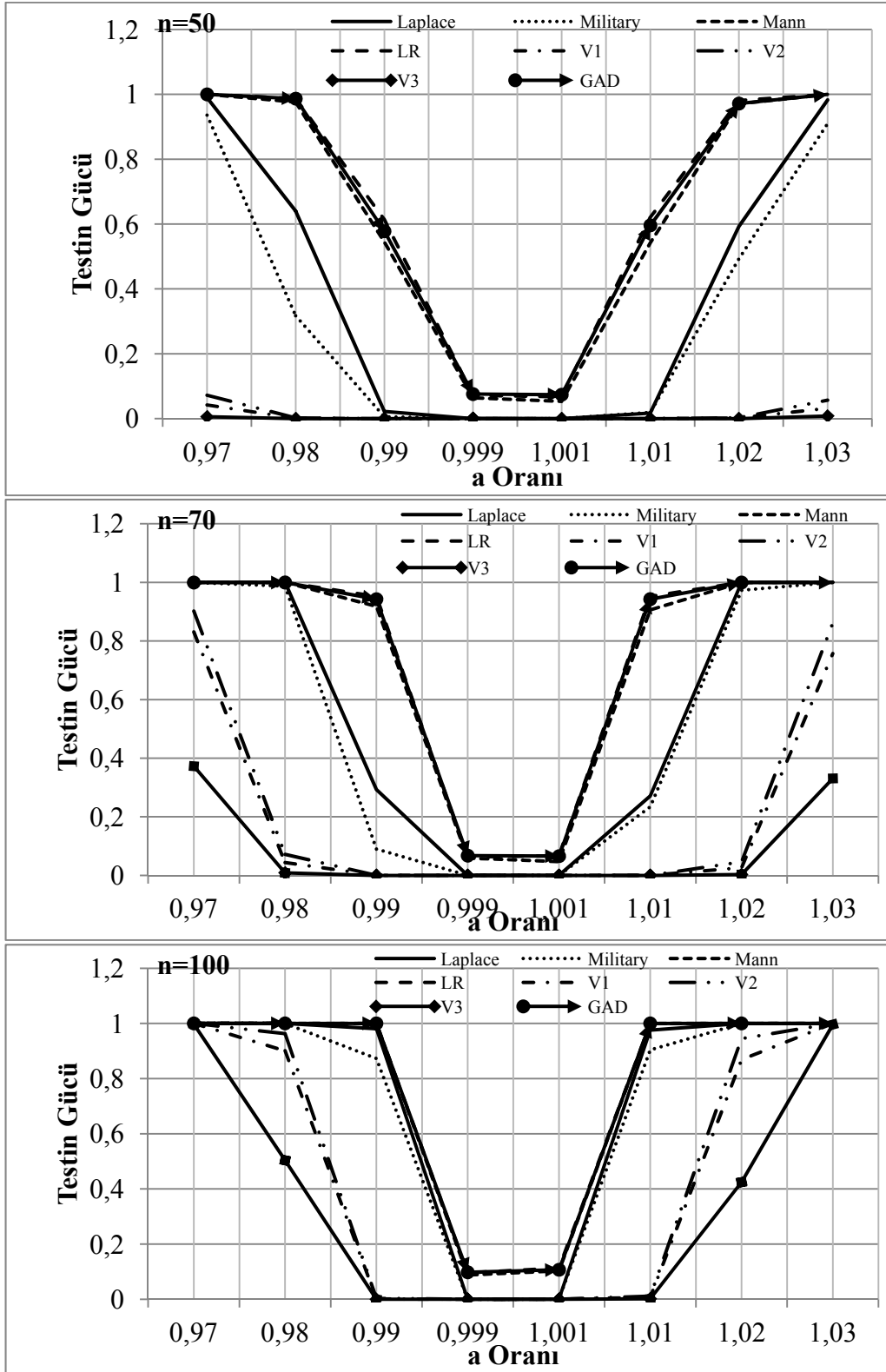
Şekil 5.18 Lognormal (1,2) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



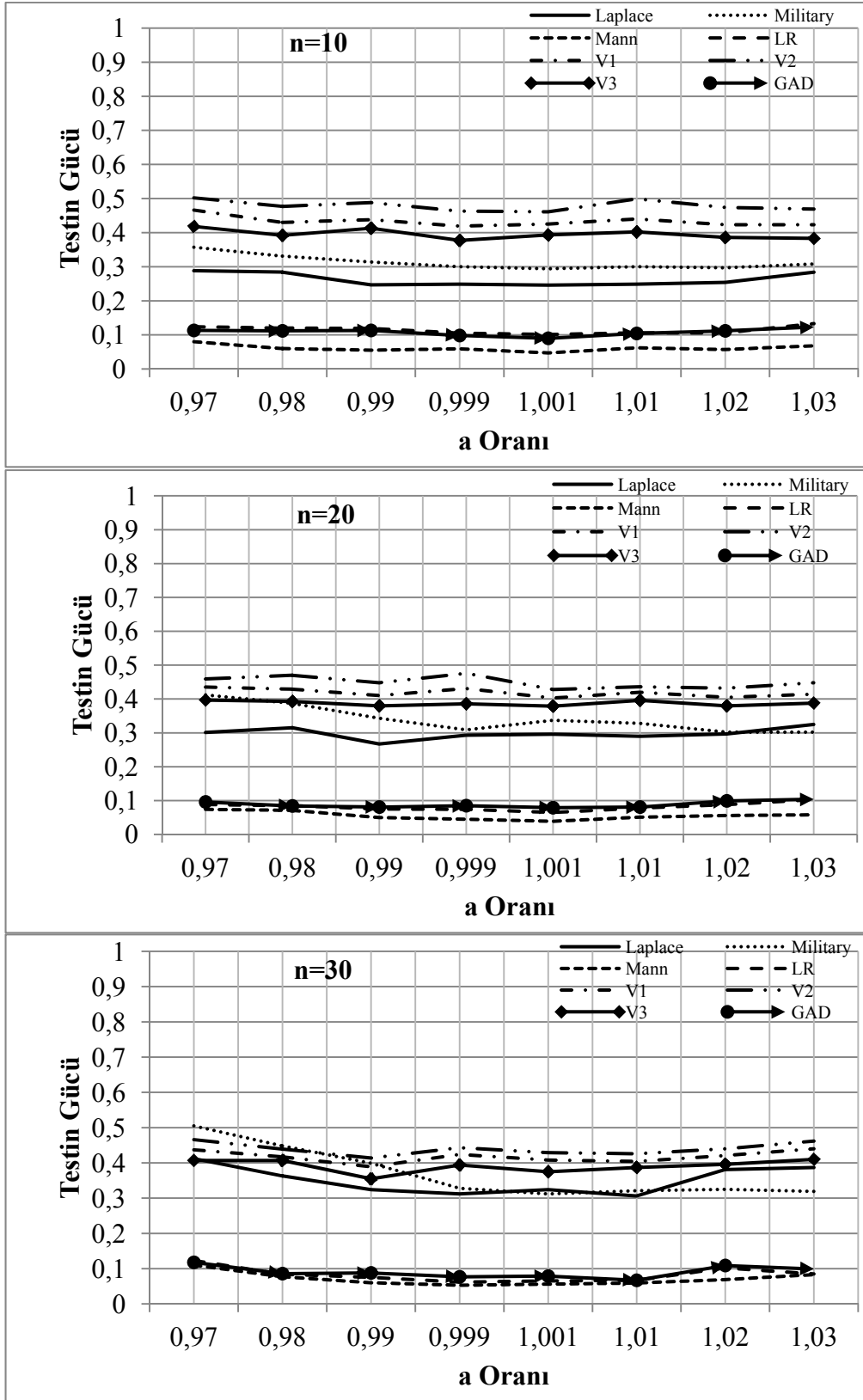
Şekil 5.18 Lognormal (1,2) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



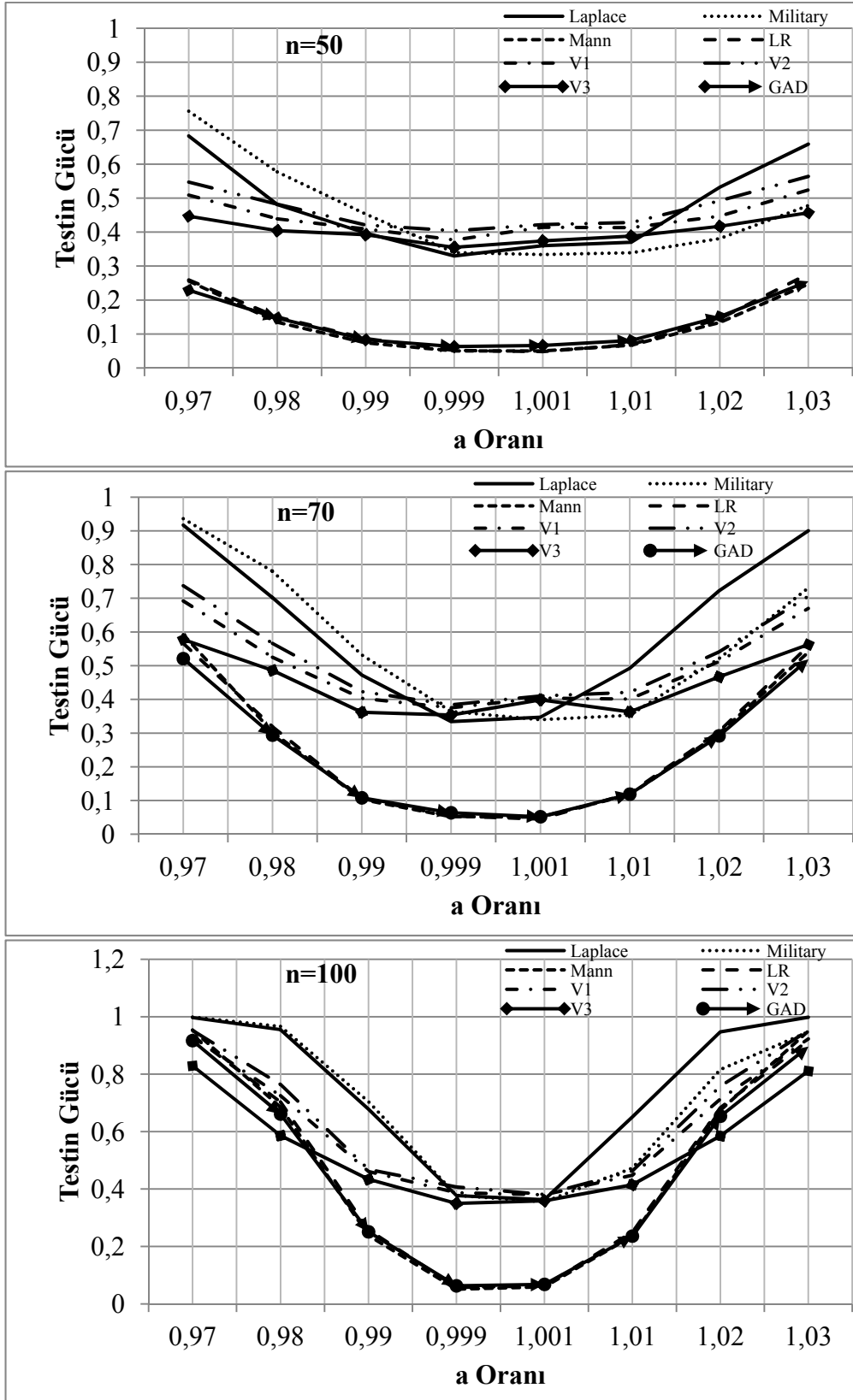
Şekil 5.19 Kesilmiş Normal (4,2) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



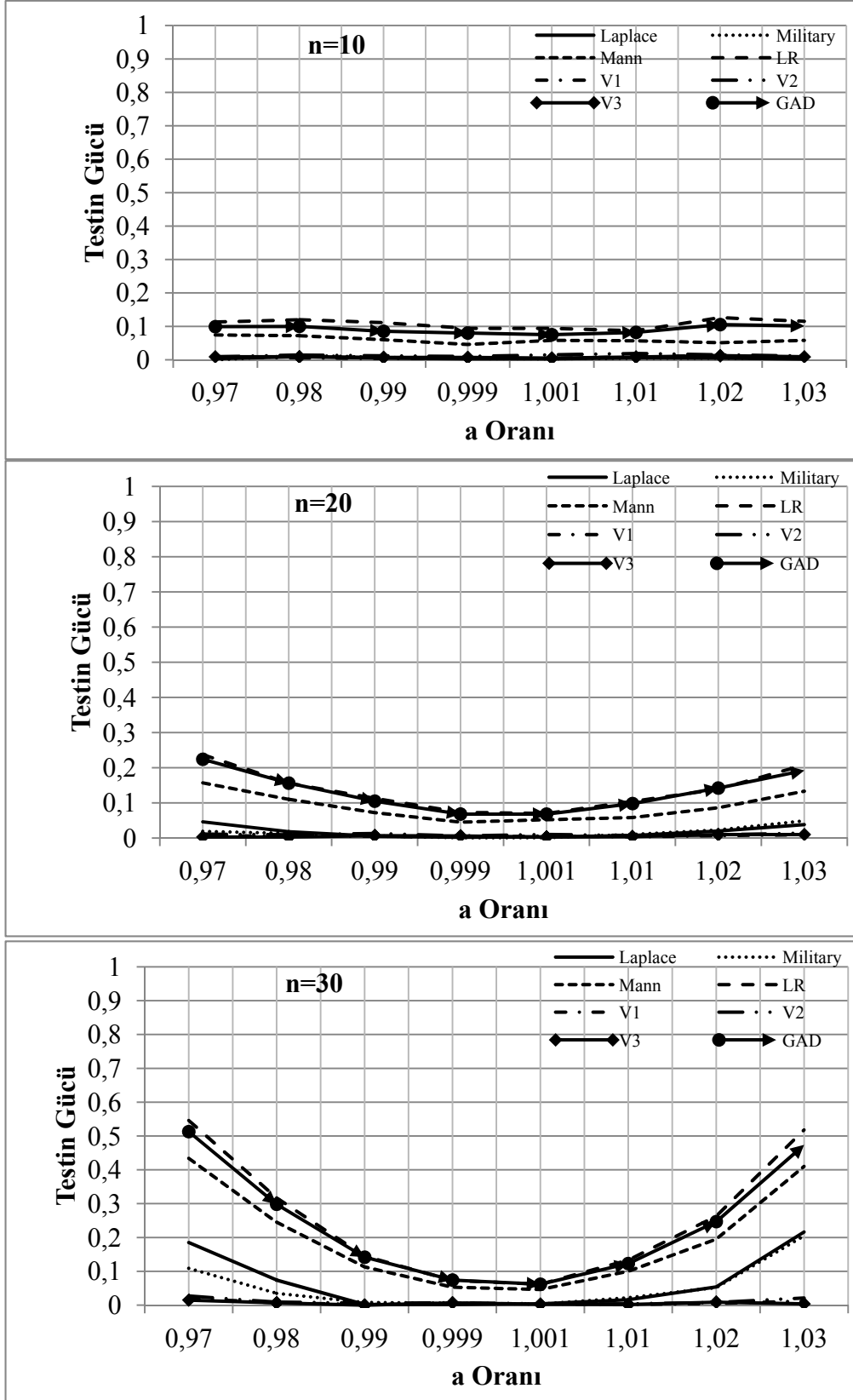
Şekil 5.19 Kesilmiş Normal (4,2) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



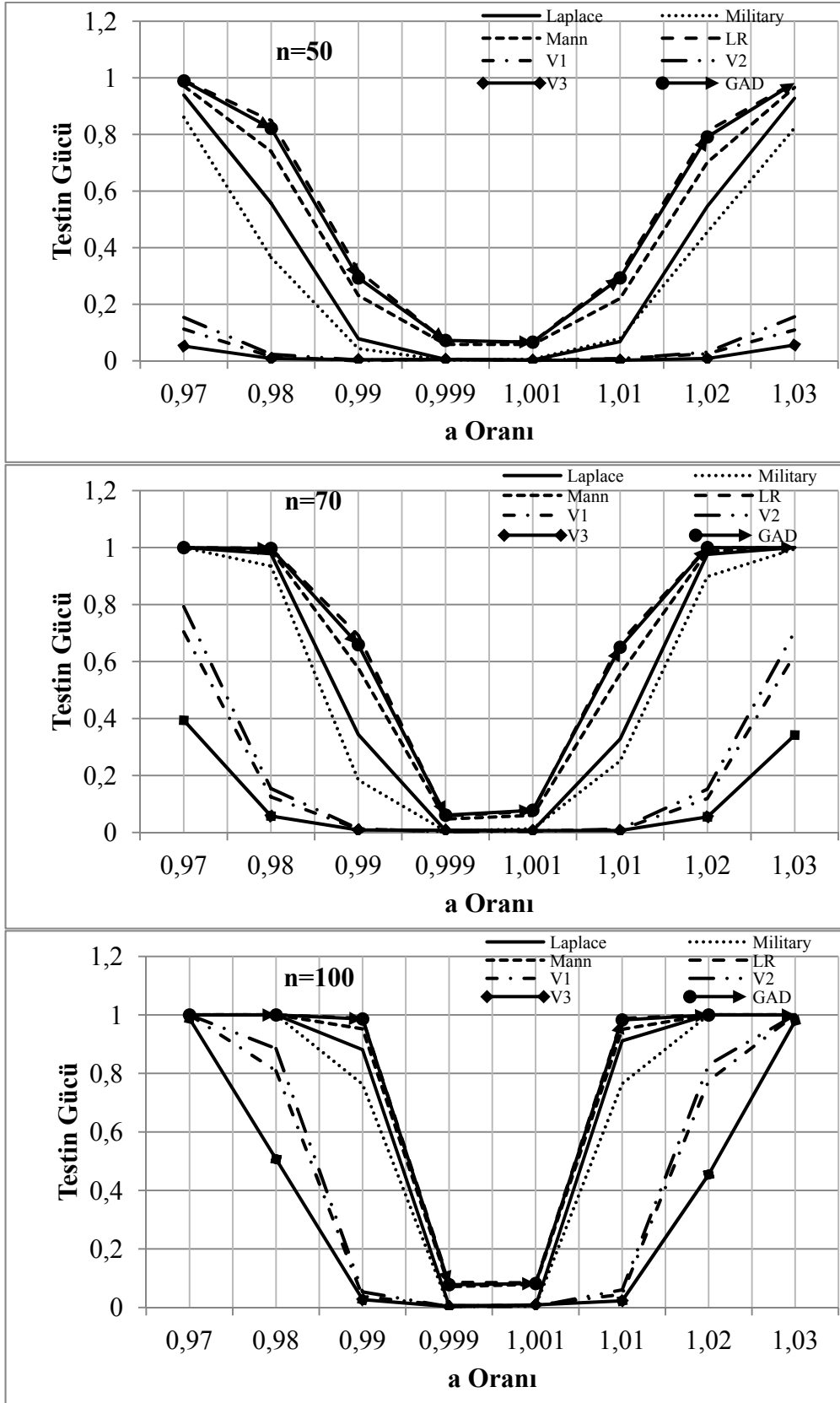
Şekil 5.20 Weibull (1,0.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



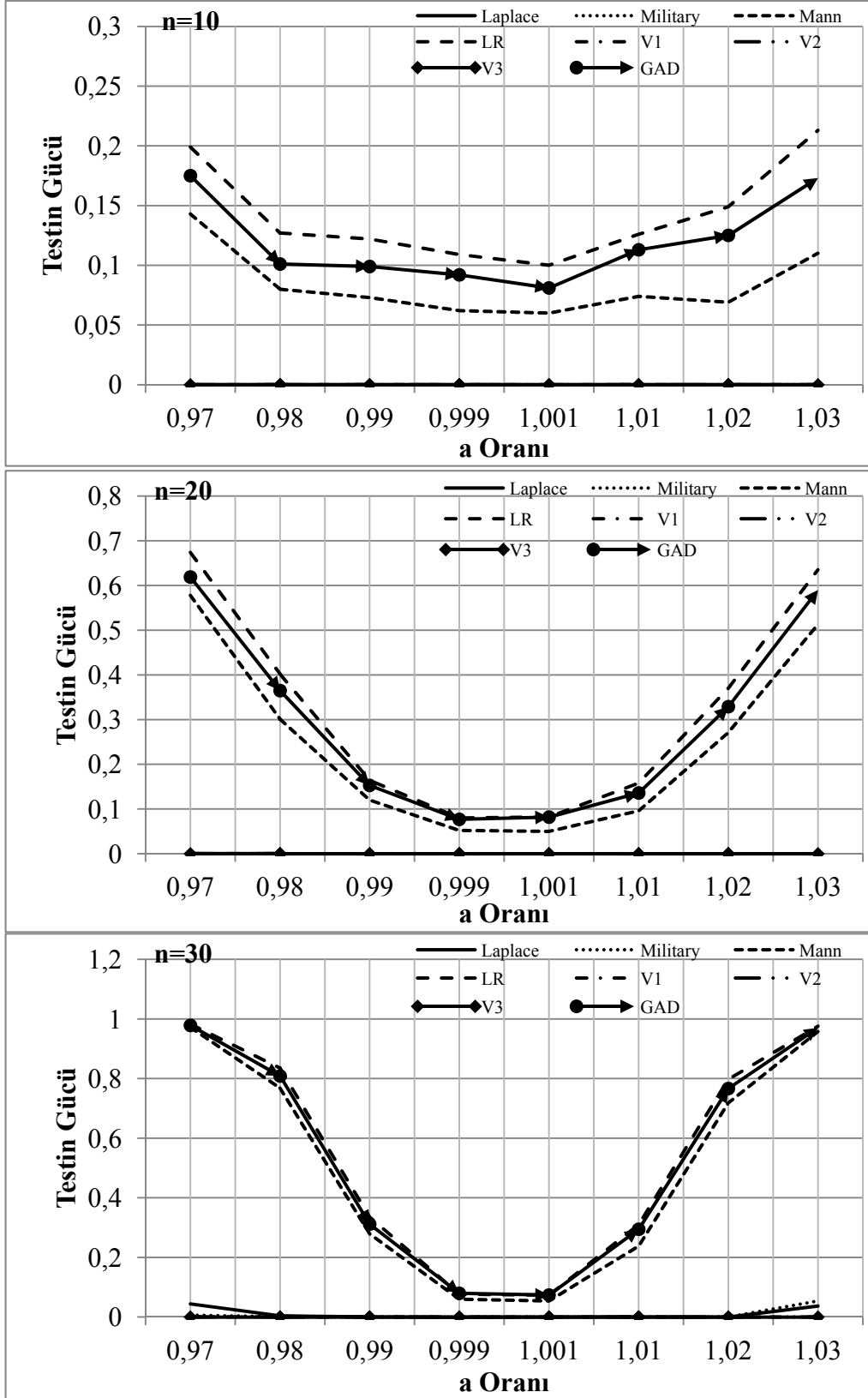
Şekil 5.20 Weibull (1,0.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



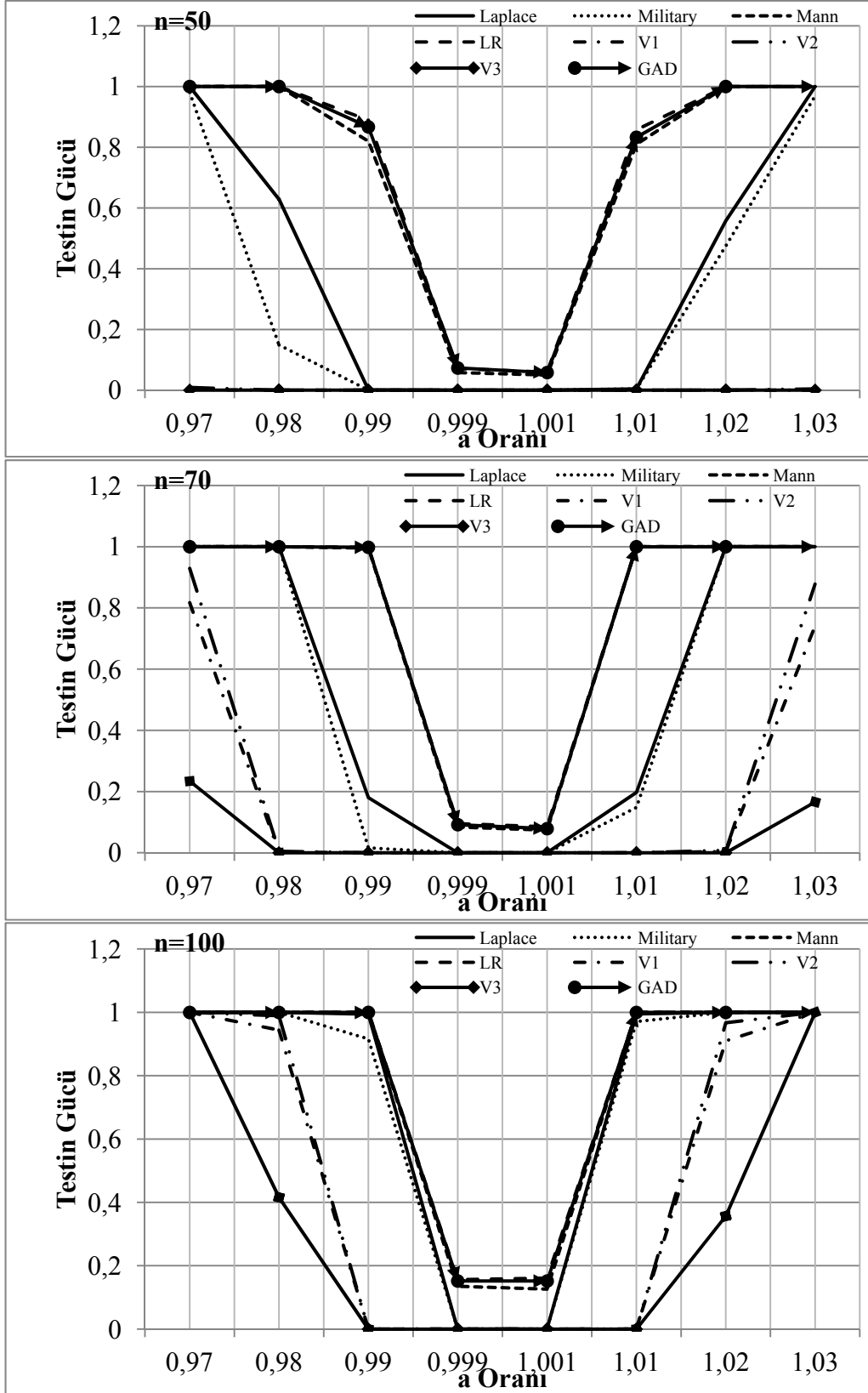
Şekil 5.21 Weibull (1,1.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması



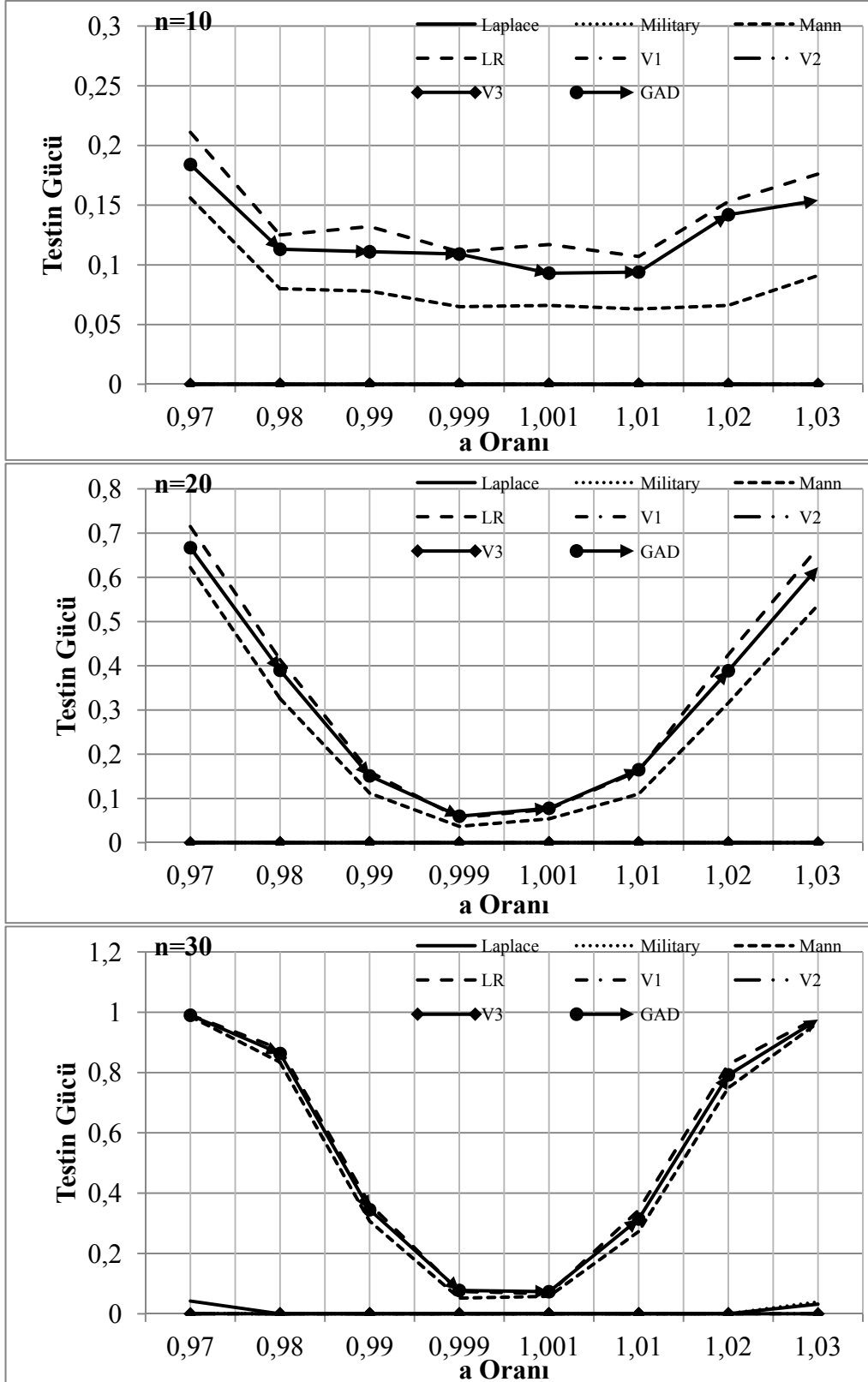
Şekil 5.21 Weibull (1,1.5) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)



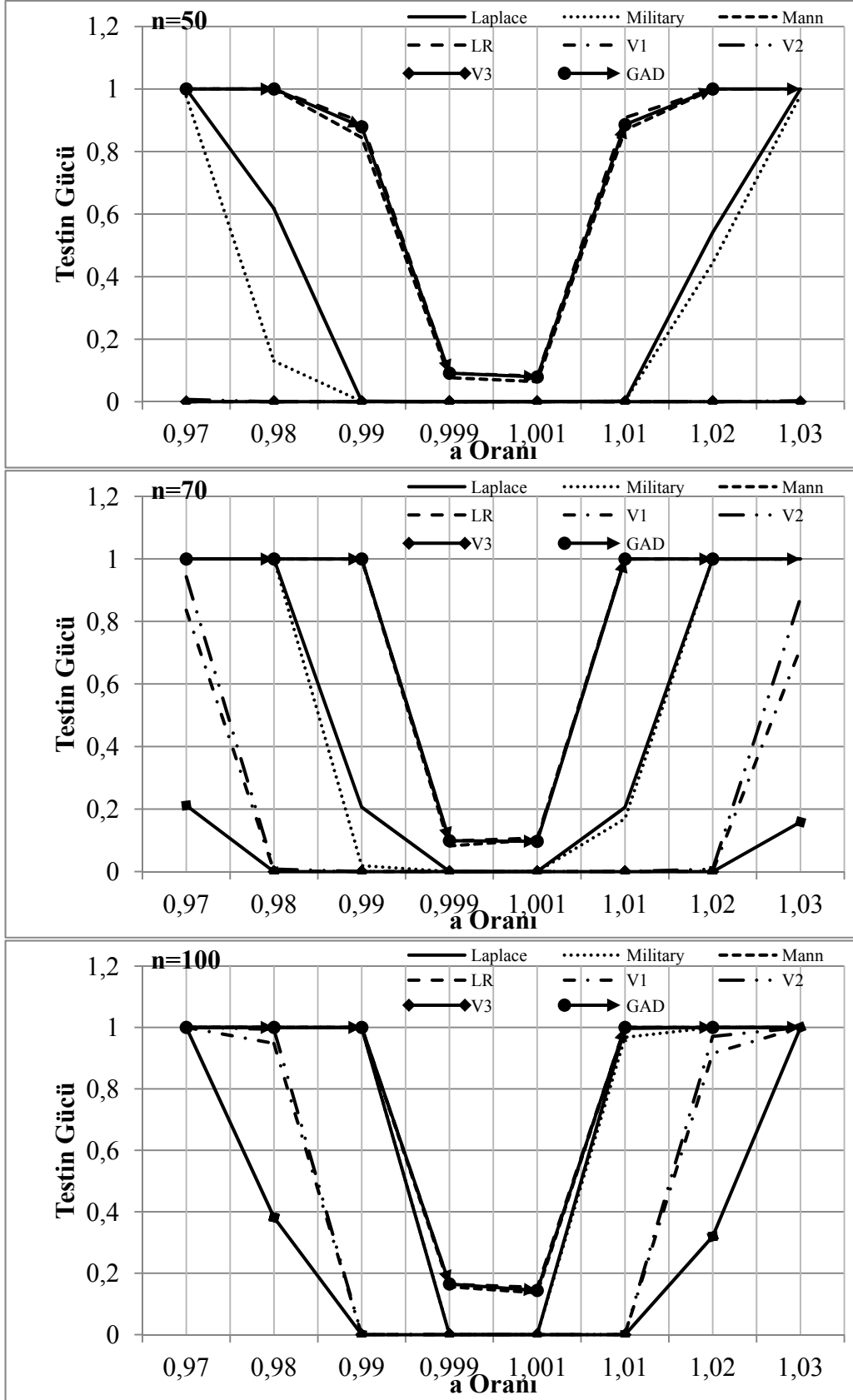
Şekil 5.22 Weibull (1,3.4) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması



Şekil 5.22 Weibull (1,3.4) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)

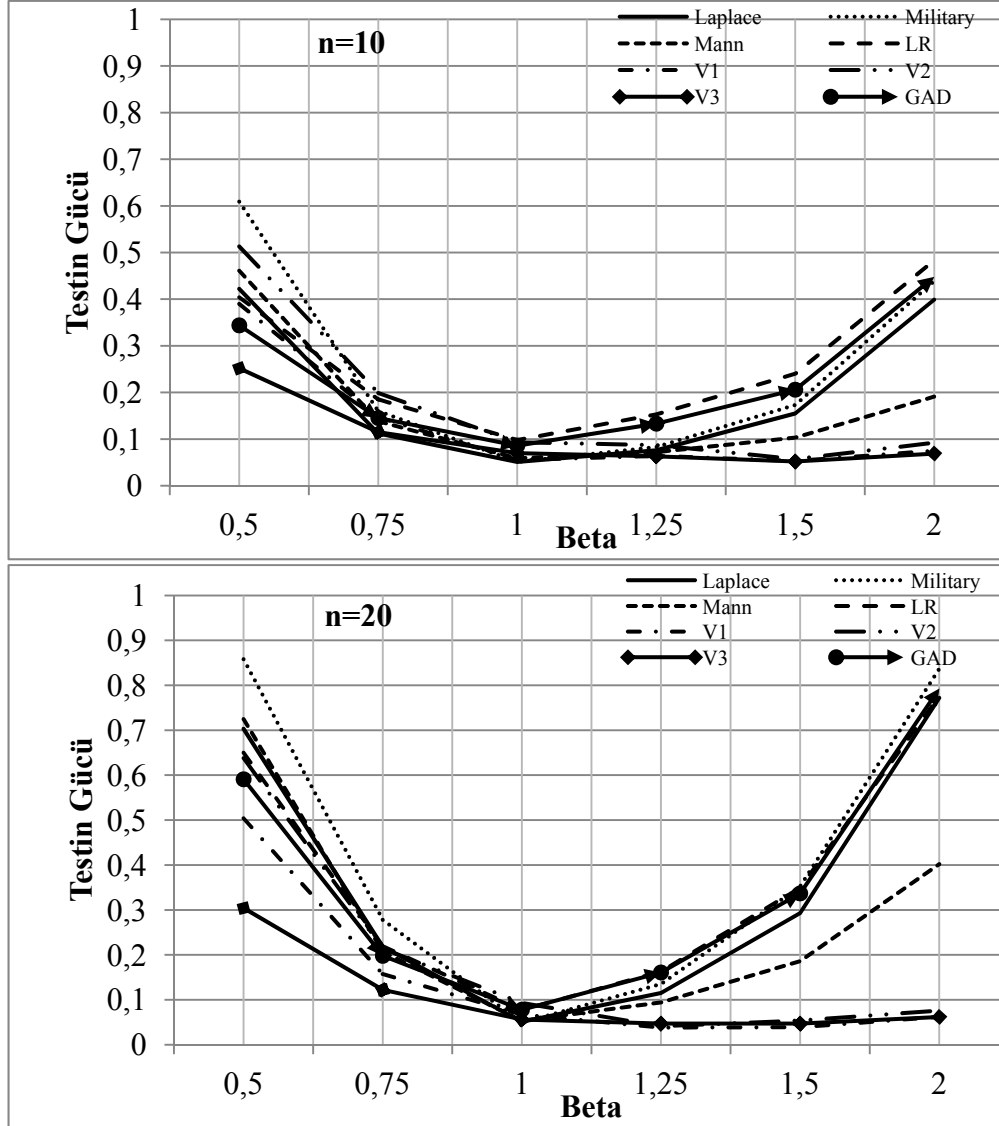


Şekil 5.23 Weibull (1,3.6) dağılımı ve $a = 0,97, 0,98, 0,99, 0,999, 1,001, 1,01, 1,02$ ve $1,03$ iken elde edilen simülasyon çalışması

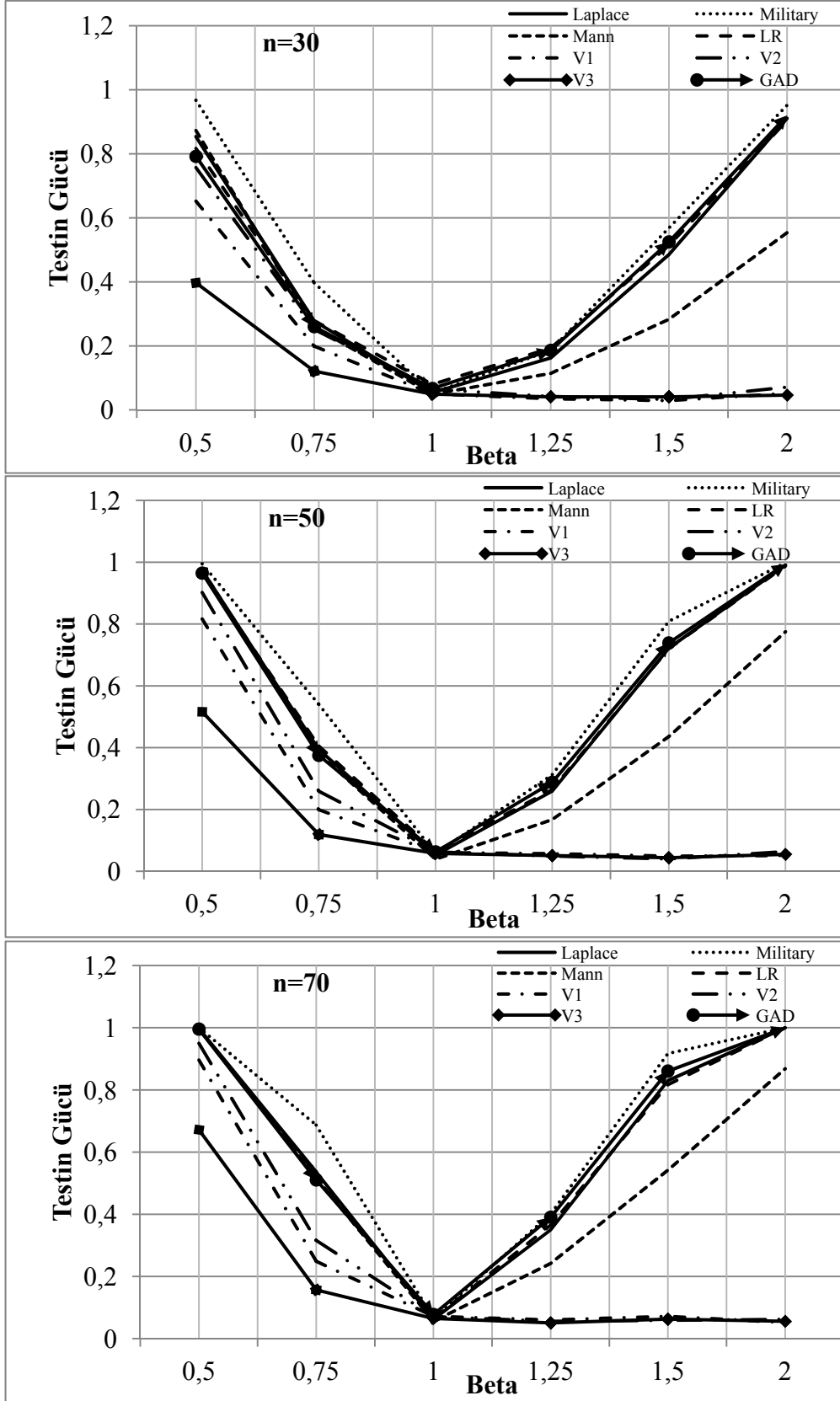


Şekil 5.23 Weibull (1,3.6) dağılımı ve $a = 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02$ ve 1.03 iken elde edilen simülasyon çalışması (devamı)

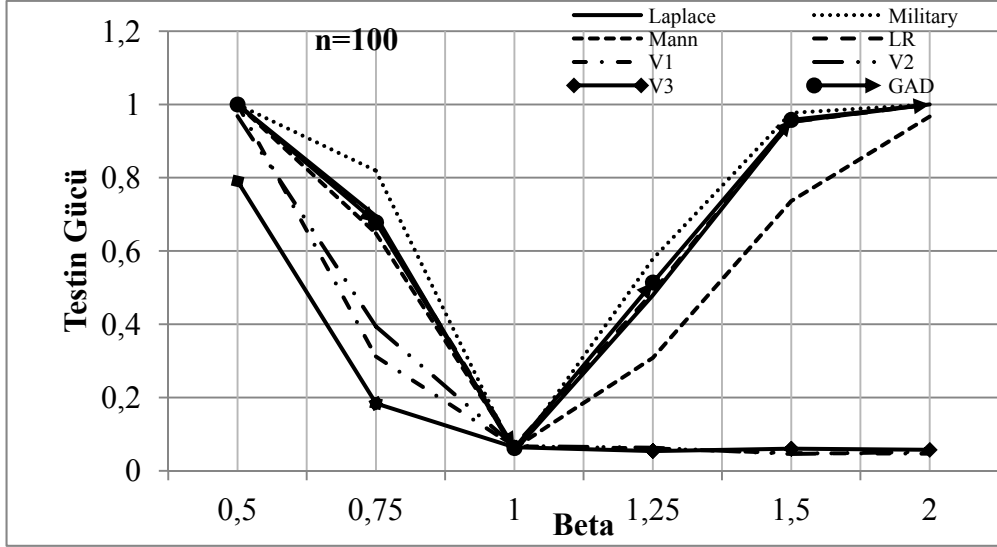
3. $\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}$ şiddet fonksiyonuna sahip homojen olmayan Poisson sürecinden $\beta = 0.5, 0.75, 1$ (trend yok), 1.25, 1.5 ve 2 seçilerek monoton trendi içeren veri üretimi gerçekleştirilmiştir. Burada $\beta < 1$ iken monoton azalan trend, $\beta > 1$ iken monoton artan bir trend gözlenir. $\beta = 1$ ise trend yoktur. İlgili grafik şekil 5.24'deki gibidir.



Şekil 5.24 Kuvvet yasası monoton şiddet fonksiyonu ile simülasyon çalışması

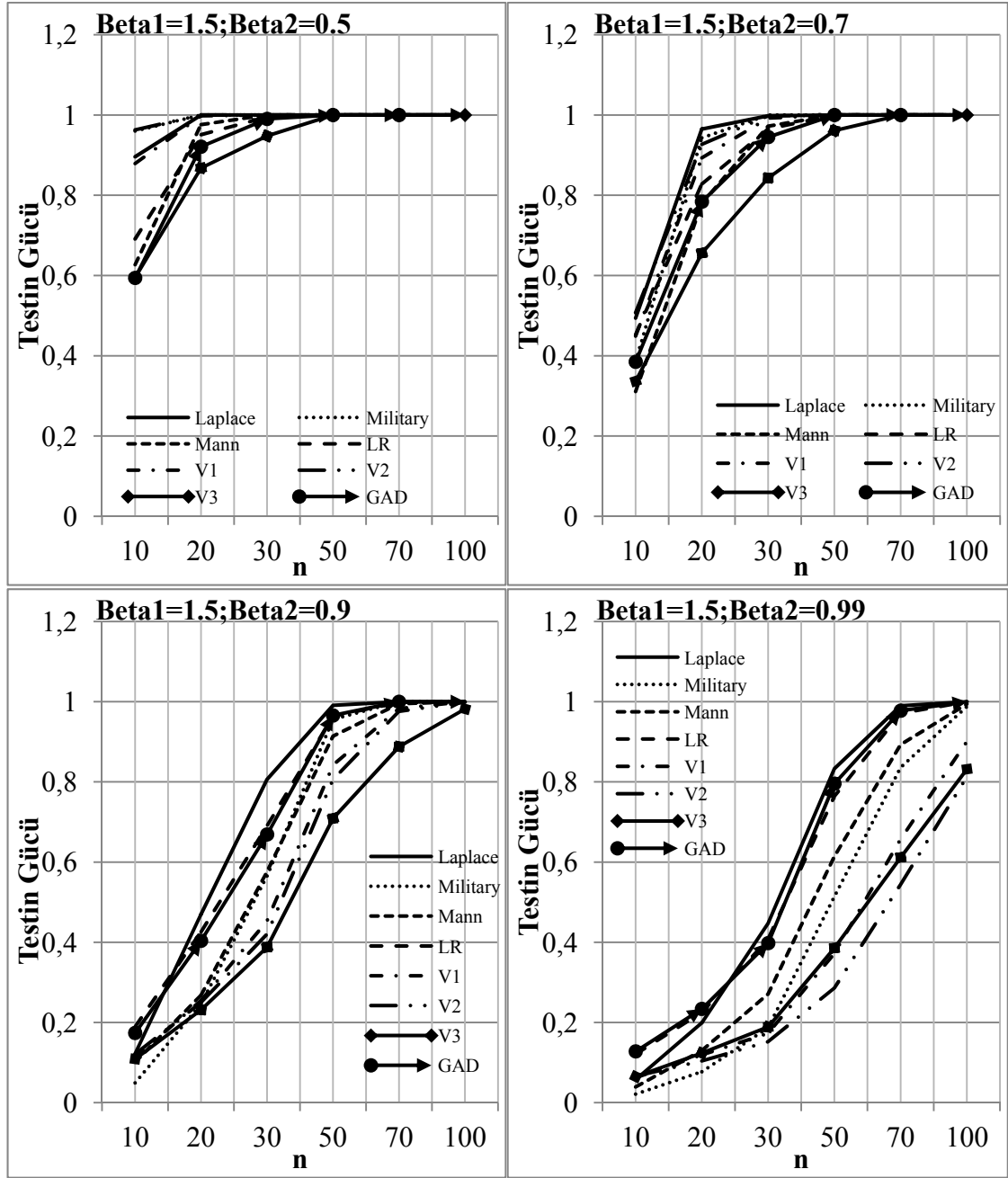


Şekil 5.24 Kuvvet yasası monoton şiddet fonksiyonu ile simülasyon çalışması (devamı)

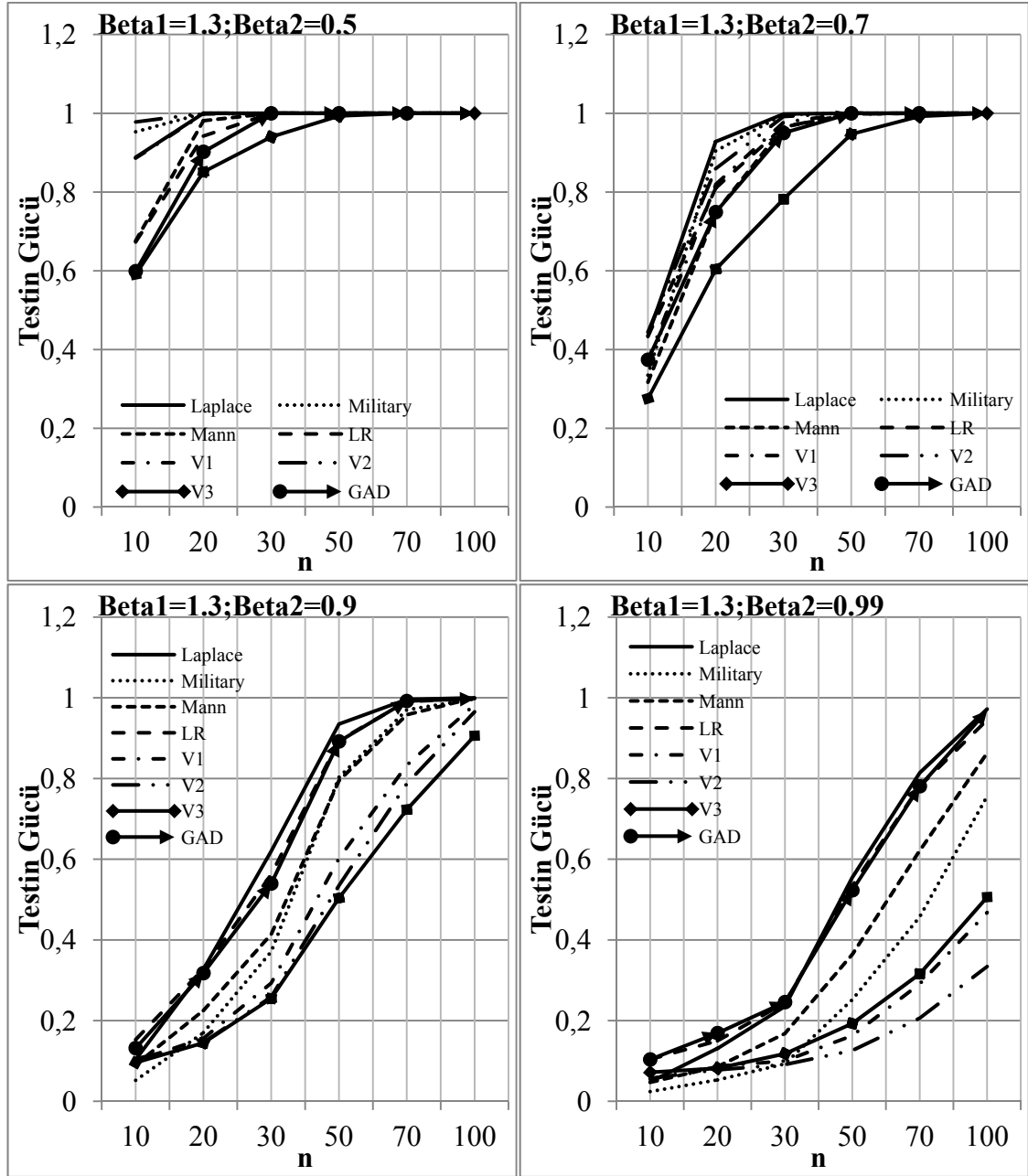


Şekil 5.24 Kuvvet yasası monoton şiddet fonksiyonu ile simülasyon çalışması (devamı)

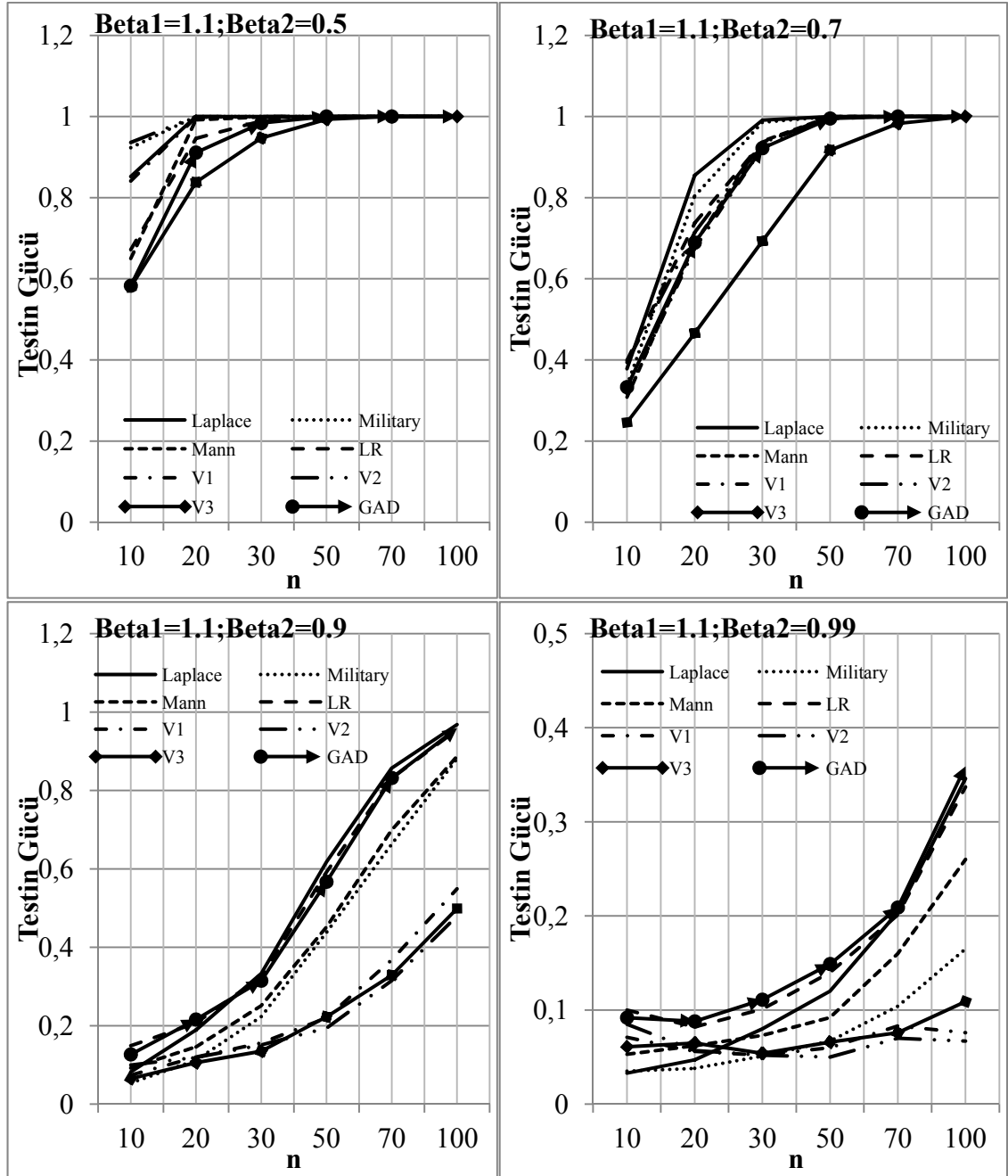
4. $\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}$ şiddet fonksiyonuna sahip homojen olmayan Poisson sürecinden belli bir periyot $\beta = 1.5, 1.3, 1.1$ ve 1.01 diğer belli bir periyotta ise $\beta = 0.5, 0.7, 0.9$ ve 0.99 seçilerek monoton olmayan döngüsel trendi içeren veri üretimi gerçekleştirilmiştir. Benzer olarak ilk periyotta $\beta = 0.5, 0.7, 0.9$ ve 0.99 ile diğer periyotta $\beta = 1.5, 1.3, 1.1$ ve 1.01 seçilerek yine monoton olmayan döngüsel trendi içeren veri üretimi gerçekleştirilmiştir. Burada $\beta < 1$ iken periyotta monoton azalan trend, $\beta > 1$ iken diğer periyotta monoton artan bir trend gözlenir. Böylece döngüsel trendi içeren veri kümesi için testlerin güçleri şekil 5.25-5.32'deki grafikler ile verilir.



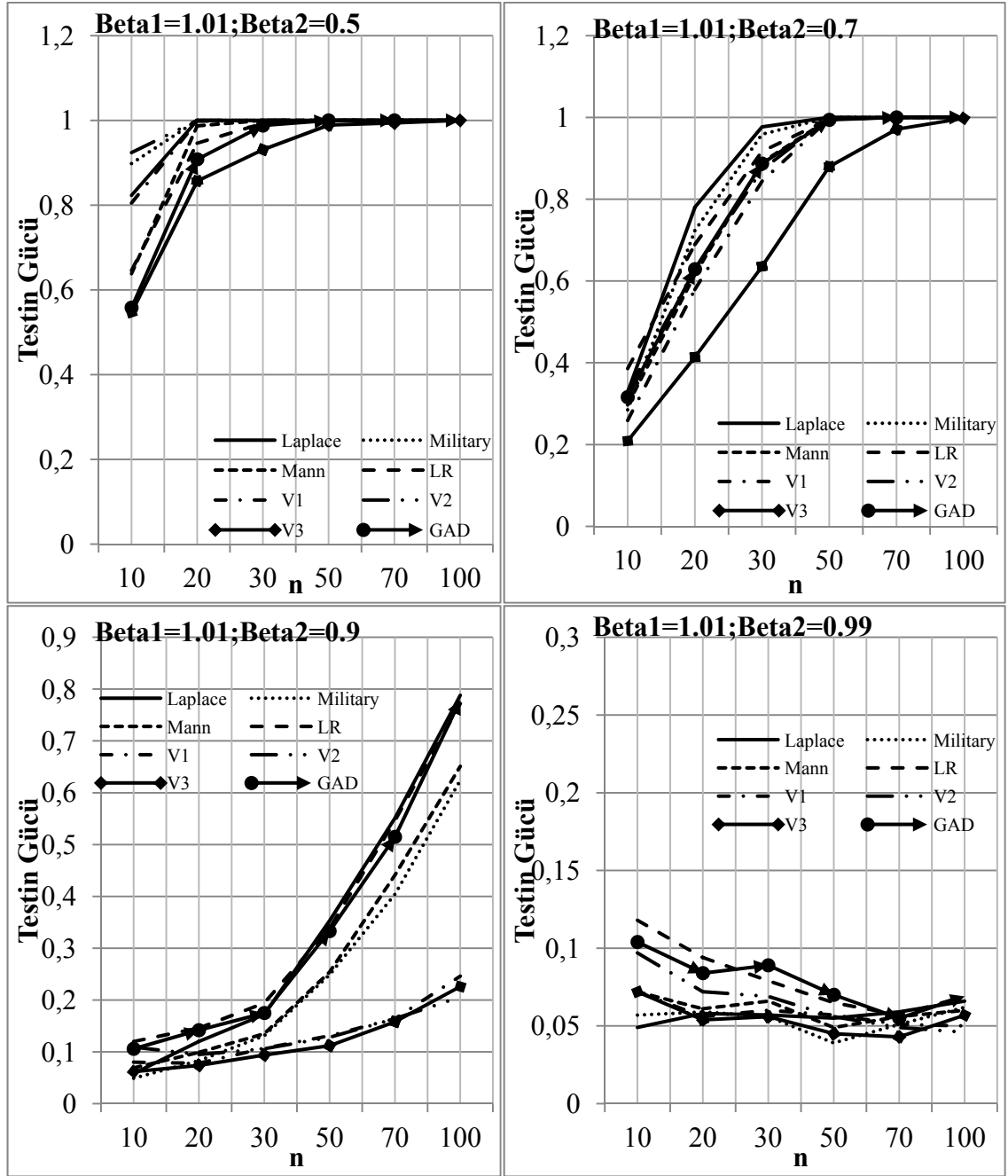
Şekil 5.25 Belli bir periyot $\beta = 1.5$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trende ilişkin simülasyon çalışması



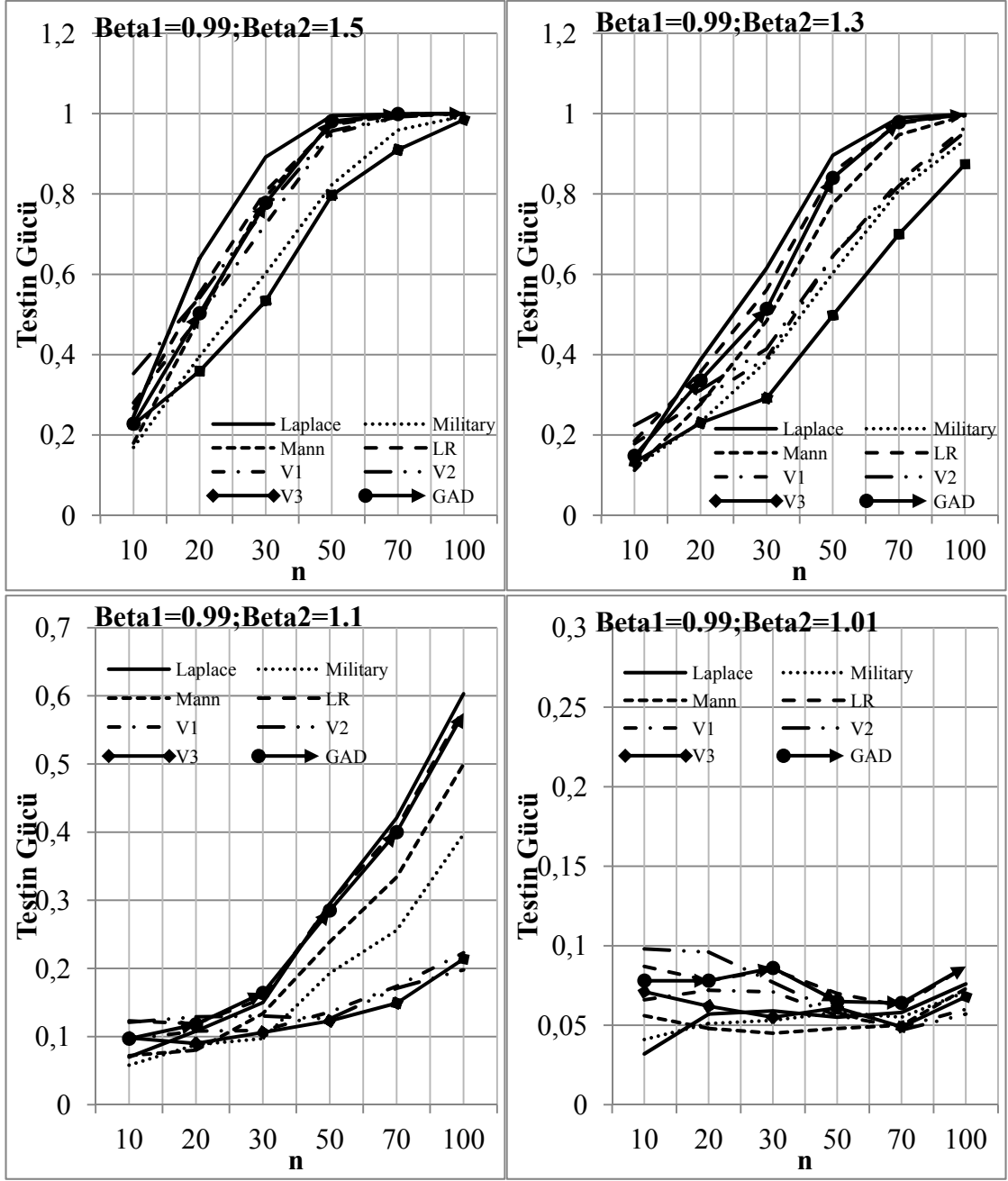
Şekil 5.26 Belli bir periyot $\beta = 1.3$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trendde ilişkin simülasyon çalışması



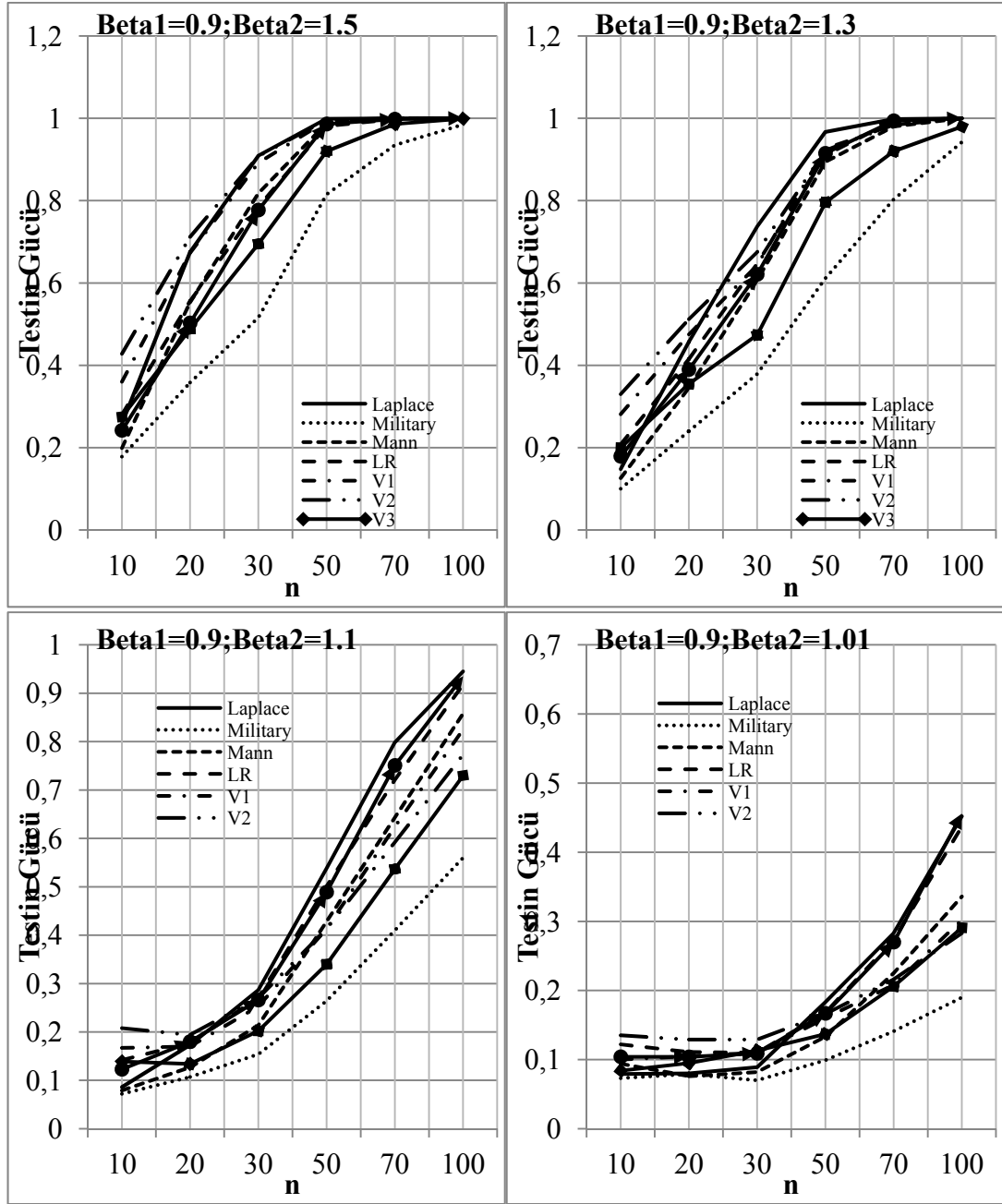
Şekil 5.27 Belli bir periyot $\beta = 1.1$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trendde ilişkin simülasyon çalışması



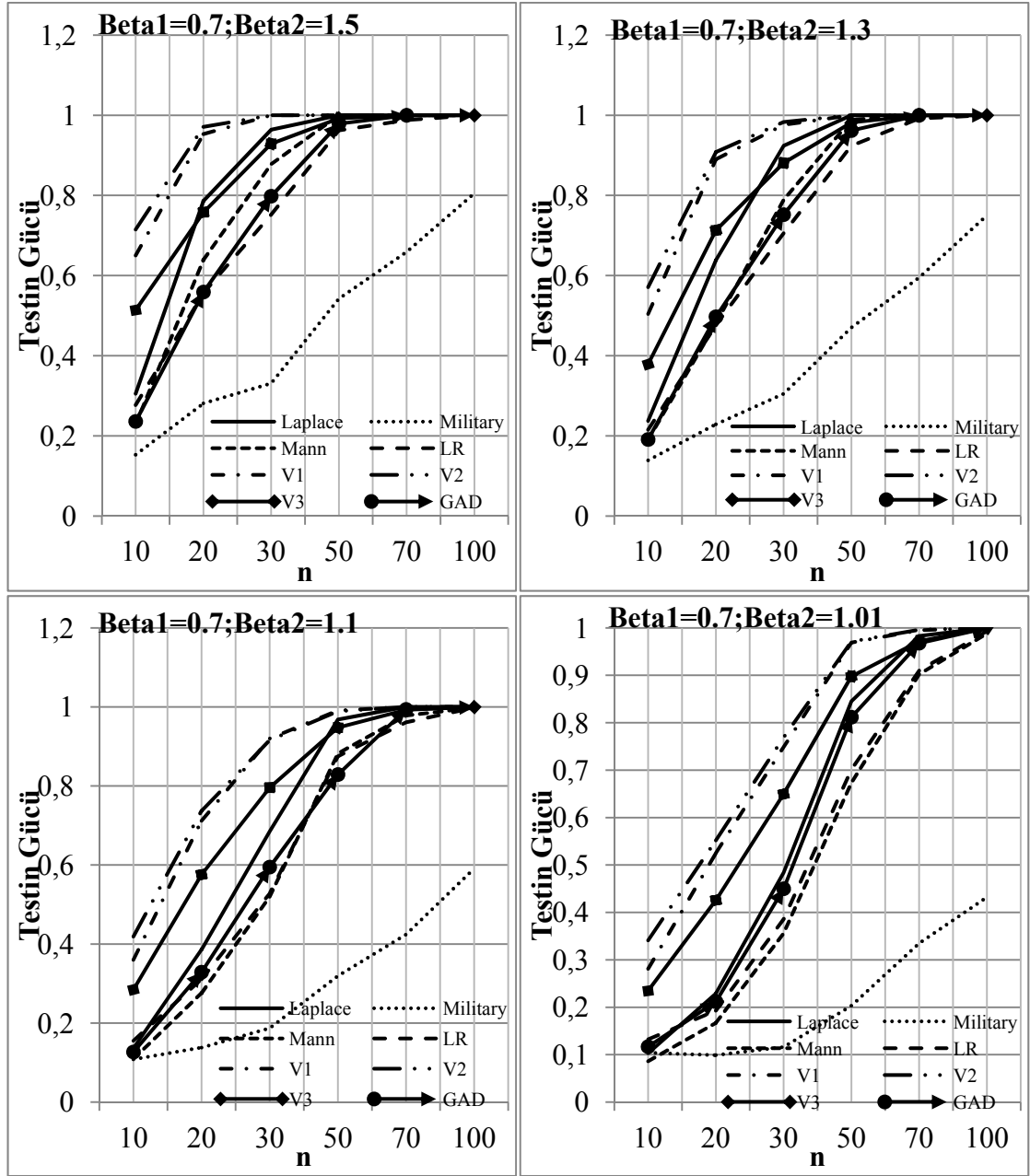
Şekil 5.28 Belli bir periyot $\beta = 1.01$ ile monoton artan, belli bir periyot monoton azalan trendde ilişkin simülasyon çalışması



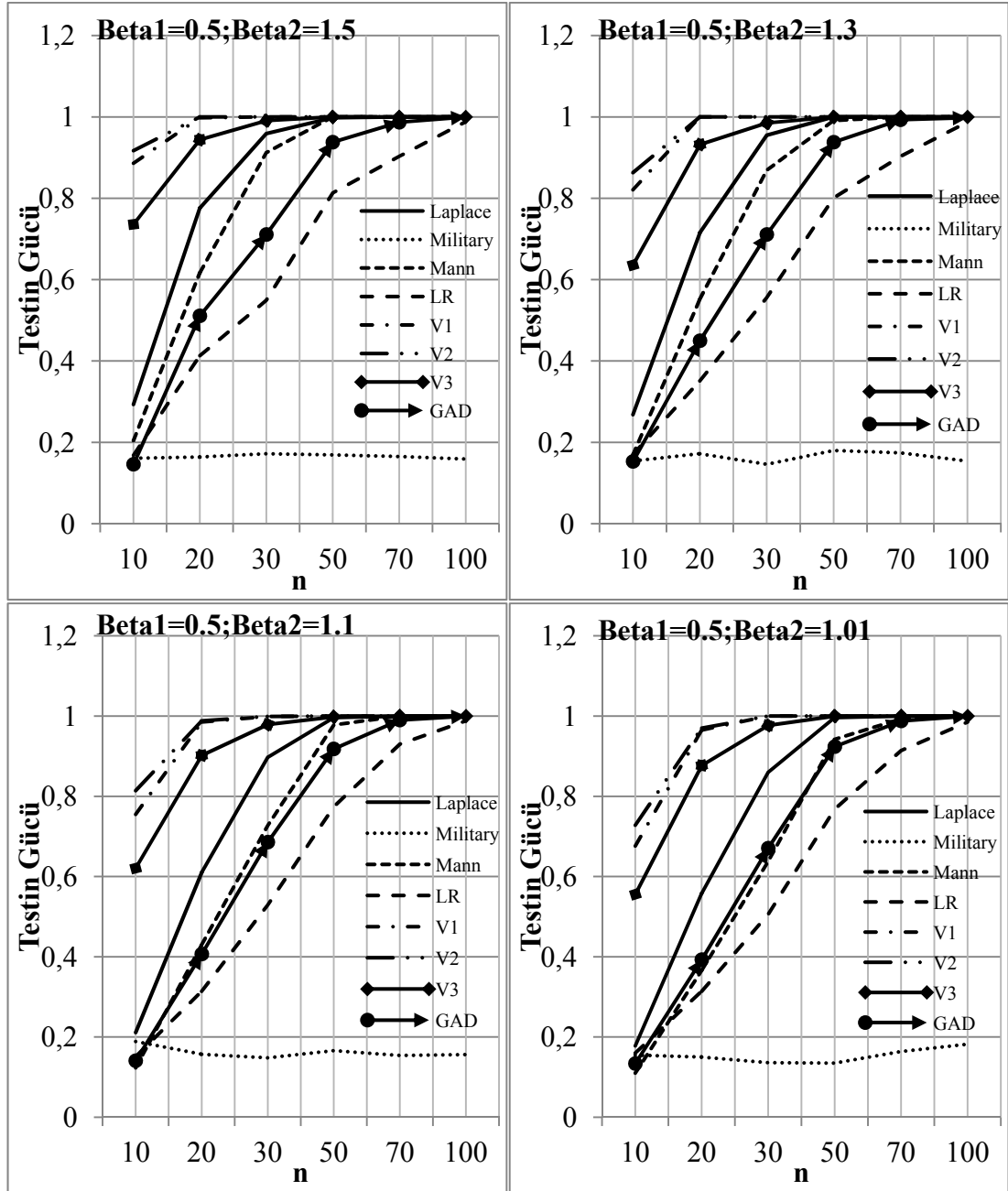
Şekil 5.29 Belli bir periyot $\beta = 0.99$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trende ilişkin simülasyon çalışması



Şekil 5.30 Belli bir periyot $\beta = 0.9$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trendde ilişkin simülasyon çalışması

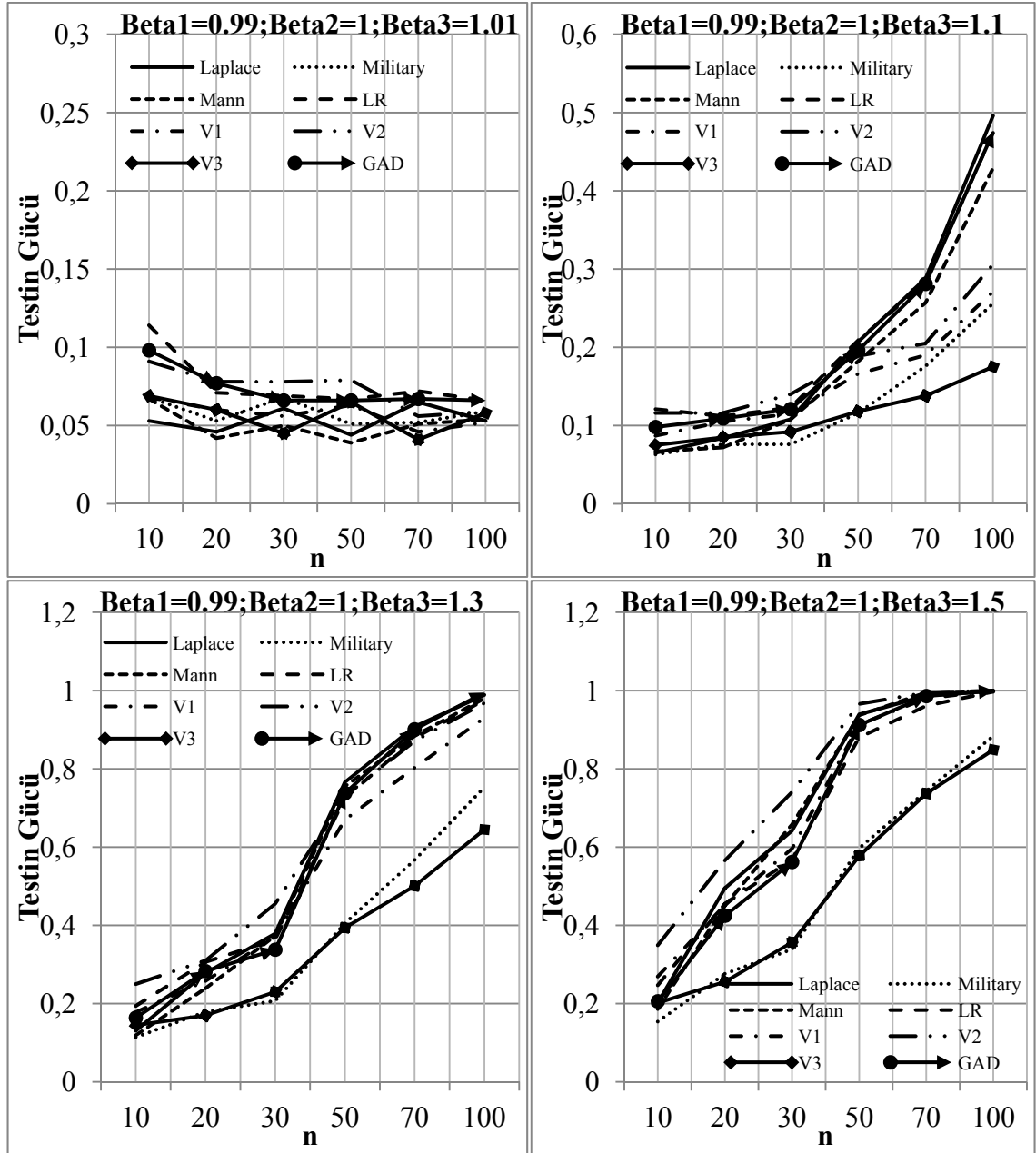


Şekil 5.31 Belli bir periyot $\beta = 0.7$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trendde ilişkin simülasyon çalışması

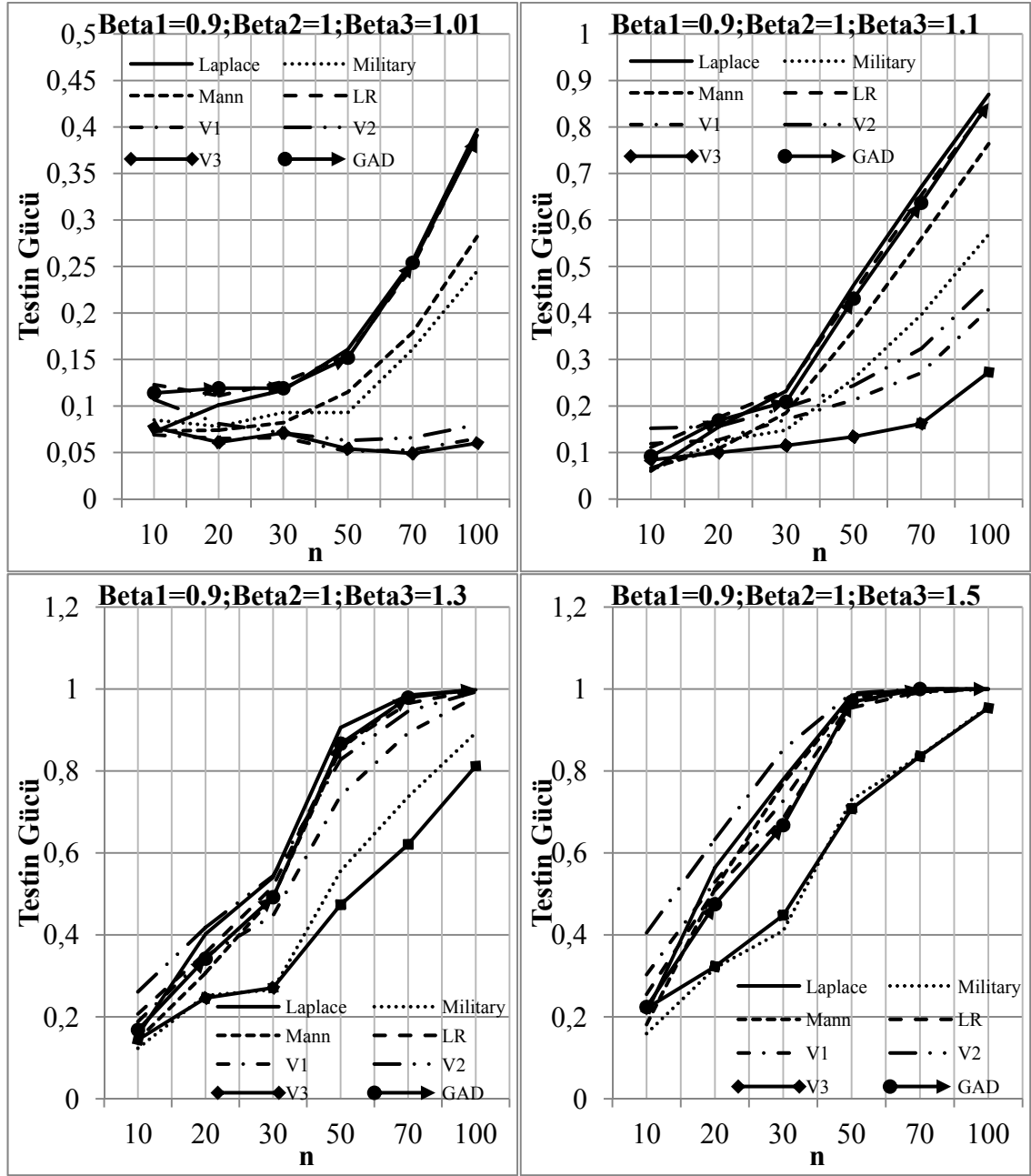


Şekil 5.32 Belli bir periyot $\beta = 0.5$ ile monoton azalan, belli bir periyot monoton artan trendde ilişkin simülasyon çalışması

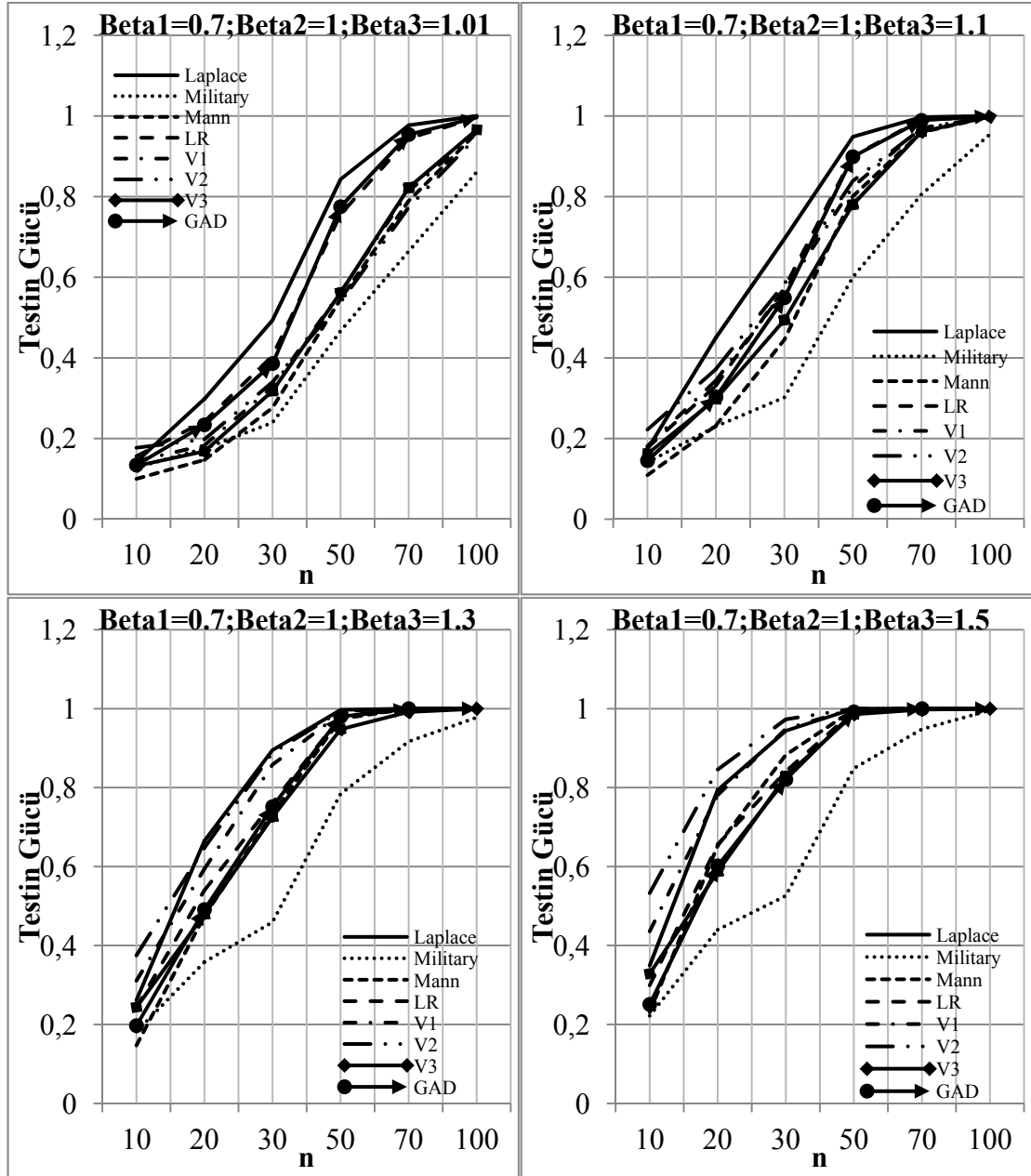
5. $\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}$ şiddet fonksiyonuna sahip homojen olmayan Poisson sürecinden başlangıçta $\beta = 0.5, 0.7, 0.9$ ve 0.99 , belli bir periyot $\beta = 1$ (trend yok), son olarak da $\beta = 1.5, 1.3, 1.1$ ve 1.01 seçilerek monoton olmayan trendi içeren veri üretimi gerçekleştirilmiştir. Daha özel anlamda ise bu trend kuvvet trenddir. Bu şekilde oluşturulan bir veri seti için test istatistiklerinin güçleri şekil 5.33-5.36'daki grafiklerle verilir.



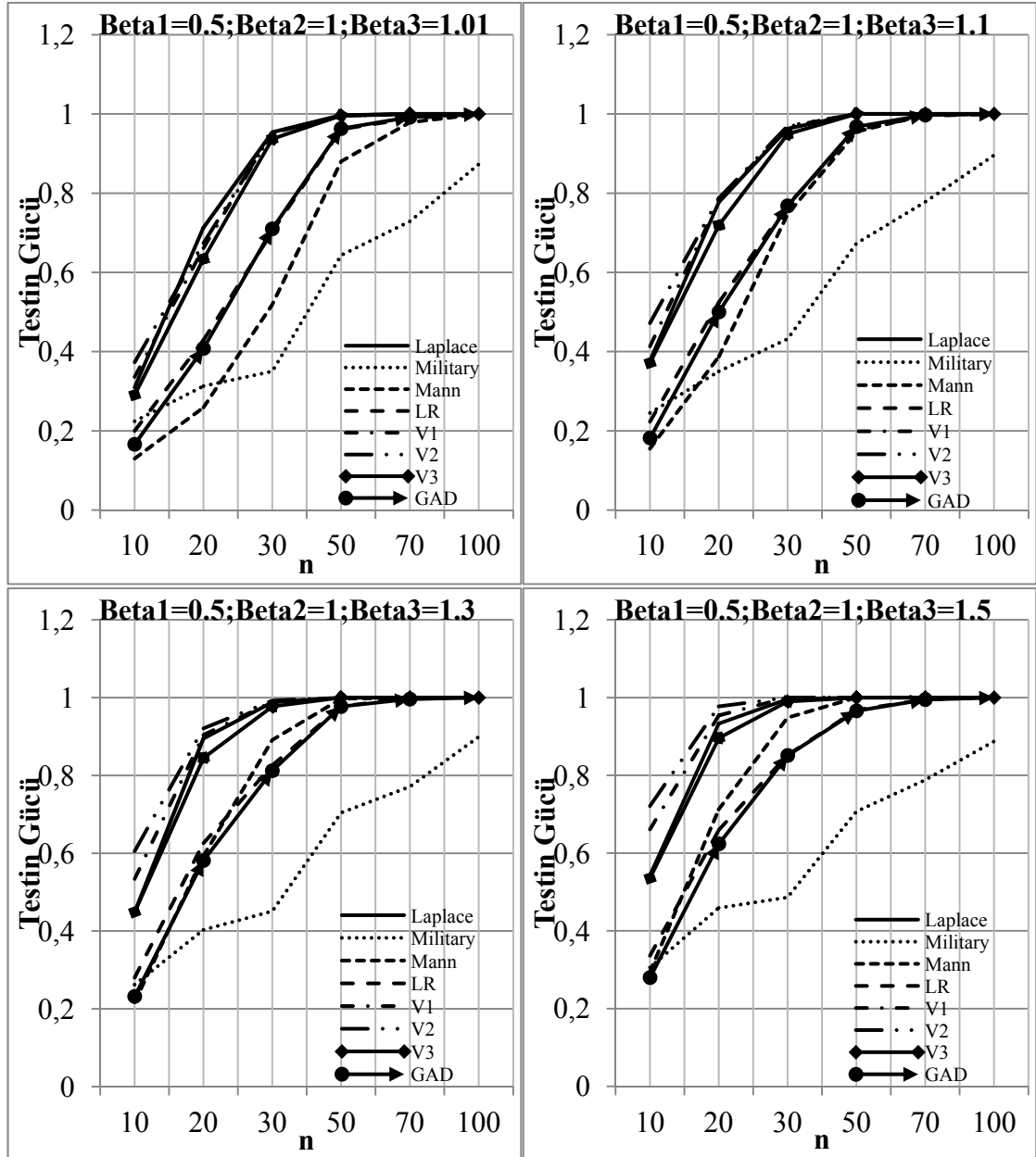
Şekil 5.33 Monoton olmayan küvet trend



Şekil 5.34 Monoton olmayan küvet trend



Şekil 5.35 Monoton olmayan küvet trend



Şekil 5.36 Monoton olmayan küvet trend

6. SONUÇLAR

1. Sayma süreçlerinden gelen veri kümesi homojen Poisson sürecine göre üretilmiş olduğunda literatürde bulunan trend testlerinin her biri için yokluk hipotezini destekleyecek biçimde elde edilmiş olurlar. Buna göre,

- Küçük örneklem hacminde Laplace, Military Handbook ve Mann testleri önerilebilir.
- Örneklem hacmi büyüdükçe her bir test 1. tip hata olasılığı olan α değerine yakınsamıştır.

2. Sayma süreçlerinden gelen veri kümesi yenileme sürecine göre üretilmiş olduğunda,

- Mann, Lewis-Robinson ve genelleştirilmiş Anderson Darling testlerinin yokluk hipotezlerini destekleyecek biçimde elde edilmiş olurlar. Buna göre, ilgili dağılımlar gamma, normal, lognormal, kesilmiş normal ve Weibull iken küçük örneklem hacminde Mann testi önerilebilir. Örneklem hacmi büyüdükçe bu üç test de 1. tip hata olasılığı olan α değerine yakınsamıştır.
- Yokluk hipotezi homojen Poisson süreci olan testler, sayma sürecinden gelen veri kümesi yenileme sürecine uygun olduğunda yanıltıcı sonuçlar vermiştir. İlgili dağılım gamma olduğunda ve bu dağılımın şekil parametresi 1'den küçük olduğunda (DFR) her bir örneklem hacminde Laplace ve Military Handbook testleri yokluk hipotezlerini red edip ilgili sürecin monoton trende, V1, V2 ve V3 testleri ise yokluk hipotezlerini red edip ilgili sürecin monoton olmayan trende sahip olduğu sonucunu vermiştir. Şekil parametresi 1'den büyük olduğunda (IFR) ise bu testler, şekil parametresi 1'den uzaklaştıkça yokluk hipotezlerini red edemeyerek ilgili sürecin homojen Poisson süreci olduğu sonucunu vermiştir. İlgili dağılım Weibull dağılımı olduğunda da, gamma dağılımı ile benzer sonuçlar ortaya çıkmıştır. Gamma dağılımında yapılmış olan yorumlamalar Weibull dağılımı için de yapılabilir. İlgili dağılımlar normal ve kesilmiş normal dağılıma uygunluk gösterdiğinde Laplace, Military Handbook, V1, V2 ve V3 testleri yokluk hipotezlerini neredeyse hiç red edemeyerek, aslında yenileme süreci olan ilgili sürecin homojen Poisson süreci olduğu sonucunu vererek yanıltıcı bir sonuç göstermiştir. İlgili dağılım lognormal dağılım olduğunda ise dağılıma ilişkin varyasyon katsayısı değiştikçe testlerin

sonuçları da değişmiştir. Bu oran 1'den küçük olduğunda yenileme süreci olan sayma süreci Laplace, Military Handbook, V1, V2 ve V3 testlerine göre homojen Poisson süreci, 1'den büyük olduğunda ise Laplace ve Military Handbook testlerine göre monoton trendli veri kümesi, V1, V2 ve V3 testlerine göre monoton olmayan trendli veri kümesi olarak görülmüştür.

3. Geometrik sürece ilişkin olan a oranı 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.02 ve 1.03 ile üstel, gamma, normal, lognormal, kesilmiş normal ve Weibull dağılımları kullanılarak sayma süreçlerinden gelen monoton trendde sahip veri kümeleri üretildiğinde,

- İlgili dağılım üstel dağılım olduğunda, küçük örneklem hacminde Lewis-Robinson veya genelleştirilmiş Anderson Darling testleri önerilebilir. Örneklem hacmi arttıkça Laplace testi bir adım öne çıkmaktadır.
- İlgili dağılım şekil parametresi 1'den küçük gamma dağılımı (DFR) olduğunda her bir örneklem hacminde ve $a < 1$ iken sırasıyla Military Handbook ve Laplace testleri önerilebilir. $a > 1$ iken Laplace testi Military Handbook testine oranla daha güçlü duruma gelmiştir. Şekil parametresi 1'den büyük (IFR) olduğunda ise her bir örneklem hacmi ve her a oranı için sırasıyla Lewis-Robinson, genelleştirilmiş Anderson Darling ve Mann testleri önerilebilir. Şekil parametresi 3 ve 3'den büyük olduğunda ise gamma dağılımı normal dağılıma yakınsayacağından, dağılımın simetriklik özelliği bulunduğu öne çıkan testler sırasıyla Lewis-Robinson, genelleştirilmiş Anderson Darling ve Mann testleridir.
- İlgili dağılımlar normal, lognormal ve kesilmiş normal dağılımlar olduğunda ise her bir örneklem hacmi ve her a oranı için sırasıyla Lewis-Robinson, genelleştirilmiş Anderson Darling ve Mann testleri önerilebilir.
- İlgili dağılım şekil parametresi 1'den küçük Weibull dağılımı (DFR) olduğunda küçük örneklem hacminde ve her a oranı için alternatif hipotezleri farklı olsa da sırasıyla V2, V1 ve V3 testleri önerilebilir. Ancak $n > 50$ ve $a < 1$ iken Military Handbook testi $a > 1$ iken Laplace testi önerilir. Şekil parametresi 1'den büyük (IFR) olduğunda ise her bir örneklem hacmi ve her a oranı için sırasıyla Lewis-Robinson, genelleştirilmiş Anderson Darling ve Mann testleri önerilebilir. Ayrıca şekil parametresi 3 ve 3'den büyük olduğunda ise Weibull dağılımı normal dağılıma

yakınsayacağından, dağılımın simetriklik özelliği bulunduğunda öne çıkan testler sırasıyla Lewis-Robinson, genelleştirilmiş Anderson Darling ve Mann testleridir.

4. $\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}$ şiddet fonksiyonuna sahip homojen olmayan Poisson sürecinden $\beta = 0.5, 0.75, 1$ (trend yok), 1.25, 1.5 ve 2 seçilerek monoton trendi içeren veri üretimi gerçekleştirilmiştir. Burada $\beta < 1$ iken monoton azalan trend, $\beta > 1$ iken monoton artan bir trend gözlenir.

- Her bir örneklem hacminde ve hem $\beta < 1$ hem de $\beta > 1$ iken Military Handbook testi önerilir.

5. $\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}$ şiddet fonksiyonuna sahip homojen olmayan Poisson sürecinden belli bir periyot $\beta = 1.5, 1.3, 1.1$ ve 1.01 diğer belli bir periyotta ise $\beta = 0.5, 0.7, 0.9$ ve 0.99 seçilerek önce monoton artan daha sonra monoton azalan trendli yani döngüsel trendli veri kümesi üretildiğinde,

- Küçük örneklem hacminde ve trend varlığını açık bir şekilde belli ettiğinde yani β , 1'den uzak iken V1 ve V2 testleri önerilirken, trend varlığını gizledikçe yani β , 1'e yakın iken genelleştirilmiş Anderson Darling testi önerilir. Örneklem hacmi büyüdükçe genelleştirilmiş Anderson Darling testi bir adım öne çıkmaktadır.
- Alternatif hipotezleri farklı yapıda olsa da Laplace ve Lewis-Robinson testleri monoton olmayan trendin varlığını ortaya çıkarmada önerilebilir.

6. $\lambda(t) = \beta t^{\beta-1}$ şiddet fonksiyonuna sahip homojen olmayan Poisson sürecinden belli bir periyot $\beta = 0.5, 0.7, 0.9$ ve 0.99 diğer belli bir periyotta ise $\beta = 1.5, 1.3, 1.1$ ve 1.01 seçilerek önce monoton azalan daha sonra monoton artan trendli yani döngüsel trendli veri kümesi üretildiğinde,

- β , 1'e çok yakın iken yani trend varlığını oldukça gizlemiş olduğunda alternatif hipotezi farklı yapıda olan Laplace testi her bir örneklem hacmi için önerilir.
- β , 1'den uzaklaştıkça hem küçük hem de büyük örneklem hacimlerinde sırasıyla V2, V1 ve V3 testleri önerilir.
- Önce monoton azalan daha sonra monoton artan trendli yani döngüsel trendli veri kümesi için Military Handbook testi oldukça zayıftır.

7. Son olarak başlangıçta azalan trend, belli bir periyot trendsiz bir yapı, son periyotta ise artan trend biçiminde elde edilen monoton olmayan trend yapısını inceleyelim. Bu yapı özel olarak küvet trend olarak adlandırılmaktadır. Sayma süreçlerinden gelen veri kümesi bu yapıyla üretildiğinde,

- Küçük örneklem hacminde V2 testi önerilir.
- Örneklem hacmi $n > 30$ olduğunda V1, V3, genelleştirilmiş Anderson Darling testleri önerilebilir.
- Laplace testi alternatif hipotezi farklı yapıda olsa da $n > 30$ için önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Anderson, T.W. and Darling, D.A. 1952. Asymptotic Theory of Certain Goodness of Fit Criteria Based on Stochastic Processes, *The Annals of Mathematical Statistics*, 23, 2, 193-212.
- Anderson, T.W. and Darling, D.A. 1954. A Test of Goodness of Fit, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.49, No. 268, pp. 765-769.
- Anonymous. 1981. Reliability Growth Management, Headquarters, U.S. Army Communications Research and Development Command, ATTN:DRDCO-PT, Mil-Hdbk-189, Fort Monmouth, NJ 07702.
- Arnold, S.F. 1990. *Mathematical Statistics*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Ascher, H. and Feingold, H. 1984. *Repairable Systems Reliability*, Marcel Dekker, New York.
- Bates, G.E. 1955. Joint Distributions of Time Intervals for the Occurrence of Successive Accidents in a Generalized Polya Scheme, *Ann. Math. Stat.*, 26, 705-720.
- Billingsley, P. 1999. *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, Inc, New York.
- Cox, D.R. and Lewis, P.A.W. 1966. *The Statistical Analysis of Series of Events*, Methuens, London.
- Crowder, M.J., Kimber, A.C., Smith, R.L. and Sweeting, T.J. 1991. *Statistical Analysis of Reliability Data*, Chapman and Hall, London.
- Fisher, R.A. 1929. Tests of Significance in Harmonic Analysis, *Proc. R. Soc. Lond.*
- Karlin, S. and Taylor, H.M. 1975. *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press.
- Kvaløy, J.T. and Lindqvist, B.H. 1998. TTT-Based Tests for Trend in Repairable Systems Data, *Reliability Engineering and System Safety*, 60, 13-28.
- Kvaløy, J.T. and Lindqvist, B.H. 2003. A Class of Tests for Renewal Process Versus Monotonic and Nonmonotonic Trend in Repairable Systems Data, in *Mathematical and Statistical Methods in Reliability*, 401-414.
- Lam, Y. 1988. Geometric Process and Replacement Problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 4, 366-377.
- Lam, Y. 1992. Nonparametric Inference for Geometric Process, *Commun. Statist.-Theory Meth.*, 21(7), 2083-2105.
- Lehmann, E.L. 1999. *Elements of Large Sample Theory*, Springer-Verlang, New York.

- Lindqvist, B.H. 2006. On the Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems, *Statistical Science*, 21, 4, 532-551.
- Mann H.B. 1945. Nonparametric Tests against Trend, *Econometrika*, 13, 245-259.
- Nelson, W. 1995. Confidence Limits for Recurrence Data-Applied to Cost or Number of Product Repairs, *Technometrics*, 37, 2, 147-157 .
- Parzen, E. 1964. *Stochastic Processes*, Holden Day, Inc, London.
- Proschan, F. 1963. Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics*, 5, 375-383.
- Ross, S.M. 1996. *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons. Inc, California.
- Serfling, R.J. 1980. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons. Inc, New York.
- Thompson, W.A. 1981. On The Foundations of Reliability, *Technometrics*, 23, 1, 1-13.
- Vaurio, J.K. 1999. Identification of Process and Distribution Characteristics by Testing Monotonic and Non-Monotonic Trends in Failure Intensities and Hazard Rates, *Reliability Engineering and System Safety*, 64, 345-357.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa Hilmi PEKALP

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 30/05/1986

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bahçelievler (Yabancı Dil Ağırlıklı) Deneme Lisesi (2000-2004)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2005-2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim
Dalı (Eylül 2011-Ekim 2013)