

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİE GRUPLARI ÜZERİNDE İNVARİYANT METRİKLER

Fatih DOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2009**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİE GRUPLARI ÜZERİNDE İNVARYANT METRİKLER

Fatih DOĞAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu yüksek lisans tezi altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş ve temel kavramlardan oluşmaktadır.

İkinci bölüm $SO(3)$ Lie grubu ve $so(3)$ Lie cebiri yapısı üzerine kuruldu. Ayrıca $SO(3)$ ün 1-parametrelili alt grubu ve üstel dönüşüm tanımlandı.

Üçüncü bölümde, Riemann konneksiyonu ve bi-invaryant metrik arasındaki ilişki verildi.

Dördüncü bölüm, hem $SE(3)$ Lie grubu yapısından hem de $se(3)$ Lie cebirinin inşasından oluştu. Ayrıca $SE(3)$ üzerindeki Riemann metriği ve invaryant vektör alanlar tanımlandı.

Beşinci bölümde, sol invaryant metriklerin eğrilikleri tanıtıldı.

Son bölümde, hem $so(3)$ ve $se(3)$ Lie cebirlerinin adjoint temsilleri bulundu hem de bi-invaryant metrik ve adjoint temsiller arasındaki ilişki gösterildi.

Ocak 2009, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lie Grubu, Lie Cebiri , Sol ve Sağ İnvaryant Vektör Alanları, Riemann Konneksiyonu, Kesitsel, Ricci ve Skalar Eğrilikler, Adjoint Temsil, Sol ve Sağ İnvaryant Metrikler, Bi-invaryant Metrik.

ABSTRACT

Master Thesis

INVARIANT METRICS ON LIE GROUPS

Fatih DOĞAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This master thesis comprises of six chapters.

The first chapter consists of introduction and basic notions.

The second chapter is based on $SO(3)$ Lie group and $so(3)$ Lie algebra structure. Besides, 1-parameter subgroup of $SO(3)$ and exponential map are defined.

In the third chapter, it is given relationship between Riemannian connection and bi-invariant metric.

The fourth chapter is formed both $SE(3)$ Lie group structure and $se(3)$ Lie algebra construction. Moreover, it is defined Riemannian metric and invariant vector fields on $SE(3)$.

In the fifth chapter, curvatures of left invariant metrics are brought in.

In the last chapter, it is found adjoint representations of $so(3)$ and $se(3)$ Lie algebras as well as shown relationship between bi-invariant metric and adjoint representations.

January 2009, 51 pages

Key Words: Lie Group, Lie Algebra, Left and Right Invariant Vector Fields, Riemannian Connection, Sectional, Ricci and Scalar Curvatures, Adjoint Representation, Left and Right Invariant Metrics, Bi-invariant Metric.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasına sağladığı katkılardan dolayı, değerli hocam Prof. Dr. Yusuf YAYLI' ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) teşekkür ederim.

Çalışmalarım esnasında sağladıkları maddi ve manevi desteklerinden ötürü aileme de teşekkür ederim.

Fatih DOĞAN

Ankara, Ocak 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1. GİRİŞ	1
1.1 TEMEL KAVRAMLAR	2
2. $SO(3)$ LİE GRUBU ve $so(3)$ LİE CEBİRİ.....	7
2.1 $SO(3)$ Lie Grubu ve $so(3)$ Lie Cebirinin Tanımı.....	7
2.2 $SO(3)$ Lie Grubunun Tanjant Operatörü ve 1-Parametrelili Alt Grubu.....	8
2.3 $SO(3)$ 'ün Geometrik Yorumu.....	8
2.4 $SO(n)$ Üzerinde Üstel ve Logaritmik Dönüşümler.....	9
3. RIEMANN KONNEKSİYONU ve Bİ-İNVARYANT METRİKLE İLİŞKİSİ.....	15
4. $SE(3)$ LİE GRUBU ve $se(3)$ LİE CEBİRİ.....	18
4.1 $SE(3)$ Lie Grubu ve $se(3)$ Lie Cebirinin Tanımı.....	18
4.2 $SE(3)$ Lie Grubu Üzerinde İnvaryant Vektör Alanları.....	25
4.3 $SE(3)$ Lie Grubu Üzerinde Riemann Metrikleri.....	27
5. LİE GRUPLARI ÜZERİNDE SOL İNVARYANT METRİKLERİN EĞRİLİKLERİ.....	29
5.1 Kesitsel Eğrilik.....	29
5.2 Ricci Eğriliği.....	32
5.3 Skalar Eğrilik.....	36
5.4 $SO(3)$ Lie Grubu İçin Kesitsel Eğrilik Hesabı.....	37
6. $SO(3)$ ve $SE(3)$ ÜZERİNDE Bİ-İNVARYANT METRİKLERİN VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI.....	41
6.1 $SO(3)$ Üzerinde Bi-invaryant Metriğin Varlığı.....	41
6.2 $SE(3)$ Üzerinde Bi-invaryant Metriğin Araştırılması.....	46
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

1. GİRİŞ

Bu tezde, öncelikle Lie grubu ve Lie cebiri, daha sonra Lie gruplarının ötelemeleri yardımıyla, invaryant ve bi-invaryant metrikler tanımlanacaktır.

$\mathbb{R}^3$ de, dönmelerin grubu $SO(3)$ ve katı hareketlerin grubu $SE(3)$ birer Lie grubudur. Burada, $SO(3)$ Lie grubu ve bu grup için üstel dönüşüm tanımlanacak yine bu dönüşüm yardımıyla, $SO(3)$ ün 1- parametrelili alt grubu ve $SO(3)$ üzerindeki metrik verilecektir. Bu metriğin $SO(3)$ için standart bi-invaryant metrik olduğu gösterilecektir.

Riemann konneksiyonu tanımlanacak ve bu konneksiyonla uyumlu metriğin bi-invaryant olması durumunda, x ve y sol invaryant vektör alanlar olmak üzere, y nin x yönündeki kovaryant türevi, $\nabla_x y = \frac{1}{2}[x, y]$ şeklinde kolay bir formülle bulunacaktır.

$SE(3)$ Lie grubu ve buna karşılık gelen $se(3)$ Lie cebiri tanımlanacak ve bu Lie cebirinin standart bazı, yapı sabitleri elde edilecektir. $SE(3)$ üzerindeki invaryant vektör alanları ile $se(3)$ Lie cebiri ve $A \in SE(3)$ olmak üzere, $T_A SE(3)$ tanjant uzayı üzerindeki metrik tanımlanacak ve invaryantlıkları incelenecektir.

Sol invaryant Riemann metrikleri için eğrilik tanımları verilecek ve metriğin flat ($\kappa = 0$) olma durumu incelenecektir. $SO(3)$ Lie grubunun kesitsel eğrilikleri hesaplanacak ve ayrıca flat sol invaryant Lorentz metriğe sahip olan 3- boyutlu Lie gruplarıyla ilgili bir teorem de verilecektir.

Son olarak, $so(3)$ ve $se(3)$ Lie cebirlerinin adjoint temsilleri bulunacak ve bu adjoint temsillerin skew-adjoint olup olmadığı, dolayısıyla metriğin bi-invaryant olup olmadığı incelenecektir.

1.1 Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1 (Lie Grubu) : G bir grup ve $x, y \in G$ olmak üzere, $G \times G \rightarrow G$ ye $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ ile verilen dönüşüm diferensiyellenebilir olacak biçimde, bir diferensiyellenebilir yapıyla birlikte verilen G grubuna Lie grubu denir (do Carmo 1992).

Örneğin;

$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0 \}$ standart matris çarpımıyla birlikte bir Lie grubudur.

Tanım 1.1.2 : H , G grubunun bir alt grubu ve H , G içinde kapalı bir alt cümle ise H ye G Lie grubunun bir kapalı alt grubu denir (Karger and Novak 1985).

Tanım 1.1.3 : H , G nin bir kapalı alt grubu ise bu takdirde H , G nin bir alt manifoldu ve dolayısıyla G nin bir Lie alt grubudur (O’neill 1983).

Tanım 1.1.4 : Bir manifold boş olmayan iki açık cümlelerin ayrık birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu manifolda irtibatlıdır denir ya da bir manifoldun irtibatlı olması için gerek ve yeter şart herhangi iki noktasının diferensiyellenebilir bir eğri parçası tarafından bağlanabilmesidir (O’neill 1983).

Tanım 1.1.5 : (Lie Cebiri) $\mathfrak{gl} = \{V, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes\}$ bir reel vektör uzayı olsun.

$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{gl} \times \mathfrak{gl} \rightarrow \mathfrak{gl}$ bracket operatörü için

(i) anti-simetrik

(ii) bi-lineer

(iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \equiv 0$ (Jakobi özdeşliği) özelliklerini

sağlıyorsa, $(\mathfrak{gl}, [\cdot, \cdot])$ ikilisine bir Lie cebiri denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 1.1.6 : G bir Lie grubu ve $g \in G$ olsun. $\forall g \in G$ için,

$$L_g : G \rightarrow G$$

$x \rightarrow L_g(x) = gx$ dönüşümüne G üzerinde sol öteleme denir.

$$R_g : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow R_g(x) = xg$$

dönüşümüne G üzerinde sağ öteleme denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 1.1.7 : G bir Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı da X olsun. $\forall g, g_1 \in G$ için

$$(l_g)_* X(g_1) = X(gg_1)$$

koşulunu sağlayan X vektör alanına sol invaryant vektör alanı denir.

G bir Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı da X olsun. $\forall g, g_1 \in G$ için

$$(r_g)_* X(g_1) = X(g_1g)$$

koşulunu sağlayan X vektör alanına sağ invaryant vektör alanı denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 1.1.8 : G bir Lie grubu ve $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ bir metrik olsun. $\forall a \in G$ ve $\forall x, y \in G$ için,

$$d(ax, ay) = d(x, y) \text{ ise } d \text{ metriğine sol invaryant metrik,}$$

$$d(xa, ya) = d(x, y) \text{ ise } d \text{ metriğine sağ invaryant metrik denir.}$$

Tanım 1.1.9 : d metriği hem sol invaryant hem de sağ invaryant ise d metriğine bi-invaryant metrik denir.

Tanım 1.1.10 : $(G, *)$ bir grup olsun.

$$f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (G, *) \text{ dönüşümü } \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ için,}$$

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) * f(t_2) \text{ ise } f(\mathbb{R}) \text{ ye } G \text{ nin 1-parametrelili alt grubu denir}$$

(Sattinger and Weaver 1993).

Tanım 1.1.11 : G Lie grubu üzerinde bir $g = g(\tau)$ ($a \leq \tau \leq b$) eğrisi,

$$g(0) = e$$

$$g(\tau_1 + \tau_2) = g(\tau_1)g(\tau_2)$$

$$g(-\tau) = g(\tau)^{-1}$$

koşullarını sağlarsa bu eğriye G Lie grubunun 1-parametrelili alt grubu denir (Avramidi 2000).

G bir Lie grubu ve $e \in G$ birim eleman olsun. $\chi_l(G)$, G üzerindeki bütün sol invariant vektör alanların uzayı olmak üzere,

$$\chi_l(G) = \{X : \forall g, g_1 \in G \text{ için } (l_g)_* X_{g_1} = X_{gg_1}\} \subset \chi(G) \text{ dir.}$$

Teorem 1.1.1 : $\alpha : \chi_l(G) \rightarrow T_e(G)$ dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

İspat: i) α lineerdir (?)

$X, Y \in \chi_l(G)$ için,

$$\begin{aligned} \alpha(X+Y) &= (X+Y)(e) \\ &= X(e) + Y(e) \\ &= \alpha(X) + \alpha(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(cX) &= (cX)(e) \\ &= cX(e) \\ &= c\alpha(X) \\ &\Rightarrow \alpha \text{ lineerdir.} \end{aligned}$$

ii) α birebirdir (?)

$$\alpha(X) = \alpha(Y) \Rightarrow X(e) = Y(e)$$

$\forall g \in G$ için, $(l_g)_*$ uygularsak

$$X(g) = (l_g)_*(X(e)) = (l_g)_*(Y(e)) = Y(g)$$

$\Rightarrow X = Y$ dir.

$\Rightarrow \alpha$ birebirdir.

iii) α örtendir (?)

$\forall t_e \in T_e(G)$ ve $\forall g \in G$ için,

$\Rightarrow X(g) = (l_g)_*(t_e)$

$\Rightarrow (l_g)_*(X(e)) = (l_g)_*(t_e)$

$(l_g)_*$ birebir olduğundan

$X(e) = t_e$

$\alpha(X) = t_e$

$\Rightarrow \alpha$ örtendir

O halde α bir lineer izomorfizmdir (Hacısalıhoğlu 1980).

$[] : \mathcal{X}_l(G) \times \mathcal{X}_l(G) \rightarrow \mathcal{X}_l(G)$

$(X, Y) \rightarrow [X, Y]_g(f) = X_g(Y(f)) - Y_g(X(f)) ; \forall g \in G, \forall f \in C^\infty(G)$ bracket operatörüyle birlikte $\mathcal{X}_l(G)$ bir Lie cebiridir. $\alpha : \mathcal{X}_l(G) \rightarrow T_e(G)$ bir lineer izomorfizm olduğundan $T_e(G)$ de bir Lie cebiri olur. Yani, bir G Lie grubunun e birim noktasındaki tanjant uzayı $T_e(G)$, G Lie grubunun Lie cebiri olur.

Tanım 1.1.12 : A , $n \times n$ bir reel matris olsun. Bu durumda,

$\exp(A) = e^A = I + A/1! + A^2/2! + \dots$ serisi yakınsaktır (Curtis 1979).

Teorem 1.1.2 : A reel anti-simetrik bir matris ise e^A ortogonaldir (Curtis 1979).

İspat : $A^T + A = 0$

$e(0) = \exp(A + A^T) = \exp(A)\exp(A^T)$

$$\Rightarrow I = \exp(A)\exp(A)^T$$

$$\Rightarrow \exp(A)^T = \exp(A)^{-1}$$

$$\Rightarrow e^A \text{ ortogonal}$$

Tanım 1.1.13 : X , $n \times n$ bir reel matris olsun. X in I komşuluğunda $\log(X) = (X - I) - (X - I)^2/2 + (X - I)^3/3 - \dots$ serisi yakınsaktır (Curtis 1979).

Teorem 1.1.3 : X , $n \times n$ bir reel matris olsun. X , X^T matrisleri I komşuluğunda değişmeli ve X , I komşuluğunda ortogonal ise $\log(X)$ anti-simetriktir (Curtis 1979).

İspat: $I = XX^T$

$$\Rightarrow 0 = \log(XX^T)$$

$$\Rightarrow 0 = \log(X) + \log(X^T)$$

$$\Rightarrow 0 = \log(X) + \log(X)^T$$

$$\Rightarrow \log(X)^T = -\log(X)$$

$$\Rightarrow \log(X) \text{ anti-simetrik}$$

Tanım 1.1.14 : Metrik vektör uzaylar arasında tanımlı bir L lineer dönüşümünün L^* adjointi

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $L^* = -L$ ise L lineer dönüşümüne **skew-adjoint** dönüşüm denir (Milnor 1976).

Tanım 1.1.15 : g Lie cebirindeki herhangi bir x elemanı için g den g -ye $y \rightarrow [x, y]$ lineer dönüşümüne adjoint dönüşüm denir ve ad_x ile gösterilir (Milnor 1976).

Teorem 1.1.4 : Bir irtibatlı Lie grubu üzerinde bir sol invaryant metrik aynı zamanda sağ invaryanttır (**bi-invaryanttır**) $\Leftrightarrow \forall x \in g$ için ad_x skew-adjointtir (Milnor 1976).

2. SO(3) LİE GRUBU ve so(3) LİE CEBİRİ

2.1 SO(3) Lie Grubu ve so(3) Lie Cebirinin Tanımı

Tanım 2.1.1 : $O(3) = \{ A \in GL(3) : A^T A = A A^T = I \}$ kümesi standart matris çarpımıyla birlikte bir gruptur. Bu gruba ortogonal grup denir.

Tanım 2.1.2 : $SO(3) = \{ R \in GL(3) : R^T R = R R^T = I, \det(R) = 1 \}$ ile tanımlanan gruba $O(3)$ ortogonal grubu içinde özel ortogonal grup denir.

$SO(3)$, topolojik yapısıyla 3-boyutlu bir topolojik manifolddur. Bu yüzden bir matris Lie grubudur. Bir Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri grubun birim noktasındaki tanjant uzayı olduğundan, $T_I(SO(3))$, $SO(3)$ Lie grubunun Lie cebiri olur. Bu Lie cebirine $so(3)$ diyelim.

$A \in SO(3)$ için, $A: J \subset \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$ eğrisini alalım.

$$t \rightarrow A(t)$$

$$A^T A = I \Rightarrow \frac{d}{dt}(A^T A) = \frac{d}{dt}(I)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(A^T)A + A^T \frac{d}{dt}(A) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(A^T)A + A^{-1} \frac{d}{dt}(A) = 0 \quad \dots (*)$$

$(*)$ ' da $A^{-1} \frac{d}{dt}(A) = \Omega$ diyelim.

$$\Omega^T = \left(A^{-1} \frac{d}{dt}(A) \right)^T = \left(\frac{d}{dt}(A) \right)^T (A^{-1})^T = \left(\frac{d}{dt}(A) \right)^T (A^T)^T = \left(\frac{d}{dt}(A^T) \right) A$$

$(*)$ ifadesinde $\Omega^T + \Omega = 0$

$$\Rightarrow \Omega^T = -\Omega$$

$\Rightarrow \Omega$ anti-simetrik matris

Tanım 2.1.3 : $so(3) = \{ \Omega \in \mathbb{R}_3^3 : \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega^T = -\Omega \}$ SO(3) Lie

grubunun Lie cebiri olarak tanımlanır.

2.2 SO(3) Lie Grubunun Tanjant Operatörü ve 1-Parametrelili Alt Grubu

Tanım 2.2.1 : SO(3) Lie grubunun tanjant operatörü, $\Omega = \dot{A}A^T = \dot{A}A^{-1}$ anti-simetrik operatörüdür.

Ω matrisine $A(t)$ dönmesinin açısal hız matrisi denir. Burada , $\frac{d}{dt}(A(t)) = \dot{A}(t)$ notasyonunu kullanalım.

Tanım 2.2.2 : Ω sabit açısal hız matrisi için, $A(0) = I$ başlangıç koşuluyla verilen $\dot{A}(t) = \Omega A(t)$ diferensiyel denkleminin çözümü

$$A(t) = \exp(\Omega t)$$

dir. Bu durumda $A(t)$ eğrisi, SO(3) ün **1-parametrelili alt grubudur**.

2.3 SO(3)'ün Geometrik Yorumu

SO(3) ün elemanlarını antipodal noktalarla birlikte merkezi orijinde bulunan π yarıçaplı küreler olarak düşünebiliriz. Gerçekten, merkezi orijinde bulunan bir küre için, küre üzerindeki bir noktayı antipodale dönüştüren dönmeyi $\theta \in SO(3)$ alıp dönme açısına da ϕ dersek, ϕ açısının π olduğu ve vektörün boyuna eşit olduğu görülür.

Bu durumda, kürenin içinde bir ω noktası alınırsa, orijin ve ω dan geçen doğru etrafındaki bir θ dönmesi için $\phi = \|\omega\| < \pi$ dir.

2.4 SO(n) Üzerinde Üstel ve Logaritmik Dönüşümler

Burada anti-simetrik matrislerin üstel dönüşümünü ve ortogonal matrislerin logaritmasını tanımlamak için, Gallier and Xu 'nun (2002) bu konu ile ilgili bir çalışmalarındaki hesaplamalardan yararlanılacaktır.

SO(n) için, $n = 2$ olduğunda bir B anti-simetrik matrisinin üstel ifadesini yazalım.

$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $B = \theta J$ olarak yazılabilir. Bu takdirde,

$$e^B = e^{\theta J} = \cos(\theta) I_2 + \sin(\theta) J$$

ifadesi elde edilir.

$R \in SO(2)$ verildiğinde $\text{iz}(R) = 2\cos\theta$ olduğu için $\cos\theta$ yı bulabiliriz. Bu yüzden yukarıda verilen üstel ifade problemi çözülmüş olur.

$n = 3$ durumunda bir reel B anti-simetrik matrisi,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

ve $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ iken Rodrigues formülü,

$$e^B = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} B + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} B^2$$

şeklinde yazılır.

Burada $B = 0$ iken $e^B = I_3$ dür.

$\theta \neq 0$ iken B anti-simetrik matrisi $B = \theta B_1$ olarak normalleştirilebilir. Bu durumda Rodrigues formülü,

$$e^{\theta B_1} = I_3 + \sin(\theta)B_1 + (1 - \cos \theta)B_1^2$$

olur.

Aynı zamanda $R \in SO(3)$ verildiğinde $\text{iz}(R) = 1 + 2\cos \theta$ olduğundan $\cos \theta$ y1 ve

$$\frac{1}{2}(R - R^T) = \sin(\theta)B_1$$

olduğundan B_1 i bulabiliriz.

$\theta = 0$ ya da $\theta = \pi$ iken yani $\sin \theta = 0$ olduğu durumlarda yukarıdaki formül kullanılamaz. $\theta = 0$ iken $R = I_3$ ve $B_1 = 0$ olur. $\theta = \pi$ olduğunda,

$$\frac{1}{2}(R - I_3) = B_1^2 \dots *$$

olacak şekilde B_1 anti-simetrik matrisini bulmak gerekir.

B_1 , 3×3 tipinde bir anti-simetrik matris olduğundan, $*$ ifadesi 3 bilinmeyenli bir basit denklem sistemi olur ve kolaylıkla çözülebilir.

Rodrigues formülü $B^3 = -\theta^2 B$ ya da $B_1^3 = -B_1$ olmasından elde edilmiştir. Ancak $n \geq 4$ iken sıfırdan farklı bir anti-simetrik matris için verilen eşitlik genellikle doğru değildir.

Şimdi $n \geq 4$ iken $\exp: so(n) \rightarrow SO(n)$ üstel dönüşümünü hesaplamak için Rodrigues formülünün bir genelleştirilmesinin olduğunu gösterelim ve $\log: SO(n) \rightarrow so(n)$ logaritma fonksiyonunu hesaplamak için bir yöntem verelim.

$n \times n$ tipinde bir B anti-simetrik matrisi verildiğinde,

$$B = \theta_1 B_1 + \dots + \theta_p B_p$$

olacak biçimde p -tane $B_1, \dots, B_p$ anti-simetrik matrisi vardır. Burada B anti-simetrik matrisinin üstel ifadesinin nasıl hesaplanacağını ve $B_1, \dots, B_p$ matrislerinin tek olarak varlığını göstereceğiz. Aşağıdaki lemma $B_1, \dots, B_p$ matrislerini elde etmede önemli bir role sahiptir.

Lemma 2.4.1 : Herhangi bir $n \times n$ tipinde B anti-simetrik matrisi verildiğinde $B = PEP^T$ olacak şekilde

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & E_m & \\ & & & 0_{n-2m} \end{pmatrix}$$

bir blok diagonal matris ve bir P ortogonal matrisi vardır.

Burada her E_i ,

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{pmatrix} = \theta_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \theta_i > 0$$

olacak biçimde 2×2 tipinde anti-simetrik matrislerdir. Burada B anti-simetrik matrisinin eigen değerleri, herhangi bir anti-simetrik matrisin eigen değerlerinin 0 ya da sıfır imajiner olmasından $\pm i\theta_j$ ya da 0 olur.

Şimdi hem B_j lerin varlığını ve tekliliğini hem de Rodrigues formülünü ispatlayalım.

Teorem 2.4.1 : Herhangi $n \times n$ tipinde sıfırdan farklı bir B anti-simetrik matrisi verildiğinde ($n \geq 3$) eğer :

$$\{i\theta_1, -i\theta_1, \dots, i\theta_p, -i\theta_p\}, \theta_j > 0$$

kümesi, B nin farklı eigen değerlerinin kümesi ve her $\pm i\theta_j$ için $k_j \geq 1$ (k_j : eigen değerinin katlı kökü) ise,

$$B = \theta_1 B_1 + \dots + \theta_p B_p \quad (1)$$

$$B_i B_j = B_j B_i = 0_n \quad (i \neq j) \quad (2)$$

$$B_i^3 = -B_i \quad (3)$$

$1 \leq i, j \leq p$ ve $2n \leq p$ olacak biçimde $B_1, \dots, B_p$ anti-simetrik matrisleri tek olarak bellidir. Ayrıca

$$e^B = I_n + \sum_{i=1}^p \sin \theta_i B_i + (1 - \cos \theta_i) B_i^2$$

olur ve $\{\theta_1, \dots, \theta_p\}$, $-\frac{1}{4}(B - B^T)^2$ simetrik matrisinin $2m$ -tane katlı köke sahip eigen değerlerinin pozitif karekökleridir.

İspat : B_i ve B_j ler tüm i, j ler için değişmeli olduğundan

$$e^B = e^{\sum_{i=1}^p \theta_i B_i} = e^{\theta_1 B_1} \dots e^{\theta_p B_p}, 1 \leq i \leq p$$

olarak yazılabilir.

Bununla birlikte 3×3 durumundaki gibi,

$$B_i^3 = -B_i$$

eşitliği kullanılırsa,

$$e^{\theta_i B_i} = I_n + \sin(\theta_i) B_i + (1 - \cos \theta_i) B_i^2 \quad (1 \leq i \leq n) \text{ olduğu görülür.}$$

$B_i^3 = -B_i$ eşitliği yardımıyla,

$$B_i^{4k+j} = B_i^j \text{ ve } B_i^{4k+2+j} = -B_i^j \quad (j = 1, 2 \text{ ve tüm } k \geq 0 \text{ için})$$

elde edilir.

Bu yüzden,

$$e^{\theta_i B_i} = I_n + \sum_{k \geq 1} \frac{\theta_i^k B_i^k}{k!}$$

$$= I_n + \left(\frac{\theta_i}{1!} - \frac{\theta_i^3}{3!} + \frac{\theta_i^5}{5!} + \dots \right) B_i + \left(\frac{\theta_i^2}{2!} - \frac{\theta_i^4}{4!} + \frac{\theta_i^6}{6!} \right) B_i^2$$

$$= I_n + \sin(\theta_i) B_i + (1 - \cos \theta_i) B_i^2$$

olur.

Gerçekten, $B_i B_j = B_j B_i = 0_n$ ($i \neq j$) dir ve bu yüzden

$$\begin{aligned} e^B &= \prod_{i=1}^m e^{\theta_i B_i} \\ &= \prod_{i=1}^p (I_n + \sin(\theta_i) B_i + (1 - \cos \theta_i) B_i^2) \\ &= I_n + \sum_{i=1}^p \sin(\theta_i) B_i + (1 - \cos \theta_i) B_i^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{1}{4}(B - B^T)^2$ matrisi PE^2P^T formunda yazılabilir. Burada,

$$E_i^2 = \begin{pmatrix} -\theta_i^2 & 0 \\ 0 & \theta_i^2 \end{pmatrix}$$

dir.

Böylece, $-\frac{1}{4}(B - B^T)^2$ matrisinin eigen değerleri

$$\{\theta_1^2, \theta_1^2, \dots, \theta_m^2, \theta_m^2, 0, \dots, 0\}$$

olur. Bu yüzden $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, $-\frac{1}{4}(B - B^T)^2$ simetrik matrisinin eigen değerlerinin pozitif karekökleridirler.

Şimdi buradaki B_j lerin tekliğini gösterelim. B_j lerin özellikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^p \theta_i B_i \\ B^3 &= -\sum_{i=1}^p \theta_i^3 B_i \\ B^5 &= \sum_{i=1}^p \theta_i^5 B_i \\ &\dots \\ B^{2p-1} &= (-1)^{p-1} \sum_{i=1}^p \theta_i^{2p-1} B_i \end{aligned} \tag{4}$$

sistemi elde edilir.

Bu sistemin katsayılar matrisi,

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_p \\ -\theta_1^3 & -\theta_2^3 & \dots & -\theta_p^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{p-1} \theta_1^{2p-1} & (-1)^{p-1} \theta_2^{2p-1} & \dots & (-1)^{p-1} \theta_p^{2p-1} \end{pmatrix}$$

olur. Bu matris, $\text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, 1, (-1)^{p-1})$ ile $(\prod_{i=1}^p \theta_i) V(\theta_1^2, \dots, \theta_p^2)$

matrislerinin çarpımı olarak yazılabilir. Burada $V(\theta_1^2, \dots, \theta_p^2)$ bir Vandermonde matrisidir. Bu matrisin determinantına δ_n dersek,

$$\delta_n = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{i=1}^p \theta_i \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\theta_j^2 - \theta_i^2)$$

olur.

Buradaki tüm θ_i ler pozitif ve birbirinden farklı olduklarından, $\delta_n \neq 0$ dır. Böylece, B ve onun sıfırdan farklı eigen değerlerinden $B_1, \dots, B_p$ matrisleri tek olarak belirlenebilir.

Dolayısıyla, bir $R \in \text{SO}(n)$ verildiğinde $\log(R) = B$ olacak şekilde bir $B = \theta_1 B_1 + \dots + \theta_p B_p$ anti-simetrik matrisi bulunabilir.

3. RIEMANN KONNEKSİYONU ve Bİ-İNVARYANT METRİKLE İLİŞKİSİ

Bu bölümde Riemann konneksiyonu tanımlanacak ve bu konneksiyonla uyumlu metriğin bir bi-invaryant metrik olması durumunda ortaya çıkacak sonuçlar incelenecektir.

Bir Riemann metriğiyle birlikte bir ∇ Riemann konneksiyonunu dikkate aldığımızda, ∇ Riemann konneksiyonu, diferensiyellenebilir x ve y vektör alanlarının her bir çiftine y nin x yönünde kovaryant türevi adı verilen bir $\nabla_x y$ diferensiyellenebilir vektör alanını karşılık getirir.

Buradaki amacımıza yönelik, ∇ nın tek olarak tanımlı olduğunu, $\nabla_x y$ nin x ve y nin bir fonksiyonu olarak bilineer olduğunu ve

$$[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x \quad (3.1) \text{(simetri koşulu)}$$

$$x \langle y, z \rangle = \langle \nabla_x y, z \rangle + \langle y, \nabla_x z \rangle \quad (3.2) \text{(metrikle uyumluluk)}$$

koşullarının sağlandığını bilmek yeterlidir.

(3.2) eşitliği $\langle y, z \rangle$ sabit fonksiyon olacak biçimdeki her y, z vektör alanı için sıfırdır.

Özel olarak y ve z bir Lie grubu üzerinde bir sol invaryant metrikle birlikte verilen sol invaryant vektör alanlar ise bu eşitlik her zaman sıfırdır. x sol invaryant ise $\nabla_x y$ de sol invaryanttır. Böylece her x için ∇_x , Lie cebirinden Lie cebirine tanımlı bir skew-adjoint lineer dönüşümdür.

x, y, z nin tümü sol invaryant vektör alanlar olsunlar. Bu durumda (3.1) ve (3.2) eşitlikleri yardımıyla,

$$\langle \nabla_x y, z \rangle = \frac{1}{2} [\langle x, [y, z] \rangle - \langle y, [z, x] \rangle + \langle z, [x, y] \rangle]$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi bu eşitliğin varlığını gösterelim. Simetri koşulunda x , y ve z nin sıraları değiştirilirse,

$$x \langle y, z \rangle = \langle \nabla_x y, z \rangle + \langle y, \nabla_x z \rangle = 0 \quad (1)$$

$$y \langle z, x \rangle = \langle \nabla_y z, x \rangle + \langle z, \nabla_y x \rangle = 0 \quad (2)$$

$$z \langle x, y \rangle = \langle \nabla_z x, y \rangle + \langle x, \nabla_z y \rangle = 0 \quad (3)$$

eşitlikleri elde edilir.

(1) den (2) çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x y - \nabla_y x, z \rangle + \langle \nabla_x z, y \rangle - \langle \nabla_y z, x \rangle &= 0 \\ \langle [x, y], z \rangle + \langle \nabla_x z, y \rangle - \langle \nabla_y z, x \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Benzer şekilde (3) den (1) çıkarılırsa,

$$\langle [z, x], y \rangle + \langle x, \nabla_z y \rangle - \langle \nabla_x y, z \rangle = 0 \quad (5)$$

elde edilir.

Burada ∇_x lineer dönüşümü skew-adjoint olduğundan, (4) de

$$\langle \nabla_x z, y \rangle = -\langle z, \nabla_x y \rangle \text{ yazılır ve (4) ile (5) taraf tarafa toplanırsa,}$$

$$2\langle \nabla_x y, z \rangle = \langle [x, y], z \rangle - \langle [y, z], x \rangle + \langle [z, x], y \rangle$$

$$\langle \nabla_x y, z \rangle = \frac{1}{2}(\langle [x, y], z \rangle - \langle [y, z], x \rangle + \langle [z, x], y \rangle)$$

eşitliği elde edilir.

Metriğin bi-invariant olması durumunda, adjoint dönüşüm skew adjoint olacağından ($ad_x^* = -ad_x$), yukarıdaki eşitlikte $\langle [z, x], y \rangle = \langle ad_z x, y \rangle = -\langle x, ad_z y \rangle$ ve bu yüzden

$$-\langle [y, z], x \rangle + \langle [z, x], y \rangle = -\langle ad_y z, x \rangle + \langle ad_z x, y \rangle = \langle x, ad_z y \rangle - \langle x, ad_z y \rangle = 0$$

elde edilir.

Böylece,

$$\langle \nabla_x y, z \rangle = \frac{1}{2}\langle [x, y], z \rangle$$

olur.

O halde metriğin bi-invariant olması durumunda, sol invariant vektör alanlar için

$$\nabla_x y = \frac{1}{2}[x, y]$$

eşitliği elde edilir.

4. SE(3) LİE GRUBU ve se(3) LİE CEBİRİ

4.1 SE(3) Lie Grubu ve se(3) Lie Cebirinin Tanımı

Bu bölümde, SE(3) Lie grubu ve se(3) Lie cebiri tanımlanacak ve bu yapılar üzerindeki operatörler verilecektir.

R^3 deki bir katı hareket ,

$$A: R^3 \rightarrow R^3$$

$$x \rightarrow A(x) = Rx + d ; R \in SO(3), d \in R^3$$

lineer dönüşümüyle ifade edilebilir. Bu dönüşüm matris formunda, $A = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ile gösterilebilir.

Tanım 4.1.1 : Bu formdaki bütün matrislere 3- boyutta katı hareketlerin özel öklidiyen grubu denir. Bu grup,

$$SE(3) = \{ A : A = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R \in R^{3 \times 3}, d \in R^3, R^T R = I, \det(R) = 1 \}$$

kümesiyle gösterilebilir (Zefran *et al.* 1999).

GL(4,R) bir Lie grubu ve SE(3), GL(4,R) nin kapalı bir alt cümlesi olduğundan SE(3) bir Lie grubudur.

$$A : [-a, a] \rightarrow SE(3)$$

$$t \rightarrow A(t) = \begin{pmatrix} R(t) & d(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eğrisi verildiğinde se(3) Lie cebirinin bir S(t) elemanı aşağıdaki gibi elde edilebilir. Bu

eğrinin tanjant vektörü $\dot{A}(t)$ olmak üzere, $\dot{A}(t) = \frac{d}{dt}[A(t)] \in T_A SE(3)$ dir.

SE(3) Lie grubu ve I_3 birim matris olmak üzere, $\chi_l SE(3)$, $T_l SE(3)$ ye izomorf

olduğundan $T_l SE(3)$ Lie cebiri olur. Burada, $\chi_l SE(3)$ sol invaryant vektör alanların uzayıdır.

Kısaca, $T_l SE(3) = \mathfrak{se}(3)$ diyelim ve $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirini elde edelim.

$A(t) \in SE(3)$ eğrisi için,

$$A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} R^{-1}(t) & -R^{-1}(t)d(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{A}(t) = \begin{pmatrix} \dot{R}(t) & d(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(t) \dot{A}(t) = \begin{pmatrix} R^{-1}(t) & -R^{-1}(t)d(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R}(t) & d(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(t) \dot{A}(t) = \begin{pmatrix} R^{-1}(t)\dot{R}(t) & R^{-1}(t)d(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Omega = R^{-1}(t)\dot{R}(t)$, $v = R^{-1}(t)d(t)$ denilirse,

$$S(t) = A^{-1}(t) \dot{A}(t) = \begin{pmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(3)$$

olarak yazılabilir.

Benzer şekilde verilen $A(t)$ eğrisi için,

$$\dot{A}(t) A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{R}(t) & d(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1}(t) & -R^{-1}(t)d(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{A}(t) A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{R}(t) & d(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1}(t) & -R^{-1}(t)d(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{A}(t) A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{R}(t) R^{-1}(t) & -\dot{R}(t) R^{-1}(t) d(t) + \dot{d}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Omega = \dot{R}(t) R^{-1}(t)$, $v = -\dot{R}(t) R^{-1}(t) d(t) + \dot{d}(t)$ olarak alınırsa,

$S(t) = \dot{A}(t) A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Kısaca,

$\begin{pmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [\Omega, v]$ yazılabilir.

Tanım 4.1.2 : SE(3) Lie grubunun tanjant operatörü $S = [\Omega, v]$ ile tanımlı bir operatördür.

Teorem 4.1.1 : $\Omega \in R_3^3$ anti-simetrik matris ve $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ için

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{x} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\omega \times \vec{x} = \Omega \times X$$

eşitliği vardır.

İspat :

$$\Omega X = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ -\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega \times x = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)$$

eşitliklerin sağ tarafları eşit olduğundan, $\vec{\omega} \times \vec{x} = \Omega \times X$ eşitliği elde edilir.

Bu yüzden $\Omega \in R_3^3$ anti-simetrik matrisi ile $\vec{\omega} \in R^3$ vektörü arasında $\Omega \leftrightarrow \vec{\omega}$ eşlemesi vardır. Dolayısıyla her $S \in \mathfrak{se}(3)$ elemanına $\{\vec{\omega}, \vec{v}\}$ vektör çifti karşılık gelir.

Tanım 4.1.3 : SE(3) Lie grubunun $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebiri ,

$$\mathfrak{se}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \omega \in R^{3 \times 3}, v \in R^3, \omega^T = -\omega \right\}$$

ile verilebilir (Belta and Kumar 2002).

Şimdi, $\mathfrak{se}(3)$ Lie cebirinin standart bazını elde edelim. $S \in \mathfrak{se}(3)$ olsun.

Bu durumda,

$$S = \begin{pmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 & v_1 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 & v_2 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılırsa,

$$S = \omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ v_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6$$

$$\Rightarrow \text{se}(3) = \text{Sp}\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}$$

$L_1 \rightarrow$ X eksenini etrafındaki ani dönme

$L_2 \rightarrow$ Y eksenini etrafındaki ani dönme

$L_3 \rightarrow$ Z eksenini etrafındaki ani dönme

$L_4 \rightarrow$ X eksenini boyunca ani öteleme

$L_5 \rightarrow$ Y eksenini boyunca ani öteleme

$L_6 \rightarrow$ Z eksenini boyunca ani öteleme

'ye karşılık gelen matrislerdir.

$$S(t) \leftrightarrow \{\vec{\omega}(t), \vec{v}(t)\} \text{ için :}$$

$\vec{\omega}$: Cismin hareketinin açısal hızını

$\vec{v}$: Cismin hareketinin lineer hızını

gösterirler.

Tanım 4.1.4 : Kinematikte $\{\vec{\omega}(t), \vec{v}(t)\}$ formundaki elemanlara twist adı verilir.

Teorem 4.1.2 : $S_1, S_2 \in \mathfrak{se}(3)$ için bracket çarpımı işlemi,

$$[\cdot] : \mathfrak{se}(3) \times \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathfrak{se}(3)$$

$$(S_1, S_2) \rightarrow [S_1, S_2] = S_1 S_2 - S_2 S_1$$

ile tanımlı olsun.

Bu durumda,

$$S_1 \leftrightarrow \{ \vec{\omega}_1, \vec{v}_1 \}, S_2 \leftrightarrow \{ \vec{\omega}_2, \vec{v}_2 \}, [S_1, S_2] \leftrightarrow \{ \vec{\omega}, \vec{v} \} \text{ için,}$$

$$\{ \vec{\omega}, \vec{v} \} = \{ \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{\omega}_2 \} \text{ dir.}$$

İspat : $\vec{\omega}_1, \vec{v}_1, \vec{\omega}_2, \vec{v}_2 \in R^3$ için,

$$\vec{\omega}_1 = (x_1, x_2, x_3), \vec{\omega}_2 = (y_1, y_2, y_3), \vec{v}_1 = (a_1, a_2, a_3), \vec{v}_2 = (b_1, b_2, b_3) \text{ olsun.}$$

Bu durumda,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & a_1 \\ x_3 & 0 & -x_1 & a_2 \\ -x_2 & x_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 & b_1 \\ y_3 & 0 & -y_1 & b_2 \\ -y_2 & y_1 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

$$[S_1, S_2] = S_1 S_2 - S_2 S_1 \text{ olduğundan}$$

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} -x_3 y_3 - x_2 y_2 & x_2 y_1 & x_3 y_1 & -x_3 b_2 + x_2 b_3 \\ x_1 y_2 & -x_3 y_3 - x_1 y_1 & x_3 y_2 & x_3 b_1 - x_1 b_3 \\ x_1 y_3 & x_2 y_3 & -x_2 y_2 - x_1 y_1 & -x_2 b_1 + x_1 b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_3 y_3 - x_2 y_2 & x_1 y_2 & x_1 y_3 & -a_2 y_3 + a_3 y_2 \\ x_2 y_1 & -x_3 y_3 - x_1 y_1 & x_2 y_3 & a_1 y_3 - a_3 y_1 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & -x_2 y_2 - x_1 y_1 & -a_1 y_2 + a_2 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -(x_1 y_2 - x_2 y_1) & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_2 b_3 - x_3 b_2 + a_2 y_3 - a_3 y_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 & -(x_2 y_3 - x_3 y_2) & x_3 b_1 - x_1 b_3 + a_3 y_1 - a_1 y_3 \\ -(x_3 y_1 - x_1 y_3) & x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & x_1 b_2 - x_2 b_1 + a_1 y_2 - a_2 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_1, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (x_2 b_3 - x_3 b_2, x_3 b_1 - x_1 b_3, x_1 b_2 - x_2 b_1)$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{\omega}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (a_2 y_3 - a_3 y_2, a_3 y_1 - a_1 y_3, a_1 y_2 - a_2 y_1)$$

son iki eşitlikten

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{\omega}_1 \times \vec{v}_2 = (x_2 b_3 - x_3 b_2 + a_2 y_3 - a_3 y_2, x_3 b_1 - x_1 b_3 + a_3 y_1 - a_1 y_3, x_1 b_2 - x_2 b_1 + a_1 y_2 - a_2 y_1)$$

yazılabilir ve ilk eşitlikten,

$$\{ \vec{\omega}, \vec{v} \} = \{ \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{\omega}_2 \} \text{ eşitliği elde edilir.}$$

Tanım 4.1.5 : se(3) Lie cebirinin baz vektörlerinin bracket çarpımı,

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^6 C_{ij}^k L_k$$

şeklinde tanımlanır. Burada C_{ij}^k katsayılarına Lie cebirinin yapı sabitleri denir.

C_{ij}^k yapı sabitleri için, $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ bağıntısı vardır (Sattinger and Weaver 1993).

Yapı sabitleri hesaplandığında,

$$C_{11}^1 = C_{11}^2 = C_{11}^3 = C_{11}^4 = C_{11}^5 = C_{11}^6 = 0$$

$$C_{12}^3 = 1, C_{12}^1 = C_{12}^2 = C_{12}^4 = C_{12}^5 = C_{12}^6 = 0$$

$$C_{13}^2 = -1, C_{13}^1 = C_{13}^3 = C_{13}^4 = C_{13}^5 = C_{13}^6 = 0$$

$$\begin{aligned}
C_{14}^1 &= C_{14}^2 = C_{14}^3 = C_{14}^4 = C_{14}^5 = C_{14}^6 = 0 \\
C_{15}^6 &= 1, \quad C_{15}^1 = C_{15}^2 = C_{15}^3 = C_{15}^4 = C_{15}^5 = 0 \\
C_{16}^5 &= -1, \quad C_{16}^1 = C_{16}^2 = C_{16}^3 = C_{16}^4 = C_{16}^6 = 0 \\
C_{22}^1 &= C_{22}^2 = C_{22}^3 = C_{22}^4 = C_{22}^5 = C_{22}^6 = 0 \\
C_{23}^1 &= 1, \quad C_{23}^2 = C_{23}^3 = C_{23}^4 = C_{23}^5 = C_{23}^6 = 0 \\
C_{24}^6 &= -1, \quad C_{24}^1 = C_{24}^2 = C_{24}^3 = C_{24}^4 = C_{24}^5 = 0 \\
C_{25}^1 &= C_{25}^2 = C_{25}^3 = C_{25}^4 = C_{25}^5 = C_{25}^6 = 0 \\
C_{26}^4 &= 1, \quad C_{26}^1 = C_{26}^2 = C_{26}^3 = C_{26}^5 = C_{26}^6 = 0 \\
C_{33}^1 &= C_{33}^2 = C_{33}^3 = C_{33}^4 = C_{33}^5 = C_{33}^6 = 0 \\
C_{35}^4 &= -1, \quad C_{35}^1 = C_{35}^2 = C_{35}^3 = C_{35}^5 = C_{35}^6 = 0 \\
C_{36}^1 &= C_{36}^2 = C_{36}^3 = C_{36}^4 = C_{36}^5 = C_{36}^6 = 0 \\
C_{44}^1 &= C_{44}^2 = C_{44}^3 = C_{44}^4 = C_{44}^5 = C_{44}^6 = 0 \\
C_{45}^1 &= C_{45}^2 = C_{45}^3 = C_{45}^4 = C_{45}^5 = C_{45}^6 = 0 \\
C_{46}^1 &= C_{46}^2 = C_{46}^3 = C_{46}^4 = C_{46}^5 = C_{46}^6 = 0 \\
C_{55}^1 &= C_{55}^2 = C_{55}^3 = C_{55}^4 = C_{55}^5 = C_{55}^6 = 0 \\
C_{56}^1 &= C_{56}^2 = C_{56}^3 = C_{56}^4 = C_{56}^5 = C_{56}^6 = 0 \\
C_{66}^1 &= C_{66}^2 = C_{66}^3 = C_{66}^4 = C_{66}^5 = C_{66}^6 = 0
\end{aligned}$$

4.2 SE(3) Lie Grubu Üzerinde İnvaryant Vektör Alanları

Bu bölümde, SE(3) Lie grubu için sol ve sağ invaryant vektör alanlar tanımlanacaktır.

Tanım 4.2.1 : SE(3) üzerindeki bir X diferensiyellenebilir vektör alanı, se(3) ün bir S elemanının soldan ötelenmesi ile elde edilebilir. Bu durumda, X vektör alanının keyfi bir $A \in \text{SE}(3)$ noktasındaki değeri,

$$X(A) = \hat{S}(A) = AS \quad (*)$$

ile verilebilir. Bu eşitlikle elde edilen X vektör alanına bir **sol invaryant** vektör alanı denir. Burada $\hat{S}$, S Lie cebiri elemanının soldan ötelenmesiyle elde edilen vektör alanını göstermek için kullanılmıştır (Zefran et al. 1999).

Benzer şekilde, bir Y **sağ invaryant** vektör alanı da, $se(3)$ ün bir S elemanının $B \in SE(3)$ ile sağdan ötelenmesiyle

$$Y(B) = \hat{S}(B) = SB$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 4.2.2 : $(*)$ ifadesinden sol invaryant vektör alanların uzayı $se(3)$ e izomorftur.

Özel olarak, $T_A SE(3)$ üzerindeki bracket çarpımı,

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j \right] = \sum_{k=1}^6 C_{ij}^k \hat{L}_k$$

ile tanımlanabilir (do Carmo 1992).

$\{ L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 \}$ kümesi $se(3)$ için bir baz olduğundan $A \in SE(3)$ olmak üzere

$\{ \hat{L}_1(A), \hat{L}_2(A), \hat{L}_3(A), \hat{L}_4(A), \hat{L}_5(A), \hat{L}_6(A) \}$ kümesi de $T_A SE(3)$ tanjant uzayı için bir bazdır.

Bu yüzden herhangi bir X vektör alanı,

$$X = \sum_{i=1}^6 X^i \hat{L}_i$$

ile ifade edilebilir. Burada, X^i katsayıları manifold üzerinde değişmektedir. Eğer bu katsayılar sabitse, X bir sol invaryant vektör alanı olur. $\omega = [X_1, X_2, X_3]^T$ ve

$v = [X_4, X_5, X_6]^T$ olarak tanımlanırsa $\{ \vec{\omega}, \vec{v} \}$ vektör çifti keyfi bir X vektör alanıyla eşlenebilir (Zefran et al. 1999).

$se(3)$ Lie cebiri ve $A \in SE(3)$ olmak üzere $T_A SE(3)$ tanjant uzayı için bazı yapısal özellikler verildikten sonra, şimdi de $SE(3)$ Lie grubu üzerindeki Riemann metrikleri tanımlanacak ve invaryant olup olmadıkları araştırılacaktır.

4.3 $SE(3)$ Lie Grubu Üzerinde Riemann Metrikleri

Tanım 4.3.1 : Bir diferensiyellenebilir manifold üzerindeki her bir noktadaki tanjant uzayı üzerinde, pozitif tanımlı, bi-lineer ve simetrik olarak tanımlanan bir forma (iç çarpıma) **Riemann metriği**, bu manifoldda da Riemann manifoldu denir (do Carmo 1992).

Eğer bu form non-dejenere ise yani,

$$\forall V_1(A) \in T_A SE(3) \text{ için } \langle V_1(A), V_2(A) \rangle_A = 0 \Rightarrow V_2(A) = 0$$

ise, elde edilen metriğe **Semi-Riemann metrik** denir.

Şimdi $se(3)$ üzerindeki iç çarpımı tanımlayalım.

Tanım 4.3.2 : $S_1, S_2 \in se(3)$ olmak üzere, $se(3)$ üzerindeki iç çarpım,

$$\langle S_1, S_2 \rangle_I = s_1^T W s_2$$

ile tanımlıdır. Burada s_1, s_2 sırasıyla S_1, S_2 ye karşılık gelen 6×1 vektörler ve W da pozitif tanımlı bir matristir (Zefran *et al.* 1999).

Tanım 4.3.3 : V_1 ve V_2 $SE(3)$ ün herhangi bir noktasındaki tanjant vektörler olmak üzere $T_A SE(3)$ tanjant uzayı üzerindeki iç çarpım,

$$\langle V_1, V_2 \rangle_A = \langle A^{-1}V_1, A^{-1}V_2 \rangle_I \dots \quad (1)$$

ile tanımlanabilir.

Tanım 4.3.4 : Herhangi X ve Y vektör alanları ve $A, B \in SE(3)$ için,

$$\langle X(B), Y(B) \rangle_B = \langle AX(B), AY(B) \rangle_{AB}$$

ise metrik sol invaryant,

$$\langle X(B), Y(B) \rangle_B = \langle X(B)A, Y(B)A \rangle_{BA}$$

ise metrik sağ invaryanttır (Zefran *et al.* 1999).

Teorem 4.3.1 : do Carmo'ya (1992) göre (1) ile tanımlanan metrik sol invaryanttır (Zefran *et al.* 1999).

İspat : $A, B \in SE(3)$ olmak üzere, $V_1 = \dot{X}_1(0)$, $V_2 = \dot{X}_2(0)$ ise,

$$\langle V_1(B), V_2(B) \rangle_B = \langle AV_1(B), AV_2(B) \rangle_{AB} \quad (?)$$

$$\begin{aligned} \langle AV_1(B), AV_2(B) \rangle_{AB} &= \langle (AB)^{-1} AV_1(B), (AB)^{-1} AV_2(B) \rangle_I \\ &= \langle B^{-1} V_1(B), B^{-1} V_2(B) \rangle_I \\ &= \langle V_1(B), V_2(B) \rangle_B \end{aligned}$$

Dolayısıyla verilen metrik sol invaryanttır.

Teorem 4.3.2 : $\langle V_1, V_2 \rangle_A = \langle V_1 A^{-1}, V_2 A^{-1} \rangle_I$ ile tanımlanan metrik sağ invaryanttır.

İspat : $A, B \in SE(3)$ olmak üzere, $V_1 = \dot{X}_1(0)$, $V_2 = \dot{X}_2(0)$ ise,

$$\begin{aligned} \langle V_1(B), V_2(B) \rangle_B &= \langle V_1(B)A, V_2(B)A \rangle_{BA} \quad (?) \\ \langle V_1(B)A, V_2(B)A \rangle_{BA} &= \langle V_1(B)A(BA)^{-1}, V_2(B)A(BA)^{-1} \rangle_I \\ &= \langle V_1(B)B^{-1}, V_2(B)B^{-1} \rangle_I \\ &= \langle V_1(B), V_2(B) \rangle_B \end{aligned}$$

Dolayısıyla verilen metrik sağ invaryanttır.

5. LİE GRUPLARI ÜZERİNDE SOL İNVARİYANT METRİKLERİN EĞRİLİKLERİ

5.1 Kesitsel Eğrilik

Bu bölümde Milnor'un (1976) sol invariant metriklerin eğrilikleri ile ilgili çalışmasında elde ettiği bulgular incelenecektir.

Bir noktada bir Riemann manifoldunun eğriliği, bi-kuadratik eğrilik fonksiyonu

$$\kappa(x, y) = \langle R_{xy}x, y \rangle$$

ile tanımlanabilir. Burada x ve y verilen noktada değişen tanjant vektörler ve R de Riemann eğrilik tensörüdür.

Önerme 5.1.1 : M bir semi-Riemann manifold ve $x, y, z, v, w \in T_p(M)$ ise R için

$$R_{xy} = -R_{yx}$$

$$\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$$

$$R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$$

$$\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$$

dir(O'neill 1983).

$$R_{xy} : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$$

$z \rightarrow R_{xy}z = \nabla_{[x,y]}z - \nabla_x \nabla_y z + \nabla_y \nabla_x z$ dir. Burada, ∇ Riemann konneksiyonudur.

Verilen $\kappa(x,y)$ fonksiyonu bir Riemann metriği için eğrilik fonksiyonudur.

$$\Leftrightarrow$$

$\kappa(x,y)$, x ve y nin fonksiyonu olarak simetrik ve bi-kuadrattır.

u ve v ortogonal birim vektörler $[\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2 = 1]$ ise, $K = \kappa(x,y)$ sayısına u ve v tarafından gerilen 2-boyutlu tanjant düzlemin **kesitsel eğriliği** denir.

Sol invaryant metrikle birlikte verilmiş bir Lie grubunu çalışmanın en iyi yolu sol invaryant vektör alanların bir $e_1, \dots, e_n$ bazını seçmektir. O halde, Lie cebiri yapısını α_{ijk} yapı sabitlerinin bir $n \times n \times n$ dizisiyle tanımlamak mümkündür. Burada,

$$[e_i, e_j] = \sum_k \alpha_{ijk} e_k$$

ya da $\alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle$ dir ve bu dizi ilk iki indise göre anti-simetriktir.

Bu durumda, κ eğrilik fonksiyonu α_{ijk} nın bir komplike kuadratik fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

Lemma 5.1.1 : α_{ijk} lar yardımıyla $\kappa(e_1, e_2)$ kesitsel eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa(e_1, e_2) = & \sum_k \frac{1}{2} \alpha_{12k} (-\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} + \alpha_{k12}) \\ & - \frac{1}{4} (\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})(\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} - \alpha_{k12}) - \alpha_{k11} \alpha_{k22} \dots \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

şeklinde verilebilir.

Bu açık ifade gösteriyor ki; eğrilik, Lie cebiri ve onun metriği yardımıyla tamamen hesaplanabilir. α_{ijk} -lar sıfırken eğrilik de sıfırdır.

G bir sol invaryant metrikle birlikte verildiğinde, u da g Lie cebirinde bir vektör olsun.

Lemma 5.1.2 : $\text{ad}(u)$ lineer dönüşümü skew-adjoint ise $\kappa(u, v) \geq 0$ dir. ($\forall v \in \mathfrak{g}$)

İspat : Genelliği bozmadan u ve v yi ortonormal kabul edelim. $e_1 = u$ ve $e_2 = v$ ile birlikte bir $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal bazı seçildiğinde $\text{ad}(e_1)$ in skew-adjoint olması, $i = 1$ için α_{ij} dizisinin son iki terimine göre anti-simetrik olması anlamına gelir.

O halde (5.1.1) formülünden

$$\kappa(e_1, e_2) = \sum_k \frac{(\alpha_{2k1})^2}{4} \text{ olur. Dolayısıyla, } \kappa(e_1, e_2) \geq 0 \text{ dir.}$$

Tanım 5.1.1 : G grubunun tüm elemanlarının sırasının değiştirilmesiyle oluşan, $C(G)$ kümesine G grubunun merkezi denir.

$$C(G) = \{g \in G : g'g = gg', \forall g' \in G\}$$

dir (Avramidi 2000).

Sonuç 5.1.1 : Eğer u vektörü $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin merkezine aitse herhangi bir sol invaryant metrik için, $\kappa(u, v) \geq 0$ ($\forall v \in \mathfrak{g}$) sağlanır.

İspat : Eğer u , merkez elemanı ise $\text{ad}(u) = 0$ dir ve sıfır dönüşümü skew-adjointtir.

Sonuç 5.1.2 : Her kompakt Lie grubu bütün kesitsel eğrilikleri $K \geq 0$ olacak şekilde bir sol invaryant (aslında bi-invaryant) metriğe sahiptir.

Eğer yukarıdaki eşitsizlik, $K > 0$ olacak biçimde kesinleştirilirse ($K = 0$ durumu çıkarılırsa) bu koşulu sağlayan çok az Lie grubu olur.

Yüksek boyutlu olan Lie gruplarını anlamamanın en kolay yolu, **flat** olan bir anlamda K kesitsel eğriliği özdeş olarak sıfır olan ($K \equiv 0$) Riemann manifoldlarını incelemektir.

Bir sol invaryant metrik için flatlık şartı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\text{Bir Lie cebiri değişmelidir} \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] = 0$$

g Lie cebiri değişmeli ise $\alpha_{i j k}$ Lie cebiri yapı sabitleri $\alpha_{i j k} = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle$ eşitliğinden sıfır olurlar. Dolayısıyla (5.1.1) eşitliğinden her sol invaryant metrik flattir.

5.2 Ricci Eğriliği

Bir Riemann manifoldunun bir noktasındaki eğriliğinin tanımı $r(x)$ kuadratik formu ile verilir. Bu form x tanjant vektörünün

$$r(x) = \sum_i \kappa(x, e_i) = \sum_i \langle R(x, e_i)x, e_i \rangle \quad \text{formülüyle tanımlanan reel değerli bir}$$

fonksiyonudur. Burada κ bi-kuadratik eğrilik fonksiyonu ve $e_1, \dots, e_n$ tanjant uzayı için ortonormal bazdır. Eğer u bir birim vektör ise o halde $r(u)$ -ya u yönündeki **Ricci eğriliği** denir.

Hesaplamalarda kolaylık sağladığı için self-adjoint $\hat{r}$ Ricci dönüşümüyle çalışmak daha uygundur.

$$\hat{r}(x) = \sum_i R(e_i, x)e_i$$

dir.

Bu durumda, $r(x)$ ile $\hat{r}(x)$ arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \langle \hat{r}(x), x \rangle &= \left\langle \sum_i R(e_i, x)e_i, x \right\rangle \\ &= \sum_i -\langle R(x, e_i)e_i, x \rangle \quad (\text{R nin ilk özeliğinden}) \\ &= \sum_i \langle R(x, e_i)x, e_i \rangle \quad (\text{R nin ikinci özeliğinden}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \kappa(x, e_i) \\
&= r(x)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\hat{r}$ nin eigen değerlerine **asli Ricci eğrilikleri** denir.

Lemma 5.2.1 : $\text{ad}(u)$ lineer dönüşümü skew-adjoint ise $r(u) \geq 0$ dir.

İspat : $r(u)$ kesitsel eğriliklerin toplamı olduğundan ve Lemma 5.1.2 den $r(u) \geq 0$ dir.

Lemma 5.2.2 : $r(u) = 0 \Leftrightarrow \text{ad}(u)$ lineer dönüşümü skew-adjoint dir.

Eğer u, g nin merkezine aitse $r(u) \geq 0$ dır.

Teorem 5.2.1 : G Lie grubunun Lie cebiri, $[x, y] = z$ olacak biçimde lineer bağımsız vektörler içeriyorsa, $r(x) < 0$ ve $r(z) > 0$ olacak biçimde bir sol invaryant metrik vardır.

İspat : $b_1 = x, b_2 = y, b_3 = z$ ile birlikte sabit bir $b_1, \dots, b_n$ bazını seçelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $e_1 = \varepsilon b_1, e_2 = \varepsilon b_2$ ve $e_i = \varepsilon^2 b_i$ ($i \geq 3$) ile tanımlanan $e_1, \dots, e_n$ yardımcı bazını dikkate alalım. $e_1, \dots, e_n$ in ortonormal olmasını gerektiren bir sol invaryant metrik tanımlayalım. g_ε bu özel metrik ve özel ortonormal bazla verilen g Lie cebirini gösterebiliriz. $[e_i, e_j] = \sum_k \alpha_{ijk} e_k$ yapısını kurarsak α_{ijk} yapı sabitleri açık bir şekilde ε nun fonksiyonu olurlar. Şimdi $\varepsilon \rightarrow 0$ limit durumunu dikkate alalım. Bu durumda her bir α_{ijk} iyi tanımlı bir limite sahip olurlar. Bu yüzden verilen metrik ve verilen ortonormal baz ile birlikte bir g_0 limit Lie cebirini elde ederiz. Ayrıca g_0 daki bracket çarpım, $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$ ile aksi takdirde $[e_i, e_j] = 0$ ile verilir.

Lemma 5.2.1 ve lemma 5.2.2 den,

$r(e_1) < 0 < r(e_3)$ g_0 içinde sağlanır.

Yapı sabitlerini değiştirdiğimiz için bu Ricci eğrilikleri de değişecektir. Bu yüzden ε yeterince sıfıra yakınken $r(e_1) < 0 < r(e_3)$ elde edilir.

Teorem 5.2.2 : Aşağıdaki 3-boyutlu Lie gruplarının her biri, bir flat sol invaryant Lorentz metriğine sahiptir.

1) $E(2)$; 2-boyutlu Öklid uzayının katı hareketlerinin grubu

2) $E(1,1)$; 2-boyutlu Minkowski uzayının katı hareketlerinin grubu

3) $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ formundaki tüm reel matrislerden oluşan Heisenberg grubu

(Nomizu 1979).

İspat : Öncelikle her bir Lie grubu için Lie cebirini ve bu grup üzerinde bir flat sol invaryant Lorentz metrik tanımlı olacak biçimdeki Lorentz iç çarpımını tanımlayalım.

E(2): Bu grup, $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & a \\ \sin \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

şeklindeki matrislerden oluşur.

Lie cebiri ise, $[x, y] = 0$, $[z, x] = y$, $[y, z] = x$ olacak biçimde,

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

den oluşan bir baza sahiptir.

$\langle z, z \rangle = -1$, $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$, $\langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle = \langle x, y \rangle = 0$ olacak biçimde bir Lorentz iç çarpımı tanımlayalım.

Bu durumda,

$$\nabla_x x = \nabla_x y = \nabla_y x = \nabla_x z = \nabla_y y = \nabla_y z = \nabla_z z = 0$$

ve

$$\nabla_z x = y, \quad \nabla_z y = -x$$

olur.

Buradan,

$$R(x, y) = R(y, z) = R(z, x) = 0$$

elde edilir, yani metrik flattir.

E(1,1): Bu grup,

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & a \\ \sinh t & \cosh t & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrislerden oluşur.

Lie cebiri ise, $[x, y] = 0$, $[z, x] = y$, $[z, y] = x$ olacak biçimde,

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

den oluşan bir baza sahiptir.

$\langle x, x \rangle = \langle z, z \rangle = 1$, $\langle y, y \rangle = -1$, $\langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle = \langle x, y \rangle = 0$ olacak biçimde bir Lorentz iç çarpımı tanımlayalım.

Bu durumda,

$$\nabla_x = 0, \quad \nabla_y = 0, \quad \nabla_z x = y, \quad \nabla_z y = x, \quad \nabla_z z = 0$$

olur.

Buradan,

$$R(x, y) = R(y, z) = R(z, x) = 0$$

elde edilir, yani metrik flattir.

Heisenberg grubunun Lie cebiri, $[x, y] = z$, $[z, x] = [z, y] = 0$ olacak biçimde,

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

den oluşan bir baza sahiptir.

Lorentz iç çarpımı,

$$\langle z, z \rangle = \langle x, x \rangle = 0, \quad \langle z, x \rangle = -1$$

$$\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle = 0, \quad \langle y, y \rangle = 1$$

şeklinde tanımlanırsa,

Bu durumda,

$$\nabla_x x = y, \quad \nabla_x y = z, \quad \nabla_x z = 0$$

$$\nabla_y x = \nabla_y y = \nabla_y z = \nabla_z x = \nabla_z y = \nabla_z z = 0$$

olur.

ve sonuç olarak

$$R(x, y) = R(y, z) = R(z, x) = 0$$

elde edilir, yani metrik flattir.

5.3 Skalar Eğrilik

Herhangi bir $e_1, \dots, e_n$ ortonormal bazı seçildiğinde, bir Riemann manifoldunun herhangi bir noktasındaki tanjant vektörler için,

$$\rho = r(e_1) + \dots + r(e_n) = 2 \sum_{i < j} k(e_i, e_j)$$

reel sayısına bu noktadaki **skalar eğrilik** denir.

5.4 SO(3) Lie Grubu İçin Kesitsel Eğrilik Hesabı

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3) \text{ olmak üzere, } \mathfrak{so}(3) \text{ ün standart bazı,}$$

$$\Omega = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= ax + by + cz$$

$$\Rightarrow \mathfrak{so}(3) = \text{Sp}\{x, y, z\} \text{ dir.}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[x, y] = xy - yx$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= z$$

$$[y, z] = yz - zy$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x$$

$$[z, x] = zx - xz$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= y$$

Bu durumda $[x, y] = z, [y, z] = x, [z, x] = y$ dir. Şimdi $SO(3)$ ün standart metriği için kesitsel eğrilikleri hesaplayalım.

Kesitsel eğrilik fonksiyonu , $\kappa(x, y) = \langle R_{xy}x, y \rangle$ şeklinde tanımlanmıştı.

R Riemann eğrilik tensörü x, y, z tanjant vektörleri için,

$$R_{xy}z = \nabla_{[x,y]}z - \nabla_x \nabla_y z + \nabla_y \nabla_x z \text{ idi.}$$

$SO(3)$ Lie grubu kompakt olduğundan üzerinde bir bi-invaryant metrik vardır. Bir Lie grubu üzerinde bi-invaryant metrik bulunması durumunda y nin x yönünde kovaryant türevinin,

$$\nabla_x y = \frac{1}{2}[x, y]$$

ile hesaplanabileceği 3. bölümde gösterilmişti. Bu durumda,

$$R_{xy}x = \nabla_{[x,y]}x - \nabla_x \nabla_y x + \nabla_y \nabla_x x$$

$$\nabla_x x = \frac{1}{2}[x, x] = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$R_{xy}x = \nabla_{[x,y]}x - \nabla_x \nabla_y x$$

dir.

$$[x, y] = z \text{ ve } \nabla_y x = \frac{1}{2}[y, x] \text{ olduğundan,}$$

$$R_{xy}x = \nabla_z x - \nabla_x \frac{1}{2}[y, x]$$

$$= \nabla_z x + \frac{1}{2} \nabla_x z \quad ([y, x] = -z)$$

$$= \frac{y}{2} - \frac{y}{4} \quad (\nabla_x z = \frac{1}{2}[x, z] = -\frac{y}{2})$$

$$= \frac{y}{4}$$

Benzer şekilde,

$$R_{yz}y = \nabla_{[y,z]}y - \nabla_y \nabla_z y$$

$$= \nabla_x y - \nabla_y \frac{1}{2}[z, y]$$

$$= \nabla_x y + \frac{1}{2} \nabla_y x$$

$$= \frac{z}{2} - \frac{z}{4} = \frac{z}{4}$$

Benzer şekilde,

$$R_{zx}z = \frac{x}{4}$$

dir.

Bu durumda,

$$\kappa(x, y) = \langle R_{xy}x, y \rangle$$

$$= \left\langle \frac{y}{4}, y \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4} \langle y, y \rangle$$

dir.

$\forall \Omega \in so(3)$ anti-simetrik matrisine bir $\omega \in R^3$ vektörü karşılık geldiğinden,

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in so(3) \leftrightarrow y = (0,1,0) \in R^3 \text{ dür. Dolayısıyla } so(3) \text{ üzerindeki norm}$$

Öklid normu olur.

Bu yüzden,

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{4} \langle y, y \rangle$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\kappa(y, z) = \frac{1}{4} \langle z, z \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \quad (z = (0,0,1) \text{ olduğundan})$$

$$\kappa(z, x) = \frac{1}{4} \langle x, x \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \quad (x = (1,0,0) \text{ olduğundan})$$

dir.

Sonuç 5.1.2 den kompakt Lie grubu üzerindeki bir bi-invaryant metriğin bütün kesitsel eğrilikleri $\kappa \geq 0$ idi. Fakat burada $SO(3)$ Lie grubu için bütün kesitsel eğriliklerin pozitif olduğunu gördük. Çünkü $\kappa = 0$ ancak **değişmeli gruplar** için mevcut idi. Ancak $SO(3)$ Lie grubu bir matris Lie grubu olduğundan ve matris çarpımı değişmeli olmadığından κ sıfır olamaz.

6. SO(3) ve SE(3) ÜZERİNDE Bİ-INVARYANT METRİKLERİN VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI

6.1 SO(3) Üzerinde Bi-invaryant Metriğin Varlığı

so(3) Lie cebiri için,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \text{so}(3) \text{ olmak üzere,}$$

$$\Omega = ax + by + cz; \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y \text{ idi.}$$

so(3) Lie cebiri için adjoint dönüşüm $x \in \text{so}(3)$ olmak üzere,

$$\text{ad}_x : \text{so}(3) \rightarrow \text{so}(3)$$

$$y \rightarrow \text{ad}_x y = [x, y]$$

ile tanımlıdır.

Şimdi SO(3) Lie grubu üzerinde bi-invaryant metrik olup olmadığını araştıralım.

Bir Lie grubu üzerinde bi-invaryant metrik olabilmesi için, adjoint dönüşümün skew-adjoint olması gerekir. ($x \in \text{so}(3)$ iken $\text{ad}_x^* = -\text{ad}_x$)

O halde,

$\Omega = ax + by + cz \in \text{so}(3)$ için, adjoint dönüşümü bulalım.

$$\begin{aligned} \text{ad}_\Omega x &= [\Omega, x] \\ &= [ax + by + cz, x] \\ &= a[x, x] + b[y, x] + c[z, x] \\ &= cy - bz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_{\Omega}y &= [\Omega, y] \\
&= [ax + by + cz, y] \\
&= a[x, y] + b[y, y] + c[z, y] \\
&= -cx + az
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_{\Omega}z &= [\Omega, z] \\
&= [ax + by + cz, z] \\
&= a[x, z] + b[y, z] + c[z, z] \\
&= bx - ay
\end{aligned}$$

Bu durumda adjoint dönüşümün matris temsili ,

$$[ad_{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$[ad_{\Omega}]^* = ([ad_{\Omega}])^T$ olduğundan,

$$[ad_{\Omega}]^* = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -[ad_{\Omega}]$$

Bu yüzden $SO(3)$ Lie grubu üzerinde bir bi-invariant metrik vardır.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $SO(3)$ üzerinde standart bi-invariant Riemann metriği olsun. Bu takdirde $\theta(0) = \theta_1$ ve $\theta(1) = \theta_2$ ile birlikte bir $\theta : [0,1] \rightarrow SO(3)$ eğrisi verildiğinde,

$$\begin{aligned} \langle \dot{\theta}, \dot{\theta} \rangle^{\frac{1}{2}} &= \left\| \theta^{-1} \dot{\theta} \right\| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\theta^{-1} \dot{\theta} \right) \left(\theta^{-1} \dot{\theta} \right)^T} \end{aligned}$$

dir (Park 1995).

θ yerine Ω alıp bu eşitliği elde edelim.

$\Omega \in \mathfrak{so}(3)$ olsun.

$$\Omega \in \mathfrak{so}(3) \Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Omega \Omega^T = \Omega(-\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & - & - \\ - & \omega_1^2 + \omega_3^2 & - \\ - & - & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{iz}(\Omega \Omega^T) = 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{iz}(\Omega \Omega^T) = \|\omega\|^2$$

$$\Rightarrow \|\omega\| = \left[\frac{1}{2} \text{iz}(\Omega \Omega^T) \right]^{\frac{1}{2}}$$

dir.

Teorem 6.1.1 : $A_1, A_2 \in SO(3)$ olmak üzere, $d(A_1, A_2) = L$ ise

$d: SO(3) \times SO(3) \rightarrow R$

$$(A_1, A_2) \rightarrow d(A_1, A_2) = L = \| \text{Log}(A_1^{-1} A_2) \|$$

şeklinde tanımlanan d metriği $SO(3)$ için standart bi-invaryant metriktir.

İspat : $A: [0,1] \rightarrow SO(3)$

$$t \rightarrow A(t) = A_1 \exp(\Omega t), (\Omega \in \mathfrak{so}(3))$$

$A(0)=A_1, A(1)=A_2$ başlangıç koşuluyla verilen A eğrisi A_1 noktasını A_2 noktasına bağlayan eğriler içinde uzunluğu en kısa olanıdır.

$$A(1) = A_1 e^{\Omega} = A_2 \Rightarrow e^{\Omega} = A_1^{-1} A_2$$

$$\Rightarrow \Omega = \text{Log}(A_1^{-1} A_2)$$

$$\Rightarrow \|\omega\| = \|\text{Log}(A_1^{-1} A_2)\|$$

$$\| \dot{A}(t) \| = \| A^{-1} \dot{A} \| = \left[\frac{1}{2} \text{tr} \left(A^{-1} \dot{A} \left(A^{-1} \dot{A} \right)^T \right) \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\Omega \Omega^T) \right]^{1/2} = \|\omega\|$$

$$L = d(A_1, A_2) = \int_0^1 \| A^{-1} \dot{A} \| dt = \int_0^1 \|\omega\| dt = \|\omega\| = \|\text{Log}(A_1^{-1} A_2)\|$$

$$\| A^{-1} \dot{A} \| = \| \dot{A} A^{-1} \| = \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\Omega \Omega^T) \right]^{1/2} \text{ olduğu açıktır. Bu durumda,}$$

$$d(A_1, A_2) = \int_0^1 \|\dot{A}(t)\| dt$$

$$= \int_0^1 \|A^{-1} \dot{A}\| dt$$

$$= \int_0^1 \|\dot{A} A^{-1}\| dt$$

$$d(TA_1, TA_2) = \int_0^1 \|(T\dot{A})\| dt \quad (T \in SO(3))$$

$$= \int_0^1 \|(TA)^{-1} (T\dot{A})\| dt$$

$$= \int_0^1 \|A^{-1} \dot{A}\| dt$$

$$d(A_1 T, A_2 T) = \int_0^1 \|\dot{(AT)}\| dt \quad (T \in SO(3))$$

$$= \int_0^1 \|\dot{(AT)}(AT)^{-1}\| dt$$

$$= \int_0^1 \|A^{-1} \dot{A}\| dt$$

Bu son eşitliklerden, $d(A_1, A_2) = d(TA_1, TA_2) = d(A_1 T, A_2 T)$ olduğu görülür.

Dolayısıyla d metriği $SO(3)$ üzerinde standart bi-invariant metriktir.

6.2 SE(3) Üzerinde Bi-invaryant Metriğin Araştırılması

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 & v_1 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 & v_2 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(3) \text{ olmak üzere,}$$

$X = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6$ şeklinde yazılabilir. Burada $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ vektörleri $\mathfrak{se}(3)$ ün standart baz vektörleridir.

Şimdi, $\mathfrak{se}(3)$ üzerindeki adjoint dönüşümün matris temsilini bulalım.

$$\begin{aligned} ad_X L_1 &= [X, L_1] \\ &= [\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6, L_1] \\ &= \omega_1 [L_1, L_1] + \omega_2 [L_2, L_1] + \omega_3 [L_3, L_1] + v_1 [L_4, L_1] + v_2 [L_5, L_1] + v_3 [L_6, L_1] \\ &= 0L_1 + \omega_3 L_2 - \omega_2 L_3 + 0L_4 + v_3 L_5 - v_2 L_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad_X L_2 &= [X, L_2] \\ &= [\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6, L_2] \\ &= \omega_1 [L_1, L_2] + \omega_2 [L_2, L_2] + \omega_3 [L_3, L_2] + v_1 [L_4, L_2] + v_2 [L_5, L_2] + v_3 [L_6, L_2] \\ &= -\omega_3 L_1 + 0L_2 + \omega_1 L_3 - v_3 L_4 + 0L_5 + v_1 L_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad_X L_3 &= [X, L_3] \\ &= [\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6, L_3] \\ &= \omega_1 [L_1, L_3] + \omega_2 [L_2, L_3] + \omega_3 [L_3, L_3] + v_1 [L_4, L_3] + v_2 [L_5, L_3] + v_3 [L_6, L_3] \\ &= \omega_2 L_1 - \omega_1 L_2 + 0L_3 + v_2 L_4 - v_1 L_5 + 0L_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_X L_5 &= [X, L_4] \\
&= [\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6, L_4] \\
&= \omega_1 [L_1, L_4] + \omega_2 [L_2, L_4] + \omega_3 [L_3, L_4] + v_1 [L_4, L_4] + v_2 [L_5, L_4] + v_3 [L_6, L_4] \\
&= 0L_1 + 0L_2 + 0L_3 + 0L_4 + \omega_3 L_5 - \omega_2 L_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_X L_5 &= [X, L_5] \\
&= [\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6, L_5] \\
&= \omega_1 [L_1, L_5] + \omega_2 [L_2, L_5] + \omega_3 [L_3, L_5] + v_1 [L_4, L_5] + v_2 [L_5, L_5] + v_3 [L_6, L_5] \\
&= 0L_1 + 0L_2 + 0L_3 - \omega_3 L_4 + 0L_5 + \omega_1 L_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_X L_6 &= [X, L_6] \\
&= [\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_6, L_6] \\
&= \omega_1 [L_1, L_6] + \omega_2 [L_2, L_6] + \omega_3 [L_3, L_6] + v_1 [L_4, L_6] + v_2 [L_5, L_6] + v_3 [L_6, L_6] \\
&= 0L_1 + 0L_2 + 0L_3 + \omega_2 L_4 - \omega_1 L_5 + 0L_6
\end{aligned}$$

Bu durumda adjoint dönüşümün matris temsili,

$$[ad_X] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_3 & v_2 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Ω ve $[v] \in R_3^3$ anti-simetrik matrisler olmak üzere $[ad_X]$ matrisi kısaca

$$[ad_X] = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ [v] & \Omega \end{pmatrix}$$

şeklinde de gösterilebilir.

$[ad_x]^* = ([\bar{ad}_x])^T$ olduğundan,

$$[ad_x]^* = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & 0 & v_3 & -v_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & -v_3 & 0 & v_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & v_2 & -v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$[ad_x]^*$ matrisi kısaca

$$[ad_x]^* = \begin{pmatrix} -\Omega & -[v] \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir. Sonuç olarak,

$$[ad_x]^* \neq -[ad_x]$$

olduğundan SE(3) üzerinde bi-invaryant metrik yoktur.

KAYNAKLAR

Adolf, K. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie groups. Gordon and Breach Science Publishers, 422p., Montreux

Avramidi, I. 2000. Notes on Lie groups. 16 p., Usa

Belta, C.A. and Kumar, V. 2002. Euclidean metrics for motion generation on SE(3). Journal of Mechanical Engineering Science, 216(1); 47-60

do Carmo M.P. 1992. Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 325 p., Boston

Curtis, M.L. 1979. Matrix groups. Springer-Verlag, New York

Gallier, J. and Xu, D. 2002. Computing exponential of skew symmetric matrices and logarithm of orthogonal matrices. International Journal of Robotics and Automation, 17(4); 1-11

Hacısalıhoğlu, H.H. 1980. Yüksek diferensiyel geometriye giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 439 s.

Milnor, J. 1976. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. Advances In Mathematics, 21; 293-329

Nomizu, K. 1979. Left invariant Lorentz metrics on Lie groups. Osaka J. Math, 16; 143-150

O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York

Park, F.C. 1995. Distance metrics on the rigid body motions with applications to mechanism design. Journal of Mechanical Design, 117; 48-54

Sattinger, D.H. and Weaver, O.L. 1993. Lie groups and algebras with applications to physics, geometry and mechanics. Springer-Verlag, 215p., New-York

Zefran, M., Kumar, V. and Croke, C. 1999. Metrics and connections for rigid-body kinematics. The International Journal of Robotics Research, 18(2); 1-16

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Fatih DOĞAN

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 01.09.1982

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Fatih Sultan Mehmet Lisesi (1999)

Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2005)

Yüksek Lisans: Gazi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği (Tezsiz -2007)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi (2007-...)