

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**OTOREGRESİF HATA TERİMLİ REGRESYON MODELLERİNDE ROBUST
PARAMETRE TAHMİNİ VE MODEL SEÇİMİ**

Yetkin TUAÇ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2020**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

OTOREGRESİF HATA TERİMLİ REGRESYON MODELLERİNDE ROBUST PARAMETRE TAHMİNİ VE MODEL SEÇİMİ

Yetkin TUAÇ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Olçay ARSLAN

İstatistiksel modellemenin iki önemli unsuru, model parametrelerinin tahmin edilmesi ve modeldeki anlamlı değişkenlerin doğru şekilde seçilmesidir. Doğrusal regresyon modellerinde varsayımlardan biri, hata terimlerinin ilişkisiz olmasıdır. Bu tezde; regresyon modellerinde hata terimlerinin p. dereceden otoregresif yapıda ilişkili olduğu durum için parametre tahmini ve değişken seçimi problemleri ele alınmıştır. Ayrıca verinin aykırı değer içermesi söz konusu olduğunda; normal dağılıma alternatif olarak simetrik t dağılımı, hataların çarpık dağılım göstermesi durumunda ise çarpık normal ve çarpık t dağılımları varsayımlarıyla parametre tahminleri ve değişken seçimleri yapılmıştır. EM (expectation maximization) algoritması yardımıyla model parametrelerinin EÇO (en çok olabilirlik) tahminleri elde edilmiştir. Parametre tahminini ve değişken seçimini eş zamanlı yapan; lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemleri kullanılarak, bahsedilen hata dağılımları varsayımları altında parametre tahminleri elde edilmiştir. Öte yandan bu tezde, otoregresif hata terimli regresyon modelleri için, hata terimlerinin herhangi bir dağılım varsayımı olmadan; MM robust tahmin edicilerine dayalı lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerinin robust versiyonları önerilmiştir. Önerilen tüm yöntemler, farklı durumlar altında kurulan simülasyonlar ve gerçek veri analizleri yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Ekim 2020, 229 sayfa

Anahtar Kelimeler: Çarpık dağılımlar, doğrusal regresyon, kalın kuyruklu dağılımlar, otoregresif süreçler, robust değişken seçimi, robust parametre tahmini.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ROBUST PARAMETER ESTIMATION AND MODEL SELECTION IN AUTOREGRESSIVE ERROR TERM REGRESSION MODELS

Yetkin TUAÇ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Olçay ARSLAN

Two important elements of statistical modeling are estimating model parameters and choosing the significant variables correctly in the model. One of the assumptions in linear regression models is that the error terms are unrelated. In this thesis, parameter estimation and variable selection are discussed when the error terms of regression models are related in the p th order autoregressive structure. In addition, the parameter estimates, and the variable selection methods are discussed under the assumptions of the data includes outliers and/or skewness. The symmetric t distribution which is an alternative to the normal distribution is used, also if the error terms have skewness, skew normal and skew t distributions are used as error distribution assumption. ML (maximum likelihood) estimates of the model parameters were obtained with the help of the EM algorithm; the forms of lasso, scad, bridge and elastic net which are simultaneous parameter estimation and variable selection methods are obtained based on the mentioned error distribution assumptions. On the other hand, in this thesis, robust versions of lasso, scad, bridge and elastic net methods based on MM robust estimator are proposed for regression models with autoregressive error terms without any distribution assumption. All proposed methods are compared with each other by the help of simulations established under different cases and from real data analysis.

October 2020, 229 pages

Key Words: Skewed distributions, linear regression, heavy-tailed distributions, autoregressive processes, robust variable selection, robust parameter estimation.

TEŞEKKÜR

Akademik araştırma ve çalışmalarımın her aşamasında, engin bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendirip her konuda desteğini gösteren hem akademik kariyerimin şekillenmesinde hem de bakış açımın genişleyip gelişmesinde büyük katkı sağlayan, zor zamanlarımda verdiği motivasyon ve gösterdiği ilgiyle sadece danışmanım değil aynı zamanda ailem olan, yüksek lisans öğrenimimden itibaren kendisiyle çalışma fırsatını yakaladığım için her daim onur duyduğum çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Olçay ARSLAN'a (Ankara Üniversitesi İstatistik A.B.D.) en derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Tez konumun ilk tohumlarını atan ve beni yönlendiren, dostluğunu ve meslektaş ilgisini esirgemeyen, fikirleri ve duruşu ile bana örnek olan değerli TİK üyem Sayın Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na (Ankara Üniversitesi İstatistik A.B.D.) ve akademik hayata atılmamda ilk adımları atmam için beni cesaretlendiren, kıymetli ve yapıcı fikirleriyle bu tezin gelişmesini sağlayan, değerli TİK üyem Sayın Prof. Dr. Esin FİRUZAN'a (Dokuz Eylül Üniversitesi İstatistik A.B.D.), saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımda kıymetli bilgilerini, zamanlarını ve yardımlarını benden esirgemeyen, değerli jüri üyelerim; Sayın Prof. Dr. Cemal ATAKAN'a (Ankara Üniversitesi İstatistik A.B.D.), Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Mehmet YILMAZ'a (Ankara Üniversitesi İstatistik A.B.D.) ve lisans öğrenimimden bu zamana kadar beni destekleyen Sayın Prof. Dr. Meral ÇETİN'e (Hacettepe Üniversitesi İstatistik A.B.D.) saygı ve minnetlerimi sunarım.

Birlikte aynı mesleği yürüttüğüm için mutluluk duyduğum, desteğiyle “iyi ki var” dediğim, çok değerli dostum Araş. Gör. Dr. Abdullah YALÇINKAYA'ya (Ankara Üniversitesi İstatistik A.B.D.); birçok zorluğun altından birlikte kalktığımız, ortak çalışmalarımızdaki çözümücü ve pratik yaklaşımları ile pek çok başarıya imza attığımız, çok değerli dostum, meslektaşım Araş. Gör. Dr. Yeşim GÜNEY'e (Ankara Üniversitesi İstatistik A.B.D.); bu süreçte, maddi-manevi her konuda bana elinden gelen her türlü desteği sağlayan değerli arkadaşım, meslektaşım Araş. Gör. Dr. Şenay ÖZDEMİR'e (Afyon Kocatepe Üniversitesi, İstatistik A.B.D.) ve Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim üyeleri ve elemanlarına meslek hayatım boyunca verdikleri destekler için teşekkürü borç bilirim.

Bugünlere gelmemde en büyük emeği olan, benim için her türlü fedakarlığa katlanan, hayat boyu yönlendirmeleri, fikirleri, katıksız sevgileri ve gurur dolu destekleri için çok kıymetli annem Ayten TUAÇ ve babam Yalçın TUAÇ'a; her konuda danıştığım, bana olan güvenini her daim hissettiğim, bu mesleği edinmemde en büyük role sahip meslektaşım ve çok kıymetli ablam Dr. Öğr. Üyesi Pelin TUAÇ YILMAZ'a en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte bir an bile yanımdan ayrılmayan, tezin dil bilgisi ve yazım kuralları bakımından incelemesini titizlikle yapan, her türlü desteğini, koşulsuz sevgisini ve gururla yanımda duruşunu her daim hissettiren, can yoldaşım, hayat arkadaşım, çok değerli nişanlım Gizem GÜLEN'e katlandığı tüm zorluklar ve bana yaşattığı tüm güzellikler için tüm kalbim ve en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Dünyaya gözlerini henüz açan, ileride insanlığa ve ülkesine sunacağı değerli katkıları şimdiden merakla beklediğim sevgili yeğenim İlber YILMAZ'ın adına.

Yetkin TUAÇ
Ankara, Ekim, 2020



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. KALIN KUYRUK VARSAYIMI ALTINDA PARAMETRE TAHMİNİ.....	8
2.1 Hata Terimlerinin Otokorelasyona Sahip Olması Durumu.....	9
2.2 Doğrusal Regresyon Modelinde Hataların AR(p) Yapısına Sahip Olduğu Durumda Parametre Tahmini	10
2.3 En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi.....	11
2.4 Normal Dağılım Varsayımı Altında Parametre Tahmini.....	12
2.5 Hataların t Dağıldığı Varsayımı Altında Parametre Tahmini.....	15
2.6 EM Algoritması	19
2.7 t Dağılımına Dayalı Otoregresif Hata Terimli Regresyon Modeli için EM Algoritması	20
2.8 Simülasyon Çalışması	25
2.9 Avusturalya Sinema Verisi.....	34
2.10 Belçika Telefon Aramaları Verisi	36
3. ÇARPIK DAĞILIM VARSAYIMI ALTINDA PARAMETRE TAHMİNİ	39
3.1 Çarpık Normal Dağılım.....	40
3.1.1 Çarpık normal dağılım varsayımı altında parametre tahmini	44
3.2 Çarpık t Dağılımı.....	48
3.2.1 Çarpık t dağılım varsayımı altında parametre tahmini	53
3.3 Simülasyon Çalışması	60
3.4 Kripto Para Verisi.....	71
4. DEĞİŞKEN SEÇİMİ	74
4.1 Adımsal Seçim Yöntemleri	74
4.1.1 Geriye doğru eleme	75
4.1.2 İleriye doğru seçim.....	75

4.1.3 Adımsal regresyon.....	75
4.2 Bilgi Tabanlı Seçim Yöntemleri.....	76
4.2.1 Akaike bilgi kriteri.....	76
4.2.2 Düzeltilmiş Akaike bilgi kriteri	77
4.2.3 Bayes bilgi kriteri	77
4.2.4 Mallows's C_p kriteri	78
4.2.5 ICOMP kriteri.....	78
4.3 Parametre Tahminini ve Değişken Seçimini Eş Zamanlı Yapan Yöntemler	79
4.3.1 Lasso	79
4.3.2 Scad	81
4.3.3 Bridge	82
4.3.4 Elastik net	83
4.4 Oto regresif Hata Terimli Regresyon Modellerinde Model Seçimi.....	84
4.4.1 Normal dağılım varsayımı altında oto regresif hata terimli regresyon modellerinde model seçimi.....	86
4.4.2 Simetrik t dağılımı varsayımı altında oto regresif hata terimli regresyon modellerinde model seçimi.....	93
4.4.3 t dağılımı varsayımı altında EM algoritması ile model seçimi ve parametre tahmini.....	101
4.5 Simülasyon Çalışması	106
4.6 San Diego Elektrik ve Gaz Verisi	126
5. ÇARPIK DAĞILIMLAR VARSAYIMI ALTINDA DEĞİŞKEN SEÇİMİ	128
5.1 Çarpık Normal Dağılımı Varsayımı Altında Değişken Seçimi	128
5.2 Çarpık t Dağılımı Varsayımı Altında Değişken Seçimi	139
5.3 Simülasyon Çalışması	152
5.4 SPK Verisi.....	173
6. ROBUST İSTATİSTİK	176
6.1 Etki Fonksiyonu	176
6.2 Kırılma Noktası	177
6.3 Regresyonda Robust Tahmin Yöntemleri ile Parametre Tahmini.....	177
6.3.1 Regresyon M tahmin edicileri.....	178
6.3.2 Regresyon S tahmin edicileri	181
6.3.3 Regresyon MM tahmin edicileri	182
6.4 Bağımlı Hatalı Regresyon Modellerinde Robust Parametre Tahmini.....	183
6.4.1 $AR(p)$ hata terimli regresyon modelinde parametrelerin robust tahmini....	184
6.5 Robust Model Seçim Kriterleri.....	187

6.5.1 AR(p) hata terimli regresyon modellerinde robust değişken seçimi.....	188
6.6 Simülasyon Çalışması	192
6.7 San Diego Elektrik ve Gaz Şirketi Verisi.....	207
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	210
KAYNAKLAR	213
EKLER.....	218
EK 1 Çarpık Normal Varsayımı için Kısmi Türev Sonuçları	219
EK 2 Çarpık t Varsayımı için Kısmi Türev Sonuçları	220
EK 3 Çarpık Normal Varsayımı için Değişken Seçimi ile Kısmi Türev Sonuçları	222
EK 4 Çarpık t Varsayımı için Değişken Seçimi ile Kısmi Türev Sonuçları.....	224
ÖZGEÇMİŞ.....	226

SİMGELER DİZİNİ

$\Phi(B)$	Gecikme operatörünün bir fonksiyonu
$E(.)$	Beklenen değer
$Var(.)$	Varyans
$Cov(.,.)$	Kovaryans
$\exp(.)$	Üstel
$E_p(.)$	Cezalandırılmış koşullu beklenen değer
$f(.)$	Standart normal dağılımın yoğunluk fonksiyonu
$F(.)$	Standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu
$L_c(.)$	Tam veri olabilirlik fonksiyonu
$l_c(.)$	Tam veri log-olabilirlik fonksiyonu
$\Gamma(.)$	Gamma fonksiyonu
$t_v(.)$	v serbestlik dereceli t dağılımının yoğunluk fonksiyonu
$T_v(.)$	v serbestlik dereceli t dağılımının dağılım fonksiyonu
$tr(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}$ matrisinin izi
$ \mathbf{A} $	$\mathbf{A}$ matrisinin determinanı
$\ln$	e tabanında logaritma
$\rho(.)$	robust amaç fonksiyonu
$\psi(.)$	ρ fonksiyonunun birinci türevi

Kısaltmalar

AIC	Akaike bilgi kriteri
AICc	Düzeltilmiş Akaike bilgi kriteri
AR	Otoregresif
BIC	Bayes bilgi kriteri
ÇN	Çarpık normal
Çt	Çarpık t
DG	Digamma fonksiyonu
DMO	Doğru model oranı
Dpd	Doğru p derecesi
DSO	Doğru sıfır oranı
EÇO	En çok olabilirlik
EKK	En küçük kareler
EM	Expectation maximization
HKO	Hata kareler ortalaması
ICOMP	Bilgi karmaşıklığı
IRA	İteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma
KEÇO	Koşullu en çok olabilirlik
Lasso	Least absolute shrinkage and selection operator
M	En çok olabilirlik tipi
MM	İki aşamalı M
o.y.f.	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
Scad	Smoothly clipped absolute deviation
YSO	Yanlış sıfır oranı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Verilere ilişkin normal ve t dağılımına dayalı regresyon doğruları.....	35
Şekil 2.2 Verilere ilişkin normal ve t dağılımına dayalı regresyon doğruları.....	37
Şekil 3.1 Farklı ζ değerleri için çarpık normal dağılımın o.y.f grafiği	42
Şekil 3.2 Farklı ζ değerleri için, çarpık t dağılımının o.y.f grafiği	50
Şekil 3.3 Artıklara ait PACF, ACF, histogram ve Q-Q grafikleri.....	72
Şekil 3.4 Histogram ve modellerin verilere ilişkin kestirim çizgileri	72
Şekil 5.1 Artıklara ait ACF, PACF, histogram ve Q-Q grafikleri	174



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Aykırı değer olmadan normal ve t dağılımı sonuçları	28
Çizelge 2.2 Aykırı değer varlığında normal ve t dağılımı sonuçları.....	31
Çizelge 2.3 Avusturalya yıllık sinema gelir verileri (1976-2007)	34
Çizelge 2.4 Avusturalya sinema verisi için parametre tahmin sonuçları	35
Çizelge 2.5 Belçika'dan yapılan uluslararası arama sayıları	36
Çizelge 2.6 Belçika arama verisi için parametre tahmin sonuçları	37
Çizelge 3.1 Çarpık normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri	41
Çizelge 3.2 Çarpık t dağılımının basıklık ve çarpıklık değerleri	49
Çizelge 3.3 Aykırı değer olmayan durum altında parametre tahmin sonuçları	63
Çizelge 3.4 Aykırı değer altında elde edilen parametre tahmin sonuçları	69
Çizelge 3.5 Kripto para verisi için parametre tahmin sonuçları.....	73
Çizelge 4.1 Normal dağılım altında Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$	111
Çizelge 4.2 t dağılımı altında Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$	112
Çizelge 4.3 Normal dağılım altında Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$	113
Çizelge 4.4 t dağılımı altında Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$	114
Çizelge 4.5 Normal dağılım altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$	115
Çizelge 4.6 t dağılımı altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$	116
Çizelge 4.7 Normal dağılım altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$	117
Çizelge 4.8 t dağılımı altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$	118
Çizelge 4.9 Durum III için değişken seçim sonuçları	119
Çizelge 4.10 Durum III için değişken seçim sonuçları	120
Çizelge 4.11 Durum I için parametre tahmin sonuçları	121
Çizelge 4.12 Durum II için parametre tahmin sonuçları.....	123
Çizelge 4.13 Durum III için parametre tahmin sonuçları	124
Çizelge 4.14 Elektrik ve gaz verisi parametre tahmin sonuçları.....	127
Çizelge 4.15 Elektrik ve gaz verisi değişken seçim sonuçları	127
Çizelge 5.1 Çarpık normal varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$	158
Çizelge 5.2 Çarpık t varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$	159
Çizelge 5.3 Çarpık normal varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$	160
Çizelge 5.4 Çarpık t varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$	161
Çizelge 5.5 Çarpık normal varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$	162

Çizelge 5.6 Çarpık t varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$	163
Çizelge 5.7 Çarpık normal varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$	164
Çizelge 5.8 Çarpık t varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$	165
Çizelge 5.9 Çarpık normal varsayımı Durum III için değişken seçim sonuçları	166
Çizelge 5.10 Çarpık t varsayımı Durum III için değişken seçim sonuçları	167
Çizelge 5.11 Durum I için parametre tahmin sonuçları $p=2$	168
Çizelge 5.12 Durum II için parametre tahmin sonuçları $p=2$	170
Çizelge 5.13 Durum III için parametre tahmin sonuçları $p=2$	171
Çizelge 5.14 SPK verisi için değişken seçim sonuçları	174
Çizelge 6.1 Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$	196
Çizelge 6.2 Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$	197
Çizelge 6.3 Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$	198
Çizelge 6.4 Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$	199
Çizelge 6.5 Durum III için değişken seçim sonuçları $p=1$	200
Çizelge 6.6 Durum III için değişken seçim sonuçları $p=2$	201
Çizelge 6.7 Durum IV için değişken seçim sonuçları $p=1$	202
Çizelge 6.8 Durum IV için değişken seçim sonuçları $p=2$	203
Çizelge 6.9 Durum I için parametre tahmin sonuçları	204
Çizelge 6.10 Durum II için parametre tahmin sonuçları	205
Çizelge 6.11 Durum III için parametre tahmin sonuçları	206
Çizelge 6.12 Elektrik ve gaz verisi için klasik parametre tahmin sonuçları	208
Çizelge 6.13 Elektrik ve gaz verisi için robust parametre tahmin sonuçları	209
Çizelge 6.14 Aykırı değer ekli elektrik ve gaz verisi için parametre tahmin sonuçları	209

1. GİRİŞ

Regresyon modeli; ekonomi ve tarım gibi öngörü yapılmak istenen alanlardan tıp, kimya, biyoloji gibi deney ve uygulamalı sahalara kadar birçok çalışmada istenilen olgunun, gözlenen veya deneyle elde edilen sonuçların, bir fonksiyon olarak ifade edilebilmesiyle ortaya çıkan matematiksel eşitliğe, hata teriminin eklenmesiyle ulaşılan istatistiksel model, şeklinde tanımlanabilir.

Regresyon analizinde, model parametrelerinin tahmini için en sık başvurulmuş iki yöntem; herhangi bir hata dağılımı varsayımı olmaksızın kullanılan ve ölçüm sonucu elde edilmiş veri noktalarına, mümkün olan en kısa uzaklıktan geçen bir fonksiyon eğrisi bulmaya yarayan en küçük kareler (EKK) (Legendre 1805, Gauss 1809) ve hataların belirli bir dağılıma sahip olduğu varsayımına dayanan en çok olabilirlik (EÇO) (Fisher 1922) yöntemleridir. Bu yöntemleri kullanarak regresyon modelinden güvenilir parametre tahminleri ve istatistiksel çıkarımlar elde edebilmek için modele ait hata terimleri, birtakım varsayımlar altında ele alınmaktadır. Bu varsayımlardan bazıları; hata terimlerinin beklenen değerinin sıfır olması, sabit varyanslı olması ve birbirleri ile ilişkisiz olmasıdır.

Bazı veri türleri, doğası nedeniyle otokorelasyonlu (iç ilişkili) bir yapıya sahip olabilirler. Bu şekilde ortaya çıkan verilerin doğrusal veya doğrusal olmayan modellenmesinde; hata terimi, kendi içinde otokorelasyona sahip olabilir. Örneğin; Bloomfield (1992) geçmiş yüzyıllık ortalama dünya sıcaklık değişimini modellerken bu verinin hata terimlerinin iç ilişkili olduğunu göstermiş ve modellemeyi bu varsayımla yapmıştır. Otokorelasyonlu hata yapıları; genellikle zaman serilerinde kullanımı yaygın olan Box-Jenkins (1976) modellerinden AR, MA ve ARMA şeklinde ortaya çıkmaktadır. Bu durumun ortaya çıkması, doğrusal regresyonun temel varsayımlarından olan hataların, ilişkisiz olma varsayımını bozmaktadır. Hata terimlerinde otokorelasyon olmasının nedenlerinden bazıları; modelde yer alması gerekirken modele dahil edilmesi ihmal edilen açıklayıcı değişkenler, modeldeki fonksiyonel ilişkinin yanlış değerlendirilmesi, verilerin ölçülmesi ve düzenlenmesi sırasında hata yapılması gibi faktörler olabilir. Bunların yanı sıra, gerçek hayatta tesadüfi olarak ortaya çıkan deprem, sel, savaş gibi etkilerini sonraki dönemlere

de aktarmaları veya klinik deneyler ve borsa verileri gibi ölçümleri zamana bağlı olarak tekrarlanan verilerde de otokorelasyonlu hata terimleri görülebilir (Chen ve Choy, 2008). Bu şekilde ortaya çıkan veri setlerinin modellenmesi sırasında, otoregresif (özbağımlı) yapının göz ardı edilmesi; parametre tahminlerinin ve bu modelden yapılacak olan istatistiksel çıkarımların hatalı olmasına neden olacaktır. Bu nedenle parametre tahmini için otokorelasyonlu regresyon modellerine uygun yöntemlerin seçilmesi, kaçınılmaz bir gerekliliktir.

Otoregresif hata terimli regresyon modellerinin parametrelerinin tahminleri ile ilgili çok geniş bir literatür mevcuttur. Cochrane ve Orcutt (1949) Anderson (1954), Watson (1956), Durbin (1960) ve Tsay (1984) farklı yaklaşımlar kullanarak regresyon modelinde ilişkili hata terimlerini tanımlayan öncü çalışmalardır. Alpuim ve El-Shaarawi (2008), AR(p) hata terimli regresyon modelini ele alarak model parametrelerinin EKK tahminlerini ve normallik varsayımı altında koşullu en çok olabilirlik (KEÇO) tahminlerini elde ederek bu tahminlerin asimptotik özelliklerini incelemişlerdir. Beach ve Mackinnon (1978), AR(1) hata terimli regresyon modellerinde parametre tahmini için EÇO yöntemini kullanmışlardır. Tiku vd. (1999), AR(1) hata terimli regresyon modelinde uzun kuyruklu simetrik (LTS) dağılımını kullanarak, değiştirilmiş en çok olabilirlik (MML) yöntemiyle parametre tahmini yapmıştır. Hataların, AR(1) modeline sahip olduğu durumda Wong ve Bian (2004) lojistik dağılımla parametre tahmini yapmışlardır.

Gerçek veri üzerine bir istatistiksel model kurulurken bahsi geçen hata varsayımlarının ihlal edilmesinin yanı sıra, modellenmesi istenilen veride aykırı değerler de bulunabilmektedir. Veride mevcut olan bir aykırı değer, EKK yöntemi ile elde edilen fonksiyon eğrisinde ve parametre tahminlerinde ciddi sapmalara neden olmaktadır. Benzer şekilde aykırı değerlerin varlığı, dağılım varsayımlarında da bozulmalara neden olacağı için normal dağılım varsayımıyla kullanılan EÇO sonuçlarında da hatalara neden olacaktır. Bu nedenle veride aykırı değer mevcut olduğunda, bu aykırı değerden etkilenmeyen tahmin yöntemlerinin kullanımı oldukça önem kazanmaktadır.

İkinci bölümde; otoregresif hata terimli regresyon modellerinde, hata terimlerinin normal dağılmasına robust bir alternatif olan t dağılımı ele alınmış ve parametre tahminleri, bu dağılım varsayımı kullanılarak elde edilmiştir (Tuaç vd., 2018). t dağılımı, kalın kuyruklu dağılıma sahip veri setlerinin istatistiksel olarak modellemesi için normal dağılıma robust bir alternatif olarak kullanılabilir. Tezin ikinci bölümündeki amaç; otoregresif hata terimli regresyon modeline ait hata teriminin, t dağılımına uygun dağılım gösterdiği varsayımı altında, bilinmeyen parametrelerin KEÇO tahmin edicileri için EM algoritmasını kullanmak ve Fisher bilgi matrisini hesaplayarak parametrelerin aralık tahmin edicilerini elde etmektir. Bu tahmin ediciler kullanılarak simülasyon ve gerçek veri çalışması yapılmış, normal dağılım ve t dağılımı varsayımı ile elde edilen sonuçlar yardımıyla bu tahmin edicilerin performansları veride aykırı değer olması durumunda karşılaştırılmıştır.

Gerçek hayatta elde edilen verilerin dağılımı, genellikle simetrik olmayabilir. Üçüncü bölümde; otoregresif hata terimli regresyon modellerinde, hataların dağılım varsayımı için Azzalini tipi çarpık normal (Azzalini, 1985, 1986) ve normal dağılıma hem kalın kuyruklu hem de çarpık bir alternatif olarak Azzalini tipi çarpık t (Azzalini ve Capitanio, 2003) dağılımları ele alınmıştır. Bu varsayımlar altında, model parametreleri için EM algoritması kullanılarak nokta ve aralık tahmin edicileri önerilmiştir (Tuaç vd., 2020). Bu tahmin edicilerin, veride aykırı değer olması durumunda performanslarını gözlemleyebilmek için; simetrik normal ve simetrik t dağılımlarından elde edilen sonuçlar simülasyon ve gerçek veri ile karşılaştırılmıştır.

Regresyon analizinde, parametre tahmini ile beraber ele alınması gereken bir diğer husus, istatistiksel olarak anlamlı değişkenlerin seçilerek modelde yer almalarını sağlamaktır. Mevcut veri setlerinin yüksek boyutlu doğası, istatistikçilerin model için anlamlı değişkenleri seçmesi ve parametre tahminlerini daha sağlıklı yapması için yeni yöntemler geliştirmesini zorunlu kılmıştır. Değişken seçimi süreci, bir modele dahil edilecek en iyi ilgili değişken kümesini aramaya odaklanır. Değişken seçiminin, regresyon modelinin kurulmasında oldukça önemli bir yere sahip olması dolayısıyla, literatürde değişken seçimi ile ilgili birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Regresyon modellerinde, “alt küme seçimi” ve “cezalandırılmış regresyon” gibi iki popüler değişken seçim prosedürü başlığı

vardır. Literatürde yer alan Akaike bilgi kriteri (AIC) (Akaike 1973, 1974), Düzeltilmiş AIC (AICc) (Hurvich ve Tsai 1991), Mallows Cp kriteri (Mallows 1964, 1973), Bayesian bilgi kriteri (BIC) (Schwarz 1978) ve Bilgi karmaşıklığı (ICOMP) (Bozdogan 1988) kriteri gibi alt küme seçimine dayalı yöntemler; öncelikle bir yöntemle model parametre tahminlerinin doğru şekilde hesaplanmış olması varsayımına dayanmaktadır. Her ne kadar alt küme seçim yöntemleri pratik olarak faydalı olsalar da bu yöntemler, değişken seçimini gerçekleştirmeden önce bazı parametre tahmin işlemlerine ihtiyaç duyarlar ve sıklıkla yüksek değişkenlik gösterirler. Bu nedenle de modelin tahmin hatasını azaltamazlar. Önce parametre tahminlerinin elde edilip sonrasında bu yöntemlerin kullanılması, hesaplama bakımından daha karmaşık ve uğraştırıcı bir süreci de beraberinde getirecektir. Bu yöntemlere alternatif olarak parametre tahmini ile değişken seçimini eş zamanlı yapan yöntemleri kullanmak hem hesaplama yükünü hem de hata payını düşürecektir.

Tezin dördüncü bölümünde cezalandırılmış regresyon yöntemlerine yer verilmiştir. Bu yöntemler, Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (lasso) (Tibishirani 1996) yöntemi, kayıp fonksiyonunu $\sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t$ gibi L_1 tipi bir cezalandırma fonksiyonu kullanarak minimize etme temeline dayanır. Bu yöntem ile yapılan hesaplamaların analitik bir çözümünün olmaması nedeni ile hesaplama aracı olarak nümerik yöntemler kullanılır. Lasso yöntemi, kullandığı ceza fonksiyonu aracılığıyla modeldeki istatistiksel olarak anlamsız değişkenleri tam olarak sıfıra büzer. Fan ve Li (2001) tarafından önerilen Smoothly Clipped Absolute Deviation (scad) yöntemi ise, lasso yönteminin aksine; yansızlık, model karmaşıklığını küçültme ve model tahmininde gereksiz değişkenliği engellemek için süreklilik özelliklerini sağlar. Scad yöntemi λ ve α gibi iki ayarlama parametresi kullanarak parçalı bir ceza fonksiyonu yardımıyla gereksiz değişkenlerin katsayılarını sıfıra büzer. Frank and Friedman (1993) tarafından önerilen Bridge regresyon yöntemi, L_γ ($\gamma > 0$) tipi ceza fonksiyonu kullanarak parametre tahmini ve model seçimi yapar. Özel olarak bu ceza fonksiyonu, $\gamma = 2$ değerini aldığı Ridge regresyon (Hoerl ve Kennard, 1970) ve $\gamma = 1$ değerini aldığı lasso yöntemlerinin ceza fonksiyonlarına dönüşür. Bridge yöntemi $0 < \gamma \leq 1$ değerleri arasında olduğunda parametre tahmini ve değişken seçimini birlikte yapar. γ parametresinin, veri için en uygun değerini hesaplamak adına literatürde bazı nümerik yöntemler önerilmiştir (Park

ve Yoon, 2011, Liu vd., 2007). Elastik net yöntemi ise değişkenlerin kendi içinde yüksek korelasyona sahip oldukları durumda, diğer yöntemlere alternatif olarak kullanılabilir (Zou ve Hastie, 2005). Bu yöntem L_1 ve L_2 normlarının, bir başka deyişle lasso ve ridge regresyon yöntemlerinin bir kombinasyonu olarak ortaya çıkmıştır. Bu yöntemler, literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır ancak çoğu çalışma, regresyon hata terimlerinin ilişkisiz olduğu varsayımıyla yapılmıştır. Eğer hata terimleri, zaman içinde korelasyon gösteriyorsa ve model parametrelerini tahmin ederken bu korelasyon etkisi, göz ardı ediliyorsa bu durum; model parametrelerinin varyansının yanlış tahmin edilmesine neden olacaktır. Bu da güven aralıkları ve hipotez testlerinin hatalı elde edilmesine neden olur. Literatürde, Yoon vd. (2013) alasso (adaptive lasso), scad ve bridge cezalandırma yöntemlerini otoregresif hata terimli regresyon modellerinde kullanarak nümerik bir hesaplama algoritması önermişler ve bu üç cezalandırma yönteminin performanslarını karşılaştırmışlardır. Wang vd. (2007); doğrusal regresyon modellerinde AIC, BIC ve lasso yöntemlerini kullanarak model seçimi yapmış ve bunları karşılaştırmıştır. Hata terimlerinin ilişkili olduğu varsayımı ile yapılan bu çalışmalarda, hata dağılımı olarak normal dağılım kullanılmıştır. Bu durum da yapılan parametre tahmini ve değişken seçimlerinin aykırı değer veya çarpıklığa karşı savunmasız olmasına neden olmaktadır.

Dördüncü bölümde; otoregresif hata terimli regresyon modellerinde parametre tahmini ile değişken seçimini eş zamanlı yapan ve amaç fonksiyonuna farklı özelliklerde cezalandırma fonksiyonu getiren lasso, scad, ridge, bridge ve elastik net yöntemlerinin tahmin edici formları; normal dağılıma kalın kuyruklu bir alternatif olan t dağılımı varsayımı ile elde edilmiştir. Bu varsayımla, sonuçlara katkı sağlaması için her bir yöntemeye dayalı, gözlenen Fisher bilgi matrisinden elde edilen standart hatalar ve güven aralıkları hesaplanmış ve simülasyon sonuçlarında bunlara ilişkin tablolara da yer verilmiştir. Tüm elde edilen sonuçların performansları gerçek veri seti kullanılarak da karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde; otoregresif hata terimli regresyon modellerine ilişkin değişken seçimlerinde, hata dağılımı varsayımı olarak; çarpık normal ve çarpık t dağılım varsayımları kullanılmıştır. Bu formların analitik çözümleri olmaması nedeniyle

hesaplamalar için EM benzeri algoritmalar kullanılmıştır. Elde edilen formlar, simülasyon ve gerçek veri çalışmalarında kullanılmıştır. Tüm yöntemlerin parametre tahmin ve değişken seçim performansları karşılaştırılmış ve bu yöntemlerin aykırı değerlere dayanıklılıkları incelenmiştir.

Tezin ilk beş bölümünde bahsedilen yöntemler, hataların dağılımı bilindiği durumda kullanılabilecek yöntemlerdir ancak hatalara ait dağılımlar, her zaman bilinmeyebilir. Hata dağılımının bilinmediği durumda kullanılan EKK yöntemi, parametre tahminleri için en iyi sonuçları vermektedir. Fakat veride aykırı değer varlığı, EKK yönteminin sonuçlarını ciddi şekilde etkileyeceğinden; hataların dağılımı bilinmeden, aykırı değerlerden etkilenmeyecek bir parametre tahmini yapabilmek için robust yöntemlere ihtiyaç vardır. Otoresif hata terimli regresyon modellerinde, dağılım varsayımı olmaksızın robust tahmin edicilerle model parametrelerinin tahminlerini yapan çalışmalar da mevcuttur. Sinha vd. (2002) otoresif hata terimli doğrusal olmayan regresyon modellerinde, Genelleştirilmiş M -tahmin edicileri ile parametre tahmini yapmıştır. Fan vd. (2013) bağımlı rasgele hatalı doğrusal modellerde, M -tahmin edicilerinin asimptotik özelliklerini incelemiştir. Wu (2007), M -tahmin edicilerini kullanarak bağımlı hata terimli regresyon modeline ait bilinmeyen parametre tahminlerini yapmıştır. Uygulamada ise Stathaki ve Constantinides (2006); robust otoresif modellemeyi, mamografi resimlerinin sinyallerinde tümör tespiti için kullanmıştır. Benzer şekilde Pohjalainen ve Alku (2013); robust otoresif modelleme ile telefon görüşmelerinde, kişilerin öfkeli ses tonlarını tespit etmeyi amaçlayan bir model üzerinde çalışmışlardır.

Altıncı bölümde; modellenilecek veride x yönünde, y yönünde veya hem x hem y yönünde aykırı değer olması durumunda; özel bir dağılım varsayımı olmadan parametre tahmini ve değişken seçimini, robust MM yöntemi ile birleştirerek lasso, ridge, scad, bridge ve elastik net yöntemlerinin robust versiyonları önerilmiştir. Önerilen tahmin ediciler için EM benzeri algoritmalar verilmiştir. Normal dağılıma dayalı elde edilen sonuçlar ile robust yöntemlere dayalı elde edilen sonuçlar için simülasyon çalışması ve gerçek veri örneği verilmiş, yöntemlerin aykırı değer mevcudiyetinde parametre tahmini ve değişken seçim performansları karşılaştırılmıştır.

Bölüm 7’de ise önerilen yöntemlere ilişkin çıkarımlardan elde edilen sonuçlar tartışılmış ve ileride yapılacak olan çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir.



2. KALIN KUYRUK VARSAYIMI ALTINDA PARAMETRE TAHMİNİ

Bu çalışmada aşağıdaki şekilde ifade edilen doğrusal regresyon modeli ele alınacaktır:

$$y_t = \mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

Burada; y_t açıklanan değişkeni, $\mathbf{x}_t^T = [1, x_{t1}, \dots, x_{tM}]$, $\mathbf{X}$ tasarım matrisinin t . satırını göstermek üzere açıklayıcı değişkenleri, $i = [0, 1, \dots, M]$ için $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_M]$ model parametrelerini ve e_t hata terimlerini göstermektedir.

Bu model matris formatında şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (2.2)$$

Burada; $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]^T_{N \times 1}$ şeklinde açıklanan değişken vektörü, $\mathbf{X}$, $N \times (M + 1)$ boyutlu rastgele olmayan tasarım matrisi, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_M]^T_{(M+1) \times 1}$ şeklinde model parametre vektörü ve $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]^T_{N \times 1}$ şeklinde hata terimleri vektörünü ifade etmektedir. Regresyon modeli oluşturulduktan sonra, modelin doğruluğuna ve açıklanan değişkenlerin açıklayıcı değişkenlerce iyi açıklanıp açıklanamadığına karar verebilmek için temelde bazı varsayımların sağlanıyor olması gerekmektedir. Doğrusal regresyon modelinin hatalar üzerine tanımlanmış varsayımları aşağıdaki gibidir:

(i) e_t , $t = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere hata terimlerinin beklenen değeri sıfırdır.

$$E(e_t) = 0$$

(ii) e_t , $t = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere hata terimleri sabit varyanslıdır.

$$Var(e_t) = \sigma^2 \text{ (sabit)}$$

(iii) e_t , $t = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere hata terimleri ilişkisizdir.

$$i \neq j \text{ için } Cov(e_i, e_j) = 0$$

2.1 Hata Terimlerinin Otokorelasyona Sahip Olması Durumu

İstatistiksel modelleme; genel olarak sıfır ortalama, sabit varyans ve ilişkisiz hata terimi gibi birtakım varsayımlar yardımıyla yapılabilmektedir. Ancak bazı gerçek verilerin meydana geliş yapısı gereği otokorelasyona sahip olması nedeniyle ilişkisiz hata terimi varsayımı sağlanamamaktadır. Bu tür verilerin doğru şekilde modellenebilmesi ve parametre tahminlerinin doğru elde edilebilmesi için otoregresif hata terimli regresyon modelleri kullanılabilir. Otokorelasyonlu hata terimine sahip regresyon modelleri, bağımlı hata yapısı ile ortaya çıkan modellerdir. Klasik regresyonda, otokorelasyon etkilerinin hata teriminde dikkate alınmaması; EKK tahmin edicilerinin, büyük örneklemelerde bile etkin olmamasına neden olabilir. Doğrusal regresyon modelinde, hata terimlerinin kendi gecikmeleri ile aralarında bir ilişki söz konusu olduğunda parametrelerin EKK tahmin edicileri yansızlık ve tutarlılık gibi özelliklerini korumasına karşın, etkinlik özelliğini kaybetmektedirler. Bu koşullar altında, tahmin edilen parametreler ile güven aralığı oluşturmak veya hipotez testleri gibi işlemleri yürütmek doğru olmamaktadır. Bu durumda, hatalardaki otokorelasyondan kurtulmak için genelleştirilmiş fark alma işlemi yapılabilir. Ancak bu işlem, aradaki otokorelasyon katsayısının bilindiği durumda uygulanabilir. Hatalar arasındaki ardışık bağımlılık katsayısı veya katsayıları bilinmediğinde, bu katsayıların öncelikli olarak tahmin edilmesi gerekebilir.

Otokorelasyonlu hata yapıları, genellikle zaman serilerinde kullanımı yaygın olan Box-Jenkins (1976) modellerinden AR, MA ve ARMA şeklinde ortaya çıkmaktadır. Bu durumun ortaya çıkması; doğrusal regresyonun temel varsayımlarından olan, hataların ilişkisiz olma varsayımını bozmaktadır. Hata terimlerinde otokorelasyon olmasının çeşitli nedenleri olabilir; bunlardan bazıları:

- (i) Modelde yer alması gerekirken, modele konulması ihmal edilen açıklayıcı değişkenler,
- (ii) Modeldeki fonksiyonel ilişkinin yanlış değerlendirilmesi,
- (iii) Gerçek hayatta veriler ölçülürken ve düzenlenirken hata yapılması,
- (iv) Gerçek hayatta tesadüfi olarak ortaya çıkan deprem, sel, savaş gibi etkenlerin etkilerini sonraki dönemlere de aktarmaları olarak sıralanabilir.

Bir doğrusal regresyon modelinde hatalar arası otokorelasyonların varlığı, artıkların kendi gecikmeleriyle, zamana karşı saçılım grafikleri çizdirilerek veya literatürde kullanılan “Sıra Testi, Durbin-Watson (1951), Durbin-h, Breusch-Godfrey (LM), Ki-kare, Von-Nevmann vb. gibi” testler uygulanarak belirlenebilir.

2.2 Doğrusal Regresyon Modelinde Hataların AR(p) Yapısına Sahip Olduğu Durumda Parametre Tahmini

Bu bölümde, (2.1) eşitliğinde verilen doğrusal regresyon modelinin hataları

$$e_t = \phi_1 e_{t-1} + \dots + \phi_p e_{t-p} + a_t, \quad (2.3)$$

veya gecikme operatörü yardımı ile

$$a_t = \Phi(B)e_t \quad (2.4)$$

biçiminde p . dereceden otoregresif ($AR(p)$) bağımlılık yapısına sahip olacak şekilde yeniden ele alınacaktır. Burada; a_t , hata terimleri $E(a_t) = 0$, $Var(a_t) = \sigma^2$ olacak şekilde bir beyaz gürültü sürecini ($a_t \sim WN(0, \sigma^2)$) ve B gecikme operatörünü (Backshift operator) göstermektedir. Zaman serisi analizinde, gecikme operatörü veya geri kaydırma operatörü (B); önceki elemanı üretmek için zaman serisinin bir elemanı üzerinde çalışır. Bu modelin parametreleri tahmin edilmek istenildiğinde, literatürde genel olarak a_t hata teriminin normal dağıldığı varsayımıyla veya dağılım varsayımı olmaksızın EKK yöntemi kullanılmıştır. (2.1) modelinde verilen hata terimleri (2.3) gibi yeniden ele alındığında ve ilk p gözlemin bilindiği varsayımı altında regresyon modeli şu şekilde yazılabilir:

$$\Phi(B)y_t = \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} + a_t, \quad t = p+1, p+2, \dots, N \quad (2.5)$$

Burada, açıklanan değişken $\Phi(B)y_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p}$ şeklinde tekrar yazılırken açıklayıcı değişkenler ise $\Phi(B)x_{t,i} = x_{t,i} - \phi_1 x_{t-1,i} - \dots - \phi_p x_{t-p,i}$ şeklinde

yeniden düzenlenecektir. (2.5) eşitliğindeki model vektör formda $\Phi(B)y_t = \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta} + a_t$ şeklinde yeniden ifade edilebilir. Burada, $\Phi(B)x_t^T = [1, \Phi(B)x_{t1}, \dots, \Phi(B)x_{tM}]$ olacak şekilde açıklayıcı değişkenleri göstermektedir. (2.5) modeli bir otoregresif zaman serisi modeli olduğu için bu model kullanılırken verinin önceki oluşumlarına bakılarak bir sonraki veri öngörülme çalışılmaktadır. Düzenli zaman aralıklarında ardışık olarak elde edilen veriler önceki p veri noktasına bağlı olarak modellenenebilir. Bu durumda ilk p verinin bilindiği durumda $(p + 1)$ 'inci gözlemden itibaren zaman serilerinde tahminler yapılabilir.

2.3 En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi

(2.5) modeline ait hataların karelerinin toplamı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = \sum_{t=p+1}^N a_t^2 = \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 \quad (2.6)$$

Hata kareler toplamının bilinmeyen parametreler β_k ve ϕ_l ye göre türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$\frac{dQ}{d\beta_k} = -2 \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{dQ}{d\phi_l} = 2 \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Bu denklemlerin çözülmesiyle $\boldsymbol{\beta}$ ve $\boldsymbol{\phi}$ parametreleri için tahminler sırasıyla,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B)x_t \hat{\Phi}(B)x_t^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B)y_t \hat{\Phi}(B)x_t \right] \quad (2.9)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{R}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})R_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (2.10)$$

olarak bulunur.

Burada,

$$R_0(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-2} & \cdots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2}^2 & \cdots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-2} & \cdots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Klasik duruma benzer olarak da σ^2 için tahmin edici

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=p+1}^N \frac{(\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t^T \hat{\beta})^2}{T - k} \quad (2.11)$$

şeklinde olacaktır. Burada, $T = N - p$ ve $k = M + 1$ dir.

2.4 Normal Dağılım Varsayımı Altında Parametre Tahmini

AR(p) hata terimli regresyon modellerinde, a_t 'nin normal dağıldığı durumda parametre tahmini klasik EKK yöntemi ile veya benzer olarak EÇO yöntemi ile yapılabilir. Ancak EÇO yönteminin, otoregresif hata terimli modellerde hesaplanmasının zorluğu sebebiyle, bu yöntem oldukça iyi yakınsama yapan koşullu en çok olabilirlik yöntemi (KEÇO) kullanılacaktır (Ansley, 1979). Bu yöntem kısaca şu şekilde tanımlanabilir: (2.5) modelinde yer alan hata teriminin (a_t) olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(a_t, \theta)$ şeklinde ifade edilsin. θ bilinmeyen parametre vektörü olmak üzere, hata serisinin ilk p teriminin bilindiği koşulu altında koşullu olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L = \sum_{t=p+1}^N \ln f(a_t | a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \theta). \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir (Ansley, 1979). Bu fonksiyon yardımıyla parametre tahminleri (2.1) denklemini (2.3) hata yapısıyla ele alarak yapılabilir. α_t 'lerin normal dağıldığı varsayımı altında, (2.2) deki regresyon modeline ait koşullu olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L = c - \frac{T}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 \quad (2.13)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu fonksiyonun β_k , ϕ_l ve σ^2 , ye göre türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle,

$$\frac{d \ln L}{d \beta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d \ln L}{d \phi_l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 = 0 \quad (2.16)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler, β_k , ϕ_l ve σ^2 ,ye göre çözüldüğünde parametrelerin EÇO tahmin edicileri

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B)x_t \hat{\Phi}(B)x_t^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B)y_t \hat{\Phi}(B)x_t \right] \quad (2.17)$$

$$\hat{\phi} = R^{-1}(\hat{\beta})R_0(\hat{\beta}) \quad (2.18)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t \hat{\beta})^2 \quad (2.19)$$

biçiminde elde edilir. KEÇO tahmin yöntemi normal dağılım varsayımı altında uygulandığında, dağılım varsayımı kullanılmadan yapılan EKK tahmin edicisi ile aynı sonuçları vermektedir. Ancak KEÇO yöntemi ile elde edilen $\hat{\sigma}^2$, EKK yönteminden elde edilen $\hat{\sigma}^2$ 'den farklıdır. Yukarıda elde edilen tahmin ediciler, kendileri dışında kalan

parametrelerin tahmin edicilerine bağlıdır. Bu nedenle tahmin edicilerin değerleri, nümerik yöntemler kullanılarak hesaplanabilmektedir. Bunun için iteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma (iteratively reweighted algorithm) (IRA) kullanılabilir. Bu algoritmayı yürütebilmek için aşağıdaki adımlar takip edilebilir:

1. β, ϕ, σ^2 için başlangıç değerleri tespit edilir ve model kurulur.
2. Bu değerlerle $\hat{\phi}$ tahmin edilir.
3. $\hat{\phi}$ değeri kullanılarak $\hat{\beta}$ tahmin edilir.
4. $\hat{\phi}$ ve $\hat{\beta}$ kullanılarak $\hat{\sigma}^2$ tahmin edilir.
5. Yakınsama gerçekleşene kadar 2.-4. adımları tekrar edilir.

Ancak bu tahmin ediciler, verilerdeki aykırı değerlere duyarlıdır. Bu nedenle hata dağılımı varsayımı olarak t dağılımının kullanılması, tahmin edicileri aykırı değerlere karşı dayanıklı yapacağı düşünülmektedir.

Ayrıca, denklem (2.5)'te tanımlanan regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için normal dağılım varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\mathcal{F}(\hat{\beta}, \hat{\phi}, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B)X^T W \hat{\Phi}(B)X] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2 R(\hat{\beta})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Bu gözlenen Fisher bilgi matrisi, parametre tahminlerine ilişkin standart hataları ve güven aralıklarını hesaplamak için kullanılacaktır.

2.5 Hataların t Dağıldığı Varsayımı Altında Parametre Tahmini

Bu bölümde, otoregresif hata terimli regresyon modellerinde hataların t dağıldığı varsayımı altında nokta tahminleri ve aralık tahminleri yapılacaktır. (2.5)'de kullanılan regresyon modelinde hata terimleri gerçek hayatta her zaman normal dağılıma uygunluk göstermeyebilir. Verilerin dağılımı kalın kuyruklu, çarpık veya kalın kuyruklu çarpık olabilir. Bu durum karşısında, yapılan parametre tahminleri etkinliğini yitirir. Bu problemi gidermek için normal dağılıma alternatif olarak, normal dağılımdan daha kalın kuyruklu olan t dağılımı kullanılabilir.

Eğer serbestlik derecesi (ν) diğer parametrelerle birlikte tahmin edilirse, robust olmayacakları bilinmektedir (Lucas, 1997). Bu nedenle, serbestlik dereceleri, genellikle sabit olarak alınır ve bir robust ayarlama parametresi olarak kabul edilir (bkz. Lange vd., 1989).

Bu bölümde, (2.5) eşitliğinde hataların ν serbestlik dereceli ($\nu > 0$) ve bilinmeyen σ ölçek parametrelili ortalaması 0 olan t dağılımına sahip olduğu varsayımı altında ($a_t \sim t_\nu(0, \sigma^2, \nu)$) bilinmeyen regresyon parametreleri tahmin edilecektir. t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{c_\nu}{\sigma} \left(\nu + \frac{x^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad c_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (2.20)$$

biçimindedir.

Burada; $x \in \mathbb{R}$ olacak şekilde rasgele değişkeni, ν sabit alınan serbestlik derecesini ($\nu > 0$) ve σ ölçek parametresini ($\sigma > 0$) göstermektedir. t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğine benzerlik gösterir. Ancak t dağılımı daha kalın kuyrukludur ve daha basıktır. Dağılımın serbestlik derecesi, t dağılımının basıklığını ayarlamaktadır.

Hataların t dağıldığı varsayımı altında, koşullu log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\ln L = \ln c_v - T \ln \sigma - \frac{v+1}{2} \sum_{t=p+1}^N \ln \left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right] \quad (2.21)$$

Bilinmeyen parametrelere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{d \ln L}{d \beta_k} = \frac{(v+1)}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i}) \Phi(B)x_{t,k}}{\left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]} \quad (2.22)$$

$$\frac{d \ln L}{d \phi_l} = \frac{(v+1)}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i})}{\left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]} \quad (2.23)$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma} = -\frac{T}{\sigma} + \left(\frac{v+1}{\sigma^3} \right) \sum_{t=p+1}^N \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]} \quad (2.24)$$

Yukarıdaki denklemler tekrar düzenlenerek

$$\frac{d \ln L}{d \beta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} \quad (2.25)$$

$$\frac{d \ln L}{d \phi_l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma} = -\frac{T}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 \quad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$w_t = \frac{v+1}{\left[v + \frac{(\hat{\Phi}(B)y_t - \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_i \hat{\Phi}(B)x_{t,i})^2}{\hat{\sigma}^2} \right]} \quad (2.28)$$

her bir gözleme karşılık gelen ağırlıklardır.

$\left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\Phi}(B)x_t \hat{\Phi}(B)x_t^T \right]^{-1}$ ve $R_W^{-1}(\hat{\beta})$ matrislerinin varlığı durumunda, tahmin ediciler elde edilir:

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\Phi}(B)x_t \hat{\Phi}(B)x_t^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\Phi}(B)y_t \hat{\Phi}(B)x_t \right] \quad (2.29)$$

$$\hat{\Phi} = R_W^{-1}(\hat{\beta}) R_{W0}(\hat{\beta}) \quad (2.30)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N w_t (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t^T \hat{\beta})^2 \quad (2.31)$$

biçiminde elde edilir.

Burada;

$$R_{W0}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-p} \end{bmatrix}, R_W(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-1} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

dır. Yukarıdaki eşitlikler yeniden düzenlenerek şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{\beta} = [\hat{\Phi}(B)X^T W \hat{\Phi}(B)X]^{-1} [\hat{\Phi}(B)X^T W \hat{\Phi}(B)y] \quad (2.32)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} [\hat{\Phi}(B)y - \hat{\Phi}(B)X\hat{\beta}]^T W [\hat{\Phi}(B)y - \hat{\Phi}(B)X\hat{\beta}] \quad (2.33)$$

Burada, $\hat{\Phi}(B)X$, $T \times M$ boyutlu matris ve $\hat{\Phi}(B)y$, $T \times 1$ boyutlu vektör olmak üzere

$$\hat{\Phi}(B)\mathbf{X} = [\hat{\Phi}(B)x_{t,i}]_{\substack{t=p+1,\dots,N, \\ i=1,\dots,M}}$$

$$\hat{\Phi}(B)\mathbf{y} = [\hat{\Phi}(B)y_t]_{t=p+1,\dots,N'}$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}\{w_t\}_{t=p+1,\dots,N}$$

şeklindedir.

Burada; $w_t = 1$ alındığında elde edilen tahminler, normal dağılım varsayımında yapılan tahminlere dönüşmektedir. w_t ağırlık fonksiyonu, parametrelere bağlı olduğu için (2.29) – (2.31)'de verilen denklemler, aslında tahmin edicilerin analitik ifadeleri değildir. Yakınsamayı garanti altına almak için bu tahmin ediciler hesaplanırken EM algoritması kullanılmıştır (bkz. Lange vd., 1989, Arslan ve Genç 2009). Eşitlik (2.28)'de kullanılan ağırlık fonksiyonu, $\frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2}$ ifadesinin azalan bir fonksiyonu olduğu için modeldeki büyük artıklar, ağırlık fonksiyonunun değerini küçültecektir. Bu sayede büyük artıkların tahmin ediciler üzerindeki etkisi azaltılmış olacaktır. t dağılımının bu davranışı, elde edilen tahmin edicilerin robust tahmin ediciler olmasını sağlamaktadır (Lucas 1997, Arslan ve Genç 2003, 2009).

Normal dağılım varsayımına benzer şekilde, hata terimleri t dağılımına uygun dağılım gösteren regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için gözlenen Fisher bilgi matrisi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}^T \mathbf{W} \hat{\Phi}(B)\mathbf{X}] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2 \mathbf{R}_w(\hat{\boldsymbol{\beta}})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Serbestlik derecesinin bilinen varsayıldığı için bu parametreye yukarıdaki matriste değinilmemiştir. Eğer serbestlik derecesi tahmin edilmek isteniyorsa bu matris 4×4 tipinde yeniden şekillendirilmelidir. Ayrıca (2.29) – (2.31)'de verilen tahmin denklemlerinin ağırlıklara bağlı olduğu ve ağırlıkların da tahmin edicilerin bir fonksiyonu olmasından dolayı bu denklemlerin açık olarak çözülemediğini de unutmamak gerekir.

Bu nedenle; bu tahmin edicileri hesaplamak için nümerik yöntemlere ihtiyaç vardır. Bu noktada EM algoritması, yardımıyla elde edilen formlar, IRA kullanılarak çözülebilir. t dağılımı, normal dağılımın ölçek karması şeklinde yazılabildiği için bu bölümde EM algoritması kullanılarak parametrelerin EÇO tahmin edicileri elde edilecektir.

2.6 EM Algoritması

EM algoritması, Dempster vd. tarafından 1977 yılında ortaya atılan nümerik bir yöntemdir. Algoritmanın temel amacı; kayıp gözlem, sansürlü veri veya budanmış gözlemler gibi karmaşık yapıda olabilirlik fonksiyonları üreten durumlarda kolayca parametre tahmini yapabilmektir. Bilinen bir kayıp veri seti mevcut olduğu durumlarda, tam veri elde edilerek bulunan olabilirlik fonksiyonu daha az karmaşık olacaktır. Başlangıçta kayıp veri gözlemlenemiyor olsa bile yapay olarak kayıp gözlem eklenerek işlemler yürütülebilir. EM algoritması, E (Expectation) ve M (Maximization) adımları takip edilerek uygulanır. E adımı; gözlenen verinin bilindiği durumda, kayıp verinin koşullu dağılımına göre log-olabilirlik fonksiyonunun beklenen değerinin hesaplanması şeklindedir. M adımı ise E adımı bulanan log-olabilirlik fonksiyonunun beklenen değerini maksimum yapacak parametrelerin bulunması şeklindedir. M adımı hesaplanmış olan parametre değerleri, tekrar E adımı kullanılarak belirlenen yakınsaklık kriteri sağlanana kadar adımlar tekrar edilir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ verisi, $g(x; \theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} \log L(\theta; x) = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^n \log g(x_i; \theta). \quad (2.34)$$

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ kayıp veriyi göstermek üzere, $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ tam verisi için $\log L_c(\theta; x)$ tam log-olabilirlik fonksiyonudur. $\hat{\theta}$ tahmin edicisini EM algoritması yardımı ile bulmak için aşağıdaki adımlar yürütülür:

1. Adım: $\theta^{(0)}$ parametresi için uygun bir başlangıç değeri ve ε durdurma kriteri belirlenir.

2. *Adım (E adımı)*: $(k + 1)$ 'inci adımda, $\theta^{(k)}$ parametrelerinin o anki tahmin değerleri kullanılarak $\mathbf{x}$ verilmişken $\mathbf{z}$ kayıp değişkeninin koşullu dağılımına göre log-olabilirlik fonksiyonunun beklenen değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$Q(\theta; \theta^{(k)}) = E(\log L_c(\theta) | \mathbf{x}, \theta^{(k)}) \quad (2.35)$$

3. *Adım (M adımı)*: $Q(\theta; \theta^{(k)})$ fonksiyonunu maksimum yapan $\theta^{(k+1)}$ değeri şu şekilde belirlenir:

$$\theta^{(k+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta; \theta^{(k)}). \quad (2.36)$$

4. *Adım*: Önceden belirlenmiş olan bir yakınsaklık kriteri $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\| < \varepsilon$ sağlanana kadar 2. ve 3. adımlar tekrar edilir.

2.7 t Dağılımına Dayalı Otoregresif Hata Terimli Regresyon Modeli için EM Algoritması

Bu bölümde hem uygulama kolaylığından hem de yakınsaklığı garantilediğinden (Lange vd.,1989, Arslan ve Genç 2009) EM algoritması kullanılarak t dağılımına dayalı otoregresif hatalı regresyon modeli için bilinmeyen parametrelerin tahmin edicileri elde edilecektir. EM algoritmasının adımlarının daha kolay yürütülebilmesi için t dağılımının normal dağılımın ölçek karması şeklinde yazılabilme özelliği kullanılacaktır. Yapay olarak u kayıp değişkeni tanımlansın. Bu değişken verildiğinde y değişkeninin koşullu dağılımı,

$$\Phi(B)y_t | u_t \sim N\left(\Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}, \frac{\sigma^2}{u_t}\right) \quad (2.37)$$

şeklinde olacaktır. Ayrıca $u_t \sim \text{Gamma}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ dir. Bu dağılımlardan yola çıkarak $\mathbf{u} = (u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_N)$ kayıp değişken ve $(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ tam veri olmak üzere, $f(\theta; \mathbf{y}, \mathbf{u})$ ortak

o.y.f. bulunur. Bu fonksiyona ait $(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla,

$$L_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \prod_{t=p+1}^N \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{u_t}}} e^{-\left(\frac{\kappa_t^2}{2u_t}\right)} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u_t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u_t} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{u}) = & -\frac{T}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N \log u_t \\ & - \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\kappa_t^2}{2} + \frac{\nu}{2} \right) u_t + \left(\frac{\nu}{2} - 1 \right) \sum_{t=p+1}^N \log u_t + T \log c_\nu \end{aligned} \quad (2.39)$$

olur. Burada,

$$\kappa_t^2 = \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2}$$

şeklindedir.

(2.39) eşitliğindeki fonksiyon, bilinmeyen parametrelere göre maksimum yapılarak aranan tahmin ediciler elde edilebilir. Ancak yapay olarak eklenen u_t kayıp gözleminin varlığı, bu tahmin edicilerin geçersiz olmasına neden olacaktır. u_t yerine $\Phi(B)y_t$ ve $\boldsymbol{\theta}$ verildiğinde u_t 'nin koşullu beklenen değeri bulunarak elde edilen tahmin ediciler kullanılabilir. Bu koşullu beklenen değeri bulmak için (2.39) eşitliğinin koşullu beklenen değeri ve $\Phi(B)y_t$ bilindiğinde u_t 'nin koşullu dağılımı bulunmalıdır. Tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{u}) | \Phi(B)y_t) = & -\frac{T}{2} \log(2\pi\sigma^2) + T \ln c_\nu \\ & + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N E(\ln u_t | \Phi(B)y_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{t=p+1}^N \frac{\kappa_t^2}{2} E(u_t | \Phi(B)y_t) \\
& - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N E(u_t | \Phi(B)y_t) \\
& + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) \sum_{t=p+1}^N E(\ln u_t | \Phi(B)y_t)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

şeklinde elde edilebilir. Bu log-olabilirlik fonksiyonunun kullanılabilmesi için ilk olarak fonksiyonun içindeki koşullu beklenen değerlerin hesaplanması gerekir. Bunun için ise koşullu dağılımlar bilinmelidir. $\Phi(B)y_t$ bilindiğinde, u_t rasgele değişkeninin koşullu dağılımı

$$u_t | \Phi(B)y_t \sim \text{Gamma}\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{1}{2} (\nu + \kappa_t^2)\right) \tag{2.41}$$

şeklindedir. Ayrıca $E(\ln u_t | \Phi(B)y_t)$ koşullu beklenen değeri; $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ olduğunda,

$$E(\ln X) = DG(\alpha) - \ln \beta \tag{2.42}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanabilir. Bu bilgiler kullanılarak aranan koşullu beklenen değerler,

$$E(u_t | \Phi(B)y_t) = \frac{\nu + 1}{\nu + \kappa_t^2} \tag{2.43}$$

$$E(\ln u_t | \Phi(B)y_t) = DG\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} (\nu + \kappa_t^2)\right) \tag{2.44}$$

şeklinde elde edilir.

Burada, DG: Digamma fonksiyonudur.

Algoritma Adımları

θ parametre vektörü için uygun başlangıç değerleri $\theta^{(0)}$ ve durdurma kriteri ε seçildikten sonra EM algoritmasının adımları aşağıdaki gibi işletilir:

i) *E-adımı*: $(k+1)$ 'inci iterasyon için $\theta^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değerler

$$r_{1t}^{(k)} = E(u_t | \Phi(B)y_t, \theta^{(k)}) = \frac{v^{(k)} + 1}{v^{(k)} + \kappa_t^{2(k)}} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} r_{2t}^{(k)} &= E(\ln u_t | \Phi(B)y_t, \theta^{(k)}) \\ &= DG\left(\frac{v^{(k)} + 1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} (v^{(k)} + \kappa_t^{2(k)})\right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

biçiminde hesaplanır.

Burada hesaplanan koşullu beklenen değerler, (2.40) eşitliğinde yerlerine yazıldığında $E(l_c(\theta; \mathbf{y}, \mathbf{u}) | \Phi(B)y_t, \theta^{(k)}) = Q(\theta; \theta^{(k)})$ olacak şekilde amaç fonksiyonu

$$\begin{aligned} Q(\theta; \theta^{(k)}) &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + T \ln c_v + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} - \sum_{t=p+1}^N \frac{\kappa_t^2}{2} r_{1t}^{(k)} \\ &\quad - \frac{v}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} + \left(\frac{v}{2} - 1\right) \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

olarak elde edilir.

ii) *M-adımı*: $Q(\theta; \theta^{(k)})$ fonksiyonunun $\theta = (\beta, \phi, \sigma^2, v)$ bilinmeyen parametrelerine göre maksimum yapılmasıyla $(k + 1)$ 'inci parametre tahminleri hesaplanır.

$Q(\theta; \theta^{(k)})$ fonksiyonunun β parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle β için tahmin edici

$$\beta^{(k+1)} = \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T \right)^{-1} \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) y_t \right) \quad (2.48)$$

olarak bulunur. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\phi}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle $\boldsymbol{\phi}$ için tahmin edici

$$\boldsymbol{\phi}^{(k+1)} = \mathbf{R}_r(\boldsymbol{\beta}^{(k)})^{-1} \mathbf{R}_{0r}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) \quad (2.49)$$

şeklinde elde edilir.

Burada;

$$\mathbf{R}_{0r}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R}_r(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-1} e_{t-2} \dots & \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun σ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle σ^2 için tahmin edici

$$\sigma^{2(k+1)} = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})^2 \right) \quad (2.50)$$

şeklinde olur. Bu çalışmada, robustluğu garantilemek için serbestlik derecesi sabit olarak alınmıştır. Ancak istenildiği takdirde, eşitlik (2.51) yardımıyla bu parametre tahmin edilebilir. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun ν parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})}{\partial \nu} = \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\nu}{2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma' \left(\frac{\nu}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right)} + \frac{1}{2} r_{2t}^{(k)} - \frac{1}{2} r_{1t}^{(k)} \right) = 0 \quad (2.51)$$

denklemini elde edilir.

Aşağıdaki denklemin çözülmesiyle $\nu^{(k+1)}$

$$\sum_{t=p+1}^N \left(DG\left(\frac{\nu}{2}\right) - \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) - 1 - r_{2t}^{(k)} + r_{1t}^{(k)} \right) = 0. \quad (2.52)$$

biçiminde elde edilir.

Bu E ve M adımları, yakınsaklık kriteri $\|\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}\| < \varepsilon$ sağlanana kadar tekrar edilir.

2.8 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, t dağılımına dayalı otoregresif hata terimli regresyon modellerinde elde edilen nokta ve aralık tahminlerinin aykırı değer varlığı altında performanslarını incelemek için bir simülasyon çalışması dizayn edilmiştir. Bu simülasyon çalışmasında, örneklem hacmi $N = 25, 50, 100$ olarak alınmış ve tekrar sayısı 100 olarak kullanılmıştır. Tüm simülasyon çalışmaları, R (R Core Team, 2020) programında yürütülmüştür. Simülasyon çalışmasının tasarımı ve senaryolaştırılan farklı durumlar aşağıda özetlenmiştir.

Simülasyon Tasarımı. İlk olarak, otoregresif hata terimli regresyon modeline ait model değişkenleri oluşturulmuştur. Her durum için, tüm x_t açıklayıcı değişkenleri, standart normal dağılım kullanılarak elde edilmiştir ($x_t \sim N(0,1)$). Regresyon modeli için üç açıklayıcı değişken kullanılmış ve bu değişkenler için başlangıç parametreleri $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)' = (0.1, 0.5, 0.9)'$ şeklinde seçilmiştir. Modelin hata terimleri için ise 2. dereceden otoregresif model (AR(2)) olarak kurgulanmış ve otoregresif modelin katsayıları için başlangıç değerleri ise $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2)' = (-0.7, 0.12)'$ olarak belirlenmiştir. Bu değerler, durağan bir AR(2) modeli kurgulayacak şekilde özel olarak seçilmiştir. Bu belirlemelerden sonra regresyon modelinin açıklanan değişkenin üretimi için $\Phi(B)y_t = \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} + a_t$ denklemi kullanılmıştır. Parametre tahminlerinin karşılaştırılabilmesi için Hata Kare Ortalama (HKO) ve Yan değerleri aşağıdaki formüller yardımıyla hesaplatılarak, elde edilen sonuçlar tablolarda verilmiştir.

$$\widehat{HKO}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \beta)^2, \quad \widehat{YAN}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \bar{\beta} - \beta,$$

$$\widehat{HKO}(\hat{\phi}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\phi}_i - \phi)^2, \widehat{YAN}(\hat{\phi}) = \bar{\phi} - \phi,$$

$$\widehat{HKO}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)^2, \widehat{YAN}(\hat{\sigma}^2) = \overline{\sigma^2} - \sigma^2.$$

Burada, $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i$, $\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i$, $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^2$ şeklindedir. Ayrıca her iki dağılım varsayımı için EK1 de kısmi türevleri verilen, gözlenen Fisher bilgi matrisleri elde edilmiş ve bu matris kullanılarak tüm model parametrelerinin standart hataları hesaplanarak %95 güven aralıklarına ilişkin alt ve üst sınırlar da tablolarda verilmiştir.

Durum I. Bu durum altında, modele ait hata terimleri standart normal dağılımdan ($a_t \sim N(0,1)$) ve $\nu = 3$ serbestlik derecesine sahip t dağılımından ($a_t \sim t_\nu(0,1)$) üretilmiştir. Her iki dağılım varsayımı için de model parametrelerinin tahminleri, normal ve t dağılımından elde edilen EÇO tahmin edicileri kullanılarak hesaplanmıştır. Tüm simülasyon çalışması boyunca t dağılımına ait serbestlik derecesi, sabit ve 3 olarak alınmıştır. Bu değer, literatürde robustluğun sağlanması için önerilmiş en uygun değerdir (bkz. Lange vd., 1989).

Durum II. İkinci durumda, hataların hem normal hem de t dağıldığı durumlar için veriye aykırı değerler eklenmiş ve simülasyon sonuçları bu şekilde tekrar hesaplanmıştır. Aykırı değerler, $N(0, 100)$ dağılımı kullanılarak elde edilmiş ve açıklanan değişkenin son %10 gözlemi bu aykırı değerler ile değiştirilmiştir.

Simülasyon Sonuçları. Çizelge 2.1’de aykırı değer içermeyen durumdaki ve Çizelge 2.2’de aykırı değer içeren durumdaki sonuçlar verilmiştir. Bu tablolarda sırasıyla simülasyon sonucu hesaplanan parametre tahmin değerleri, yan değerleri, HKO değerleri, standart hatalar (SE), %95 alt (AS) ve üst (ÜS) güven sınırları verilmiştir. Çizelge 2.1’de, farklı örneklem büyüklüklerine sahip verilerde aykırı değer olmayan durum için sonuçlar gösterilmektedir. Çizelge 2.1’den hata terimleri normal dağılım gösterdiğinde, normal ve t dağılımından elde edilen parametre tahminlerinin benzer performans gösterdiği söylenebilir. Öte yandan, eğer hata dağılımı t dağılımına uygun ise t dağılımından elde edilen tahminlere ait HKO ve yan değerleri normal dağılımdan elde edilen parametre

tahminlerinden daha küçüktür. Bu nedenle hata dağılımı kalın kuyruklu olduğunda, t dağılımına dayalı yöntemin normal dağılıma dayalı yöntemden daha üstün olduğu söylenebilir. Çizelge 2.2'de, y yönünde %10 oranında aykırı değer bulunduğu durum için simülasyon sonuçları gösterilmektedir. Veriler aykırı değerler içerdiğinde, normal dağılıma dayalı tahmin ediciler yüksek HKO değerlerine sahip olmaktadır. Ancak, t dağılımına dayanan tahminler veride aykırı değer olmasına rağmen oldukça iyi performans göstermektedir. Veride aykırı değer olması durumunda normal dağılımın nokta ve aralık tahminlerinde oldukça başarısız olduğu ancak kalın kuyruklu t dağılımının aykırı değerlerden ciddi şekilde etkilenmediği görülmektedir.



Çizelge 2.1 Aykırı değer olmadan normal ve t dağılımı sonuçları

N			$a_t \sim N(0,1)$		$a_t \sim t_v(0,1)$	
			Normal	t	Normal	t
25	β_1	$\hat{\beta}_1$	0.0854	0.0749	0.1135	0.1360
		Yan	0.0230	0.0302	-0.0136	-0.0075
		HKO	0.0453	0.0578	0.0789	0.0708
		SE	0.1598	0.3965	0.2678	0.5131
		AS	0.0501	-0.0366	0.0082	0.0272
	β_2	ÜS	0.1754	0.2484	0.2189	0.2449
		$\hat{\beta}_2$	0.4817	0.4717	0.4945	0.4600
		Yan	0.0182	-0.0293	-0.0263	0.0086
		HKO	0.0372	0.0656	0.0945	0.1150
		SE	0.2119	0.2997	0.2235	0.4930
	β_3	AS	0.4044	0.3513	0.4045	0.3677
		ÜS	0.6008	0.6417	0.5846	0.5522
		$\hat{\beta}_3$	0.8959	0.9039	0.8800	0.9008
		Yan	0.0128	0.0130	0.0112	-0.0125
		HKO	0.0468	0.0537	0.0901	0.1110
	ϕ_1	SE	0.1813	0.3596	0.3182	0.4130
		AS	0.8266	0.7264	0.7574	0.7370
		ÜS	0.9687	1.0499	1.0025	1.0645
		$\hat{\phi}_1$	-0.7034	-0.5273	-0.7484	-0.5611
		Yan	-0.0326	0.0923	-0.0240	0.0818
	ϕ_2	HKO	0.0715	0.0810	0.0699	0.0618
		SE	0.0261	0.1414	0.0826	0.2476
		AS	-0.7136	-0.6208	-0.7833	-0.6007
		ÜS	-0.6931	-0.4338	-0.7136	-0.5214
		$\hat{\phi}_2$	0.0276	0.0626	0.0283	0.0413
	σ	Yan	-0.1222	-0.1412	-0.1013	-0.1295
		HKO	0.0832	0.0854	0.0825	0.0669
		SE	0.1403	0.1397	0.1227	0.1835
		AS	-0.0644	-0.0111	-0.0213	-0.0027
		ÜS	0.1196	0.1364	0.0778	0.0852
		$\hat{\sigma}$	0.8711	0.6923	1.3911	0.8149
		Yan	-0.1101	0.3134	0.4137	0.2423
		HKO	0.0349	0.1105	0.3948	0.1188
		SE	0.1241	0.0963	0.2948	0.1381
		AS	0.7894	0.6490	1.2774	0.7606
		ÜS	0.9300	0.7264	1.5048	0.8692

Çizelge 2.1 Aykırı değer olmadan normal ve t dağılımı sonuçları (devam)

N	$a_t \sim N(0,1)$			$a_t \sim t_v(0,1)$		
		Normal	t	Normal	t	
50	β_1	$\hat{\beta}_1$	0.0863	0.0792	0.0677	0.0883
		Yan	-0.0137	-0.0208	-0.0323	-0.0117
		HKO	0.0198	0.0258	0.0557	0.0399
		SE	0.3551	0.2667	0.2473	0.3190
		AS	-0.0121	0.0229	0.0069	0.0252
	β_2	ÜS	0.1847	0.1555	0.1346	0.1513
		$\hat{\beta}_2$	0.5004	0.4949	0.5349	0.5310
		Yan	0.0004	-0.0051	-0.0349	0.0310
		HKO	0.0118	0.0163	0.0401	0.0307
		SE	0.1746	0.2404	0.2325	0.2985
	β_3	AS	0.4520	0.4787	0.4687	0.4448
		ÜS	0.5488	0.5112	0.6010	0.6172
		$\hat{\beta}_3$	0.8986	0.9083	0.9122	0.9088
		Yan	-0.0014	0.0083	-0.0122	0.0088
		HKO	0.0186	0.0196	0.0496	0.0310
	ϕ_1	SE	0.2209	0.1215	0.1092	0.2660
		AS	0.8363	0.8831	0.8832	0.8802
		ÜS	0.9610	0.9531	0.9411	0.9374
		$\hat{\phi}_1$	-0.7449	-0.6906	-0.6860	-0.5060
		Yan	-0.0449	0.1968	0.0140	0.1932
	ϕ_2	HKO	0.0264	0.0431	0.0273	0.0567
		SE	0.2443	0.0962	0.0974	0.1196
		AS	-0.8122	-0.8290	-0.7127	-0.5345
		ÜS	-0.6775	-0.5575	-0.6593	-0.4747
		$\hat{\phi}_2$	0.0543	0.0803	0.0788	0.0945
σ	Yan	-0.0657	-0.0441	-0.0412	-0.0896	
	HKO	0.0309	0.0206	0.0279	0.0199	
	SE	0.1643	0.1237	0.1146	0.1161	
	AS	0.0076	0.0390	0.0464	0.0559	
	ÜS	0.1010	0.1127	0.1112	0.1250	
	$\hat{\sigma}$	0.9334	0.7397	1.5421	0.9104	
	Yan	-0.0666	-0.2603	0.5421	-0.0896	
	HKO	0.0170	0.0742	0.4703	0.0199	
	SE	0.1347	0.0836	0.2265	0.1157	
	CIL	0.8960	0.7178	1.4804	0.8772	
ÜS	0.9707	0.7616	1.6038	0.9435		

Çizelge 2.1 Aykırı değer olmadan normal ve t dağılımı sonuçları (devam)

N		$a_t \sim N(0,1)$		$a_t \sim t_v(0,1)$	
		Normal	t	Normal	t
100	β_1	$\hat{\beta}_1$	0.1001	0.0964	0.1288
		Yan	0.0001	-0.0036	0.0288
		HKO	0.0072	0.0106	0.0186
		SE	0.1271	0.1666	0.2197
		AS	0.0805	0.0769	0.0929
		ÜS	0.1197	0.1159	0.1647
	β_2	$\hat{\beta}_2$	0.5123	0.5129	0.5054
		Yan	0.0123	0.0129	0.0054
		HKO	0.0078	0.0101	0.0186
		SE	0.1415	0.1827	0.2314
		AS	0.4969	0.4885	0.4890
		ÜS	0.5277	0.5372	0.5217
	β_3	$\hat{\beta}_3$	0.8996	0.9047	0.9211
		Yan	-0.0004	0.0047	0.0211
		HKO	0.0062	0.0083	0.0174
		SE	0.1340	0.1736	0.2144
		AS	0.8745	0.8754	0.8888
		ÜS	0.9248	0.9341	0.9534
	ϕ_1	$\hat{\phi}_1$	-0.7217	-0.5309	-0.6996
		Yan	-0.0217	0.1691	0.0004
		HKO	0.0148	0.0389	0.0091
		SE	0.0881	0.0795	0.1357
		AS	-0.7408	-0.5467	-0.7180
		ÜS	-0.7026	-0.5150	-0.6812
	ϕ_2	$\hat{\phi}_2$	0.0912	0.0980	0.1072
		Yan	-0.0288	-0.0220	-0.0128
		HKO	0.0161	0.0101	0.0110
		SE	0.0882	0.0772	0.1359
		AS	0.0693	0.0797	0.0868
		ÜS	0.1131	0.1162	0.1276
	σ	$\hat{\sigma}$	0.9748	0.7721	1.5719
		Yan	-0.0252	-0.2279	0.5719
		HKO	0.0064	0.0550	0.4113
		SE	0.0891	0.0612	0.1660
		AS	0.9555	0.7603	1.5407
		ÜS	0.9941	0.7839	1.6030

Çizelge 2.2 Aykırı değer varlığında normal ve t dağılımı sonuçları

N			$a_t \sim N(0,1)$		$a_t \sim t_v(0,1)$	
			Normal	t	Normal	t
25	β_1	$\hat{\beta}_1$	-0.1805	0.1277	-0.7210	-0.0001
		Yan	-0.2805	0.0277	-0.8210	-0.1001
		HKO	14.395	0.0666	24.5021	0.1529
		SE	0.7206	0.6763	0.6216	0.6371
		AS	-0.3517	-0.2601	-0.8925	-0.2184
		ÜS	-0.0094	0.5154	-0.5494	0.2182
	β_2	$\hat{\beta}_2$	1.1081	0.5161	0.4523	0.5571
		Yan	0.6081	0.0161	-0.0477	0.0571
		HKO	19.419	0.1170	14.6355	0.2807
		SE	2.2292	0.7016	0.6484	0.5687
		AS	0.9673	0.1159	0.2394	0.2805
		ÜS	1.2490	0.9163	0.6652	0.8336
	β_3	$\hat{\beta}_3$	0.2261	0.9344	0.6559	0.9139
		Yan	-0.6739	0.0344	-0.2441	0.0139
		HKO	15.333	0.0984	18.1168	0.1785
		SE	2.2848	0.8055	0.9610	0.9656
		AS	0.0442	0.7948	0.5443	0.7959
		ÜS	0.4079	1.0740	0.7674	1.0320
	ϕ_1	$\hat{\phi}_1$	-0.0335	-0.2303	0.0294	-0.2678
		Yan	0.6665	0.4697	0.7294	0.4322
		HKO	3.0020	0.3129	2.1621	0.3226
		SE	5.2471	0.0421	0.3258	0.0030
		AS	-0.2352	-0.3086	-0.1113	-0.3572
		ÜS	0.1683	-0.1521	0.1701	-0.1784
	ϕ_2	$\hat{\phi}_2$	-2.0472	0.1866	-1.7184	0.2123
		Yan	-2.1672	0.0666	-1.8384	0.1005
		HKO	19.1661	0.0970	13.2772	0.0923
		SE	2.2688	0.0995	0.3081	0.1152
		AS	-2.1668	0.0904	-2.2067	0.1214
		ÜS	-1.9275	0.2829	-1.2301	0.3031
	σ	$\hat{\sigma}$	17.8423	0.9916	19.3621	1.1540
		Yan	16.8423	-0.0084	18.3621	0.1540
		HKO	417.615	0.0277	452.471	0.0759
		SE	87.2684	0.1956	4.2045	0.2637
		AS	16.3839	0.9112	17.7795	1.0451
		ÜS	19.3007	1.0720	20.9447	1.2628

Çizelge 2.2 Aykırı değer varlığında normal ve t dağılımı sonuçları (devam)

N			$a_t \sim N(0,1)$		$a_t \sim t_v(0,1)$	
			Normal	t	Normal	t
50	β_1	$\hat{\beta}_1$	-0.2296	0.1139	-0.2276	0.0913
		Yan	-0.3296	0.0139	-0.3276	-0.0087
		HKO	11.890	0.0363	9.6600	0.0531
		SE	30.410	0.4740	2.9891	0.7061
		AS	-0.8091	-0.0874	-0.6726	-0.0615
		ÜS	0.3500	0.3152	0.2173	0.2440
	β_2	$\hat{\beta}_2$	0.9483	0.4933	0.3304	0.5128
		Yan	0.4483	-0.0067	-0.1696	0.0128
		HKO	14.957	0.0228	13.637	0.0557
		SE	25.740	0.3973	2.8076	0.4466
		AS	0.3299	0.3797	-0.2893	0.3497
		ÜS	1.5667	0.6069	0.9501	0.6758
	β_3	$\hat{\beta}_3$	0.4665	0.8961	0.9969	0.9010
		Yan	-0.4335	-0.0039	0.0969	0.0010
		HKO	16.155	0.0307	10.6562	0.0540
		SE	31.805	0.2983	1.4603	0.7257
		AS	0.1967	0.7335	0.5512	0.8402
		ÜS	0.7363	1.0587	1.4426	0.9619
	ϕ_1	$\hat{\phi}_1$	0.0013	-0.2284	0.0789	-0.2730
		Yan	0.7013	0.4716	0.7789	0.4270
		HKO	0.9785	0.2699	1.0454	0.2211
		SE	3.8399	0.1041	0.3321	0.1633
		AS	-0.0391	-0.2299	0.0054	-0.2899
		ÜS	0.0417	-0.2269	0.1524	-0.2560
	ϕ_2	$\hat{\phi}_2$	-0.3809	0.2138	-0.3230	0.1971
		Yan	-0.7013	0.0938	-0.4430	0.0771
		HKO	0.9788	0.0449	1.4744	0.0450
		SE	0.3777	0.1455	0.9165	0.1320
		AS	-0.5184	0.1850	-0.5298	0.1826
		ÜS	-0.2434	0.2427	-0.1163	0.2116
	σ	$\hat{\sigma}$	23.1810	1.0546	22.1079	1.2178
		Yan	22.1810	0.0546	21.1079	0.2178
		HKO	557.262	0.0189	592.552	0.0812
		SE	3.3555	0.1666	3.3084	0.2140
		AS	22.2536	1.0101	21.2234	1.1584
		ÜS	24.1085	1.0991	22.9924	1.2771

Çizelge 2.2 Aykırı değer varlığında normal ve t dağılımı sonuçları (devam)

N			$a_t \sim N(0,1)$		$a_t \sim t_v(0,1)$	
			Normal	t	Normal	t
100	β_1	$\hat{\beta}_1$	0.3444	0.0977	0.5861	0.1064
		Yan	0.2444	-0.0023	0.4861	0.0064
		HKO	6.6409	0.0164	7.8438	0.0199
		SE	5.4338	0.3981	4.7214	0.4410
		AS	-0.2259	0.0287	0.3555	0.0258
		ÜS	0.9146	0.1668	0.8168	0.1869
	β_2	$\hat{\beta}_2$	0.5080	0.5049	0.9318	0.4921
		Yan	0.0080	0.0049	0.4318	-0.0079
		HKO	8.6819	0.0164	8.2327	0.0310
		SE	8.2289	0.4066	4.1940	0.3476
		AS	-0.2487	0.4306	-0.6039	0.4320
		ÜS	1.2647	0.5793	2.4675	0.5521
	β_3	$\hat{\beta}_3$	0.9028	0.9085	0.6209	0.9054
		Yan	0.0028	0.0085	-0.2791	0.0054
		HKO	5.9380	0.0162	11.6861	0.0278
		SE	9.1633	0.2197	5.5664	0.1939
		AS	-0.0449	0.8551	-1.4063	0.8350
		ÜS	1.8505	0.9619	2.6481	0.9759
	ϕ_1	$\hat{\phi}_1$	0.0245	-0.1722	-0.0047	-0.2039
		Yan	0.7245	0.5278	0.6953	0.4961
		HKO	0.6194	0.3110	0.5554	0.2652
		SE	0.7856	0.0835	0.0976	0.0734
		AS	0.0101	-0.1792	-0.0167	-0.2183
		ÜS	0.0389	-0.1653	0.0073	-0.1894
	ϕ_2	$\hat{\phi}_2$	-0.1095	0.2172	-0.0639	0.2186
		Yan	-0.2295	0.5278	-0.1839	0.0986
		HKO	0.1745	0.0259	0.1300	0.0281
		SE	0.3773	0.0513	0.0244	0.0555
		AS	-0.1226	0.2068	-0.0763	0.1989
		ÜS	-0.0965	0.2275	-0.0515	0.2383
	σ	$\hat{\sigma}$	27.4424	1.1533	28.8648	1.3182
		Yan	26.4424	0.1533	27.8648	0.3182
		HKO	770.938	0.0422	755.250	0.1214
		SE	2.9298	0.1340	2.7141	0.1875
		AS	26.8991	1.1269	28.2933	1.2838
		ÜS	27.9858	1.1796	29.4363	1.3526

2.9 Avusturalya Sinema Verisi

Bu örnekte; Sheather (2009) tarafından kullanılan veriler, otoregresif hata terimli regresyon modellerinde normal ve t dağılımları varsayımı ile yeniden ele alınacaktır. Veriler, Avustralya Film Komisyonu'nun (ACF) Avustralya'da gösterilen filmlerin yıllık gişe değerlerinin brüt değerlerini göstermektedir. Çizelge 2.3'de kullanılan veri seti verilmiştir.

Çizelge 2.3 Avusturalya yıllık sinema gelir verileri (1976-2007)

Yıllık gelir (\$M)	Yıl	Yıllık gelir (\$M)	Yıl
95.3	1976	334.3	1992
86.4	1977	388.7	1993
119.4	1978	476.4	1994
124.4	1979	501.4	1995
154.2	1980	536.8	1996
174.3	1981	583.9	1997
210	1982	629.3	1998
208	1983	704.1	1999
156	1984	689.5	2000
160.6	1985	812.4	2001
188.6	1986	844.8	2002
182.1	1987	865.8	2003
223.8	1988	907.2	2004
257.6	1989	817.5	2005
284.6	1990	866.6	2006
325	1991	895.4	2007

Sheather (2009), bu veri setine iki farklı senaryo uygulamıştır. Bunlardan ilki sıradan regresyon modeli, ikincisi otoregresif hata terimlerine sahip olan regresyon modelidir. Bu bölümde yapılan çalışmada, otoregresif hata terimli regresyon modeli ile normal ve t dağılımına dayalı parametre tahmin edicileri kullanılarak iki farklı hesaplama elde edilmiş ve sonuçlar Çizelge 2.4'te özetlenmiştir. Verilere ilişkin regresyon modeli, aşağıdaki şekilde kurulmuştur. Yapılan ön çalışmada modeldeki sabit terimin istatistiksel olarak anlamsız olduğu görülmüş ve bu nedenle sabit terim modele dahil edilmemiştir. Hata terimi için ise 1. dereceden otoregresif hata terimi tespit edilmiş ve hesaplamalar buna göre yapılmıştır. Model parametrelerinin başlangıç değerleri için verilerden

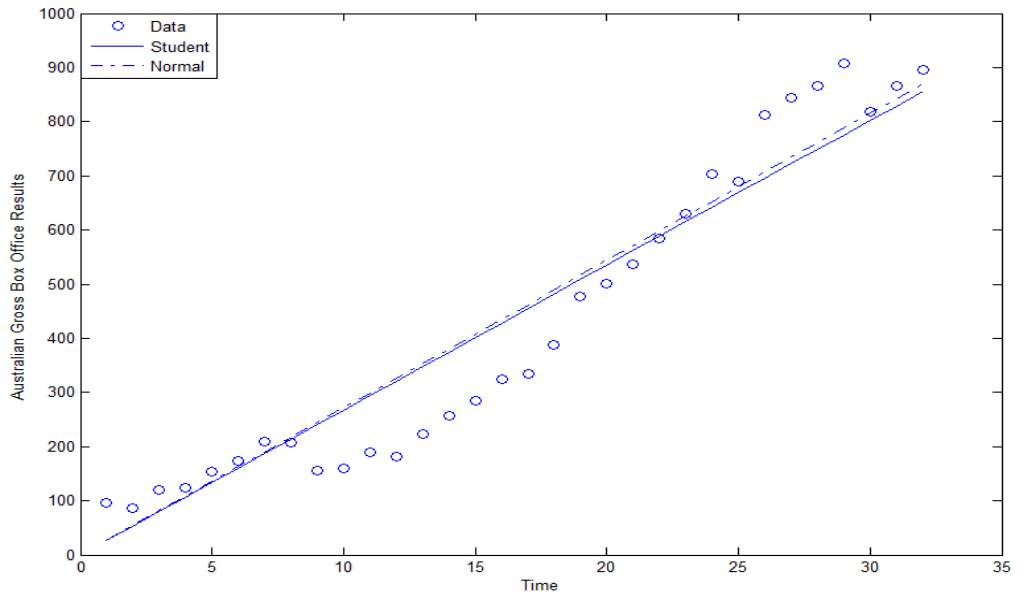
hesaplanan EKK tahminleri kullanılmıştır. Bu veri için aşağıdaki doğrusal regresyon modeli kurulmuştur.

$$GrossBoxOffice = \beta_0 + \beta_1 Years + e_t$$

Çizelge 2.4 Avusturalya sinema verisi için parametre tahmin sonuçları

		Normal	t
β_1	$\hat{\beta}_1$	27.1927	26.7505
	SH	0.4263	0.7030
	%95GA	(27.0449) – (27.3404)	(26.5069) – (26.9941)
ϕ	$\hat{\phi}$	0.8816	0.2558
	SH	2.9578	0.0066
	%95GA	(-0.1436) – (1.9067)	(0.2358) – (0.2817)
	AIC	151.1732	118.3208
	BIC	301.2779	235.5731

Çizelge 2.4, hem normal hem de t dağılımı için parametre tahminlerini, standart hataları, %95 güven aralıklarını ve modellere ait AIC ve BIC değerlerini göstermektedir. Bu sonuçlara göre, t dağılımına dayalı yapılan parametre tahminlerinden elde edilen modelin her iki kritere göre de daha uygun model olduğu belirlenmiştir.



Şekil 2.1 Verilere ilişkin normal ve t dağılımına dayalı regresyon doğruları

Şekil 2.1, veriler kullanılarak normal ve t dağılımlarına dayalı elde edilen regresyon doğrularını göstermektedir. Bu t dağılımının, normal dağılıma göre verilerin büyük çoğunluğunu daha iyi temsil edebildiği söylenebilir.

2.10 Belçika Telefon Aramaları Verisi

Bu örnekte, Rousseeuw ve Leroy (1987) tarafından analiz edilen veriler ele alınmıştır. Çizelge 2.5, 1950-1973 yıllarında Belçika'dan yapılan uluslararası telefon aramalarının oranını ve aramaların yapıldığı yılları göstermektedir.

Çizelge 2.5 Belçika'dan yapılan uluslararası arama sayıları

Arama sayısı * (y_i)	Yıl (x_i)	Arama sayısı * (y_i)	Yıl (x_i)
0.44	50	1.61	62
0.47	51	2.12	63
0.47	52	11.90	64
0.59	53	12.40	65
0.66	54	14.20	66
0.73	55	15.90	67
0.81	56	18.20	68
0.88	57	21.20	69
1.06	58	4.30	70
1.20	59	2.40	71
1.35	60	2.70	72
1.49	61	2.90	73

*On milyon.

Çizelge 2.5'deki verilere ilişkin aşağıdaki doğrusal regresyon modeli kurulmuştur.

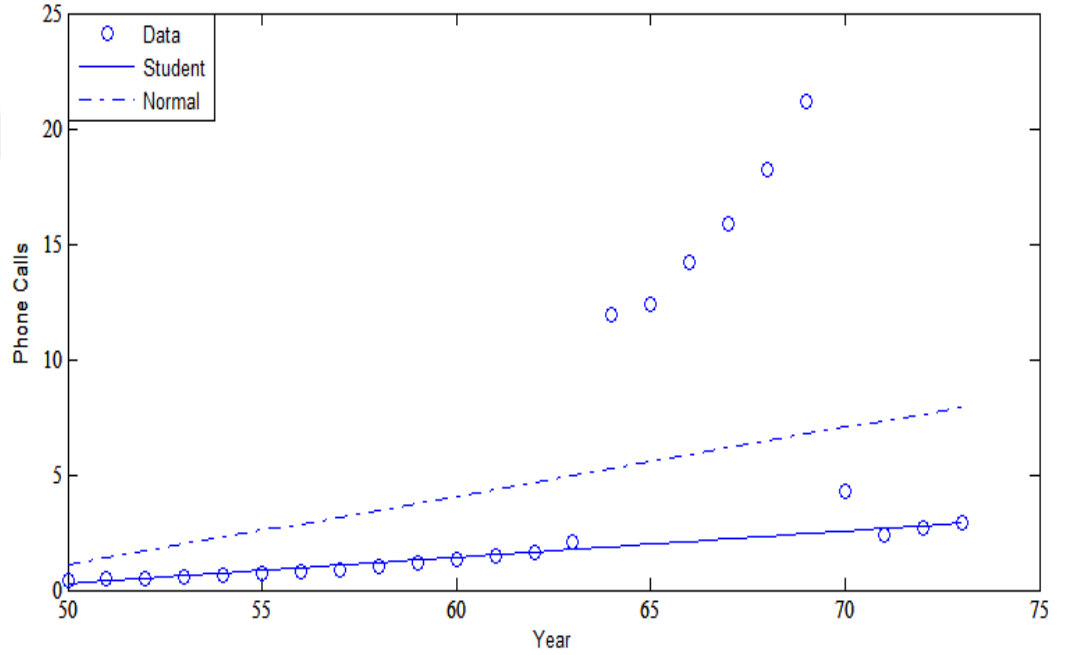
$$Arama_sayısı = \beta_0 + \beta_1 Yıl + e_t$$

Yapılan ön analizler sonucunda, veride 1. dereceden otoregresif ilişki olduğu ve şekil 2.2'den veride aykırı değerlerin bulunduğu gözlemlenmektedir. Bu nedenlerle, veri setini modellemek için t dağılımına dayalı otoregresif hata terimli regresyon modellerinin uygun olacağı düşünülmüştür. Çizelge 2.6'da hem normal dağılıma dayalı hem de t dağılımına dayalı yapılan tahminlere ilişkin; tahmin değerleri, standart hatalar ve %95 güven aralıkları verilmektedir. Ayrıca modelleri kıyaslamak adına AIC ve BIC değerleri

de verilmiştir. AIC ve BIC değerleri t dağılımına dayalı yöntemin normal dağılıma dayalı yönteme göre veriyi daha iyi modellediğini açıkça göstermektedir.

Çizelge 2.6 Belçika arama verisi için parametre tahmin sonuçları

		Normal	t
β_0	$\hat{\beta}_0$	-13.8142	-5.3724
	SH	10.9242	11.6686
	%95GA	(-18.1848) – (-9.4436)	(-10.0408) – (-0.7040)
β_1	$\hat{\beta}_1$	0.2980	0.1131
	SH	0.1796	0.1918
	%95GA	(0.2262) – (0.3699)	(0.0363) – (0.1898)
ϕ	$\hat{\phi}$	0.7366	0.1627
	SH	50.0647	0.2422
	%95GA	(-19.2934) – (20.7667)	(0.0658) – (0.2596)
	AIC	61.3656	37.4305
	BIC	120.2654	72.3951



Şekil 2.2 Verilere ilişkin normal ve t dağılımına dayalı regresyon doğruları

Şekil 2.2, verilerin saçılım grafiğinin üzerine normal dağılıma dayalı ve t dağılımına dayalı yöntemlerle elde edilen regresyon doğrularını gösterir. Bu şekil, verideki aykırı değerlerin normal dağılıma dayalı regresyon doğrusunu ciddi şekilde saptırdığını ve iyi

bir modelleme yapamadığını göstermektedir. Öte yandan t dağılımına dayalı yöntemin, aykırı değerlerden neredeyse hiç etkilenmeden, verilerin büyük kısmını başarı ile temsil ettiği söylenebilir.



3. ÇARPIK DAĞILIM VARSAYIMI ALTINDA PARAMETRE TAHMİNİ

İkinci bölümde, otoregresif hata terimli regresyon modellerine ait parametre tahminleri için simetrik dağılıma dayalı birçok çalışma olduğundan bahsedilmişti. Ancak gerçek hayatta karşılaşılan verilerde çarpıklık olması durumunda, otoregresif hata terimli regresyon modellerine ilişkin çalışmaların kısıtlı olduğu söylenebilir. Çarpık dağılımlara uygun veriler söz konusu olduğunda; bu verileri simetrik dağılımlara dayalı tahmin edicilerle tahmin etmek, etkin olmayan tahminlerin ortaya çıkmasına neden olabilmektedir. Bu nedenle simetrik dağılımlara alternatif çarpık dağılımlar kullanmak, elde edilecek tahminlerin daha etkin olmasını sağlayacaktır. Tiku vd. (1999) AR(1) hata terimli regresyon modellerinde; gamma ve genelleştirilmiş lojistik dağılımları varsayımı altında, MML (modified maximum likelihood) yöntemi ile parametre tahminleri yapmıştır. Ancak bu çalışmada kullanılan çarpık dağılım, orta düzeyli çarpıklıkları modellemek için yeterli esnekliğe sahip değildir. Normal ve t dağılımlarının çarpık karşılıkları, Azzalini (1985, 1986) ve Azzalini ve Capitanio (2003) tarafından önerilmiştir. Bu dağılımlar, çarpık-simetrik dağılımlar olarak da adlandırılır ve veride çarpıklık söz konusu olduğunda, klasik regresyon modellerinde sıklıkla kullanılır. Tezin bu bölümünde kullanılan bu dağılımlar, temelde iki avantaj sağlar. Bunlar: 1. Bu dağılımların tanımlanmasında kullanılan çarpıklık parametresi sıfır değerini aldığı anda, dağılım simetrik haline dönüşmektedir. Böylece veride bir çarpıklık olmaması durumunda; çarpıklık parametresi sıfır değerini alacağından, dağılım simetrik dağılıma dönüşecek ve parametre tahminleri başta yapılan çarpıklık varsayımından etkilenmeyecektir. 2. Diğer çarpık dağılımlarla kıyaslandığında; Azzalini tipi çarpık dağılımlara EM algoritması kolayca uygulanabilir olduğundan, parametrelerin EÇÖ tahmin edicilerinin elde edilmesi daha kolay olacaktır. Bu bölümde; tezin ilk kısmında verilen otoregresif hata terimli regresyon modelindeki hataların, Azzalini (1985, 1986) ve Azzalini ve Capitanio (2003) tarafından tanımlanan çarpık normal ve çarpık t dağılımlarına uygun dağılım gösterdiği varsayılarak model parametrelerinin, KEÇÖ tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen tahmin edicilerin analitik çözümlerinin olmaması nedeniyle hesaplamalar için EM algoritması kullanılmıştır. Parametre tahminlerinin performanslarını kıyaslamak için simülasyon çalışması ve bir gerçek veri örneği incelenmiştir.

3.1 Çarpık Normal Dağılım

Azzalini (1985) tarafından aşağıdaki teorem, simetrik dağılımları çarpıklaştırmak için önerilmiştir.

Teorem 3.1: f , 0 etrafında simetrik olasılık yoğunluk fonksiyonu ve G , mutlak sürekli dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$h(x) = 2G(\zeta x)f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon, $\zeta \in \mathbb{R}$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliklerini taşır. Bu teorem yardımıyla Azzalini tipi çarpık dağılımlar tanımlanmıştır.

Çarpık normal dağılım, işlem kolaylığı ve özel halinde simetrik normal dağılıma dönüşmesi nedeniyle literatürde sıkça kullanılan bir dağılımdır. Azzalini (1985), yayımladığı makalede çarpık dağılımın geniş bir teorisinden bahsetmektedir. Buna göre; Teorem 3.1' den yola çıkılarak eşitlik (3.1)' de; $f(x)$ yerine standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, $G(x)$ yerine standart normal dağılım fonksiyonu yazılırsa elde edilen dağılım, çarpık normal dağılım olacaktır. $\zeta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, çarpıklık parametresi olarak tanımlanmıştır. $X \sim SN(\zeta)$ olarak gösterilen çarpık normal dağılım,

$$h(x) = 2F(\zeta x)f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

şeklinde olacaktır. Literatürdeki yaygın sembol kullanımı, $\phi(x)$ standart normal dağılımın o.y.f. ve $\Phi(x)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu şeklindedir. Ancak bu tezde; hatalar için kullanılan otoregresif modellerde, ϕ parametresi, otoregresif modele ait bilinmeyen parametre ve Φ ise fark alma fonksiyonu olarak kullanıldığı için karışıklığı ortadan kaldırmak adına; standart normal dağılımın o.y.f. $f(x)$ şeklinde ve standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu $F(x)$ şeklinde gösterilmiştir. Azzalini tipi çarpık normal dağılımda, ζ değeri arttıkça dağılımın çarpıklığı da artış göstermektedir. Çarpıklık parametresinin değeri; negatif olduğunda sola çarpık, pozitif olduğunda sağa

çarpık bir dağılım elde edilmektedir. Çarpıklık parametresi değeri sıfır olduğunda ise dağılım standart normal dağılıma dönüşmektedir.

Uygulamada daha kullanışlı olması adına, $Y = \mu + \sigma X$ dönüşümü uygulanarak dağılım, konum ölçek ailesine taşınır. Bu dönüşüm altında çarpık normal dağılımın o.y.f. şu şekilde ifade edilir:

$$h(y; \mu, \sigma, \zeta) = \frac{2}{\sigma} f\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) F\left(\zeta \left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right) \quad (3.3)$$

Eşitlik (3.3)'deki ifade, $Y \sim SN(\mu, \sigma, \zeta)$ olarak gösterilir. Burada, $f(\cdot)$ standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve $F(\cdot)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Çarpık normal dağılımın beklenen değeri, varyansı, çarpıklık ve basıklık katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibidir (Lin vd. 2007):

$$E(Y) = \mu + \sqrt{\frac{2\zeta^2\sigma^2}{\pi(1+\zeta^2)}} \quad (3.4)$$

$$Var(Y) = \left(1 - \frac{2\zeta^2}{\pi(1+\zeta^2)}\right)\sigma^2 \quad (3.5)$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)\zeta^3}{(\pi + (\pi-2)\zeta^2)^{3/2}}, \quad (3.6)$$

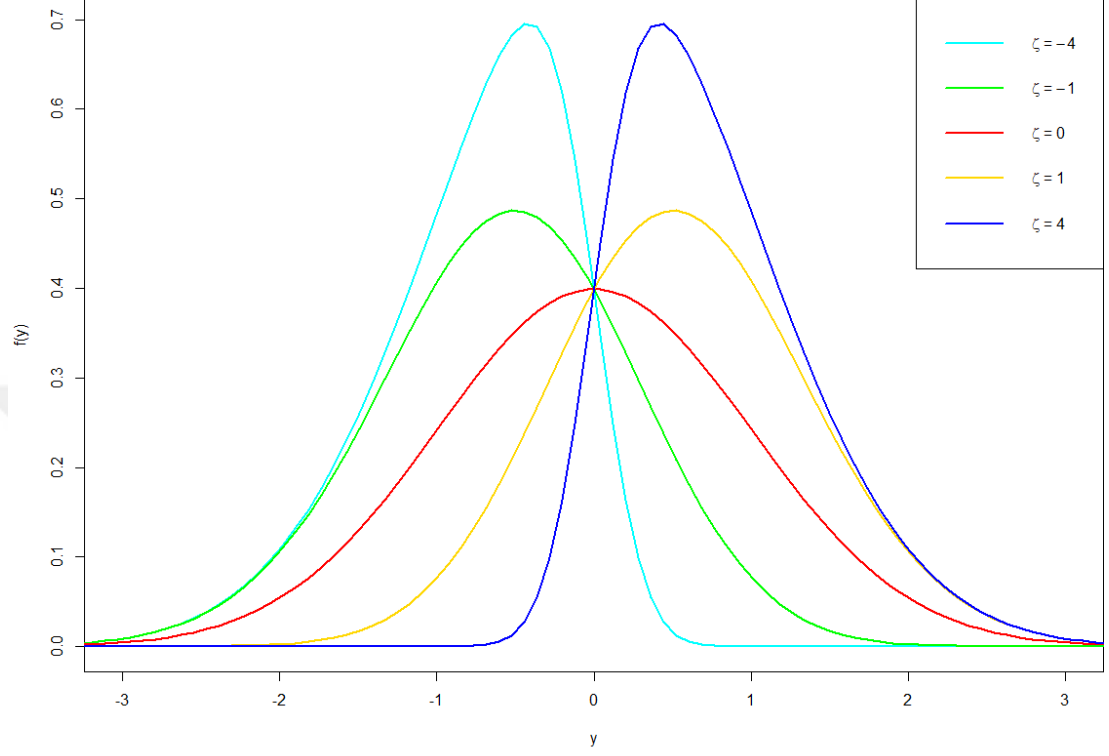
$$\gamma_2 = 3 + \frac{8(\pi-3)\zeta^4}{(\pi + (\pi-2)\zeta^2)^2} \quad (3.7)$$

Çizelge 3.1 Çarpık normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri

ζ	0	1	2	3	4	5	10	20	∞
γ_1	0	0.14	0.45	0.67	0.78	0.85	0.96	0.99	0.995
γ_2	3	3.06	3.31	3.51	3.63	3.71	3.82	3.86	3.869

Çizelge 3.1, çarpık normal dağılımın farklı çarpıklık parametreleri için çarpıklık (γ_1) ve basıklık (γ_2) değerlerini göstermektedir. Çizelgeden, dağılımın çarpıklık parametresi arttıkça çarpıklık ve basıklık değerinde artış olduğu gözlenmektedir. Şekil 3.1'de ise çarpıklık parametresinin farklı değerleri için çarpık normal dağılımın, olasılık yoğunluk

fonksiyonu grafikleri elde edilmiştir. Çizelge 3.1’deki değerler ve Şekil 3.1’deki grafik, R programı kullanılarak üretilmiştir.



Şekil 3.1 Farklı ζ değerleri için çarpık normal dağılımın o.y.f grafiği

$Y \sim SN(\mu, \sigma, \zeta)$ rasgele değişkeni için Azzalini (1986) ve Henze (1986) tarafından çarpık normal dağılım için ortaya konulan aşağıdaki stokastik gösterim kullanılarak parametre tahminleri için EM algoritması işlemleri yürütülmektedir.

$$Y = \mu + \sigma\delta|U_1| + \sigma\sqrt{1 - \delta^2}U_2 \quad (3.8)$$

Burada, U_1 ve U_2 birbirinden bağımsız, standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenler ve $\delta = \sqrt{1 + \zeta^2}$ dır.

$\gamma = |U_1|$ olmak üzere, koşullu dağılımlar yardımıyla hiyerarşik gösterim şu şekildedir.

$$\begin{aligned} Y|\gamma &\sim N(\mu + \sigma\delta\gamma, (1 - \delta^2)\sigma^2) \\ \gamma &\sim TN(0,1; (0, \infty)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Burada $TN(\cdot)$, kesilmiş normal (Truncated Normal) dağılımı ifade etmektedir. Koşullu dağılımlar kullanılarak Y ve γ rasgele değişkenlerinin ortak o.y.f. aşağıdaki gibi bulunur:

$$f(y, \gamma) = \frac{1}{\pi\sqrt{\kappa^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu - \alpha\gamma)^2}{2\kappa^2} - \frac{\gamma^2}{2}\right) \quad (3.10)$$

Burada, $\kappa^2 = \sigma^2(1 - \delta^2)$ ve $\alpha = \sigma\delta$ şeklindedir.

Ortak o.y.f. ve Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunun oranlanmasıyla $\gamma|y$ koşullu dağılımı, aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f(\gamma|y) = \frac{f(y, \gamma)}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \delta^2)}F\left(\zeta\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right)} \exp\left(-\frac{\left(\gamma - \frac{\delta(y - \mu)}{\sigma}\right)^2}{2(1 - \delta^2)}\right) \quad (3.11)$$

Bu koşullu o.y.f., $\gamma|y \sim TN((\delta\eta, 1 - \delta^2); (0, \infty))$ şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\eta = (y - \mu)/\sigma$ dir.

Önerme 3.1 $X \sim TN((\mu, \sigma^2); (\alpha_1, \alpha_2))$ dağılımına sahip bir rasgele değişken ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \{\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)\}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right), \alpha_1 < x < \alpha_2 \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha_i = (\alpha_i - \mu)/\sigma$, $i = 1, 2$ dir.

Bu fonksiyon kullanılarak X ve X^2 rasgele değişkenleri için beklenen değerler, aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X) = \mu - \sigma \frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{F(\alpha_2) - F(\alpha_1)} \quad (3.13)$$

$$E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2 - \sigma^2 \frac{\alpha_2 f(\alpha_2) - \alpha_1 f(\alpha_1)}{F(\alpha_2) - F(\alpha_1)} - 2\mu\sigma \frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{F(\alpha_2) - F(\alpha_1)} \quad (3.14)$$

Bu önerme kullanılarak ECM algoritmasının içinde hesaplanacak olan koşullu beklenen değerler, yani $Y = y$ verildiğinde γ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri,

$$E(\gamma|y) = \delta\eta + \sqrt{1 - \delta^2} \frac{f(\zeta\eta)}{F(\zeta\eta)} \quad (3.15)$$

ve $Y = y$ verildiğinde γ^2 rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri,

$$E(\gamma^2|y) = 1 - \delta^2 + \delta^2\eta E(\gamma|y) \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\eta = (y - \mu) / \sigma$ 'dır.

3.1.1 Çarpık normal dağılım varsayımı altında parametre tahmini

AR(p) hata terimli regresyon modeli için hata terimleri dağılımının, $a_t \sim SN(0, \sigma^2, \zeta)$ ile gösterilen Azzalini tipi çarpık normal dağılıma uygun olduğu varsayılınsın. Bu dağılım için simetrik dağılımlardan farklı olarak $E(a_t) \neq 0$ olacaktır. Çarpık normal dağılım için $E(a_t) = \sqrt{2/\pi} \delta\sigma$ olduğundan parametre tahminlerinde sadece kesim noktası etkilenecektir. $\{(x_{p+1}, y_{p+1}), (x_{p+2}, y_{p+2}), \dots, (x_n, y_n)\}$ gözlemleri verildiğinde; bilinmeyen $\theta = (\beta, \phi, \sigma^2, \zeta)$ parametre vektörünün KEÇO tahmin edicileri, aşağıdaki log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum yapılması ile elde edilebilmektedir:

$$\begin{aligned} \ln L(\beta, \phi, \sigma^2, \zeta | a_t) &= T(\ln(2) - \ln(\sigma)) - \frac{T}{2} \ln(2\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta)^2}{\sigma^2} \right) \\ &\quad + \sum_{t=p+1}^N \ln \left(F \left(\frac{\zeta(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta)}{\sigma} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ancak bu fonksiyonu maksimum yapan çözüm, analitik olarak elde edilememektedir. ECM algoritmasının kullanılması ile parametre tahmini yapılması, yakınsamaların garantilenmesini sağlamaktadır. Çarpık normal dağılım varsayımında, ECM

algoritmasını yürütebilmek için (3.8)'de verilen stokastik gösterim kullanılarak aşağıdaki koşullu dağılımlar elde edilir:

$$\begin{aligned} Y_t | \gamma_t &\sim N(\Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta} + \alpha \gamma_t, \kappa^2) \\ \gamma_t &\sim TN(0,1; (0, \infty)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ kayıp değişken olmak üzere $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma})$ tam veri için olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları, sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$L_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) = \prod_{t=p+1}^N \frac{1}{\pi\sqrt{\kappa^2}} \exp\left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta} - \alpha\gamma)^2}{2\kappa^2} - \frac{\gamma_t^2}{2}\right) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) &= -T \left(\ln(\pi) + \frac{1}{2} \ln(\kappa^2) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi\sqrt{\kappa^2}} \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta} - \alpha\gamma)^2}{2\kappa^2} - \frac{\gamma_t^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Buna göre tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) &= -T \left(\ln(\pi) + \frac{1}{2} \ln(\kappa^2) \right) - \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{\kappa^2} \right) E(\gamma_t | \Phi(B)y_t) \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2\kappa^2} E(\gamma_t^2 | \Phi(B)y_t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilir. Bu fonksiyonda yer alan koşullu beklenen değerleri elde etmek için (3.15) ve (3.16)'da gösterilen, koşullu beklenen değerlerden faydalanılır.

Algoritma adımları: $\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü için başlangıç değeri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ ve durdurma kriteri ε belirlendikten sonra ECM algoritmasının E ve CM adımları şu şekilde yürütülür:

i) *E-adımı:* $(k+1)$ 'inci iterasyon için $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ parametre vektörü verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değerler hesaplanır:

$$S_{1t}^{(k)} = E(\gamma_t | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \delta^{(k)} \eta_t^{(k)} + \sqrt{1 - \delta^{2(k)}} \frac{f(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)})}{F(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)})} \quad (3.22)$$

$$S_{2t}^{(k)} = E(\gamma^2 | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = 1 - \delta^{2(k)} + \delta^{(k)} \eta_t^{(k)} S_{1t}^{(k)} \quad (3.23)$$

Burada, $\eta_t^{(k)} = \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma^{(k)}}$ dır. Bu şekilde hesaplanan beklenen değerler, (3.21) eşitliğinde yerlerine yazıldığında koşullu beklenen değer; $E(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{u}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ şeklinde amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} E(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \mathbf{u}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = & \\ & -\frac{T}{2}(\ln(\kappa^2)) \\ & - \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \right) \\ & + \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{\kappa^2} \right) S_{1t}^{(k)} \\ & - \sum_{t=p+1}^N \frac{\alpha^2}{2\kappa^2} S_{2t}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ii) *CM adımı*: $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k+1)$ 'inci parametre tahminleri hesaplanır.

1. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevinin sıfıra eşitlenmesiyle $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)}$ şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = & \left(\sum_{t=p+1}^N \Phi^{(k)}(B)x_t \Phi^{(k)}(B)x_t^T \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{t=p+1}^N (\Phi^{(k)}(B)y_t - \alpha^{(k)} S_{1t}^{(k)}) \Phi^{(k)}(B)x_t \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

2. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun, $\boldsymbol{\phi}$ parametresine göre türevinin sıfıra eşitlenmesiyle, $\boldsymbol{\phi}^{(k+1)}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\boldsymbol{\phi}^{(k+1)} = \left(\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) \right) \left(\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) + \alpha^{(k)} S_{1t}^{(k)} \right) \quad (3.26)$$

Burada,

$$\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-2} \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun α parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\alpha^{(k+1)}$ için tahmin edici şu şekilde olur:

$$\alpha^{(k+1)} = \frac{\sum_{t=p+1}^N S_{1t}^{(k)} \left(\Phi^{(k)}(B) y_t - \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)} \right)^2}{\sum_{t=p+1}^N S_{2t}^{(k)}} \quad (3.27)$$

4. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun κ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek şu denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \kappa^{2(k+1)} = \frac{1}{T} & \left(\sum_{t=p+1}^N \left(\Phi^{(k)}(B) y_t - \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)} \right)^2 \right. \\ & - 2\alpha^{(k)} S_{1t}^{(k)} \left(\Phi^{(k)}(B) y_t - \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)} \right) \\ & \left. + \alpha^{2(k)} S_{2t}^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Buradan $\alpha^{(k+1)}$ ve $\kappa^{2(k+1)}$ parametre tahmin edicileri kullanılarak $\sigma^{2(k+1)}$ ve $\zeta^{(k+1)}$ denklemleri,

$$\sigma^{2(k+1)} = \kappa^{2(k+1)} + \alpha^{(k+1)} \quad (3.29)$$

$$\zeta^{(k+1)} = \delta^{(k+1)} (1 - \delta^{2(k+1)})^{-1/2} \quad (3.30)$$

olarak elde edilir.

Burada, $\delta^{(k+1)} = \alpha^{(k+1)} / \sigma^{2(k+1)}$ dir.

iii) Bu adımlar, yakınsaklık kriteri $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\| < \varepsilon$ sağlanana kadar tekrar edilir.

3.2 Çarpık t Dağılımı

Çarpık t dağılımı; Azzalini (1985, 1986), Gupta vd. (2002), Azzalini ve Capitanio (2003) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada kullanılan çarpık t dağılımı, normal dağılımın ölçek karmasından gelen bir dağılımdır (Branco ve Dey 2001, Gupta vd. 2002, Azzalini ve Capitanio 2003, Azzalini 2005, Arslan 2011).

Önerme 3.2 Y , standart çarpık normal dağılıma ve V , ν serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olsun. Y ve V birbirinden bağımsız olmak üzere $X = \frac{Y}{\sqrt{V/\nu}}$ rasgele değişkeni, çarpık t dağılımına sahiptir ve $X \sim St_\nu(\zeta)$ olarak ifade edilir (Gupta vd. 2002, Azzalini 2003). Çarpık t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{st}(x; \zeta) = 2t_\nu(x)T_{\nu+1}\left(\zeta x \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+x^2}}\right) \quad (3.31)$$

olarak tanımlanır. Burada, t_ν , bilinen ν serbestlik dereceli, simetrik t olasılık yoğunluk fonksiyonunu; $T_{\nu+1}$, $\nu+1$ serbestlik dereceli, simetrik t dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Çarpık normal dağılımında olduğu gibi, çarpık t dağılımında da ζ çarpıklık parametresini göstermekte olup ζ arttıkça dağılımın çarpıklığı da artmaktadır. Dağılımı uygulamada daha kullanışlı hale getirmek için $U = \mu + \sigma X$ dönüşümü

kullanılarak dağılım, konum ölçek ailesine taşınabilir. Bu dönüşüm altında, çarpık t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{st}(u; \zeta) = \frac{2}{\sigma} t_v \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) T_{v+1} \left(\zeta \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \sqrt{\frac{v + 1}{v + \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right)^2}} \right) \quad (3.32)$$

şeklindedir ve $U \sim St_v(\mu, \sigma^2, \zeta, v)$ olarak ifade edilebilir. Çarpık t dağılımının beklenen değeri, varyansı, basıklık ve çarpıklık katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibidir (Azzalini ve Capitanio, 2003):

$$E(X) = \mu + \sigma c, \quad v > 1 \quad (3.33)$$

$$Var(X) = \sigma^2 \left(\frac{v}{v-2} - c^2 \right), \quad v > 2 \quad (3.34)$$

$$\gamma_1 = c \left(\frac{v(3 - \delta^2)}{v-3} - \frac{3v}{v-2} + 2c^2 \right) \left(\frac{v}{v-2} - c^2 \right)^{-3/2}, \quad v > 3 \quad (3.35)$$

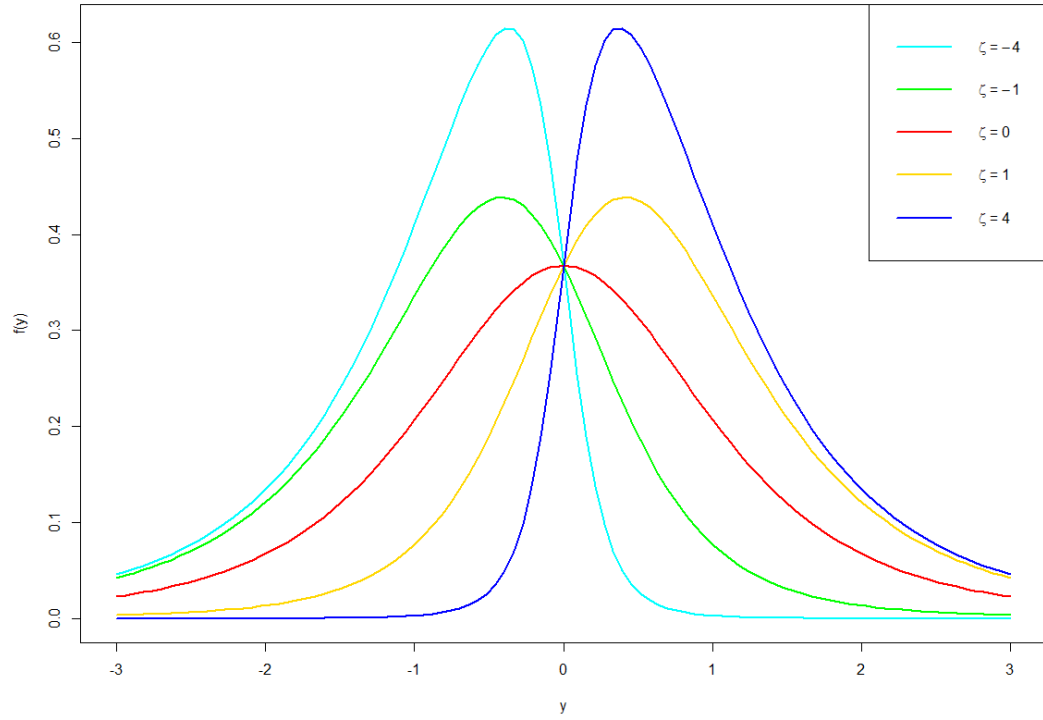
$$\gamma_2 = \frac{\left(\frac{3v^2}{(v-2)(v-4)} - \frac{4c^2 v(3 - \delta^2)}{v-3} + \frac{6c^2 v}{v-2} - 3c^4 \right)}{\left(\frac{v}{v-2} - c^2 \right)^2} - 3, \quad v > 4 \quad (3.36)$$

Burada, $\delta = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}$ ve $c = \delta \left(\frac{v}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\Gamma(\frac{v-1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \right)$ şeklindedir.

Çizelge 3.2 Çarpık t dağılımının basıklık ve çarpıklık değerleri

ζ	0		1		3		5		10		20	
v	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
4	0	-	1.924	-	3.453	-	3.777	-	3.941	-	3.985	-
5	0	6	1.075	8.920	2.126	16.25	2.374	18.45	2.502	19.66	2.537	19.99
6	0	3	0.779	4.162	1.666	7.659	1.890	8.799	2.000	9.434	2.040	6.612
7	0	2	0.627	2.679	1.429	5.023	1.642	5.831	1.755	6.288	1.787	6.416
8	0	1.5	0.533	1.970	1.284	3.777	1.490	4.425	1.601	4.795	1.632	4.900
9	0	1.2	0.470	1.558	1.185	3.059	1.388	3.613	1.497	3.932	1.528	4.023
10	0	1	0.424	1.290	1.114	2.595	1.314	3.088	1.422	3.373	1.453	3.454
20	0	0.375	0.258	0.497	0.856	1.237	1.046	1.542	1.152	1.723	1.181	1.774

Çizelge 3.2’de, R programı kullanılarak elde edilen çarpıklık ve basıklık değerleri görülmektedir. Çizelgeden görüldüğü gibi dağılımın basıklığı ve çarpıklığı, serbestlik derecesine ve çarpıklık parametresine bağlıdır. Tıpkı çarpık normal dağılımda olduğu gibi, çarpık t dağılımında da çarpıklık parametresinin değeri sıfır iken; dağılım, bilinen simetrik t dağılımına dönüşür. Çarpıklık parametresinin değeri arttıkça dağılımın çarpıklığı ve basıklığı artmaktadır. Çarpıklık parametresinin değeri artarken serbestlik derecelerine bağlı olarak basıklık ve çarpıklık incelendiğinde; serbestlik derecesi arttıkça dağılımın basıklığının ve çarpıklığının düştüğü gözlenmektedir. Çizelgeden de görüldüğü gibi serbestlik derecesi ve çarpıklık parametresi arttığında; dağılım, çarpık normal dağılıma yakınsamaktadır. Çarpık t dağılımı; çarpık normal dağılımda olduğu gibi çarpıklık parametresi pozitifken sağa çarpık, negatifken sola çarpık olmaktadır. Şekil 3.2, R programında üretilen değişik çarpıklık parametreleri için çarpık t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir.



Şekil 3.2 Farklı ζ değerleri için, çarpık t dağılımının o.y.f grafiği

$Y \sim St_v(\mu, \sigma^2, \zeta, \nu)$ rasgele değişkenin ölçek karması olarak gösterimi, aşağıdaki gibidir (Gupta vd. 2002, Azzalini ve Capitanio 2003 ve Gupta 2003):

$$Y = \mu + \frac{\sigma Z}{\sqrt{\tau}}, Z \sim SN(\zeta), \tau \sim Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad (3.37)$$

Burada, Z ve τ rasgele değişkenleri bağımsızdır. Ayrıca standart çarpık normal dağılıma sahip Z rasgele değişkeni için stokastik gösterim,

$$Z = \delta|U_1| + \sqrt{1 - \delta^2} U_2 \quad (3.38)$$

kullanılır ise $\gamma = \frac{|U_1|}{\sqrt{\tau}}$ olmak üzere koşullu dağılımlar yardımıyla hiyerarşik gösterim;

$$Y|\gamma, \tau \sim N\left(\mu + \sigma\delta\gamma, \frac{1 - \delta^2}{\tau} \sigma^2\right) \quad (3.39)$$

$$\gamma|\tau \sim TN\left(0 + \frac{1}{\tau}; (0, \infty)\right) \quad (3.40)$$

$$\tau \sim Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad (3.41)$$

olarak elde edilir. (3.39) ve (3.41) eşitliklerinde verilen dağılımlardan yararlanılarak Y, γ ve τ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları şöyle elde edilir:

$$f(y, \gamma, \tau) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{1 - \delta^2}} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \tau^{\frac{\nu}{2}} \exp\left(-\frac{\tau\eta^2}{2(1 - \delta^2)} - \frac{\nu\tau}{2}\right) \quad (3.42)$$

$$\times \exp\left(-\frac{\gamma^2\tau}{2(1 - \delta^2)} + \frac{\gamma\tau\delta(y - \mu)}{(1 - \delta^2)\sigma}\right)$$

$$f(y, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau^{\frac{\nu-1}{2}}}{\sigma} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\eta^2 + \nu)\right) F(\zeta\sqrt{\tau}). \quad (3.43)$$

Bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki koşullu dağılım elde edilir:

$$f(\gamma|\tau, y) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi(1-\delta^2)}} \exp\left(-\frac{\tau\left(\gamma - \delta \frac{(y-\mu)}{\sigma}\right)^2}{2(1-\delta^2)}\right) F^{-1}(\zeta\eta\sqrt{\tau}) \quad (3.44)$$

Böylece τ ve y verilmişken γ rasgele değişkeninin koşullu dağılımı şu şekilde olacaktır:

$$\gamma|\tau, y \sim TN\left(\frac{\delta(y-\mu)}{\sigma}, \frac{1-\delta^2}{\tau}; (0, \infty)\right) \quad (3.45)$$

Ayrıca $\tau|y$ koşullu dağılımı $b = \left(\frac{\eta^2+\nu}{2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) T_{\nu+1}\left(\zeta\eta\sqrt{\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}}\right) \right\}^{-1}$ normalleştirme sabiti olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$f(\tau|y) = b\tau^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{\tau}{2}(\eta^2+\nu)} F(\zeta\eta\sqrt{\tau}). \quad (3.46)$$

Eğer $\tau \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ ise herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$E\left(F(a\sqrt{\tau})\right) = T_{2\alpha}\left(a\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \quad (3.47)$$

dır (Azzalini ve Capitanio 2003).

$Y = y$ verildiğinde; $\tau, \gamma\tau, \gamma^2\tau$ ve $\log(\tau)$ rasgele değişkenlerinin koşullu beklenen değerleri aşağıdaki gibi bulunur (Lin vd. 2007a):

$$E(\tau|y) = \left(\frac{\nu+1}{\eta^2+\nu}\right) \frac{T_{\nu+3}\left(M\sqrt{\frac{\nu+3}{\nu+1}}\right)}{T_{\nu+1}(M)} \quad (3.48)$$

$$E(\gamma\tau|y) = \frac{\delta(y-\mu)}{\sigma} E(\tau|y) + \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\pi\sigma f(y)} \left(\frac{\eta^2}{\nu(1-\delta^2)} + 1\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} \quad (3.49)$$

$$E(\gamma^2 \tau | y) = \frac{\delta^2 (y - \mu)^2}{\sigma^2} E(\tau | y) + \sqrt{1 - \delta^2} \quad (3.50)$$

$$+ \frac{\delta \sqrt{1 - \delta^2} (y - \mu)}{\pi \sigma^2 f(y)} \left(\frac{\eta^2}{v(1 - \delta^2)} + 1 \right)^{-\left(\frac{v}{2} + 1\right)}$$

$$E(\ln \tau | y) = DG\left(\frac{v+1}{2}\right)$$

$$- \ln\left(\frac{\eta^2 + v}{2}\right) + \left(\frac{v+1}{\eta^2 + v}\right) \left(\frac{T_{v+3}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+3}{\eta^2 + v}}\right)}{T_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)} - 1 \right)$$

$$+ \frac{\zeta \eta (\eta^2 - 1)}{\sqrt{v+1}(\eta^2 + v)^3} \frac{t_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)}{T_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)}$$

$$+ \frac{1}{T_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)} \int_{-\infty}^M g_v(x) t_{v+1}(x) dx. \quad (3.51)$$

Burada,

$$\eta = \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta)}{\sigma}, \delta = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta}}, M = \zeta \eta \sqrt{\frac{v}{\eta+v}},$$

$$f(y_t) = \frac{2}{\sigma} t_v(\eta) T_{v+1}(M),$$

$$g_v(x) = DG\left(\frac{v+2}{2}\right) - DG\left(\frac{v+1}{2}\right) - \ln\left(1 + \frac{x^2}{v+1}\right) + \frac{x^2(v+1) - v - 1}{(v+1)(v+1+x^2)}$$

3.2.1 Çarpık t dağılım varsayımı altında parametre tahmini

AR(p) hata terimli regresyon modeli için hata terimlerinin dağılımı, $a_t \sim ST(0, \sigma^2, \zeta, v)$ ile gösterilen Azzalini tipi çarpık t dağılımına sahip olduğu varsayalım. Bu dağılım için

simetrik dağılımlardan farklı olarak $E(a_t) \neq 0$ olacaktır. Yani $E(a_t) = \sigma \delta \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}, v >$

1 olmak üzere $E(y) = x_t^T \beta + E(\epsilon)$ olduğu için parametre tahminlerinde sadece kesim noktası etkilenecektir. Kesim noktası β_0 tahmin edilirken $\widehat{E(\epsilon)}$ ifadesi de dikkate alınmalıdır. $\{(x_{p+1}, y_{p+1}), (x_{p+2}, y_{p+2}), \dots, (x_n, y_n)\}$ gözlemleri verildiğinde;

bilinmeyen $\Theta = (\beta, \phi, \sigma^2, \zeta, \nu)$ parametre vektörünün EÇO tahmin edicileri, aşağıdaki log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum yapılması ile elde edilebilmektedir:

$$\begin{aligned} \ln L = & T \ln(2c_\nu) - T \ln(\sigma) - \frac{\nu+1}{2} \sum_{t=p+1}^N \ln(\nu + z_t^2) \\ & + \sum_{t=p+1}^N \ln \left(T_{\nu+1} \left(\zeta z_t \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + z_t^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ancak bu noktalar, analitik olarak elde edilememektedir. ECM algoritmasının kullanılması ile parametre tahmini yapılması, yakınsamaların garantilenmesi için önem taşımaktadır. Çarpık t dağılım varsayımında, ECM algoritmasını yürütebilmek için stokastik gösterim kullanılarak aşağıdaki koşullu dağılımlar elde edilir:

$$Y_t | \gamma_t, \tau_t \sim N \left(\Phi(B) \mathbf{x}_t^T \beta + \alpha \gamma_t, \frac{\kappa^2}{\tau_t} \right) \quad (3.53)$$

$$\gamma_t | \tau_t \sim TN \left(0, \frac{1}{\tau_t} ; (0, \infty) \right), \tau_t \sim \Gamma \left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} \right) \quad (3.54)$$

Burada, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ve $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ kayıp değişkenler ve $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau})$ tam veri olmak üzere; tam veri için olabilirlik ve log olabilirlik fonksiyonları, şu şekilde elde edilir:

$$L_c(\Theta; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{t=p+1}^N \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \tau_t^{\frac{\nu}{2}}}{\pi \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\kappa^2}} e^{\left(-\frac{\nu \tau_t}{2} \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \beta - \alpha \gamma_t)^2}{2\kappa^2} - \frac{\tau_t \gamma_t^2}{2} \right)}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} l_c(\Theta; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) = & -\frac{T\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + T \ln\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N \ln(\tau_t) \\ & - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N \tau_t - T \ln(\pi) - \frac{T}{2} \ln(\kappa^2) \\ & - \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \beta - \alpha \gamma_t)^2}{2\kappa^2 / \tau_t} - \frac{\gamma_t^2}{2/\tau_t} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Buna göre tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
E(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) = & -\frac{T\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + T \ln\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) \\
& + \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N E(\ln \tau_t | y_t) - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N E(\tau_t | y_t) \\
& - \frac{T}{2} \ln(\kappa^2) - \sum_{t=p+1}^N \frac{\alpha^2 E(\gamma_t^2 \tau_t | y_t)}{2\kappa^2} \\
& - \sum_{t=p+1}^N \frac{E(\tau_t | y_t)(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \\
& + \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha E(\gamma_t^2 \tau_t | y_t)(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}{\kappa^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Bu fonksiyonda yer alan koşullu beklenen değerleri elde etmek için (3.48)-(3.51)'de gösterilen koşullu beklenen değerlerden faydalanılır.

Algoritma adımları: $\boldsymbol{\Theta}$ parametre vektörü için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma kriteri ε belirlendikten sonra ECM algoritmasının E ve CM adımları şöyle yürütülür:

i) *E-adımı:* $(k+1)$ 'inci iterasyon için $\boldsymbol{\Theta}^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değerler hesaplanır:

$$t_{1t}^{(k)} = E(\tau_t | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) = \left(\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}} \right) \frac{T_{\nu^{(k)}+3} \left(M_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 3}{\nu^{(k)} + 1}} \right)}{T_{\nu^{(k)}+1}(M_t^{(k)})}, \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
t_{2t}^{(k)} = & E(\gamma_t \tau_t | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) \\
= & \frac{\delta^{(k)}(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\sigma^{(k)}} t_{1t}^{(k)} + \frac{\sqrt{1 - \delta^{2(k)}}}{\pi \sigma^{(k)} f(y_t)^{(k)}} \\
& \times \left(\frac{\eta_t^{2(k)}}{\nu^{(k)}(1 - \delta^{2(k)})} + 1 \right)^{-\left(\frac{\nu^{(k)}}{2} + 1\right)}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
t_{3t}^{(k)} &= E(\gamma_t^2 \tau_t | \Phi(B)y_t, \Theta^{(k)}) \\
&= \frac{\delta^{2(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})^2}{\sigma^{2(k)}} t_{1t}^{(k)} + (1 - \delta^{2(k)}) \\
&\quad + \frac{\delta^{(k)} \sqrt{1 - \delta^{2(k)}} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\pi \sigma^{2(k)} f(y_t)^{(k)}} \\
&\quad \times \left(\frac{\eta_t^{2(k)}}{\nu^{(k)} (1 - \delta^{2(k)})} + 1 \right)^{-\left(\frac{\nu^{(k)}}{2} + 1\right)}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
t_{4t}^{(k)} &= E(\ln \tau_t | \Phi(B)y_t, \Theta^{(k)}) \\
&= DG \left(\frac{\nu^{(k)} + 1}{2} \right) - \log \left(\frac{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}{2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}} \right) \left(\frac{T_{\nu^{(k)}+3} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 3}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)}{T_{\nu^{(k)}+1} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)} - 1 \right) \\
&\quad + \frac{\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} (\eta_t^{2(k)} - 1)}{\sqrt{(\nu^{(k)} + 1)(\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)})^3}} \frac{t_{\nu^{(k)}+3} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)}{T_{\nu^{(k)}+1} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)} \\
&\quad + \frac{1}{T_{\nu^{(k)}+1} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)} \int_{-\infty}^{M_t^{(k)}} g_{\nu^{(k)}}(x) t_{\nu^{(k)}+1}(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
\eta_t^{(k)} &= \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\sigma^{(k)}}, \delta^{(k)} = \frac{\zeta^{(k)}}{\sqrt{1 + \zeta^{2(k)}}}, M_t^{(k)} = \zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)}}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}}, \\
f(y_t)^{(k)} &= \frac{2}{\sigma^{(k)}} t_{\nu^{(k)}}(\eta_t^{(k)}) T_{\nu^{(k)}+1}(M_t^{(k)}), \\
g_{\nu^{(k)}}(x) &= DG \left(\frac{\nu^{(k)} + 2}{2} \right) - DG \left(\frac{\nu^{(k)} + 1}{2} \right) - \ln \left(1 + \frac{x^2}{\nu^{(k)} + 1} \right) + \frac{x^2 (\nu^{(k)} + 1) - \nu^{(k)} - 1}{(\nu^{(k)} + 1)(\nu^{(k)} + 1 + x^2)}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.58) – (3.61)’de hesaplanan beklenen değerler; (3.57) eşitliğinde yerlerine yazıldığında, $E(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)})$ olacak şekilde amaç fonksiyonu şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) = & \frac{T\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{4t}^{(k)} - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \\
& - \frac{T}{2} \ln(\kappa^2) - \sum_{t=p+1}^N \frac{\alpha^2 t_{3t}^{(k)}}{2\kappa^2} \\
& - \sum_{t=p+1}^N \frac{t_{1t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \\
& + \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha t_{2t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta})}{\kappa^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

ii) *CM adımı* $Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)})$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla $(k + 1)$ 'inci parametre tahminleri hesaplanır.

1. $Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)})$ fonksiyonunun, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevinin sıfıra eşitlenmesiyle $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = & \left(\sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B)\mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B)\mathbf{x}_t^T \right)^{-1} \\
& \times \left(\sum_{t=p+1}^N \left(t_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B)y_t - \alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)} \right) \Phi^{(k)}(B)\mathbf{x}_t \right)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

2. $Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)})$ fonksiyonunun, $\boldsymbol{\phi}$ parametresine göre türevinin sıfıra eşitlenmesiyle, $\boldsymbol{\phi}^{(k+1)}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\boldsymbol{\phi}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \left(\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\beta}), + \alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)} \right) \tag{3.64}$$

Burada,

$$R_0(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, R(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-1} e_{t-2} \dots & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3. $Q(\Theta; \Theta^{(k)})$ fonksiyonunun, α parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\alpha^{(k+1)}$ için tahmin edici şu şekilde olur:

$$\alpha^{2(k+1)} = \frac{\sum_{t=p+1}^N t_{2t}^{(k)} (\Phi^{(k)}(B)y_t - \Phi^{(k)}(B)x_t^T \beta^{(k)})^2}{\sum_{t=p+1}^N t_{3t}^{(k)}} \quad (3.65)$$

4. $Q(\Theta; \Theta^{(k)})$ fonksiyonunun, κ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\kappa^{2(k+1)} = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} (\Phi^{(k)}(B)y_t - \Phi^{(k)}(B)x_t^T \beta^{(k)})^2 - 2\alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)} (\Phi^{(k)}(B)y_t - \Phi^{(k)}(B)x_t^T \beta^{(k)}) + \alpha^{2(k)} t_{3t}^{(k)} \right) \quad (3.66)$$

5. Buradan $\alpha^{2(k+1)}$ ve $\kappa^{2(k+1)}$ tahmin edicileri kullanılarak, $\sigma^{2(k+1)}$ aşağıdaki gibi elde edilir

$$\sigma^{2(k+1)} = \kappa^{2(k+1)} + \alpha^{2(k+1)} \quad (3.67)$$

6. $Q(\Theta; \Theta^{(k)})$ fonksiyonunun δ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek şu denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
& n\delta^2(1-\delta^2)\delta^2 \left(\sum_{t=p+1}^N \frac{t_{1t}^{(k)}(\Phi^{(k)}(B)y_t - \Phi^{(k)}(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})^2}{\sigma^{(k)}} + \sum_{t=p+1}^N t_{3t}^{(k)} \right) \\
& + (1+\delta^2) \sum_{t=p+1}^N \frac{t_{2t}^{(k)}(\Phi^{(k)}(B)y_t - \Phi^{(k)}(B)\mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\sigma^{(k)}} = 0
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Bu denklem, ζ 'ya göre çözülerek $\zeta^{(k+1)}$ elde edilir. $\zeta^{(k+1)}$ tahmin edicisinin daha kolay elde edilmesi için,

$$\zeta^{(k+1)} = \hat{\delta}^{(k+1)} / (1 - \delta^{2(k+1)})^{-1/2} \tag{3.69}$$

olarak da hesaplanabilir. Burada $\delta^{(k+1)} = \alpha^{2(k+1)} / \sigma^{2(k+1)}$ 'dir.

7. Bu çalışmada, serbestlik derecesi (ν) robustluğu sağlamak için bilinen olarak varsayılmıştır. Fakat istenirse, ν parametresinin $(k+1)$ 'inci adımdaki denklemi aşağıdaki eşitliğin çözümünden elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)})}{\partial \nu} &= \frac{T}{2} \left(\ln \left(\frac{\nu}{2} \right) + 1 - \frac{\Gamma' \left(\frac{\nu}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{4t}^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \\
&= \ln \left(\frac{\nu}{2} \right) + 1 - DG \left(\frac{\nu}{2} \right) + \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (t_{4t}^{(k)} - t_{1t}^{(k)}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

iii) Bu adımlar, yakınsaklık kriteri $\|\boldsymbol{\Theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\Theta}^{(k)}\| < \varepsilon$ sağlanana kadar tekrar edilir.

3.3 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, sonlu örnek çapı için çarpık normal ve çarpık t dağılımlarına dayalı otoregresif hata terimli regresyon modelleri için simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlar verilecektir.

Simülasyon tasarımı. Simülasyonda kullanılacak otoregresif hata terimli regresyon modeli için açıklayıcı değişkenler, standart normal dağılım kullanılarak üretilmiştir ($x_t \sim N(0,1)$). Modele ait gerçek parametre değerleri; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)' = (3, 5, 2)'$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)' = (1.2, -0.7)'$ ve $\sigma^2 = 1$ olarak ele alınmıştır. Bu model kurgulanırken, otoregresif model parametreleri, modelin durağanlığını sağlayacak şekilde belirlenmiştir. Hata terimi a_t ; burada kullanılan dört farklı dağılım varsayımı için dört farklı durum altında, ayrı ayrı üretilmiş ve modeller buna göre oluşturulmuştur. Açıklanan değişken y_t ise $\Phi(B)y_t = \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} + a_t$ modeli kullanılarak elde edilmiştir. Bu simülasyonda örnek çapları: 25, 50 ve 100 olarak alınmıştır. Simülasyon sonuçları 100 defa tekrar edilmiştir. Tahmin edilen parametrelere ait %95 güven aralıkları, EK1'de verilen kısmi türevler yardımıyla gözlenen Fisher bilgi matrislerinden elde edilen standart hatalar kullanılarak hesaplanmıştır.

Simülasyon durumları. Bu kısımda, dört farklı hata dağılımı varsayımı altında hata terimleri üretilerek yine dört farklı dağılım varsayımı altında yapılan parametre tahminlerinin performanslarının değerlendirilmesi için simülasyon senaryoları oluşturulmuştur. Son simülasyon durumunda ise veride kontaminasyon olması durumunda, parametre tahminlerinin performansları incelenmiştir.

Durum I: $a_t \sim N(0,1)$

Durum II: $a_t \sim t_v(0,1)$

Durum III: $a_t \sim SN(\zeta = 0.2, 0, 1)$

Durum IV: $a_t \sim St_3(\zeta = 0.2, 0, 1)$

Durum V: $a_t \sim 0.95N(0, 1) + 0.05N(0, 9)$

Performans Ölçüleri. Farklı dağılımlardan elde edilen parametre tahminlerinin performanslarını kıyaslamak için her bir parametre tahminine ait HKO ve Yan değerleri hesaplanmış; karşılaştırma esnasında HKO ve Yan değerleri en küçük olan parametre tahminlerinin en iyi olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Aşağıda formülleri verilen bu değerler, 100 simülasyon tekrarı sonucu elde edilmiştir:

$$\widehat{HKO}(\hat{\beta}) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\beta}_i - \beta)^2, \widehat{Yan}(\hat{\beta}) = \bar{\beta} - \beta,$$

$$\widehat{HKO}(\hat{\phi}) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\phi}_i - \phi)^2, \widehat{Yan}(\hat{\phi}) = \bar{\phi} - \phi,$$

$$\widehat{HKO}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)^2, \widehat{Yan}(\hat{\sigma}^2) = \overline{\sigma^2} - \sigma^2,$$

$$\widehat{HKO}(\hat{\zeta}^2) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\zeta}_i - \zeta)^2, \widehat{Yan}(\hat{\zeta}) = \bar{\zeta} - \zeta,$$

Burada, $\bar{\beta} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \hat{\beta}_i$, $\bar{\phi} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \hat{\phi}_i$, $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \hat{\sigma}_i^2$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \hat{\zeta}_i$ şeklindedir.

Simülasyon çalışması sırasında; t ve çarpık t dağılımlarına ait serbestlik derecesi olan ν parametresi, 3 olarak sabitlenmiştir. Serbestlik derecesi parametresinin, tahmin edilmek yerine sabit alınması; parametre tahminlerinin dayanıklılığını garantilemektedir (Lange vd., 1989).

Simülasyon sonuçları. Beş farklı senaryo ve üç farklı örnek çapı için elde edilen simülasyon sonuçları, Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'te bir arada gösterilmiştir. Çizelge 3.3; kullanılan dört farklı dağılım varsayımı altında üretilen hata terimleri ile oluşturulan otoregresif hata terimli regresyon modelini, yine dört farklı dağılım varsayımı ile elde edilmiş olan parametre tahmin yöntemleri ile elde edilen parametre tahminlerinin sonuçlarını göstermektedir. Çizelge 3.3'e göre; aykırı değer olmadığı durumda ve model hataları normal dağılımdan üretildiğinde, normal dağılımdan ve t dağılımından elde edilen sonuçlar, birbirine oldukça yakın performanslar göstermişlerdir. Hata terimi kalın kuyruklu t dağılımından üretildiğinde ise t dağılımından elde edilen parametre tahmin edicilerine ait HKO ve Yan değerleri; diğer tahmin edicilerden daha düşük olduğu için t

dağılımından elde edilen tahmin ediciler, en etkin tahmin ediciler olmuştur. Diğer hata varsayımları durumları için de benzer sonuçlar söz konusudur. Yani hata teriminin dağılımı ve parametre tahmini aynı dağılımdan geldiği durum, en iyi sonucu veren duruma karşılık gelmektedir. Çizelge 3.4’te, %5 kontaminasyon olan durum için elde edilen sonuçlar görülmektedir. Buna göre t ve çarpık t dağılımları kullanılarak elde edilen parametre tahmin edicilerinin, normal ve çarpık normal dağılımdan elde edilen tahmin edicilere göre daha etkin sonuçlar verdiği ve kontaminasyondan etkilenmediği görülmektedir.



Çizelge 3.3 Aykırı değer olmayan durum altında parametre tahmin sonuçları

		$a_t \sim N(0,1)$				$a_t \sim t_v(0,1)$				$a_t \sim SN(\zeta = 0.2, 0, 1)$				$a_t \sim St_3(\zeta = 0.2, 0, 1)$				
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	
25	β_1	$\hat{\beta}_1$	3.0106	3.0036	3.0127	3.0190	2.9991	3.0006	3.0002	3.0259	3.0027	2.9998	3.0045	2.9994	2.9918	2.9947	2.9922	3.0028
		YAN	0.1003	0.1043	0.1064	0.1096	0.1865	0.1499	0.1897	0.1698	0.1114	0.1149	0.1148	0.1226	0.1760	0.1778	0.1800	0.1499
		HKO	0.0183	0.0193	0.0198	0.0206	0.0595	0.0396	0.0620	0.0516	0.0193	0.0206	0.0201	0.0233	0.0540	0.0518	0.0559	0.0374
		SE	0.0314	0.0319	0.8474	0.0444	0.0282	0.0305	0.2236	0.0475	0.0258	0.0264	0.1227	0.0362	0.0380	0.0379	0.2015	0.0345
		AS	2.9446	2.9366	1.2323	2.9258	2.9398	2.9364	2.5304	2.9261	2.9484	2.9443	2.7467	2.9233	2.9120	2.9152	2.5687	2.9304
	β_2	ÜS	3.0767	3.0705	4.7931	3.1123	3.0585	3.0647	3.4699	3.1257	3.0569	3.0553	3.2624	3.0754	3.0716	3.0742	3.4156	3.0752
		$\hat{\beta}_2$	5.0047	4.9999	5.0057	5.0115	4.9472	5.0073	4.9445	4.9538	4.9979	4.9987	4.9979	4.9952	4.9815	4.9820	4.9820	4.9943
		YAN	0.1230	0.1235	0.1251	0.1339	0.1734	0.1484	0.1743	0.1463	0.1022	0.1036	0.1046	0.1138	0.1750	0.1753	0.1801	0.1409
		HKO	0.0233	0.0226	0.0238	0.0290	0.0529	0.0390	0.0545	0.0404	0.0172	0.0174	0.0183	0.0230	0.0519	0.0539	0.0528	0.0326
		SE	0.0301	0.0306	0.2735	0.0369	0.0206	0.0423	0.0945	0.0219	0.0342	0.0336	0.1676	0.0385	0.0277	0.0294	0.1451	0.0254
	β_3	AS	4.9414	4.9356	4.4312	4.9340	4.9039	4.9183	4.7459	4.9079	4.9260	4.9281	4.6458	4.9143	4.9233	4.9202	4.6771	4.9409
		ÜS	5.0680	5.0642	5.5803	5.0891	4.9904	5.0962	5.1431	4.9998	5.0698	5.0693	5.3499	5.0762	5.0398	5.0438	5.2868	5.0476
		$\hat{\beta}_3$	2.0053	2.0009	2.0053	2.0016	1.9890	1.9991	1.9844	1.9827	1.9922	1.9891	1.9906	1.9906	2.0085	2.0105	2.0069	2.0000
		YAN	0.1091	0.1154	0.1109	0.1128	0.1578	0.1508	0.1609	0.1459	0.1074	0.1094	0.1101	0.1155	0.1854	0.1846	0.1906	0.1442
		HKO	0.0182	0.0206	0.0184	0.0188	0.0476	0.0391	0.0494	0.0394	0.0189	0.0193	0.0201	0.0220	0.0672	0.0668	0.0705	0.0369
	ϕ_1	SE	0.0310	0.0319	1.1518	0.0516	0.0216	0.0274	0.1450	0.0284	0.0269	0.0277	0.1252	0.0323	0.0448	0.0467	0.2366	0.0486
		AS	1.9401	1.9340	-0.4145	1.8931	1.9436	1.9414	1.6799	1.9231	1.9358	1.9310	1.7274	1.9228	1.9143	1.9123	1.5099	1.8978
		ÜS	2.0705	2.0678	4.4251	2.1101	2.0344	2.0567	2.2890	2.0422	2.0487	2.0472	2.2537	2.0585	2.1027	2.1086	2.5040	2.1022
		$\hat{\phi}_1$	1.1484	1.1517	1.2007	1.1966	1.1628	1.1380	1.2311	1.2452	1.1610	1.1661	1.2222	1.2302	1.1598	1.1582	1.2166	1.2121
		YAN	0.1125	0.1073	0.1103	0.1184	0.1337	0.1344	0.1354	0.1308	0.1245	0.1247	0.1172	0.1341	0.1474	0.1497	0.1498	0.1346
		HKO	0.0235	0.0216	0.0190	0.0214	0.0288	0.0318	0.0277	0.0286	0.0275	0.0279	0.0241	0.0297	0.0350	0.0363	0.0334	0.0288
		SE	0.0510	0.0524	1.9756	0.0852	0.0339	0.0167	0.2272	0.0554	0.0289	0.0288	0.1415	0.0376	0.0179	0.0195	0.1032	0.0241
		AS	1.0483	1.0491	-2.6714	1.0297	1.0964	1.1052	0.7858	1.1366	1.1043	1.1096	0.9448	1.1565	1.1246	1.1200	1.0144	1.1648
		ÜS	1.2484	1.2544	5.0727	1.3636	1.2292	1.1708	1.6763	1.3538	1.2177	1.2225	1.4995	1.3039	1.1949	1.1964	1.4188	1.2594

Çizelge 3.3 Aykırı değer olmayan durum altında parametre tahmin sonuçları (devam)

N		$a_t \sim N(0,1)$				$a_t \sim t_v(0,1)$				$a_t \sim SN(\zeta = 0.2, 0, 1)$				$a_t \sim St_3(\zeta = 0.2, 0, 1)$			
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t
25	ϕ_2	-0.6595	-0.6629	-0.6805	-0.6707	-0.6824	-0.6738	-0.7202	-0.7129	-0.6663	-0.6677	-0.6904	-0.6811	-0.6631	-0.6652	-0.6898	-0.6785
	YAN	0.1104	0.1174	0.1176	0.1365	0.1186	0.1147	0.1152	0.1147	0.1328	0.1318	0.1292	0.1495	0.1330	0.1367	0.1393	0.1238
	HKO	0.0240	0.0227	0.0241	0.0316	0.0234	0.0273	0.0199	0.0205	0.0292	0.0293	0.0272	0.0347	0.0329	0.0354	0.0343	0.0298
	SE	0.0569	0.0587	1.5393	0.0923	0.0339	0.0224	0.2397	0.0616	0.0295	0.0302	0.1459	0.0397	0.0180	0.0181	0.0985	0.0163
	AS	-0.7710	-0.7781	-3.6974	-0.8515	-0.7487	-0.7177	-1.1900	-0.8337	-0.7242	-0.7268	-0.9764	-0.7589	-0.6984	-0.7006	-0.8829	-0.7104
	ÜS	-0.5481	-0.5478	2.3364	-0.4898	-0.6160	-0.6299	-0.2504	-0.5921	-0.6084	-0.6085	-0.4044	-0.6032	-0.6279	-0.6299	-0.4966	-0.6466
	δ	0.9321	0.9968	0.8951	0.9279	0.7872	0.9153	0.7790	0.8184	0.8981	0.9511	0.9081	0.8851	1.4484	1.5113	1.4333	0.9798
	YAN	0.1349	0.1303	0.1450	0.0926	0.3568	0.1370	0.3585	0.2323	0.1483	0.1272	0.1363	0.1180	0.4962	0.5418	0.4754	0.0782
	HKO	0.0293	0.0261	0.0342	0.0118	0.2875	0.0286	0.2817	0.0758	0.0327	0.0244	0.0282	0.0181	0.5390	0.6275	0.5057	0.0107
	SE	0.0287	0.0375	0.4573	0.0452	0.0242	0.0129	0.1919	0.0371	0.0276	0.0247	0.1109	0.0304	0.0445	0.0291	0.1506	0.0316
	AS	0.7467	0.7721	0.7317	0.7450	0.6862	0.7399	0.6826	0.6997	0.7329	0.7542	0.7370	0.7276	0.9308	0.9508	0.5259	0.7656
	ÜS	1.3664	1.4131	1.3390	1.3633	1.4557	1.3541	1.4492	1.4804	1.3413	1.3803	1.3488	1.3316	1.7033	1.7400	1.6945	1.4010
	ζ	-	-	0.0058	-0.0091	-	-	-0.0214	-0.0063	-	-	0.2134	0.1379	-	-	0.1243	0.1604
	YAN	-	-	0.2703	0.2246	-	-	0.2759	0.3220	-	-	0.2429	0.1586	-	-	0.1716	0.1934
	HKO	-	-	0.1013	0.0692	-	-	0.1139	0.1546	-	-	0.0964	0.0421	-	-	0.0543	0.0799
	SE	-	-	0.4573	0.0719	-	-	0.1919	0.0792	-	-	0.1109	0.0569	-	-	0.1506	0.0584
	AS	-	-	-0.5897	-0.1499	-	-	-0.5861	-0.1615	-	-	-0.2341	0.0265	-	-	-0.2563	0.0461
	ÜS	-	-	0.6012	0.1318	-	-	0.5432	0.1489	-	-	0.6609	0.2494	-	-	0.5050	0.2748

Çizelge 3.3 Aykırı değer olmayan durum altında parametre tahmin sonuçları (devam)

N		$a_t \sim N(0,1)$				$a_t \sim t_v(0,1)$				$a_t \sim SN(\zeta = 0.2, 0, 1)$				$a_t \sim St_3(\zeta = 0.2, 0, 1)$				
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	
50	β_1	$\hat{\beta}_1$	3.0035	3.0045	3.0037	2.9985	2.9862	3.0019	2.9865	3.0017	2.9941	2.9947	2.9943	2.9945	3.0102	3.0142	3.0096	2.9937
		YAN	0.0752	0.0773	0.0754	0.0757	0.1141	0.0903	0.1150	0.0902	0.0744	0.0737	0.0753	0.0784	0.1133	0.1176	0.1134	0.0918
		HKO	0.0091	0.0097	0.0092	0.0095	0.0291	0.0142	0.0289	0.0128	0.0094	0.0092	0.0096	0.0105	0.0210	0.0229	0.0211	0.0133
		SE	0.0130	0.0136	0.0876	0.0167	0.0095	0.0088	0.0689	0.0187	0.0126	0.0129	0.0862	0.0148	0.0189	0.0179	0.1459	0.0151
		AS	2.9773	2.9772	2.8270	2.9647	2.9671	2.9843	2.8477	2.9640	2.9687	2.9687	2.8205	2.9646	2.9720	2.9782	2.7155	2.9633
		ÜS	3.0298	3.0319	3.1803	3.0322	3.0052	3.0196	3.1254	3.0395	3.0195	3.0206	3.1681	3.0243	3.0483	3.0502	3.3037	3.0242
	β_2	$\hat{\beta}_2$	4.9960	4.9968	4.9962	4.9983	4.9816	4.9998	4.9819	4.9824	5.0008	5.0022	5.0005	5.0004	5.0066	5.0076	5.0063	5.0006
		YAN	0.0708	0.0733	0.0712	0.0794	0.1245	0.0788	0.1257	0.1030	0.0763	0.0790	0.0771	0.0780	0.1106	0.1089	0.1105	0.0846
		HKO	0.0079	0.0080	0.0080	0.0093	0.0267	0.0100	0.0271	0.0183	0.0090	0.0096	0.0092	0.0099	0.0200	0.0195	0.0201	0.0116
		SE	0.0110	0.0116	0.0769	0.0155	0.0100	0.0127	0.0723	0.0153	0.0145	0.0144	0.0979	0.0158	0.0221	0.0216	0.1578	0.0189
		AS	4.9738	4.9733	4.8412	4.9671	4.9614	4.9742	4.8361	4.9515	4.9717	4.9731	4.8032	4.9686	4.9621	4.9640	4.6880	4.9625
		ÜS	5.0183	5.0202	5.1512	5.0295	5.0017	5.0254	5.1277	5.0132	5.0300	5.0312	5.1979	5.0321	5.0510	5.0512	5.3245	5.0387
	β_3	$\hat{\beta}_3$	1.9906	1.9909	1.9898	1.9907	1.9617	2.0098	1.9614	1.9803	2.0073	2.0092	2.0065	2.0042	2.0078	2.0090	2.0078	2.0045
		YAN	0.0739	0.0746	0.0752	0.0791	0.1179	0.0894	0.1184	0.1068	0.0670	0.0714	0.0672	0.0743	0.1157	0.1179	0.1156	0.0930
		HKO	0.0087	0.0089	0.0091	0.0099	0.0217	0.0134	0.0222	0.0171	0.0075	0.0081	0.0077	0.0092	0.0210	0.0226	0.0210	0.0138
		SE	0.0116	0.0120	0.0794	0.0150	0.0121	0.0140	0.0825	0.0259	0.0130	0.0133	0.1065	0.0169	0.0223	0.0213	0.1507	0.0175
		AS	1.9672	1.9667	1.8297	1.9605	1.9373	1.9816	1.7951	1.9282	1.9811	1.9823	1.7918	1.9702	1.9629	1.9659	1.7039	1.9692
		ÜS	2.0141	2.0152	2.1499	2.0210	1.9862	2.0379	2.1278	2.0325	2.0335	2.0361	2.2213	2.0383	2.0526	2.0520	2.3118	2.0398
	ϕ_1	$\hat{\phi}_1$	1.1757	1.1777	1.2033	1.2109	1.1984	1.1937	1.2244	1.2174	1.1811	1.1842	1.2136	1.2178	1.1855	1.1857	1.2112	1.2143
		YAN	0.0939	0.0941	0.0881	0.0899	0.0822	0.0638	0.0846	0.0705	0.0899	0.0932	0.0899	0.0939	0.0802	0.0815	0.0830	0.0712
		HKO	0.0158	0.0159	0.0133	0.0128	0.0112	0.0067	0.0108	0.0077	0.0128	0.0133	0.0119	0.0137	0.0106	0.0111	0.0108	0.0079
		SE	0.0126	0.0128	0.0885	0.0163	0.0084	0.0097	0.0641	0.0176	0.0122	0.0122	0.0969	0.0151	0.0181	0.0177	0.1430	0.0160
		AS	1.1510	1.1526	1.0299	1.1790	1.1819	1.1746	1.0988	1.1829	1.1572	1.1603	1.0236	1.1883	1.1500	1.1509	0.9310	1.1830
		ÜS	1.2003	1.2028	1.3767	1.2427	1.2150	1.2128	1.3499	1.2519	1.2050	1.2082	1.4035	1.2473	1.2210	1.2205	1.4915	1.2456

Çizelge 3.3 Aykırı değer olmayan durum altında parametre tahmin sonuçları (devam)

N		$a_t \sim N(0,1)$				$a_t \sim t_v(0,1)$				$a_t \sim SN(\zeta = 0.2, 0, 1)$				$a_t \sim St_3(\zeta = 0.2, 0, 1)$			
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t
50	$\hat{\phi}_2$	-0.6712	-0.6733	-0.6849	-0.6849	-0.6958	-0.6817	-0.7095	-0.6990	-0.6653	-0.6680	-0.6720	-0.6656	-0.6810	-0.6823	-0.6889	-0.6810
	YAN	0.0972	0.1005	0.0934	0.0926	0.0831	0.0705	0.0862	0.0790	0.0994	0.1020	0.1002	0.1070	0.0810	0.0808	0.0814	0.0724
	HKO	0.0167	0.0170	0.0157	0.0155	0.0116	0.0085	0.0122	0.0105	0.0164	0.0169	0.0169	0.0195	0.0105	0.0104	0.0106	0.0085
	SE	0.0128	0.0133	0.0911	0.0174	0.0086	0.0096	0.0660	0.0180	0.0123	0.0126	0.0933	0.0155	0.0181	0.0172	0.1350	0.0140
	AS	-0.6963	-0.6994	-0.8635	-0.7189	-0.7127	-0.7004	-0.8389	-0.7344	-0.6894	-0.6926	-0.8548	-0.6960	-0.7165	-0.7159	-0.9535	-0.7085
	ÜS	-0.6461	-0.6472	-0.5062	-0.6508	-0.6789	-0.6630	-0.5800	-0.6637	-0.6412	-0.6434	-0.4892	-0.6353	-0.6454	-0.6487	-0.4242	-0.6535
	$\hat{\sigma}$	0.9456	0.9956	0.9270	0.9464	0.8715	0.9570	0.8672	0.9395	0.9422	0.9920	0.9457	0.9026	1.5039	1.5691	1.4926	0.9948
	YAN	0.0810	0.0744	0.0856	0.0643	0.2329	0.0869	0.2344	0.1318	0.0963	0.0843	0.0913	0.0985	0.5080	0.5721	0.4965	0.0432
	HKO	0.0113	0.0089	0.0134	0.0062	0.0883	0.0118	0.0888	0.0262	0.0141	0.0110	0.0128	0.0118	0.3956	0.4776	0.3799	0.0031
	SE	0.0139	0.0137	0.0856	0.0158	0.0128	0.0082	0.0357	0.0108	0.0139	0.0125	0.0963	0.0150	0.0222	0.0349	0.2149	0.0163
	AS	0.8095	0.8306	0.8015	0.8099	0.7771	0.8144	0.7752	0.8069	0.8080	0.8292	0.8096	0.7909	1.0209	1.0428	1.0170	0.8303
	ÜS	1.2181	1.2498	1.2060	1.2186	1.1693	1.2254	1.1664	1.2141	1.2158	1.2476	1.2181	1.1900	1.5361	1.5690	1.5303	1.2493
	$\hat{\zeta}$	-	-	0.0086	0.0038	-	-	0.0229	0.0447	-	-	0.2117	0.1664	-	-	0.0902	0.1669
	YAN	-	-	0.2196	0.2014	-	-	0.1832	0.2062	-	-	0.1292	0.1058	-	-	0.1295	0.1361
	HKO	-	-	0.0682	0.0562	-	-	0.0428	0.0646	-	-	0.0271	0.0189	-	-	0.0237	0.0319
	SE	-	-	0.0856	0.0311	-	-	0.0357	0.0231	-	-	0.0963	0.0270	-	-	0.2149	0.0271
	AS	-	-	-0.3175	-0.0572	-	-	-0.1371	-0.0005	-	-	-0.1110	0.1136	-	-	-0.3343	0.1139
	ÜS	-	-	0.3346	0.0649	-	-	0.1828	0.0899	-	-	0.5345	0.2192	-	-	0.5147	0.2200

Çizelge 3.3 Aykırı değer olmayan durum altında parametre tahmin sonuçları (devam)

N		$a_t \sim N(0,1)$				$a_t \sim t_v(0,1)$				$a_t \sim SN(\zeta = 0.2, 0, 1)$				$a_t \sim St_3(\zeta = 0.2, 0, 1)$			
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t
100	β_1	3.0019	3.0023	3.0018	3.0044	2.9889	2.9973	2.9888	2.9991	3.0027	3.0022	3.0026	3.0029	2.9972	2.9958	2.9973	3.0027
	YAN	0.0529	0.0538	0.0531	0.0546	0.0771	0.0644	0.0769	0.0656	0.0502	0.0517	0.0501	0.0524	0.0836	0.0844	0.0838	0.0571
	HKO	0.0042	0.0043	0.0043	0.0045	0.0092	0.0063	0.0092	0.0074	0.0038	0.0041	0.0038	0.0042	0.0109	0.0111	0.0109	0.0050
	SE	0.0064	0.0063	0.0628	0.0070	0.0056	0.0056	0.0552	0.0068	0.0065	0.0065	0.0638	0.0071	0.0101	0.0099	0.1009	0.0079
	AS	2.9892	2.9898	2.8771	2.9904	2.9777	2.9863	2.8792	2.9856	2.9897	2.9893	2.8758	2.9889	2.9772	2.9760	2.7970	2.9871
	ÜS	3.0146	3.0148	3.1264	3.0183	3.0001	3.0084	3.0984	3.0126	3.0157	3.0151	3.1293	3.0169	3.0173	3.0155	3.1976	3.0183
	β_2	5.0017	5.0013	5.0019	5.0015	5.0078	5.0112	5.0078	4.9973	5.0073	5.0074	5.0071	5.0084	5.0007	4.9998	5.0008	4.9985
	YAN	0.0510	0.0533	0.0510	0.0551	0.0850	0.0646	0.0848	0.0690	0.0464	0.0467	0.0468	0.0482	0.0805	0.0855	0.0805	0.0528
	HKO	0.0040	0.0042	0.0040	0.0047	0.0123	0.0061	0.0122	0.0073	0.0035	0.0036	0.0036	0.0039	0.0146	0.0169	0.0145	0.0049
	SE	0.0058	0.0057	0.0569	0.0063	0.0061	0.0060	0.0670	0.0085	0.0056	0.0056	0.0558	0.0062	0.0114	0.0115	0.1203	0.0091
	AS	4.9901	4.9899	4.8889	4.9890	4.9956	4.9994	4.8748	4.9804	4.9961	4.9963	4.8963	4.9962	4.9782	4.9770	4.7619	4.9804
	ÜS	5.0132	5.0127	5.1148	5.0139	5.0199	5.0231	5.1408	5.0142	5.0184	5.0184	5.1179	5.0207	5.0232	5.0225	5.2397	5.0167
	β_3	1.9985	1.9993	1.9983	1.9988	1.9950	1.9983	1.9946	2.0012	2.0017	2.0014	2.0014	2.0004	1.9947	1.9955	1.9945	1.9976
	YAN	0.0519	0.0530	0.0527	0.0552	0.0938	0.0567	0.0939	0.0685	0.0491	0.0502	0.0492	0.0500	0.0816	0.0864	0.0810	0.0596
	HKO	0.0044	0.0045	0.0045	0.0048	0.0157	0.0055	0.0158	0.0067	0.0040	0.0042	0.0040	0.0041	0.0117	0.0131	0.0117	0.0060
	SE	0.0060	0.0059	0.0589	0.0066	0.0066	0.0059	0.0652	0.0080	0.0063	0.0063	0.0630	0.0070	0.0105	0.0101	0.1101	0.0079
	AS	1.9866	1.9875	1.8814	1.9858	1.9820	1.9865	1.8651	1.9854	1.9893	1.9890	1.8764	1.9865	1.9737	1.9754	1.7759	1.9819
	ÜS	2.0105	2.0111	2.1152	2.0119	2.0080	2.0101	2.1242	2.0170	2.0141	2.0139	2.1264	2.0144	2.0156	2.0155	2.2130	2.0133
	ϕ_1	1.1713	1.1741	1.1853	1.1874	1.1884	1.1825	1.2015	1.2004	1.1865	1.1885	1.2060	1.2140	1.1910	1.1912	1.2071	1.2100
	YAN	0.0717	0.0713	0.0696	0.0703	0.0557	0.0497	0.0565	0.0497	0.0617	0.0622	0.0615	0.0664	0.0580	0.0587	0.0578	0.0463
	HKO	0.0080	0.0077	0.0073	0.0077	0.0051	0.0040	0.0049	0.0040	0.0059	0.0061	0.0057	0.0069	0.0052	0.0056	0.0049	0.0036
	SE	0.0086	0.0085	0.0843	0.0096	0.0056	0.0049	0.0597	0.0069	0.0075	0.0073	0.0742	0.0082	0.0072	0.0071	0.0771	0.0058
	AS	1.1545	1.1575	1.0200	1.1686	1.1774	1.1730	1.0844	1.1869	1.1719	1.1741	1.0606	1.1980	1.1769	1.1772	1.0560	1.1988
	ÜS	1.1881	1.1907	1.3506	1.2062	1.1993	1.1921	1.3185	1.2138	1.2011	1.2028	1.3513	1.2301	1.2050	1.2052	1.3582	1.2213

Çizelge 3.3 Aykırı değer olmayan durum altında parametre tahmin sonuçları (devam)

N		$a_t \sim N(0,1)$				$a_t \sim t_v(0,1)$				$a_t \sim SN(\zeta = 0.2, 0, 1)$				$a_t \sim St_3(\zeta = 0.2, 0, 1)$			
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t
100	$\hat{\phi}_2$	-0.6704	-0.6714	-0.6767	-0.6744	-0.6988	-0.6828	-0.7048	-0.6941	-0.6716	-0.6737	-0.6713	-0.6700	-0.6831	-0.6832	-0.6865	-0.6856
	YAN	0.0696	0.0667	0.0676	0.0710	0.0546	0.0502	0.0567	0.0483	0.0655	0.0655	0.0663	0.0717	0.0592	0.0603	0.0595	0.0506
	HKO	0.0075	0.0068	0.0071	0.0080	0.0046	0.0039	0.0047	0.0042	0.0067	0.0069	0.0069	0.0079	0.0059	0.0062	0.0060	0.0043
	SE	0.0086	0.0085	0.0848	0.0099	0.0057	0.0049	0.0595	0.0070	0.0075	0.0075	0.0756	0.0087	0.0072	0.0069	0.0793	0.0052
	AS	-0.6872	-0.6882	-0.8429	-0.6938	-0.7099	-0.6923	-0.8215	-0.7079	-0.6862	-0.6884	-0.8194	-0.6870	-0.6972	-0.6967	-0.8418	-0.6957
	ÜS	-0.6536	-0.6547	-0.5105	-0.6551	-0.6877	-0.6733	-0.5881	-0.6803	-0.6569	-0.6590	-0.5231	-0.6530	-0.6689	-0.6697	-0.5312	-0.6755
	$\hat{\sigma}$	0.9701	1.0165	0.9595	0.9537	0.9457	0.9731	0.9420	0.9828	0.9756	1.0210	0.9775	0.9183	1.6250	1.6900	1.6144	1.0049
	YAN	0.0581	0.0503	0.0608	0.0567	0.1737	0.0543	0.1740	0.0883	0.0627	0.0614	0.0597	0.0818	0.6250	0.6900	0.6144	0.0371
	HKO	0.0049	0.0038	0.0055	0.0042	0.0699	0.0045	0.0695	0.0127	0.0063	0.0061	0.0057	0.0078	0.5637	0.6906	0.5473	0.0022
	SE	0.0070	0.0089	0.0772	0.0094	0.0068	0.0038	0.0540	0.0086	0.0070	0.0078	0.0705	0.0086	0.0117	0.0121	0.1182	0.0079
	AS	0.8637	0.8841	0.8590	0.8564	0.8528	0.8651	0.8511	0.8693	0.8661	0.8861	0.8670	0.8403	1.1179	1.1400	1.1142	0.8790
	ÜS	1.1461	1.1732	1.1398	1.1363	1.1316	1.1479	1.1294	1.1535	1.1493	1.1758	1.1504	1.1150	1.4833	1.5127	1.4785	1.1664
	$\hat{\zeta}$	-	-	0.0219	0.0171	-	-	-0.0022	-0.0014	-	-	0.1986	0.1720	-	-	0.0818	0.1911
	YAN	-	-	0.1869	0.1846	-	-	0.2022	0.2204	-	-	0.0938	0.0846	-	-	0.1211	0.1049
	HKO	-	-	0.0494	0.0454	-	-	0.0468	0.0669	-	-	0.0133	0.0113	-	-	0.0189	0.0169
	SE	-	-	0.0772	0.0166	-	-	0.0540	0.0150	-	-	0.0705	0.0163	-	-	0.1182	0.0140
	AS	-	-	-0.2486	-0.0155	-	-	-0.1987	-0.0308	-	-	-0.0582	0.1401	-	-	-0.1597	0.1637
	ÜS	-	-	0.2923	0.0496	-	-	0.1943	0.0279	-	-	0.4555	0.2040	-	-	0.3233	0.2185

Çizelge 3.4 Aykırı değer altında elde edilen parametre tahmin sonuçları

		$n = 25$				$n = 50$				$n = 100$			
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t
β_1	$\hat{\beta}_1$	2.9744	2.9988	2.9896	2.9921	2.9754	2.9925	2.9736	2.9921	2.9832	2.9824	2.9835	2.9917
	YAN	0.1848	0.1159	0.2131	0.1309	0.1019	0.0783	0.1043	0.0803	0.0613	0.0493	0.0616	0.0525
	HKO	0.0635	0.0230	0.1008	0.0320	0.0168	0.0117	0.0178	0.0118	0.0062	0.0037	0.0063	0.0055
	SE	0.2324	0.0225	0.2698	0.0312	0.1239	0.0119	0.1291	0.0168	0.0688	0.0051	0.0683	0.0068
	AS	2.4861	2.9516	2.4229	2.9266	2.7256	2.9686	2.7132	2.9582	2.8465	2.9724	2.8478	2.9712
β_2	ÜS	3.4627	3.0460	3.5564	3.0576	3.2251	3.0165	3.2340	3.0261	3.1199	2.9925	3.1191	3.0112
	$\hat{\beta}_2$	4.9960	4.9746	4.9910	4.9746	4.9948	4.9990	4.9938	4.9991	4.9976	4.9967	4.9973	4.9994
	YAN	0.2110	0.1191	0.2299	0.1303	0.1138	0.0860	0.1163	0.0880	0.0628	0.0519	0.0632	0.0522
	HKO	0.0813	0.0231	0.1034	0.0273	0.0226	0.0138	0.0232	0.0140	0.0068	0.0045	0.0069	0.0049
	SE	0.2769	0.0281	0.0751	0.0389	0.1182	0.0105	0.1184	0.0126	0.0830	0.0061	0.0953	0.0126
β_3	AS	4.4142	4.9155	4.8333	4.8929	4.7564	4.9779	4.7550	4.9737	4.8328	4.9846	4.8081	4.9737
	ÜS	5.5777	5.0337	5.1487	5.0564	5.2333	5.0202	5.2327	5.0246	5.1625	5.0088	5.1865	5.0246
	$\hat{\beta}_3$	1.9800	1.9956	1.9714	1.9897	2.0111	2.0069	2.0096	2.0068	2.0026	1.9972	2.0024	2.0055
	YAN	0.2095	0.1125	0.2334	0.1266	0.1081	0.0779	0.1092	0.0789	0.0637	0.0551	0.0640	0.0590
	HKO	0.0998	0.0204	0.1243	0.0254	0.0189	0.0098	0.0189	0.0099	0.0062	0.0051	0.0062	0.0061
ϕ_1	SE	0.2546	0.0252	0.6255	0.0330	0.1370	0.0132	0.1828	0.0206	0.0900	0.0065	0.0900	0.0110
	AS	1.4451	1.9426	0.6573	1.9203	1.7348	1.9802	1.6410	1.9653	1.8238	1.9843	1.8237	1.9650
	ÜS	2.5149	2.0486	3.2855	2.0591	2.2875	2.0336	2.3781	2.0483	2.1813	2.0101	2.1811	2.0201
	$\hat{\phi}_1$	1.1076	1.1236	1.1666	1.1984	1.1664	1.1691	1.2031	1.2152	1.1568	1.1706	1.1704	1.2101
	YAN	0.2578	0.1634	0.2624	0.1620	0.1615	0.1096	0.1550	0.1011	0.1092	0.0784	0.1067	0.0911
ϕ_1	HKO	0.1253	0.0446	0.1603	0.0430	0.0422	0.0181	0.0419	0.0155	0.0192	0.0099	0.0181	0.0105
	SE	0.2978	0.0312	1.0099	0.0448	0.1797	0.0160	0.2172	0.0208	0.0654	0.0051	0.0729	0.0148
	AS	0.5238	1.0625	-0.8127	1.1106	0.8141	1.1377	0.7775	1.1744	1.0286	1.1606	1.0276	1.1514
		ÜS	1.6914	1.1847	3.1459	1.2861	1.5186	1.6288	1.2560	1.2851	1.1807	1.3132	1.2110

Çizelge 3.4 Aykırı değer altında elde edilen parametre tahmin sonuçları (devamı)

		$n = 25$				$n = 50$				$n = 100$			
		Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t	Normal	Student-t	Çarpık-normal	Çarpık-t
ϕ_2	$\hat{\phi}_2$	-0.5921	-0.6510	-0.6318	-0.6722	-0.6572	-0.6665	-0.6751	-0.6858	-0.6590	-0.6729	-0.6658	-0.6858
	YAN	0.2845	0.1375	0.2762	0.1449	0.1370	0.1046	0.1342	0.0994	0.1173	0.0865	0.1156	0.0994
	HKO	0.1587	0.0321	0.1541	0.0349	0.0304	0.0184	0.0293	0.0166	0.0220	0.0110	0.0217	0.0166
	SE	0.3218	0.0329	0.5665	0.0504	0.1831	0.0165	0.2189	0.0214	0.0669	0.0051	0.0729	0.0214
	AS	-1.2228	-0.7155	-1.7421	-0.7710	-1.0160	-0.6988	-1.1041	-0.7278	-0.7900	-0.6829	-0.8087	-0.7278
	ÜS	0.0386	-0.5866	0.4785	-0.5735	-0.2983	-0.6342	-0.2461	-0.6438	-0.5280	-0.6629	-0.5229	-0.6438
	$\hat{\sigma}$	1.6417	0.8283	1.6075	0.9256	1.2966	0.8554	1.2892	0.9330	1.2230	0.8701	1.2208	0.9330
	YAN	0.7130	0.1768	0.6745	0.0902	0.3298	0.1459	0.3213	0.0696	0.2291	0.1299	0.2266	0.0696
	HKO	1.0058	0.0419	0.9079	0.0118	0.2045	0.0262	0.1953	0.0064	0.0760	0.0199	0.0745	0.0064
	SE	0.2421	0.0120	0.7814	0.0363	0.1323	0.0110	0.3353	0.0206	0.0874	0.0029	0.0638	0.0206
	AS	0.9909	0.7039	0.9806	0.7441	0.9479	0.7699	0.9452	0.8041	0.9698	0.8180	0.9689	0.8041
	ÜS	1.8135	1.2882	1.7945	1.3617	1.4263	1.1585	1.4222	1.2099	1.2868	1.0854	1.2856	1.2099
	$\hat{\zeta}$	-	-	0.0381	0.0684	-	-	0.0006	0.0117	-	-	-0.0003	0.0117
	YAN	-	-	0.2081	0.2325	-	-	0.2148	0.2202	-	-	0.2037	0.2202
	HKO	-	-	0.0661	0.0898	-	-	0.0650	0.0700	-	-	0.0498	0.0700
	SE	-	-	0.7814	0.0684	-	-	0.3353	0.0371	-	-	0.0638	0.0371
ζ	AS	-	-	-0.5232	-0.0656	-	-	-0.6245	-0.0611	-	-	-0.1890	-0.0611
	ÜS	-	-	0.5994	0.2024	-	-	0.6256	0.0844	-	-	0.1884	0.0844

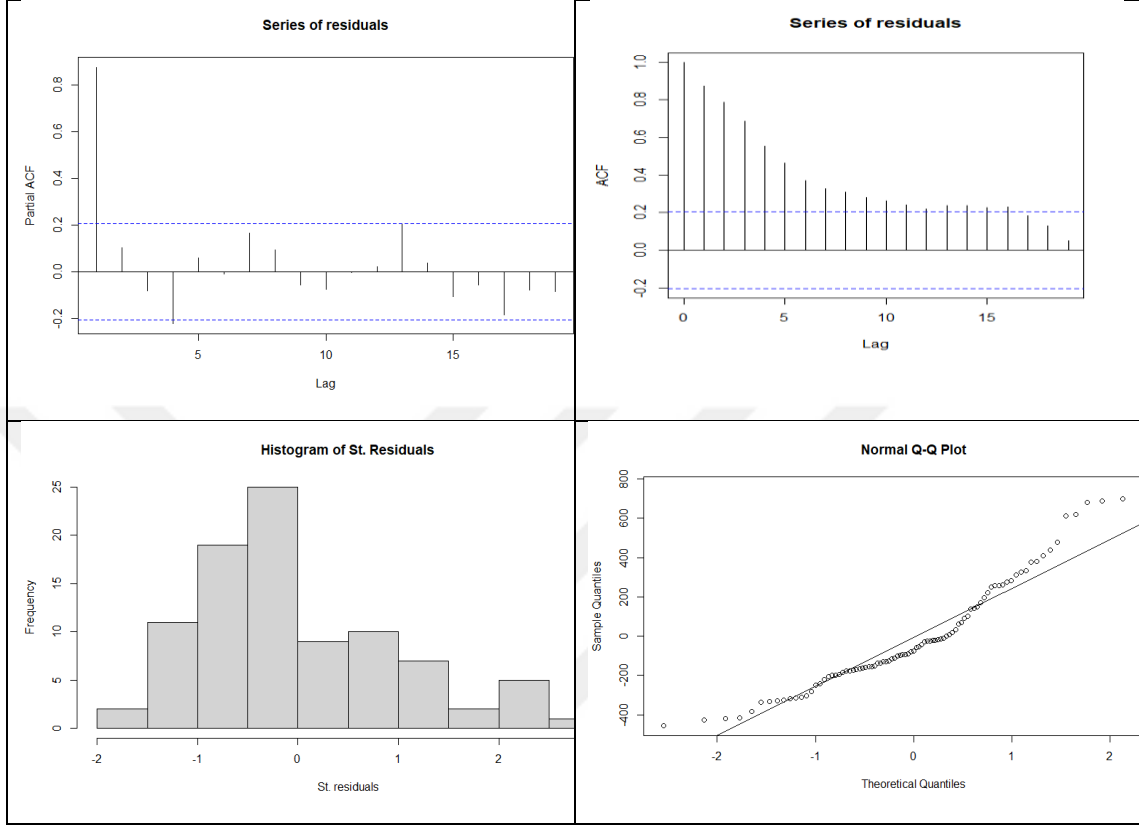
3.4 Kripto Para Verisi

Bu bölümde, önerilen tahmin edicilerin performanslarını ölçmek için gerçek bir veri seti analiz edilmiştir. Analizde, son dönemlerde oldukça dikkat çeken kripto paralara ait veriler kullanılmıştır. Kullanılan veri; Bitcoin (BTC) ve Ethereum (ETC) kripto paraların, 91 gün boyunca dolar cinsinden kapanıştaki alış değerlerinden oluşmaktadır. Bu veri seti, 2 Nisan 2017 – 23 Haziran 2017 tarihleri arasında elde edilmiştir (yahoo.finance.com). Tezdeki bu analiz, BTC para biriminin hareketlerinin ETC para biriminin hareketleri tarafından açıklanabilir olduğu iddia edilerek ortaya konulmuştur. Bu nedenle iki para birimi arasında doğrusal bir ilişki olduğu tespit edilmiş ve bu ilişkide BTC, açıklanan; ETC ise açıklayıcı değişken olarak ele alınmıştır. Veri, ilk olarak EKK yöntemi ile analiz edilip regresyon modeli parametre tahminleri, $\hat{\beta}_0 = 1708.254$ ve $\hat{\beta}_1 = 3.452$ şeklinde elde edilmiştir. Ancak yapılan sonraki incelemelerde, modele ait hata serisinin otoregresif bir yapıya ait olduğu tespit edilmiştir. Bu nedenle, Şekil 3.3'te görülen kısmî otokorelasyon fonksiyonu (PACF) ve otokorelasyon fonksiyonu (ACF) grafikleri çizdirilmiştir. Bu grafiklerden hata serisi içindeki otoregresif yapının, AR(1) şeklinde gerçekleştiği anlaşılmıştır. Bu sonuçlar göz önünde bulundurularak veri seti için şu regresyon modeli kurulmuştur:

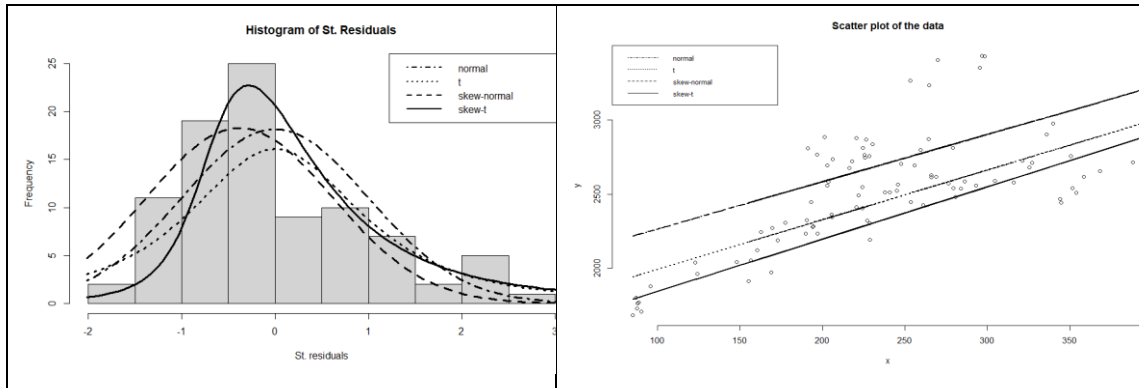
$$\Phi(B)BTC_t = \beta_0 + \beta_1(\Phi(B)ETC_t) + a_t \quad (3.70)$$

Şekil 3.3'te, hata serisine ait histogram ve Q-Q grafikleri görülmektedir. Bu grafiklerden hata teriminin kalın kuyruklu ve çarpık bir dağılıma sahip olduğu yorumu yapılabilir. Bu varsayımlar altında elde edilen veri setinin, AR(1) hata terimli ve çarpık/kalın kuyruklu çarpık dağılımlara dayalı regresyon modeli kullanarak modellenebileceği yorumu yapılabilir. Bu veri analizinde regresyon sabiti (β_0) anlamlı bulunduğu için modele dahil edilmiştir. Çarpık dağılım varsayımında; dağılımın beklenen değeri sıfırdan farklı olduğu için çarpık normal dağılımda $E(a_t) = \sqrt{2/\pi} \delta \sigma$ ve çarpık t dağılımında $E(a_t) = \sigma \delta \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}$, $\nu > 1$ terimleri, regresyon sabitine eklenerek

analizler yürütülmüştür. EM algoritmasının başlangıç değerleri olarak EKK tahmin değerleri kullanılmıştır.



Şekil 3.3 Artıklara ait PACF, ACF, histogram ve Q-Q grafikleri



Şekil 3.4 Histogram ve modellerin verilere ilişkin kestirim çizgileri

Çizelge 3.5’te; dört farklı dağılım yaklaşımıyla elde edilen parametre tahminleri, parametrelere ait standart hatalar, %95 alt ve üst güven sınırlarına ilişkin değerler ve her bir yönteme ait AIC değerleri görülmektedir. Çizelgedeki AIC değerine göre; Çarpık t yöntemi ile elde edilen modelin, diğerlerine göre veriyi daha iyi modellediği söylenebilir. Bununla birlikte elde edilen güven aralıkları arasında, çarpık t dağılımına ait parametre tahminlerinin güven aralığı diğerlerinden daha dardır. Şekil 3.4’te görülen saçılım grafiği üzerine çizdirilen regresyon doğrularından, veriyi en iyi temsil eden doğrunun çarpık t yöntemi ile elde edilen doğru olduğu söylenebilir.

Çizelge 3.5 Kripto para verisi için parametre tahmin sonuçları

		Normal	t $\hat{v} = 0.214$	Çarpık-normal	Çarpık t $\hat{v} = 0.00102$
β_0	$\hat{\beta}_0$	1947.17	1683.288	1947.17	1612.276
	SD	258.67	0.8093	127.893	2.1051
	ÜS	2461.314	1684.425	2201.38	1616.461
	AS	1433.044	1682.151	1692.97	1608.092
β_1	$\hat{\beta}_1$	3.1837	3.06174	3.1837	3.14010
	SD	0.6456	0.0027	0.6290	0.00946
	ÜS	4.4669	3.06713	4.4340	3.1589
	AS	1.9005	3.05635	1.9333	3.1212
ϕ	$\hat{\phi}$	0.9358	0.77881	0.93583	0.8537
	SD	0.0376	0.00012	0.00006	0.00027
	ÜS	1.0096	0.77906	0.93584	0.85430
	AS	0.8620	0.77856	0.93581	0.85322
σ	$\hat{\sigma}$	115.85	1.1616	115.85	1.3900
	SD	8.6351	0.00007	8.6351	0.0111
	ÜS	135.77	1.3614	135.779	1.5680
	AS	101.04	1.0131	101.047	1.1666
ζ	$\hat{\zeta}$	-	-	0.00005	0.9760
AIC		82254	3419.3	1263.4	1241.3

4. DEĞİŞKEN SEÇİMİ

Doğrusal regresyon analizinde model kurmanın esas amacı, analizde kullanılan veri seti içindeki ilişkiyi en iyi şekilde açıklamak ve/veya tahmin etmektir. Değişken seçimi, kurulmak istenen bir model ile en alakalı özelliklere sahip değişkenleri, bilgi kaybına uğramadan arayan istatistiksel bir süreçtir. En temel anlamda değişken seçimi, bilimsel araştırmalar için toplanan veriye en uygun modeli bulma problemini çözmektir. Değişken seçiminin kullanım amaçları:

- Elde edilen modelin daha basit şekilde ifade edilmesi ile araştırmacıya yorum kolaylığı sağlamak,
- Model üzerinde yapılacak analiz sürelerini kısaltmak,
- Modeldeki yüksek boyuttan kaynaklanan hatalardan kaçınmak,
- Aşırı modellemeden (Overfitting) kaynaklı varyans büyümelerine engel olmak,

şeklinde sıralanabilir.

Değişken seçim yöntemleri; aynı veri üzerinde belirlenen aday modeller arasından kullanılan kriterin en iyiyi seçim kuralına göre, veriye en uygun modelin seçilmesini sağlarlar. Literatürde, önerilmiş çok sayıda model seçim kriteri mevcuttur. Bunlar; *adımsal seçim yöntemleri*, *bilgi kriterine dayalı seçim yöntemleri*, *parametre tahmini ve değişken seçimini eş zamanlı yapan yöntemler* olarak üç başlık altında incelenebilir.

4.1 Adımsal Seçim Yöntemleri

Adımsal seçim yöntemleri; bir çoklu regresyon modelinde önceden belirlenmiş olan değişkenlerin modelde yer alıp almayacağına, F veya t gibi istatistiksel testler uygulayarak adımsal olarak karar veren yöntemlerdir. Bu yöntemlerde genel olarak, modelin bir alt kümesi oluşturulur ve bu alt kümeden en doğru model, adımsal yöntemlerle seçilir (Hocking, R. R., 1976).

4.1.1 Geriye doğru eleme

Geriye doğru eleme yöntemi, tüm aday değişkenlerin modele dahil edildiği durum ile başlatılır. Sonrasında her bir değişken için kısmi F istatistikleri hesaplanır. Hesaplanan F istatistikleri, daha önceden seçilen bir F değeri ile karşılaştırılır ve eğer en küçük kısmî F değeri, önceden seçilen F değerinden küçükse o bağımsız değişken, modelden çıkartılır. Bu işlem, modeldeki bağımsız değişkenler için hesaplanan en küçük kısmi F değeri, önceden seçilen F değerinden küçük olmayana kadar tekrar edilir ve bu noktada sonlandırılarak kalan değişkenler en iyi modeli verir (Montgomery vd., 2001).

4.1.2 İleriye doğru seçim

Bu yöntem, modelde kesim noktasından başka hiçbir bağımsız değişkenin olmadığı varsayımı ile başlatılır. Modele, her adımda bir bağımsız değişken eklenerek en iyi model elde edilmeye çalışılır. Denkleme eklenmek için seçilen ilk bağımsız değişken, y değişkeni ile en büyük basit korelasyona sahip olan bağımsız değişkendir. Bu seçilen bağımsız değişken için kısmî F istatistiği hesaplanır ve bu değer daha önceden seçilen F değerinden büyük ise bağımsız değişken modele alınır. Bu işlem, tüm değişkenler modele alındığında veya son bağımsız değişkenin kısmî F istatistiği seçilen F değerinden büyük olmadığında sonlandırılır ve elde edilen modele en iyi model denir (Montgomery vd., 2001).

4.1.3 Adımsal regresyon

Adımsal regresyon; ileriye doğru seçimin, her adımda modele daha önce giren bağımsız değişkenlerin kısmî F (ya da t) istatistikleri yoluyla yeniden değerlendirildiği bir türdür. Daha önceki adımlarda eklenen bir bağımsız değişken, söz konusu bu bağımsız değişken ile modele eklenen diğer bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiden dolayı gereksiz hale geçmiş olabilir. Eğer bir değişken için kısmî F (ya da t) istatistiği önceden seçilmiş bir F değerinden küçükse o değişken modelden çıkartılır (Montgomery vd., 2001).

Adımsal seçim yöntemleri, doğru modelin seçiminde sıklıkla başvuru alan metotlar olsa da bu yöntemlerin kullanımında ortaya çıkabilen birtakım sorunlar tespit edilmiştir. Bu

yöntemlerin işlemi sırasında, hangi değişkenlerin modele dahil edileceği veya modelden çıkarılacağı sıralaması için teorik düzenlemelerin bulunmaması, analizde modele dahil edilecek ve modelden çıkarılacak değişkenlerin önsel olasılıklarının seçimiyle ilgili herhangi bir teorik düzenlemenin bulunmaması (Fun ve Li, 2004) bu sorunlardan bazılarıdır.

4.2 Bilgi Tabanlı Seçim Yöntemleri

Belirli bir veri kümesi için çoklu regresyon modellerinde, parametre tahminleri yapıldıktan sonra, bu veri için belirlenen modellerin koleksiyonu göz önüne alınarak ve belirli bilgi kriterleri altında her bir modelin bir diğerine göre kalitesini belirleyerek en iyi modeli bulmayı hedefleyen model seçim yöntemleridir. Literatürde tanımlanmış, sık kullanılan bazı bilgi tabanlı seçim yöntemleri şunlardır:

- Akaike Bilgi Kriteri (AIC),
- Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICc),
- Bayes Bilgi Kriteri (BIC),
- Mallow'un C_p Kriteri,
- ICOMP Kriteri

4.2.1 Akaike bilgi kriteri

AIC; eldeki veri setini temsil ettiği düşünülen bir model geliştirildiğinde bu modelin, model karmaşıklığı ve uyum iyiliğini kullanarak bilgi kaybını göreceli olarak tahmin etmektedir. Farklı değişken boyutlarına sahip modeller arasından en iyi model seçimi için en çok olabilirlik yöntemi, değişken sayısını cezalandırma düşüncesi ile Akaike (1974) tarafından önerilmiştir. En küçük AIC değerine sahip model, kriterin belirlediği en iyi modeldir.

Kriter şu şekilde tanımlanmıştır.

$$AIC(k) = -2 \log L(\hat{\theta}_k) + 2m(k)$$

Burada;

$L(\hat{\theta}_k)$: Maksimum yapılan log-olabilirlik fonksiyonu,

$\hat{\theta}_k$: M_k modeli altında θ_k parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmini,

$m(k)$: M_k modelinin bağımsız parametre sayısıdır.

4.2.2 Düzeltilmiş Akaike bilgi kriteri

Modelleme yaparken küçük örnekleme sahip olunması durumunda, klasik AIC gereğinden fazla değişken seçme eğiliminde olacaktır. Bu durumu engellemek için Sugiura (1978) tarafından, AIC yönteminin bir düzeltmesi olarak aşağıdaki kriter önerilmiştir:

$$AICc = n \log \hat{\sigma}^2 + n \frac{1 + p/n}{1 - (p + 2)/n}$$

Küçük çaplı örneklem için AICc, AIC'den daha doğru olma eğilimindedir ancak AICc'nin hesaplanması, klasik AIC'nin hesaplanmasından daha zordur. AIC ile kıyaslandığında AICc daha küçük yana sahiptir.

4.2.3 Bayes bilgi kriteri

BIC veya Schwarz bilgi kriteri (SIC, SBC, SBIC), sonlu sayıda bir model seti içinden en iyi modeli seçmek üzere geliştirilmiş bir yöntemdir (Schwarz, 1978). Kriterin ilk terimi, AIC yöntemi gibi olabilirlik fonksiyonunu kullanırken ikinci terimi ise model parametre sayısı ile birlikte örnek hacmini cezalandırmaya yöneliktir. Model seti içinde aşağıdaki kriteri en küçük yapan model, en iyi model olarak değerlendirilir:

$$BIC = -2 \log(L) + k \log(n)$$

4.2.4 Mallow's C_p kriteri

Mallow'un C_p Kriteri (Mallows, 1973), en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmiş olan bir veri setine ait regresyon modelleri koleksiyonu içinden en iyi modeli seçme yöntemidir. En düşük C_p değerini veren model, en iyi model olarak seçilir (Gujarati, 2003). Her bir model için hesaplanan artık kareler toplamını kullanan kriter şu şekilde tanımlanmıştır:

$$C_p = \frac{AKT}{\hat{\sigma}^2} - (n - 2p)$$

Burada;

AKT : Artık Kareler Toplamı,

$\hat{\sigma}^2$: Regresyon modeline ait varyans tahmini,

p : Seçilen modeldeki değişken sayısı,

n : Örneklem hacmidir.

4.2.5 ICOMP kriteri

Bozdogan (1988), modeldeki parametrelerin sayısını cezalandıran AIC'ye farklı bir yaklaşım geliştirmiş ve kriterin ceza terimini "karmaşık fazlalığı (information complexity)" adını verdiği ek bir terimle değiştirerek ICOMP kriterini ortaya atmıştır. Karmaşık fazlalığı, modelin parametre tahminleri ve rasgele hata terimleri arasındaki bağımlılık ile kovaryans yapısından meydana gelmektedir. ICOMP'ın en genel formu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$ICOMP = -2 \log L(\hat{\theta}_k) + 2C(\hat{\Sigma}_{\text{model}})$$

Burada;

$L(\hat{\theta}_k)$: Maksimum yapılan log olabilirlik fonksiyonu,

$\hat{\theta}_k$: M_k modeli altında θ_k parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmini,

C : Reel değerli karmaşıklık ölçüsünü,

$\hat{\Sigma}_{\text{model}} = \hat{Cov}(\hat{\theta}_k)$ modelin parametre vektörünün kovaryans matrisinin tahminidir.

ICOMP'daki bu kovaryans matrisi, farklı yollarla tahmin edilebilir. Bunlardan biri:

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1} = \left\{ -E \left(\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right)_{\hat{\theta}} \right\}^{-1}$$

biçiminde tanımlı olan, modele ait tahmin edilen Fisher bilgi matrisinin tersidir.

4.3 Parametre Tahminini ve Değişken Seçimini Eş Zamanlı Yapan Yöntemler

Regresyon analizinde iki temel problem; parametre tahmini ve değişken seçimidir. Yukarıda verilen model seçim yöntemlerinin tümü, model seçimini parametre tahmininden sonra yaparak tahmini yapılmış değişkenler üzerinden değişken seçimi yapmaya dayalı yöntemlerdir. Bu bölümde; parametre tahmini ile değişken seçimini, eş zamanlı olarak yapan yöntemler ele alınacaktır. Bu yöntemlerden bu bölümde ele alınanları; lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemleridir.

4.3.1 Lasso

Son dönemlerde popüler olarak kullanılan lasso cezalandırma yöntemi, L_1 cezalandırma fonksiyonunu kullanarak çalışır. Lasso cezalandırması, parametreleri sıfıra doğru büzerek varyansın küçülmesini ve önemli değişkenlerin tespit edilmesini sağlar. Tibshirani (1996), ridge regresyon kriterini (Hoerl ve Kennard, 1970) geliştirerek, ridge regresyonda kullanılan L_2 cezalandırma normu yerine, L_1 ceza normunu ele almış; bu sayede parametre tahmini ve değişken seçiminin eş zamanlı olarak yapılmasına imkân sağlamıştır. Bu yöntem, kayıp fonksiyonunu $\sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t$ kısıtı altında minimize eder ve buna L_1 tipi bir cezalandırma fonksiyonu denir.

Ceza terimi:

$$p_{\lambda_j}(\beta) = \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

şeklindedir.

Doğrusal regresyon modeli için cezalandırılmış amaç fonksiyonu:

$$Q_N = (y - \mathbf{X}\beta)^T (y - \mathbf{X}\beta) + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

şeklindedir. Bu amaç fonksiyonun ilgilenilen parametrelere göre minimizasyonu eş zamanlı olarak parametre tahmini ve değişken seçimini sağlayacaktır. Alternatif olarak bilinen bir dağılım varsayımı altında bu cezalandırma yöntemi kullanılmak istenirse:

$$Q_N = -\ln L(\boldsymbol{\theta}) + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

biçiminde olabilirlik fonksiyonunun negatifi minimize edilerek parametre tahmini ve değişken seçimi eş zamanlı olarak yapılabilir.

Burada;

λ : cezalandırmayı ayarlama parametresi ($\lambda > 0$),

$\boldsymbol{\theta}$: parametre vektörü,

$\ln L(.)$: log-olabilirlik fonksiyonu,

$\sum_{j=1}^p |\beta_j|$: L_1 tipi ceza fonksiyonudur.

Bu optimizasyon probleminin açık bir çözümü olmadığı için hesaplamalarda LQA (Local Quadratic Approximation – Yerel Karesel Yaklaşım) (Fun ve Li, 2001), LLA (Local Linear Approximation – Yerel Doğrusal Yaklaşım) (Zou ve Li, 2008) veya Shooting Algoritması (Fu, 1998) gibi nümerik metotlara başvurulabilir.

4.3.2 Scad

Scad yöntemi, lasso yönteminin aksine asimptotik yansızlık özelliğine sahiptir. Fun ve Li (2001) bu yöntem için ceza terimini şu şekilde tanımlamışlardır:

$$p_{\lambda}^{SCAD}(\beta_j) = \begin{cases} \lambda |\beta_j| & , \quad |\beta_j| \leq \lambda \\ -\left(\frac{|\beta_j|^2 - 2\alpha\lambda |\beta_j| + \lambda^2}{2(\alpha-1)} \right) & , \quad \lambda < |\beta_j| \leq \alpha\lambda \\ \frac{(a+1)\lambda^2}{2} & , \quad |\beta_j| > \alpha\lambda \end{cases}$$

Bu fonksiyon için $\alpha > 2$ ve $\beta > 0$ olduğu durumda birinci türev:

$$p'_{\lambda}(\beta) = \lambda \left\{ I(\beta \leq \lambda) + \frac{(\alpha\lambda - \beta)_+}{(\alpha-1)\lambda} I(\beta > \lambda) \right\}$$

şeklindedir.

Burada; I indikatör fonksiyonu, α ve λ cezalandırmayı ayarlama parametreleri, $s > 0$ için $(s)_+ = s$ ve diğer durumlarda 0 olacak şekilde negatif olmayan tanımlı bir fonksiyondur. Scad ceza fonksiyonu, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ aralığında sürekli ve türevlenebilirdir. Bu sonuç, küçük katsayıların sıfıra eşitlemesi ile beraber büyük katsayıları olduğu gibi koruyacaktır. Böylece scad *sparse* (katsayılar içinde sıfır olanları tespit etme ve sıfır olmayanları koruma) bir çözüm kümesi vererek büyük katsayılarda yaklaşık olarak yansız tahminler yapılmasına olanak tanır. Bu durumda scad cezalandırma fonksiyonunun çözümü şöyle ifade edilir:

$$\hat{\beta}_j^{SCAD} = \begin{cases} \left(|\hat{\beta}_j| - \lambda \right)_+ \text{sign}(\hat{\beta}_j) & , \quad |\hat{\beta}_j| \leq 2\lambda \\ \left\{ (a-1)\hat{\beta}_j - \text{sign}(\hat{\beta}_j)\alpha\lambda \right\} / (a-2) & , \quad 2\lambda < |\hat{\beta}_j| \leq \alpha\lambda \\ \hat{\beta}_j & , \quad |\hat{\beta}_j| > \alpha\lambda \end{cases}$$

Burada, $sign(.)$ işaret fonksiyonudur. Bu tahmin edici λ ve α gibi iki bilinmeyen parametre içermektedir. Teorik olarak en iyi λ, α ikilisi, “cross validation” (CV) (çapraz doğrulama) gibi bir kriter yardımı ile iki boyutta çözüm aranarak bulunabilir ancak böyle bir uyarlama simülasyon açısından oldukça zahmetlidir. Bunun yerine Fun ve Li (2001), α parametresini 3.7 sayısına eşitlemenin en iyi seçim olduğunu ifade etmiş ve çalışmalarında da α parametresinin farklı tahminlerini yaparak parametreyi tahmin etmenin anlamlı bir farklılık yaratmadığını göstermişlerdir. Bu nedenle çalışmalarda λ parametresi, CV yöntemi ile optimal olarak seçilebilirken $\alpha = 3.7$ olarak alınmaktadır. Scad penaltı fonksiyonu, aşağıdaki üç önemli özelliğe sahiptir (Fun ve Li, 2001):

- i. Büyük katsayılar için asimptotik yansızdır,
- ii. Sparsity (model karmaşıklığını azaltmak için küçük katsayıları sıfıra eşitleme ve büyük olanları koruma) özelliğine sahiptir,
- iii. Model tahmininde gereksiz yayılımı önlemek için sürekli.

4.3.3 Bridge

Bridge tahmin edicisi, ridge ve lasso yöntemlerinin genelleştirilmiş halidir. Frank ve Friedman (1993) tarafından ceza terimi:

$$p_{\lambda_j}(\beta) = \sum_{j=1}^p |\beta_j|^\gamma$$

olacak şekilde önerilmiştir. Bu ceza fonksiyonu kullanılarak lasso yöntemine bezer şekilde aşağıdaki amaç fonksiyonları elde edilebilir:

$$Q_N = (y - \mathbf{X}\beta)^T (y - \mathbf{X}\beta) + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|^\gamma$$

Amaç fonksiyonunun minimizasyonu ile veya

$$Q_N = -\ln L(\boldsymbol{\theta}) + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|^\gamma$$

olabilirlik fonksiyonunun negatifi, minimize yapılarak parametre tahmini ve model seçimi eş zamanlı olarak yapılabilir.

Burada;

γ ve λ : cezalandırmayı ayarlama parametresi,

$\boldsymbol{\theta}$: parametre vektörü,

$\ln L(.)$: log-olabilirlik fonksiyonu,

$\sum_{j=1}^p |\beta_j|^\gamma$: L_γ tipi ceza fonksiyonudur.

Bridge yöntemi; $0 < \gamma \leq 1$ aralığında seçildiği durumda değişken seçimi yapmakta ve $\gamma > 1$ olduğunda katsayıları sıfıra büzmektedir. Görüldüğü üzere; bridge ceza fonksiyonunda $\gamma = 1$ alındığında fonksiyon, lasso ceza terimine; $\gamma = 2$ alındığında ise ridge regresyona dönüşmektedir.

4.3.4 Elastik net

Elastik net yöntemi; doğrusal veya lojistik regresyon modellerinde, model seçimi ve parametre tahminini eş zamanlı yapmak için kullanılır. Elastik net, L_1 ve L_2 norm tabanlı ceza terimlerini doğrusal olarak birleştirerek çalışır. Bu sayede hem lasso yöntemini hem de Ridge yöntemini tek bir amaç fonksiyonunda birleştirir. Lasso metodunun kullanmış olduğu L_1 tipi ceza terimi, lasso yönteminde en fazla örneklem hacmi kadar değişken seçimine olanak sağlar. Yüksek boyutlu ($p > n$) veriler için bu durum kullanışlı bir özellik değildir. Elastik net metodu bu durumu aşmak için ek olarak L_2 norm ceza terimini amaç fonksiyonuna ekler. Zou ve Hastie (2005), elastik net amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$Q_N = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda_1 \sum_{j=1}^p |\beta_j| + \lambda_2 \sum_{j=1}^p (\beta_j)^2$$

Burada, λ_1 ve λ_2 birbirinden farklı cezalandırmayı düzenleme parametreleridir.

4.4 Otoregresif Hata Terimli Regresyon Modellerinde Model Seçimi

Otoregresif hata terimli regresyon modellerinde Yoon vd. (2013) lasso, scad ve bridge yöntemlerini kullanarak ve hatalar üzerinde dağılım varsayımı yapmaksızın parametre tahmini ve değişken seçimi üzerinde çalışmışlardır. (2.5) eşitliğinde bahsedilen otoregresif hatalı regresyon modelini kullanarak lasso, scad ve bridge yöntemleri için amaç fonksiyonunu şu şekilde tanımlamışlardır:

$$Q_N(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}) = \sum_{t=p+1}^N \left(Y_t - \mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta} - \sum_{j=1}^p \phi_j (Y_t - \mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}) \right)^2 + T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|) \quad (4.1)$$

Burada, $p_{\lambda_i}(|\beta_i|)$: $\boldsymbol{\beta}$ parametresini ve $p_{\delta_j}(|\phi_j|)$: $\boldsymbol{\phi}$ parametresini cezalandıran, kullanılan yöntemle ait ceza fonksiyonlarını ifade etmektedir.

Wang vd. (2007), aynı amaç fonksiyonunu ilk olarak lasso ceza fonksiyonu için kullanmış ve otoregresif hata modelinin derecesini sabit almışlardır. Yoon vd. (2013) çalışmalarında hesaplamaların kolaylığı ve hata terimlerindeki otoregresif katsayının cezalandırılmasının anlamlı olmadığı görüşü ile otoregresif hata terimini cezalandırmadan çözüme ulaşmışlardır. Lasso, scad ve bridge yöntemleri için kullanılan ceza terimleri; (4.1) eşitliğindeki minimizasyon problemini orijinde türevlenemez ve konkav olmayan duruma getirdiği için çözüme ulaşmak adına Fun ve Li (2001)'nin önerdiği LQA yöntemi kullanılmıştır. LQA yöntemine göre kullanılan ceza terimleri, $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = (\beta_1^0, \dots, \beta_M^0)$ ' da yerel olarak aşağıdaki karesel fonksiyona yakınsar:

$$p_{\lambda_i}(|\beta_i|) \approx p_{\lambda_i}(|\beta_i^{(0)}|) + \frac{1}{2} \frac{p'_{\lambda_i}(|\beta_i^{(0)}|)}{|\beta_i^{(0)}|} (\beta_i^2 - \beta_i^{(0)2})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p'_\lambda(|\beta_i^{(0)}|)}{|\beta_i^{(0)}|} \beta_i^2 + p_\lambda(|\beta_i^{(0)}|) - \frac{1}{2} \frac{p'_\lambda(|\beta_i^{(0)}|)}{|\beta_i^{(0)}|} \beta_i^{(0)2} \quad (4.2)$$

Burada;

p'_{λ_i} : kullanılan ceza fonksiyonunun türevi,

$\beta_i^{(0)}$: β_i parametreleri için başlangıç değerini ifade eder.

$\beta^{(0)}$ değerinde; yerel karesel yakınsama yöntemini kullanarak, minimizasyon problemi $\beta^{(0)}$ etrafında aşağıdaki karesel minimizasyon problemine indirgenir:

$$Q(\beta, \phi) = \sum_{t=p+1}^N \left(Y_t - \mathbf{x}_t^T \beta - \sum_{j=1}^p \phi_j (Y_{t-j} - \mathbf{x}_{t-j}^T \beta) \right)^2 + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^M \frac{p'_{\lambda_i}(|\beta_i^{(0)}|)}{|\beta_i^{(0)}|} \beta_i^2 \quad (4.3)$$

Bu açılımın benzeri, ϕ parametresi için de yapılabilir. Ancak bu tezde karışıklığı önlemek adına, ϕ parametresi için değişken seçim kriterleri uygulanmamıştır. Modelde hem β hem de ϕ parametreleri bilinmeyen olduğu için her iki parametreye göre türev alınıp sonuçlar sıfıra eşitlenerek parametrelerin tahmin edicileri bulunur.

4.4.1 Normal dağılım varsayımı altında otoregresif hata terimli regresyon modellerinde model seçimi

Diğer bölümlerde, modelin hata dağılımının varsayımı değiştirilerek çözüme gidileceği için ve (4.3) eşitliği kullanılarak bulunan sonuçlar, model hatalarının normal dağıldığı varsayımı kullanılarak bulunan sonuçlar ile aynı olacağından (4.3) eşitliğindeki fonksiyonda, amaç fonksiyonunu normal dağılımın log-olabilirlik fonksiyonunun negatifi ile yer değiştirerek işlemlere devam edilebilir. Böylece olabilirlik fonksiyonunun negatifinin minimum yapılması ile amaç fonksiyonunun minimum yapılması birbirine eşit olacaktır. Burada amaç, ilerleyen bölümlerde hata terimlerinin dağılım varsayımları, ilgilenilen dağılımlarla değiştirildiğinde yapılacak çözümlerle ilgili bir alt yapı oluşturmaktır. (2.5) eşitliğinde verilen regresyon modelinde, hataların bağımsız 0 ortalama ve σ^2 varyanslı normal dağılması ($a_t \sim N(0, \sigma^2)$) varsayımı altında bilinmeyen regresyon parametreleri için parametre tahminleri ve değişken seçimi, cezalandırılmış amaç fonksiyonu yardımı ile bulunabilir. Bu tahminleri bulabilmek için hataların normal dağılımdan geldiği varsayımıyla normal dağılımın log-olabilirlik fonksiyonunun negatifi ile cezalandırma terimini bir arada içeren amaç fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^M \frac{p'_{\lambda_i}(|\beta_i^{(0)}|)}{|\beta_i^{(0)}|} \beta_i^2 \quad (4.4)$$

Burada,

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) = c - \frac{T}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 \quad (4.5)$$

şeklinde normal dağılımın log-olabilirlik fonksiyonudur. (4.4) eşitliğindeki son terimde kullanılan yerel karesel yaklaşım fonksiyonunda, kullanılmak istenilen yonteme ait ceza fonksiyonu yerleştirilerek bu yöntemler ile parametre tahmini ve model seçimi eş zamanlı olarak yapılabilir. Buradan sonra gelen kısımlarda, hataların normal dağıldığı varsayımı altında; lasso, scad, Bridge ve elastik net yöntemlerine ait ceza terimleri kullanılarak

parametre tahmini ve model seçiminin nasıl yapıldığından bahsedilmiştir. Benzer adımlar takip edilerek ϕ parametresi için de değişken seçimi yapmak mümkündür. Fakat bu çalışmada ϕ için değişken seçimi hesapları yapılmamıştır.

Lasso yöntemi

Lasso cezalandırma terimi $\sum_{i=1}^M |\beta_i|$ türevlenebilir olmadığı için ilk olarak bu terime karesel yakınsama metodu uygulayarak ceza terimi:

$$p_{\lambda_i}(|\beta|) \approx \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (4.6)$$

şeklinde olacaktır.

Burada;

λ : cezalandırmayı ayarlama parametresi,

$\beta_i^{(0)}$: β_i parametreleri için başlangıç değeridir.

Bu yakınsama sonucu kullanılarak (4.4) eşitliğindeki son terimde p_{λ_i} yerine lasso ceza fonksiyonu yazılırsa, minimizasyon için kullanılacak fonksiyon şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$Q(\beta, \phi, \sigma^2) = -\ln L(\beta, \phi, \sigma^2 | a_t) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (4.7)$$

Bu fonksiyon kullanılarak β_k , ϕ_l ve σ^2 parametrelerine göre türevler alınıp 0'a eşitlenirse:

$$\frac{dQ}{d\beta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} + T\lambda \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{dQ}{d\phi_l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{dQ}{d\sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 = 0 \quad (4.10)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler β_k , ϕ_l ve σ^2 'ye göre çözüldüğünde parametrelerin tahmin edicileri vektörel formda şöyle bulunur:

$$\hat{\beta}_{Lasso} = [\hat{\Phi}(B)X\hat{\Phi}(B)X^T + T\lambda\Omega]^{-1} [\hat{\Phi}(B)Y\hat{\Phi}(B)X] \quad (4.11)$$

$$\hat{\phi} = \mathbf{R}^{-1}(\hat{\beta})R_0(\hat{\beta}) \quad (4.12)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t\hat{\beta})^2 \quad (4.13)$$

Burada; $\Omega = diag \left\{ |\beta_1^{(0)}|^{-1}, |\beta_2^{(0)}|^{-1}, \dots, |\beta_M^{(0)}|^{-1} \right\}$, $\beta_i^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisi, $\hat{\Phi}(B)X = [\hat{\Phi}(B)x_{t,i}]_{\substack{t=p+1, \dots, N \\ i=1, \dots, M}}$, $\hat{\Phi}(B)Y = [\hat{\Phi}(B)y_t]_{t=p+1, \dots, N}$ şeklinde otoregresif parametrenin tahminini içeren gecikme operatörlü matris ve vektör,

$$R_0(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p}^2 \end{bmatrix}.$$

şeklindedir.

Lasso yöntemine ait cezalandırma terimi kullanılarak regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için normal dağılım varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\hat{\mathcal{F}}_{Lasso}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B) \mathbf{X}^T \hat{\Phi}(B) \mathbf{X} + T \lambda \boldsymbol{\Omega}] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Gözlenen Fisher bilgi matrisi, parametre tahminlerine ilişkin standart hataları ve güven aralıklarını hesaplamak için kullanılacaktır.

Scad yöntemi

Önceki bölümde bahsedildiği üzere scad yöntemi, $|\beta_i|$ değerinin farklı aralıkları için farklı cezalandırma fonksiyonlarına sahiptir. Burada işlem karmaşıklığından kaçınmak için scad parçalı ceza fonksiyonu içerisindeki her bir cezalandırma fonksiyonu $p_\lambda(|\beta_i|)$ şeklinde ifade edilecektir. p_λ yerine scad parçalı ceza fonksiyonu yazılırsa karesel yakınsama yöntemi kullanılarak elde edilen cezalandırılmış log-olabilirlik fonksiyonu şöyle olacaktır:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{T}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \boldsymbol{\beta}_i^2 \quad (4.14)$$

Burada; $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) = \text{diag} \{p'_\lambda(|\beta_1^{(0)}|) / |\beta_1^{(0)}|, \dots, p'_\lambda(|\beta_M^{(0)}|) / |\beta_M^{(0)}|\}$ şeklinde tanımlıdır. $\beta_i^{(0)} \neq 0$ olmak üzere β_i parametreleri için başlangıç değeri ve p'_λ , scad ceza fonksiyonunun türevidir. Bu fonksiyonun bilinmeyen parametrelere göre türevlerinin sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{d \ln L}{d \beta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B) y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B) x_{t,i} \right) \Phi(B) x_{t,k} + T \boldsymbol{\Omega}(\beta_i^{(0)}) \beta_i \quad (4.15)$$

$$\frac{d \ln L}{d \phi_l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B) y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B) x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) \quad (4.16)$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B) y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B) x_{t,i} \right)^2 = 0 \quad (4.17)$$

Bu denklemler; β_k , ϕ_l ve σ^2 'ye göre çözüldüğünde parametrelerin tahmin edicileri vektörel formda şu şekilde elde edilir:

$$\hat{\beta}_{SCAD} = [\hat{\Phi}(B)X\hat{\Phi}(B)X^T + T\Omega(\beta^{(0)})]^{-1} [\hat{\Phi}(B)Y\hat{\Phi}(B)X] \quad (4.18)$$

$$\hat{\phi} = R^{-1}(\hat{\beta})R_0(\hat{\beta}) \quad (4.19)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\beta}\hat{\Phi}(B)x_t)^2 \quad (4.20)$$

Lasso yöntemine benzer olarak, scad yöntemine ait cezalandırma terimi kullanılarak regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için normal dağılım varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\hat{\mathcal{F}}_{SCAD}(\hat{\beta}, \hat{\phi}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B)X^T\hat{\Phi}(B)X + T\Omega(\beta^{(0)})] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} R(\hat{\beta}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Bridge yöntemi

Eşitlik (4.2)'deki yakınsama yöntemi kullanılarak (4.4) eşitliğindeki son terimde p_{λ_i} yerine Bridge ceza fonksiyonu yazıldığında cezalandırma fonksiyonu aşağıdaki ifadeye yakınsayacaktır.

$$p_{\lambda_i}(\beta) \approx \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^p |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (4.21)$$

Burada, γ ve λ : cezalandırma ayarlama parametresi ve $\beta_i^{(0)}$: β_i parametreleri için başlangıç değeri şeklindedir. Ceza terimi için bulunan bu yakınsama kullanılarak minimizasyon için kullanılacak fonksiyon şu şekilde yazılabilir:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (4.22)$$

Bu fonksiyon kullanılarak bilinmeyen parametrelere göre türevler alınıp 0'a eşitlenirse,

$$\frac{d\ln L}{d\beta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} + \gamma\lambda \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{d\ln L}{d\phi_l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{d\ln L}{d\sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 = 0 \quad (4.25)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler β_k , ϕ_l ve σ^2 'ye göre çözüldüğünde parametrelerin tahmin edicileri vektörel formda aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Bridge} = [\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}^T + \gamma\lambda\boldsymbol{\Omega}_\gamma]^{-1} [\hat{\Phi}(B)\mathbf{Y}\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}] \quad (4.26)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = R^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})R_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (4.27)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 \quad (4.28)$$

Burada, $\boldsymbol{\Omega}_\gamma = \text{diag} \{ |\beta_1^{(0)}|^{\gamma-2}, |\beta_2^{(0)}|^{\gamma-2}, \dots, |\beta_M^{(0)}|^{\gamma-2} \}$, $\beta_i^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisidir. Lasso yönteminde olduğu gibi bridge yöntemine ait cezalandırma terimi kullanılarak regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için normal dağılım varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\hat{\mathcal{F}}_{Bridge}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}^T\hat{\Phi}(B)\mathbf{X} + \gamma\lambda\boldsymbol{\Omega}_\gamma] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Elastik net yöntemi

Elastik net yöntemi için (4.2) eşitliğindeki yakınsama kullanılarak minimizasyon için (4.4) eşitliğindeki son terimde p_{λ_i} yerine elastik net ceza fonksiyonunun L_1 tipi ceza fonksiyonu ve ridge regresyonda kullanılan L_2 tipi ceza fonksiyonu tek amaç fonksiyonunda birleştirilirse şu şekilde elde edilebilir.

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \quad (4.29)$$

Bu fonksiyon kullanılarak $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}$ ve σ^2 parametrelerine göre türevler alınıp 0'a eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\ln L}{d\beta_k} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} \\ &+ T\lambda_1 \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\frac{d\ln L}{d\phi_l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{d\ln L}{d\sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 = 0 \quad (4.32)$$

Bu denklemler β_k, ϕ_l ve σ^2 'ye göre çözüldüğünde parametrelerin tahmin edicileri vektörel formda aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EN} = [\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}^T + T\lambda_1\mathbf{\Omega} + \lambda_2\mathbf{I}]^{-1} [\hat{\Phi}(B)\mathbf{Y}\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}] \quad (4.33)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = R^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})R_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (4.34)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t\hat{\boldsymbol{\beta}})^2 \quad (4.35)$$

Burada; $\mathbf{\Omega} = \text{diag} \left\{ \left| \beta_1^{(0)} \right|^{-1}, \left| \beta_2^{(0)} \right|^{-1}, \dots, \left| \beta_M^{(0)} \right|^{-1} \right\}, \beta_i^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisi ve $\mathbf{I} = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}_{N \times N}$ şeklindedir. Diğer değişken seçim yöntemlerinde olduğu gibi burada da elastik-net yönteminde kullanılan cezalandırma terimi yardımıyla regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için normal dağılım varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\hat{\mathcal{F}}_{EN}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B) \mathbf{X}^T \hat{\Phi}(B) \mathbf{X} + \lambda_1 \mathbf{\Omega} + \lambda_2 \mathbf{I}] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

4.4.2 Simetrik t dağılımı varsayımı altında otoregresif hata terimli regresyon modellerinde model seçimi

Regresyon modelinde, hata terimleri gerçek hayatta her zaman normal dağılıma uygunluk göstermeyebilir. Verilerin dağılımı, normal dağılıma göre daha kalın kuyruklu olabilir. Bu durum karşısında yapılan parametre tahminleri, etkinliğini yitirir. Bu problemi gidermek için normal dağılıma alternatif olarak, normal dağılımdan daha kalın kuyruklu bir davranış sergileyen simetrik t dağılımı kullanılabilir. Bu bölümde, hataların ν bilinen serbestlik dereceli ($\nu > 0$) ve bilinmeyen σ ölçek parametrelili ortalaması sıfır olan t dağılımına sahip olduğu varsayımı altında $(a_t \sim t_\nu(0, \sigma^2, \nu))$ lasso, scad bridge ve elastik net yöntemleri kullanılarak parametre tahmini ve değişken seçiminin eş zamanlı olarak yapılmasından bahsedilecektir. Model seçimi ve parametre tahmini yapabilmek için normal dağılım varsayımında olduğu gibi (3.4) eşitliği kullanılarak amaç fonksiyonu ile simetrik t dağılımının log-olabilirlik fonksiyonlarını yer değiştirerek ceza terimleri uygulanabilir. Buna göre simetrik t dağılımının log-olabilirlik fonksiyonu şu şekilde elde edilir:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) = \ln c_\nu - T \ln \sigma \quad (4.36)$$

$$-\frac{v+1}{2} \sum_{t=p+1}^N \ln \left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]$$

(4.4) eşitliğindeki son terimde kullanılan yerel karesel yaklaşım yardımıyla, bu yönteme, kullanılmak istenilen ceza fonksiyonu yerleştirilerek, parametre tahmini ve değişken seçimi eş zamanlı olarak yapılabilir. Buradan sonra gelen kısımlarda hataların simetrik t dağıldığı varsayımı altında lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerine ait ceza terimleri kullanılarak parametre tahmini ve model seçimi yapılmıştır.

Lasso yöntemi

Normal dağılım varsayımı ile yapılan yöntemde olduğu gibi lasso ceza fonksiyonu olan $\sum_{i=1}^p |\beta_i|$ fonksiyonu, karesel yakınsama yöntemi kullanılarak minimizasyon için kullanılacak fonksiyonu şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (4.37)$$

Burada, $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t)$ (4.36) eşitliğindeki simetrik t dağılımının log-olabilirlik fonksiyonudur. (4.37) eşitliğinin bilinmeyen parametrelere göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{d \beta_k} &= \frac{(v+1)}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i}) \Phi(B)x_{t,k}}{\left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]} \\ &+ T\lambda \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i = 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\frac{d \ln L}{d \phi_l} = \frac{(v+1)}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i})}{\left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]} = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma} = -\frac{T}{\sigma} + \left(\frac{v+1}{\sigma^3} \right) \sum_{t=p+1}^N \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]} = 0. \quad (4.40)$$

Ağırlık fonksiyonu kullanılarak yukarıdaki eşitlikler tekrar düzenlendiğinde şu eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{d \beta_k} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} \\ &\quad + T\lambda \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i = 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\frac{d \ln L}{d \phi_l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \left(y_{t-l} - \sum_{i=1}^M \beta_i x_{t-l,i} \right) = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma} = -\frac{T}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right)^2 = 0. \quad (4.43)$$

Burada,

$$\omega_t = \frac{v+1}{\left[v + \frac{(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i})^2}{\sigma^2} \right]}$$

şeklindedir. $\left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\Phi}(B)x_t \hat{\Phi}(B)x_t^T \right]^{-1}$ ve $R_w^{-1}(\hat{\beta})$ matrislerinin varlığı durumunda, aşağıdaki tahmin ediciler elde edilir:

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\Phi}(B)x_t \hat{\Phi}(B)x_t^T + T\lambda \Omega \right]^{-1} \left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\Phi}(B)y_t \hat{\Phi}(B)x_t \right], \quad (4.44)$$

$$\hat{\phi} = R_w^{-1}(\hat{\beta}) R_{w0}(\hat{\beta}), \quad (4.45)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N w_t (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t^T \hat{\beta})^2. \quad (4.46)$$

Burada;

$\Omega = diag \left\{ \left| \beta_1^{(0)} \right|^{-1}, \left| \beta_2^{(0)} \right|^{-1}, \dots, \left| \beta_M^{(0)} \right|^{-1} \right\}$ $\beta_i^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisi ve

$$R_{\omega_0}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N w_t e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, R_{\omega}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-1} e_{t-2} & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-2}^2 & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-p} e_{t-2} & \dots \sum_{t=p+1}^N w_t e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

dır. Yukarıdaki eşitlikler düzenlenerek matris formunda şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{\beta}_{tLasso} = [\hat{\Phi}(B)X^T \omega \hat{\Phi}(B)X + \lambda \Omega]^{-1} [\hat{\Phi}(B)X^T \omega \hat{\Phi}(B)Y] \quad (4.47)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} [\hat{\Phi}(B)Y - \hat{\Phi}(B)X\hat{\beta}]^T \omega [\hat{\Phi}(B)Y - \hat{\Phi}(B)X\hat{\beta}] \quad (4.48)$$

Burada; $\hat{\Phi}(B)X = [\hat{\Phi}(B)x_{t,i}]_{t=p+1, \dots, N, i=1, \dots, M}$ $\hat{\Phi}(B)Y = [\hat{\Phi}(B)y_t]_{t=p+1, \dots, N}$ otoregresif

model parametresinin tahminini içeren gecikme operatörlü matris ve vektörü, $\omega = diag\{\omega_t\}_{t=p+1, \dots, N}$ olacak şekilde ağırlıklardan oluşan köşegen matrisidir. Burada; $\omega_t = 1$ alındığında yapılan tahminler, normal dağılım varsayımında yapılan tahminlerle aynı olacaktır. ω_t ağırlık fonksiyonu; parametrelere bağlı olduğu için (4.44) - (4.46) eşitliklerinde verilen denklemler, aslında tahmin edicilerin analitik ifadeleri değildir. Fakat bu denklemler kullanılarak $\hat{\beta}, \hat{\phi}$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahminleri için IRA algoritması yardımıyla yaklaşık sonuçlar bulunabilir (Holland, 1977).

Normal dağılım varsayımına benzer olarak, lasso yöntemine ait cezalandırma terimi ve t dağılımından elde edilen ağırlıklar kullanılarak regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için t dağılımı varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\hat{\mathcal{F}}_{tLasso}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{B})\mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{B})\mathbf{X} + \lambda \boldsymbol{\Omega}] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \mathbf{R}_{\omega}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Gözlenen Fisher bilgi matrisi, parametre tahminlerine ilişkin standart hataları ve güven aralıklarını hesaplamak için kullanılacaktır.

Scad yöntemi

Normal dağılım varsayımında olduğu gibi (4.2) eşitliğinde p_{λ_i} yerine scad parçalı ceza fonksiyonu yazılırsa karesel yakınsama yöntemi kullanılarak elde edilen cezalandırılmış log-olabilirlik fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{T}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \boldsymbol{\beta}_i^2 \quad (4.49)$$

Burada, $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t)$ simetrik t dağılımının olabilirlik fonksiyonudur. Bu fonksiyonun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevlerinin sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{d \ln L}{d \beta_k} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B) y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B) x_{t,i} \right) \Phi(B) x_{t,k} + T \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \beta_i \quad (4.50)$$

$[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t^T]^{-1}$ matrisinin varlığı durumunda, aşağıdaki tahmin ediciler elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t^T + T \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \right]^{-1} \quad (4.51)$$

$$\times \left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\Phi}(B) y_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right]$$

Yukarıdaki eşitlik düzenlenerek matris formunda şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{tSCAD} = [\hat{\Phi}(B) \mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\Phi}(B) \mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)})]^{-1} [\hat{\Phi}(B) \mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\Phi}(B) \mathbf{Y}] \quad (4.52)$$

Burada; $\boldsymbol{\omega} = \text{diag}\{w_t\}_{t=p+1, \dots, N}$ ve $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) = \text{diag}\{p'_\lambda(|\beta_1^{(0)}|) / |\beta_1^{(0)}|, \dots, p'_\lambda(|\beta_M^{(0)}|) / |\beta_M^{(0)}| \}$ $\beta_i^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisidir. Normal dağılım varsayımına benzer olarak, scad yöntemine ait cezalandırma terimi ve t dağılımından elde edilen ağırlıklar kullanılarak regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için t dağılımı varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\hat{\mathcal{F}}_{tSCAD}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B) \mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\Phi}(B) \mathbf{X} + T \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)})] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\omega}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Bridge yöntemi

Eşitlik (4.2)'deki yakınsama kullanılarak bridge yöntemi için ceza fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p_{\lambda_i}(\beta) \approx \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (4.53)$$

Burada, γ ve λ cezalandırma ayarlama parametresi $\beta_i^{(0)}$ β_i parametreleri için başlangıç değeri şeklindedir. Ceza terimi için bulunan bu yakınsama kullanılarak minimizasyon için kullanılacak fonksiyon şu şekilde yazılabilir:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (4.54)$$

Burada, $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t)$ simetrik t dağılımının log-olabilirlik fonksiyonudur. Bu fonksiyon kullanılarak $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türev alınıp 0'a eşitlenerek aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d\ln L}{d\beta_k} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N \omega_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} + \gamma\lambda \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

$\left[\sum_{t=p+1}^N \omega_t \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t^T \right]^{-1}$ matrisinin varlığı durumunda aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\sum_{t=p+1}^N \omega_t \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t^T + T\lambda\boldsymbol{\Omega}_\gamma \right]^{-1} \left[\sum_{t=p+1}^N \omega_t \hat{\Phi}(B)y_t \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t \right] \quad (4.56)$$

Yukarıdaki eşitlik düzenlenerek matris formunda şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{tBridge} = [\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\Phi}(B)\mathbf{X} + \gamma\lambda\boldsymbol{\Omega}_\gamma]^{-1} [\hat{\Phi}(B)\mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\Phi}(B)\mathbf{Y}] \quad (4.57)$$

Burada; $\boldsymbol{\omega} = \text{diag}\{\omega_t\}_{t=p+1, \dots, N}$, $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}\left\{|\beta_1^{(0)}|^{\gamma-2}, |\beta_2^{(0)}|^{\gamma-2}, \dots, |\beta_M^{(0)}|^{\gamma-2}\right\}$ $\beta_i^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisidir. Normal dağılım varsayımına benzer olarak, bridge yöntemine ait cezalandırma terimi ve t dağılımından elde edilen ağırlıklar kullanılarak regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için t dağılımı varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\hat{\mathcal{F}}_{tBridge}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{B}) \mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{B}) \mathbf{X} + \gamma \lambda \boldsymbol{\Omega}_\gamma] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \mathbf{R}_\omega(\hat{\boldsymbol{\beta}}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Elastik net yöntemi

(4.2) eşitliğindeki yakınsama kullanılarak t dağılımı varsayımında, minimizasyon için kullanılacak fonksiyon şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$Q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2) = -\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2 | a_t) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \quad (4.58)$$

Ağırlık fonksiyonu yardımıyla $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre (4.58) denkleminin türevi alınır, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d\ln L}{d\beta_k} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=p+1}^N w_t \left(\Phi(B)y_t - \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} \right) \Phi(B)x_{t,k} \\ &+ T\lambda_1 \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^M \beta_i = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Burada, $[\sum_{t=p+1}^N \omega_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t^T]^{-1}$ matrisinin varlığı durumunda aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\sum_{t=p+1}^N w_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t^T + T\lambda_1 \boldsymbol{\Omega} + \lambda_2 \mathbf{I} \right]^{-1} \left[\sum_{t=p+1}^N \omega_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) y_t \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{x}_t \right] \quad (4.60)$$

Yukarıdaki eşitlik düzenlenerek matris formunda şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{tEN} = [\hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{X} + \lambda_1 \boldsymbol{\Omega} + \lambda_2 \mathbf{I}]^{-1} [\hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{X}^T \boldsymbol{\omega} \hat{\boldsymbol{\Phi}}(B) \mathbf{Y}] \quad (4.61)$$

Burada; $\omega = diag\{\omega_t\}_{t=p+1,\dots,N}$, $\Omega = diag\{|\beta_1^{(0)}|^{-1}, |\beta_2^{(0)}|^{-1}, \dots, |\beta_p^{(0)}|^{-1}\}$ ve $\beta_1^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisidir. Normal dağılım varsayımına benzer olarak, elastik net yöntemine ait cezalandırma terimi ve t dağılımından elde edilen ağırlıklar kullanılarak regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri için t dağılımı varsayımı altında gözlenen Fisher bilgi matrisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\hat{\mathcal{F}}_{tEN}(\hat{\beta}, \hat{\phi}, \hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} [\hat{\Phi}(B)X^T \omega \hat{\Phi}(B)X + \lambda_1 \Omega + \lambda_2 I] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}^2} R_\omega(\hat{\beta}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix}$$

Bu denklemler kullanılarak $\hat{\beta}$, $\hat{\phi}$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahminleri için IRA algoritması yardımıyla yaklaşık sonuçlar bulunabilir.

4.4.3 t dağılımı varsayımı altında EM algoritması ile model seçimi ve parametre tahmini

EM algoritması kullanılarak model seçimi ile parametre tahminini eş zamanlı olarak yapmak için amaç fonksiyonuna, kullanılacak olan dört farklı model seçim yönteminin ceza fonksiyonları eklenerek algoritmanın adımları uygulanabilir. Bu sayede, ECM algoritması yardımıyla t dağılımına dayalı otoregresif hata terimli regresyon modellerinde parametre tahmini ve model seçimi eş zamanlı olarak gerçekleştirilebilir.

Algoritma Adımları

θ parametre vektörü için uygun başlangıç değerleri $\theta^{(0)}$ ve durdurma kriteri ε seçildikten sonra ECM algoritmasının adımları işletilir.

E-adımı: $(k + 1)$ 'inci iterasyon için $\theta^{(k)}$ verilmişken koşullu beklenen değerler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$r_{1t}^{(k)} = E(u_t | \Phi(B)y_t, \theta^{(k)}) = \frac{v^{(k)} + 1}{v^{(k)} + \kappa_t^{2(k)}} \quad (4.62)$$

$$r_{2t}^{(k)} = E(\ln u_t | \Phi(B)y_t, \theta^{(k)}) = DG\left(\frac{v^{(k)} + 1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} (v^{(k)} + \kappa_t^{2(k)})\right) \quad (4.63)$$

Burada; hesaplanan koşullu beklenen değerler, amaç fonksiyonunda yerlerine yazıldığında $E(l_c(\theta; \mathbf{y}, \mathbf{u}) | \Phi(B)y_t, \theta^{(k)}) = Q(\theta; \theta^{(k)})$ olacak şekilde amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} Q(\theta; \theta^{(k)}) = & -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + T \ln c_v + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} - \sum_{t=p+1}^N \frac{\kappa_t^2}{2} r_{1t}^{(k)} \\ & - \frac{v}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} + \left(\frac{v}{2} - 1\right) \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Değişken seçim yöntemleri için kullanılacak ECM algoritmasının E adımımda tüm değişken seçim yöntemleri için yukarıda elde edilen koşullu beklenen değerler kullanılacağı için sadece değişken seçim yöntemlerinin CM adımları aşağıda ayrılarak gösterilmiştir.

CM-adımı (Lasso)

Burada, lasso ceza fonksiyonu (4.64) eşitliğindeki amaç fonksiyonu ile birleştirerek aşağıdaki fonksiyon elde edilir:

$$\begin{aligned} Q(\theta; \theta^{(k)}) = & -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + T \ln c_v + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} - \sum_{t=p+1}^N \frac{\kappa_t^2}{2} r_{1t}^{(k)} \\ & - \frac{v}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} + \left(\frac{v}{2} - 1\right) \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} - \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Bu aşamadan itibaren ECM algoritmasının CM adımımda, bilinmeyen parametrelere göre elde edilen amaç fonksiyonu maksimize edilerek parametre tahmini ve değişken seçimi yapılmış olur.

$Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\boldsymbol{\beta}$ için tahmin edici şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{tLasso}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T + \sigma^{2(k)} T \lambda \mathbf{\Omega} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) y_t \right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$\boldsymbol{\beta}$ parametresi dışında kalan diğer parametreler model seçim sürecine dahil olmadığı ve bu parametrelere göre amaç fonksiyonu maksimize edildiğinde önceki bölümde bulunan tahmin ediciler bulunacağı için bu sonuçlar tekrar edilmemiştir.

CM-adımı (Scad)

Önceki bölümde bahsedildiği üzere scad yöntemi $|\beta_i|$ değerinin farklı aralıkları için parçalı cezalandırma fonksiyonuna sahiptir. Burada işlem karmaşıklığından kaçınmak için scad parçalı ceza fonksiyonu $p_\lambda(|\beta_i|)$ şeklinde ifade edilecektir.

Burada, bu ceza fonksiyonu (4.64) eşitliğine ekleyerek aşağıdaki amaç fonksiyonu elde edilir:

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + T \ln c_v + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} - \sum_{t=p+1}^N \frac{\kappa_t^2}{2} r_{1t}^{(k)} \\ &\quad - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} - \frac{T}{2} \mathbf{\Omega}(\beta_i^{(0)}) \beta_i^2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

Bu aşamadan itibaren ECM algoritmasının CM adımına geçilir. $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde $\boldsymbol{\beta}$ için tahmin edici şöyle bulunur:

$$\boldsymbol{\beta}_{tSCAD}^{(k+1)} = \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T + \sigma^{2(k)} T \mathbf{\Omega}(\beta_i^{(0)}) \right)^{-1}$$

$$\times \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) y_t \right) \quad (4.68)$$

β dışında kalan diğer parametreler model seçim sürecine dahil olmadığı için bu aşamada gösterilmemiştir. t dağılımı varsayımı altında otoregresif hata terimli regresyon modelinde scad metodu ile model seçimi yapmak için (4.68) eşitliğindeki tahmin edici ve önceki bölümde bulunan tahmin ediciler kullanılarak ECM algoritmasının adımları yürütülmüştür.

CM-adımı (Bridge)

Bridge ceza fonksiyonu olan $\sum_{i=1}^M |\beta_i|^\gamma$ fonksiyonuna karesel yakınsama yöntemi uygulandığında Bridge ceza fonksiyonu şu şekilde olacaktır:

$$p_{\lambda_i}(|\beta|) \approx \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2$$

Ceza terimi için bulunan bu yakınsama kullanılarak maksimizasyon için kullanılacak fonksiyon aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{aligned} Q(\theta; \theta^{(k)}) = & -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + T \ln c_v + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} \\ & - \sum_{t=p+1}^N \frac{\kappa_t^2}{2} r_{1t}^{(k)} - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} \\ & - \frac{T\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Bu fonksiyon kullanılarak β parametresine göre türev alınıp 0'a eşitlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{tBridge}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T + \gamma \lambda \mathbf{\Omega}_\gamma \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) y_t \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Diğer parametreler, model seçim sürecine dahil olmadığı ve bu parametrelere göre amaç fonksiyonu maksimize edildiğinde önceki bölümde bulunan tahmin ediciler bulunacağı için bu sonuçlar tekrar edilmemiştir. t dağılımı varsayımı altında otoregresif hata terimli regresyon modelinde bridge metodu ile model seçimi yapmak için (4.70) eşitliğindeki tahmin edici ve önceki bölümde bulunan tahmin ediciler kullanılarak ECM algoritmasının adımları yürütülebilir.

CM-adımı (Elastik net)

Elastik net ceza fonksiyonunun L_1 tipi ceza fonksiyonu ve ridge regresyonun L_2 tipi ceza fonksiyonu yazılırsa; karesel yakınsama yöntemi kullanılarak L_1 tipi ceza fonksiyonu şöyle yakınsayacaktır:

$$p_{\lambda_i}(\beta) \approx \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2$$

ECM algoritmasının amaç fonksiyonunda elastik net ceza terimi yazıldığında aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + T \ln c_\nu + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} \\ &\quad - \sum_{t=p+1}^N \frac{\kappa_t^2}{2} r_{1t}^{(k)} - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) \sum_{t=p+1}^N r_{2t}^{(k)} \\ &\quad - \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Bu fonksiyon kullanılarak β parametresine göre türev alınıp 0'a eşitlenirse şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \beta_{tEN}^{(k+1)} = & \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t^T + T \lambda_1 \mathbf{\Omega} + \lambda_2 \mathbf{I} \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{t=p+1}^N r_{1t}^{(k)} \Phi^{(k)}(B) \mathbf{x}_t \Phi^{(k)}(B) y_t \right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Diğer parametreler model seçim sürecine dahil olmadığı için ve bu parametrelere göre amaç fonksiyonu maksimize edildiğinde önceki bölümde bulunan tahmin ediciler bulunacağı için bu sonuçlar tekrar edilmemiştir. t dağılımı varsayımı altında otoregresif hata terimli regresyon modelinde Bridge metodu ile model seçimi yapmak için (4.72) eşitliğindeki tahmin edici ve önceki bölümde bulunan tahmin ediciler kullanılarak ECM algoritmasının adımları yürütülebilir.

4.5 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, sonlu örnek çapı için t dağılımlarına dayalı otoregresif hata terimli regresyon modellerinde; EKK, lasso, scad, ridge, bridge ve elastik net yöntemleri kullanılarak elde edilen model parametre tahmini ve değişken seçimi durumlarının performanslarını kıyaslamak için simülasyon çalışması verilmiştir. Simülasyon çalışmasındaki hesaplamalar, diğer bölümlerde olduğu gibi burada da R 3.4.1 (R Core Team, 2020) programı aracılığı ile yapılmıştır.

Simülasyon Tasarımı. Otoregresif hata terimli veri setlerinde sıkça karşılaşılan sorunları temsil etmek üzere üç farklı örneklem durumu ele alınmıştır. $\beta_0 = (\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0p})'$ ve $\phi_0 = (\phi_{01}, \phi_{02}, \dots, \phi_{0p})'$ sırasıyla regresyon ve otoregresif model parametre vektörlerini göstermektedir. e_t hata terimi t dağıldığı varsayılmıştır. Burada t dağılımı için iki farklı serbestlik derecesi ele alınmıştır: $\nu = 3$ (t_3) ve $\nu = 10$ (t_{10}). İlk serbestlik derecesi değeri ($\nu = 3$), kalın kuyruklu dağılım ve dikey ekseninde aykırı değer durumunu, $\nu = 10$ değeri

ise ince kuyruklu, normal dağılıma yakın dağılım durumlarının incelenmesini sağlamak üzere seçilmiştir. Her iki durum için de $\sigma = 1$ olarak ele alınmıştır. Model seçimi için lasso metodu uygulanırken λ parametresi $[0,3]$ arasında 0.1'lik artışlar olacak şekilde kurgulanmış ve bu taramadan elde edilen her bir sonuç için *BIC* değerleri hesaplanmış, en küçük olan *BIC* değerine karşılık gelen model, en iyi model olarak seçilmiştir. Benzer şekilde bridge metodu için γ parametresi, $[0.1, 2]$ aralığında 0.1 artışlarda taranmış aynı zamanda bridge metodunda kullanılan λ parametresi de taramaya dahil edilerek iki boyutlu yüzey taraması yapılmıştır. En küçük elde edilen *BIC* değerine karşılık gelen model en iyi model olarak ele alınmıştır. Scad metodu için $\alpha = 3.7$ olarak Fun ve Li (2001) tarafından önerilen değer alınmış ve lasso yönteminde olduğu gibi λ parametresi $[0,3]$ arasında 0.1'lik artışlar olacak şekilde kurgulanmıştır. Elastik net metodu için ise λ_1 ve λ_2 eş zamanlı olarak taratılmış ve elde edilen her bir sonuç için *BIC* değerlerinin en küçüğüne karşılık gelen model en iyi model olarak belirlenmiştir. Tüm durumlar için örneklem hacimleri $N = 50, 100, 300$ şeklinde alınmıştır.

Parametre tahmin performansı. Önerilen yöntemlerin parametre tahmin performanslarını ölçmek için parametrelerin HKO, yan ve EK 2'deki kısmî türevlerden elde edilen gözlenen Fisher bilgi matrisi yardımı ile elde edilen parametrelere ait standart hatalar ile hesaplanan %95 güven aralıkları sonuçları tablolastırılmıştır. HKO ve yan hesaplamaları için aşağıdaki formüller kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}\widehat{HKO}(\hat{\beta}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \beta)^2, \widehat{YAN}(\hat{\beta}) = \bar{\beta} - \beta, \\ \widehat{HKO}(\hat{\phi}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\phi}_i - \phi)^2, \widehat{YAN}(\hat{\phi}) = \bar{\phi} - \phi, \\ \widehat{HKO}(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)^2, \widehat{YAN}(\hat{\sigma}^2) = \overline{\sigma^2} - \sigma^2.\end{aligned}$$

Burada; $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i$, $\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i$, $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^2$ dır.

Değişken seçim performansı. Tüm simülasyonlar, 100 defa tekrar edilmiş ve model seçim kriterlerinin performanslarını ölçmek için her bir durum altında doğru tahmin

edilen sıfır katsayıları saydıkları oranına bakılmıştır (DSO). Benzer şekilde, modelde sıfır olmaması gerekirken sıfır bulunan katsayılar da sayılmış ve oranları hesaplanmıştır (YSO). Aynı zamanda gerçek modelde verilen doğru sıfır miktarları da her döngüde eş zamanlı olarak saydırılmış 100 tekrarda elde edilen doğru model oranı (DM) hesaplanmıştır. Otoregresif model için ise her bir durumda, otoregresif derecenin katsayısı için fazladan dört sıfır eklenerek 100 tekrarda doğru bulunan otoregresif derecenin sayısı (Dpd) sayılmıştır.

Simülasyon tasarımları. Parametre tahmini ve değişken seçimi bakımından kullanılan yöntemlerin performanslarını değerlendirmek için farklı koşulları içeren üç farklı simülasyon tasarımı kurgulanmış ve bu durumlara ait sonuçlar çizelgelerde verilmiştir.

Durum I. $\beta = (3, 1.5, 0, 0, 2, 0, 0, 0)'$ şeklinde, regresyon modelinin gerçek parametre değerleri olmak üzere veri seti $\Phi(B)y_t = \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} + a_t$ modeli kullanılarak üretilmiştir. $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{t8})'$ değişkenleri bağımsız olarak $0_{8 \times 1}$ ortalamalı ve x_{t,j_1} ile x_{t,j_2} değişkenleri arasındaki ikili korelasyonlar $0.5^{|j_1-j_2|}$ olacak şekilde çok değişkenli normal dağılımdan üretilmiştir ($x_{ti} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$). Burada AR sürecinin derecesi $p = 1, 2$ alınmıştır. AR(p) model parametrelerinin gerçek değerleri $p = 1$ durumunda $\phi = 0.8$, $p = 2$ durumunda $\phi = (0.8, -0.2)'$ değerleri alınmıştır.

Durum II. Değişken boyutu yüksek olduğu durumda elde edilen yöntemlerin performanslarını ölçmek için istatistiksel olarak 20 anlamlı, 20 anlamsız olmak üzere toplam 40 değişkenli regresyon modeli aşağıdaki gerçek parametre değerleri ile üretilmiştir:

$$\beta = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{10}, \underbrace{2, \dots, 2}_{10}, \underbrace{0, \dots, 0}_{10}, \underbrace{2, \dots, 2}_{10} \right)'.$$

AR(p) model parametreleri; $q = 1$ durumunda $\phi = 0.8$, $p = 2$ durumunda $\phi = (0.8, -0.2)'$ olarak kullanılmıştır. Açıklayıcı ve açıklanan değişkenler Durum I de olduğu şekilde ele alınmıştır.

Durum III. t dağılımına dayalı tahmin edicilerin aykırı gözlemlere karşı dayanıklılıklarını göstermek için Durum I'de tasarlanan model aykırı değerlerle yeniden ele alınmıştır. ϵ 0.1 değeri ile kontaminasyon oranını ve n örneklem hacmi olmak üzere $m = [\epsilon N]$ kontamine verilerin tam değerini göstersin. $t = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde m adet kontamine olmuş veri, $N(50, 1)$ dağılımından üretilmiş, geriye kalan $t = m, m + 1, m + 2, \dots, N$ adet veri $N(0, 1)$ 'den üretilerek aykırı değerlere sahip bir veri seti oluşturulmuştur. $\beta = (3, 1.5, 0, 0, 2, 0, 0, 0)'$ ve AR(p) model parametrelerinin gerçek değerleri $p = 1$ durumunda $\phi = 0.8$, $p = 2$ durumunda $\phi = (0.8, -0.2)'$ olarak alınmıştır. Açıklanan ve açıklayıcı değişkenler ise Durum I'deki gibi elde edilmiştir.

Değişken seçimine ilişkin simülasyon sonuçları Çizelge 4.1 - 4.10'da, aralık tahminlerine ilişkin sonuçlar ise Çizelge 4.11 - 4.13'te verilmiştir.

Simülasyon sonuçları. Çizelge 4.1 – 4.4'te, Durum I'e ilişkin sonuçlar özetlenmiştir. Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2, birinci dereceden otoregresif hata terimleriyle sırasıyla t_{10} ve t_3 varsayımı yapılarak hesaplamaların sonuçlarını göstermektedir. Çizelge 4.1'den, tüm yöntemlerin küçük HKO değerlerine göre parametre tahmin durumu için benzer performanslara sahip olduğu gözlemlenebilir. Bu durum aynı zamanda Çizelge 4.11'deki anlamlı bulunan parametrelere ait standart hata ve güven aralığı sonuçları tarafından da desteklenmektedir. Değişken seçimi ve doğru AR derecesinin seçilmesi için lasso, scad, bridge ve elastik-net yöntemlerinin diğer yöntemlere göre eşit derecede üstün performanslara sahip olduğu kolayca görülmektedir. Çizelge 4.2'de sonuçlar kalın kuyruklu dağılım altında sunulmaktadır. Bu tablodan, EKK, lasso, scad ve ridge regresyon yöntemlerinin hem parametre kestiriminde hem de değişken seçim durumlarındaki kalın kuyruktan etkilendiğini, yine de sonuçların ince kuyruklu dağılıma yakın olduğu söylenebilir. Çizelge 4.3 ve 4.4'te, ikinci derece otokorelasyon hata terimleri için sonuçlar görülmektedir. Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.1 ile Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.2'de,

yaklaşık olarak benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu tablolardan, otoregresif derece yükseldikçe söz konusu yöntemlerden elde edilen tüm sonuçların, HKO değerlerine göre kötüleştiğini izleyebiliriz. Ancak lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemleri değişken seçim performanslarını başarıyla korumaktadır. Durum III'te bahsedilen yüksek boyutlu simülasyon sonuçları, Çizelge 4.5 - 4.8'de gösterilmektedir. Çizelge 4.5'ten, bridge ve elastik net yöntemlerinin, küçük HKO değerlerine göre parametre tahmin durumu açısından oldukça iyi performansa sahip oldukları rahatlıkla söylenebilir. Yüksek boyut, lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerindeki değişken seçim senaryosunun sonuçları, zorlanmadan anlamlı değişkenleri belirlemiştir. Çizelge 4.6, kalın kuyruklu hata varsayımı ile yüksek boyut sonuçlarını birlikte göstermektedir. Bu tablodan, kalın kuyrukluluğun parametre tahmin performansı üzerindeki olumsuz etkisi; EKK, lasso, scad ve ridge regresyon yöntemlerinden görülebilir. Öte yandan; bridge ve elastik net, parametre tahmin performansı üzerinde hem kalın kuyruk hem de yüksek boyut etkileri altında diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Çizelge 4.7 ve 4.8 sırasıyla t_{10} ve t_3 olarak dağılmış ve ikinci dereceden otoregresif hata terimleri varsayımındaki sonuçları göstermektedir. Durum I'e benzer şekilde, otoregresif etki arttıkça, bahsedilen yöntemlerin parametre tahmin performansının daha da kötüleştiği söylenebilir. Bununla birlikte, bridge ve elastik net yöntemleri parametre tahmininde daha iyi performans göstermektedir. Bu durumla ilgili en dikkat çekici kısım, söz konusu yöntemler arasında AR derecesinin doğru belirlenmesinde görülmektedir. Lasso ve scad yöntemleri, regresyon modelindeki anlamlı değişkenlerin belirlenmesi açısından bridge ve elastik-net ile eşit performansa sahip olsa da bridge ve elastik-net diğer yöntemlere göre çok daha üstün bir performansa sahiptir. Çizelge 4.9 ve 4.10, Durum III için simülasyon sonuçlarını içermektedir. Çizelge 4.9'da %10 kontaminasyonla ve Çizelge 4.10'da %5 kontaminasyonla elde edilmiş veriye ilişkin sonuçlar görülmektedir. Veride bazı dikey aykırı değerler mevcutsa, tüm yöntemlerin parametre tahmin ve değişken seçim performanslarının kötüleştiği açıkça görülmektedir. Çizelge 4.10'da hem parametre tahmini hem de değişken seçim performansları için bridge ve elastik-net yöntemlerinin diğer yöntemlere göre daha iyi performans gösterdiği söylenebilir. Özellikle örneklem büyüklüğü arttığında, hem regresyon modeli için önemli değişkenlerin seçimi hem de doğru AR derecesi için bridge ve elastik-net yöntemlerinin değişken seçim performansları iyileşmiştir.

Çizelge 4.1 Normal dağılım altında Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	0.63022	0.22	0.00	0.00	0
	LASSO	0.71577	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	0.70708	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	0.81457	0.22	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.64991	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.66223	5.00	0.00	1.00	100
100	EKK	0.50160	0.36	0.00	0.00	0
	LASSO	0.58037	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	0.58469	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	0.75763	0.41	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.58469	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.59624	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	0.08640	0.66	0.00	0.00	0
	LASSO	0.01501	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	0.01446	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	0.02276	1.75	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.01936	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.01994	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.2 t dağılımı altında Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	6.14354	0.10	0.00	0.00	1
	LASSO	5.25620	5.00	0.00	1.00	80
	SCAD	4.24132	5.00	0.00	1.00	81
	Ridge	9.02561	0.06	0.00	0.00	1
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.19562	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.29511	5.00	0.00	1.00	98
100	EKK	4.58984	0.18	0.00	0.00	3
	LASSO	3.23587	5.00	0.00	1.00	85
	SCAD	2.52147	5.00	0.00	1.00	87
	Ridge	5.66542	0.23	0.00	0.00	3
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.10548	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.16212	5.00	0.00	1.00	99
300	EKK	1.41556	0.46	0.00	0.00	5
	LASSO	2.25871	5.00	0.00	1.00	91
	SCAD	1.95621	5.00	0.00	1.00	95
	Ridge	3.25471	0.55	0.00	0.00	6
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.75625	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.88524	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.3 Normal dağılım altında Durum I için değişken seçim sonuçları p=2

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	1.20224	0.12	0.00	0.00	0
	LASSO	2.55725	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	1.50708	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	2.71457	0.13	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.17904	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.03620	5.00	0.00	1.00	100
100	EKK	0.81485	0.25	0.00	0.00	0
	LASSO	1.39416	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	1.25595	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	1.99491	0.24	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.00469	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.70041	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	0.52598	0.60	0.00	0.00	0
	LASSO	1.26441	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	0.81565	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	1.20595	1.64	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.57927	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.61257	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.4 t dağılımı altında Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	8.39124	0.10	0.00	0.00	1
	LASSO	6.81415	5.00	0.00	1.00	77
	SCAD	6.50981	5.00	0.00	1.00	75
	Ridge	10.1145	0.09	0.00	0.00	1
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	2.65604	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	2.02209	5.00	0.00	1.00	95
100	EKK	6.01922	0.25	0.00	0.00	2
	LASSO	5.58925	5.00	0.00	1.00	83
	SCAD	3.52912	5.00	0.00	1.00	80
	Ridge	7.56630	0.32	0.00	0.00	3
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.95292	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.69129	5.00	0.00	1.00	99
300	EKK	4.05256	0.31	0.00	0.00	4
	LASSO	4.12623	5.00	0.00	1.00	85
	SCAD	2.95562	5.00	0.00	1.00	90
	Ridge	5.95624	0.43	0.00	0.00	5
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.98527	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.99814	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.5 Normal dağılım altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	149.9554	0.10	0.02	0.00	0
	LASSO	15.57302	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	20.42574	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	22.06755	0.30	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	1.838428	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.549361	20.00	0.00	1.00	100
100	EKK	95.9561	0.21	0.01	0.00	0
	LASSO	7.30260	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	11.4591	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	12.6466	0.42	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	0.95664	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.65483	20.00	0.00	1.00	100
300	EKK	75.6543	0.40	0.01	0.00	0
	LASSO	6.55169	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	9.65418	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	9.87563	0.56	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.56978	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.45929	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.6 t dağılım altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	592.955	0.06	0.02	0.00	0
	LASSO	59.4949	20.00	0.00	1.00	90
	SCAD	40.2942	20.00	0.00	1.00	95
	Ridge	69.5491	0.12	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	2.98516	20.00	0.00	1.00	98
	Elastik-Net	2.78965	20.00	0.00	1.00	97
100	EKK	254.281	0.12	0.01	0.00	0
	LASSO	39.3218	20.00	0.00	1.00	92
	SCAD	20.9265	20.00	0.00	1.00	96
	Ridge	49.5232	0.25	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.84567	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.95148	20.00	0.00	1.00	99
300	EKK	175.986	0.21	0.01	0.00	0
	LASSO	26.5169	20.00	0.00	1.00	96
	SCAD	16.5166	20.00	0.00	1.00	99
	Ridge	39.9563	0.33	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	1.55941	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.46847	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.7 Normal dağılım altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	198.112	0.08	0.02	0.00	0
	LASSO	21.2455	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	27.1567	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	24.8754	0.27	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	2.31128	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	2.79868	20.00	0.00	1.00	100
100	EKK	129.135	0.11	0.01	0.00	0
	LASSO	18.3025	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	18.2169	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	19.6468	0.30	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.64554	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.98415	20.00	0.00	1.00	100
300	EKK	91.6543	0.40	0.01	0.00	0
	LASSO	10.1249	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	11.6874	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	10.1982	0.56	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	0.82985	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.95956	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.8 t dağılım altında Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	854.541	0.02	0.02	0.00	0
	LASSO	61.1156	20.00	0.00	1.00	51
	SCAD	63.1565	20.00	0.00	1.00	78
	Ridge	84.7545	0.18	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	6.15694	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	5.79868	20.00	0.00	1.00	99
100	EKK	651.122	0.08	0.01	0.00	0
	LASSO	52.8302	20.00	0.00	1.00	59
	SCAD	54.2169	20.00	0.00	1.00	89
	Ridge	71.2646	0.24	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	4.64554	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	3.98415	20.00	0.00	1.00	100
300	EKK	501.250	0.16	0.00	0.00	0
	LASSO	42.8921	20.00	0.00	1.00	65
	SCAD	46.1258	20.00	0.00	1.00	91
	Ridge	62.4518	0.45	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	2.12355	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	2.12585	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.9 Durum III için değişken seçim sonuçları

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	8548.54	0.00	0.21	0.00	0
	LASSO	2547.11	3.88	0.02	0.88	32
	SCAD	125.156	3.75	0.09	0.75	46
	Ridge	1587.87	0.00	0.20	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	52.1569	4.20	0.02	0.99	89
	Elastik-Net	48.7986	4.03	0.03	0.97	82
100	EKK	4214.21	0.00	0.18	0.00	0
	LASSO	1557.35	3.96	0.01	0.88	45
	SCAD	84.9565	3.87	0.06	0.75	59
	Ridge	834.142	0.00	0.12	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	21.2581	4.65	0.01	0.99	92
	Elastik-Net	19.1471	4.56	0.01	0.97	91
300	EKK	1058.25	0.00	0.00	0.00	0
	LASSO	1012.25	4.55	0.08	1.00	72
	SCAD	41.2541	4.31	0.00	0.98	79
	Ridge	421.542	0.00	0.02	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	10.1231	4.82	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	11.2354	4.81	0.00	1.00	100

Çizelge 4.10 Durum III için değişken seçim sonuçları

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	298.651	0.07	0.21	0.00	0
	LASSO	259.842	4.02	0.00	1.00	51
	SCAD	54.6590	4.55	0.01	0.97	81
	Ridge	55.9861	0.08	0.15	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	8.36152	4.95	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	8.15713	4.91	0.00	1.00	95
100	EKK	142.122	0.11	0.11	0.00	0
	LASSO	122.830	4.45	0.00	1.00	89
	SCAD	38.2169	4.72	0.00	1.00	90
	Ridge	47.2646	0.18	0.10	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	6.19841	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	7.98415	5.00	0.00	1.00	99
300	EKK	109.251	0.20	0.09	0.00	0
	LASSO	18.4892	4.71	0.00	1.00	95
	SCAD	32.1258	4.85	0.00	1.00	97
	Ridge	42.4568	0.22	0.04	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	5.01521	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	5.12585	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 4.11 Durum I için parametre tahmin sonuçları

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
t_3	50	$\hat{\beta}_1$	2.7854	3.5749	3.5135	3.4360	3.3852	3.4749
		<i>HKO</i>	0.2301	0.4302	0.7136	0.4075	0.2430	0.2602
		$\overline{SE}$	0.8598	1.2961	1.8778	1.5131	0.7597	0.9965
		$\overline{AS}$	1.8101	1.5366	1.2082	1.3272	1.8521	1.7368
		$\overline{US}$	4.5754	4.9514	4.9189	4.2449	4.1753	4.1484
		$\hat{\beta}_2$	1.3817	1.3017	1.3045	1.4201	1.4225	1.4640
		<i>HKO</i>	0.0372	0.0956	0.0945	0.0850	0.0298	0.0406
		$\overline{SE}$	0.2119	0.2997	0.3235	0.2930	0.2017	0.3041
		$\overline{AS}$	1.2904	1.1513	1.1045	1.3677	1.2844	1.2513
		$\overline{US}$	1.7108	1.8417	1.8846	1.7522	1.7012	1.7418
		$\hat{\beta}_5$	2.1959	2.6039	2.7100	2.2008	2.1239	2.1477
		<i>HKO</i>	0.7168	0.8537	0.9901	0.8110	0.7461	0.7533
		$\overline{SE}$	1.0813	1.3596	1.3182	1.2930	1.1562	1.1231
		$\overline{AS}$	0.9266	0.7964	0.7574	0.8370	0.9174	0.9012
		$\overline{US}$	3.1687	3.6499	3.7025	3.6645	3.2182	3.2497
	100	$\hat{\beta}_1$	2.8034	2.8273	3.3484	3.3611	3.2031	3.3270
		<i>HKO</i>	0.1715	0.3810	0.6699	0.3618	0.1845	0.1822
		$\overline{SE}$	0.7261	1.1414	1.6826	1.2476	0.6177	0.8019
		$\overline{AS}$	1.9136	1.6208	1.4833	1.4007	1.9012	1.7951
		$\overline{US}$	4.0931	4.7338	4.7536	4.2214	4.0130	4.3380
		$\hat{\beta}_2$	1.4276	1.3626	1.3983	1.4413	1.4776	1.4826
		<i>HKO</i>	0.0232	0.0854	0.0825	0.0669	0.0292	0.0354
		$\overline{SE}$	0.1403	0.1397	0.2227	0.2035	0.1983	0.2197
		$\overline{AS}$	1.3644	1.2211	1.2213	1.3027	1.3644	1.2471
		$\overline{US}$	1.6196	1.7364	1.7778	1.7152	1.6796	1.6364
		$\hat{\beta}_5$	1.8711	2.5923	2.6911	2.1949	2.0711	2.1123
		<i>HKO</i>	0.5349	0.7105	0.8948	0.7188	0.6949	0.7321
		$\overline{SE}$	0.9241	0.9963	0.9948	1.1381	0.9141	0.9963
		$\overline{AS}$	1.2894	1.1490	1.1774	1.2606	1.3891	1.2493
		$\overline{US}$	2.8300	3.2264	3.2048	3.1692	2.9300	2.9964
	300	$\hat{\beta}_1$	3.1034	3.2273	3.2484	3.1611	3.1112	3.1273
		<i>HKO</i>	0.0715	0.0810	0.0999	0.0818	0.0795	0.0810
		$\overline{SE}$	0.0261	0.1114	0.1260	0.0476	0.0761	0.1414
		$\overline{AS}$	2.2136	1.7208	1.8833	1.7007	2.1131	1.9208
		$\overline{US}$	3.8924	4.3338	4.4136	4.0214	3.9931	4.0128
		$\hat{\beta}_2$	1.4844	1.4194	1.4551	1.4981	1.5344	1.5394
		<i>HKO</i>	0.0064	0.0686	0.0657	0.0501	0.0124	0.0186
		$\overline{SE}$	0.1235	0.1229	0.2059	0.1867	0.1815	0.2029
		$\overline{AS}$	1.4212	1.2779	1.2781	1.3595	1.4212	1.3039
		$\overline{US}$	1.5628	1.6796	1.7210	1.6584	1.6228	1.5796
		$\hat{\beta}_5$	1.9279	2.5355	2.6343	2.1381	2.0143	2.0555
		<i>HKO</i>	0.5181	0.6937	0.8780	0.7020	0.6781	0.7153
		$\overline{SE}$	0.9073	0.9795	0.9780	1.1213	0.8973	0.9795
		$\overline{AS}$	1.3462	1.2058	1.2342	1.3174	1.4459	1.3061
		$\overline{US}$	2.7732	3.1696	3.1480	3.1124	2.8732	2.9396

Çizelge 4.11 Durum I için parametre tahmin sonuçları (devam)

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
<i>t</i> ₁₀	50	$\hat{\beta}_1$	2.8669	3.4934	3.4320	3.3545	3.3037	3.3934
		<i>HKO</i>	0.2056	0.4057	0.6891	0.3830	0.2185	0.2357
		$\overline{SE}$	0.8353	1.2716	1.8533	1.4886	0.7352	0.9720
		$\overline{AS}$	1.8426	1.5691	1.2407	1.3597	1.8846	1.7693
		$\overline{US}$	4.5439	4.9199	4.8874	4.2134	4.1438	4.1169
		$\hat{\beta}_2$	1.4632	1.2202	1.2230	1.3386	1.3410	1.3825
		<i>HKO</i>	0.0127	0.0711	0.0700	0.0605	0.0053	0.0161
		$\overline{SE}$	0.1874	0.2752	0.2990	0.2685	0.1772	0.2796
		$\overline{AS}$	1.3229	1.1838	1.1370	1.4002	1.3169	1.2838
		$\overline{US}$	1.6793	1.8102	1.8531	1.7207	1.6697	1.7103
		$\hat{\beta}_5$	2.2774	2.5224	2.6285	2.1193	2.0424	2.0662
		<i>HKO</i>	0.6923	0.8292	0.9656	0.7865	0.7216	0.7288
		$\overline{SE}$	1.0568	1.3351	1.2937	1.2685	1.1317	1.0986
		$\overline{AS}$	0.9591	0.8289	0.7899	0.8695	0.9499	0.9337
		$\overline{US}$	3.1372	3.6184	3.6710	3.6330	3.1867	3.2182
	100	$\hat{\beta}_1$	2.8849	2.7458	3.2669	3.2796	3.1216	3.2455
		<i>HKO</i>	0.1470	0.3565	0.6454	0.3373	0.1600	0.1577
		$\overline{SE}$	0.7016	1.1169	1.6581	1.2231	0.5932	0.7774
		$\overline{AS}$	1.9461	1.6533	1.5158	1.4332	1.9337	1.8276
		$\overline{US}$	4.0616	4.7023	4.7221	4.1899	3.9815	4.3065
		$\hat{\beta}_2$	1.5091	1.2811	1.3168	1.3598	1.3961	1.4011
		<i>HKO</i>	0.0013	0.0609	0.0580	0.0424	0.0047	0.0109
		$\overline{SE}$	0.1158	0.1152	0.1982	0.1790	0.1738	0.1952
		$\overline{AS}$	1.3969	1.2536	1.2538	1.3352	1.3969	1.2796
		$\overline{US}$	1.5881	1.7049	1.7463	1.6837	1.6481	1.6049
		$\hat{\beta}_5$	1.9526	2.5108	2.6096	2.1134	1.9896	2.0308
		<i>HKO</i>	0.5104	0.6860	0.8703	0.6943	0.6704	0.7076
		$\overline{SE}$	0.8996	0.9718	0.9703	1.1136	0.8896	0.9718
		$\overline{AS}$	1.3219	1.1815	1.2099	1.2931	1.4216	1.2818
		$\overline{US}$	2.7985	3.1949	3.1733	3.1377	2.8985	2.9649
	300	$\hat{\beta}_1$	3.1849	3.1458	3.1669	3.0796	3.0297	3.0458
		<i>HKO</i>	0.0470	0.0565	0.0754	0.0573	0.0550	0.0565
		$\overline{SE}$	0.0016	0.0869	0.1015	0.0231	0.0516	0.1169
		$\overline{AS}$	2.2461	1.7533	1.9158	1.7332	2.1456	1.9533
		$\overline{US}$	3.8609	4.3023	4.3821	3.9899	3.9616	3.9813
		$\hat{\beta}_2$	1.5659	1.3379	1.3736	1.4166	1.4529	1.4579
		<i>HKO</i>	0.0181	0.0441	0.0412	0.0256	0.0121	0.0059
		$\overline{SE}$	0.0990	0.0984	0.1814	0.1622	0.1570	0.1784
		$\overline{AS}$	1.4537	1.3104	1.3106	1.3920	1.4537	1.3364
		$\overline{US}$	1.5313	1.6481	1.6895	1.6269	1.5913	1.5481
		$\hat{\beta}_5$	2.0094	2.4540	2.5528	2.0566	1.9328	1.9740
		<i>HKO</i>	0.4936	0.6692	0.8535	0.6775	0.6536	0.6908
		$\overline{SE}$	0.8828	0.9550	0.9535	1.0968	0.8728	0.9550
		$\overline{AS}$	1.3787	1.2383	1.2667	1.3499	1.4784	1.3386
		$\overline{US}$	2.7417	3.1381	3.1165	3.0809	2.8417	2.9081

Çizelge 4.12 Durum II için parametre tahmin sonuçları

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
<i>t</i> ₁₀	50	$\hat{\beta}$	0.8581	0.7749	0.7135	0.8360	0.8854	0.8849
		<i>HKO</i>	14.030	16.302	15.136	8.1075	4.0231	4.0272
		$\overline{SE}$	0.0598	0.0965	0.0678	0.0431	0.0198	0.0265
		$\overline{AS}$	0.2101	0.1066	0.1082	0.2272	0.2522	0.1761
		$\overline{US}$	1.6754	1.8484	1.8189	1.7449	1.6998	1.7122
	100	$\hat{\beta}$	0.9396	0.8564	0.7950	0.9175	0.9669	0.9664
		<i>HKO</i>	12.168	14.440	13.274	6.2455	2.1611	2.1652
		$\overline{SE}$	0.0466	0.0833	0.0546	0.0299	0.0066	0.0133
		$\overline{AS}$	0.2426	0.1391	0.1407	0.2597	0.2847	0.2086
		$\overline{US}$	1.6439	1.8169	1.7874	1.7134	1.6683	1.6807
	300	$\hat{\beta}$	1.0211	0.9379	0.8765	0.9990	1.0484	1.0479
		<i>HKO</i>	10.306	12.578	11.412	4.3835	0.2991	0.3032
		$\overline{SE}$	0.0334	0.0701	0.0414	0.0167	0.0066	0.0001
		$\overline{AS}$	0.2751	0.1716	0.1732	0.2922	0.3172	0.2411
		$\overline{US}$	1.6124	1.7854	1.7559	1.6819	1.6368	1.6492
<i>t</i> ₃	50	$\hat{\beta}$	0.7766	0.6934	0.6320	0.7545	0.8039	0.8034
		<i>HKO</i>	16.387	18.659	17.493	10.464	6.3801	6.3842
		$\overline{SE}$	0.1530	0.1897	0.1610	0.1363	0.1130	0.1197
		$\overline{AS}$	0.1776	0.0741	0.0757	0.1947	0.2197	0.1436
		$\overline{US}$	1.7069	1.8799	1.8504	1.7764	1.7313	1.7437
	100	$\hat{\beta}$	0.8581	0.7749	0.7135	0.8360	0.8854	0.8849
		<i>HKO</i>	14.525	16.797	15.631	8.6025	4.5181	4.5222
		$\overline{SE}$	0.1398	0.1765	0.1478	0.1231	0.0998	0.1065
		$\overline{AS}$	0.2101	0.1066	0.1082	0.2272	0.2522	0.1761
		$\overline{US}$	1.6754	1.8484	1.8189	1.7449	1.6998	1.7122
	300	$\hat{\beta}$	0.9396	0.8564	0.7950	0.9175	0.9669	0.9664
		<i>HKO</i>	12.663	14.935	13.769	6.7405	2.6561	2.6602
		$\overline{SE}$	0.1266	0.1633	0.1346	0.1099	0.0998	0.0933
		$\overline{AS}$	0.2426	0.1391	0.1407	0.2597	0.2847	0.2086
		$\overline{US}$	1.6439	1.8169	1.7874	1.7134	1.6683	1.6807

Çizelge 4.13 Durum III için parametre tahmin sonuçları

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
t_3	50	$\hat{\beta}_1$	4.5669	4.3564	4.2950	4.2175	4.1667	4.2564
		<i>HKO</i>	4.8871	4.7872	5.0706	4.7645	4.6000	4.6172
		$\overline{SE}$	0.9530	1.3893	1.9710	1.6063	0.8529	1.0897
		$\overline{AS}$	0.9776	0.7041	0.3757	0.4947	1.0196	0.9043
		$\overline{US}$	5.4069	5.7829	5.7504	5.0764	5.0068	4.9799
		$\hat{\beta}_2$	2.1632	2.0832	2.0860	2.2016	2.2040	2.2455
		<i>HKO</i>	2.3942	2.4526	2.4515	2.4420	2.3868	2.3976
		$\overline{SE}$	0.3051	0.3929	0.4167	0.3862	0.2949	0.3973
		$\overline{AS}$	0.4579	0.3188	0.2720	0.5352	0.4519	0.4188
		$\overline{US}$	2.5423	2.6732	2.7161	2.5837	2.5327	2.5733
		$\hat{\beta}_5$	2.9774	3.3854	3.4915	2.9823	2.9054	2.9292
		<i>HKO</i>	3.0738	3.2107	3.3471	3.1680	3.1031	3.1103
		$\overline{SE}$	1.1745	1.4528	1.4114	1.3862	1.2494	1.2163
		$\overline{AS}$	0.0941	-0.0361	-0.0751	0.0045	0.0849	0.0687
		$\overline{US}$	4.0002	4.4814	4.5340	4.4960	4.0497	4.0812
	100	$\hat{\beta}_1$	3.5849	3.6088	4.1299	4.1426	3.9846	4.1085
		<i>HKO</i>	2.9285	2.7380	3.0269	2.7188	2.5415	2.5392
		$\overline{SE}$	0.8193	1.2346	1.7758	1.3408	0.7109	0.8951
		$\overline{AS}$	1.0811	0.7883	0.6508	0.5682	1.0687	0.9626
		$\overline{US}$	4.9246	5.5653	5.5851	5.0529	4.8445	5.1695
		$\hat{\beta}_2$	2.2091	2.1441	2.1798	2.2228	2.2591	2.2641
		<i>HKO</i>	2.3802	2.4424	2.4395	2.4239	2.3862	2.3924
		$\overline{SE}$	0.2335	0.2329	0.3159	0.2967	0.2915	0.3129
		$\overline{AS}$	0.5319	0.3886	0.3888	0.4702	0.5319	0.4146
		$\overline{US}$	2.4511	2.5679	2.6093	2.5467	2.5111	2.4679
		$\hat{\beta}_5$	2.6526	3.3738	3.4726	2.9764	2.8526	2.8938
		<i>HKO</i>	2.8919	3.0675	3.2518	3.0758	3.0519	3.0891
		$\overline{SE}$	1.0173	1.0895	1.0880	1.2313	1.0073	1.0895
		$\overline{AS}$	0.4569	0.3165	0.3449	0.4281	0.5566	0.4168
		$\overline{US}$	3.6615	4.0579	4.0363	4.0007	3.7615	3.8279
	300	$\hat{\beta}_1$	3.8849	4.0088	4.0299	3.9426	3.8927	3.9088
		<i>HKO</i>	2.4285	2.4380	2.4569	2.4388	2.4365	2.4380
		$\overline{SE}$	0.1193	0.2046	0.2192	0.1408	0.1693	0.2346
		$\overline{AS}$	1.3811	0.8883	1.0508	0.8682	1.2806	1.0883
		$\overline{US}$	4.7239	5.1653	5.2451	4.8529	4.8246	4.8443
		$\hat{\beta}_2$	2.2659	2.2009	2.2366	2.2796	2.3159	2.3209
		<i>HKO</i>	2.3634	2.4256	2.4227	2.4071	2.3694	2.3756
		$\overline{SE}$	0.2167	0.2161	0.2991	0.2799	0.2747	0.2961
		$\overline{AS}$	0.5887	0.4454	0.4456	0.5270	0.5887	0.4714
		$\overline{US}$	2.3943	2.5111	2.5525	2.4899	2.4543	2.4111
		$\hat{\beta}_5$	2.7094	3.3170	3.4158	2.9196	2.7958	2.8370
		<i>HKO</i>	2.8751	3.0507	3.2350	3.0590	3.0351	3.0723
		$\overline{SE}$	1.0005	1.0727	1.0712	1.2145	0.9905	1.0727
		$\overline{AS}$	0.5137	0.3733	0.4017	0.4849	0.6134	0.4736
		$\overline{US}$	3.6047	4.0011	3.9795	3.9439	3.7047	3.7711

Çizelge 4.13 Durum III için parametre tahmin sonuçları (devam)

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
t_{10}	50	$\hat{\beta}_1$	5.6484	6.2749	6.2135	6.1360	6.0852	6.1749
		<i>HKO</i>	11.5626	11.7627	12.0461	11.7400	11.5755	11.5927
		$\overline{SE}$	2.9285	3.3648	3.9465	3.5818	2.8284	3.0652
		$\overline{AS}$	0.4101	0.1366	-0.1918	-0.0728	0.4521	0.3368
		$\overline{US}$	6.0754	6.4514	6.4189	5.7449	5.6753	5.6484
		$\hat{\beta}_2$	4.2447	4.0017	4.0045	4.1201	4.1225	4.1640
		<i>HKO</i>	10.3697	10.4281	10.4270	10.4175	10.3623	10.3731
		$\overline{SE}$	2.2806	2.3684	2.3922	2.3617	2.2704	2.3728
		$\overline{AS}$	-0.1096	-0.2487	-0.2955	-0.0323	-0.1156	-0.1487
		$\overline{US}$	3.2108	3.3417	3.3846	3.2522	3.2012	3.2418
		$\hat{\beta}_5$	5.0589	5.3039	5.4100	4.9008	4.8239	4.8477
		<i>HKO</i>	11.0493	11.1862	11.3226	11.1435	11.0786	11.0858
		$\overline{SE}$	3.1500	3.4283	3.3869	3.3617	3.2249	3.1918
		$\overline{AS}$	-0.4734	-0.6036	-0.6426	-0.5630	-0.4826	-0.4988
		$\overline{US}$	4.6687	5.1499	5.2025	5.1645	4.7182	4.7497
	100	$\hat{\beta}_1$	5.6664	5.5273	6.0484	6.0611	5.9031	6.0270
		<i>HKO</i>	9.8040	10.0135	10.3024	9.9943	9.8170	9.8147
		$\overline{SE}$	2.7948	3.2101	3.7513	3.3163	2.6864	2.8706
		$\overline{AS}$	0.5136	0.2208	0.0833	0.0007	0.5012	0.3951
		$\overline{US}$	5.5931	6.2338	6.2536	5.7214	5.5130	5.8380
		$\hat{\beta}_2$	4.2906	4.0626	4.0983	4.1413	4.1776	4.1826
		<i>HKO</i>	9.6583	9.7179	9.7150	9.6994	9.6617	9.6679
		$\overline{SE}$	2.2090	2.2084	2.2914	2.2722	2.2670	2.2884
		$\overline{AS}$	-0.0356	-0.1789	-0.1787	-0.0973	-0.0356	-0.1529
		$\overline{US}$	3.1196	3.2364	3.2778	3.2152	3.1796	3.1364
		$\hat{\beta}_5$	4.7341	5.2923	5.3911	4.8949	4.7711	4.8123
		<i>HKO</i>	10.1674	10.3430	10.5273	10.3513	10.3274	10.3646
		$\overline{SE}$	2.9928	3.0650	3.0635	3.2068	2.9828	3.0650
		$\overline{AS}$	-0.1106	-0.2510	-0.2226	-0.1394	-0.0109	-0.1507
		$\overline{US}$	4.3300	4.7264	4.7048	4.6692	4.4300	4.4964
	300	$\hat{\beta}_1$	5.9664	5.9273	5.9484	5.8611	5.8112	5.8273
		<i>HKO</i>	8.7040	8.7135	8.7324	8.7143	8.7120	8.7135
		$\overline{SE}$	2.0948	2.1801	2.1947	2.1163	2.1448	2.2101
		$\overline{AS}$	0.8136	0.3208	0.4833	0.3007	0.7131	0.5208
		$\overline{US}$	5.3924	5.8338	5.9136	5.5214	5.4931	5.5128
		$\hat{\beta}_2$	4.3474	4.1194	4.1551	4.1981	4.2344	4.2394
		<i>HKO</i>	8.6751	8.7011	8.6982	8.6826	8.6691	8.6629
		$\overline{SE}$	2.1922	2.1916	2.2746	2.2554	2.2502	2.2716
		$\overline{AS}$	0.0212	-0.1221	-0.1219	-0.0405	0.0212	-0.0961
		$\overline{US}$	3.0628	3.1796	3.2210	3.1584	3.1228	3.0796
		$\hat{\beta}_5$	4.7909	5.2355	5.3343	4.8381	4.7143	4.7555
		<i>HKO</i>	9.1506	9.3262	9.5105	9.3345	9.3106	9.3478
		$\overline{SE}$	2.9760	3.0482	3.0467	3.1900	2.9660	3.0482
		$\overline{AS}$	-0.0538	-0.1942	-0.1658	-0.0826	0.0459	-0.0939
		$\overline{US}$	4.2732	4.6696	4.6480	4.6124	4.3732	4.4396

4.6 San Diego Elektrik ve Gaz Verisi

Bu bölümde, Ramanathan (1992) tarafından kullanılan veri seti, önerilen değişken seçimi yöntemlerini t ve normal dağılım varsayımları altında karşılaştırmak amacıyla ele alınmıştır. Veri seti, “San Diego Electric and Gas Company” tarafından hane halklarına sağlanan elektrik tüketimine ilişkin değişkenlerden oluşmaktadır. Veriler 1972 ile 1993 yılları arasında çeyreklik şeklinde toplanmış ve toplam örneklem çapı 87’dir. Açıklanan değişken, evler tarafından kilovat (LKWH) olarak tüketilen elektriğin logaritmik değeridir. Açıklayıcı değişkenler, hane halklarının gelirleri (LY), elektrik kilovat fiyatı (LPRICE), evleri soğutmak için gereken enerji (CDD) ve evleri ısıtmak için gereken enerjidir (HDD). Ramanathan (1992) tarafından elde edilen regresyon modeli ve beklenen parametre işaretleri aşağıdaki gibidir:

$$LKWH = \beta_0 + \beta_1 LY + \beta_2 LPRICE + \beta_3 CDD + \beta_4 HDD + \varepsilon_t$$
$$\beta_1 > 0, \beta_2 < 0, \beta_3 > 0, \beta_4 > 0.$$

Yapılan EKK tahmini sonucunda, pozitif yönlü katsayı beklenmesine rağmen; konut geliri (LY) değişkeni negatif işaretli olarak elde edilmiştir. Otoregresif hata etkisini yok sayarak parametre tahmini yapılması bu hataya neden olmaktadır. Bununla birlikte, hata terimleri otoregresif hata terimi varsayımı ile modellenip parametreler, bu varsayım altında tekrar tahmin edildiğinde tüm parametre tahminlerinin işaretleri beklendiği gibi elde edilmektedir. Bu veri setinde parametre tahminleri ile beraber anlamlı değişkenlerin doğru olarak seçilip seçilemediğini gözlemlemek için önerilen değişken seçim yöntemleri kullanılmıştır. Parametre tahminlerine ilişkin sonuçlar, Çizelge 4.14’te verilmiştir. Bu çizelgeden, otoregresif hata terimi varsayımı göz ardı edildiğinde, LY değişkeninin beklenen işaretinin zıt yönde elde edildiği görülmektedir. Bu sebeple verinin modellemesinde hataların otoregresif yapıda ilişkili olduğu varsayımı kullanılmalıdır. Çizelge 4.15’ten, AR (4) yapıda hata terimi ile t dağılımı varsayımları altında değişken seçim yöntemlerinin sonuçları görülmektedir. Buna göre Çizelge EKK ve ridge yöntemlerinin tüm değişkenleri anlamlı olarak seçtiği görülmektedir. Öte yandan lasso, scad ve bridge yöntemleri LY değişkeninin önemsiz olduğunu göstermektedir. Verileri t dağılımına göre ridge, lasso ve scad yöntemleriyle modellediğimizde, bu yöntemler LY ve LPRICE değişkenlerini anlamlı olarak seçmektedir. Bununla birlikte, bridge ve elastik

net yöntemleri sadece LPRICE değişkenini önemli olarak seçer. Bu sonuçlara göre evlerde tüketilen elektrik miktarını, sadece elektrik kilovat fiyatının (LPRICE) etkilediğini söyleyebiliriz.

Çizelge 4.14 Elektrik ve gaz verisi parametre tahmin sonuçları

		EKK	EKK(AR)
LY	$\hat{\beta}_1$	-0.00234	0.18625
LPRICE	$\hat{\beta}_2$	-0.01856	-0.09354
CDD	$\hat{\beta}_3$	0.06365	0.00029
HDD	$\hat{\beta}_4$	0.08564	0.00022
Dpd		-	4

Çizelge 4.15 Elektrik ve gaz verisi değişken seçim sonuçları

Normal	Seçilen Değişkenler	AIC	t	Seçilen Değişkenler	AIC
EKK	(1,2,3,4)	251.145	LASSO	(1,2)	311.258
LASSO	(2,3,4)	134.197	SCAD	(1,2)	127.137
SCAD	(2,3,4)	129.658	Bridge	(2)	117.151
Bridge	(2,3,4)	119.583	Elastik net	(2)	112.398
Elastik net	(2,3,4)	121.368			

5. ÇARPIK DAĞILIMLAR VARSAYIMI ALTINDA DEĞİŞKEN SEÇİMİ

Gerçek veriler üzerinde bir regresyon analizi yapılmak istendiğinde, eldeki veriler her zaman normallik koşullarını karşılamayabilir. Bu gibi durumlarda, model parametrelerinin tahmini ve değişken seçimi yapılırken hata dağılımı varsayımının kalın kuyruklu ve/veya çarpık gibi normal dağılıma göre daha esnek dağılımlarla değiştirilmesi gerekebilir. Bu bölümde, Azzalini tipi çarpık normal ve Azzalini tipi çarpık t dağılımlarına dayalı otoregresif hata terimli regresyon modelinde parametre tahminine ek olarak, Bölüm 4'te yer alan değişken seçim yöntemleri kullanılacaktır.

5.1 Çarpık Normal Dağılımı Varsayımı Altında Değişken Seçimi

Bu bölümde, ilk olarak analizi yapılacak verilerin simetrik normal dağılıma alternatif olarak ince kuyruklu ve çarpık bir dağılımdan geldiği varsayımı altında, üçüncü bölümde kullanılan Azzalini tipi çarpık normal dağılım ele alınmıştır. Bu dağılımın avantajı, dağılımın çarpıklık parametresinin sıfır olması durumunda olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinen normal dağılıma dönüşmesidir. Bu sayede analizi yapılacak veri, araştırmacı tarafından hatalı olarak çarpık varsayılsa dahi, çarpıklık parametresi sıfır veya sıfıra çok yakın tahmin edildiğinde; dağılım simetrik normal dağılıma dönüşeceği için parametre tahminleri ve değişken seçimleri, simetrik dağılım varsayımıyla yapılmış olacaktır. Bu sayede veri üzerinde, hatayla çarpıklık varsayımı yapılsa dahi parametre tahminleri ve değişken seçimi sorunsuz elde edilecektir. Değişken seçimi ve parametre tahmini yapabilmek için önceki bölümde bahsedildiği gibi amaç fonksiyonu yerine Azzalini tipi çarpık normal dağılımın log-olabilirlik fonksiyonu kullanılarak bu fonksiyon aşağıdaki şekilde ceza fonksiyonlarını da içerecek şekilde yeniden ifade edilebilir. Buna göre Azzalini tipi çarpık normal dağılımın log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebilir:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2, \zeta | a_t) = T(\ln(2) - \ln(\sigma)) - \frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{((\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=p+1}^N \ln \left(F \left(\frac{\zeta(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma} \right) \right) \\
& + T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Ancak 2. Bölümde de bahsedildiği üzere, bu fonksiyonu maksimum yapan çözüm analitik olarak elde edilemediği için çarpık normal dağılımın stokastik gösterimini kullanarak aşağıdaki koşullu log-olabilirlik fonksiyonunu elde etmek, değişken seçimi için çözüm adımlarını kolaylaştıracaktır. $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2, \zeta)$ bilinmeyen parametre vektörünü ve $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ kayıp değişken olmak üzere $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma})$ tam veriyi gösterebilir. Cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) &= -\frac{T}{2} (\ln(\kappa^2)) \\
& - \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \right) \\
& + \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{\kappa^2} \right) \\
& E(\gamma_t | \Phi(B)y_t) - \frac{\alpha^2}{2\kappa^2} E(\gamma_t^2 | \Phi(B)y_t) \\
& + T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

(5.2) eşitliğinde elde edilen bu fonksiyon; EM algoritmasının M adımında, ilgili değişken seçim yöntemine ait ceza terimleri eklenmiş haliyle kullanılacaktır. Bu sayede yapılan maksimizasyon işlemi sonucunda elde edilecek olan fonksiyonlar, parametre tahmini ile değişken seçimini eş zamanlı olarak yapacaktır. Bu fonksiyonda yer alan koşullu beklenen değerler yerine, Bölüm 3'te hesaplanan koşullu beklenen değerlerin eşitlikleri yazılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) = -\frac{T}{2} (\ln(\kappa^2)) - \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{\kappa^2} \right) S_{1t} - \frac{\alpha^2}{2\kappa^2} S_{2t} \\
& + T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Burada; $S_{1t} = E(y_t | \phi(B)y_t) = \delta \eta_t + \sqrt{1 - \delta^2} \frac{f(\zeta \eta_t)}{F(\zeta \eta_t)}$, $S_{2t} = E(y_t^2 | \phi(B)y_t) = 1 - \delta^2 + \delta^2 \eta_t S_{1t}$, $\eta_t = \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma^{(k)}}$ ve $\delta = \sqrt{1 + \zeta^2}$ dir.

Bundan sonra gelecek olan, değişken seçimi kısımlarında gösterim ve tekrar karmaşıklığından kaçınmak için bu eşitlik, değişken seçim yöntemine ait fonksiyon ilgili yere gelecek şekilde aşağıdaki gibi kullanılacaktır:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) + T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|) \tag{5.4}$$

İstenilen yönteme ait ceza fonksiyonu yukarıdaki olabilirlik fonksiyonunda yerine konularak aranan parametrelere göre bu fonksiyon minimize edilebilir. Böylece, parametre tahmini ve değişken seçimi eş zamanlı olarak elde edilebilir. Bu bölümde, hata terimlerinin otoregresif derecesini belirleyen $\boldsymbol{\phi}$ parametresi karmaşıklığı önlemek için model seçim sürecine dahil edilmeyecektir. Yukarıda elde edilen fonksiyonun ilgilenilen parametrelere göre türevlerinin alınıp düzenlenmesi ile aşağıdaki tahmin denklemleri elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}_{SNModel} &= \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T + \kappa^2 \boldsymbol{\Omega}(p_{\lambda_i}(\beta_i)) \right)^{-1} \\
&\times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{a}\hat{S}_{1t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Burada; $\Omega(p_{i_{\lambda_i}}(\beta_i)) = \text{diag} \{p'_{\lambda}(|\beta_1^{(0)}|)/|\beta_1^{(0)}|, \dots, p'_{\lambda}(|\beta_M^{(0)}|)/|\beta_M^{(0)}|\}, \beta_i^{(0)} \neq 0$ olacak şekilde köşegen matrisidir.

$$\hat{\phi} = R^{-1}(\hat{\beta})(R_0(\hat{\beta}) + \hat{\alpha}\hat{S}_{1t}) \quad (5.6)$$

Burada,

$$R_0(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, R(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^N \hat{S}_{1t} (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t^T \hat{\beta})^2}{\sum_{t=p+1}^N \hat{S}_{2t}} \quad (5.7)$$

$$\hat{\kappa}^2 = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t^T \hat{\beta})^2 - 2\hat{\alpha}\hat{S}_{1t} (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{\Phi}(B)x_t^T \hat{\beta}) + \hat{\alpha}^2 \hat{S}_{2t} \right) \quad (5.8)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\kappa}^2 + \hat{\alpha}^2 \quad (5.9)$$

$$\hat{\zeta} = \hat{\delta}(1 - \hat{\delta}^2)^{-1/2} \quad (5.10)$$

olarak elde edilir. Burada, $\hat{\delta} = \hat{\alpha}^2 / \hat{\sigma}^2$ dir.

(5.5) eşitliğindeki tahmin edici çarpık normal dağılım varsayımı altında otoregresif hata terimli regresyon modelinde değişken seçimi ile eş zamanlı parametre tahmini yapmak için kullanılacaktır. ECM algoritmasının CM adımını yürütebilmek için (5.5) eşitliği her bir değişken seçim yöntemi için aşağıda tekrar elde edilmiş ve diğer parametreler değişken seçimine dahil olmadığı için aynı şekilde algoritmada kullanılmıştır. Buradan

sonra gelen alt bölümlerde hataların Azzalini tipi çarpık normal dağıldığı varsayımı altında lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerine ait ceza terimleri kullanılarak parametre tahmini ve değişken seçimi için model parametresinin tahmin denklemi elde edilmiştir.

Lasso yöntemi

3. Bölümde, lasso ceza fonksiyonu $\sum_{i=1}^M |\beta_i|$, karesel yakınsama yöntemi kullanılarak şöyle elde edilmiştir:

$$p_{\lambda_i}(|\beta|) \approx \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (5.11)$$

Burada; λ : cezalandırmayı ayarlama parametresi $\beta_i^{(0)}$: β_i parametreleri için başlangıç değeridir. Ceza fonksiyonunun bu formu kullanılarak lasso yöntemi için cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri şu şekilde elde edilir:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (5.12)$$

$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t)$ fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki tahmin edici elde edilir.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{SNLasso} = \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t^T + T\lambda\hat{\kappa}^2\boldsymbol{\Omega} \right)^{-1} \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{a}\hat{S}_{1t})\hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t \right) \quad (5.13)$$

Scad yöntemi

Üçüncü bölümde anlatılan scad yönteminin cezalandırma fonksiyonu farklı aralıklarda değişen bir parçalı fonksiyon olduğu için $p_{\lambda}(|\beta_i|)$ şeklinde ifade edilecektir. Karesel yakınsama yöntemi kullanılarak elde edilen scad ceza fonksiyonu kullanılarak scad

yöntemi için cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri lasso yöntemine benzer olarak şöyle elde edilebilir:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) + -\frac{T}{2} \boldsymbol{\Omega}(p_\lambda(\beta_i)) \beta_i^2 \quad (5.14)$$

$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t)$ fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{SNSCAD} = & \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T + T \lambda \hat{\kappa}^2 \boldsymbol{\Omega}(\beta_i^{(0)}) \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\alpha} \hat{S}_{1t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Bridge yöntemi

Önceki bölümde bahsedildiği üzere, bridge yöntemi lasso cezalandırma fonksiyonundaki L_1 normu yerine onun genelleştirilmiş hali olan L_γ normunu kullanır. Karesel yakınsama yöntemi ile bridge yöntemine ait ceza fonksiyonu aşağıdaki şekilde olur:

$$p_{\lambda_i}(\beta) \approx \frac{\gamma \lambda}{2} \sum_{i=1}^p |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2$$

Burada, γ ve λ cezalandırmayı ayarlama parametreleri ve $\beta_i^{(0)}$: β_i parametreleri için başlangıç değeri şeklindedir. Ceza fonksiyonunun bu formu kullanılarak bridge yöntemi için cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri şu şekilde olacaktır:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) + -\frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (5.16)$$

$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t)$ fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki tahmin ediciler elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{SNBridge} &= \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t^T + T\lambda\hat{\kappa}^2\gamma\lambda\boldsymbol{\Omega} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B)y_t - \hat{a}\hat{S}_{1t}) \hat{\Phi}(B)\mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Elastik net yöntemi

Önceki bölümde bahsedildiği gibi elastik net yöntemi ridge regresyon ve lasso ceza fonksiyonlarını tek bir amaç fonksiyonunda birleştirerek parametre tahmini ve model seçimi yapar. lasso yönteminde olduğu gibi L_1 tipi ceza fonksiyonu karesel yakınsama yöntemi kullanılarak şöyle yakınsayacaktır:

$$p_{\lambda_i}(\beta) \approx \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2$$

Burada, λ_1 : cezalandırmayı ayarlama parametresi, $\beta_i^{(0)}$: β_i parametreleri için başlangıç değeridir. Ridge regresyon ceza terimi türevlenebilir olduğundan karesel yakınsama yöntemine ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu yakınsama kullanılarak minimizasyon için (5.4) eşitliğindeki son terimde p_{λ_i} yerine elastik net ceza fonksiyonunun L_1 tipi ceza fonksiyonu ve ridge regresyonda kullanılan L_2 tipi ceza fonksiyonu bir arada kullanılarak, elastik net yöntemine ait *cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri* şu şekilde bulunur:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) =$$

$$Q(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + T\lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \quad (5.18)$$

(5.18) eşitliğinin ilgili parametreye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki tahmin edici elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{SNEN} = & \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T + T\hat{\kappa}^2 \lambda_1 + \boldsymbol{\Omega} \lambda_2 \mathbf{I} \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\alpha} \hat{S}_{1t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Buradan itibaren ECM algoritmasının adımları CM adımımda her bir değişken seçim yöntemi için ayrı ayrı olacak şekilde aşağıda verilmiştir.

ECM algoritması (Çarpık Normal)

ECM algoritması kullanılarak model seçimi ile parametre tahminini eş zamanlı olarak yapmak için amaç fonksiyonuna, kullanılacak olan dört farklı model seçim yönteminin ceza fonksiyonları eklenerek algoritmanın adımları uygulanabilir. Bu sayede ECM algoritması yardımıyla; Azzalini tipi çarpık normal dağılıma dayalı otoregresif hata terimli regresyon modellerinde parametre tahmini ve model seçimi eş zamanlı olarak gerçekleştirilebilir.

Algoritma Adımları

$\boldsymbol{\theta}$ parametre vektörü için başlangıç değeri $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ ve durdurma kriteri ε belirlendikten sonra ECM algoritmasının E ve CM adımları şu şekilde yürütülür:

i) *E-adımı*: $(k + 1)$ 'inci iterasyon için $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ parametre vektörü verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değerler hesaplanır.

$$S_{1t}^{(k)} = E(\gamma_t | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \delta^{(k)} \eta_t^{(k)} + \sqrt{1 - \delta^{2(k)}} \frac{f(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)})}{F(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)})} \quad (5.20)$$

$$S_{2t}^{(k)} = E(\gamma^2 | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = 1 - \delta^{2(k)} + \delta^{(k)} \eta_t^{(k)} S_{1t}^{(k)} \quad (5.21)$$

Burada, $\eta_t^{(k)} = \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\sigma^{(k)}}$ dır.

Bu şekilde hesaplanan, beklenen değerler (5.2) eşitliğinde yerlerine yazıldığında koşullu beklenen değer amaç fonksiyonu şeklinde aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t) = & -\frac{T}{2} (\ln(\kappa^2)) - \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \right) \\ & + \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{\kappa^2} \right) S_{1t} \\ & - \frac{\alpha^2}{2\kappa^2} S_{2t} T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Değişken seçim yöntemleri için kullanılacak ECM algoritmasının E adımında tüm değişken seçim yöntemleri için yukarıda elde edilen amaç fonksiyonunu kullanılacağı için değişken seçim yöntemlerinin CM adımları aşağıda ayrılarak gösterilmiştir.

ii) *CM-adımı (Lasso)*

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (5.23)$$

Bu fonksiyonun, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\boldsymbol{\beta}$ 'nın $(k + 1)$ 'inci denklemini şöyle bulunur:

$$\boldsymbol{\beta}_{SNLasso}^{(k+1)} = \left(\sum_{t=p+1}^N \Phi(B)x_t \Phi(B)x_t^T + T\kappa^{2(k)} \boldsymbol{\Omega} \right)^{-1}$$

$$\times \left(\sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \alpha^{(k)} S_{1t}^{(k)} \right) \Phi(B)x_t \right) \quad (5.24)$$

ii) *CM-adımı (Scad)*

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \frac{T}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \boldsymbol{\beta}_i^2 \quad (5.25)$$

Bu fonksiyonun, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\boldsymbol{\beta}$ için $(k + 1)$ 'inci denklem şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{SNSCAD}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N \Phi(B)x_t \Phi(B)x_t^T + T\kappa^{2(k)} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}_i^{(0)}) \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \alpha^{(k)} S_{1t}^{(k)} \right) \Phi(B)x_t \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

ii) *CM-adımı (Bridge)*

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (5.27)$$

Yukarıdaki fonksiyonun, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\boldsymbol{\beta}$ için $(k + 1)$ 'inci denklem aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{SNBridge}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N \Phi(B)x_t \Phi(B)x_t^T + T\kappa^{2(k)} \gamma\lambda \boldsymbol{\Omega} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \alpha^{(k)} S_{1t}^{(k)} \right) \Phi(B)x_t \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

ii) *CM-adımı (Elastik net)*

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) | \Phi(B)y_t, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\theta}; \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + T\lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \quad (5.29)$$

Bu fonksiyonun, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\boldsymbol{\beta}$ için $(k+1)$ 'inci denklem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{SNE}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N \Phi(B)\mathbf{x}_t \Phi(B)\mathbf{x}_t^T + T\kappa^{2(k)}\lambda_1\boldsymbol{\Omega} + \lambda_2\mathbf{I} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N \left(\Phi(B)y_t - \alpha^{(k)}S_{1t}^{(k)} \right) \Phi(B)\mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Bu noktadan itibaren dört değişken seçimi yöntemi için de diğer parametrelerin tahminleri aynı şekilde olacağı için kullanılan yöntem hangisi olursa olsun, ECM algoritmasının adımlarının devamı aşağıdaki şekilde devam edecektir:

$$\boldsymbol{\phi}^{(k+1)} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\beta})^{-1} \left(\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\beta}) + \alpha^{(k)}S_{1t}^{(k)} \right) \quad (5.31)$$

Burada,

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-2} \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun α parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\alpha^{2(k+1)}$ eşitliği aşağıdaki şekilde olur:

$$\alpha^{2(k+1)} = \frac{\sum_{t=p+1}^N S_{1t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})^2}{\sum_{t=p+1}^N S_{2t}^{(k)}} \quad (5.32)$$

$Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ fonksiyonunun κ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\kappa^{2(k+1)} = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=p+1}^N (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})^2 - 2\alpha^{(k)} S_{1t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)}) + \alpha^{2(k)} S_{2t}^{(k)} \right) \quad (5.33)$$

Buradan $\alpha^{2(k+1)}$ ve $\kappa^{2(k+1)}$ eşitlikleri kullanılarak $\sigma^{2(k+1)}$ ve $\zeta^{(k+1)}$ denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma^{2(k+1)} = \kappa^{2(k+1)} + \alpha^{2(k+1)} \quad (5.34)$$

$$\zeta^{(k+1)} = \delta^{(k+1)} (1 - \delta^{2(k+1)})^{-1/2} \quad (5.35)$$

Burada, $\delta^{(k+1)} = \alpha^{2(k+1)} / \sigma^{2(k+1)}$ dir.

iii) Bu adımlar, E ve CM adımları yakınsaklık kriteri $\|\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}\| < \varepsilon$ sağlanana kadar tekrar edilir.

5.2 Çarpık t Dağılımı Varsayımı Altında Değişken Seçimi

Regresyon analizinde, gerçek veriler her zaman simetrik olmayabileceği gibi aykırı değerlere de sahip olabilir. Regresyon analizinde parametre tahminlerini ve değişken seçimini istatistiksel olarak güvenilir yapabilmek için aykırı değerlerle baş edebilecek yöntemlerin kullanılması gereklidir. Bu yöntemlerden bir tanesi de hata dağılımı olarak kalın kuyruklu dağılımların kullanılmasıdır. Bu kısımda; otoregresif hata terimli regresyon modellerinde, aykırı değer varsayımı altında, değişken seçimi yapabilmek için Azzalini tipi çarpık t dağılımı ele alınmıştır. Önceki bölümde bahsedildiği üzere, Azzalini

tipi çarpık t dağılımının log-olabilirlik fonksiyonlarıyla ilgili ceza terimleri ile birleştirilerek değişken seçimi ve parametre tahmini için gerekli fonksiyonlar elde edilebilir. Bölüm 2’de bu dağılıma ilişkin parametre tahminlerine yer verildiği için bu bölümde değişken seçimi ile ilgilenebilmek adına, Azzalini tipi çarpık t dağılımının log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde cezalandırılmış olarak yeniden düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
 \ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2, \zeta, \nu | a_t) = & T \ln(2c_\nu) - T \ln \sigma - \frac{\nu + 1}{2} \sum_{t=p+1}^N \ln(\nu + z_t^2) \\
 & + \sum_{t=p+1}^N \ln \left(T_{\nu+1} \left(\zeta z_t \sqrt{\frac{\nu + 1}{\nu + z_t^2}} \right) \right) \\
 & + T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Burada,

$$z_t = \frac{\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma}$$

şeklindedir. Ancak bu fonksiyonu maksimum yapan çözüm, analitik olarak elde edilemediği için ikinci bölümde, Azzalini tipi çarpık t dağılımının stokastik gösterimi kullanılarak bu fonksiyon, koşullu beklenen değer olarak yeniden ifade edilmişti. Benzer şekilde, $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \sigma^2, \zeta, \nu)$ bilinmeyen parametre vektörünü ve $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ve $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ kayıp değişkenler olmak üzere $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau})$ tam veriyi gösterebilir. Cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
E_p(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) &= -\frac{T\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N E(\ln \tau_t | y_t) \\
&- \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N E(\tau_t | y_t) - \frac{T}{2} \ln(\kappa^2) - \sum_{t=p+1}^N \frac{\alpha^2 E(\gamma_t^2 \tau_t | y_t)}{2\kappa^2} \\
&- \sum_{t=p+1}^N \frac{E(\tau_t | y_t)(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \\
&+ \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha E(\gamma_t^2 \tau_t | y_t)(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})}{\kappa^2} \right) \\
&+ T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Bu fonksiyonda yer alan koşullu beklenen değerler yerine, Bölüm 3'te hesaplanan koşullu beklenen değer eşitlikleri yazılarak, cezalandırılmış tam veri koşullu beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
E_p(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) &= -\frac{T\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{4t} - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{1t} \\
&- \frac{T}{2} \ln(\kappa^2) - \sum_{t=p+1}^N \frac{\alpha^2 t_{3t}}{2\kappa^2} \\
&- \sum_{t=p+1}^N \frac{t_{1t}(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \\
&+ \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha t_{3t}(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})}{\kappa^2} \right) \\
&+ T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Burada;

$$t_{1t} = E(\tau | y) = \left(\frac{\nu + 1}{\eta^2 + \nu} \right) \frac{T_{\nu+3} \left(M \sqrt{\frac{\nu+3}{\nu+1}} \right)}{T_{\nu+1}(M)}, \tag{5.39}$$

$$t_{2t} = E(\gamma \tau | y) = \frac{\delta(y - \mu)}{\sigma} E(\tau | y) + \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\pi \sigma f(y)} \left(\frac{\eta^2}{\nu(1 - \delta^2)} + 1 \right)^{-\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)}, \tag{5.40}$$

$$t_{3t} = E(y^2 \tau | y) = \frac{\delta^2 (y - \mu)^2}{\sigma^2} E(\tau | y) + \sqrt{1 - \delta^2} + \frac{\delta \sqrt{1 - \delta^2} (y - \mu)}{\pi \sigma^2 f(y)} \left(\frac{\eta^2}{v(1 - \delta^2)} + 1 \right)^{-\left(\frac{v}{2} + 1\right)}, \quad (5.41)$$

$$t_{4t} = E(\ln \tau | y) = DG\left(\frac{v+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\eta^2 + v}{2}\right) + \left(\frac{v+1}{\eta^2 + v}\right) \left(\frac{T_{v+3}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+3}{\eta^2 + v}}\right)}{T_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)} - 1 \right) + \frac{\zeta \eta (\eta^2 - 1)}{\sqrt{v+1}(\eta^2 + v)^3} \frac{t_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)}{T_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)} + \frac{1}{T_{v+1}\left(\zeta \eta \sqrt{\frac{v+1}{\eta^2 + v}}\right)} \int_{-\infty}^M g_v(x) t_{v+1}(x) dx. \quad (5.42)$$

ve

$$\eta_t = \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta)}{\sigma}, \delta = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta}}, M = \zeta \eta \sqrt{\frac{v}{\eta+v}},$$

$$f(y_t) = \frac{2}{\sigma} t_v(\eta_t) T_{v+1}(M),$$

$$g_v(x) = DG\left(\frac{v+2}{2}\right) - DG\left(\frac{v+1}{2}\right) - \ln\left(1 + \frac{x^2}{v+1}\right) + \frac{x^2(v+1) - v - 1}{(v+1)(v+1+x^2)}$$

şeklindedir. Bundan sonra gelecek olan, değişken seçimi kısımlarında gösterim ve tekrar karmaşıklığından kaçınmak için bu eşitlik aşağıdaki şekliyle kullanılacaktır:

$$E_p(l_c(\Theta; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) = Q(\Theta; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) + T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|) \quad (5.43)$$

İstenilen yönteme ait ceza fonksiyonu yukarıdaki olabilirlik fonksiyonunda yerine konarak, aranan parametrelere göre bu fonksiyon minimize edilebilir. Bu sayede, parametre tahmini ve değişken seçimi eş zamanlı olarak elde edilebilir. Yukarıda elde

edilen fonksiyonun ilgilenilen parametrelere göre türevlerinin alınıp düzenlenmesi ile aşağıdaki tahmin denklemleri elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{StModel} &= \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T + \hat{\kappa}^2 \boldsymbol{\Omega} \left(p_{i_{\lambda_i}}(\beta_i) \right) \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\alpha} \hat{t}_{2t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{R}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(R_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}), + \hat{\alpha} \hat{t}_{2t}) \quad (5.45)$$

Burada;

$$\mathbf{R}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-1} e_{t-2} \dots & \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

dır.

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{2t} (\hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T \hat{\boldsymbol{\beta}})^2}{\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{3t}} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}^2 &= \frac{1}{T} \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} (\hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T \hat{\boldsymbol{\beta}})^2 - 2 \hat{\alpha} \hat{t}_{2t} (\hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T \hat{\boldsymbol{\beta}}) \right. \\ &\quad \left. + \hat{\alpha}^2 \hat{t}_{3t} \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\hat{\zeta} = \hat{\delta} / (1 - \hat{\delta}^2)^{-1/2} \quad (5.48)$$

$\hat{\delta} = \hat{\alpha}^2 / \hat{\sigma}^2$ şeklindedir.

Bu bölümde ν parametresi robustluğu sağlayabilmek için bilinen olarak ele alınmıştır. Bu parametre istenildiğinde aşağıdaki denklemin çözümünden tahmin edilebilir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)})}{\partial \nu} &= \frac{T}{2} \left(\ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + 1 - \frac{\Gamma'\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{4t}^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \\ &= \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + 1 - DG\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (t_{1t}^{(k)} - t_{4t}^{(k)}) = 0.\end{aligned}\quad (5.49)$$

Lasso yöntemi

Azzalini tipi çarpık normal dağılımda olduğu gibi Azzalini tipi çarpık t yönteminde de bu dağılım için elde edilen cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri aşağıdaki şekilde lasso yöntemi için yeniden elde edilebilir:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (5.50)$$

Yukarıdaki fonksiyonun ilgili parametreye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{StLasso} &= \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T + T\lambda \hat{\kappa}^2 \boldsymbol{\Omega} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) y_t - \hat{a} \hat{t}_{2t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right)\end{aligned}\quad (5.51)$$

Scad yöntemi

Azzalini tipi çarpık normal dağılımda olduğu gibi Azzalini tipi çarpık t yönteminde de bu dağılım için elde edilen cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri aşağıdaki şekilde scad yöntemi için elde edilir:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) + \frac{T}{2} \boldsymbol{\Omega}(\beta_i^{(0)}) \beta_i^2 \quad (5.52)$$

Bu fonksiyonun ilgili parametreye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{StSCAD} = & \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T + T \lambda \hat{\kappa}^2 \boldsymbol{\Omega}(\beta_i^{(0)}) \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\alpha} \hat{t}_{2t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Bridge yöntemi

Azzalini tipi çarpık normal dağılımda olduğu gibi Azzalini tipi çarpık t yönteminde de bu dağılım için elde edilen cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) + \frac{T \gamma \lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (5.54)$$

Amaç fonksiyonunun ilgili parametreye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{StBridge} = & \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T + T \lambda \hat{\kappa}^2 \gamma \lambda \boldsymbol{\Omega}_{\gamma} \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) y_t - \hat{\alpha} \hat{t}_{2t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Elastik net yöntemi

Önceki bölümde bahsedildiği gibi elastik net yöntemi, ridge regresyon ve lasso ceza fonksiyonlarını tek bir amaç fonksiyonunda birleştirerek parametre tahmini ve model seçimi yapacak şekilde geliştirilmiştir. Elastik net ceza fonksiyonu için cezalandırılmış tam veri log-olabilirlik fonksiyonunun koşullu beklenen değeri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$E_p(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + T\lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \quad (5.56)$$

Yukarıdaki fonksiyonun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{StEN} = & \left(\sum_{t=p+1}^N \hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t^T \mathbf{t} + T\lambda\hat{\kappa}^2 \lambda_1 \boldsymbol{\Omega} + \lambda_2 \mathbf{I} \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{t=p+1}^N (\hat{t}_{1t} \hat{\Phi}(B) y_t - \hat{a} \hat{t}_{2t}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

ECM algoritması (Çarpık t)

ECM algoritması kullanılarak model seçimi ile parametre tahminini eş zamanlı olarak yapmak için amaç fonksiyonuna, kullanılacak olan dört farklı model seçim yönteminin ceza fonksiyonları eklenerek algoritmanın adımları uygulanabilir. Bu sayede ECM algoritması yardımıyla Azzalini tipi çarpık t dağılımına dayalı, otoregresif hata terimli regresyon modellerinde parametre tahmini ve model seçimi eş zamanlı olarak gerçekleştirilebilir.

Algoritma Adımları

$\boldsymbol{\Theta}$ parametre vektörü için başlangıç değeri $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ ve durdurma kriteri ε belirlendikten sonra ECM algoritmasının E ve CM adımları şu şekilde yürütülür:

i) *E-adımı*: $(k + 1)$ 'inci iterasyon için $\Theta^{(k)}$ verilmişken aşağıdaki koşullu beklenen değerler hesaplanır:

$$t_{1t}^{(k)} = E(\tau_t | \Phi(B)y_t, \Theta^{(k)}) = \left(\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}} \right) \frac{T_{\nu^{(k)}+3} \left(M^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 3}{\nu^{(k)} + 1}} \right)}{T_{\nu^{(k)}+1}(M^{(k)})}, \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} t_{2t}^{(k)} &= E(\gamma_t \tau_t | \Phi(B)y_t, \Theta^{(k)}) \\ &= \frac{\delta^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\sigma^{(k)}} t_{1t}^{(k)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{1 - \delta^{2(k)}}}{\pi \sigma^{(k)} f(y_t)^{(k)}} \times \left(\frac{\eta_t^{2(k)}}{\nu^{(k)}(1 - \delta^{2(k)})} + 1 \right)^{-\left(\frac{\nu^{(k)}}{2} + 1\right)}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} t_{3t}^{(k)} &= E(\gamma_t^2 \tau_t | \Phi(B)y_t, \Theta^{(k)}) \\ &= \frac{\delta^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\sigma^{(k)}} t_{1t}^{(k)} + (1 - \delta^{2(k)}) \\ &\quad + \frac{\delta^{(k)} \sqrt{1 - \delta^{2(k)}} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\pi \sigma^{(k)} f(y_t)^{(k)}} \\ &\quad \times \left(\frac{\eta_t^{2(k)}}{\nu^{(k)}(1 - \delta^{2(k)})} + 1 \right)^{-\left(\frac{\nu^{(k)}}{2} + 1\right)}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
t_{4t}^{(k)} &= E(\log \tau_t | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) \\
&= DG\left(\frac{\nu^{(k)} + 1}{2}\right) - \ln \frac{\eta_t^{(k)} + \nu^{(k)}}{2} \\
&+ \left(\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}\right) \left(\frac{T_{\nu^{(k)}+3} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 3}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)}{T_{\nu^{(k)}+1} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)} - 1 \right) \\
&+ \frac{\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} (\eta_t^{2(k)} - 1)}{\sqrt{(\nu^{(k)} + 1)(\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)})}^3} \frac{t_{\nu^{(k)}+3} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)}{T_{\nu^{(k)}+1} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)} \\
&+ \frac{1}{T_{\nu^{(k)}+1} \left(\zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)} + 1}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}} \right)} \int_{-\infty}^{M^{(k)}} g_{\nu^{(k)}}(x) t_{\nu^{(k)}+1}(x) dx.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Burada; $\eta_t^{(k)} = \frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta}^{(k)})}{\sigma^{(k)}}$, $\delta^{(k)} = \frac{\zeta^{(k)}}{\sqrt{1 + \zeta^{2(k)}}}$, $M_t^{(k)} = \zeta^{(k)} \eta_t^{(k)} \sqrt{\frac{\nu^{(k)}}{\eta_t^{2(k)} + \nu^{(k)}}}$

ve $f(y_t)^{(k)} = \frac{2}{\sigma^{(k)}} t_{\nu^{(k)}}(\eta_t^{(k)}) T_{\nu^{(k)}+1}(M_t^{(k)})$ şeklindedir.

Burada hesaplanan beklenen değerler; amaç fonksiyonunda yerlerine yazıldığında, $E(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)})$ şeklinde amaç fonksiyonu şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) &= \frac{T\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{4t}^{(k)} - \frac{\nu}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} - \frac{T}{2} \ln(\kappa^2) \\
&- \sum_{t=p+1}^N \frac{\alpha^2 t_{3t}^{(k)}}{2\kappa^2} - \sum_{t=p+1}^N \frac{t_{1t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})^2}{2\kappa^2} \\
&+ \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\alpha t_{2t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \boldsymbol{\beta})}{\kappa^2} \right) \\
&+ T \sum_{i=1}^M p_{\lambda_i}(|\beta_i|) + T \sum_{j=1}^p p_{\delta_j}(|\phi_j|).
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Değişken seçim yöntemleri için kullanılacak ECM algoritmasının E adımında, tüm değişken seçim yöntemleri için yukarıda elde edilen koşullu beklenen değerleri kullanılacağı için değişken seçim yöntemlerinin CM adımları aşağıda ayrılarak gösterilmiştir:

ii) CM -adımı (*Lasso*)

$$E(l_c(\Theta; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t, \Theta^{(k)}) = Q(\Theta; \Theta^{(k)}) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (5.63)$$

Elde edilen bu fonksiyonun, β parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek β için $(k + 1)$ 'inci eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \beta_{StLasso}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \Phi(B) \mathbf{x}_t \Phi(B) \mathbf{x}_t^T + T\lambda \kappa^{2(k)} \mathbf{W} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N (t_{1t}^{(k)} \Phi(B) y_t - \alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)}) \Phi(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

ii) CM -adımı (*Scad*)

$$E(l_c(\Theta; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t, \Theta^{(k)}) = Q(\Theta; \Theta^{(k)}) + \frac{T}{2} \Omega(\beta^{(0)}) \beta_i^2 \quad (5.65)$$

Bu fonksiyonun, β parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek β için $(k + 1)$ 'inci eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \beta_{StSCAD}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \Phi(B) \mathbf{x}_t \Phi(B) \mathbf{x}_t^T + T\lambda \kappa^{2(k)} \Omega(\beta_i^{(0)}) \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N (t_{1t}^{(k)} \Phi(B) y_t - \alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)}) \Phi(B) \mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.66)$$

ii) CM-adımı (Bridge)

$$E(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) + \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (5.67)$$

Yukarıdaki fonksiyonun, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\boldsymbol{\beta}$ için $(k + 1)$ 'inci eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{StBridge}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \Phi(B)\mathbf{x}_t \Phi(B)\mathbf{x}_t^T + T\lambda\kappa^{2(k)}\gamma\lambda\boldsymbol{\Omega} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N (t_{1t}^{(k)} \Phi(B)y_t - \alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)}) \Phi(B)\mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.68)$$

ii) CM-adımı (Elastik net)

$$E(l_c(\boldsymbol{\Theta}; \mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}) | \Phi(B)y_t, \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) = Q(\boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\Theta}^{(k)}) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + T\lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \quad (5.69)$$

Bu fonksiyonun, $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\boldsymbol{\beta}$ için $(k + 1)$ 'inci eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{StEN}^{(k+1)} &= \left(\sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \Phi(B)\mathbf{x}_t \Phi(B)\mathbf{x}_t^T + T\lambda\kappa^{2(k)}\lambda_1\boldsymbol{\Omega} + \lambda_2\mathbf{I} \right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{t=p+1}^N (t_{1t}^{(k)} \Phi(B)y_t - \alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)}) \Phi(B)\mathbf{x}_t \right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Bu noktadan itibaren dört değişken seçimi yöntemi için de diğer parametrelerin tahminleri aynı şekilde olacağı için kullanılan yöntem hangisi olursa olsun ECM algoritmasının adımlarının devamı aşağıdaki şekilde devam edecektir.

2. $Q(\Theta; \Theta^{(k)})$ fonksiyonunun ϕ parametresine göre türevinin sıfıra eşitlenmesiyle, $\phi^{(k+1)}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi^{(k+1)} = R^{-1}(\beta^{(k)}) \left(R_0(\beta^{(k)}), + \alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)} \right). \quad (5.71)$$

Burada,

$$R_0(\beta^{(k)}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, R(\beta^{(k)}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-1} e_{t-2} \dots & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-2}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-p} e_{t-2} & \dots & \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3. $Q(\Theta; \Theta^{(k)})$ fonksiyonunun α parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek $\alpha^{(k+1)}$ için tahmin edici, şu şekilde olur:

$$\alpha^{2(k+1)} = \frac{\sum_{t=p+1}^N t_{2t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta^{(k)})^2}{\sum_{t=p+1}^N t_{3t}^{(k)}} \quad (5.72)$$

4. $Q(\Theta; \Theta^{(k)})$ fonksiyonun, κ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\kappa^{2(k+1)} = \frac{1}{T} \left(\sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta^{(k)})^2 - 2\alpha^{(k)} t_{2t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta^{(k)}) + \alpha^{2(k)} t_{3t}^{(k)} \right). \quad (5.73)$$

5. $Q(\Theta; \Theta^{(k)})$ fonksiyonunun δ^2 parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek şu denklem elde edilir:

$$n\delta^2(1 - \delta^2)\delta^2 \left(\sum_{t=p+1}^N \frac{t_{1t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta^{(k)})^2}{\hat{\sigma}^{(k)}} + \sum_{t=p+1}^N t_{3t}^{(k)} \right) + (1 + \delta^2) \sum_{t=p+1}^N \frac{t_{2t}^{(k)} (\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^T \beta^{(k)})}{\sigma^{(k)}} = 0. \quad (5.74)$$

Yukarıdaki denklem, ζ 'ya göre çözülerek $\zeta^{(k+1)}$ elde edilir. $\zeta^{(k+1)}$ daha kolay olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\zeta^{(k+1)} = \delta^{(k+1)} / (1 - \delta^{2(k+1)})^{-1/2} \quad (5.75)$$

Burada, $\delta^{(k+1)} = \alpha^{2(k+1)} / \sigma^{2(k+1)}$, dir.

6. Dağılımın serbestlik derecesi (ν) parametresinin $(k + 1)$. tahmin edicisi aşağıdaki denklemin çözümünden elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\Theta; \Theta^{(k)})}{\partial \nu} &= \frac{T}{2} \left(\ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + 1 - \frac{\Gamma'(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right) + \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{4t}^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^N t_{1t}^{(k)} \\ &= \ln\left(\frac{\nu}{2}\right) + 1 - DG\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^N (t_{4t}^{(k)} - t_{1t}^{(k)}) = 0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

iii) Bu adımlar, yakınsaklık kriteri $\|\Theta^{(k+1)} - \Theta^{(k)}\| < \varepsilon$ sağlanana kadar tekrar edilir.

5.3 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, sonlu örnek çapında, Azzalini tipi çarpık normal ve çarpık t dağılımlarına dayalı otoregresif hata terimli regresyon modeli kullanılarak: EKK, lasso, scad, ridge, bridge ve elastik net yöntemleri ile elde edilen model parametre tahmini ve değişken seçimi durumları için simülasyon çalışması verilmiştir. Simülasyon çalışmasındaki

hesaplamalar, önceki bölümlerde olduğu gibi R 3.4.1 (R Core Team, 2020) programı aracılığı ile yapılmıştır.

Simülasyon tasarımı. Bu bölüm için kullanılan simülasyon tasarımı, dördüncü bölümde kullanılan tasarımın model çerçeveleri ele alınarak oluşturulmuştur. $\beta_0 = (\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0p})'$ ve $\phi_0 = (\phi_{01}, \phi_{02}, \dots, \phi_{0p})'$ sırasıyla regresyon ve otoregresif model parametre vektörlerini göstermektedir. e_t hata teriminin, Azzalini tipi çarpık normal ve çarpık t dağıldığı varsayılmıştır. Burada çarpık t dağılımı için serbestlik derecesi: $\nu = 3$ olacak şekilde sabit olarak ele alınmıştır. Simülasyonun aykırı değer olmayan durumları için hata teriminin varyansı $\sigma^2 = 1$ olarak ele alınmıştır. Model seçimi için lasso metodu uygulanırken λ parametresi $[0, 2]$ arasında 0.1 lik artışlar olacak şekilde kurgulanmış ve bu taramadan elde edilen her bir sonuç için BIC değerleri hesaplanarak en küçük BIC değerine sahip model, en iyi model olarak seçilmiştir. Benzer şekilde, bridge metodu için γ parametresi $[0, 2]$ aralığında 0.1 artışlarda taranmış aynı zamanda Bridge metodunda kullanılan λ parametresi de iki boyutlu yüzey taraması ile tahminler elde edilmiştir. Hesaplanan en küçük BIC değerine karşılık gelen model en iyi model olarak ele alınmıştır. Bridge yöntemi için $\gamma = 1$ olduğu durum lasso yöntemine ilişkin sonuçlar ve $\gamma = 2$ olduğu durumda, ridge regresyona ilişkin sonuçlar elde edilmiştir. Scad metodu için $\alpha = 3.7$ değeri sabit olarak Fun ve Li (2001) tarafından önerildiği şekliyle kullanılmıştır. Elastik net metodu için λ_1 ve λ_2 eş zamanlı olarak taratılmış ve elde edilen her bir sonuç için BIC değerlerinin en küçüğü en iyi sonuç olarak elde edilmiştir. Bu yöntem için λ_1 lasso yönteminde kullanılan parametrenin aralığı ve λ_2 için ise $[0, 0.5, 1, 1.5]$ değerleri kullanılmıştır. Tüm durumlar için örneklem hacimleri $N = 50, 100, 300$ şeklinde alınmıştır.

Parametre tahmin performansı. Önerilen yöntemlerin parametre tahmin performanslarını ölçmek için parametrelerin HKO, Yan değerlerini ve gözlenen Fisher bilgi matrisi yardımı ile elde edilen parametrelere ait standart hatalar ile hesaplanan %95 güven aralıkları sonuçları tablolastırılmıştır. HKO ve yan değerleri hesaplamaları için aşağıdaki formüller kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}\widehat{HKO}(\hat{\beta}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \beta)^2, \widehat{YAN}(\hat{\beta}) = \bar{\beta} - \beta, \\ \widehat{HKO}(\hat{\phi}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\phi}_i - \phi)^2, \widehat{YAN}(\hat{\phi}) = \bar{\phi} - \phi, \\ \widehat{HKO}(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)^2, \widehat{YAN}(\hat{\sigma}^2) = \overline{\sigma^2} - \sigma^2. \\ \widehat{HKO}(\hat{\zeta}) &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\zeta}_i - \zeta)^2, \widehat{YAN}(\hat{\zeta}) = \bar{\zeta} - \zeta,\end{aligned}$$

Burada; $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i$, $\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i$, $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^2$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \hat{\zeta}_i$ şeklindedir.

Değişken seçim performansı. Tüm simülasyonlar 100 defa tekrar edilmiş ve model seçim kriterlerinin performanslarını ölçmek için her bir durum altında doğru tahmin edilen sıfır katsayıları saydırılarak oranları hesaplanmıştır (DSO). Benzer şekilde, modelde sıfır olmaması gerekirken sıfır tahmin edilen katsayılar da sayılarak oranları hesaplanmıştır (YSO). Aynı zamanda gerçek modelde verilen doğru sıfır miktarları da saydırılarak 100 tekrarda elde edilen doğru model oranı da hesaplanmıştır (DMO). Oto regresif model için ise her bir durumda oto regresif derecenin katsayısı için fazladan dört sıfır eklenerek 100 tekrarda doğru oto regresif derecenin sayısı sayılmıştır (Dpd). Parametre tahmini ve değişken seçimi bakımından kullanılan yöntemlerin performanslarını değerlendirmek için farklı koşulları içeren üç farklı simülasyon durumu kurgulanmış ve bu durumlara ait sonuçlar çizelgelerde verilmiştir.

Durum I. $\beta = (3, 1.5, 0, 0, 2, 0, 0, 0)'$ şeklinde regresyon modelinin gerçek parametre değerleri olmak üzere veri seti $\Phi(B)y_t = \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} + a_t$ modeli kullanılarak üretilmiştir. $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{t8})'$ değişkenleri bağımsız olarak $0_{8 \times 1}$ ortalamalı ve x_{t,j_1} ile x_{t,j_2} değişkenleri arasındaki ikili korelasyonlar $0.5^{|j_1 - j_2|}$ olacak şekilde çok değişkenli normal dağılımdan üretilmiştir $(x_{ti} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma))$. Hata terimleri $a_t \sim SN(\lambda = 0.2, 0, 1)$ olacak şekilde çarpık normal dağılımdan ve $a_t \sim St_3(\lambda = 0.2, 0, 1)$ olacak şekilde çarpık t dağılımından üretilmiştir. Burada AR sürecinin derecesi $p = 1, 2$ alınmıştır. AR(p) model parametrelerinin gerçek değerleri $p = 1$ durumunda $\phi = 0.8$, $p = 2$ durumunda $\phi = (-0.7, 1.2)'$ değerleri alınmıştır.

Durum II. Değişken boyutu yüksek olduğu durumda elde edilen yöntemlerin performanslarını ölçmek için istatistiksel olarak 20 anlamlı, 20 anlamsız olmak üzere toplam 40 değişkenli regresyon modeli aşağıdaki gerçek parametre değerleri ile üretilmiştir:

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{10}, \underbrace{2, \dots, 2}_{10}, \underbrace{0, \dots, 0}_{10}, \underbrace{2, \dots, 2}_{10} \right)'.$$

AR(p) model parametreleri; $q = 1$ durumunda $\phi = 0.8$, $p = 2$ durumunda $\boldsymbol{\phi} = (0.8, -0.2)'$ olarak kullanılmıştır. Açıklayıcı değişkenler, açıklanan değişken ve hataların dağılım varsayımları Durum I'de açıklandığı şekilde ele alınmıştır.

Durum III. Çarpık t dağılımına dayalı tahmin edicilerin aykırı gözlemlere karşı dayanıklılıklarını göstermek için Durum I'de tasarlanan model aykırı değerlerle yeniden ele alınmıştır. $\epsilon \in [0, 1]$ değeri ile kontaminasyon oranını ve n örneklem hacmi olmak üzere $m = \lfloor \epsilon N \rfloor$ kontamine verilerin tam değerini gösterebilir. $t = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde m adet kontamine olmuş veri, $N(50, 1)$ dağılımından üretilmiş, geriye kalan $t = m, m + 1, m + 2, \dots, N$ adet veri $N(0, 1)$ 'den üretilerek aykırı değerlere sahip bir veri seti oluşturulmuştur. $\boldsymbol{\beta} = (3, 1.5, 0, 0, 2, 0, 0, 0)'$ ve AR(p) model parametrelerinin gerçek değerleri $p = 1$ durumunda $\phi = 0.8$, $p = 2$ durumunda $\boldsymbol{\phi} = (0.8, -0.2)'$ olarak alınmıştır. Açıklayıcı değişkenler, açıklanan değişken ve hataların dağılım varsayımları Durum I'de açıklandığı şekilde ele alınmıştır.

Değişken seçimine ilişkin simülasyon sonuçları Çizelge 5.1-5.10'da aralık tahminlerine ilişkin sonuçlar ise Çizelge 5.11-5.13'te verilmiştir.

Simülasyon sonuçları. Çizelge 5.1 – 5.4'te, Durum I'e ilişkin sonuçlar özetlenmiştir. Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2, birinci dereceden otoregresif hata terimleriyle sırasıyla Çarpık normal ve Çarpık t varsayımı ile yapılan hesaplamaların sonuçlarını göstermektedir. Çizelge 5.1'den, kullanılan tüm yöntemlerin HKO değerlerine göre parametre tahmin

durumu için birbirlerine yakın performanslara sahip olduğu gözlemlenebilir. Çizelge 5.11'deki parametrelere ait aralık tahminlerinden ve standart sapma hesaplarından da yöntemlerin birbirlerine yakın sonuçlar verdiği söylenebilir. Değişken seçimi ve doğru AR derecesi ile ilgili lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerinin EKK ve ridge yöntemlerine göre eşit derecede üstün performanslara sahip olduğu kolayca görülmektedir. Çizelge 5.2'de sonuçlar, kalın kuyruklu ve çarpıklık durumlarını temsil etmesi için çarpık t dağılımı varsayımı altında sunulmuştur. Bu tablodan; EKK, lasso ve ridge regresyon yöntemlerinin hem parametre tahmini hem de değişken seçimi performanslarının kalın kuyruklu luktan oldukça etkilendiği ve bozulmaya uğradıkları söylenebilir. Çizelge 5.3 ve 5.4'te modele ait hata terimlerinin ikinci derece otokorelasyon şeklinde modellendiği sonuçlar görülmektedir. Çizelge 5.3 ve 5.4 incelendiğinde otoregresif yapıya ilişkin derecenin arttıkça hem parametre tahminlerinde hem de model seçiminde küçük bozulmalar görüldüğü söylenebilir. Bu durum, tablolardaki HKO değerlerinin kötüleşmesinden gözlenebilir. Modelin yüksek boyutlu tasarlanması sonucunda elde edilen simülasyon sonuçları, Çizelge 5.5-5.8'de gösterilmektedir. Çizelge 5.5'ten, bridge ve elastik net yöntemlerinin, HKO değerlerine göre parametre tahmin kapasiteleri açısından iyi performansa sahip oldukları söylenebilir. Kullanılan dört değişken seçim yönteminin model seçim performansları, yüksek boyutlu bir modelle karşı karşıya kalınması halinde de yöntemlerin zorlanmadan anlamlı değişkenleri belirleyebileceğini göstermiştir. Çizelge 5.6'da, çarpık ve kalın kuyruklu hata varsayımı ile yüksek boyut durumları bir arada görülmektedir. Bu çizelgeden, kalın kuyrukluğun parametre tahmin performansı üzerindeki olumsuz etkisi; EKK, lasso ve ridge yöntemlerinden görülebilir. Öte yandan scad, bridge ve elastik net yöntemleri parametre tahmin performansı üzerinde hem kalın kuyruklu luktan hem çarpıklık hem de yüksek boyut etkileri altında diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Çizelge 5.7 ve 5.8 sırasıyla çarpık normal ve çarpık t dağılım ile ikinci dereceden otoregresif hata terimleri varsayımlarını bir arada göstermektedir. Durum I'e benzer şekilde, otoregresif etki arttıkça bahsedilen yöntemlerin parametre tahmin performansının daha da kötüleştiğini söyleyebiliriz. Bununla birlikte bridge ve elastik net yöntemleri genel olarak parametre tahmininde daha iyi performans göstermektedir. Bu durumla ilgili en dikkat çekici kısım, söz konusu yöntemler arasında otoregresif derecenin doğru belirlenmesinde görülmektedir. Lasso ve scad yöntemleri, regresyon modelindeki anlamlı değişkenlerin

belirlenmesi açısından bridge ve elastik net ile eşit performansa sahip olsa da bridge ve elastik net diğer yöntemlere göre bir miktar daha iyi performansa sahiptir. Çizelge 5.9 ve 5.10, aykırı değerli tasarım için simülasyon sonuçlarını içermektedir. Çizelge 5.9'da %10 kontaminasyonla ve Çizelge 5.10'da %5 kontaminasyonla elde edilmiş veriye ilişkin sonuçlar görülmektedir. Veride bazı dikey aykırı değerler mevcutsa tüm yöntemlerin parametre tahmin ve değişken seçim performanslarının kötüleştiği açıkça görülmektedir. Çizelge 5.10'da, hem parametre tahmini hem de değişken seçim performansları için bridge ve elastik net yöntemlerinin diğer yöntemlere göre daha iyi performans gösterdiği söylenebilir. Özellikle örneklem büyüklüğü arttığında, hem regresyon modeli için önemli değişkenlerin seçimi hem de doğru AR derecesi için bridge ve elastik net yöntemlerinin değişken seçim performansları iyileşmiştir.

Çizelge 5.1Çarpık normal varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları p=1

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	0.75672	0.19	0.00	0.00	0
	LASSO	0.84227	4.98	0.00	1.00	100
	SCAD	0.83358	4.97	0.00	1.00	100
	Ridge	0.94107	0.17	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.5$)	0.77641	4.99	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.78873	4.99	0.00	1.00	100
100	EKK	0.62813	0.32	0.00	0.00	0
	LASSO	0.70687	4.99	0.00	1.00	100
	SCAD	0.71119	4.99	0.00	1.00	100
	Ridge	0.88413	0.39	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.5$)	0.72519	4.99	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.72274	4.99	0.00	1.00	100
300	EKK	0.21292	0.63	0.00	0.00	0
	LASSO	0.14151	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	0.14096	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	0.14926	1.72	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.6$)	0.14586	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.14644	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 5.2 Çarpık t varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	6.27004	0.07	0.00	0.00	1
	LASSO	5.38272	4.92	0.00	1.00	75
	SCAD	4.36782	4.91	0.00	1.00	79
	Ridge	9.15211	0.03	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.3$)	1.32212	4.95	0.00	1.00	95
	Elastik-Net	1.42161	4.94	0.00	1.00	92
100	EKK	4.71634	0.12	0.00	0.00	3
	LASSO	3.36237	4.94	0.00	1.00	79
	SCAD	2.64797	4.95	0.00	1.00	82
	Ridge	5.79192	0.14	0.00	0.00	3
	Bridge ($\gamma = 0.3$)	1.23198	4.99	0.00	1.00	99
	Elastik-Net	1.28862	4.98	0.00	1.00	97
300	EKK	1.54206	0.46	0.00	0.00	5
	LASSO	2.38521	5.00	0.00	1.00	87
	SCAD	2.08271	5.00	0.00	1.00	90
	Ridge	3.38121	0.55	0.00	0.00	6
	Bridge ($\gamma = 0.3$)	0.88275	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.01174	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 5.3 Çarpık normal varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları p=2

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	1.32874	0.09	0.00	0.00	0
	LASSO	2.68375	4.92	0.00	1.00	99
	SCAD	1.63358	4.92	0.00	1.00	99
	Ridge	2.84107	0.10	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.30554	4.94	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.16273	4.93	0.00	1.00	100
100	EKK	0.94135	0.12	0.00	0.00	0
	LASSO	1.52066	4.95	0.00	1.00	100
	SCAD	1.38245	4.96	0.00	1.00	100
	Ridge	2.12141	0.19	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	1.13119	4.98	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.82691	4.99	0.00	1.00	100
300	EKK	0.65248	0.31	0.00	0.00	0
	LASSO	1.39091	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	0.94215	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	1.33245	0.42	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	0.70577	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.73907	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 5.4 Çarpık t varsayımı Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	9.11264	0.12	0.00	0.00	1
	LASSO	7.53555	4.94	0.00	1.00	70
	SCAD	7.23121	4.98	0.00	1.00	71
	Ridge	10.8359	0.04	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	3.37744	4.99	0.00	1.00	94
	Elastik-Net	2.74349	4.98	0.00	1.00	91
100	EKK	6.74062	0.19	0.00	0.00	2
	LASSO	6.31065	5.00	0.00	1.00	78
	SCAD	4.25052	5.00	0.00	1.00	82
	Ridge	8.28776	0.21	0.00	0.00	1
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	2.67432	5.00	0.00	1.00	98
	Elastik-Net	2.41269	5.00	0.00	1.00	94
300	EKK	4.77396	0.25	0.00	0.00	3
	LASSO	4.84763	5.00	0.00	1.00	82
	SCAD	3.67702	5.00	0.00	1.00	89
	Ridge	6.67764	0.36	0.00	0.00	5
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.70667	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	9.11264	5.00	0.00	1.00	99

Çizelge 5.5 Çarpık normal varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları p=1

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	153.371	0.05	0.02	0.00	0
	LASSO	18.9886	19.90	0.00	1.00	100
	SCAD	23.8413	19.91	0.00	1.00	100
	Ridge	25.4831	0.24	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	5.25402	19.96	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	4.96496	19.95	0.00	1.00	100
100	EKK	9.84961	0.12	0.01	0.00	0
	LASSO	14.0061	19.92	0.00	1.00	100
	SCAD	15.1936	19.93	0.00	1.00	100
	Ridge	3.50364	0.30	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	3.20183	19.98	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	2.54721	19.97	0.00	1.00	100
300	EKK	77.0228	0.23	0.01	0.00	0
	LASSO	7.92019	19.95	0.00	1.00	100
	SCAD	11.0226	19.95	0.00	1.00	100
	Ridge	11.2441	0.41	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	1.93828	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.82779	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 5.6 Çarpık t varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	596.370	0.01	0.02	0.00	0
	LASSO	62.9105	19.91	0.00	1.00	80
	SCAD	43.7098	19.90	0.00	1.00	81
	Ridge	72.9647	0.03	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	6.40076	19.92	0.00	1.00	87
	Elastik-Net	6.20525	19.93	0.00	1.00	88
100	EKK	257.696	0.03	0.01	0.00	0
	LASSO	42.7374	19.93	0.00	1.00	88
	SCAD	24.3421	19.95	0.00	1.00	89
	Ridge	52.9388	0.06	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	5.26127	19.96	0.00	1.00	95
	Elastik-Net	5.36708	19.96	0.00	1.00	96
300	EKK	179.401	0.08	0.01	0.00	0
	LASSO	29.9325	19.96	0.00	1.00	93
	SCAD	19.9322	19.98	0.00	1.00	94
	Ridge	43.3719	0.12	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	4.97501	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	7.17401	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 5.7 Çarpık normal varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları p=2

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	201.527	0.02	0.02	0.00	0
	LASSO	24.6611	19.92	0.00	1.00	100
	SCAD	30.5723	19.91	0.00	1.00	100
	Ridge	28.2912	0.20	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	5.72688	19.93	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	6.21428	19.92	0.00	1.00	100
100	EKK	132.550	0.06	0.01	0.00	0
	LASSO	21.7181	19.94	0.00	1.00	100
	SCAD	21.6325	19.94	0.00	1.00	100
	Ridge	23.0624	0.24	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	5.06114	19.96	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	5.39975	19.95	0.00	1.00	100
300	EKK	95.0699	0.34	0.01	0.00	0
	LASSO	13.5405	19.96	0.00	1.00	100
	SCAD	15.1031	19.96	0.00	1.00	100
	Ridge	13.6138	0.46	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	4.24545	19.98	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	4.37516	19.97	0.00	1.00	100

Çizelge 5.8 Çarpık t varsayımı Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	871.672	0.01	0.02	0.00	0
	LASSO	78.2475	19.84	0.00	1.00	45
	SCAD	80.2884	19.85	0.00	1.00	72
	Ridge	101.886	0.18	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	23.2888	19.9	0.00	1.00	98
	Elastik-Net	22.9305	19.89	0.00	1.00	97
100	EKK	668.253	0.06	0.01	0.00	0
	LASSO	69.9621	19.86	0.00	1.00	51
	SCAD	71.3488	19.87	0.00	1.00	80
	Ridge	88.3965	0.24	0.01	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	21.7774	19.92	0.00	1.00	99
	Elastik-Net	21.1160	19.91	0.00	1.00	99
300	EKK	518.381	0.17	0.00	0.00	0
	LASSO	60.0242	19.89	0.00	1.00	62
	SCAD	63.2577	19.89	0.00	1.00	91
	Ridge	79.5837	0.35	0.00	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	19.2554	19.94	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	19.2577	19.94	0.00	1.00	100

Çizelge 5.9 Çarpık normal varsayımı Durum III için değişken seçim sonuçları

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	8595.69	0.00	0.21	0.00	0
	LASSO	2594.26	3.88	0.02	0.88	32
	SCAD	172.308	3.75	0.09	0.75	46
	Ridge	1635.02	0.00	0.20	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	99.3096	4.20	0.02	0.99	89
	Elastik-Net	95.9513	4.03	0.03	0.97	82
100	EKK	4261.36	0.00	0.18	0.00	0
	LASSO	1604.50	3.96	0.01	0.88	45
	SCAD	132.109	3.87	0.06	0.75	59
	Ridge	881.294	0.00	0.12	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	68.4108	4.65	0.01	0.99	92
	Elastik-Net	66.2998	4.56	0.01	0.97	91
300	EKK	1105.40	0.00	0.00	0.00	0
	LASSO	1059.21	4.55	0.08	1.00	72
	SCAD	88.4068	4.31	0.00	0.98	79
	Ridge	468.694	0.00	0.02	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	57.2758	4.82	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	58.3881	4.81	0.00	1.00	100

Çizelge 5.10 Çarpık t varsayımı Durum III için değişken seçim sonuçları

N	Yöntem	HKO	Regresyon Parametreleri			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
50	EKK	345.803	0.02	0.26	0.00	0
	LASSO	306.994	4.00	0.00	1.00	45
	SCAD	101.811	4.25	0.01	0.97	76
	Ridge	103.138	0.05	0.19	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	55.5142	4.91	0.00	1.00	95
	Elastik-Net	55.3098	4.90	0.00	1.00	92
100	EKK	189.274	0.08	0.21	0.00	0
	LASSO	169.982	4.12	0.00	1.00	62
	SCAD	85.3696	4.34	0.00	1.00	81
	Ridge	94.4173	0.11	0.10	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.7$)	25.3511	4.95	0.00	1.00	98
	Elastik-Net	21.1368	4.96	0.00	1.00	99
300	EKK	47.1527	0.20	0.17	0.00	0
	LASSO	65.6419	4.71	0.00	1.00	75
	SCAD	79.2785	4.85	0.00	1.00	90
	Ridge	71.6095	0.22	0.04	0.00	0
	Bridge ($\gamma = 0.8$)	15.1679	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	10.1527	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 5.11 Durum I için parametre tahmin sonuçları p=2

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
Çt	50	$\hat{\beta}_1$	3.6056	3.6824	3.7641	3.7224	3.4267	4.2319
		<i>HKO</i>	1.0829	1.4284	1.2990	0.8734	0.2670	1.0602
		$\overline{SE}$	0.8956	1.3068	2.6957	2.3350	1.2742	1.5778
		$\overline{AS}$	2.5386	1.6668	1.9755	1.4788	1.9192	2.3622
		$\overline{US}$	5.5712	5.8736	5.1240	4.5288	4.2609	5.0772
		$\hat{\beta}_2$	1.9350	2.1239	1.4344	2.0536	1.9691	2.2546
		<i>HKO</i>	0.8811	0.7549	0.9528	0.4451	0.9310	0.5540
		$\overline{SE}$	0.6403	1.0959	0.9565	0.6799	0.6895	0.9447
		$\overline{AS}$	2.1418	1.4612	2.0350	1.6281	1.5490	1.6219
		$\overline{US}$	1.7389	2.2586	2.0822	1.8553	2.0674	2.4832
		$\hat{\beta}_5$	2.7961	3.2066	3.6818	2.2776	2.3911	2.8706
		<i>HKO</i>	0.8050	1.4158	1.0007	1.3018	1.6812	0.9079
		$\overline{SE}$	1.5175	2.0331	1.5182	1.5468	1.8787	2.0838
		$\overline{AS}$	1.6785	1.3531	1.7259	1.2427	1.5945	1.6340
		$\overline{US}$	3.7773	3.9171	3.7619	3.7687	3.8278	4.0942
	100	$\hat{\beta}_1$	3.7848	3.5943	4.1800	3.6368	3.3410	3.4471
		<i>HKO</i>	0.7247	0.5443	0.7626	0.8590	1.0544	0.4616
		$\overline{SE}$	1.3397	2.0278	2.1760	1.6927	1.2696	1.4508
		$\overline{AS}$	2.1273	1.9742	1.7608	1.8605	2.0202	2.5694
		$\overline{US}$	4.9908	5.3924	4.9920	4.9833	4.5252	4.4167
		$\hat{\beta}_2$	1.7982	1.7059	1.6548	1.8563	1.7658	2.2735
		<i>HKO</i>	1.0120	1.0020	0.7151	0.4774	0.2713	0.3854
		$\overline{SE}$	0.4034	0.7562	0.8163	0.4438	0.7887	0.3385
		$\overline{AS}$	2.1248	1.6368	1.5823	1.8479	1.8453	1.4388
		$\overline{US}$	1.6398	2.1703	1.8532	2.2800	2.4825	1.9361
		$\hat{\beta}_5$	2.5674	3.4018	3.5327	2.6532	2.3010	2.5694
		<i>HKO</i>	1.2310	1.5745	1.7240	1.1206	0.9895	1.5632
		$\overline{SE}$	1.0780	1.5360	1.6486	1.7946	1.6582	1.8390
		$\overline{AS}$	1.5982	1.4956	1.6638	2.2173	1.6853	1.9970
		$\overline{US}$	2.8517	3.3235	3.4154	3.9109	3.8965	3.3199
	300	$\hat{\beta}_1$	4.0991	4.0576	4.0193	3.2532	3.8886	3.8099
		<i>HKO</i>	0.5133	0.4651	0.2055	0.9030	0.2095	0.7209
		$\overline{SE}$	0.5311	0.3605	0.2332	0.9356	0.5753	0.3589
		$\overline{AS}$	3.0897	2.0201	2.4790	2.1327	3.0144	2.5714
		$\overline{US}$	4.2855	4.4774	4.7697	4.7038	4.3611	4.0143
		$\hat{\beta}_2$	2.2184	1.8259	2.2258	1.5555	2.0902	1.5977
		<i>HKO</i>	0.7111	0.9589	0.7647	0.4518	0.2451	0.5461
		$\overline{SE}$	0.6559	1.0717	1.1875	0.5619	0.7760	1.0942
		$\overline{AS}$	1.6430	2.0698	1.6526	2.2698	2.2311	1.6199
		$\overline{US}$	1.7503	2.0480	2.3233	1.9506	2.1335	2.5077
		$\hat{\beta}_5$	2.9033	3.0752	2.9508	2.8441	2.1849	2.5145
		<i>HKO</i>	1.4219	1.1847	1.5623	0.9768	0.9931	0.7498
		$\overline{SE}$	1.6126	1.5221	1.2981	1.9113	0.9624	1.7673
		$\overline{AS}$	2.1067	1.6043	1.3294	2.0942	1.9283	1.9575
		$\overline{US}$	3.4683	4.1047	3.5490	3.8545	3.3389	3.8644

Çizelge 5.11 Durum I için parametre tahmin sonuçları p=2 (devam)

<i>Dağılım</i>	N		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
ÇN	50	$\hat{\beta}_1$	3.0429	3.5960	4.0310	4.2924	3.8685	4.1283
		<i>HKO</i>	0.4796	1.1921	1.6613	1.2209	0.3558	0.6693
		$\overline{SE}$	0.9079	1.5436	2.4011	1.7566	1.7327	1.4433
		$\overline{AS}$	2.2328	2.1265	2.1252	1.6074	2.0847	1.7938
		$\overline{US}$	4.9711	5.2232	5.1468	4.8876	5.0047	4.1829
		$\hat{\beta}_2$	2.1194	1.2458	2.1215	2.0221	1.4387	1.5980
		<i>HKO</i>	0.6880	1.0614	0.5068	0.6454	0.9406	0.7597
		$\overline{SE}$	0.9225	0.3151	0.4637	0.8395	0.5463	1.0671
		$\overline{AS}$	2.1228	1.2597	1.5380	1.6137	1.4572	1.5752
		$\overline{US}$	2.0772	2.7436	2.2333	1.8120	1.8506	2.3696
		$\hat{\beta}_5$	2.6324	2.8987	3.4560	2.8795	2.3560	2.7969
		<i>HKO</i>	1.2183	1.7852	1.1897	1.1412	1.4795	1.0745
		$\overline{SE}$	1.2190	2.1116	1.5911	1.3379	1.9229	1.4544
		$\overline{AS}$	0.9938	0.8664	1.4966	1.2299	1.8675	1.4214
		$\overline{US}$	3.3880	3.7807	4.0179	3.7658	4.0740	3.9952
	100	$\hat{\beta}_1$	3.8096	3.7291	4.1310	4.0020	3.9530	3.3625
		<i>HKO</i>	0.3336	0.4592	1.3941	0.9922	0.2874	0.8305
		$\overline{SE}$	1.4251	1.3639	2.0528	1.9538	1.2881	1.2911
		$\overline{AS}$	2.3845	2.1330	2.0466	1.5102	1.9545	2.3426
		$\overline{US}$	4.5861	5.2547	5.0906	4.5073	4.7677	4.8631
		$\hat{\beta}_2$	2.1299	1.7670	1.3817	2.2832	1.4391	1.6279
		<i>HKO</i>	0.7480	0.2423	0.1762	0.2507	0.6855	0.5664
		$\overline{SE}$	0.3795	0.9014	0.9262	0.4089	0.7994	0.5677
		$\overline{AS}$	1.6304	1.6195	1.4163	1.9297	1.4463	1.8243
		$\overline{US}$	2.4755	1.7588	1.8063	2.3983	2.4855	2.5051
		$\hat{\beta}_5$	2.0284	3.3943	3.2074	2.7357	2.1070	2.0562
		<i>HKO</i>	0.7344	1.4666	1.4219	1.4960	0.6859	1.0545
		$\overline{SE}$	0.9382	1.4805	1.5296	1.5746	1.2112	1.0072
		$\overline{AS}$	1.8980	1.6481	1.9646	1.6716	1.7605	2.1515
		$\overline{US}$	3.6026	4.0169	3.5941	3.8094	3.6813	3.5112
	300	$\hat{\beta}_1$	4.0688	3.7860	3.3069	3.2337	3.3220	3.1192
		<i>HKO</i>	0.1071	0.5287	0.1254	0.0589	0.5814	0.7924
		$\overline{SE}$	0.2063	1.0777	0.7009	0.5637	0.3295	0.2716
		$\overline{AS}$	2.9462	1.7771	2.3774	2.6707	2.6512	2.2732
		$\overline{US}$	4.4192	4.7608	4.7861	4.5782	4.1990	4.3465
		$\hat{\beta}_2$	2.1790	1.8930	1.6274	2.0747	2.1032	1.5400
		<i>HKO</i>	0.4246	0.6688	0.9484	0.2045	0.2839	0.3247
		$\overline{SE}$	0.2631	0.6986	0.1925	0.9183	1.1364	0.8358
		$\overline{AS}$	2.1096	1.5746	1.3919	2.0131	1.5296	2.1481
		$\overline{US}$	1.5993	1.8800	2.1617	1.9986	1.9567	1.6058
		$\hat{\beta}_5$	2.8524	2.7182	2.9738	2.5690	2.6085	2.6665
		<i>HKO</i>	1.1793	0.7947	1.2224	0.8782	0.8618	0.9512
		$\overline{SE}$	1.0114	1.0810	1.5542	2.0496	1.1989	1.3417
		$\overline{AS}$	1.7676	1.4653	1.9589	2.2087	1.6986	2.0441
		$\overline{US}$	2.8301	3.8094	3.6869	3.7330	3.2471	3.5126

Çizelge 5.12 Durum II için parametre tahmin sonuçları p=2

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
ÇN	50	$\hat{\beta}$	1.8322	1.3298	1.6243	1.3778	1.6756	1.2183
		<i>HKO</i>	14.7180	17.1787	15.7363	8.6915	4.5126	4.3552
		$\overline{SE}$	0.8939	0.6308	0.1988	1.0157	0.3834	0.5945
		$\overline{AS}$	1.0727	0.7731	0.5561	0.8459	0.5681	0.5575
		$\overline{US}$	1.7064	2.4358	2.7995	2.0223	2.0639	2.1602
	100	$\hat{\beta}$	1.5519	1.1977	1.6711	1.3496	1.5052	1.9177
		<i>HKO</i>	12.4262	14.5458	13.4995	7.1334	2.6916	2.7272
		$\overline{SE}$	0.1036	0.8512	0.2652	0.7181	0.7078	0.2944
		$\overline{AS}$	1.0791	0.9929	1.0302	0.5884	1.1751	0.6485
		$\overline{US}$	1.9746	1.9272	2.1745	2.2714	2.2014	1.7728
	300	$\hat{\beta}$	1.7131	1.8550	1.5038	1.4185	1.7923	1.6272
		<i>HKO</i>	10.7213	13.4424	12.1296	4.5306	0.5351	0.7405
		$\overline{SE}$	0.9063	0.4674	0.2923	0.8546	0.6598	0.6163
		$\overline{AS}$	0.7919	0.7593	0.4575	1.1413	0.7091	1.0190
		$\overline{US}$	1.7283	2.5397	1.7782	2.0195	2.3614	2.1154
Çt	50	$\hat{\beta}$	1.4497	1.0714	1.2596	1.2095	1.5741	1.5978
		<i>HKO</i>	17.1365	19.5230	17.9878	10.8171	7.0851	6.7576
		$\overline{SE}$	0.3773	1.1073	0.5547	0.3380	0.7275	0.8210
		$\overline{AS}$	0.8472	0.2476	0.9863	0.9704	0.6155	0.2223
		$\overline{US}$	2.2690	2.6002	2.6199	2.2747	2.7198	1.9627
	100	$\hat{\beta}$	0.9657	1.7617	1.4250	1.3635	1.7215	1.4261
		<i>HKO</i>	14.7983	16.8720	15.9337	9.2093	5.3460	5.0800
		$\overline{SE}$	0.5295	0.4675	0.7356	0.5825	0.8413	0.8683
		$\overline{AS}$	0.5765	1.1007	0.7698	0.5638	0.3961	0.2453
		$\overline{US}$	2.4632	2.4349	2.6590	2.0193	1.8542	2.5602
	300	$\hat{\beta}$	1.4600	1.7771	1.6994	1.3204	1.3047	1.2073
		<i>HKO</i>	12.9584	15.8339	13.8837	7.4737	2.9433	2.9552
		$\overline{SE}$	0.8386	0.7141	1.0363	0.6518	0.5888	0.5058
		$\overline{AS}$	1.1005	0.3128	0.5062	1.1780	0.7476	0.2301
		$\overline{US}$	2.2489	2.2148	2.5220	2.6717	1.8963	2.6538

Çizelge 5.13 Durum III için parametre tahmin sonuçları p=2

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
Çt	50	$\hat{\beta}_1$	5.1679	4.8160	4.3624	5.0490	4.5717	4.9919
		<i>HKO</i>	5.1183	5.4720	5.9242	4.8916	5.1584	5.3209
		$\overline{SE}$	1.9507	1.7637	2.6263	2.0288	1.3520	2.0796
		$\overline{AS}$	1.0396	1.1428	1.2346	1.2781	1.0947	1.8178
		$\overline{US}$	5.4395	6.5928	6.0749	5.9805	5.8293	5.3230
		$\hat{\beta}_2$	2.9454	2.1431	3.0188	3.1728	2.3996	2.8089
		<i>HKO</i>	2.7390	2.5573	3.0283	3.1869	3.1616	2.5097
		$\overline{SE}$	0.6087	1.2178	0.7551	0.5287	0.7054	1.2473
		$\overline{AS}$	0.8337	1.0099	1.2034	1.0692	1.1123	0.4791
		$\overline{US}$	2.7823	3.2320	3.4658	3.3250	3.5119	3.1009
		$\hat{\beta}_5$	3.5941	3.5676	3.9391	3.1813	3.5540	3.2063
		<i>HKO</i>	3.1191	3.4098	4.1182	3.2154	3.3861	3.1231
		$\overline{SE}$	1.6235	1.7355	1.4940	1.6194	2.0789	1.9822
		$\overline{AS}$	0.4205	0.6490	0.1640	0.4707	0.6041	0.7497
		$\overline{US}$	4.8155	4.6192	4.8334	4.9111	4.2882	4.2059
	100	$\hat{\beta}_1$	3.8385	4.2427	4.9102	5.1151	4.0979	4.8149
		<i>HKO</i>	3.6902	3.5315	3.1777	3.2620	3.2102	3.4288
		$\overline{SE}$	1.7672	1.7011	2.4197	1.6877	1.7013	1.0211
		$\overline{AS}$	1.5550	0.9470	0.7114	1.1071	1.2070	1.2782
		$\overline{US}$	5.3090	6.4149	6.1698	5.7298	5.4058	5.7391
		$\hat{\beta}_2$	2.7567	2.5136	2.9417	2.6150	2.7637	3.2217
		<i>HKO</i>	2.4427	3.2566	2.6999	2.8421	2.8126	3.3277
		$\overline{SE}$	0.6730	1.1580	1.1813	0.9271	0.3087	1.1688
		$\overline{AS}$	0.8413	0.4512	1.1370	1.2959	0.9687	0.6435
		$\overline{US}$	2.8554	3.1916	3.5420	2.6917	3.2019	2.7487
		$\hat{\beta}_5$	3.2335	4.2014	4.4432	3.4922	2.8981	3.6204
		<i>HKO</i>	2.9537	3.7288	4.0858	3.9063	3.4072	3.5786
		$\overline{SE}$	1.1754	1.3921	1.8049	1.3345	1.4286	1.9127
		$\overline{AS}$	0.6226	1.2867	1.3318	0.7192	1.2218	0.8409
		$\overline{US}$	3.8590	4.2648	4.9198	4.2177	3.9820	4.5193
	300	$\hat{\beta}_1$	4.7203	4.9684	4.9851	4.7236	4.7379	4.8779
		<i>HKO</i>	2.8442	2.8858	3.3945	2.9715	3.2832	2.9177
		$\overline{SE}$	1.0436	0.2672	0.6699	0.4193	0.3920	1.1149
		$\overline{AS}$	1.6162	1.7008	1.1258	1.0178	1.8974	1.6820
		$\overline{US}$	5.0292	6.1440	5.9443	4.8901	5.4726	5.7095
		$\hat{\beta}_2$	2.5880	3.1641	3.0209	2.4104	2.7821	3.0931
		<i>HKO</i>	2.4883	3.1853	3.0689	3.0895	2.7857	3.2729
		$\overline{SE}$	0.8224	0.2378	0.7391	0.4821	0.6866	0.7290
		$\overline{AS}$	1.1830	0.5375	0.8308	1.1287	0.6460	0.5288
		$\overline{US}$	2.5146	3.1736	2.8473	2.8337	3.3315	2.4929
		$\hat{\beta}_5$	3.3342	4.0938	4.2788	3.1982	3.3486	3.4160
		<i>HKO</i>	3.7378	3.8900	4.1940	3.6408	3.7530	4.0018
		$\overline{SE}$	1.7836	1.0897	1.3810	2.0463	1.5492	1.6710
		$\overline{AS}$	0.6805	0.8713	0.7473	1.3753	1.4448	0.5481
		$\overline{US}$	4.3125	4.7910	4.1193	3.9972	4.6906	4.4567

Çizelge 5.13 Durum III için parametre tahmin sonuçları p=2 (devam)

<i>Dağılım</i>	<i>N</i>		EKK	Ridge	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-net
ÇN	50	$\hat{\beta}_1$	6.2086	6.8283	6.4825	6.6437	7.0022	7.1385
		<i>HKO</i>	12.5502	11.904	12.3470	12.3153	11.896	12.460
		$\overline{SE}$	3.4318	3.7534	4.7488	4.3727	3.0835	3.1125
		$\overline{AS}$	0.5924	0.5622	0.3411	0.5251	1.1659	0.3872
		$\overline{US}$	6.9647	6.4516	7.2079	6.7147	5.9211	5.9164
		$\hat{\beta}_2$	4.6197	4.0999	4.3368	5.0733	4.3387	4.3806
		<i>HKO</i>	10.731	10.625	11.110	10.838	10.710	11.357
		$\overline{SE}$	2.9350	2.5662	2.5863	2.7675	3.0638	2.5646
		$\overline{AS}$	0.8048	0.6261	0.5497	0.1629	0.2349	0.7955
		$\overline{US}$	3.5871	4.1892	4.1341	3.7310	3.5076	4.0029
		$\hat{\beta}_5$	5.2366	5.7138	5.6624	5.6718	5.6652	5.4423
		<i>HKO</i>	11.9181	11.3486	12.1383	11.3655	11.1886	11.685
	100	$\overline{SE}$	3.1882	3.7342	3.5381	3.4112	3.6644	3.8284
		$\overline{AS}$	0.1722	-0.3125	0.3172	-0.4147	0.0524	0.1365
		$\overline{US}$	4.8362	5.3807	5.9330	5.5989	4.9677	5.7126
		$\hat{\beta}_1$	6.1625	5.7207	7.0041	6.3248	6.1269	6.9738
		<i>HKO</i>	9.9919	10.9802	10.755	10.708	10.789	10.547
		$\overline{SE}$	3.2240	4.1748	3.9557	3.5897	3.4104	3.8311
		$\overline{AS}$	0.9975	0.3952	0.8695	0.8002	1.1965	0.5553
		$\overline{US}$	5.7349	6.7075	6.5376	6.1019	5.5956	6.1601
		$\hat{\beta}_2$	4.7491	4.5661	4.9749	4.4561	4.6917	4.3969
		<i>HKO</i>	9.6687	10.716	10.208	9.9791	10.431	10.548
		$\overline{SE}$	3.1771	2.2852	3.0739	2.3732	2.4486	3.0989
		$\overline{AS}$	0.1370	0.7189	0.5681	0.9002	0.5412	0.0046
		$\overline{US}$	3.7997	3.5380	3.3207	3.8273	3.6576	3.6723
	300	$\hat{\beta}_5$	5.3675	5.3029	6.2612	5.1333	5.4935	5.3292
		<i>HKO</i>	10.3019	10.4031	11.3078	10.5673	10.873	10.387
		$\overline{SE}$	3.6487	3.7997	3.2312	3.3295	3.7533	3.8723
		$\overline{AS}$	0.4168	0.4790	0.6292	0.4089	0.9598	0.5484
		$\overline{US}$	4.9249	5.2137	5.2973	5.3781	4.4698	4.8717
		$\hat{\beta}_1$	6.7004	6.1528	6.4803	6.8586	6.5125	6.4623
		<i>HKO</i>	9.6841	9.3212	9.6093	8.8448	8.8763	8.9957
		$\overline{SE}$	2.3335	2.3773	3.0639	3.0954	2.3042	3.0979
		$\overline{AS}$	1.1207	0.5334	1.0296	0.5990	1.6433	1.0273
		$\overline{US}$	5.9580	6.2341	6.7028	6.4885	6.4404	5.6042
		$\hat{\beta}_2$	4.4026	4.3016	4.2012	4.8981	5.1659	4.4299
		<i>HKO</i>	9.4265	9.6268	9.6570	9.4874	9.1223	8.9404
		$\overline{SE}$	2.3101	2.6449	2.6497	2.7571	2.4388	2.7521
		$\overline{AS}$	0.4495	0.7765	0.4201	0.6984	0.4363	0.2633
		$\overline{US}$	3.3867	3.9278	3.4822	3.4915	3.9837	3.8978
		$\hat{\beta}_5$	4.8712	5.6519	5.6864	5.3862	4.7975	5.5399
		<i>HKO</i>	9.3452	9.7326	10.122	10.131	10.144	9.5884
		$\overline{SE}$	3.6919	3.5997	3.4765	4.0743	3.4373	3.6551
		$\overline{AS}$	0.5849	0.4738	0.3880	-0.0478	0.2079	0.6743
		$\overline{US}$	4.6781	5.4380	5.5203	4.8312	5.0455	5.3635

5.4 SPK Verisi

Bu bölümde, Sermaye Piyasası Kurulundan (SPK) elde edilen kredi takiplerine dönüş oranı verisi kullanılarak ülkemizde kredi dönüş oranlarının, ekonomik olarak hangi veri türlerine bağlı olabileceği araştırılmıştır.

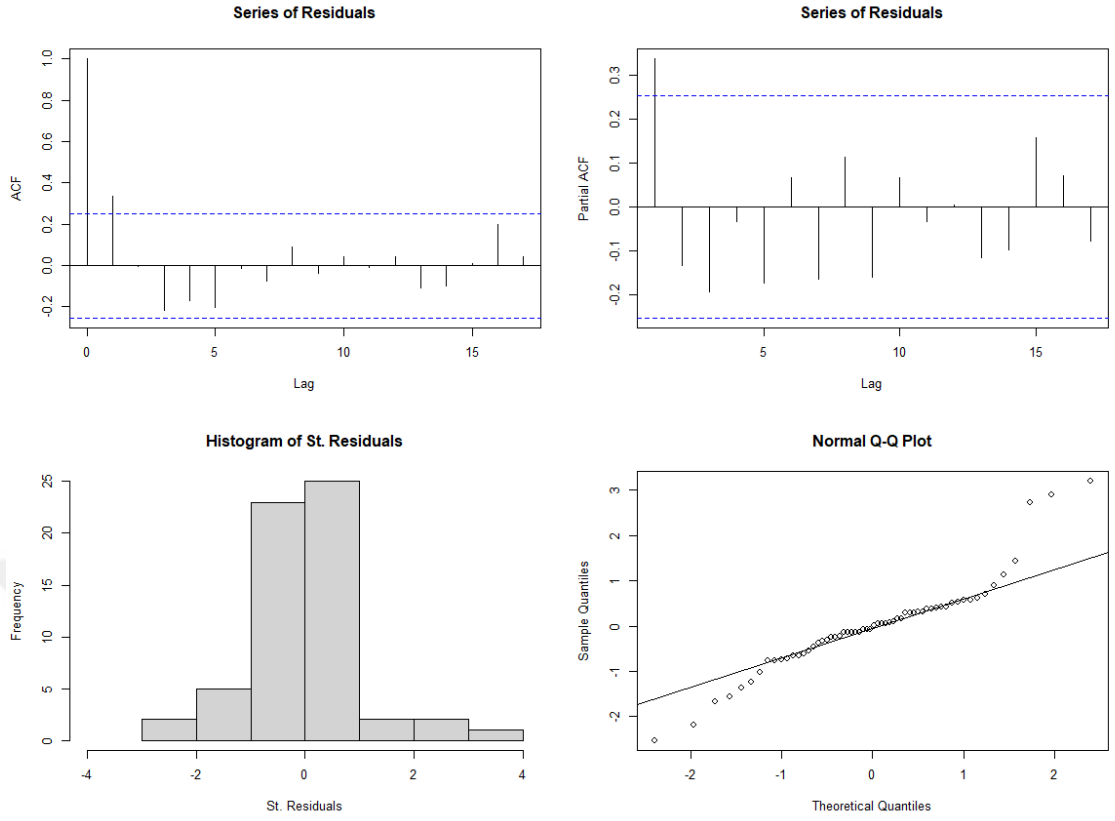
Kullanılan veri, 2005 ve 2019 yılları arasında, 4 er aylık periyotlar halinde toplanmıştır. Elde edilen veri setinde, bir adet açıklanan ve 14 adet açıklayıcı değişken bulunmaktadır. Bu değişkenler aşağıdaki gibidir.

y	Takibe dönüş oranı
x1	İşsizlik oranı
x2	Enflasyon
x3	Faiz oranları
x4	Toplam sanayi üretim endeksi
x5	Döviz kuru
x6	GSYİH
x7	İhracat
x8	İthalat
x9	Kredi
x10	Mevduat
x11	Aktif
x12	Mevduat/aktif
x13	Kredi/mevduat
x14	Kredi/aktif

Bu değişkenler ile EKK yöntemi kullanılarak yapılan analizler sonucunda “Faiz oranları”, “Toplam sanayi üretim endeksi”, “Döviz kuru”, “Kredi” ve “Aktif” değişkenlerinin kredilerin dönüş oranlarını etkilediği diğer değişkenlerin etkilerinin oldukça az veya neredeyse hiç olmadığı gözlenmiştir. Aynı zamanda sabit katsayının model için anlamsız olduğu tespit edilmiştir. Bu bilgiler altında aşağıdaki doğrusal regresyon modeli kullanılarak analizlere devam edilmiştir.

$$y = \beta_1 \text{Faiz oranları} + \beta_2 \text{Toplam sanayi üretim endeksi} + \beta_3 \text{Döviz kuru} + \beta_4 \text{Kredi} + \beta_5 \text{Aktif} + \epsilon$$

Bu model için artık analizi yapılmış ve Şekil 5.1’de görülen sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 5.1 Artıklara ait ACF, PACF, histogram ve Q-Q grafikleri

Şekil 5.1'deki ACF ve PACF grafiklerine göre hatalar birinci derece otoregresif yapı göstermektedir. Artıklara ilişkin histogram, verilerde çarpıklık hatta kalın kuyrukluluk olabileceğini göstermektedir. Son olarak, Q-Q grafiğinde ise veriler içinde bir miktar sapan gözlem olabileceği tespit edilmiştir. Bu sonuçlara göre; verinin, birinci derece otoregresif hata terimi ve çarpık dağılım varsayımı altında modellenmesinin uygun olabileceği gözlenmiştir. Bu varsayımlar altında yapılan model seçim ve analiz sonuçları Çizelge 5.14'te verilmiştir:

Çizelge 5.14 SPK verisi için değişken seçim sonuçları

Ç.Normal	Seçilen Değişkenler	AIC	Çt	Seçilen Değişkenler	AIC
LASSO	(3,4,5,9,11)	95.12	LASSO	(3,4,5,9,11)	84.22
SCAD	(3,4,5,9)	87.25	SCAD	(3,4,5,9)	79.57
Bridge	(3,4,5,11)	71.19	Bridge	(3,4,5,11)	62.59
Elastiknet	(3,4,5,9)	90.25	Elastiknet	(3,4,5,9)	85.14

Yapılan analizin sonucunda, veride aykırı değerler olması nedeniyle AIC değerlerine göre; çarpık t dağılım varsayımı altında yapılan analizlerin, çarpık normal dağılım altında yapılan analizlere göre veriyi daha başarılı modellediği söylenebilir. Model seçimi bakımından bridge metodunun diğer yöntemlere göre daha iyi modelleme yaptığı gözlenmiştir.



6. ROBUST İSTATİSTİK

Robust istatistikler; bir istatistiksel modele ait normallik, hataların ilişkisizliği gibi gerçek hayatta nadir karşılaşılabilen, idealize edilmiş varsayımlardan sapmalarla baş edebilmek için ilk olarak Box tarafından, 1953 yılında istatistiksel kavram kazanmıştır. Söz konusu varsayımlardan sapmalara ilişkin birkaç örnek olarak; verilerin küçük bir kısmının verinin geriye kalanından farklı bir örüntü izlemesi ile oluşan aykırı değerler olması, yuvarlama ve gruplama hataları ve hataların normal dağılımdan ayrışmaları gösterilebilir. Veri seti içerisindeki bir tek aykırı değer, veri içerisinde yaklaşık bir normal dağılım görüntüsü oluştursa dahi EKK tahminini veya normal dağılıma dayanan bir tahmini tamamen bozabilir. Örneğin, veri seti merkezde normal dağılım görüntüsünde ancak kuyruklarda normal dağılımın kuyruklarından daha kalın veya çarpık bir görüntüye sahip olmuş olabilir. Varsayımların bozulduğu bu gibi durumlarda, kullanılan klasik istatistiksel yöntemler, istenilen sonuçların elde edilememesine neden olur. Robust istatistiksel yöntemler, varsayılan dağılımdan sapmalar veya aykırı değer bulunması durumunda da aykırı değerlerden etkilenmeden güvenilir sonuçlar verecek şekilde tasarlanmış istatistiksel yöntemlerdir. Robust yöntemler, veride aykırı değer olmadığında ve varsayımların tümü sağlandığında klasik tahmin edicilere benzer sonuçlar verir. Ancak veri seti, aykırı gözlem içerdiğinde klasik yöntemlere göre daha güvenli sonuçlar ortaya çıkar. Robustluğun ölçülmesi için kullanılan en yaygın ölçüler, etki fonksiyonu ve kırılma noktasıdır.

6.1 Etki Fonksiyonu

Bilinmeyen bir model parametresinin tahmin edicisinin etki fonksiyonu, yerel dayanıklılık (local robustness) olarak adlandırılır. Bir parametrenin tahmin edicisinin etki fonksiyonun; o tahmin ediciyi sonsuza götürmüyorsa (sınırlı olması) tahmin edicinin dayanıklı olması, sonsuza götürüyorsa (sınırlı olmaması) tahmin edicinin dayanıklı olmaması anlamına gelmektedir.

6.2 Kırılma Noktası

Donoho ve Huber(1983) tarafından tanıtılan kırılma noktası, dayanıklılığı ölçmek için kullanılan önemli bir araçtır. Kırılma noktası; bir tahmin edicinin, veri setinde var olan belirli sayıda noktanın sapan gözlemlerle karşılaştığında bozulup bozulmadığını ölçer. Bir tahmin edici için elde edilen kırılma noktası değeri yükseldikçe o tahmin edicinin, sapan gözlemlere karşı dayanıklılığı da artmaktadır.

6.3 Regresyonda Robust Tahmin Yöntemleri ile Parametre Tahmini

Robust regresyon, EKK yöntemine göre daha az kısıtlayıcı varsayımlar sunarak ve alternatif parametre tahmin yöntemleri kullanılarak regresyon denklemini elde etme yöntemidir. Bu metotlar, aykırı değerlerin veri üzerindeki etkisini kısıtlayarak verinin geneli üzerinde daha iyi ve güvenilir bir modelleme temin eder. Robust regresyon yöntemlerin uygulanabileceği aykırı gözlem tipleri; y-yönündeki aykırı gözlem, x-uzayında aykırı gözlem (kaldıraç noktaları) ve y-yönü ve x-uzayında eş zamanlı aykırı gözlem (Chen, 2002) şeklindedir.

Regresyon modelinde bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için literatürde kullanılan birçok robust tahmin yöntemi vardır. Bunlar arasında en popüler olanlar şöyle sıralanabilir:

- M-tahmin ediciler (Huber,1964)
- GM-tahmin ediciler (Mallows 1975, Hampel 1978, Hampel vd. 1986, Krasker 1980)
- S-tahmin ediciler (Rousseeuw ve Yohai 1984)
- MM tahmin ediciler (Yohai 1987)
- L-tahmin ediciler (Daniel)
- R-tahmin ediciler (Huber, 1981)
- RM-tahmin ediciler (Siegel, 1982),
- LMS tahmin ediciler (Rousseeuw, 1984)

6.3.1 Regresyon M tahmin edicileri

M tahmini, en çok olabilirlik tahmininin bir tür genellemesidir. M-Tahmin edicileri belirli bir amaç fonksiyonunun minimize edilmesini sağlayan robust tahmin edicilerdir. Bu tahmin edici artıklara ait bir ρ fonksiyonunu minimum yapmayı amaçlar. M tahmini x yönünde oluşan aykırı değerlere karşı dayanıklı olmamasına karşın, y yönündeki aykırı değerlere karşı dayanıklıdır.

Aşağıdaki çoklu doğrusal regresyon modeli ele alınsın.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (6.1)$$

Burada, $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]^T_{N \times 1}$ şeklinde açıklanan değişken vektörü, $\mathbf{X}$, $N \times (M + 1)$ boyutlu rastgele olmayan tasarım matrisi, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_M]^T_{(M+1) \times 1}$ şeklinde bilinmeyen parametre vektörü ve $\boldsymbol{\epsilon} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]^T_{N \times 1}$ şeklinde hata terimleri vektörünü ifade etmektedir. Bu model aynı zamanda $x_j = [1, x_{j1}, x_{j2} \ \dots \ x_{jN}]^T_{N \times 1}$ $\mathbf{X}$ tasarım matrisinin j . satırını göstermek üzere

$$y_j = \mathbf{x}'_j \boldsymbol{\beta} + \epsilon_j \quad (6.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\boldsymbol{\beta}$ parametresi için ML tahmin edicisinin hesaplanması $L(\boldsymbol{\beta})$ fonksiyonunun parametreye göre maksimum yapılmasıyla elde edildiğinden önceki bölümlerde bahsedilmişti. Bu bölümde; belli koşulları sağlayan genel bir $\rho_0(\cdot)$ amaç fonksiyonu kullanılarak regresyon için amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho_0 \left(\frac{r_j(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\sigma} \right) + \log \sigma \quad (6.3)$$

Burada, $\rho(\cdot)$ fonksiyonu:

i) $\rho(x) = \rho(-x)$

ii) $\rho(x) \geq 0$

iii) $\rho(0) = 0$

iv) $|x_i| > |x_j|$ için $\rho(x_i) \geq \rho(x_j)$ (azalmayan)

özelliklerini sağlar ve $\rho_0 = -\log f_0$ ve $r_j(\hat{\beta}) = y_j - \mathbf{x}'_j \beta$ dir.

ρ fonksiyonu negatif olmayan, azalmayan ve $\rho(0) = 0$ tanımlıdır. ρ fonksiyonunun, aykırı değerlere veya normal olmayan hatalara karşı sağlamlık kazanması için karesel kayıp fonksiyonundan (EKK) daha az hızlı artan bir fonksiyon olmalıdır. Literatürde; Huber'ın ρ fonksiyonu ve Tukey bi-square ρ fonksiyonu yaygın olarak kullanılan ρ fonksiyonlarıdır. Huber fonksiyonunun türevi sınırlı bir fonksiyondur. Öte yandan Tukey fonksiyonu sınırlı bir fonksiyondur ve türevi yeniden artan bir fonksiyondur. (Tukey, 1960)

σ ölçek parametresinin sabit olduğu varsayımı altında, bu fonksiyonun birinci türevi alınarak sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki şekilde skor fonksiyonu elde edilir:

$$\sum_{j=1}^n \psi_0 \left(\frac{r_j(\hat{\beta})}{\sigma} \right) \mathbf{x}_j = 0 \quad (6.4)$$

Burada $\psi_0 = \rho'_0 = -f'_0/f_0$ dır. Böylece $\hat{\beta}$ için regresyon M-tahmini şöyle tanımlanır:

$$\hat{\beta}_M = \min_{\beta} \sum_{j=1}^n \rho \left(\frac{r_j(\beta)}{\hat{\sigma}} \right) \quad (6.5)$$

Burada $\hat{\sigma}$ ölçek tahminidir. Bu eşitliğin türevi alınarak

$$\sum_{j=1}^n \psi \left(\frac{r_j(\hat{\beta})}{\hat{\sigma}} \right) \mathbf{x}_j = 0 \quad (6.6)$$

denkleminin çözümünden $\hat{\beta}$ elde edilir ve $\psi = \rho'$ olacak şekilde ρ 'nun birinci türevini ifade eder. Bu fonksiyon için $\hat{\sigma}$ önceden tahmin de edilebilir. Bu tahmin için normalleştirilmiş medyandan mutlak sapma (Median Absolute Deviation (MAD)) olarak bilinen dayanıklı bir tahmin edici şu şekilde kullanılabilir (Maronna vd. 2006):

$$\hat{\sigma} = 1.4826MAD(r_j), \quad r_j \neq 0 \quad (6.7)$$

Bu tezde, regresyon M tahminlerinin elde edilmesi için aşağıda verilen Tukey'in iki ağırlıklı fonksiyonu kullanılmıştır:

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{c^2}{6} \left(1 - \left[1 - \left(\frac{u_i}{c} \right)^2 \right]^3 \right) & , \quad |u_i| \leq c \\ \frac{c^2}{6} & , \quad |u_i| > c \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\psi(u_i) = \begin{cases} u_i \left[1 - \left(\frac{u_i}{c} \right)^2 \right]^2 & , \quad |u_i| \leq c \\ 0 & , \quad |u_i| > c \end{cases} \quad (6.9)$$

Regresyon M tahmin edicileri için iteratif adımlar aşağıdaki gibidir:

1. $\hat{\beta}_0$ başlangıç değeri, EKK kullanılarak hesaplanır.
2. Her bir t . iterasyon için $j = 1, 2, \dots, n$ için $r_j^{(t)} = y_j - \mathbf{x}_j' \hat{\beta}^{(t-1)}$ artıkları hesaplanır.
3. $r_j^{(t)}$ artıkları kullanılarak $\hat{\sigma}^{(t)} = 1.4826MAD(r_j^{(t)})$ ölçek tahmini hesaplanır
4. $\omega_j^{(t)}$ aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$\omega_j^{(t)} = \begin{cases} \frac{\psi\left(\frac{r_j^{(t)}}{\hat{\sigma}^{(t)}}\right)}{\frac{r_j^{(t)}}{\hat{\sigma}^{(t)}}}, & y_j \neq \mathbf{x}_j' \hat{\beta}^{(t-1)} \\ 1, & y_j = \mathbf{x}_j' \hat{\beta}^{(t-1)} \end{cases}$$

5. $\mathbf{W}^{(t)} = \text{diag} \left(\{\omega_j^{(t)} : i = 1, 2, \dots, n\} \right)$ ağırlık matrisi bulunur.

6. $\hat{\beta}_M^{(t)} = (X'W^{(t)}X)^{-1}(X'W^{(t)}y)$ eşitliğinden $\hat{\beta}_M^{(t)}$ hesaplanır.

7. Yakınsama sağlanana kadar 2-6. adımlar tekrar edilir.

Hata ölçeği σ , eğer bilinmeyen ise tahmin edilmelidir. Regresyon M tahminlerinde hata ölçeğini tahmin etmek için literatürde iki farklı yaklaşım önerilmiştir. Bu yaklaşımlardan biri, σ için robust bir $\hat{\sigma}$ ölçek tahmin yönteminin kullanılmasıdır. Sonra regresyon parametresinin tahminini sürdürmek için (6.6) denklemi kullanılır. Diğeri, regresyon M tahmin yöntemini kullanarak β ve σ parametrelerini eş zamanlı tahmin etmektir. Bir ρ monoton fonksiyonundan elde edilen M tahminleri, hata terimlerinin normal olmama durumuna veya aykırı değerlere karşı robusttır, ancak x yönündeki (kaldıraç noktaları) aykırı değerlere karşı robust değildir. Ayrıca, monoton bir ρ fonksiyonundan eşzamanlı olarak β ve σ parametrelerinin tahmin edilmesi, kırılma noktası açısından robust olmayan tahmin ediciler üretilmesine neden olmaktadır (Maronna vd., 2006). Bu nedenle, yüksek kırılma noktasına sahip tahmin ediciler elde etmek veya x yönündeki aykırı değerlere karşı sağlamlık kazanmak için, amaç fonksiyonunda sınırlı bir ρ fonksiyonu kullanılmalı ve ayrıca regresyon parametresi β tahmin edilmeden önce, σ için yüksek kırılma noktalı bir tahmin elde edilmelidir. Regresyon S tahmin edicisi bu koşulu sağlayan bir tahmin edicidir.

6.3.2 Regresyon S tahmin edicileri

S tahmin edicileri, Rousseeuw ve Yohai (1984) tarafından artıkların yayılımını en aza indirgeyen yüksek kırılma noktasına sahip bir yöntemdir. Ölçek tahminine dayandığı için bu tahmin ediciler, S tahmin edicileri adını almıştır.

S tahmin edicilerinin, IRA yöntemi ile hesaplama adımları aşağıdaki gibidir:

1. $\hat{\beta}_0$ başlangıç değeri EKK kullanılarak hesaplanır.
2. Her bir t . iterasyon için $j = 1, 2, \dots, n$ için $r_j^{(t)} = y_j - x_j'\hat{\beta}^{(t-1)}$ artıkları hesaplanır.
3. $r_j^{(t)}$ artıkları kullanılarak $\hat{\sigma}^{(t)}$ ölçek tahmini hesaplanır:

$$\hat{\sigma}^{(t)} = \begin{cases} 1.4826MAD(x_j), & t = 1 \\ \sqrt{\frac{1}{nK} \sum_{j=1}^n \omega_j \epsilon_j^2}, & t > 1 \end{cases}$$

4. $j = 1, 2, \dots, n$ için $u_j^{(t)} = \frac{r_j^{(t)}}{\hat{\sigma}^{(t)}}$ değerleri hesaplanır.
5. $j = 1, 2, \dots, n$ için $\omega_j^{(t)}$ hesaplanır ve $\mathbf{W}^{(t)}$ ağırlık matrisi oluşturulur.
6. $\beta_s^{(t)} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{(t)}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{W}^{(t)}\mathbf{y})$ eşitliğinden $\hat{\beta}_s^{(t)}$ hesaplanır.
7. Yakınsama sağlanana kadar 2-6. adımlar tekrar edilir.

Burada,

$$\frac{K}{\rho(c)} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

6.3.3 Regresyon MM tahmin edicileri

Yohai (1987) tarafından önerilen MM tahmin edicileri, M tahmin edicilerinin yüksek asimptotik göreceli etkinliği ile S tahmin edicilerinin yüksek kırılma noktası özelliklerini bir araya getiren tahmin edicilerdir. MM tahmin edicileri, bu iki özelliğe aynı anda sahip olması dolayısıyla yüksek verimliliğe sahip bir tahmin edicidir. Bu özelliği, MM tahmin edicilerini hata teriminin tüm yönlerinde (x, y, hem x hem y) aykırı değerlere karşı dayanıklı kılar. "MM", hesaplamalarında birden fazla M tahmin işlemini (multiple M-estimation procedures) ifade ettiği için bu şekilde isimlendirilmiştir.

MM tahminleri üç aşamalı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. Adım: Yüksek kırılma noktasına sahip bir başlangıç tahmini hesaplanır ($\hat{\beta}_s$)
2. Adım: $r_i(\hat{\beta}_s) = y_i - x_i^T \hat{\beta}_s$ artıkları hesaplanır. Buradan $\hat{\sigma}_s$ ölçek tahmini, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_0\left(\frac{r_i(\hat{\beta}_s)}{\sigma}\right) = 0.5$ kullanılarak hesaplanır. (Huber 1981)
3. Adım: $L_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \rho_1\left(\frac{r_i(\beta)}{\hat{\sigma}_s}\right)$ fonksiyonunun minimizasyonu yapılarak MM tahmin edicisi elde edilir ($\hat{\beta}_{MM}$).

$L_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \rho_1 \left(\frac{r_i(\beta)}{\hat{\sigma}_s} \right)$ fonksiyonunun β parametresine göre çözümü, β için MM tahmin edicisini vermektedir.

6.4 Bağımlı Hatalı Regresyon Modellerinde Robust Parametre Tahmini

Klasik regresyonda hata terimlerinin bağımlılık yapısında olduğu varsayımında, Robust parametre tahmin yöntemleri kullanılarak model parametrelerinin tahmin edildiği birçok çalışma mevcuttur. Bununla ilgili literatürdeki bazı çalışmalar şu şekildedir:

Kalina ve Vickova çalışmasında $X_t = \rho X_{t-1} + e_t$ AR(1) modelinin otokorelasyon katsayısını “Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler (LWS)” metodu uygulayarak, model katsayısını aykırı değerlerden etkilenmeyecek şekilde tahmin etmişlerdir. Burada $u_1, u_2, \dots, u_n$ ağırlıkları optimal seçmek için $w_1, w_2, \dots, w_n$ sabit olacak şekilde, $u_t^* = \sqrt{w_t} u_t$ işlemi ile seçilmiştir.

Bu ağırlıklandırma metodu kullanılarak modelin otokorelasyon katsayısının tahminini şu şekilde elde etmişlerdir:

$$\hat{\rho}_{LWS} = \frac{\sum_{t=2}^n \sqrt{w_t w_{t-1}} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=2}^n w_t u_t^2}$$

Bu yöntem sayesinde; aykırı gözlem bulunan verilerde yapılan tahminlerde, klasik en küçük kareler yöntemine göre daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir. Fan vd. (2013) bağımlı rasgele hatalı doğrusal modellerde, M-tahmin edicilerinin asimptotik özelliklerini incelemişlerdir. Burada, doğrusal modelin hata terimleri; $e_n = f(e_{n-1}) + \epsilon_n$, $n \geq 1$ olacak şekilde bağımlılık yapısı kurgulanmıştır.

Wu (2007), M tahmin edicilerini kullanarak bağımlı hata terimli regresyon modeline ait bilinmeyen parametre tahminlerini yapmıştır. Huber (1964)’e göre hataların bağımsızlığı, M-tahminleri için çok önemli bir kısıtlayıcıdır.

Burada; $y_i = x_i' \beta + e_i$, $1 \leq i \leq n$ regresyon modeli kullanılarak

$$\sum_{i=1}^n \rho(y_i - x_i' \beta)$$

fonksiyonu, β ' ya göre minimize edilmiştir.

Ele alınan modelde, $e_i = G(\dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i)$ olacak şekilde hata terimleri durağan bağımlı olarak tanımlanmıştır. Bu durumun çözümü için $\hat{\beta}_n$ eşitlik (2.12) yi minimize eden değer ve β_0 gerçek parametre olmak üzere, $\hat{\beta}_n - \beta_0$ ın merkezi limit teoremini ve *Bahadur* gösterimini kurmuşlardır. *Bahadur-tipi* gösterimler, tahmin edicilerin asimptotik davranışları için önemli bir fikir sağlamaktadır.

Görüldüğü üzere literatürde M tahmin edici dışında kalan diğer robust tahmin yöntemleri kullanılarak otoregresif hata terimli regresyon modelleri ile parametre tahminleri yapılmamıştır. Sonraki kısımda, p. dereceden otoregresif hata terimli regresyon modellerinde MM tahmin edicilerine dayalı parametre tahminlerine yer verilmiştir.

6.4.1 AR(p) hata terimli regresyon modelinde parametrelerin robust tahmini

Önceki çalışmalarda ele alınan regresyon modeli aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^M x_{t,i} \beta_i + e_t, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (6.10)$$

Doğrusal regresyon modeli, hataları aşağıdaki biçimde p. dereceden otoregresif bağımlılık yapısına sahip olacak şekilde yeniden ele alınacaktır:

$$e_t = \phi_1 e_{t-1} + \dots + \phi_p e_{t-p} + a_t, \quad (6.11)$$

$$a_t = \Phi(B)e_t, \quad (6.12)$$

Burada, a_t , hata terimleri $E(a_t) = 0$, $Var(a_t) = \sigma^2$ olacak şekilde bir beyaz gürültü sürecini $(a_t \sim WN(0, \sigma^2))$ ve B gecikme operatörünü (Backshift operator)

göstermektedir. Bu regresyon modelinde verilen hata terimleri, gecikmeli olarak yeniden ele alındığında bu regresyon modeli şu şekilde yazılabilecektir:

$$\Phi(B)y_t = \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} + a_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (6.13)$$

Bu modelde,

$$\Phi(B)y_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p},$$

$$\Phi(B)x_{t,i} = x_{t,i} - \phi_1 x_{t-1,i} - \dots - \phi_p x_{t-p,i} \text{ dir.}$$

Model parametrelerinin MM tahminini yapabilmek için ilk olarak β ve ϕ parametreleri için birer yüksek kırılma noktasına sahip robust parametre tahminleri elde edilir ($\hat{\beta}_s$ ve $\hat{\phi}_s$). Sonra aşağıdaki M tahmin fonksiyonu σ parametresine göre çözülerek $\hat{\sigma}_s$ tahmin edicisi elde edilir:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=p+1}^N \rho_0 \left(\frac{r_t(\hat{\beta}_s, \hat{\phi}_s)}{\sigma} \right) = 0.5 \quad (6.14)$$

Bu eşitlik yardımı ile elde edilen $\hat{\sigma}_s$ tahmin edicisi aşağıdaki amaç fonksiyonunda kullanılır:

$$L_T(\beta, \phi) = \hat{\sigma}_s \sum_{t=p+1}^N \rho_1 \left(\frac{r_t(\beta, \phi)}{\hat{\sigma}_s} \right) \quad (6.15)$$

Bu amaç fonksiyonunun β ve ϕ parametrelerine göre birinci türevleri alınarak 0' a eşitlenir ve $\hat{\beta}_{MM}$ ve $\hat{\phi}_{MM}$ tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\beta}_{MM} = [\hat{\Phi}(B)X^T W(\hat{\beta}, \hat{\phi}) \hat{\Phi}(B)X]^{-1} [\hat{\Phi}(B)X^T W(\hat{\beta}, \hat{\phi}) \hat{\Phi}(B)Y] \quad (6.16)$$

$$\hat{\phi}_{MM} = W(\hat{\beta}, \hat{\phi}) R^{-1}(\hat{\beta}) R_0(\hat{\beta}) \quad (6.17)$$

Burada,

$$R_0(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-2} & \dots \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2}^2 & \dots \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-2} & \dots \sum_{t=p+1}^N e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ve } \mathbf{W}(\hat{\beta}, \hat{\Phi}) = \text{diag}\{w_1(\beta), w_2(\beta), \dots, w_n(\beta)\}, \quad w_t(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_s \Psi_1 \left(\frac{r_t(\hat{\beta}, \hat{\Phi})}{\hat{\sigma}_s} \right) / \frac{r_t(\hat{\beta}, \hat{\Phi})}{\hat{\sigma}_s}$$

olacak şekilde ağırlık fonksiyonlarıdır. Bu ağırlık fonksiyonları; verideki aykırı değerlere küçük ağırlıklar karşılık getirerek aykırı değerlerin, parametre tahminleri üzerindeki etkilerinin azaltılmasını sağlar.

Bu yöntemde, parametre tahmin performanslarını gözleyebilmek için parametrelere ilişkin güven aralıklarını hesaplayabilmek adına aşağıdaki formül yardımıyla, β parametrelerine ait standart sapmaların karesi aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Maronna, vd.,2006):

$$\hat{\sigma}_{\beta_i}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \frac{E \left(\psi \left(\frac{\Phi(B)y_{t,i} - \Phi(B)x_{t,i}^T \beta_0}{\sigma_0} \right)^2 \right)}{E \left(\psi' \left(\frac{\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_{t,i}^T \beta_0}{\sigma_0} \right) \right)^2} [E(\Phi(B)\mathbf{X}^T \Phi(B)\mathbf{X} + \lambda \mathbf{V})]_{ii}^{-1}$$

Burada, $\mathbf{V} = \text{diag} \{p'_\lambda(|\beta_1^{(0)}|) / |\beta_1^{(0)}|, \dots, p'_\lambda(|\beta_p^{(0)}|) / |\beta_p^{(0)}| \}$ olacak şekilde ilgilenilen değişken seçim yönteminin, ceza fonksiyonundan oluşan köşegen matristir. Standart sapma yardımıyla aşağıdaki güven aralığı formülü kullanılarak simülasyon parametrelerin %95 güven aralıkları hesaplanmıştır:

$$\left(\hat{\beta}_i - \hat{\sigma}_{\beta_i} t_{n-p, 1-\frac{\alpha}{2}}; \hat{\beta}_i + \hat{\sigma}_{\beta_i} t_{n-p, 1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

6.5 Robust Model Seçim Kriterleri

Önceki bölümlerde de bahsedildiği üzere birçok istatistiksel model, hata terimlerinin ilişkisizliği, varsayımı altında kurulur. Ancak bu varsayım gerçek hayatta çoğu zaman sağlanmaz. Bu durumun yanında, veride aykırı gözlemlerle karşılaşılabilir. Varsayımların bozulduğu bu gibi durumlar da kullanılan klasik istatistiksel yöntemlerle istenilen sonuçların elde edilememesine neden olur. Robust istatistiksel yöntemler, varsayılan dağılımdan sapmalar veya aykırı değer bulunması durumunda da aykırı değerlerden etkilenmeden güvenilir sonuçlar verecek şekilde tasarlanmış istatistiksel yöntemlerdir. Yapılan çalışmalarda; robust model seçimi için önerilen bazı kriterler, mevcut model seçim kriterlerinin, robust yöntemler kullanılarak yeniden düzenlenmesi ile ortaya çıkmıştır. Ronchetti; 1982'deki çalışmasında, robust yaklaşımla klasik model seçim kriteri olan AIC'ye robust bir alternatif model seçim kriteri olarak RAIC'yi önermiştir. Bu kriter, en çok olabilirlik tahmin edicisinin M tahmin edicisine genelleştirilmesi şeklinde düzenlenmiştir. Bilgi kriterlerine dayalı model seçim yöntemlerinin, literatürde önerilmiş olan robust versiyonlarından bazıları şöyledir: Hurvich ve Tsai (1990); AICC'nin bir robust genelleşmesini, Machado (1993), Schwarz kriterine dayalı bir robust model seçim kriteri önermiştir. Ronchetti ve Staudte (1994), robust Cp kriterini önermiştir. Cezalandırmaya dayalı model seçim kriterleri ile ilgili olarak da literatürde: Owen (2006), lasso ve ridge regresyon yöntemlerinin hibrit robust versiyonunu ortaya atmıştır. Li ve Yu (2009), Huber M fonksiyonu kullanarak bridge regresyon için robust bir değişken seçim kriteri önermiştir. Caner (2009), lasso tipi cezalandırma yöntemi ile GMM tahmin edicilerini birleştirerek robust bir değişken seçimi önermiştir. Xu ve Ying (2010), lasso tipi cezalandırma yöntemi kullanarak medyan regresyonda değişken seçimi ve parametre tahmininin robust bir alternatifini önermişlerdir. Arslan (2012), lasso cezalandırma prosedürünü robust bir yöntem olan ağırlıklandırılmış LAD yöntemi ile tahmin etmeyi önererek robust değişken seçimi ve parametre tahminini yapmıştır. Yine Arslan (2016), bridge regresyonda parametreleri Robust MM tahmin edicileri kullanarak, robust değişken seçimi ve parametre tahminini eş zamanlı olarak yapmıştır. Kurnaz vd. (2018) budanmış en çok olabilirlik yöntemi ile elastik net değişken seçim yöntemini birleştirerek aykırı değerlere dayanıklı bir yöntem önermişlerdir. Sun vd. (2020) budanmış en çok olabilirlik yöntemini lasso ceza terimli lojistik regresyon modellerinde

kullanmıştır. Literatürde bunlara benzer çalışmalar, genellikle bağımsız hata terimli regresyon modellerinde eş zamanlı değişken seçimi ve parametre tahminleri için yapılmıştır. Literatürden farklı olarak bu bölümde, p. dereceden otoregresif hata terimli regresyon modelleri ele alınmış ve önceki bölümlerde bahsedilen dört farklı değişken seçim yöntemi kullanılarak robust değişken seçim yöntemleri önerilmiştir.

6.5.1 AR(p) hata terimli regresyon modellerinde robust değişken seçimi

İlk aşamada, β ve ϕ parametreleri için birer yüksek kırılma noktasına sahip parametre tahminleri elde edilir ($\hat{\beta}_s$ ve $\hat{\phi}_s$) ve aşağıdaki M tahmin fonksiyonu, σ parametresine göre çözülerek $\hat{\sigma}_s$ tahmin edicisi elde edilir:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=p+1}^N \rho_0 \left(\frac{r_t(\hat{\beta}_s, \hat{\phi}_s)}{\sigma} \right) = 0.5 \quad (6.18)$$

Bu tahminler kullanılarak aşağıdaki ceza fonksiyonu eklenmiş amaç fonksiyonu elde edilir:

$$L_T(\beta, \phi) = \hat{\sigma}_s \sum_{t=p+1}^N \rho_1 \left(\frac{r_t(\beta, \phi)}{\hat{\sigma}_s} \right) + \sum_{i=1}^M p_\lambda(|\beta_i|) \quad (6.19)$$

Bu amaç fonksiyonunun, β ve ϕ 'ye göre türevlerinin alınması ve 0'a eşitlenmesi ile lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerinin ceza fonksiyonları kullanılarak robust parametre tahminleri ve değişken seçimleri yapılmıştır.

Robust Lasso

Lasso ceza fonksiyonu olan $\sum_{i=1}^p |\beta_i|$ karesel yakınsama yöntemi kullanılarak aşağıdaki şekilde yakınsayacaktır:

$$p_{\lambda_i}(|\beta|) \approx \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (6.20)$$

Bu yakınsama kullanılarak minimizasyon için kullanılacak fonksiyon şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$L_T(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}) = \hat{\sigma}_s \sum_{t=p+1}^N \rho_1\left(\frac{r_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi})}{\hat{\sigma}_s}\right) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (6.21)$$

Bu fonksiyonun türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\sum_{t=p+1}^N \psi\left(\frac{r_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi})}{\hat{\sigma}_s}\right) + \frac{T\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 = 0 \quad (6.22)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında MM lasso tahmin denklemi şöyle elde edilir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MMLASSO} = [\hat{\Phi}(B)X^T \mathbf{W}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}) \hat{\Phi}(B)X + \lambda \mathbf{V}]^{-1} [\hat{\Phi}(B)X^T \mathbf{W}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}) \hat{\Phi}(B)Y] \quad (6.23)$$

Burada; $\mathbf{V} = \text{diag}\left\{|\beta_1^{(0)}|^{-1}, |\beta_2^{(0)}|^{-1}, \dots, |\beta_M^{(0)}|^{-1}\right\}$, dir.

Robust Scad

Scad yöntemini kullanmak için; karesel yakınsama yöntemi kullanılarak elde edilen cezalandırılmış amaç fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$L_T(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}) = \hat{\sigma}_s \sum_{t=p+1}^N \rho_1\left(\frac{r_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi})}{\hat{\sigma}_s}\right) + \frac{T}{2} \mathbf{W}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \beta_i^2 \quad (6.24)$$

Bu fonksiyonun türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\sum_{t=p+1}^N \psi\left(\frac{r_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi})}{\hat{\sigma}_s}\right) + \frac{T}{2} \mathbf{W}(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \beta_i^2 = 0 \quad (6.25)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında MM scad tahmin denklemi şöyle elde edilir:

$$\hat{\beta}_{MMSCAD} = [\hat{\Phi}(B)X^T W(\hat{\beta}, \hat{\phi}) \hat{\Phi}(B)X + \lambda_n V(\hat{\beta})]^{-1} [\hat{\Phi}(B)X^T W(\hat{\beta}, \hat{\phi}) \hat{\Phi}(B)Y] \quad (6.26)$$

Burada; $V = diag \{p'_\lambda(|\beta_1^{(0)}|)/|\beta_1^{(0)}|, \dots, p'_\lambda(|\beta_p^{(0)}|)/|\beta_p^{(0)}|\}$,dır.

Robust Bridge

Bridge ceza fonksiyonu aşağıdaki gibi yakınsak olarak elde edilir.

$$p_{\lambda_i}(\beta) \approx \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (6.27)$$

karesel yakınsama yöntemi kullanılarak elde edilen cezalandırılmış amaç fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$L_T(\beta, \phi) = \hat{\sigma}_s \sum_{t=p+1}^N \rho_1\left(\frac{r_t(\beta, \phi)}{\hat{\sigma}_s}\right) + \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 \quad (6.28)$$

Bu fonksiyonun türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\sum_{t=p+1}^N \psi\left(\frac{r_t(\beta, \phi)}{\hat{\sigma}_s}\right) + \frac{\gamma\lambda}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{\gamma-2} \beta_i^2 = 0 \quad (6.29)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında MM bridge için tahmin denklemi şöyle elde edilir:

$$\hat{\beta}_{MMBridge} = [\hat{\Phi}(B)X^T W(\hat{\beta}, \hat{\phi}) \hat{\Phi}(B)X + \gamma\lambda V]^{-1} [\hat{\Phi}(B)X^T W(\hat{\beta}, \hat{\phi}) \hat{\Phi}(B)Y] \quad (6.30)$$

Burada; $V = diag \{|\beta_1^{(0)}|^{\gamma-2}, |\beta_2^{(0)}|^{\gamma-2}, \dots, |\beta_M^{(0)}|^{\gamma-2}\}$,dır.

Robust Elastik net

Elastik net ceza fonksiyonunun L_1 tipi ceza fonksiyonu ve ridge regresyonun L_2 tipi ceza fonksiyonu yazılırsa, karesel yakınsama yöntemi kullanılarak L_1 tipi ceza fonksiyonu şu şekilde yakınsayacaktır:

$$p_{\lambda_i}(|\beta|) \approx \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 \quad (6.31)$$

karesel yakınsama yöntemi kullanılarak elde edilen cezalandırılmış amaç fonksiyonu şöyle yazılabilir:

$$L_T(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}) = \hat{\sigma}_s \sum_{t=p+1}^N \rho_1 \left(\frac{r_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi})}{\hat{\sigma}_s} \right) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 \quad (6.32)$$

Bu fonksiyonun türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile

$$\sum_{t=p+1}^N \psi \left(\frac{r_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi})}{\hat{\sigma}_s} \right) + \frac{T\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^M |\beta_i^{(0)}|^{-1} \beta_i^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^M (\beta_i)^2 = 0 \quad (6.33)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında MM elastik net için tahmin denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MMElastiknet} = & [\hat{\Phi}(B) \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{X} + \lambda_1 \mathbf{V} \\ & + \lambda_2 \mathbf{I}_N]^{-1} [\hat{\Phi}(B) \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}) \hat{\Phi}(B) \mathbf{Y}] \end{aligned} \quad (6.34)$$

Burada; $\mathbf{V} = \text{diag} \{ |\beta_1^{(0)}|^{-1}, |\beta_2^{(0)}|^{-1}, \dots, |\beta_p^{(0)}|^{-1} \}$, dır. Oto regresif parametre değişken seçim sürecine katılmadığı için tüm yöntemlerde aşağıdaki şekilde tahmin edilerek algoritmaya dahil edilir.

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{MM} = \mathbf{W}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}) \mathbf{R}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{R}_0(\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

Burada;

$$R_0(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-1} \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-2} \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_t e_{t-p} \end{bmatrix}, \mathbf{R}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=p+1}^N e_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-2} & \dots \sum_{t=p+1}^N e_{t-1} e_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-2}^2 & \dots \sum_{t=p+1}^N e_{t-2} e_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-1} & \sum_{t=p+1}^N e_{t-p} e_{t-2} & \dots \sum_{t=p+1}^N e_{t-p}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

6.6 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde; sonlu örnek çapı için otoregresif hata terimli regresyon modeli kullanılarak EKK, lasso, scad, ridge, bridge, elastik net yöntemleri ile bu yöntemlerin Robust karşılığı olan MM, MM-lasso, MM-scad, MM-bridge, MM-elastik net yöntemleri kullanılarak elde edilen model parametre tahmini ve değişken seçimi performansları için simülasyon çalışması verilmiştir.

Simülasyon Tasarımı. Otoregresif hata terimli veri setlerinde sıkça karşılaşılan sorunları temsil etmek üzere dört farklı durum ele alınmıştır. $\beta_0 = (\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0p})'$ gerçek regresyon parametre vektörünü ve $\phi_0 = (\phi_{01}, \phi_{02}, \dots, \phi_{0p})'$ göstermek üzere e_t hata terimi AR(p) süreci ile ifade edilmiştir. Veri üretim sürecinde $\sigma = 1$ alınmıştır. Değişken seçimi için lasso metodu uygulanırken λ parametresi [0,3] arasında 0.1 birimlik artışlar ile elde edilen her bir değer için parametre tahminleri yapılmış ve BIC değerleri hesaplanarak en küçük olan BIC değerine karşılık gelen model, en iyi model olarak seçilmiştir. Bridge metodu için γ parametresi; [0.1, 2] aralığında 0.1 artışlarda oluşturulan dizide taranmış, aynı zamanda bridge metodunda kullanılan λ parametresi de iki boyutlu yüzey taraması şeklinde arama yapılarak en küçük elde edilen BIC değerine karşılık gelen γ, λ ikilisi en iyi olarak ele alınmıştır. Scad metodu için ise $\alpha = 3.7$ olarak Fun ve Li (2001) tarafından önerilen değer alınmıştır. Elastik net metodu için λ_1 ve λ_2 eş zamanlı olarak lasso yöntemine benzer şekilde taratılmış ve elde edilen her bir sonuç için hesaplanan BIC değerlerinin en küçüğü en iyi sonuç olarak raporlanmıştır. Bahsedilen tahmin ve değişken seçimi metotlarının robust versiyonlarını elde etmek için MM regresyon metodu kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasında, Tukey'in ρ fonksiyonu kullanılarak tahminler elde edilmiştir. Simülasyon çalışmasının karmaşıklıklaşmaması

adına; Tukey yönteminin ayarlama parametresi tahmin edilmek yerine, literatürde önerilen optimum değer olan $c = 4.685$ kullanılmıştır (Maronna 2011).

Parametre tahmin performansı. Parametre tahmin performansını ölçmek için ise aşağıdaki formüller yardımıyla HKO ve Yan değerleri hesaplanarak 100 tekrarın ortalama değerleri alınmış ve sonuçlar tablolastırılmıştır.

$$\begin{aligned}\widehat{HKO}(\hat{\beta}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \beta)^2, \widehat{YAN}(\hat{\beta}) = \bar{\beta} - \beta, \\ \widehat{HKO}(\hat{\phi}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\phi}_i - \phi)^2, \widehat{YAN}(\hat{\phi}) = \bar{\phi} - \phi, \\ \widehat{HKO}(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)^2, \widehat{YAN}(\hat{\sigma}^2) = \overline{\sigma^2} - \sigma^2.\end{aligned}$$

Burada; $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i$, $\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_i$, $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^2$ dir. Aynı zamanda bu çizelgelerde, gözlenen Fisher bilgi matrisinden hesaplanmış olan parametrelere ait standart hatalar (SE), %95 alt güven (AS) ve üst güven sınırları da (ÜS) verilmiştir.

Değişken seçim performansı. Tüm simülasyonlar, 100 defa tekrar edilmiş ve model seçim kriterlerinin performanslarını ölçmek için her bir durum altında doğru tahmin edilen sıfır katsayıları saydırılmış ve bu sayıların 100 tekrardaki oranına bakılmıştır (DSO). Benzer şekilde doğru modelde 0 olmayan ancak parametre tahmini sonucunda 0 elde edilen hatalı 0 sayıları da sayılarak oranları raporlanmıştır (YSO). Aynı zamanda gerçek modelde verilen eş zamanlı doğru “sıfır” ve doğru “sıfırdan farklı” tahmin edilen parametreler sayılmış bu şekilde elde edilen doğru model (DM) oranı da hesaplanmıştır. Oto regresif model için ise her bir durumda oto regresif derecenin katsayısı için fazladan dört sıfır eklenerek 100 tekrarda doğru oto regresif derecenin sayısı sayılmış ve çizelgelerde 100 tekrarın kaç tanesinde doğru derecenin bulunduğu verilmiştir (Dpd). Simülasyon kurgusu aşağıdaki gibi 4 farklı durumda tasarlanmıştır;

Durum I. $\beta = (3, 1.5, 0, 0, 2, 0, 0, 0)'$ olmak üzere, veri seti $\Phi(B)y_t = \sum_{i=1}^M \beta_i \Phi(B)x_{t,i} + a_t$ modeli kullanılarak üretilmiştir. $x_t = (x_{t,1}, \dots, x_{t,8})'$ değişkenleri bağımsız olarak $0_{8 \times 1}$ ortalamalı ve x_{t,j_1} ile x_{t,j_2} değişkenleri arasındaki ikili korelasyonlar $0.5^{|j_1-j_2|}$ olacak şekilde, çok değişkenli normal dağılımdan üretilmiştir. Burada, AR sürecinin derecesi $p = 1$ ve 2 alınmıştır. AR(p) model parametreleri, $p = 1$ için $\phi = (0.8)$ ve $p = 2$ durumunda $\phi = (0.8, -0.2)'$ olarak kullanılmıştır. Örneklem hacmi için $N = 100, 300$ değerlerine ait sonuçlar çizelgelerde sunulmuştur.

Durum II. Veri seti model (1) kullanılarak

$$\beta = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{10}, \underbrace{2, \dots, 2}_{10}, \underbrace{0, \dots, 0}_{10}, \underbrace{2, \dots, 2}_{10} \right)'.$$

gerçek parametre vektörü ile üretilmiştir ve AR(p) model parametreleri $p = 1$ için $\phi = (0.8)$ $p = 2$ için $\phi = (0.8, -0.2)'$ kullanılmıştır.

Durum III. Robust tahmin edicilerin aykırı değerlere karşı performanslarını ölçmek için veri setinde aykırı değerler oluşturulmuştur. $\epsilon = 0.1$ ile kontaminasyon oranını ve n örneklem hacmini göstermek üzere $m = \lceil \epsilon n \rceil$ kontamine verilerin tam değerini göstermektedir. Veriler, $\epsilon N(25, 1) + (1 - \epsilon)N(0, 1)$ şeklinde kontaminasyon işlemi kullanılarak üretilmiştir.

Durum IV. Robust tahmin edicilerin aykırı değerlere karşı performanslarını ölçmek için veri setinde aykırı değerler oluşturulmuştur. $\epsilon = 0.1$ ile kontaminasyon oranını ve n örneklem hacmini göstermek üzere $m = \lceil \epsilon n \rceil$ kontamine verilerin tam değerini göstermektedir. Veriler, $\epsilon N(0, 10) + (1 - \epsilon)N(0, 1)$ şeklinde kontaminasyon işlemi kullanılarak üretilmiştir.

Simülasyon sonuçları. Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2’de Durum I’e ilişkin değişken seçimi performans sonuçları verilmiştir. Buna göre; hata terimlerinin normal dağılması ve herhangi bir aykırı değer sorunu olmaması durumunda, MM yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile klasik yöntemle elde edilen sonuçlar arasında, anlamlı farklılıklar yoktur. Ancak EKK ve ridge yöntemleri değişken seçimi yapamadığı için hem MM hem de klasik yöntemlerde değişken seçimi performansları bakımından oldukça kötü sonuçlar vermişlerdir. Benzer yorum, Çizelge 6.9’da yer alan parametre tahmin performanslarından da gözlenebilmektedir. Çizelge 6.3 ve 6.4 Durum II altında elde edilen sonuçları göstermektedir. Burada kullanılan yüksek boyutlu regresyon modeli HKO değerlerinde yükselmelere sebep olurken, değişken seçim performansları bakımından lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerinin, klasik veya robust tahmin fark etmeksizin oldukça başarılı sonuçlar ortaya koyduğunu göstermektedir. Aykırı değerlerin varlığı durumunda, önerilen tahmin edicilerin karşılaştırması; Çizelge 6.5 - Çizelge 6.8’da gösterilmiştir. Çizelge 6.5 ve 6.6 verilerin ortalamalarındaki aykırı değerlerin, Çizelge 6.7 ve 6.8 ise verilerin varyanslarına ilişkin aykırı değerlerin olduğu sonuçları özetlemektedir. Bu çizelgelerdeki sonuçlara göre; veride, %10 düzeyinde bir aykırı değer varlığı, klasik yöntemden elde edilen sonuçları ciddi anlamda etkilemiştir. Klasik yönteme ait HKO değerleri ve değişken seçim performans değerleri, robust yönteme ait değerlere göre oldukça kötü performans göstermiştir. Bu sonuçlardan, verinin hem ortalamalarını hem de varyanslarını etkileyen aykırı değer olması durumunda MM-bridge veya MM-elastik net gibi yöntemlerin seçilmesinin klasik yöntemlere göre çok daha başarılı ve aykırı değerlerden etkilenmeyen değişken seçimlerinin yapılacağını göstermiştir. Aynı durum Çizelge 6.11’de gösterilen parametre tahmin performanslarında, parametrelerin HKO, yan ve güven aralığı değerlerinin bozulmasından da gözlenebilir.

Çizelge 6.1 Durum I için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β			Dpd
			DSO	YSO	DMO	
100	EKK	0.6016	0.36	0.00	0.00	1
	LASSO	0.5803	5.00	0.00	1.00	80
	SCAD	0.5146	5.00	0.00	1.00	81
	Ridge	0.7576	0.41	0.00	0.00	1
	Bridge	0.5846	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.5762	5.00	0.00	1.00	98
	MM	0.5274	0.77	0.00	0.00	5
	MM-LASSO	0.5523	5.00	0.00	1.00	85
	MM-SCAD	0.5621	5.00	0.00	1.00	90
	MM-Ridge	0.7123	1.95	0.00	0.00	3
	MM-Bridge	0.4524	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.4416	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	0.2264	0.66	0.00	0.00	4
	LASSO	0.2150	5.00	0.00	1.00	91
	SCAD	0.1244	5.00	0.00	1.00	92
	Ridge	0.3487	1.75	0.00	0.00	6
	Bridge	0.2292	5.00	0.00	0.00	100
	Elastik-Net	0.2125	5.00	0.00	1.00	100
	MM	0.1851	1.12	0.00	0.00	12
	MM-LASSO	0.2001	5.00	0.00	1.00	96
	MM-SCAD	0.1124	5.00	0.00	1.00	98
	MM-Ridge	0.3142	2.54	0.00	0.00	7
	MM-Bridge	0.1025	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.1002	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.2 Durum I için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β		DMO	Dpd
			DSO	YSO		
100	EKK	1.1148	0.25	0.00	0.00	0
	LASSO	1.3941	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	1.2559	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	1.9949	0.24	0.00	0.00	0
	Bridge	1.0046	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.9004	5.00	0.00	1.00	100
	MM	0.7253	0.52	0.00	0.00	1
	MM-LASSO	1.1235	5.00	0.00	1.00	100
	MM-SCAD	0.9251	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	1.5256	0.63	0.00	0.00	3
	MM-Bridge	0.8523	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.8235	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	0.8259	0.60	0.00	0.00	0
	LASSO	1.2644	5.00	0.00	1.00	100
	SCAD	0.8156	5.00	0.00	1.00	100
	Ridge	1.2059	1.64	0.00	0.00	0
	Bridge	0.8192	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	0.8025	5.00	0.00	1.00	100
	MM	0.5951	1.06	0.00	0.00	12
	MM-LASSO	1.0147	5.00	0.00	1.00	100
	MM-SCAD	0.7431	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	0.9125	2.12	0.00	0.00	7
	MM-Bridge	0.5925	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.6152	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.3 Durum II için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β		DMO	Dpd
			DSO	YSO		
100	EKK	95.9565	3.21	0.11	0.00	0
	LASSO	17.3026	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	5.4591	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	75.6466	5.42	0.10	0.00	0
	Bridge	3.9566	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	3.6548	20.00	0.00	1.00	100
	MM	35.221	8.13	0.01	0.00	8
	MM-LASSO	5.8551	20.00	0.00	1.00	100
	MM-SCAD	2.7512	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	33.1541	7.95	0.01	0.00	6
	MM-Bridge	2.1155	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	2.1532	20.00	0.00	1.00	100
300	EKK	75.6543	9.40	0.09	0.00	0
	LASSO	6.5516	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	2.6541	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	36.8756	10.56	0.07	0.00	0
	Bridge	1.5697	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	1.4592	20.00	0.00	1.00	100
	MM	18.0254	13.35	0.00	0.00	16
	MM-LASSO	3.5321	20.00	0.00	1.00	100
	MM-SCAD	1.7512	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	23.1541	12.54	0.00	0.00	13
	MM-Bridge	1.0525	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	1.0752	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.4 Durum II için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β		DMO	Dpd
			DSO	YSO		
100	EKK	129.1355	2.11	0.21	0.00	0
	LASSO	28.3025	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	8.2169	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	130.2646	1.30	0.19	0.00	0
	Bridge	5.6455	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	5.9841	20.00	0.00	1.00	100
	MM	41.2455	6.02	0.05	0.00	5
	MM-LASSO	9.2571	20.00	0.00	1.00	100
	MM-SCAD	5.2565	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	45.2681	5.42	0.03	0.00	2
	MM-Bridge	3.2516	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	3.6342	20.00	0.00	1.00	100
300	EKK	90.6543	3.40	0.11	0.00	0
	LASSO	14.0516	20.00	0.00	1.00	100
	SCAD	4.6548	20.00	0.00	1.00	100
	Ridge	81.8652	2.65	0.09	0.00	0
	Bridge	2.8985	20.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	2.5956	20.00	0.00	1.00	100
	MM	29.0254	9.58	0.00	0.00	11
	MM-LASSO	6.4521	20.00	0.00	1.00	100
	MM-SCAD	2.5812	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	23.1541	10.24	0.00	0.00	9
	MM-Bridge	2.1351	20.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	2.0354	20.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.5 Durum III için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β		DMO	Dpd
			DSO	YSO		
100	EKK	8548.541	0.00	0.21	0.00	0
	LASSO	2547.115	3.88	0.10	0.88	32
	SCAD	125.1565	3.75	0.09	0.75	46
	Ridge	1587.875	0.00	0.20	0.00	0
	Bridge	52.15694	4.20	0.02	0.90	89
	Elastik-Net	48.79868	4.03	0.03	0.91	82
	MM	1.9474	0.15	0.11	0.00	2
	MM-LASSO	1.8523	5.00	0.00	1.00	80
	MM-SCAD	1.6621	5.00	0.00	1.00	89
	MM-Ridge	20.7123	0.91	0.15	0.00	3
	MM-Bridge	1.2261	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	1.2856	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	1058.25	0.00	0.00	0.00	0
	LASSO	1012.25	4.55	0.08	0.98	72
	SCAD	41.2541	4.31	0.00	0.98	79
	Ridge	421.542	0.00	0.12	0.00	0
	Bridge	10.1231	4.82	0.00	0.99	100
	Elastik-Net	11.2354	4.71	0.00	0.98	100
	MM	1.2547	0.58	0.00	0.00	10
	MM-LASSO	1.2541	5.00	0.00	1.00	100
	MM-SCAD	1.1244	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	2.1024	1.24	0.00	0.00	13
	MM-Bridge	0.8521	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.8325	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.6 Durum III için değişken seçim sonuçları $p=2$

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β		DMO	Dpd
			DSO	YSO		
100	EKK	10525.325	0.00	0.36	0.00	0
	LASSO	10517.324	2.18	0.22	0.71	21
	SCAD	255.4862	2.41	0.36	0.65	32
	Ridge	6587.875	0.00	0.26	0.00	0
	Bridge	123.2547	3.15	0.06	0.80	78
	Elastik-Net	102.5968	3.13	0.09	0.82	76
	MM	5.5254	0.05	0.21	0.00	2
	MM-LASSO	4.9542	5.00	0.00	1.00	71
	MM-SCAD	4.4822	5.00	0.00	1.00	80
	MM-Ridge	30.2441	0.71	0.31	0.00	0
	MM-Bridge	3.1225	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	3.1457	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	5022.145	0.00	0.21	0.00	0
	LASSO	5145.239	2.95	0.11	0.82	36
	SCAD	198.4156	3.51	0.21	0.79	31
	Ridge	4214.745	0.00	0.20	0.00	0
	Bridge	65.1477	4.25	0.02	0.92	82
	Elastik-Net	52.3214	4.26	0.04	0.93	86
	MM	1.4451	0.10	0.11	0.00	5
	MM-LASSO	1.3542	5.00	0.00	1.00	89
	MM-SCAD	1.2522	5.00	0.00	1.00	88
	MM-Ridge	8.1471	1.01	0.22	0.00	0
	MM-Bridge	1.1475	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	1.2147	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.7 Durum IV için değişken seçim sonuçları $p=1$

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β		DMO	Dpd
			DSO	YSO		
100	EKK	142.122	0.11	0.08	0.00	0
	LASSO	122.830	4.45	0.00	1.00	89
	SCAD	38.2169	4.72	0.00	1.00	90
	Ridge	47.2646	0.18	0.10	0.00	0
	Bridge	6.1984	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	7.98415	5.00	0.00	1.00	99
	MM	1.2541	0.21	0.03	0.00	0
	MM-LASSO	0.3215	5.00	0.00	1.00	96
	MM-SCAD	0.1754	5.00	0.00	1.00	98
	MM-Ridge	3.1754	0.36	0.07	0.00	0
	MM-Bridge	0.1525	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.1557	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	109.251	0.20	0.05	0.00	0
	LASSO	82.4892	4.71	0.00	1.00	95
	SCAD	22.1258	4.85	0.00	1.00	97
	Ridge	32.4568	0.22	0.04	0.00	0
	Bridge	4.0152	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	5.12585	5.00	0.00	1.00	100
	MM	0.8751	0.32	0.00	0.00	1
	MM-LASSO	0.2042	5.00	0.00	1.00	99
	MM-SCAD	0.0922	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Ridge	2.3687	1.10	0.01	0.00	0
	MM-Bridge	0.1275	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.1247	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.8 Durum IV için değişken seçim sonuçları p=2

N	Yöntem	HKO	Sıfır Oranları β		DMO	Dpd
			DSO	YSO		
100	EKK	298.651	0.07	0.21	0.00	0
	LASSO	259.842	4.02	0.00	1.00	51
	SCAD	54.659	4.55	0.01	0.97	81
	Ridge	55.986	0.08	0.15	0.00	0
	Bridge	8.3615	4.95	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	8.1571	4.91	0.00	1.00	95
	MM	2.1235	0.14	0.14	0.00	0
	MM-LASSO	0.9955	5.00	0.00	1.00	69
	MM-SCAD	0.9754	5.00	0.00	1.00	90
	MM-Ridge	5.2365	0.21	0.26	0.00	0
	MM-Bridge	0.6125	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.6325	5.00	0.00	1.00	100
300	EKK	154.891	0.20	0.05	0.00	0
	LASSO	147.192	4.71	0.00	1.00	67
	SCAD	31.558	4.85	0.00	1.00	92
	Ridge	41.168	0.22	0.04	0.00	0
	Bridge	7.1252	5.00	0.00	1.00	100
	Elastik-Net	6.2141	5.00	0.00	1.00	100
	MM	0.9751	0.29	0.04	0.00	1
	MM-LASSO	0.4195	5.00	0.00	1.00	78
	MM-SCAD	0.6852	5.00	0.00	1.00	98
	MM-Ridge	3.1487	0.50	0.09	0.00	0
	MM-Bridge	0.4211	5.00	0.00	1.00	100
	MM-Elastik-Net	0.4147	5.00	0.00	1.00	100

Çizelge 6.9 Durum I için parametre tahmin sonuçları

N		MM	MMLASSO	MMSCAD	MMBridge	MMElastik-net
50	$\hat{\beta}_1$	3.5483	3.7068	3.6651	3.3694	4.1746
	HKO	1.0256	1.2417	0.8161	1.2097	1.0029
	$\overline{SE}$	0.8383	2.6384	2.2127	1.2169	1.5205
	$\overline{AS}$	2.5959	2.0328	2.5361	1.9765	2.4195
	$\overline{US}$	3.5139	4.0667	3.4715	4.1036	4.4199
	$\hat{\beta}_2$	1.8707	1.3771	1.9963	1.6118	1.7973
	HKO	0.9238	0.9955	0.8878	0.7737	0.8967
	$\overline{SE}$	0.8830	0.8992	0.6226	0.6322	0.8874
	$\overline{AS}$	1.1991	1.0923	1.1854	1.2063	1.1792
	$\overline{US}$	1.9816	2.0249	1.8980	1.8101	1.9259
	$\hat{\beta}_5$	2.7388	3.6245	2.2203	2.3338	2.8133
	HKO	0.7477	0.9434	1.2445	1.6239	0.8506
	$\overline{SE}$	1.4602	1.4609	1.4895	1.8214	2.0265
	$\overline{AS}$	2.2358	2.3832	2.2112	2.4518	2.2913
	$\overline{US}$	3.8205	3.7046	3.7114	3.6705	3.8369
100	$\hat{\beta}_1$	3.4509	3.6094	3.5677	3.2720	4.0772
	HKO	0.9282	1.1443	0.7187	1.1123	0.9055
	$\overline{SE}$	0.7409	2.5410	2.1153	1.1195	1.4231
	$\overline{AS}$	2.6647	2.1016	2.6049	2.0453	2.4883
	$\overline{US}$	3.4451	3.9979	3.4027	4.0348	4.3511
	$\hat{\beta}_2$	1.7733	1.2797	1.8989	1.5144	1.6999
	HKO	0.8264	0.8981	0.7904	0.6763	0.7993
	$\overline{SE}$	0.7856	0.8018	0.5252	0.5348	0.7900
	$\overline{AS}$	1.2679	1.1611	1.2542	1.2751	1.2480
	$\overline{US}$	1.9128	1.9561	1.8292	1.7413	1.8571
	$\hat{\beta}_5$	2.6414	3.5271	2.1229	2.2364	2.7159
	HKO	0.6503	0.8460	1.1471	1.5265	0.7532
	$\overline{SE}$	1.3628	1.3635	1.3921	1.7240	1.9291
	$\overline{AS}$	2.3046	2.4520	2.2800	2.5206	2.3601
	$\overline{US}$	3.7517	3.6358	3.6426	3.6017	3.7681
300	$\hat{\beta}_1$	3.3535	3.5120	3.4703	3.1746	3.9798
	HKO	0.8308	1.0469	0.6213	1.0149	0.8081
	$\overline{SE}$	0.6435	2.4436	2.0179	1.0221	1.3257
	$\overline{AS}$	2.7334	2.1703	2.6736	2.1140	2.5570
	$\overline{US}$	3.3764	3.9292	3.7340	3.9661	4.2824
	$\hat{\beta}_2$	1.6759	1.1823	1.8015	1.4170	1.6025
	HKO	0.7290	0.8007	0.6930	0.5789	0.7019
	$\overline{SE}$	0.6882	0.7044	0.4278	0.4374	0.6926
	$\overline{AS}$	1.3366	1.2298	1.3229	1.3438	1.3167
	$\overline{US}$	1.8441	1.8874	1.7605	1.6726	1.7884
	$\hat{\beta}_5$	2.5440	3.4297	2.0255	2.1390	2.6185
	HKO	0.5529	0.7486	1.0497	1.4291	0.6558
	$\overline{SE}$	1.2654	1.2661	1.2947	1.6266	1.8317
	$\overline{AS}$	2.3733	2.5207	2.3487	2.5893	2.4288
	$\overline{US}$	3.6830	3.5671	3.5739	3.5330	3.6994

Çizelge 6.10 Durum II için parametre tahmin sonuçları

N		MM	MMLASSO	MMSCAD	MMBridge	MMElastiknet
50	$\hat{\beta}$	1.8322	1.6243	1.3778	1.6756	1.2183
	HKO	14.7180	15.7363	8.6915	4.5126	4.3552
	$\overline{SE}$	0.8939	0.1988	1.0157	0.3834	0.5945
	$\overline{AS}$	1.0727	0.5561	0.8459	0.5681	0.5575
	$\overline{US}$	1.7064	2.7995	2.0223	2.0639	2.1602
100	$\hat{\beta}$	1.5400	1.3321	1.0856	1.3834	0.9261
	HKO	12.4258	11.4441	7.3993	3.2204	3.0630
	$\overline{SE}$	0.6017	0.0934	0.7235	0.0912	0.3023
	$\overline{AS}$	1.2790	0.7624	1.0522	0.7744	0.7638
	$\overline{US}$	1.5001	2.5932	1.8160	1.8576	1.9539
300	$\hat{\beta}$	1.2477	1.0398	0.7933	1.0911	0.6338
	HKO	10.1335	10.1518	6.1070	3.0281	2.9707
	$\overline{SE}$	0.3094	0.03857	0.4312	0.0121	0.0100
	$\overline{AS}$	1.4853	0.96871	1.2585	0.9807	0.9701
	$\overline{US}$	1.2938	2.38691	1.6097	1.6513	1.7476

Çizelge 6.11 Durum III için parametre tahmin sonuçları

N		MM	MMLASSO	MMSCAD	MMBridge	MMElastik-net
50	$\hat{\beta}_1$	5.0997	4.2942	4.9808	4.5035	4.9237
	HKO	50.501	50.856	48.234	47.902	50.527
	$\overline{SE}$	1.8825	2.5581	1.9606	1.2838	1.2114
	$\overline{AS}$	1.0877	1.2827	1.3262	1.1428	1.8659
	$\overline{US}$	5.3914	6.0268	5.9324	5.7812	5.2749
	$\hat{\beta}_2$	2.8772	2.9506	3.1046	2.3314	2.7407
	HKO	36.708	29.601	31.187	28.934	29.415
	$\overline{SE}$	1.5405	1.6869	1.4605	1.1372	1.1791
	$\overline{AS}$	1.8818	1.7515	1.8173	2.4604	2.2272
	$\overline{US}$	4.7342	4.4177	4.2769	4.0638	4.1528
	$\hat{\beta}_5$	3.5259	3.8709	3.1131	3.4858	3.1381
	HKO	15.050	14.050	13.147	11.317	13.054
	$\overline{SE}$	1.2553	1.3258	1.2512	1.0107	1.3140
	$\overline{AS}$	2.4686	2.2121	2.5188	2.6522	2.7978
	$\overline{US}$	3.7674	3.7853	3.8630	3.2401	3.1578
100	$\hat{\beta}_1$	4.9049	4.0994	4.7860	4.3087	4.7289
	HKO	45.6305	45.9855	43.3635	43.0315	45.6565
	$\overline{SE}$	1.6877	2.3633	1.7658	1.0890	1.0166
	$\overline{AS}$	1.2252	1.4202	1.4637	1.2803	2.0034
	$\overline{US}$	5.2539	5.8893	5.7949	5.6437	5.1374
	$\hat{\beta}_2$	2.6824	2.7558	2.9098	2.1366	2.5459
	HKO	31.8375	24.7305	26.3165	24.0635	24.5445
	$\overline{SE}$	1.3457	1.4921	1.2657	0.9424	0.9843
	$\overline{AS}$	2.0193	1.8890	1.9548	2.5979	2.3647
	$\overline{US}$	4.5967	4.2802	4.1394	3.9263	4.0153
	$\hat{\beta}_5$	3.3311	3.6761	2.9183	3.2910	2.9433
	HKO	10.1795	9.1795	8.2765	6.4465	8.1835
	$\overline{SE}$	1.0605	1.1310	1.0564	0.8159	1.1192
	$\overline{AS}$	2.6061	2.3496	2.6563	2.7897	2.9353
	$\overline{US}$	3.6299	3.6478	3.7255	3.1026	3.0203
300	$\hat{\beta}_1$	4.5152	3.7097	4.3963	3.9190	4.3392
	HKO	42.7082	43.0632	40.4412	40.1092	42.7342
	$\overline{SE}$	1.2980	1.9736	1.3761	0.6993	0.6269
	$\overline{AS}$	1.5003	1.6953	1.7388	1.5554	2.2785
	$\overline{US}$	4.9788	5.6142	5.5198	5.3686	4.8623
	$\hat{\beta}_2$	2.2927	2.3661	2.5201	1.7469	2.1562
	HKO	28.9152	21.8082	23.3942	21.1412	21.6222
	$\overline{SE}$	0.9560	1.1024	0.8760	0.5527	0.5946
	$\overline{AS}$	2.2944	2.1641	2.2299	2.8730	2.6398
	$\overline{US}$	4.3216	4.0051	3.8643	3.6512	3.7402
	$\hat{\beta}_5$	2.9414	3.2864	2.5286	2.9013	2.5536
	HKO	7.2572	6.2572	5.3542	3.5242	5.2612
	$\overline{SE}$	0.6708	0.7413	0.6667	0.4262	0.7295
	$\overline{AS}$	2.8812	2.6247	2.9314	3.0648	3.2104
	$\overline{US}$	3.3548	3.3727	3.4504	2.8275	2.7452

6.7 San Diego Elektrik ve Gaz Şirketi Verisi

Bu bölümde; Ramanathan (1992) tarafından otoregresif hata terimli regresyon modellerinde otoregresif hata terimi varsayımı altında parametre tahminini ve otoregresif varsayım ihmal edilerek yapılan parametre tahminlerini karşılaştırma amacı ile kullanılan veri seti ele alınmıştır.

Veri seti, San Diego Elektrik ve Gaz şirketi tarafından konutlara sağlanan elektrik tüketimini ele almaktadır. Veri, 1972 ile 1993 yılları arasında 87 adet çeyreklikten oluşmaktadır. Açıklanan değişken, konutların tükettiği elektrik miktarının logaritması alınmış Kilowatt cinsinden değeridir (LKWH). Açıklayıcı değişkenler ise konutların gelirleri (LY), elektrik kilowatt fiyatı(LPRICE), konutları soğutmak için gerekli enerji (CDD), konutları ısıtmak için gerekli enerji (HDD) şeklindedir. Ramanathan (1992) tarafından elde edilen regresyon modeli ve beklenen parametre işaretleri aşağıdaki gibidir:

$$LKWH = \beta_0 + \beta_1 LY + \beta_2 LPRICE + \beta_3 CDD + \beta_4 HDD + \varepsilon_t$$

$$\beta_1 > 0, \beta_2 < 0, \beta_3 > 0, \beta_4 > 0.$$

Otoregresif hata varsayımı ihmali durumunda, EKK metodu kullanılarak elde edilen sonuçlarda konut gelirleri (LY) değişkenine ait parametrenin işareti pozitif beklenirken negatif olarak elde edilmiştir. Ancak hata terimleri, otoregresif modelle modellendiğinde BIC kriterine göre 4. dereceden otoregresif model elde edilmiş ve bu varsayım altında yeniden yapılan parametre tahminleri sonucunda tüm parametre tahminlerine ilişkin işaretler beklendiği şekilde elde edilmiştir.

Bu çalışmada ise parametre tahminleri, model seçimini de içerecek şekilde bahsi geçen model seçim kriterleri kullanılarak yeniden yapılmıştır. Her bir yöntem için elde edilen modellere karşılık, aşağıdaki formül kullanılarak RAIC (Saleh, 2014) değerleri elde

edilmiş ve en küçük RAIC değerine karşılık gelen model, en iyi model olarak belirlenmiştir. Bu tahminlere ilişkin sonuçlar Çizelge 6.13’da verilmiştir.

$$RAIC(M, \alpha, \rho) = \sum_{t=p+1}^N \rho \left(\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^t \hat{\beta}_M)}{\hat{\sigma}_s} \right) + \alpha M.$$

Burada, $\hat{\sigma}_s$: σ için S tahmini, $\hat{\beta}_M$: β için M tahmini ve $\alpha = 2E([\psi^2 \left(\left(\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^t \hat{\beta})}{\hat{\sigma}} \right) \right)]) / E([\psi' \left(\left(\frac{(\Phi(B)y_t - \Phi(B)x_t^t \hat{\beta})}{\hat{\sigma}} \right) \right)])$ ve M regresyon model parametrelerinin boyutudur. Robust değişken seçim yöntemlerinin performanslarını kıyaslayabilmek için veri setine yapay olarak %10 aykırı değer eklenmiş ve elde edilen sonuçlar Çizelge 6.14’te verilmiştir.

Çizelge 6.12 Elektrik ve gaz verisi için klasik parametre tahmin sonuçları

		EKK	EKK AR(4)	LASSO	SCAD	Bridge	Elastik-Net
LY	$\hat{\beta}_1$	-0.00234	0.18625	0.05879	-	-	-
LPRICE	$\hat{\beta}_2$	-0.01856	-0.09354	-0.08455	-0.08152	-0.08563	-0.08125
CDD	$\hat{\beta}_3$	0.06365	0.00029	0.00028	0.00018	0.00028	0.00087
HDD	$\hat{\beta}_4$	0.08564	0.00022	0.00022	0.00053	0.00023	0.00042
AR		-	4	4	4	4	4
AIC		528.124	316.985	308.142	258.547	199.844	205.997

Çizelge 6.13 Elektrik ve gaz verisi için robust parametre tahmin sonuçları

		MM	MMLASSO	MM SCAD	MMBridge	MMElastik-Net
LY	$\hat{\beta}_1$	0.00125	0.14879	-	-	-
LPRICE	$\hat{\beta}_2$	-0.01745	-0.06455	-0.08411	-0.08563	-0.08235
CDD	$\hat{\beta}_3$	0.05514	0.00028	0.00020	0.00028	0.00069
HDD	$\hat{\beta}_4$	0.07412	0.00022	0.00041	0.00023	0.00040
AR		4	4	4	4	4
RAIC		388.254	316.874	302.257	201.985	217.457

Çizelge 6.14 Aykırı değer ekli elektrik ve gaz verisi için parametre tahmin sonuçları

		EKK	EKK AR(4)	LASSO	Bridge	MMLASSO	MMBridge
LY	$\hat{\beta}_1$	-2.69756	1.69845	3.65769	-	0.25654	-
LPRICE	$\hat{\beta}_2$	-0.96123	-0.00154	-0.98555	-0.64786	-0.00547	-0.02645
CDD	$\hat{\beta}_3$	0.57743	0.07264	0.64135	0.91231	0.00072	0.00036
HDD	$\hat{\beta}_4$	0.96874	0.04622	0.95344	0.84521	0.00095	0.00041
AR		-	4	4	4	4	4
RAIC		754.851	699.357	547.157	514.741	302.158	287.657

Bu sonuçlara göre; böyle bir veride model parametrelerinin işaretlerinin doğru elde edilmesi için hataların otoregresif yapıda bağımlı olup olmadığı test edilmelidir. Veride aykırı değer olması durumunda ise hem parametre tahmini hem de değişken seçimini eş zamanlı yapan yöntemlerin robust versiyonlarının kullanımı RAIC değerlerine göre daha başarılı sonuçların elde edilmesini sağlamaktadır. Çizelge 6.14'ten, RAIC sonuçlarına göre; en iyi modelin MMbridge yöntemi ile elde edilen model olduğu ve modele yalnızca elektrik kilowatt fiyatı (LPRICE) değişkeninin dahil edilmesinin uygun olduğu, diğer değişkenlerin modele katkısının çok küçük olduğu söylenebilir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde; ilk olarak doğrusal regresyon modelinin varsayımlarından olan hataların ilişkisizliği varsayımının sağlanamadığı durumlarda, güvenilir ve doğru sonuçlarla veri analizinin yapılabilmesi ele alınmıştır. Bu doğrultuda, otoregresif yapıda ilişkiye sahip hata terimleri kullanılmıştır. Ek olarak, hata terimlerinin dağılım varsayımlarının normalden farklı olabileceği düşüncesiyle ikinci bölümde, simetrik t dağılımı ele alınmış ve aykırı değer varlığında otoregresif hata terimli regresyon modellerinde parametre tahminleri EM algoritması yardımıyla yapılmış; bununla birlikte gözlenen Fisher bilgi matrisleri hesaplanarak parametrelerin standart hataları ve aralık tahminleri de hesaplanmıştır. Bu tahminlerin, normal dağılıma göre aykırı değerlerden etkilenmediği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç, R programında yapılan farklı simülasyon dizaynları ve gerçek aykırı değerler içeren veri setlerinin modellenmeleriyle de desteklenmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde; dağılımın simetrik yerine, asimetrik olabileceği varsayımıyla ince kuyruklu çarpık ve kalın kuyruklu çarpık olarak ele alınmıştır. Esneklikleri ve EM algoritmasına kolayca uyarlanabilmeleri bakımından bu bölümde Azzalini tipi çarpık normal ve Azzalini tipi çarpık t dağılımları kullanılmıştır. Stokastik gösterimleri sayesinde, EM algoritması kullanılarak model parametrelerinin EÇO tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin ediciler ile beraber gözlenen fisher bilgi matrisleri hesaplanmış ve buradan standart hatalar ile aralık tahminleri yapılmıştır. Tüm bu hesaplamalar, R programı aracılığıyla simülasyonlarda ve gerçek veri setinde kullanılmış; sonuç olarak veride çarpıklığın olduğu durumlarda bu dağılım varsayımlarının kullanılmasının parametre ve aralık tahminlerini iyileştirdiği ve aykırı değer ile çarpıklığın bir arada olduğu durumlarda Azzalini tipi çarpık t dağılımının normal dağılıma göre daha iyi bir performans sergilediği görülmüştür.

Parametre tahminleri yapılan modelde, bir sonraki kritik aşamanın değişken seçimi olması sebebiyle tezin dördüncü bölümünde farklı ve güncel değişken seçim yöntemleri ele alınmıştır. Değişken seçimini ve parametre tahminlerini eş zamanlı yapan, cezalandırma kriterlerine dayalı lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemleri; otoregresif hata terimli regresyon modellerine uygulanmıştır. Yine dağılım varsayımının normalden

farklı olması durumu göz önünde bulundurularak bu bölümde simetrik t dağılımı ile adı geçen yöntemler EM algoritması yardımıyla kullanılmış ve R programında hem değişken seçim performansını hem de parametrelerin nokta ve aralık tahminlerini içeren simülasyonlar yürütülmüştür. Elde edilen sonuçlara göre; aykırı değer varlığında, bridge ve elastik net yöntemleri yüksek boyutlu modellerin tahminlerinde ve değişken seçimlerinde diğer yöntemlere üstün gelmişlerdir. Dağılım varsayımının simetrik dağılımlardan farklı olduğu durumlarda, değişken seçimi ve parametre tahminini eş zamanlı yapabilmek için normal dağılıma alternatif olarak; Azzalini tipi çarpık normal ve t dağılımına alternatif olarak Azzalini tipi çarpık t dağılımları kullanılmıştır. Yine EM algoritması aracılığıyla ele alınan cezalandırma kriterine dayalı yöntemlere ilişkin tahmin denklemleri ve gözlenen fisher bilgi matrisi aracılığıyla aralık tahminleri elde edilmiştir. R programında elde edilen simülasyon ve gerçek veri sonuçlarına göre; çarpık normal dağılımda bridge yönteminin diğer yöntemlerden daha üstün parametre tahmin ve değişken seçim sonuçları verdiği tespit edilmiştir. Çarpık t dağılımı için de bridge ve elastik net yöntemleri, aykırı değer varlığında diğer yöntemlerden hem parametre tahmini hem de değişken seçimi bakımından daha iyi sonuçlar ortaya koymuşlardır.

Veri analizi için bilinen bir dağılım olmaması durumunda robust tahmin ediciler dağılım varsayımı olmaksızın aykırı değerlerden etkilenmeyen sonuçlar ortaya koyabildiği için tezin beşinci bölümünde, robust tahmin ediciler kullanılmıştır. Otoresif hata terimli regresyon modelleri için MM tahmin edicileri kullanılarak tahmin denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemler; lasso, scad, bridge ve elastik net yöntemlerinin tümüne uyarlanarak otoresif hata terimli regresyon modelleri için dayanıklı değişken seçim yöntemleri önerilmiştir. Elde edilen robust tahmin denklemleri, R programında simülasyon tasarımlarında ve gerçek veri analizinde kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre MM tahmini ile elde edilen bridge yönteminin, diğer yöntemlere göre hem x hem de y yönünde aykırı değerlere daha dirençli olduğu tespit edilmiştir.

Bu tezin gelecek çalışmalarında; bilinen bir dağılım varsayımı kullanmadan, hata terimlerinin çarpık olduğu varsayımıyla asimetric robust tahmin ediciler kullanılarak bahsi geçen değişken seçim yöntemleriyle parametre tahmini ve model seçimi eş zamanlı olarak gerçekleştirilecektir. Bu yöntemler yardımıyla yüksek boyut problemi ele alınacak

($p > n$) ve otoregresif hata terimlerinde yüksek boyut varsayımında değişken seçimi incelenecektir. Ayrıca hata terimlerindeki ilişki yapısı, otoregresif yerine hareketli ortalama (MA) ve otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modelleri kullanılarak ele alınacaktır. Son olarak ise açıklayıcı değişken çoklu olarak kullanılıp “otoregresif hata terimli çok değişkenli çoklu regresyon modelleri” ele alınarak, problem çok değişkene taşınacaktır.



KAYNAKLAR

- Alpuim, T. ve El-Shaarawi, A. 2008. On the efficiency of regression analysis with AR(p) errors. *Journal of Applied Statistics*, 35(7), 717-737.
- Anderson, R.L., 1954. The Problem of Autocorrelation in Regression Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 49(265), 113–129.
- Ansley, C.F. 1979. On the finite sample distribution of residual autocorrelations in autoregressive-moving average models. *Biometrika*, 66(3), 547-553.
- Arslan, O. ve Genç, A.İ. 2003. Robust location and scale estimation based on the univariate generalized t (GT) distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 32(8), 1505-1525.
- Arslan, O. ve Genç, A.İ. 2009. The skew generalized t distribution as the scale mixture of a skew exponential power distribution and its applications in robust estimation. *Statistics*, 43(5), 481-498.
- Azzalini, A. ve Capitanio, A. 2003. Distributions generated by perturbation symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 65, 367–389.
- Azzalini, A. 2005. The skew-normal distribution and related multivariate families (with discussion). *Scand. J. Statist.*, 32(2), 159–188.
- Azzalini, A. 1985. A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian journal of statistics*, 12(2), 171–178.
- Azzalini, A. 1986. Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, 46(2), 199–208.
- Box, E. P. G ve Jenkins, M. G. 1976. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day: San Fransisco.
- Bozdogan, H., 1988. ICOMP: A New Model Selection criterion, in *Classification and Related Methods of Data Analysis*.
- Bloomfield, P. 1992. Trends in global temperature. *Climatic Change*, 21, 1–16.
- Branco, M. D. ve Dey, D. K. 2001. A general class of multivariate skew-elliptical distributions. *J Multivariate Anal.*, 79(1), 79-113.
- Chan, J.S.K. ve Choy, S.T.B. 2008. Analysis of Covariance Structures in Time Series. *Journal of Data Science*, 6, 573-589.

- Dempster, A.P., Laird, N.M. ve Rubin, D.B. 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39(1), 1-38.
- Donoho, D.L. ve Huber, P.J. 1983. The notion of breakdown point. A festschrift for Erich L. Lehmann, 157-184.
- Frank, I.E. ve Friedman, J.H. 1993. A statistical view of some chemometrics regression tools. *Technometrics*, 35(2), 301-320.
- Fisher, R. A. 1922. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A.*, 222, 309-368.
- Fu, W.J. 1998. Penalized Regressions: The Bridge versus the Lasso. *Journal of computational and Graphical Statistics*, 7(3), 397-416.
- Fun, J. ve Li, R. 2001. Variable Selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties. *Journal of American Statistical Assoc.*, 96(456), 1348-1360.
- Fun, J. ve Li, R. 2004. New Estimation and Model Selection Procedures for Semiparametric Modeling in Longitudinal Data Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 99(467), 710-723.
- Gauss, C.F. 1809. *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium* Frid. Perthes et I H Besser, Hamburgi.
- Gujarati, D.N. 2003. *Basic Econometrics*, 4. Ed., McGraw-Hill, 1002, New York.
- Henze, N. 1986. A probabilistic representation of the skew-normal distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*, 13(4), 271-275.
- Hocking, R. R. 1976. The Analysis and Selection of Variables in Linear Regression. *Biometrics*, 32, 1-50.
- Hoerl, A.E. ve Kennard, R.W. 1970. Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 55-67.
- Hampel, F. R. 1983. Some aspects of model choice in robust statistics. *Proceedings of the 4th Session of ISI Book*, Madrid.
- Hampel, F. R., Ronchetti, E. M. ve Rousseeuw, P. J. 1986. *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*. John Wiley & Sons.
- Holland, P. W. ve Welsch, R. E. 1977. Robust regression using iteratively reweighted least-squares. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 6(9), 813-827.

- Huber, P. 1964. Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35, 73-101.
- Huber, P. 1981. *Robust Statistics*. New York: John Wiley and Sons.
- Krasker, W.S. 1980. Estimation in linear regression models with disparate data points. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1333-1346.
- Kurnaz, F.S., Hoffmann, I. ve Filzmoser, P. 2018. Robust and sparse estimation methods for high-dimensional linear and logistic regression. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 172, 211–222.
- Lange, K.L., Little, R.J.A. ve Taylor, J.M.G. 1989. Robust statistical modeling using the t-distribution, *J. Am. Stat. Assoc.*, 84(408), 881–896.
- Legendre, A.M. 1805. *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*. Courcier, Paris.
- Li, B. ve Yu, Q. 2009. Robust and sparse bridge regression. *Statist Interface*, 2, 481–491.
- Liu, Y., Zhang, H., Park, C., ve Ahn, J. (2007). Support vector machines with adaptive Lq penalty. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51, 6380-6394.
- Machado, J. A. F. 1993. Robust model selection and M-estimation. *Econometric Theory*, 9, 478-493.
- Mallows, C.L. 1964. Choosing variables in a linear regression : A graphical aid, presented at the Central Regional Meeting of the Institute of Mathematical Statistics, Manhattan, Kansas.
- Mallows, C.L. 1973. Some Comments on Cp. *Technometrics*, 15, 661-675.
- Maronna R. A., Martin, R.D. ve Yohai, V.J. 2006. *Robust Statistics: Theory, and Methods*, Wiley.
- Maronna RA. 2011. Robust ridge regression for high-dimensional data. *Technometrics*, 53(1), 44–53.
- Montgomery, D.C., Peck, A.E. ve Vining, G.G. 2001. *Introduction to the Linear Regression Analysis*, John Wiley&Sons, Canada.
- Owen, A.B., 2006. A robust hybrid of lasso and ridge regression, in: Verducci, J.S., Shen, X., Lafferty, J. (Eds.), *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 59–71.
- Park, C. ve Yoon, Y. J. 2011. Bridge regression: adaptivity and group selection. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141, 3506-3519.

- R Core Team. 2020. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Ramanathan, R., 1992. Introductory econometrics with applications. Dryden Press.
- Ronchetti, E. 1982. Robust testing in linear models: The infinitesimal approach. PhD Thesis, ETH Zürich, Switzerland.
- Ronchetti, E. ve Staudte, R. G. 1994. A Robust Version of Mallows's CP. J. Amer. Statist. Assoc, 89(426), 550-559.
- Rousseeuw, P. J. ve Leroy, A. M. 1987. Robust Regression and Outlier Detection, New York, John Wiley.
- Rousseeuw, P. ve Yohai, V. 1984. Robust Regression by Means of S-estimators. Robust and nonlinear time series analysis, 256-272.
- Saleh, S. 2014. Robust AIC with High Breakdown Scale Estimate. Journal of Applied Mathematics, 1-7.
- Sheather, S. J. (2009). A Modern Approach to Regression with R. New York: Springer-Verlag.
- Schwarz, G.D. 1978. Estimating the Dimension of a Model. Annals of Statistics, 6, 461-464.
- Sun, H., Cui, Y., Gao, Q. ve Wang, T. 2020. Trimmed LASSO regression estimator for binary response data. Statistics & Probability Letters 159, 108679.
- Tibshirani, R. 1996. Regression shrinkage and selection via the lasso. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 58(1), 267-288.
- Tiku, M.L., Wong, W.K. ve Bian, G. 1999. Time series models with asymmetric innovations. Communications in Statistics - Theory and Methods, 28(6), 1331-1360.
- Tsay, R.S. 1984. Regression Models with Time Series Errors. Journal of the American Statistical Association, 79, 118-124.
- Tuaç, Y., Güney, Y., Şenoğlu, B. ve Arslan, O. 2018. Robust Parameter Estimation of Regression Model with AR(p) Error Terms. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 47(8), 2343-59.
- Tuaç, Y., Güney, Y. ve Arslan, O. 2020. Parameter Estimation of Regression Model with AR(p) Error Terms Based on Skew Distributions with EM Algorithm. Soft Computing, 24(5), 3309-30.

- Tukey, J. W. 1960. A survey of sampling from contaminated distributions, in Contributions to Probability and Statistics, edited by I. Olkin, Stanford University Press, Stanford, CA.
- Wang, H., Li, G., ve Jiang, G. 2007. Robust Regression Shrinkage and Consistent Variable Selection Through the Lad-Lasso, Journal of Business & Economic Statistics, 25, 347-355.
- Watson, J.D. ve Durbin, J. 1951. Testing for serial correlation in least-squares regression. Biometrika, 38(1-2), 159-177.
- Watson, G.S., Hannan, E.J. 1956. Serial Correlation in Regression Analysis. II. Biometrika, 43(3-4), 436–448.
- Wong, W. ve Bian, G. 2004. Estimating Parameters in Autoregressive Models with Asymmetric Innovations. NUS, Department of Statistics, 0408(Unpublished working paper).
- Yohai, VJ. 1987. High breakdown point and high efficiency robust estimates for regression, The Annals of Statistics, 15(20), 642-656.
- Yoon, Y.J., Park, C. ve Lee, T. 2013. Penalized regression models with autoregressive error terms. Journal of Statistical Computation and Simulation, 83(9), 1756 -1772.
- Zou, H. ve Hastie, T. 2005. Regularization and variable selection via the elastic net. J.R. Statist. Soc. B., 67(2), 301-320.
- Zou, H. ve Li, R., 2008. One-step sparse estimates in nonconcave penalized likelihood models. Annals of statistics, 36(4), 1509 - 1533.

EKLER

EK 1 Çarpık Normal Varsayımı için Kısmi Türev Sonuçları

EK 2 Çarpık t Varsayımı için Kısmi Türev Sonuçları

EK 3 Çarpık Normal Varsayımı için Değişken Seçimi ile Kısmi Türev Sonuçları

EK 4 Çarpık t Varsayımı için Değişken Seçimi ile Kısmi Türev Sonuçları

EK 1 Çarpık Normal Varsayımı için Kısmi Türev Sonuçları

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = - \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^3}{\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t^2 \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \phi_i} = - \sum_{t=p+1}^N \left[\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t \left(\frac{\lambda}{\sigma} \eta_t + w_t \right) \right) e_{t-i} \Phi(B)x_{t,j} + \left(\frac{1}{\sigma} \eta_t - \frac{\lambda}{\sigma} w_t \right) x_{t-i,j} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \sigma} = \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{2}{\sigma^2} \eta_t + \frac{\lambda}{\sigma^2} w_t \right) \Phi(B)x_{t,j} - \frac{\lambda^2}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\lambda}{\sigma} + w_t \right) w_t \eta_t^2 \Phi(B)x_{t,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \lambda} = \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{\sigma} + \lambda \eta_t^2 + w_t \eta_t \right) w_t \Phi(B)x_{t,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \phi_r} = - \sum_{t=p+1}^N \left[\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^3}{\sigma^2} w_t \eta_t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t^2 \right) e_{t-i} e_{t-r} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \sigma} = \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{2}{\sigma^2} \eta_t + \frac{\lambda}{\sigma^2} w_t - \frac{\lambda^2}{\sigma^2} (\lambda \eta_t + w_t) w_t \eta_t \right) e_{t-i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \lambda} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\lambda^2 \eta_t^2 + \lambda w_t \eta_t - 1 \right) w_t e_{t-i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{N-p}{\sigma^2} - \sum_{t=p+1}^N \left[\frac{3}{\sigma^2} \eta_t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} (\lambda \eta_t + w_t) w_t \eta_t - \frac{2\lambda}{\sigma^2} w_t \right] \eta_t$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \lambda} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\lambda^2 \eta_t^2 + \lambda w_t \eta_t - 1 \right) w_t \eta_t$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\lambda \eta_t + w_t) w_t \eta_t^2$$

Burada, $\eta_t = \frac{(\phi(B)y_t - \phi(B)x_t^T \beta)}{\sigma}$, $w_t = \frac{f(\lambda \eta_t)}{F(\lambda \eta_t)}$, $i, r = 1, 2, \dots, p$ ve $j, k = 1, 2, \dots, M$.

EK 2 Çarpık t Varsayımı için Kısmi Türev Sonuçları

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} - \lambda w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) \right) \Phi(B) x_{t,j} \Phi(B) x_{t,k}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \phi_i} &= \sum_{t=p+1}^N \left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} - \lambda w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) \right) e_{t-i} \Phi(B) x_{t,j} \\ &\quad - \left(\frac{1}{\sigma} w_t \eta_t - \lambda \gamma_t w_t^{3/2} \right) x_{t-i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \sigma} &= \sum_{t=p+1}^N \left[-\frac{1}{\sigma^2} \left(w_t \eta_t - \lambda \gamma_t w_t^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma} \left(\alpha_t \eta_t - \frac{1}{\sigma} w_t \eta_t - \lambda \left(\psi_{1,t} w_t^{3/2} + \frac{3}{2} \gamma_t w_t^{1/2} \alpha_t \right) \right) \right] \Phi(B) x_{t,j} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\gamma_t + \lambda \psi_{2,t}) w_t^{3/2} \Phi(B) x_{t,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \phi_r} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left[\left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} \right) - \frac{\lambda}{\sigma} w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) e_{t-i} e_{t-r} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \sigma} &= \sum_{t=p+1}^N \left[-\frac{1}{\sigma^2} \left(w_t \eta_t - \frac{\lambda}{\sigma} \gamma_t w_t^2 \right) + \frac{1}{\sigma} \left(\alpha_t - \frac{w_t}{\sigma} \right) \eta_t + \frac{\lambda}{\sigma^2} \gamma_t w_t^{3/2} \right] e_{t-i} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\psi_{1,t} w_t^{3/2} + \frac{3}{2} \gamma_t w_t^{1/2} \alpha_t \right) e_{t-i} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\gamma_t + \lambda \psi_{2,t}) w_t^{3/2} e_{t-i}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} &= \frac{N-p}{\sigma^2} - \sum_{t=p+1}^N \left[\frac{3}{\sigma^2} w_t - \frac{1}{\sigma} \alpha_t \right] \eta_t^2 \\ &\quad + \sum_{t=p+1}^N \left[\frac{2\lambda}{\sigma^2} \gamma_t w_t^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \left(\psi_{1,t} w_t^{3/2} + \frac{3}{2} \gamma_t w_t^{1/2} \alpha_t \right) \right] \eta_t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\gamma_t + \lambda \psi_{2,t}) w_t^{3/2} \eta_t$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{t=p+1}^N \psi_{2,t} w_t^{1/2} \eta_t$$

Burada $\eta_t = \frac{(\phi(B)y_t - \phi(B)x_t^T \beta)}{\sigma}$, $w_t = \frac{v+1}{v+\eta_t^2}$, $\gamma_t = \frac{v}{v+1} \frac{t_{v+1}(\lambda \eta_t \sqrt{w_t})}{T_{v+1}(\lambda \eta_t \sqrt{w_t})}$, $i, r = 1, 2, \dots, p, j, k =$

$1, 2, \dots, M,$

$$\alpha_t = \frac{2}{\sigma} w_t \frac{\eta_t}{v+\eta_t^2},$$

$$\psi_{1,t} = \frac{\lambda^2 v(v+3)}{\sigma (v+1)} w_t^2 \eta_t \frac{\gamma_t}{(v+1+\lambda^2 \eta_t^2 w_t)} - \frac{\lambda (v+1)}{\sigma v} w_t^{3/2} \gamma_t^2,$$

ve

$$\psi_{2,t} = -\lambda(v+3) w_t \eta_t^2 \frac{\gamma_t}{(v+1+\lambda^2 \eta_t^2 w_t)} - \frac{(v+1)}{v} w_t^{1/2} \gamma_t^2 \eta_t.$$



EK 3 Çarpık Normal Varsayımı için Değişken Seçimi ile Kısmi Türev Sonuçları

Lasso

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = - \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^3}{\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t^2 \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + T \lambda \mathbf{W}$$

Scad

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = - \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^3}{\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t^2 \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + T \mathbf{W} \left(\beta_i^{(0)} \right)$$

Bridge

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = - \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^3}{\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t^2 \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + \gamma \lambda \mathbf{W}_\gamma$$

Elastik net

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = - \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^3}{\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t^2 \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + T \lambda_1 \mathbf{W} + \lambda_2 \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \phi_i} = - \sum_{t=p+1}^N \left[\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t \left(\frac{\lambda}{\sigma} \eta_t + w_t \right) \right) e_{t-i} \Phi(B)x_{t,j} + \left(\frac{1}{\sigma} \eta_t - \frac{\lambda}{\sigma} w_t \right) x_{t-i,j} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \sigma} = \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{2}{\sigma^2} \eta_t + \frac{\lambda}{\sigma^2} w_t \right) \Phi(B)x_{t,j} - \frac{\lambda^2}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{\lambda}{\sigma} + w_t \right) w_t \eta_t^2 \Phi(B)x_{t,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \lambda} = \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\frac{1}{\sigma} + \lambda \eta_t^2 + w_t \eta_t \right) w_t \Phi(B)x_{t,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \phi_r} = - \sum_{t=p+1}^N \left[\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\lambda^3}{\sigma^2} w_t \eta_t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} w_t^2 \right) e_{t-i} e_{t-r} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \sigma} = \sum_{t=p+1}^N \left(-\frac{2}{\sigma^2} \eta_t + \frac{\lambda}{\sigma^2} w_t - \frac{\lambda^2}{\sigma^2} (\lambda \eta_t + w_t) w_t \eta_t \right) e_{t-i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \lambda} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\lambda^2 \eta_t^2 + \lambda w_t \eta_t - 1 \right) w_t e_{t-i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{\sigma^2} - \sum_{t=p+1}^N \left[\frac{3}{\sigma^2} \eta_t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} (\lambda \eta_t + w_t) w_t \eta_t - \frac{2\lambda}{\sigma^2} w_t \right] \eta_t$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \lambda} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\lambda^2 \eta_t^2 + \lambda w_t \eta_t - 1 \right) w_t \eta_t$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\lambda \eta_t + w_t) w_t \eta_t^2$$

Burada, $\eta_t = \frac{(\phi(B)y_t - \phi(B)x_t^T \beta)}{\sigma}$, $w_t = \frac{f(\lambda \eta_t)}{F(\lambda \eta_t)}$, $i, r = 1, 2, \dots, p, j, k = 1, 2, \dots, M$ ve

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left\{ \left| \beta_1^{(0)} \right|^{-1}, \left| \beta_2^{(0)} \right|^{-1}, \dots, \left| \beta_M^{(0)} \right|^{-1} \right\}$$

$$\mathbf{W}(\beta_i^{(0)}) = \text{diag} \left\{ p'_\lambda \left(\left| \beta_1^{(0)} \right| \right) / \left| \beta_1^{(0)} \right|, \dots, p'_\lambda \left(\left| \beta_M^{(0)} \right| \right) / \left| \beta_M^{(0)} \right| \right\}$$

$$\mathbf{W}_r \text{diag} \left\{ \left| \beta_1^{(0)} \right|^{r-2}, \left| \beta_2^{(0)} \right|^{r-2}, \dots, \left| \beta_M^{(0)} \right|^{r-2} \right\} \text{dir.}$$



EK 4 Çarpık t Varsayımı için Değişken Seçimi ile Kısmi Türev Sonuçları

Lasso

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} - \lambda w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + T \lambda W$$

Scad

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} - \lambda w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + T W \left(\beta_i^{(0)} \right)$$

Bridge

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} - \lambda w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + \gamma \lambda W_\gamma$$

Elastik net

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} - \lambda w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) \right) \Phi(B)x_{t,j} \Phi(B)x_{t,k} + T \lambda_1 W + \lambda_2 I$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \phi_i} = \sum_{t=p+1}^N \left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} - \lambda w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) \right) e_{t-i} \Phi(B)x_{t,j} - \left(\frac{1}{\sigma} w_t \eta_t - \lambda \gamma_t w_t^{3/2} \right) x_{t-i,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \sigma} = \sum_{t=p+1}^N \left[-\frac{1}{\sigma^2} \left(w_t \eta_t - \lambda \gamma_t w_t^2 \right) + \frac{1}{\sigma} \left(\alpha_t \eta_t - \frac{1}{\sigma} w_t \eta_t - \lambda \left(\psi_{1,t} w_t^{3/2} + \frac{3}{2} \gamma_t w_t^{1/2} \alpha_t \right) \right) \right] \Phi(B)x_{t,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_j \partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\gamma_t + \lambda \psi_{2,t}) w_t^{3/2} \Phi(B)x_{t,j}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \phi_r} = \frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left[\left(\alpha_t \eta_t - \frac{w_t}{\sigma} \right) - \frac{\lambda}{\sigma} w_t^{1/2} \left(\psi_{1,t} w_t + \frac{3}{2} \gamma_t \alpha_t \right) e_{t-i} e_{t-r} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \sigma} = \sum_{t=p+1}^N \left[-\frac{1}{\sigma^2} \left(w_t \eta_t - \frac{\lambda}{\sigma} \gamma_t w_t^2 \right) + \frac{1}{\sigma} \left(\alpha_t - \frac{w_t}{\sigma} \right) \eta_t + \frac{\lambda}{\sigma^2} \gamma_t w_t^{3/2} \right] e_{t-i} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N \left(\psi_{1,t} w_t^{3/2} + \frac{3}{2} \gamma_t w_t^{1/2} \alpha_t \right) e_{t-i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \phi_i \partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\gamma_t + \lambda \psi_{2,t}) w_t^{3/2} e_{t-i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{\sigma^2} - \sum_{t=p+1}^N \left[\frac{3}{\sigma^2} w_t - \frac{1}{\sigma} \alpha_t \right] \eta_t^2 + \sum_{t=p+1}^N \left[\frac{2\lambda}{\sigma^2} \gamma_t w_t^{\frac{3}{2}} - \frac{\lambda}{\sigma} \left(\psi_{1,t} w_t^{3/2} + \frac{3}{2} \gamma_t w_t^{1/2} \alpha_t \right) \right] \eta_t$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{t=p+1}^N (\gamma_t + \lambda \psi_{2,t}) w_t^{3/2} \eta_t$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{t=p+1}^N \psi_{2,t} w_t^{1/2} \eta_t,$$

$$\text{Burada } \eta_t = \frac{(\phi(B)y_t - \phi(B)x_t^T \beta)}{\sigma}, w_t = \frac{\nu+1}{\nu+\eta_t^2}, \gamma_t = \frac{\nu}{\nu+1} \frac{t_{\nu+1}(\lambda \eta_t \sqrt{w_t})}{T_{\nu+1}(\lambda \eta_t \sqrt{w_t})}, i, r = 1, 2, \dots, p, j, k =$$

$$1, 2, \dots, M,$$

$$\alpha_t = \frac{2}{\sigma} w_t \frac{\eta_t}{\nu + \eta_t^2},$$

$$\psi_{1,t} = \frac{\lambda^2 \nu(\nu+3)}{\sigma(\nu+1)} w_t^2 \eta_t \frac{\gamma_t}{(\nu+1+\lambda^2 \eta_t^2 w_t)} - \frac{\lambda(\nu+1)}{\sigma \nu} w_t^{3/2} \gamma_t^2,$$

$$\psi_{2,t} = -\lambda(\nu+3) w_t \eta_t^2 \frac{\gamma_t}{(\nu+1+\lambda^2 \eta_t^2 w_t)} - \frac{(\nu+1)}{\nu} w_t^{1/2} \gamma_t^2 \eta_t \text{ ve}$$

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left\{ \left| \beta_1^{(0)} \right|^{-1}, \left| \beta_2^{(0)} \right|^{-1}, \dots, \left| \beta_M^{(0)} \right|^{-1} \right\}$$

$$\mathbf{W}(\beta_i^{(0)}) = \text{diag} \left\{ p'_\lambda \left(\left| \beta_1^{(0)} \right| \right) / \left| \beta_1^{(0)} \right|, \dots, p'_\lambda \left(\left| \beta_M^{(0)} \right| \right) / \left| \beta_M^{(0)} \right| \right\}$$

$$\mathbf{W}_\gamma \text{diag} \left\{ \left| \beta_1^{(0)} \right|^{\gamma-2}, \left| \beta_2^{(0)} \right|^{\gamma-2}, \dots, \left| \beta_M^{(0)} \right|^{\gamma-2} \right\} \text{dir.}$$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yetkin TUAÇ
Doğum Yeri : Erzurum
Doğum Tarihi : 18/04/1987
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Suphi Koyuncuoğlu Lisesi (İngilizce) (2005)
Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü (2011)
Y. Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı (Eylül 2011- Temmuz 2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü (Araştırma Görevlisi) (2013-devam)

Yayınlar (SCI)

Tuaç, Y., Y. Güney, and O. Arslan. 2020. Parameter Estimation of Regression Model with AR(p) Error Terms Based on Skew Distributions with EM Algorithm. Soft Computing, 24(5); 3309–3330.

Yayınlar (SCI-Exp)

- Güney, Y., **Tuaç, Y.**, Özdemir, Ş. and Arslan, O. 2020. Robust estimation and variable selection in heteroscedastic regression model using least favorable distribution. Computational Statistics. DOI:10.1007/s00180-020-01036-5
- Güney Y., Ozdemir, S., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2020. Optimal B-Robust Estimation for the Parameters of the Marshall-Olkin Extended Burr XII Distribution with an Application to Pharmacokinetics. REVSTAT.
- Güney Y., **Tuaç, Y.**, Ozdemir, S. and Arslan O. 2020. Conditional Maximum Lq-Likelihood Estimation for Regression Model with Autoregressive Error Terms. Metrika, DOI: 10.1007/s00184-020-00774-2.
- Yıldız, M.K., Kemaloğlu, Y.K., **Tuaç, Y.**, Mengü G., Karamert, R. and Gökdoğan, Ç. 2020. Validating the Turkish Version of the Weinstein Noise Sensitivity Scale: Effects of Age, Sex, and Education Level. Turkish Journal of Medical Sciences 50(4); 894-901.

Tuaç, Y., Y. Güney, B. Şenoğlu, and O. Arslan. 2018. Robust Parameter Estimation of Regression Model with AR(p) Error Terms. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 47(8); 2343-59.

Güney Y., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2017. Marshall–Olkin distribution: parameter estimation and application to cancer data. Journal of Applied Statistics, 44(12); 2238-2250.

Yayınlar (ESCI)

Ozdemir, S., Güney Y., **Tuaç, Y.**, Arslan O. 2019. Maximum Lq-Likelihood Estimation for the Parameters of Marshall-Olkin Extended Burr XII Distribution. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat, 68(1); 17-34.

A. Yalçinkaya, M. N. Çankaya, Ö. Altındağ and **Tuaç, Y.** 2017. Investigation for the Robustness of Significance Level when the Normality Assumption in Hypothesis Test is Violated. Gazi University Journal of Science, 30(2); 247-259.

Uluslararası Kongre Sunum

Tuaç, Y., Güney Y., Özdemir Ş. and Arslan O. 2018. Vector autoregressive models with multivariate skew innovations. The 23rd International Conference on Computational Statistics. 28-31 August 2018; Iasi/Romania.

Güney, Y. **Tuaç, Y.**, Ozdemir, S. and Arslan, O. 2018. Robust estimation and variable selection in joint location and scale model using least favorable distribution. 23rd International Conference on Computational Statistics. 28-31 August 2018; Iasi/Romania.

Özdemir Ş., Güney Y., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2018. Robust estimation and variable selection for regression models using empirical likelihood and LASSO methods. The 23rd International Conference on Computational Statistics. 28-31 August 2018; Iasi/Romania.

Özdemir Ş., Güney Y., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2018. Robust estimation and variable selection in joint location and scale model using least favorable distribution. The 23rd International Conference on Computational Statistics. 28-31 August 2018; Iasi/Romania.

Tuaç, Y. and Arslan O. 2018. Parameter Estimation of The Autoregressive Models with Skew Distributed Innovations Using EM Algorithm. 4th International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress. 28-30 April 2018; İzmir/Turkey.

Tuaç, Y., Güney Y., Özdemir Ş. and Arslan O. 2017. Robust variable selection in an autoregressive error term regression model. 31st EMS The European Meeting of Statisticians. 24-28 July 2017; Helsinki/Finland.

- Toka O., **Tuaç, Y.**, Çetin M. and Arslan O. 2017. Robust variable selection in restricted linear regression model. 31st EMS The European Meeting of Statisticians. 24-28 July 2017; Helsinki/Finland.
- Özdemir Ş., Güney Y., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2017. Empirical likelihood estimation for linear regression models with AR(p) error terms. 31st EMS The European Meeting of Statisticians. 24-28 July 2017; Helsinki/Finland.
- Güney Y., **Tuaç, Y.**, Özdemir Ş. and Arslan O. 2017. Maximum Lq-likelihood estimation for autoregressive error term regression model. 31st EMS The European Meeting of Statisticians. 24-28 July 2017; Helsinki/Finland.
- Tuaç, Y.**, Güney Y., Özdemir Ş. and Arslan O. 2017. Parameter estimation for skew normal distribution via the maximum Lq-likelihood estimation. 3RD International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress. 24-26 May 2017; Konya/Turkey.
- Güney Y., Özdemir Ş., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2017. Optimal B-robust estimators for the parameters of the MOEBXII distribution. 3RD International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress. 24-26 May 2017; Konya/Turkey.
- Özdemir Ş., **Tuaç, Y.**, Güney Y. and Arslan O. 2017. Maximum Lq-Likelihood Estimation for the Marshall-Olkin Extended Burr XII Distribution. 3RD International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress. 24-26 May 2017; Konya/Turkey.
- Tuaç, Y.** and Arslan O. 2017. Variable Selection in Regression Models with AR(p) Error Terms Based on Skew Distributions. 18. Uluslararası Ekonometri Yöneylem Araştırması ve İstatistik Sempozyumu. 05-07 Ekim 2017; Trabzon/Turkey.
- Arslan O. and **Tuaç, Y.** 2016. Indicators For Disaster Risk and Risk Management for Turkey. World Hummenitarian Summit (Davetli Konuşmacı) 23-24 May 2016; İstanbul/Turkey.
- Tuaç, Y.** and Arslan O. 2016. Variable Selection in Restricted Linear Regression. International Conference on Information Complexity and Statistical Modeling in High Dimensions with Applications. 18-21 May 2016; Nevşehir/Turkey.
- Tuaç, Y.**, Güney Y. and Arslan O. 2015. Variable Selection in Regression Models with AR(p) Error Terms Based on Skew Distributions. European Meeting of Statisticians 6-10 July 2015; Amsterdam/Holland.
- Güney Y., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2014. Robust Estimation for the Parameter of the Zipfian Distribution Properties and Applications. International Conference on Robust Statistics, 10-15 August 2014; Halle/Germany.

- Tuaç, Y.** and Arslan O. 2014. Analysis of Regression Models with AR(1) Error Terms Based on Skew Distributions Parameter Estimation. International Conference on Robust Statistics, ICORS 2014, 10-15 August 2014; Halle/Germany.
- Çankaya M. N., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2014. Robust Estimation for the Parameters of the Distributed Lag Models Based on Heavy Tailed Skew Distributions. International Conference on Robust Statistics, 10-15 August 2014; Halle/Germany.
- Güney Y., **Tuaç, Y.** and Arslan O. 2014. Marshall Olkin Distribution Parameter Estimation and Applications. 9th International Statistics Day Symposium 10-14 May 2014; Antalya/Turkey.
- Tuaç, Y.**, Arslan O. and Çankaya M. N. 2013. Robust estimators for the distributed lag model based on t and skew t distributions. International 8th Statistics Congress, 27-30 October 2013; Antalya/Turkey.
- Yalçinkaya A., Çankaya M. N., Altındağ Ö. ve **Tuaç, Y.** 2013. Hipotez Testlerinde Normallik Varsayımı Bozulduğunda 1 Tip Hatanın Dayanıklılığının İncelenmesi. 8. Uluslararası İstatistik Kongresi, 27-30 Ekim 2013; Antalya/Türkiye.
- Firuzan E., Çoban B. and **Tuaç, Y.** 2012. Effects of ARCH(1) Innovations on Cointegration Trace Test. 8th International Symposium of Statistics. 11-13 October 2012; Eskişehir/Turkey.