

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İKİ-PARAMETRELİ SÜREKLİ LİNDLEY DAĞILIMI İÇİN PARAMETRE
TAHMİN YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ**

Buket ÜNSALAR

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2017**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Buket ÜNSALAR tarafından hazırlanan “İki Parametrelili Sürekli Lindley Dağılımı için Parametre Tahmin Yöntemlerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması 12./06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mehmet YILMAZ
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR
Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü



Üye : Prof. Dr. Mehmet YILMAZ
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Yrd. Doç. Dr. Sibel AÇIK KEMALOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

12/06/2017



Buket ÜNSALAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ PARAMETRELİ SÜREKLİ LİNDLEY DAĞILIMI İÇİN PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Buket ÜNSALAR

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

1958 yılında Lindley tarafından ortaya çıkarılan ve sonrasında da Ghitany (2008) tarafından detayları oluşturulan Lindley dağılımı, son yıllarda popülerlik kazanmıştır. Genellikle tek parametrelili olduğu durumda çalışmalara sıkça rastlanmaktadır, ancak dağılımın iki parametrelili olduğu durumda literatürde daha az çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda ise, parametre tahmin yöntemleri ya tamamı ile incelenmemiş ya da derinlemesine analizi yapılmamıştır. Bu nedenle, tez çalışmasında parametre tahmin yöntemleri ayrıntılı biçimde incelenecektir. Söz konusu çalışma, öncelikle 1958’den günümüze kadar Lindley Dağılımı, onun modifikasyonları ve kompozitlerinin ele alındığı çalışmaları tanıtmaya başlayacaktır. Öncelikle tek parametrelili Lindley dağılımından bahsedilecek, sonrasında iki parametrelili Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu, bozulma oranı, ortalama kalan ömür fonksiyonu tanıtılacak, parametre uzayındaki değerleri için grafik gösterimlere yer verilecektir. Daha sonra dağılım karakteristikleri olan beklenen değer, varyans, moment çıkaran fonksiyon, dağılımın çarpıklığı ve basıklığı verilecektir. Parametrelerin tahmini için momentler, en küçük kareler ve en çok olabilirlik yöntemleri incelenecektir. İncelenecek simülasyon çalışması ile üretilen veriler kullanılarak, hata kareler ortalamasına göre parametre tahmin metodlarının bir karşılaştırılması yapılacaktır. Simülasyonun yanısıra 100 adet gerçek veri seti üzerinde Kolmogorov-Smirnov istatistiği yardımı ile verilerin dağılıma uygunluğu Matlab programı yardımı ile test edilmiştir. Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICC), Bayes Bilgi Kriteri (BIC) ölçütler göz önüne alınarak, bu veri setlerini kullanan diğer yazarların önerdiği dağılımlar ile karşılaştırılması yapılacaktır. Söz konusu çalışmalar sonucunda, İki parametrelili Lindley dağılımının çeşitli veri setleri üzerinde uygunluğu incelenecek ve bilinen yaşam dağılımları dışında da iki parametrelili Lindley dağılımının kullanılabileceği tespit edilecektir.

Haziran 2017, 165 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lindley dağılımı, yaşam dağılımları, bozulma oranı, kalan ortalama ömür, momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler yöntemi

ABSTRACT

Master Thesis

THE INVESTIGATION OF PARAMETER ESTIMATION METHODS FOR TWO- PARAMETER CONTINUOUS LINDLEY DISTRIBUTION

Buket ÜNSALAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

Lindley distribution, which was introduced at 1958; developed by Ghitany at 2008, has become more popular since the last decade. In the literature researchers preferred using one variable version of Lindley distribution rather than the two variable version. Furthermore, the existing studies, with two variable distribution, are either lacks in-depth analysis or incomplete. Therefore, this research intends to analyse parameter estimation methods in detail. The introduction will highlight the previous studies about Lindley Distribution together with the modifications and composites since 1958. Firstly, one variable Lindley distribution will be examined. Secondly, two variable Lindley distribution will be examined in aspects of probability density function, distribution function, life function, decay rate, approximate life remain function with charts. Expected value which has distribution characteristics, variance, moment generating function, skewness and curtosis will be examined. The method of moments, least squares method and maximum likelihood method parameters will be used for the estimation of parameters. The data which is generated from simulations will be used to compare the average of the error mean square to parameter estimation methods. On 100 piece of data set, with help of Kolmogorov-Smirnov's statistics by appropriateness of data distribution is tested by Matlab program. Akaike Information Criteria (AIC), Connected Akaike Information Criteria (AICC), Bayes Information Criteria (BIC) are taken into consideration. The results will be compared with the rest of the studies in which the same data sets have been used. Lindley distribution have been researched on various data sets and the result is that the two-parameter Lindley distribution can be used except the well-known life distributions.

June 2017, 165 pages

Key Words: Lindley distribution, lifetime distributions, hazard rate, mean residual lifetime, method of moments, maximum likelihood method, least squares method.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda değerli zamanını ayırarak çalışma olanağı veren danışmanım Sayın Hocam Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı öğretim üyelerinden Prof. Dr. Mehmet YILMAZ'a, bilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyerek bana yol gösteren ve kendime örnek aldığım Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı öğretim üyelerinden Sayın Hocam Prof. Dr. Yılmaz AKDİ'ye, hayat boyu benden her türlü desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli büyüğüm Sayın Ali Cemal UYANIKER'e, bu süreç içerisinde yanımda olan dostlarıma ve yaşamımın her anında varlıklarından güç aldığım, maddi ve manevi desteklerini esirgemediği yanımda olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Buket ÜNSALAR
Ankara, Haziran 2017

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	6
2.1 Moment Tahmin Edicisi	6
2.2 En Küçük Kareler Yöntemi (EKK).....	6
2.3 En Çok Olabilirlik Yöntemi (EÇO).....	8
2.4 Yaşam Fonksiyonu.....	9
2.5 Bozulma Oranı	10
2.6 Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu	11
2.7 Newton-Raphson Yöntemi	11
2.8 Bayes Bilgi Kriteri (BIC: Bayes Information Criterion).....	13
2.9 Tahminin Standart Hatası – Hata Kareler Ortalamasının Karekökü (RMSE: Root Mean Square Error).....	13
2.10 Kolmogorov-Smirnov Testi.....	14
2.10.1 Kolmogorov-Smirnov tek örnek testi.....	14
3. TEK PARAMETRELİ LİNDLEY DAĞILIMI	16
3.1 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Momentleri	20
3.2 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Yaşam Fonksiyonu.....	22
3.3 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Bozulma Oranı	23
3.4 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahmin Yöntemleri	25
3.4.1 Tek parametrelili Lindley dağılımının parametre tahmini için moment tahmin edicisi.....	25
3.4.2 Tek parametrelili Lindley dağılımının parametre tahmini için en çok olabilirlik yöntemi (MLE)	26
3.4.3 Tek parametrelili Lindley dağılımının parametresi için en küçük kareler yöntemi (EKK)	27
4. İKİ PARAMETRELİ LİNDLEY DAĞILIMI	30
4.1 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu.....	36
4.2 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Yaşam Fonksiyonu	43
4.3 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Sayı Üretme Yöntemleri.....	44
4.3.1 Karma dağılım tekniği ile sayı üretme	45
4.3.2 Dağılım fonksiyonu tekniği ile sayı üretme (Newton-Raphson yardımıyla).....	47
4.4 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Bozulma Oranı ve Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu.....	49
4.5 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahmin Yöntemleri	52
4.5.1 İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için momentler yöntemi	52
4.5.2 İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için en küçük kareler yöntemi.....	60
4.5.3 İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi.....	64

5. VERİ SETİ ÜZERİNDE UYGULAMALAR	67
6. SONUÇ	150
KAYNAKLAR	158
EKLER	162
EK 1 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahminleri için Momentler Yöntemi Simülasyonunda kullanılan Matlab kodu	163
EK 2 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahminleri için En Küçük Kareler Yöntemi Simülasyonunda kullanılan Matlab kodu.....	164
ÖZGEÇMİŞ	165



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$F(x)$	Birikimli Dağılım Fonksiyonu
$f(x)$	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$S(x)$	Yaşam Fonksiyonu
$h(x)$	Bozulma Oranı
$m(x)$	Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu
$V(x)$	Varyans
μ_k	k. Merkezi Moment
β_1	Çarpıklık
β_2	Basıklık
μ'_k	k. Ham Moment

Kısaltmalar

AIC	Akaike Bilgi Kriteri
AICC	Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri
BIC	Bayes Bilgi Kriteri
EÇO	En Çok Olabilirlik
EKK	En Küçük Kareler
RMSE	Hata Kareler Ortalamasının Karekökü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	Tek parametrelili Lindley dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\theta=0,4$ değeri için grafiği	16
Şekil 3.2	Tek parametrelili Lindley dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\theta=0,9$ değeri için grafiği	17
Şekil 3.3	Tek parametrelili Lindley dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\theta=0,2$ değeri için grafiği	17
Şekil 3.4	Tek parametrelili Lindley dağılımının $\theta=3$ değeri için birikimli dağılım fonksiyonu grafiği	19
Şekil 3.5	Tek parametrelili Lindley dağılımının $\theta=5$ değeri için birikimli dağılım fonksiyonu grafiği	19
Şekil 4.1	İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3; \alpha=4, \alpha=8$ ve $\alpha=12$ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri	30
Şekil 4.2	İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta=3; \alpha=1$ ve $\alpha=4$ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri	31
Şekil 4.3	İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta=3; \alpha=4, \alpha=8$ ve $\alpha=12$ değerleri için birikimli dağılım fonksiyonu grafikleri	33
Şekil 4.4	İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta=3; \alpha=0,1, \alpha=1$ ve $\alpha=4$ değerleri için birikimli dağılım fonksiyonu grafikleri	33
Şekil 4.5	İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta=3; \alpha=0,1, \alpha=1, \alpha=4, \alpha=8$ ve $\alpha=12$ parametre değerleri için yaşam fonksiyonu grafikleri	44
Şekil 4.6	İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta=3; \alpha=0,1, \alpha=1, \alpha=4, \alpha=8$ ve $\alpha=12$ parametre değerleri için bozulma oranı grafikleri	50
Şekil 4.7	İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta=3; \alpha=0,1, \alpha=1, \alpha=4, \alpha=8$ ve $\alpha=12$ parametre değerleri için ortalama kalan ömür fonksiyonu grafikleri	52

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1	N=10 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)	57
Çizelge 4.2	N=50 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)	58
Çizelge 4.3	N=100 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)	58
Çizelge 4.4	N=200 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)	59
Çizelge 4.5	N=10 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (EKK), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken).....	62
Çizelge 4.6	N=50 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)	62
Çizelge 4.7	N=100 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (EKK), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken).....	63
Çizelge 4.8	N=200 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (EKK), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken).....	63
Çizelge 5.1	Güneş lekelerinin sayısal ilişkisi	68
Çizelge 5.2	Güneş lekelerinin sayısal ilişkisi model sonuçları.....	68
Çizelge 5.3	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları	70
Çizelge 5.4	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	70
Çizelge 5.5	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları.....	70
Çizelge 5.6	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	71
Çizelge 5.7	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları	71
Çizelge 5.8	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	71
Çizelge 5.9	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları	72
Çizelge 5.10	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	72
Çizelge 5.11	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları	72
Çizelge 5.12	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	72
Çizelge 5.13	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları	73
Çizelge 5.14	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	73
Çizelge 5.15	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları	73
Çizelge 5.16	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	74
Çizelge 5.17	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları	74

Çizelge 5.18	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	74
Çizelge 5.19	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları	74
Çizelge 5.20	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	75
Çizelge 5.21	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları	75
Çizelge 5.22	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	75
Çizelge 5.23	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları	75
Çizelge 5.24	16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	76
Çizelge 5.25	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları	76
Çizelge 5.26	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları model sonuçları	76
Çizelge 5.27	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları	76
Çizelge 5.28	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları	77
Çizelge 5.29	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları	77
Çizelge 5.30	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları	77
Çizelge 5.31	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları	77
Çizelge 5.32	20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları	78
Çizelge 5.33	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları	78
Çizelge 5.34	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	78
Çizelge 5.35	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları	78
Çizelge 5.36	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	79
Çizelge 5.37	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları	79
Çizelge 5.38	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	79
Çizelge 5.39	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları	79
Çizelge 5.40	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	80
Çizelge 5.41	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları	80
Çizelge 5.42	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	80
Çizelge 5.43	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları	80

Çizelge 5.44	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	81
Çizelge 5.45	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları	81
Çizelge 5.46	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	81
Çizelge 5.47	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları	81
Çizelge 5.48	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	82
Çizelge 5.49	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları	82
Çizelge 5.50	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	82
Çizelge 5.51	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları	83
Çizelge 5.52	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	83
Çizelge 5.53	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları	83
Çizelge 5.54	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	83
Çizelge 5.55	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları	84
Çizelge 5.56	16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	84
Çizelge 5.57	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları	84
Çizelge 5.58	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	84
Çizelge 5.59	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları	85
Çizelge 5.60	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	85
Çizelge 5.61	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları	85
Çizelge 5.62	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	85
Çizelge 5.63	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları	86
Çizelge 5.64	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	86
Çizelge 5.65	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları	86
Çizelge 5.66	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	86
Çizelge 5.67	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları	87
Çizelge 5.68	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları model sonuçları.....	87
Çizelge 5.69	20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları	87

Çizelge 5.70 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları model sonuçları	87
Çizelge 5.71 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları	88
Çizelge 5.72 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları model sonuçları	88
Çizelge 5.73 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları	88
Çizelge 5.74 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları	88
Çizelge 5.75 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları	89
Çizelge 5.76 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları	89
Çizelge 5.77 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları	89
Çizelge 5.78 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları	89
Çizelge 5.79 16-19 yaş arası erkeklerin, 16-19 yaş arası kadınların, 20 yaş ve üzeri erkeklerin ve 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki aylara göre işsizlik oranları model sonuçlarının karşılaştırılması	90
Çizelge 5.80 1956-1975 arası Mayıs ayı Kanada toplam işsizlik verileri	91
Çizelge 5.81 1956-1975 arası Mayıs ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	91
Çizelge 5.82 1956-1975 arası Haziran ayı Kanada toplam işsizlik verileri	92
Çizelge 5.83 1956-1975 arası Haziran ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	92
Çizelge 5.84 1956-1975 arası Temmuz ayı Kanada toplam işsizlik verileri	92
Çizelge 5.85 1956-1975 arası Temmuz ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	92
Çizelge 5.86 1956-1975 arası Ağustos ayı Kanada toplam işsizlik verileri	93
Çizelge 5.87 1956-1975 arası Ağustos ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	93
Çizelge 5.88 1956-1975 arası Eylül ayı Kanada toplam işsizlik verileri	93
Çizelge 5.89 1956-1975 arası Eylül ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	93
Çizelge 5.90 1956-1975 arası Ekim ayı Kanada toplam işsizlik verileri	93
Çizelge 5.91 1956-1975 arası Ekim ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	94
Çizelge 5.92 1956-1975 arası Kasım ayı Kanada toplam işsizlik verileri	94
Çizelge 5.93 1956-1975 arası Kasım ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	94
Çizelge 5.94 1956-1975 arası Aralık ayı Kanada toplam işsizlik verileri	94
Çizelge 5.95 1956-1975 arası Aralık ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları	95
Çizelge 5.96 1956-1975 arası aylık Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları karşılaştırılması	95
Çizelge 5.97 1749-1983 yılları arası Ocak ayı ortalama güneş lekesi verileri	96
Çizelge 5.98 1749-1983 yılları arası Ocak ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları	97
Çizelge 5.99 1749-1983 yılları arası Şubat ayı ortalama güneş lekesi verileri	97
Çizelge 5.100 1749-1983 yılları arası Şubat ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları	98
Çizelge 5.101 1749-1983 yılları arası Mart ayı ortalama güneş lekesi verileri	98
Çizelge 5.102 1749-1983 yılları arası Mart ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları	99
Çizelge 5.103 1749-1983 yılları arası Nisan ayı ortalama güneş lekesi verileri	99
Çizelge 5.104 1749-1983 yılları arası Nisan ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları	100

Çizelge 5.105	1749-1983 yılları arası Mayıs ayı ortalama güneş lekesi verileri	100
Çizelge 5.106	1749-1983 yılları arası Mayıs ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	101
Çizelge 5.107	1749-1983 yılları arası Haziran ayı ortalama güneş lekesi verileri.....	101
Çizelge 5.108	1749-1983 yılları arası Haziran ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	102
Çizelge 5.109	1749-1983 yılları arası Temmuz ayı ortalama güneş lekesi verileri	102
Çizelge 5.110	1749-1983 yılları arası Temmuz ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	103
Çizelge 5.111	1749-1983 yılları arası Ağustos ayı ortalama güneş lekesi verileri	103
Çizelge 5.112	1749-1983 yılları arası Ağustos ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	104
Çizelge 5.113	1749-1983 yılları arası Eylül ayı ortalama güneş lekesi verileri.....	104
Çizelge 5.114	1749-1983 yılları arası Eylül ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	105
Çizelge 5.115	1749-1983 yılları arası Ekim ayı ortalama güneş lekesi verileri.....	105
Çizelge 5.116	1749-1983 yılları arası Ekim ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	106
Çizelge 5.117	1749-1983 yılları arası Kasım ayı ortalama güneş lekesi verileri.....	106
Çizelge 5.118	1749-1983 yılları arası Kasım ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	107
Çizelge 5.119	1749-1983 yılları arası Aralık ayı ortalama güneş lekesi verileri	107
Çizelge 5.120	1749-1983 yılları arası Aralık ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları.....	108
Çizelge 5.121	1749-1983 yılları arası aylık ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları karşılaştırması	108
Çizelge 5.122	Arsenik ve yeraltı suyu verileri.....	109
Çizelge 5.123	Arsenik ve yeraltı suyu verileri model sonuçları	109
Çizelge 5.124	Yeraltı sularında uranyum miktarları verileri	110
Çizelge 5.125	Yeraltı sularında uranyum miktarları model sonuçları	110
Çizelge 5.126	Yeraltı sularındaki sülfat miktarı verileri.....	111
Çizelge 5.127	Yeraltı sularındaki sülfat miktarı model sonuçları.....	111
Çizelge 5.128	Pizza franchise(satış tekeli hakkı) başlangıç maliyeti verileri	111
Çizelge 5.129	Pizza franchise (satış tekeli hakkı) başlangıç maliyeti verileri model sonuçları.....	112
Çizelge 5.130	Yoksulluk seviyesi yüzdeleri	112
Çizelge 5.131	Yoksulluk seviyesi yüzdeleri model sonuçları.....	112
Çizelge 5.132	Sübvansiyonlu(devletçe para yardımı, destekleme) konut verileri.....	113
Çizelge 5.133	Sübvansiyonlu(devletçe para yardımı, destekleme) konut model sonuçları.....	113
Çizelge 5.134	Yapraklarda kg/hektar şeklinde ölçülendirilmiş karbon miktarları verileri	114
Çizelge 5.135	Yapraklarda kg/hektar şeklinde ölçülendirilmiş karbon miktarları model sonuçları.....	114
Çizelge 5.136	İdrardaki üre miktarı verileri.....	115
Çizelge 5.137	İdrardaki üre miktarı model sonuçları.....	115
Çizelge 5.138	İdrardaki kalsiyum miktarı verileri	115
Çizelge 5.139	İdrardaki kalsiyum miktarı model sonuçları	115
Çizelge 5.140	Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %90 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri.....	117
Çizelge 5.141	Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %90 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları	117
Çizelge 5.142	Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri.....	118

Çizelge 5.143	Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları	118
Çizelge 5.144	Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %70 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri.....	118
Çizelge 5.145	Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %70 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları	119
Çizelge 5.146	Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin çeşitli baskı seviyelerinde parçalanma süreleri model sonuçlarının karşılaştırılması.....	119
Çizelge 5.147	Kevlar 49/Epoxy %86 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı	119
Çizelge 5.148	Kevlar 49/Epoxy %86 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı model sonuçları.....	120
Çizelge 5.149	Kevlar 49/Epoxy %80 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı	120
Çizelge 5.150	Kevlar 49/Epoxy %80 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı model sonuçları.....	120
Çizelge 5.151	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri.....	120
Çizelge 5.152	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları.....	121
Çizelge 5.153	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde sayısı	121
Çizelge 5.154	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde model sonuçları	121
Çizelge 5.155	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde parçalanma süreleri	121
Çizelge 5.156	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları.....	122
Çizelge 5.157	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının çeşitli baskı seviyelerinde sayılarının model sonuçlarının karşılaştırılması	122
Çizelge 5.158	Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının çeşitli baskı seviyelerinde parçalanma sürelerinin model sonuçlarının karşılaştırılması	122
Çizelge 5.159	Deprem veri seti.....	123
Çizelge 5.160	Deprem veri seti model sonuçları	123
Çizelge 5.161	Belçika sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)	124
Çizelge 5.162	Belçika sabit genişbant internet abone model sonuçları	124
Çizelge 5.163	Brezilya sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010).....	124
Çizelge 5.164	Brezilya sabit genişbant internet abone model sonuçları.....	124
Çizelge 5.165	Kanada sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)	125
Çizelge 5.166	Kanada sabit genişbant internet abone model sonuçları	125
Çizelge 5.167	Singapur sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)	125
Çizelge 5.168	Singapur sabit genişbant internet abone model sonuçları.....	125
Çizelge 5.169	Amerika Birleşik Devletleri sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)	126
Çizelge 5.170	Amerika Birleşik Devletleri sabit genişbant internet abone model sonuçları....	126
Çizelge 5.171	Birleşik Arap Emirlikleri sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)	126
Çizelge 5.172	Birleşik Arap Emirlikleri sabit genişbant internet abone model sonuçları	126
Çizelge 5.173	Yeni Zelanda sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010).....	127
Çizelge 5.174	Yeni Zelanda sabit genişbant internet abone model sonuçları.....	127
Çizelge 5.175	Hong Kong sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010).....	127
Çizelge 5.176	Hong Kong sabit genişbant internet abone model sonuçları.....	127
Çizelge 5.177	1998-2010 yılları arası ülkelere göre elde edilen sabit genişbant internet abonelerinin (100 kişiye düşen) model sonuçlarının karşılaştırılması.....	128
Çizelge 5.178	2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri	128

Çizelge 5.179	2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonuçları	130
Çizelge 5.180	2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri	131
Çizelge 5.181	2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonuçları	133
Çizelge 5.182	2002 yılı ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi verileri($m^3/inhab/yıl$).....	134
Çizelge 5.183	2002 yılı ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi verileri model sonuçları ($m^3/inhab/yıl$).....	136
Çizelge 5.184	Avusturya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri (Bütün halka oranla ölenlerin sayısı)	137
Çizelge 5.185	Avusturya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları	137
Çizelge 5.186	Finlandiya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri.....	138
Çizelge 5.187	Finlandiya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları	138
Çizelge 5.188	Japonya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri	139
Çizelge 5.189	Japonya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları	139
Çizelge 5.190	Singapur 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri	140
Çizelge 5.191	Singapur 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları	140
Çizelge 5.192	1950-2008 yılları 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçlarının karşılaştırılması	141
Çizelge 5.193	Günlük açık yüzey buharlaşması verileri.....	141
Çizelge 5.194	Günlük açık yüzey buharlaşması verileri model sonuçları	141
Çizelge 5.195	Günlük ortalama bulutluluk verileri.....	142
Çizelge 5.196	Günlük ortalama bulutluluk verileri model sonuçları	142
Çizelge 5.197	1971-1997 yılları arası artçı dizi derinlikleri verileri.....	143
Çizelge 5.198	1971-1997 yılları arası artçı dizi derinlikleri verileri model sonuçları	143
Çizelge 5.199	Hint domuzu sağkalım süreleri	144
Çizelge 5.200	Hint domuzu sağkalım süreleri model sonuçları.....	144
Çizelge 5.201	Mesane kanseri hastalarının ay cinsinden remisyon süreleri	145
Çizelge 5.202	Mesane kanseri hastalarının ay cinsinden remisyon süreleri model sonuçları.....	145
Çizelge 5.203	Güneş lekeleri verileri.....	146
Çizelge 5.204	Güneş lekeleri model sonuçları.....	146
Çizelge 5.205	100 Banka müşterisinin bekleme zamanları	147
Çizelge 5.206	100 Banka müşterisinin bekleme zamanları model sonuçları.....	147
Çizelge 5.207	60 banka müşterisinin bekleme zamanları	148
Çizelge 5.208	60 banka müşterisinin bekleme zamanları model sonuçları	148

1. GİRİŞ

Lindley Dağılımı, bir parçanın ya da canlının yaşam süresinin modellenmesinde ilgi odağı olmuştur. Örneğin, müşterilerin bankada bekleme süreleri ve farklı bankalardaki bekleme sürelerinin karşılaştırılması, mesane kanserine yakalanmış olan hastaların iyileşme süreleri, karatavuk kuşlarının yaşam zamanları, öldürücü bir virüs (Tubercule Basili) enjekte edilen kobayların yaşam zamanları (Bjerkedal 1960), beyaz ırklı annelerin bebeklerini emzirme süreleri, yüksek su seviyeleri ölçümü, tek fiberli karbon ile 1000 fiberli karbon liflerinin dayanıklılık sürelerinin ölçümleri, uçak pencerelerinin camlarının dayanıklılık ölçümü gibi yaşam verilerinin modellenmesinde üstel, Weibull, log-lojistik gibi dağılımlara alternatif olmuştur. Ayrıca; üstel, gamma, lognormal, log-lojistik gibi dağılımların bozulma oranlarının monoton olarak artabilmesi, monoton olarak azalabilmesi ya da sabit kalabilmesi gibi çok esneklik kazandırmayan durumları mevcuttur. Bu durumda, Lindley dağılımının çeşitli versiyonları bir alternatif olmuştur. Öte yandan, tek parametrelili Lindley dağılımı farklı yaşam modellerinin analizinde yeterli esnekliğe sahip olmadığından fazladan parametreye ihtiyaç duyulmaktadır. Yaşam verilerinin modellenmesinde üstel, gamma, Weibull gibi dağılımlar kullanılsa da bu tür verilerin modellenmesinde popüler olan Lindley dağılımının iki parametrelili olduğu durumda incelenmesi ve gerçek veri setleri kullanılarak analiz edilmesi önem kazanmaktadır. Bu bakımdan ele alındığında, yüksek lisans çalışmasının amacı, iki parametrelili Lindley dağılımını inceleyebilme, probleme uygun gerçek veri setini elde edebilme, veriyi analiz edebilme, istatistiki modelin kurulup sonuç çıkarımını geniş kitlelere yayabilme gibi yetkinliklerin kazandırılması bakımından önemlidir.

Bu çalışmanın konusu, 1958 yılında Lindley tarafından ortaya çıkarılan ve sonrasında da Ghitany (2008) tarafından detayları oluşturulan Lindley dağılımının iki parametrelili şeklinin özelliklerinin incelenmesine ve parametre tahmininin bilindik metotlar ile elde edilmesine dayanmaktadır. Söz konusu Lindley dağılımının genellikle tek parametrelili olduğu durumdaki çalışmalara sıkça rastlanmakta olup dağılımın iki parametrelili olduğu durumda literatürde daha az çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda ise, parametre tahmin yöntemleri ya tamamen incelenmemiş ya da derinlemesine analizi yapılmamıştır. İki

parametrelili Lindley dağılımının tamamı ile incelenmesi, çalışmanın amacını oluşturmaktadır.

Bu çalışma, öncelikle 1958’den günümüze kadar gelen tek parametrelili Lindley dağılımı, onun özel bir durumu olan iki parametrelili Lindley dağılımının modifikasyonları ve bileşenlerinin ele alındığı çalışmaları tanıtmaya başlayacaktır. İki parametrelili Lindley dağılımının bozulma oranı fonksiyonu, ortalama kalan ömür fonksiyonu bakımından ele alındığında üstel dağılım ve tek parametrelili Lindley dağılımından daha fazla esneklik gösterdiği dikkat çekmektedir. Bundan dolayı, iki parametrelili Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu, bozulma oranı, ortalama kalan ömür fonksiyonu tanıtılacak, parametre uzayındaki değerleri için grafik gösterimlere yer verilecektir. Daha sonra dağılım karakteristikleri olan beklenen değer, varyans, moment çıkaran fonksiyonu ve dağılımın çarpıklığı ve basıklığı verilecektir. Simülasyonda yardımcı olması bakımından bu dağılımdan sayı üretme tekniklerinden dağılım fonksiyonu tekniği ve karışım tekniğinden bahsedilecektir. Parametre tahmini için momentler yöntemi, en çok olasılık yöntemi ve en küçük kareler yöntemi göz önüne alınacaktır.

Lindley dağılımı üzerinde çalışan bazı araştırmacılar, kendi kullanımları için Lindley dağılımından bazı yeni modifikasyonlar çıkararak yeni dağılımlar türetmişlerdir. Bu dağılımda, Sankaran (1970) “Ayrık Poisson Lindley Dağılımı” adı verilen bir dağılımla Poisson dağılımının Lindley karışımını elde etmektedir. Ghitany (2008) Lindley dağılımının özelliklerini araştırarak üstel dağılımdan daha fazla veriye uyum sağladığını göstermiştir. Ghitany vd. (2008a) sıfırdan bulunmuş Poisson-Lindley dağılımı üzerinde durmuştur. Ghitany vd. (2008b) ve (2008c) de Poisson-Lindley dağılımını elde edip bu uygulamaların farklı özelliklerini sorgulamaktadır. Ghitany ve Al-Mutairi (2009) Kesikli Poisson-Lindley dağılımının farklı tahmin yöntemlerini tartışmaktadır. Zakerzadeh ve Dolati (2009) yılında genelleştirilmiş üç parametrelili Lindley dağılımını tanıtmış ve bunun farklı özellik ve uygulamalarını araştırmışlardır. Zakerzadeh ve Mahmoudi (2010) genelleştirilmiş Lindley dağılımı ile Poisson dağılımının birleşmesiyle elde edilen birleşik Poisson dağılımının genişletilmiş versiyonunu elde etmiş ve parametre tahmini üzerinde durmuşlardır. Zamani ve İsmail (2010) sıfırdan

budanmış Kesikli Poisson dağılımına alternatif olarak, Negatif-Binom Lindley dağılımını oluşturmuştur. Lindley dağılımının kesikli versiyonunu Deniz ve Ojeda (2011) sigortada veri hesaplamalarının uygulanmasını araştırmada kullanmışlardır. Bakouch vd. (2012) genişletilmiş Lindley dağılımını türetmiş olup bu dağılımın farklı özellikleri ve uygulamalarını araştırmaktadır. Mazucheli ve Achcar (2011) Lindley dağılımının risklerinin ömür boyu yaşam verilerinin uygulamalarını tartışmaktadır. Ghitany vd. (2011) iki parametrelili ağırlıklandırılmış Lindley dağılımını tanıtmış ve sağkalım analizinde biyolojik verilerin modellenmesinde özellikle Lindley dağılımının yararlı olduğunu vurgulamıştır. Ghitany vd. (2012) Marshall-Olkin genişletilmiş Lindley dağılımını tanıtmıştır ve yapısal özelliklerini araştırmıştır. Rama ve Mishra (2013) Yarı Lindley dağılımının özellikleri ve parametre tahminleri üzerinde çalışmıştır. Elbatal vd. (2013) tarafından yeni genelleştirilmiş Lindley dağılımı adı verilen Gamma, üstel ve Lindley dağılımını kapsayan yeni bir dağılım sınıfı oluşturulmuş ve söz konusu dağılımın maksimum olabilirlik tahmin edicisi üzerinde durulmuştur. El-Monsef vd. (2014) tarafından üç parametrelili ağırlıklandırılmış Lindley dağılımı üzerinde durulmuş ve diğer dağılımlarla karşılaştırması yapılmıştır. Hassan (2014) Lindley dağılımında değişiklik yaparak söz konusu dağılımın yeni sınıflarını ileri sürmüş, çeşitli özellikleri üzerinde çalışmış ve “Konvolüsyonlu Lindley dağılımı” adı altında bir çalışma ortaya çıkarmıştır. Warahena vd. (2014) genelleştirilmiş ağırlıklı Lindley dağılımını tanıtmış ve onun özelliklerini araştırmıştır. Ashour ve Eltehiwy (2015) üstelleştirilmiş güçlendirilmiş Lindley dağılımını geliştirmiş ve diğer alternatif modellerle karşılaştırılarak söz konusu dağılımın gerekliliğini tartışmıştır. Lindley dağılımını ve ağırlaştırılmış Lindley dağılımını kapsayan yeni ağırlıklandırılmış formun Lindley dağılımının üzerinde oluşturulması Asgharzadeh vd. (2016) tarafından tartışılmıştır. Bhati ve Malik (2015) Lindley-Üstel dağılımı özellikleri ve uygulamalarını geliştirmiştir. Öte yandan modellenen yaşam dağılımları üzerinden yarı Lindley dağılımının rolü üzerinde çalışmayı Shanker vd. (2016) yapmıştır. Metiri vd. (2016) eksik Linux fonksiyonları altındaki Lindley dağılımının Bayes tahmini üzerinde tartışmıştır. Shibu ve Irshad (2016) genelleştirilmiş yeni genişletilmiş iki parametrelili Lindley dağılımını göstermiştir. Hassanein ve Elhaddad (2016) Kesikli Lindley Gamma dağılımı üzerinde durmuştur.

İki parametrelili sürekli Lindley dağılımı için parametre tahmin yöntemlerinin incelenmesi başlıklı tez çalışması, içerik bakımından altı bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın ikinci bölümünde; tez çalışması boyunca kullanılacak eşitlikler, tanımlar ve kısa terimler verilecektir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde; tek parametrelili Lindley dağılımının matematiksel ve istatistiksel özelliklerinin incelenmesi ve parametre tahmini verilecektir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, söz konusu tezin esas kısmı olan iki parametrelili Lindley dağılımının özellikleri grafiklerle desteklenmekte, ayrıca parametre tahminleri ile aynı tekrar sayılı ve farklı hacimlerde θ parametre tahmini için simülasyon, RMSE değerleri ve parametre tahminleri verilecektir. İki parametrelili Lindley dağılımındaki parametre tahminleri, tek parametrelili Lindley dağılımındaki gibi tahmin edilememekte; çünkü parametrelerin tahmin problemi ortaya çıkmaktadır. Bunun sebebi ise aynı Lindley dağılımını veren iki farklı karma dağılımın varlığıdır.

Çalışmanın beşinci bölümünde; 100 farklı veri seti üzerinde Kolmogorov-Smirnov istatistiği kullanılarak bu verilerin dağılıma uygunluğu test edilmiştir. Veri setlerinin daha kapsamlı analizinin yapılabilmesi amacıyla Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICC), Bayes Bilgi Kriteri (BIC) gibi ölçütler göz önüne alınmış, Veri Seti-96 ile Veri Seti-97’de bu veri setlerini kullanan diğer yazarların önerdiği dağılımlar ile karşılaştırılması yapılmış ve Veri Seti-98 ile Veri Seti-100 arası veriler Easyfit programı yardımıyla veri setlerinin bilindik dağılımlarla karşılaştırılması yapılmıştır. Söz konusu veri setleri aşağıdaki gibidir;

Veri Seti-1; Güneş lekelerinin en yüksek olduğu noktada ortaya çıkan “Malign Melanom Sıklığı” verilerini göstermektedir. Veri Seti-2 ile Veri Seti-39 arası veriler; 1948-1981 yılları arası Amerika Birleşik Devletleri işsizlik verilerini göstermektedir. Veri Seti-40 ile Veri Seti-47 arasındaki veriler; 1956-1975 yılları arası aylık Kanada toplam işsizlik verisini göstermektedir. Veri Seti-48 ile Veri Seti-59 arasındaki veriler;

1749-1983 yılları arasında aylık ortalama güneş lekesi verilerini göstermektedir. Veri Seti-60 ve Veri Seti-62 arasındaki veriler; yeraltı sularındaki arsenik, uranyum ve sülfat miktarını vermektedir. Veri Seti-63; Pizza Franchise (Satış Tekeli Hakkı) başlangıç maliyeti verilerini göstermektedir. Veri Seti-64; yoksulluk seviyesi yüzdeleri göstermektedir. Veri Seti-65; sübvansiyonlu (devletçe para yardımı) konut verilerini göstermektedir. Veri Seti-66; İspanya'nın Navarra bölgesinde olan yapraklarda kg/hektar şeklinde ölçülendirilmiş karbon miktarı verilerini göstermektedir. Veri Seti-67 ile Veri Seti-68; idrardaki üre ve kalsiyum miktarı ile ilgili verileri göstermektedir. Veri Seti-69 ile Veri Seti-76 arasındaki veriler; Kevlar 49/epoxy kablolarının/tellerinin ve küre kaplarının çeşitli baskı seviyelerinde parçalanma ömürleri veya sayılarını vermektedir. Veri Seti-77; Kuzey Anadolu fay zonunda geçen yüzyıldaki ardışık depremler arasındaki gün cinsinden periyodu göstermektedir. Veri Seti-78 ile Veri Seti-85 arasındaki veriler; 8 farklı ülkenin her 100 kişi başına sabit genişbant internet aboneleri verilerini göstermektedir. Veri Seti-86 ile Veri Seti-87; 2002 ve 2004 yılında ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranını göstermektedir. Veri Seti-88; 2002 yılı ülkelere göre ($m^3/inhab/yıl$) cinsinden kişi başına düşen toplam su çekimi verilerini göstermektedir. Veri Seti-89 ile Veri Seti-92 arasındaki veriler; 4 farklı ülkenin 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verilerini göstermektedir. Veri Seti-93 ile Veri Seti-94; Adana ilinin 15 gün için günlük açık yüzey buharlaşma ve günlük ortalama bulutluluk verilerini göstermektedir. Veri Seti-95; 1971-1997 yılları arası Yunanistan'da meydana gelen artçı dizilerin derinliklerinin, oluşan artçı sarsıntıların zamanına göre vermektedir. Veri Seti-96; Hint domuzlarına farklı dozlarda tüberküloz basili enjekte edilmesinden sonraki sağkalım sürelerini vermektedir. Veri Seti-97; Rasgele seçilmiş 128 mesane kanseri hastasının ay cinsinden remisyon süresini vermektedir. Veri Seti-98; Güneş lekeleri verilerini göstermektedir. Veri Seti-99 ile Veri Seti-100; 100 adet ve 60 adet banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerini vermektedir.

Çalışmanın altıncı bölümü ise tezin sonuç ve tartışma kısmını içermektedir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Lindley Dağılımının parametre tahmininde kullanılacak olan moment tahmin edicisi, en çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler yöntemi ve yaşam fonksiyonu, bozulma oranı, ortalama kalan ömür fonksiyonu, Newton-Raphson yöntemine ilişkin temel bilgilere yer verilip, bazı özellikler ele alınmaktadır.

2.1 Moment Tahmin Edicisi

“Momentler yönteminde, bilinmeyen parametrenin fonksiyonları olan kitle dağılım momentleri, örneklem momentlerine eşitlenir ve bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi genelde lineer değildir ve çözümü momentler tahminini verir” (Açıkgöz 2007).

“ $X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \underline{\theta})$ olan kitleden bir örneklem olmak üzere;

$$\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)' \quad (2.1)$$

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3, \dots, m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad (2.2)$$

örneklem momentleri hesaplanır.” (Akdi 2005).

k. moment sonlu olmak üzere her bir kitle momentine örneklem momenti karşılık getirilerek oluşturulan denklem sisteminin çözülmesi ile momentler tahmini veya tahmin edicisi hesaplanır. Burada, parametre sayısı kadar kitle momenti hesaplanır.

2.2 En Küçük Kareler Yöntemi (EKK)

“Alman Astronom Johannes Kepler, gezegenlerin hareketini

$$T = Cx^{3/2}$$

olarak formüle etmiştir.

Burada;

x ; Gezegenlerin güneşe uzaklığı (milyon km olarak)

T ; Gezegenlerin bir yılının periyodunu

C ; Katsayı sabiti olarak alınmıştır.

Bu durumu ilk 4 gezegen için (x, T) çifti olarak incelemiştir. Merkür, Venüs, Dünya ve Mars için çiftler (58, 88) , (108, 225) , (150, 365) ve (228, 687) alınmış ve C katsayı sabitini $C=0,199769$ olarak elde etmiştir.

Böylece eğri denklemini; $T = 0,199769 x^{3/2}$ olarak elde etmiştir.

Büyük matematikçi C. F. Gauss'un 18 yaşındayken (1795) geliştirdiği bu yöntem, ilk kez 1801 de Cres astroidinin yörüngesinin belirlenmesinde kullanılmış ve ilk kez Gauss'un toplu eserlerinin yayınlandığı ciltlerden ikincisinde 1809 yılında yayınlanmıştır. Fransız matematikçi A. Legendre 1805 ve Amerikalı matematikçi R. Adrain de 1808 yıllarında aynı yöntemi Gauss'dan habersiz ve bağımsız olarak keşfetmişlerdir” (Dolapçı ve Aksoy 2013).

“En küçük kareler yöntemi, uygulamada çok kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntem, iki değişken arasındaki ilişkiyi tahmin etmek için kullanılmakta olup regresyon yöntemi olarak da bilinir” (Akdi 2005).

En küçük kareler yönteminde amaç; önde sürülen hipotez olarak parametrik (varsayılan) dağılım $(x; \theta, \alpha)$ ile deneysel dağılım $\hat{F}(x)$ arasındaki mesafelerin, gözlemler boyunca kareler toplamını en küçük yapacak parametrelerin (α, θ) değerlerini belirlemektir.

Söz konusu deneysel dağılım;

$$\hat{F}(x_{(i)}) = \begin{cases} 0, & x_{(1)} > x \\ \frac{i-1}{n}, & x_{(i-1)} \leq x < x_{(i)} \\ 1, & x_{(n)} \leq x \end{cases}$$

$i = 2, 3, \dots, n$ şeklindedir.

$$\hat{F}(x_{(i)}) = \frac{i}{n+1} = u_{(i)}$$

olmak üzere;

En Küçük Kareler Yöntemi;

$$\hat{F}(x_{(i)}; \underline{\theta})$$

$$Q(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^n (F(x_{(i)}) - \hat{F}(x_{(i)}))^2 \quad (2.3)$$

şeklindeki karesel ifadeyi en küçük yapacak parametre vektörünün elde edilmesine dayanmaktadır.

2.3 En Çok Olabilirlik Yöntemi (EÇO)

“En çok olabilirlik yöntemi, tahmin edicileri bulmak için kullanılan en yaygın yöntemdir. Birçok istatistiki paket programı, verilerden en çok olabilirlik tahminlerini doğrudan hesaplar.

Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değer (örneklemenin bir fonksiyonu) θ ’nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir; yani θ parametre uzayını göstermek üzere,

θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi;

$$\hat{\theta}_n(\underline{X}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underline{X}) \quad (2.4)$$

dir. Genellikle, olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonu yerine fonksiyonun logaritması (log-likelihood), $\ell(\theta) = \log(L(\theta|\underline{X} = \underline{x}))$, maksimize edilir. θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olabilirlik fonksiyonunu veya log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değerdir.

Yani;

$$\hat{\theta}_n(\underline{X}) = \arg\left(\max_{\theta \in \Theta} \ell(\theta)\right) = \arg\left(\max_{\theta \in \Theta} \log L(\theta|\underline{X})\right) \quad (2.5)$$

dir. Buradaki logaritma doğal logaritma olarak da alınabilir” (Akdi 2005).

$\ell(\theta)$ fonksiyonunun birinci dereceden türevi sıfıra eşitlenerek bulunan değerler, parametrelerin tahminleri olup ikinci dereceden türevi alınarak sıfırdan küçük olup olmadığına bakılır.

2.4 Yaşam Fonksiyonu

$S(x)$ ile gösterilen yaşam fonksiyonu, X rasgele değişkeninin belirlenmiş bir yaşam sürdürme zamanı olarak gösterilen x ten daha büyük değer olma olasılığını ifade etmektedir.

Yaşam fonksiyonu;

$$S(x) = \bar{F}(x) = P(X > x) , \quad x \geq 0 \quad (2.6)$$

$$S(x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} f(x) dx \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca birikimli başarısızlık (Failure) fonksiyonu;

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x) dx, \quad t > 0 \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır.

2.5 Bozulma Oranı

Bozulma oranı fonksiyonu $h(x)$, x yaşındaki bir parçanın bundan sonraki $(x, x + m]$ zaman aralığı içinde bozulma olasılığının $m \rightarrow 0$ limitindeki hızını ifade eder.

$$h(x) = \lim_{m \rightarrow 0} \left[\frac{1}{m} \frac{F(x + m) - F(x)}{1 - F(x)} \right] \quad (2.9)$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} \Pr(x < X \leq x + m | X > m)$$

$$= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \quad (2.10)$$

biçimindedir.

“Bozulma oranı fonksiyonu;

$$h(x) \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} h(x) dx = \infty$$

özelliklerini sağlar” (Leemis 1998).

2.6 Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu

Ortalama kalan ömür fonksiyonu $m(x)$;

$$m(x) = E(X - x | X > x) = \frac{1}{(1 - F(x))} \int_x^{\infty} [1 - F(t)] dt \quad (2.11)$$

olarak bulunur ve x yaşındaki bir parçanın geri kalan ortalama ömrünü ifade eder.

2.7 Newton-Raphson Yöntemi

“Isaac Newton (1641-1727) tüm zamanların en çok tanınan, bir çiftçi ailesinin çocuğu olan, kıymeti ve yaptıkları sağlığında bilinen, maddi sıkıntı çekmeden yaşayabilen ender bilim insanıdır. Newton metodunu 1671 yılında $x^3 - 2x - 5 = 0$ polinomunun bir kökünü bulmak için kullanmıştır.

Joseph Raphson (1648-1715) 1690 yılında Isaac Newton’a atfedilen metodun bir tarifini ondan bağımsız olarak tanımlamıştır. Newton ve Raphson yalnızca polinomları düşündükleri için metodun tanıtımında türevi açıkça kullanmamışlardır.

Newton-Raphson yönteminde eğer x_i gerçek kök ise $f(x_i) = 0$ dır.

Eğriye $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen teğetin denklemi;

$$f'(x) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \text{ ise } x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

olarak elde edilir. Söz konusu denklem düzenlendiğinde;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

bulunur. Aynı işlemler x in diğer değerlerine de yapıldığında;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

.

.

.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.12}$$

$$x_{i+1} - x_i < \varepsilon$$

ve ε 0.01 veya 0.0001 olacak şekilde adımlar sürdürülür.” (Dolapçı ve Aksoy 2013).

2.8 Bayes Bilgi Kriteri (BIC: Bayes Information Criterion)

“Akaike (1978) doğrusal regresyonda seçilmiş model problemleri için BIC (Bayes Information Criterion) model seçimi kriterini türetmiştir.

Söz konusu eşitlik:

$$BIC = -2\ln L + k\ln L \quad (2.13)$$

dir.

Literatürdeki çalışmalara bakacak olursak BIC bayes faktöründen daha fazla kullanılmaktadır. Bunun sebeplerinden biri, analiz sonrasında büyük hesaplamalara ihtiyaç duyulmasıdır” (Ucal 2006).

2.9 Tahminin Standart Hatası – Hata Kareler Ortalamasının Karekökü (RMSE: Root Mean Square Error)

“Hata kareler ortalamasının karekökü (RMSE), model ile elde edilen tahmini değerler ile deneysel değerler arasındaki sapmayı göstermektedir.

RMSE eşitliği aşağıdaki gibidir;

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{T}} \quad (2.14)$$

Burada;

y_t : Gerçek gözlem değerlerini

$\hat{y}_t$: Kestirim değerlerini

T : Tahmin sayısını

ifade etmektedir” (Karaatlı ve Albeni, 2011).

2.10 Kolmogorov-Simirnov Testi

“ χ^2 uygunluk testlerinin alternatifi olan Kolmogorov-Simirnov testi, Kolmogorov tarafından 1933 yılında önerilmiştir. Kolmogorov, tek örnek için uyum iyiliği testini önermiştir. 1939 yılında ise bir Rus matematikçi olan Simirnov tarafından iki bağımsız örnek için uyum iyiliği testi geliştirilmiştir. Kolmogorov ve Simirnov testi benzerlik nedeniyle, uygulamada Kolmogorov– Simirnov uyum iyiliği testleri olarak bilinir” (Bircan vd. 2003).

2.10.1 Kolmogorov-Simirnov tek örnek testi

“Tek örnek için Kolmogorov-Simirnov testi iki kümülatif dağılım fonksiyonunun incelenmesi temeline dayanır. Bunlardan birincisi sıfır hipotezinde belirtilen kümülatif dağılım fonksiyonudur. İkincisi, örnekten elde edilen gözlenen kümülatif dağılım fonksiyonudur.

Kolmogorov-Simirnov tek örnek testinde hipotezler şöyle kurulur:

Hipotezler;

$H_0: o_i = e_i$ (Gözlenen frekanslar beklenen frekanslara uygundur.)

$H_0: o_i \neq e_i$ (Gözlenen frekanslar beklenen frekanslara uygun değildir.)

Test istatistiği D ile gösterilir. D ; gözlenen ve beklenen değerlerin kümülatif göreceli frekansları arasındaki mutlak farkın en büyüğüdür.

$$D = \max|F_0 - F_e|$$

F_0 = Gözlenen kümülatif göreceli frekans

F_e = Beklenen kümülatif göreceli frekans

Karar modeli ve karar;

$$KD = D\alpha; n$$

$D > K.D$ ise gözlenen frekansların beklenen frekanslara uygun olmadığına α önem seviyesinde karar verilmiş olup H_0 red edilir.

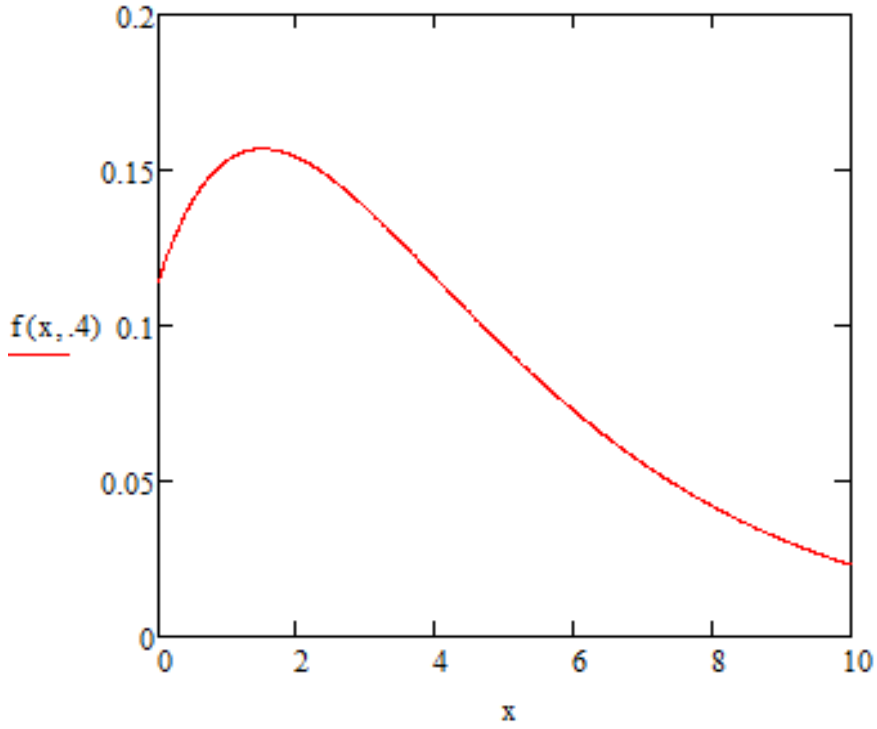
H_0 hipotezi kabul edilirse gözlenen frekansların beklenen frekanslara uygun olduğuna karar verilir” (Bircan vd. 2003).

3. TEK PARAMETRELİ LİNDLEY DAĞILIMI

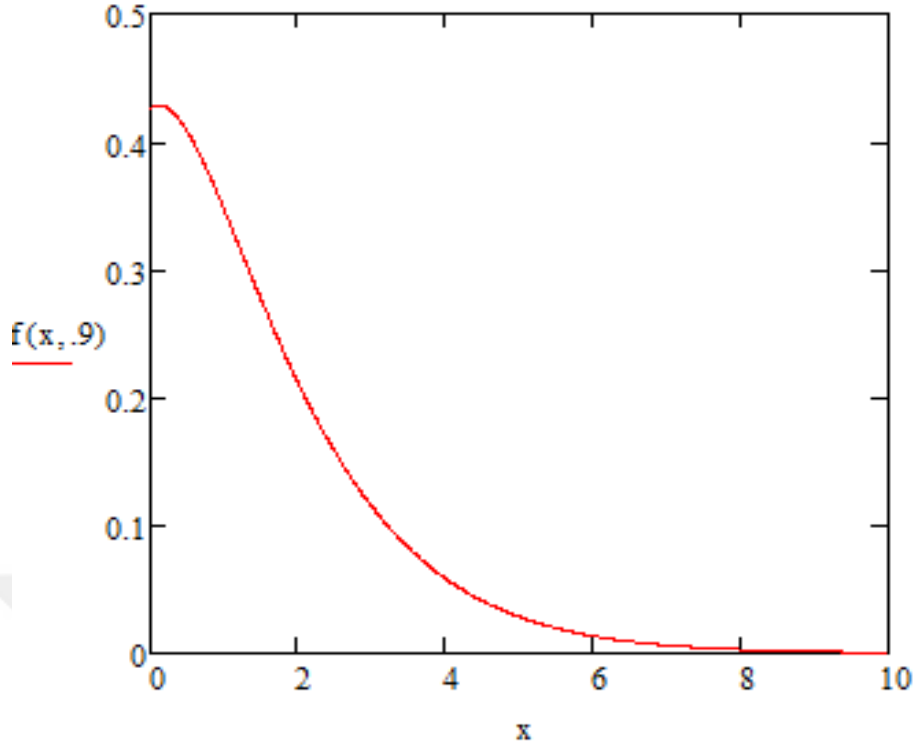
Lindley, 1958 yılında Lindley Dağılımı adı verilen tek parametrelili dağılımı tanıtmıştır (Lindley 1958).

$$f(x; \theta) = \frac{\theta^2}{(\theta + 1)} (1 + x)e^{-\theta x} ; x > 0, \theta > 0 \quad (3.1)$$

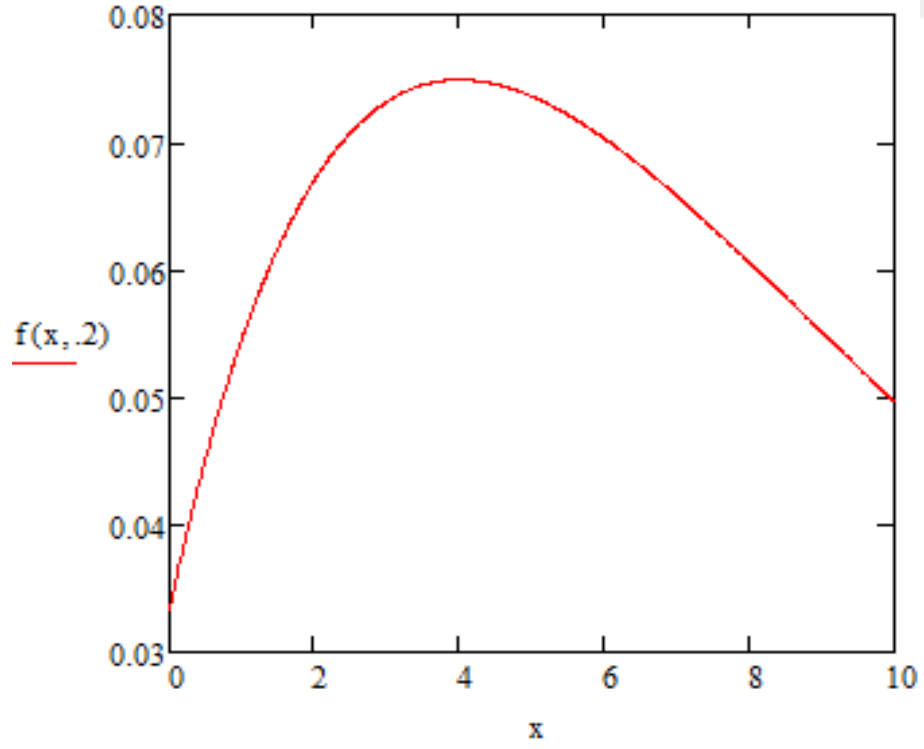
θ şekil parametresi olmak üzere tek parametrelili Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyon grafikleri Şekil 3.1-3.3'deki gibidir;



Şekil 3.1 Tek parametrelili Lindley dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\theta=0.4$ değeri için grafiği



Şekil 3.2 Tek parametrelı Lindley dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\theta=0.9$ değeri için grafiğı



Şekil 3.3 Tek parametrelı Lindley dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\theta = 0.2$ değeri için grafiğı

Birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (3.2)$$

olmak üzere; tek parametrelili Lindley dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu;

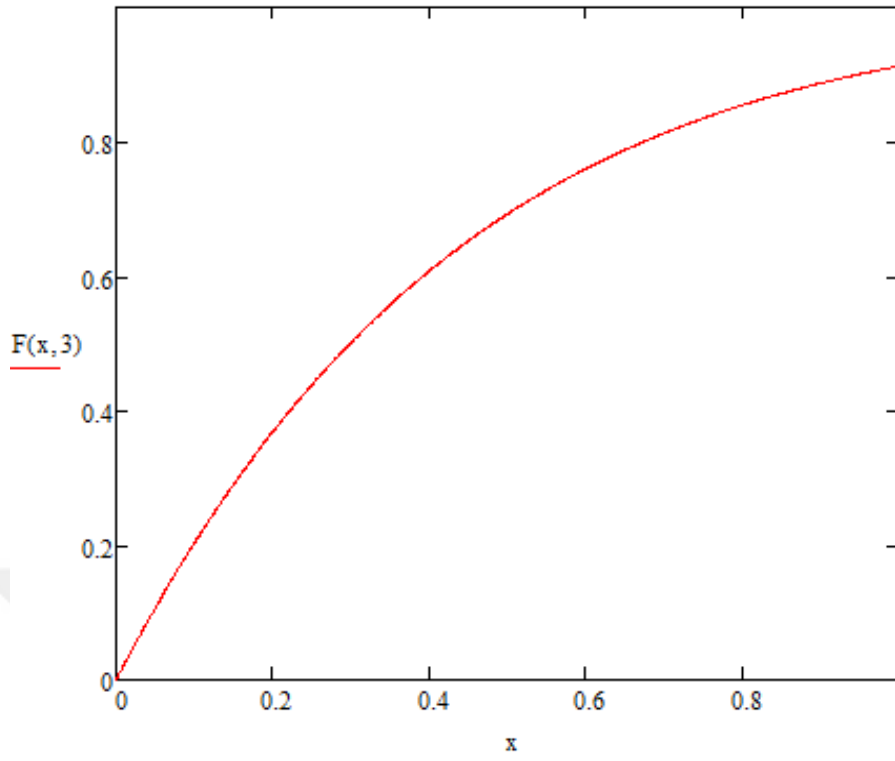
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\theta^2}{\theta + 1} \left[(x + 1) \left(\frac{-1}{\theta} e^{-\theta x} \right) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{-1}{\theta} e^{-\theta x} dx \right] \\ &= \frac{\theta^2}{\theta + 1} \frac{1}{\theta} \left[-(x + 1) e^{-\theta x} \Big|_0^x + \int_0^x e^{-\theta x} dx \right] \\ &= \frac{\theta}{\theta + 1} \left[-(x + 1) e^{-\theta x} \Big|_0^x - \frac{-1}{\theta} e^{-\theta x} \Big|_0^x \right] \\ &= \frac{(-\theta e^{-\theta x} x - \theta e^{-\theta x} + \theta - e^{-\theta x} + 1)}{\theta + 1} \\ &= \frac{e^{-\theta x} (-\theta x - \theta - 1) + (\theta + 1)}{\theta + 1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik biraz düzenlenirse tek parametrelili Lindley dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu;

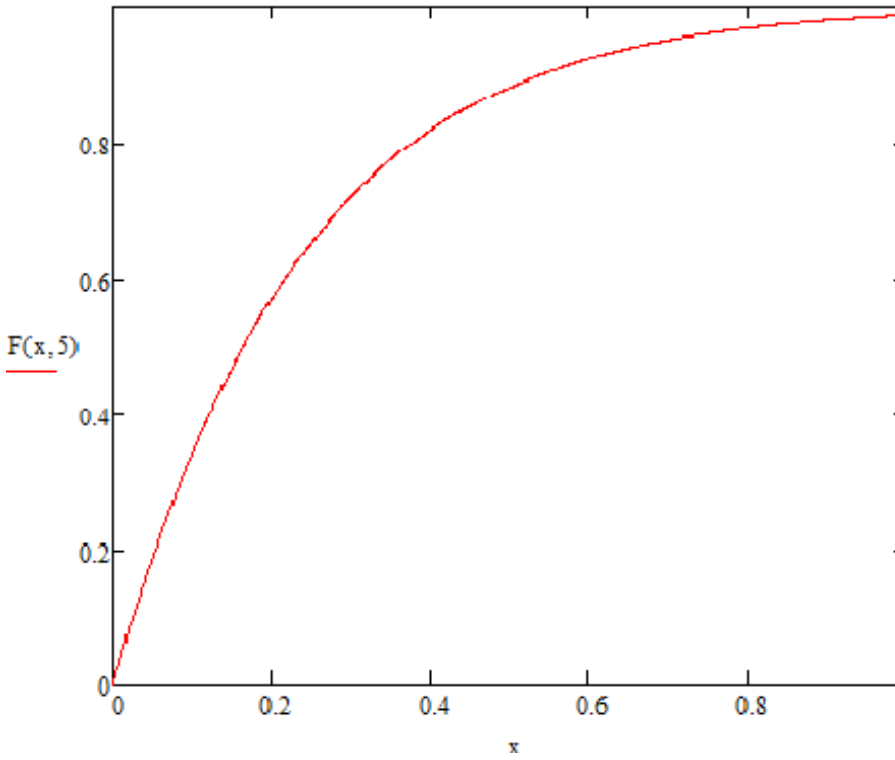
$$F(x) = 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} ; x > 0 \quad (3.3)$$

olarak elde edilmiş olur.

Tek parametrelili Lindley dağılımının birikimli dağılım fonksiyon grafikleri Şekil 3.4-3.5'deki gibidir;



Şekil 3.4 Tek parametrelı Lindley dağılımlının $\theta = 3$ değeri için birikimli dağılım fonksiyonu grafiği



Şekil 3.5 Tek parametrelı Lindley dağılımlının $\theta = 5$ değeri için birikimli dağılım fonksiyonu grafiği

3.1 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Momentleri

Momentler başta istatistiki uygulamalar olmak üzere istatistiksel analizlerde önemli bir yere sahiptirler. Dağılımın özellikleri ve karakterleri hakkında bilgi verirler. (Eğiklik, Eğilim, Dağılım, Basıklık,...)

Ghitany vd. (2008) bu dağılımın çeşitli özellikleri ve farklı kullanımları üzerinde çalışmış ve Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, denklemin farklı kullanımları için üstel dağılımdan daha iyi bir model olduğunu göstermiştir.

Ghitany vd.(2008) ne göre orijin etrafındaki ilk 4 moment;

$$E(X) = \mu'_1 = \frac{\theta + 2}{\theta(\theta + 1)} \quad (3.4)$$

$$E(X^2) = \mu'_2 = \frac{2(\theta + 3)}{\theta^2(\theta + 1)} \quad (3.5)$$

$$E(X^3) = \mu'_3 = \frac{6(\theta + 4)}{\theta^3(\theta + 1)} \quad (3.6)$$

$$E(X^4) = \mu'_4 = \frac{24(\theta + 5)}{\theta^4(\theta + 1)} \quad (3.7)$$

Dolayısıyla varyansı;

$$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)^2} \quad (3.8)$$

olarak bulunur.

Shanker vd. (2013) ye göre merkezi momentler;

$$\mu_2 = \frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)^2} \quad (3.9)$$

$$\mu_3 = \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{\theta^3(\theta + 1)^3} \quad (3.10)$$

$$\mu_4 = \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{\theta^4(\theta + 1)^4} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

Dağılımın çarpıklığı;

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{(\mu_2)^3} \quad (3.12)$$

eşitliği ile bulunur.

Buna göre, tek parametrelili Lindley dağılımının çarpıklığı;

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)^2}{\theta^3(\theta + 1)^3}}{\left(\frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)^2}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)^2}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir.

Dağılımın basıklığı;

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} \quad (3.14)$$

eşitliği ile bulunur.

Tek parametrelili Lindley dağılımının basıklığı;

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\frac{3(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^2+32\theta+8)}{\theta^4(\theta+1)^4}}{\left(\frac{\theta^2+4\theta+2}{\theta^2(\theta+1)^2}\right)^2} \\ &= \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklinde bulunur.

3.2 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Yaşam Fonksiyonu

(2.5) ve (2.6) nolu eşitlikleri kullanarak tek parametrelili Lindley dağılımında yaşam fonksiyonu;

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - \left[1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \right] \\ &= \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \\ &= \left(1 + \frac{\theta x}{\theta + 1} \right) e^{-\theta x} \end{aligned} \quad (3.16)$$

olarak elde edilir.

3.3 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Bozulma Oranı

Bozulma oranı fonksiyonu $h(x)$ olmak üzere, (2.8) ve (2.9) nolu eşitliklerden yola çıkılarak tek parametrelili Lindley dağılımının bozulma oranı fonksiyonu;

$$h(x) = \frac{\frac{\theta^2}{\theta+1}(x+1)e^{-\theta x}}{1 - \left[1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x}\right]}$$

$$= \frac{\frac{\theta^2}{\theta+1}(x+1)e^{-\theta x}}{\frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x}}$$

ifadesinin düzenlenmesi ile;

$$h(x) = \frac{\theta^2(x+1)}{\theta+1+\theta x} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

Ortalama kalan ömür fonksiyonu $m(x)$ eşitlik (2.10) da gösterildiği üzere;

Tek parametrelili Lindley dağılımının ortalama kalan ömür fonksiyonu;

$$m(x) = \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x}\right]} \int_x^\infty \left[1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta t}{\theta+1}e^{-\theta t}\right)\right] dt$$

$$= \frac{1}{1 - 1 + \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x}} \int_x^\infty \left(1 - 1 + \frac{\theta+1+\theta t}{\theta+1}e^{-\theta t}\right) dt$$

$$= \frac{\theta + 1}{(\theta + 1 + \theta x)e^{-\theta x}} \frac{1}{\theta + 1} \int_x^{\infty} (\theta e^{-\theta t} + e^{-\theta t} + \theta t e^{-\theta t}) dt$$

dir. Buradan yola çıkarak, integral çözümünde;

$$t = u \text{ ise } dt = du$$

$$e^{-\theta t} dt = dv \text{ ise } v = \frac{-1}{\theta} e^{-\theta t}$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanıp, bu değerler yerlerine yerleştirildiğinde;

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{(\theta + 1 + \theta x)e^{-\theta x}} \left(e^{-\theta x} + \frac{1}{\theta} e^{-\theta x} + \theta x e^{-\theta x} + \frac{1}{\theta} e^{-\theta x} \right) \\ &= \frac{-e^{-\theta x}}{(\theta + 1 + \theta x)e^{-\theta x}} \left(1 + \frac{1}{\theta} + \theta x + \frac{1}{\theta} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\theta + 1 + \theta x)} \left(1 + \frac{2}{\theta} + x \right)$$

olur. Eşitlik düzenlendiğinde;

$$m(x) = \frac{\theta + 2 + \theta x}{\theta(\theta + 1 + \theta x)} \quad (3.18)$$

şeklinde elde edilir.

3.4 Tek Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahmin Yöntemleri

Bu kısımda, tahmin edicilerin bulunma yöntemlerinden birkaç tanesi üzerinde durulacaktır. Bunlar literatürde çok kullanılan yöntemlerdir. Tek parametrelili Lindley dağılımı üzerinden momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi ve en küçük kareler yöntemi, incelenecek parametre tahmin edicileri bulma yöntemleridir.

3.4.1 Tek parametrelili Lindley dağılımının parametre tahmini için moment tahmin edicisi

Bu alt bölümde tek parametrelili Lindley dağılımının momentleri araştırılacaktır.

Tek parametrelili Lindley dağılımının birinci momenti, birinci örneklem momentine eşitlenir;

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum X_i = \frac{\theta + 2}{\theta(\theta + 1)} \quad (3.19)$$

Buradan θ nın ikinci dereceden bir polinomu,

$$m_1\theta^2 - (1 - m_1)\theta - 2 \quad (3.20)$$

elde edilir ki bu polinomun $\theta > 0$ için uygun kökü;

$$\theta = \frac{(1 - m_1) + \sqrt{(1 - m_1)^2 + 8m_1}}{2m_1} \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Buna göre θ için momentler tahmin edicisi;

$$\hat{\theta}_{Mom} = \frac{(1 - \bar{X}) + \sqrt{(1 - \bar{X})^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}} \quad (3.22)$$

olarak elde edilir.

3.4.2 Tek parametrelili Lindley dağılımının parametre tahmini için en çok olabilirlik yöntemi (MLE)

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$; θ parametrelili Lindley dağılımından bir rasgele örneklem olmak üzere bu örnekleme dayalı olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\theta; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

olup, olasılık yoğunluk fonksiyonu yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \left(\frac{\theta^2}{\theta + 1} (x_1 + 1) e^{-\theta x_1} \right) \left(\frac{\theta^2}{\theta + 1} (x_2 + 1) e^{-\theta x_2} \right) \dots \left(\frac{\theta^2}{\theta + 1} (x_n + 1) e^{-\theta x_n} \right) \\ &= \left(\frac{\theta^2}{\theta + 1} \right)^n \prod_{i=1}^n (x_i + 1) e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned} \quad (3.23)$$

olarak elde edilir.

Söz konusu olabilirlik fonksiyonunun logaritması alındığında;

$$\log L = 2n \ln \theta - n \ln(\theta + 1) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + 1) - \theta \sum_{i=1}^n x_i$$

elde edilir.

Bu fonksiyonun θ parametre değerine göre, I. türevi sıfıra eşitlenir;

$$\begin{aligned}
 \frac{d \ln L}{d \theta} &= \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta + 1} - \sum_{i=1}^n x_i \\
 &= \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta + 1} - n\bar{x} = 0 \\
 &= -\frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{(\theta + 1)^2} = \bar{x}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Buradan moment tahmin edicisindeki ikinci dereceden polinomun kökü olarak elde edilen noktanın aynı zamanda en çok olabilirlik tahmin edicisi olduğunu söylemek mümkündür. Çünkü θ ya göre ikinci türevin işareti negatiftir. Buna göre;

$$\hat{\theta}_{E\check{C}OT} = \frac{(1 - \bar{X}) + \sqrt{(1 - \bar{X})^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}} \tag{3.25}$$

olup,

$$\frac{d^2 \ln L}{d \theta^2} = -\frac{2n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta + 1)^2} \leq 0 \tag{3.26}$$

dır.

3.4.3 Tek parametrelili Lindley dağılımının parametresi için en küçük kareler yöntemi (EKK)

Tek parametrelili Lindley dağılımının en küçük kareler yöntemi ile parametre tahmini yapıldığında aşağıdaki gibi bir yöntem izlenir.

(2.3) nolu eşitlikten yola çıkılarak tek parametrelili Lindley dağılımının parametresi için en küçük kareler tahmini için aşağıdaki gibi bir eşitlik elde edilir.

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{\theta x_{(i)}}{\theta + 1} e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{i}{n+1} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{\theta x_{(i)}}{\theta + 1} e^{-\theta x_{(i)}} - u_{(i)} \right)^2$$

toplamın içindeki ifade biraz düzenlenirse,

$$1 - u_{(i)} = e^{-\theta x_{(i)}} + \frac{\theta x_{(i)}}{\theta + 1} e^{-\theta x_{(i)}}$$

eşitleyip her iki tarafın da logaritması alındığında;

$$\ln(1 - u_{(i)}) = -\theta x_{(i)} + \ln\left(1 + \frac{\theta x_{(i)}}{\theta + 1}\right)$$

eşitliği bulunur.

Bulunan ifade toplamda yerine konulduğunda;

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n \left(-\theta x_{(i)} + \ln\left(1 + \frac{\theta x_{(i)}}{\theta + 1}\right) - \ln(1 - u_{(i)}) \right)^2$$

şeklinde yazılabilir.

θ parametresine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde;

$$\frac{d \ln Q(\theta)}{d \theta} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\theta x_{(i)} - \ln \left(1 + \frac{\theta x_{(i)}}{\theta+1} \right) + \ln(1 - u_{(i)}) \right) \left(x_{(i)} - \frac{x_{(i)}}{(\theta+1)^2 + (\theta+1)\theta x_{(i)}} \right) = 0$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemin analitik bir ifadesi elde edilemediği için herhangi bir paket programda θ için en küçük kareler tahmini (EKK) elde edilebilir.



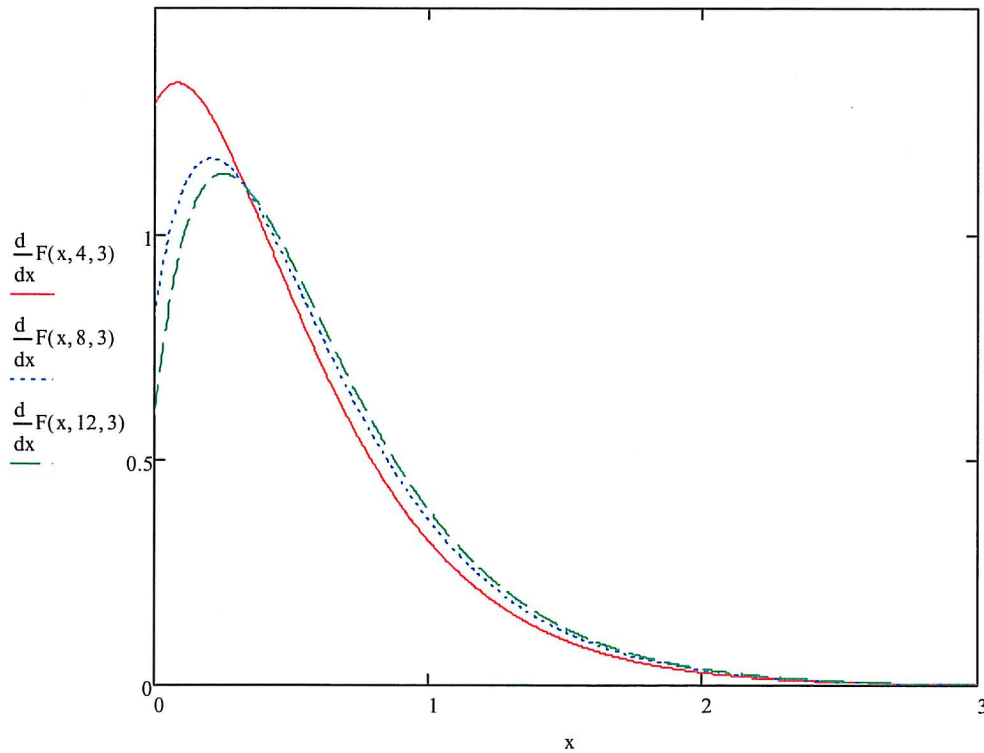
4. İKİ PARAMETRELİ LİNDLEY DAĞILIMI

θ şekil parametresi, α ölçek parametresi olmak üzere, iki parametrelili (α ve θ) Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

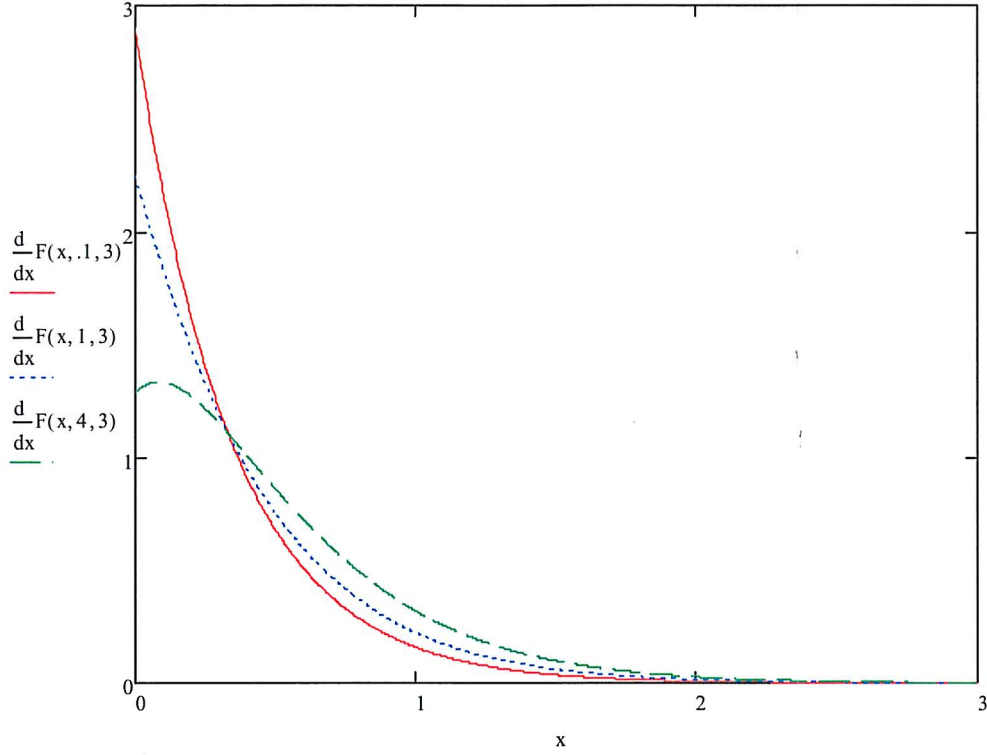
$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (1 + \alpha x) e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0, \alpha > 0 \quad (4.1)$$

olarak gösterilir.

Söz konusu iki parametrelili Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri Şekil 4.1- 4.2'deki gibidir:



Şekil 4.1 İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3$; $\alpha = 4, \alpha = 8$ ve $\alpha = 12$ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri



Şekil 4.2 İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3$; $\alpha = 1$ ve $\alpha = 4$ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafikleri

Eşitlik (3.2) de gösterilen birikimli dağılım fonksiyonu eşitliğinden yola çıkarak iki parametrelili Lindley dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$F(x) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \int_0^x (1 + \alpha x) e^{-\theta x} dx$$

$$\alpha x + 1 = u \text{ ise } \alpha dx = du$$

$$e^{-\theta x} dx = dv \text{ ise } v = \frac{-1}{\theta} e^{-\theta x}$$

Değişkenleri $F(x)$ fonksiyonunda yerlerine konulduğunda;

$$F(x) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[(\alpha x + 1) \left(\frac{-1}{\theta} e^{-\theta x} \right) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{-1}{\theta} e^{-\theta x} \alpha dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{-1}{\theta} (\alpha x + 1) e^{-\theta x} \Big|_0^x + \frac{1}{\theta} \int_0^x \alpha e^{-\theta x} dx \right] \\
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{1}{\theta} \left[-(\alpha x + 1) e^{-\theta x} \Big|_0^x + \frac{-\alpha}{\theta} e^{\theta x} \Big|_0^x \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Bu integrasyonun düzenlenmesi ile;

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\theta}{\theta + \alpha} \left[-(\alpha x + 1) e^{-\theta x} + 1 - \frac{\alpha}{\theta} e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta} \right] \\
&= \frac{\theta}{\theta + \alpha} \left[-\alpha x e^{-\theta x} - e^{-\theta x} + 1 - \frac{\alpha}{\theta} e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta} \right] \\
&= \frac{-\alpha x \theta e^{-\theta x} - \theta e^{-\theta x} + \theta - \alpha e^{-\theta x} + \alpha}{\theta + \alpha} \\
&= \frac{(\theta + \alpha) - e^{-\theta x} (\alpha \theta x + \theta + \alpha)}{\theta + \alpha}
\end{aligned}$$

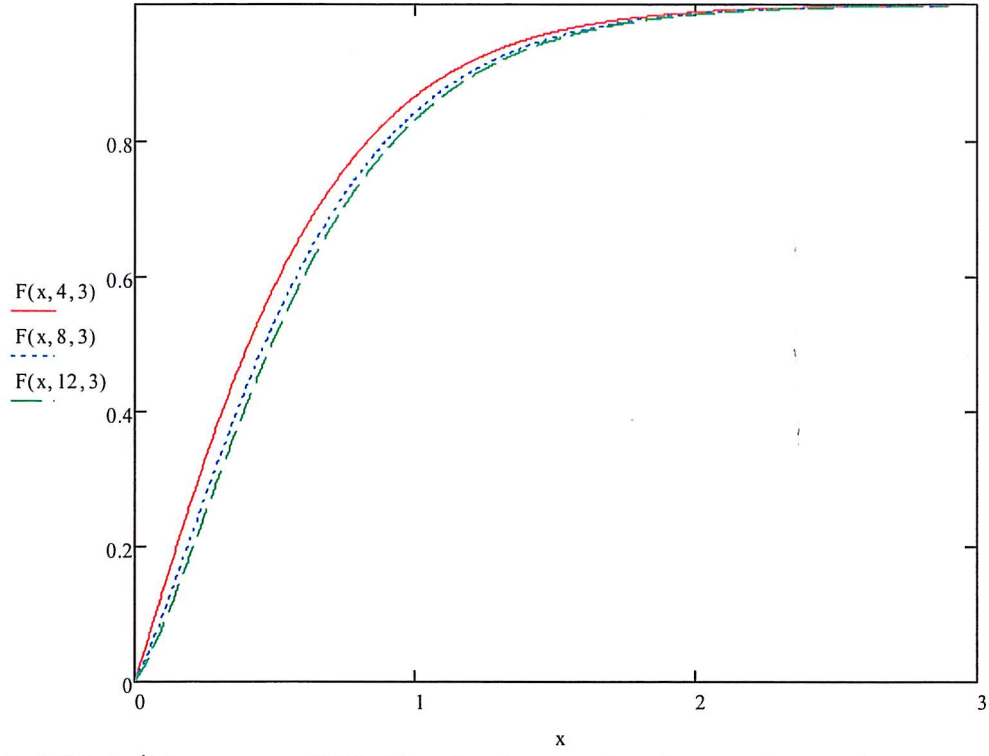
elde edilir.

Bu son ifadeden, iki parametrelili Lindley dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu;

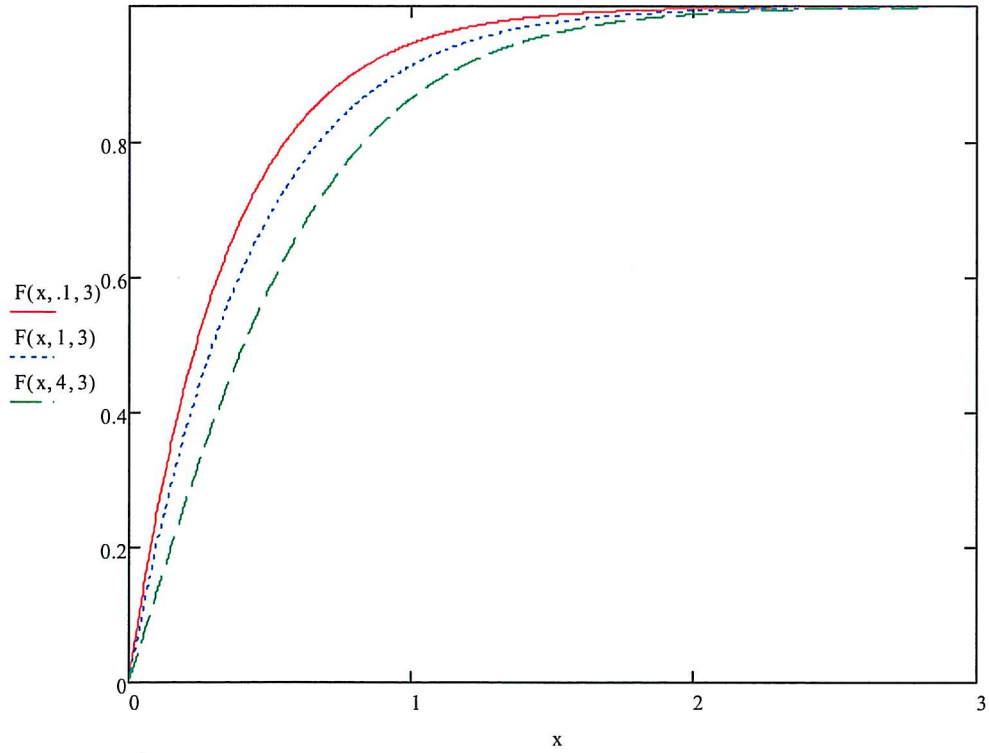
$$F(x) = 1 - \frac{\theta + \alpha + \alpha \theta x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x}; \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > 0 \quad (4.2)$$

olarak elde edilir.

Söz konusu iki parametrelili Lindley dağılımının birikimli dağılım fonksiyon grafikleri Şekil 4.3- 4.4'deki gibidir:



Şekil 4.3 İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3$; $\alpha = 4$, $\alpha = 8$ ve $\alpha = 12$ değerleri için birikimli dağılım fonksiyonu grafikleri



Şekil 4.4 İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3$; $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 4$ değerleri için birikimli dağılım fonksiyonu grafikleri

Buradan açıkça görülüyor ki, $\alpha = 1$ olduğunda iki parametrelili Lindley dağılımı, parametresi θ olan tek parametrelili Lindley dağılımına indirgenmiş olup $\alpha = 0$ olduğunda zaman parametresi θ olan üstel dağılıma dönüşmüştür (Shanker vd. 2013).

Şimdi $F(x)$ i veren farklı bir karma elde etmeye çalışalım:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 - \left(1 + \frac{\alpha\theta}{\alpha + \theta}x\right)e^{-x\theta} \\
 &= 1 - \left[\frac{\alpha}{\alpha + \theta} + \frac{\theta}{\alpha + \theta} + \frac{\alpha\theta}{\alpha + \theta}x\right]e^{-x\theta} \\
 &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha + \theta}e^{-x\theta} - \frac{\theta}{\alpha + \theta}(1 + \alpha x)e^{-x\theta} \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha + \theta} + \frac{\theta}{\alpha + \theta} - \frac{\alpha}{\alpha + \theta}e^{-x\theta} - \frac{\theta}{\alpha + \theta}(1 + \alpha x)e^{-x\theta} \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha + \theta}[1 - e^{-x\theta}] + \frac{\theta}{\alpha + \theta}[1 - (1 + \alpha x)e^{-x\theta}]
 \end{aligned}$$

$$G_1 = [1 - e^{-x\theta}] \quad (4.3)$$

$$G_2 = [1 - (1 + \alpha x)e^{-x\theta}] \quad (4.4)$$

olmak üzere;

$$F(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \theta}G_1(x) + \frac{\theta}{\alpha + \theta}G_2(x) \quad (4.5)$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada $G_2(x)$ in bir dağılım fonksiyonunu temsil edebilmesi için $\theta > \alpha$ olmalıdır.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu gösteriyor ki, iki parametrelili Lindley dağılımı, parametresi θ olan üstel dağılım ile parametreleri $(2, \theta)$ olan Gamma dağılımının bir karmasıdır. Buna göre, $f_1(x)$ üstel dağılımlı rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve $f_2(x)$ ise Gamma(2, θ) dağılımlı rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu gösterebilir;

$$f_1(x) = \theta e^{-\theta x} \quad (4.6)$$

$$f_2(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \quad (4.7)$$

olup, iki parametrelili Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \theta) = p f_1(x) + (1 - p) f_2(x) \quad (4.8)$$

şeklinde yazılır.

$$F(x) = \frac{\theta}{\alpha + \theta} G_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \theta} [1 - (1 + \theta x) e^{-\theta x}]$$

şeklinde üstel ve Gamma dağılımının birleşiminden oluşan karma bir dağılım oluşturmuştur.

Bu durumda, bir belirlenememe problemi ortaya çıkmaktadır. $\theta > \alpha$ olduğunda parametre tahmini istenmeyen sonuçlar verebilir.

Söz konusu olasılık yoğunluk fonksiyonunun türevi alındığında;

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} + \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \alpha x e^{-\theta x}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\theta \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} + \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \alpha e^{-\theta x} - \theta \alpha x \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} = 0 \\
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (-\theta + \alpha - \theta \alpha x) e^{-\theta x} = 0 \\
&= \frac{-\theta^3}{\theta + \alpha} + \frac{\theta^2 \alpha}{\theta + \alpha} - \frac{\theta^2 \alpha x}{\theta + \alpha} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, pay ifadesi sıfıra eşitlenirse $(-\theta + \alpha - \theta \alpha x) = 0$ olup, $x = \frac{\alpha - \theta}{\alpha \theta}$ olarak elde edilir.

Buna göre aşağıdaki sonuçlara varılabilir.

- 1) $\theta < \alpha$ ise $x_0 = \frac{\alpha - \theta}{\alpha \theta}$ noktasında $f(x)$ max olur. Yani dağılımın modu vardır ve tektir.
- 2) $\theta \geq \alpha$ ise $f'(x) \leq 0$ olduğundan dolayı $f(x)$ azalan bir fonksiyondur. (Shanker vd. 2013).

4.1 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

Moment çıkaran fonksiyon;

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} g(x) dx \quad (4.9)$$

ile elde edilir.

Lindley dağılımının moment çıkaran fonksiyonu;

$$E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (1 + \alpha x) e^{-\theta x} dx$$

eşitliği ile bulunur.

$$E(e^{tX}) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \int_0^{\infty} (1 + \alpha x) e^{-x(\theta-t)} dx$$

olmak üzere; integralde $x(\theta - t) = v$ dönüşümü yapılırsa;

$$E(e^{tX}) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \int_0^{\infty} \left(1 + \alpha \frac{v}{\theta - t}\right) e^{-v} \frac{1}{(\theta - t)} dv$$

şekline dönüşür.

İntegral ifadesi düzenlenirse;

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{1}{(\theta - t)} \int_0^{\infty} \left(e^{-v} + \frac{\alpha}{\theta - t} v e^{-v}\right) dv \\ &= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{1}{(\theta - t)} \left[\int_0^{\infty} e^{-v} dv + \frac{\alpha}{\theta - t} \int_0^{\infty} v e^{-v} dv \right] \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Burada;

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} v^{\alpha-1} e^{-v} dv$$

Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$E(e^{tX}) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{1}{(\theta - t)} \left(1 + \frac{\alpha}{(\theta - t)}\right)$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{\theta - t + \alpha}{(\theta - t)^2}$$

olup, iki parametrelili Lindley dağılımının moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_X(t) = \frac{\theta^2}{(\theta + \alpha)} \frac{\theta - t + \alpha}{(\theta - t)^2}, \quad t < \theta \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir.

Birinci ham moment yukarıdaki moment çıkaran fonksiyonun birinci dereceden türevinin alınması ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu'_1 = \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} \quad (4.11)$$

$$= \frac{\theta^2}{(\theta + \alpha)} \left[\frac{-1(\theta - t)^2 - (\theta - t + \alpha)(-2)(\theta - t)}{(\theta - t)^4} \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{(\theta + 2\alpha)}{\theta(\theta + \alpha)} \quad (4.12)$$

İkinci ham moment, moment çıkaran fonksiyonun ikinci dereceden türevinin alınması ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu'_2 = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} \quad (4.13)$$

$$= \frac{\theta^2}{(\theta + \alpha)} \left[\frac{2\theta - 2t + 6\alpha}{(\theta - t)^4} \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{2(\theta + 3\alpha)}{\theta^2(\theta + \alpha)} \quad (4.14)$$

Üçüncü ham moment ise moment çıkaran fonksiyonun üçüncü dereceden türevinin alınması ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu'_3 = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{-2(\theta - t)^4 - (2\theta - 2t + 6\theta)(-4)(\theta - t)^3}{(\theta - t)^8} \right] \quad (4.15)$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{4(\theta - t)^3(2\theta - 2t + 6\alpha) - 2(\theta - t)^4}{(\theta - t)^8} \right]$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{(\theta - t)^3[4(2\theta - 2t + 6\alpha) - 2(\theta - t)]}{(\theta - t)^8} \right]$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{8\theta - 8t + 24\alpha - 2\theta + 2t}{(\theta - t)^5} \right]$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{6\theta - 6t + 24\alpha}{(\theta - t)^5} \right] \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{6\theta + 24\alpha}{\theta^5}$$

$$= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{6(\theta + 4\alpha)}{\theta^5}$$

$$= \frac{6(\theta + 4\alpha)}{\theta^3(\theta + \alpha)} \quad (4.16)$$

Dördüncü ham momenti;

$$\begin{aligned}
\mu'_4 &= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{-6(\theta - t)^5 - (6\theta - 6t + 24\theta)(-5)(\theta - t)^4}{(\theta - t)^{10}} \right] \\
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{5(\theta - t)^4(6\theta - 6t + 24\alpha) - 6(\theta - t)^5}{(\theta - t)^{10}} \right] \\
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{(\theta - t)^4[5(6\theta - 6t + 24\alpha) - 6(\theta - t)]}{(\theta - t)^{10}} \right] \\
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{30\theta - 30t + 120\alpha - 6\theta + 6t}{(\theta - t)^6} \right] \\
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \left[\frac{24\theta - 24t + 120\alpha}{(\theta - t)^6} \right] \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \frac{24\theta + 120\alpha}{\theta^6} \\
&= \frac{24(\theta + 5\alpha)}{\theta^4(\theta + \alpha)} \tag{4.17}
\end{aligned}$$

olarak moment çıkaran fonksiyonun yukarıda görüldüğü üzere, dördüncü dereceden türevinin alınması ile elde edilir.

Buna göre;

Birinci merkezi moment;

$$\mu_1 = E[X - E(X)] = E(X - \mu'_1) = 0 \tag{4.18}$$

olarak elde edilir.

İkinci merkezi moment;

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2 = E[X - \mu'_1]^2 = Var(X)$$

$$= E(X^2) - 2\mu'_1 E(X) + (\mu'_1)^2$$

$$= \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \frac{2(\theta + 3\alpha)}{\theta^2(\theta + \alpha)} - \left[\frac{\theta + 2\alpha}{\theta(\theta + \alpha)} \right]^2 \\ &= \frac{2\theta + 6\alpha}{\theta^2(\theta + \alpha)} - \frac{\theta^2 - 4\theta\alpha - 4\alpha^2}{\theta^2(\theta + \alpha)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{(2\theta + 6\alpha)(\theta + \alpha) - \theta^2 - 4\theta\alpha - 4\alpha^2}{\theta^2(\theta + \alpha)^2}$$

$$= \frac{2\theta^2 + 2\theta\alpha + 6\theta\alpha + 6\alpha^2 - \theta^2 - 4\theta\alpha - 4\alpha^2}{\theta^2(\theta + \alpha)^2}$$

$$= \frac{\theta^2 + 4\theta\alpha + 2\alpha^2}{\theta^2(\theta + \alpha)^2}$$

(4.19)

olarak elde edilir.

Üçüncü merkezi moment;

$$\mu_3 = E[X - E(X)]^3 = E[X - \mu'_1]^3$$

$$= \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 3(\mu'_1)^2\mu'_2 - (\mu'_1)^3$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2(\mu'_1)^3)$$

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= \frac{6(\theta + 4\alpha)}{\theta^3(\theta + \alpha)} - 3 \frac{(\theta + 2\alpha)}{\theta(\theta + \alpha)} \frac{2(\theta + 3\alpha)}{\theta^2(\theta + \alpha)} + 2 \left[\frac{\theta + 2\alpha}{\theta(\theta + \alpha)} \right]^3 \\
&= \frac{(6\theta + 24\alpha)(\theta^2 + 2\alpha\theta + \alpha^2)}{\theta^3(\theta + \alpha)^3} - \frac{(6\theta^2 + 18\alpha\theta + 12\alpha^2 + 36\alpha^2)(\theta + \alpha)}{\theta^3(\theta + \alpha)^3} \\
&\quad + 2 \frac{(\theta^3 + 6\theta^2\alpha + 12\theta\alpha^2 + 8\alpha^3)}{\theta^3(\theta + \alpha)^3} \\
&= \frac{(8\theta^3 + 48\alpha\theta^2 + 78\alpha^2\theta + 40\alpha^3 - 6\theta^3 - 6\alpha\theta^2 - 30\alpha\theta^2 - 30\alpha^2\theta - 36\alpha^2\theta - 36\alpha^3)}{\theta^3(\theta + \alpha)^3} \\
&= \frac{2\theta^3 + 12\alpha\theta^2 + 12\alpha^2\theta + 4\alpha^3}{\theta^3(\theta + \alpha)^3} \\
&= \frac{2(\theta^3 + 6\alpha\theta^2 + 6\alpha^2\theta + 2\alpha^3)}{\theta^3(\theta + \alpha)^3} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Dördüncü merkezi moment;

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= E[X - E(X)]^4 = E[X - \mu'_1]^4 \\
&= E(X^4) - 4\mu'_1 E(X^3) + 6(\mu'_1)^2 E(X^2) - 4\mu_1'^3 E(X) + \mu_1'^4 \\
\mu_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6(\mu'_1)^2\mu'_2 - 3(\mu'_1)^4 \\
\mu_4 &= \frac{24(\theta + 5\alpha)}{\theta^4(\theta + \alpha)} - 4 \frac{(\theta + 2\alpha)}{\theta(\theta + \alpha)} \frac{6(\theta + 4\alpha)}{\theta^3(\theta + \alpha)} + 6 \left[\frac{\theta + 2\alpha}{\theta(\theta + \alpha)} \right]^2 \frac{2(\theta + 3\alpha)}{\theta^2(\theta + \alpha)} \\
&\quad - 3 \left[\frac{\theta + 2\alpha}{\theta(\theta + \alpha)} \right]^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(24\theta + 120\alpha)}{\theta^4(\theta + \alpha)^4} - \frac{(24\theta^2 + 96\alpha\theta + 48\alpha^2 + 192\alpha^2)(\theta + \alpha)^2}{\theta^4(\theta + \alpha)^4} \\
&\quad + \frac{(12\theta^3 + 48\alpha\theta^2 + 48\alpha^2\theta + 36\alpha\theta^2 + 144\alpha^2\theta + 144\alpha^3)(\theta + \alpha)}{\theta^4(\theta + \alpha)^4} \\
&\quad - 3 \frac{(\theta + 2\alpha)^4}{\theta^4(\theta + \alpha)^4} \\
\mu_4 &= \frac{3(3\theta^4 + 24\alpha\theta^3 + 24\alpha\theta^2 + 20\alpha^2\theta^2 - 88\alpha^3\theta + 120\alpha^2\theta + 8\alpha^4)}{\theta^4(\theta + \alpha)^4} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (3.12) de gösterilen ifade yerine konularak iki parametrelili Lindley dağılımının çarpıklığı;

$$\beta_1 = \frac{2(\theta^3 + 6\alpha\theta^2 + 6\alpha^2\theta + 3\alpha^3)}{(\theta^2 + 4\theta\alpha + 2\alpha^2)^{3/2}} \quad (4.22)$$

şeklinde bulunur.

Eşitlik (3.14) de gösterilen ifade yerine konularak iki parametrelili Lindley dağılımının basıklığı;

$$\beta_2 = \frac{3(3\theta^4 + 24\alpha\theta^3 + 24\alpha\theta^2 + 20\alpha^2\theta^2 - 88\alpha^3\theta + 120\alpha^2\theta + 8\alpha^4)}{(\theta^2 + 4\theta\alpha + 2\alpha^2)^2} \quad (4.23)$$

olarak elde edilir.

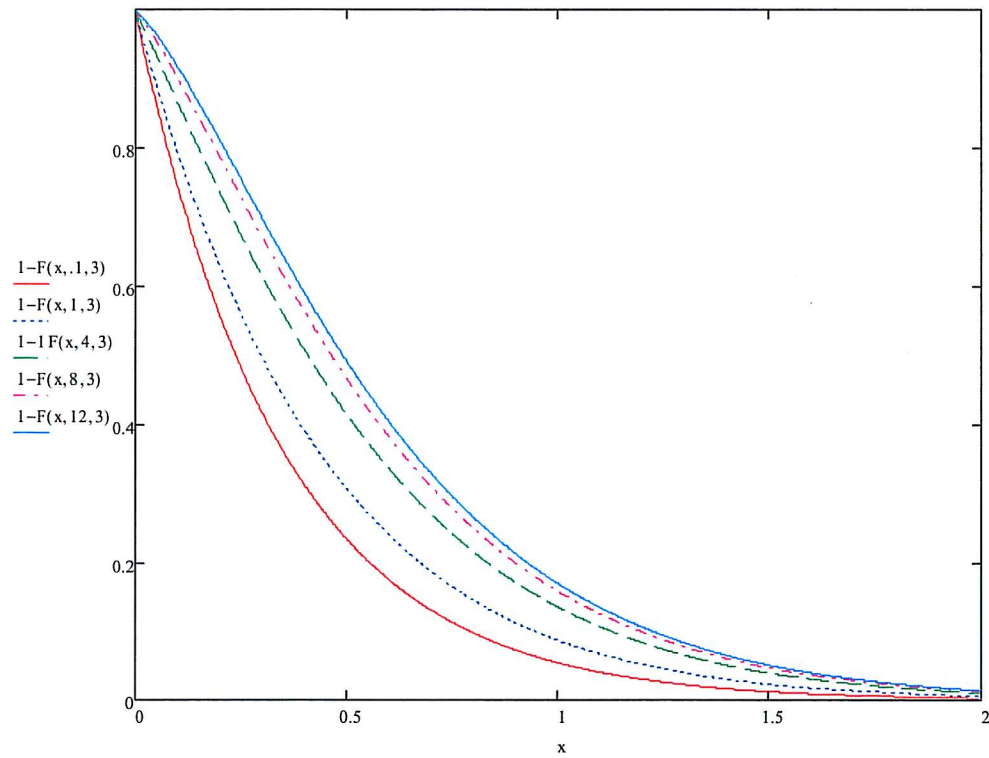
4.2 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Yaşam Fonksiyonu

Yaşam fonksiyonu, ayrıntılı olarak eşitlik (2.5) ve (2.6) da gösterilmiştir. Söz konusu iki parametrelili Lindley dağılımının yaşam fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
S(x) &= 1 - \left[1 - \frac{\theta + \alpha + \theta\alpha x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} \right] \\
&= \frac{\theta + \alpha + \theta\alpha x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklinde bulunur.

İki parametrelili Lindley dağılımının yaşam fonksiyonu grafikleri Şekil 4.5’deki gibidir;



Şekil 4.5 İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3$; $\alpha = 0.1, \alpha = 1, \alpha = 4, \alpha = 8$ ve $\alpha = 12$ parametre değerleri için yaşam fonksiyonu grafikleri

4.3 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Sayı Üretim Yöntemleri

Bu alt bölümde, iki parametrelili Lindley dağılımından sayı üretmek için iki yöntem üretilmiştir. Bunlardan birincisi karma dağılım ile sayı üretme, ikincisi ise dağılım fonksiyonu ile sayı üretme tekniğidir. Söz konusu dağılım fonksiyonu ile sayı üretme

teknikinde doğrudan eşitliğin tersi alınamadığından sayısal yaklaşımlardan biri olan Newton-Raphson yönteminden faydalanılacaktır.

4.3.1 Karma dağılım tekniği ile sayı üretme

İki parametrelili Lindley dağılımının yaşam fonksiyonu eşitlik (4.24) de gösterilmiştir.

Buradan yola çıkarak;

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta + \alpha} (1 + \theta x) e^{-\theta x} - \frac{\alpha}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} \\ &= \frac{\theta}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta + \alpha} (1 + \theta x) e^{-\theta x} \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

Söz konusu karma ağırlıkları,

$$\pi_1 = \frac{\theta}{\theta + \alpha} \quad ve \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{\theta + \alpha}$$

olmak üzere;

$$S(x) = \pi_1 e^{-\theta x} + \pi_2 (1 + \theta x) e^{-\theta x}$$

olarak yazılır.

Üstel dağılımın yaşam fonksiyonu;

$$S_1(x) = e^{-\theta x}$$

Gamma $(2, \theta)$ dağılımının yaşam fonksiyonu;

$$S_2(x) = (1 + \theta x)e^{-\theta x}$$

olmak üzere;

$$= \pi_1 S_1(x) + \pi_2 S_2(x) \quad (4.25)$$

olarak da yazılabilir.

$1/\theta$ ortalamalı üstel dağılımın yaşam fonksiyonu ile $\alpha = 2$, $\beta = \theta$ olan gamma dağılımı yaşam fonksiyonunun bir karması olarak karşımıza çıkar.

Buna göre, $u \rightarrow (0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan sayı üretilir.

Eğer; $u < \pi_1$ ise

$$S_1(x) = e^{-\theta x} = u$$

eşitliğinde x çekilerek;

$$x = \frac{-1}{\theta} \ln(u)$$

elde edilir.

Değilse;

$$S_2(x) = (1 + \theta x)e^{-\theta x} = u$$

eşitliğinden x çözümü elde edilerek sayı üretilir.

Örnek 4.1 $\alpha = 2$ ve $\theta = 1/10$ olsun

$$\pi_1 = \frac{\theta}{\theta + \alpha} = \frac{1/10}{1/10 + 2} = \frac{1}{21} = 0.0476$$

$u \rightarrow$ Düzgün Dağılımdan sayı üretilir; 0.815

Eğer; $u < \pi_1$ ise; $S_1(x) = e^{-\theta x} = u$ dan x çekilir ve;

$$x = \frac{-1}{\theta} \ln(u)$$

olarak elde edilir. Bu örnekte $u < \pi_1$ olmadığı için;

$$S_2(x) = \left(1 + \frac{1}{10}x\right) e^{\frac{-1}{10}x} = 0.815$$

eşitliğinden x çözümü 0.309 elde edilir.

4.3.2 Dağılım fonksiyonu tekniği ile sayı üretme (Newton-Raphson yardımıyla)

Üzerinde çalışılan iki parametrelili Lindley dağılımında, Newton Raphson ile sayı üretildiğinde aşağıdaki gibi bir yöntem izlenir.

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \text{ dan küçük ya da } |f(x)| \leq \delta \text{ dir.}$$

$$g(x) = S(x) - u$$

$$= \frac{\theta + \alpha + \alpha\theta x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} - u$$

$$= e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta + \alpha} (1 + \theta x) e^{-\theta x} - \frac{\alpha}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} - u$$

$$= \frac{\theta}{\theta + \alpha} e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta + \alpha} (1 + \theta x) e^{-\theta x} - u$$

$$\pi_1 = \frac{\theta}{\theta + \alpha} ve \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{\theta + \alpha}$$

olmak üzere, söz konusu ifadeler eşitlikte yerlerine konulduğunda;

$$= \pi_1 e^{-\theta x} + \pi_2 (1 + \theta x) e^{-\theta x} - u$$

olarak elde edilir. Söz konusu $g(x)$ in türevi alındığında;

$$\begin{aligned} g'(x) &= \pi_1 \theta e^{-\theta x} + \pi_2 (\theta e^{-\theta x} - \theta(1 + \theta x)) e^{-\theta x} \\ &= \theta e^{-\theta x} + [\pi_1 - \pi_2(\theta x)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (2.11) den yola çıkarak Newton Raphson yöntemine göre düzenlenildiğinde;

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= -\pi_1 \theta e^{-\theta x} + \pi_2 \theta e^{-\theta x} - \theta \pi_2 (1 + \theta x) e^{-\theta x} \\ &= \theta e^{-\theta x} [\pi_1 + \pi_2 - \pi_2(1 + \theta x)] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yerlerine konulduğunda;

$$x = x_0 - \frac{\pi_1 e^{-\theta x} + \pi_2 (1 + \theta x_0) e^{-\theta x_0}}{\theta e^{-\theta x} [\pi_1 + \pi_2 - \pi_2(1 + \theta x_0)]}$$

$$x = x_0 + \frac{\pi_1 + \pi_2(1 + \theta x_0) - ue^{-\theta x_0}}{\theta(\pi_1 + \pi_2 \theta x_0)} \quad (4.26)$$

olarak elde edilir.

4.4 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Bozulma Oranı ve Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu

Bozulma oranı $h(x)$; (2.10) eşitliğinden görüldüğü üzere söz konusu iki parametrelili Lindley dağılımının bozulma oranı;

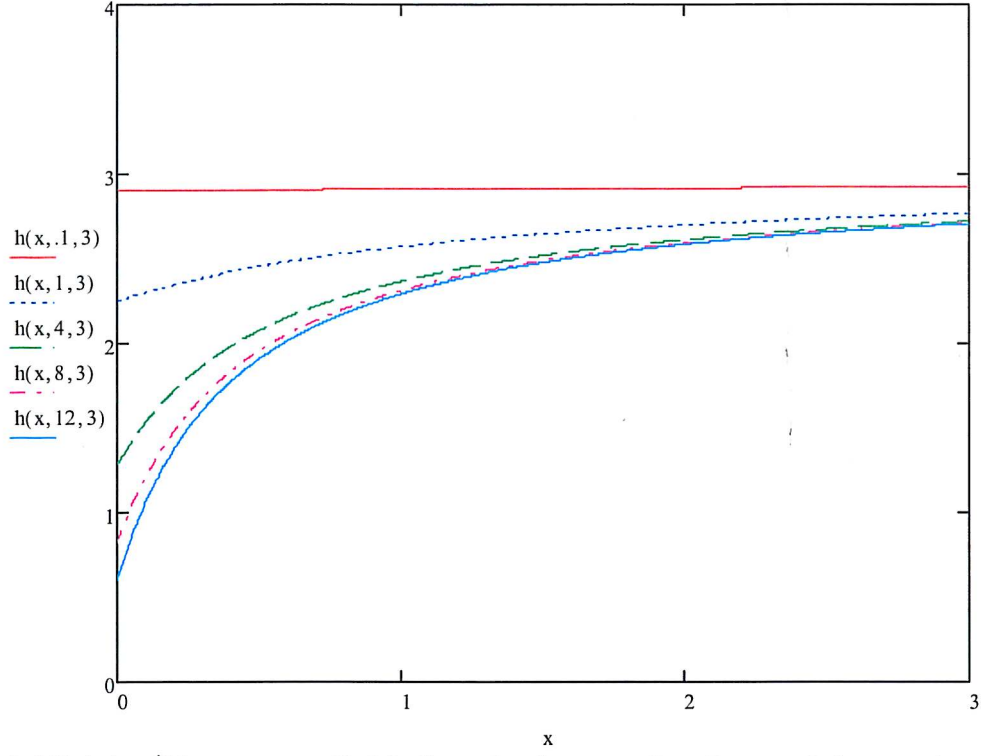
$$h(x) = \frac{\frac{\theta^2}{\theta+\alpha}(1+\alpha x)e^{-\theta x}}{1 - \left(1 - \frac{\theta+\alpha+\alpha\theta x}{\theta+\alpha}e^{-\theta x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\theta^2}{\theta+\alpha}(1+\alpha x)}{\frac{\theta+\alpha+\alpha\theta x}{\theta+\alpha}}$$

$$h(x) = \frac{\theta^2(1+\alpha x)}{(\alpha + \theta + \alpha\theta x)} \quad (4.27)$$

olarak elde edilir.

İki parametrelili Lindley dağılımının bozulma oranı grafiği Şekil 4.6'daki gibidir;



Şekil 4.6 İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3$; $\alpha = 0.1, \alpha = 1, \alpha = 4, \alpha = 8$ ve $\alpha = 12$ parametre değeri için bozulma oranı grafikleri

$x = 0$ iken $h(0) = \frac{\theta^2}{(\alpha + \theta)}$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $h(\infty) = \theta$ olup, $h(\infty) \geq h(0)$ dir.

Öte yandan;

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{\theta^2 \alpha^2}{(\alpha + \theta + \alpha \theta x)^2} \geq 0 \quad (4.28)$$

olduğundan, bozulma oranı fonksiyonu x in azalmayan bir fonksiyonudur. $x \rightarrow \infty$ olduğunda üstel dağılımın bozulma oranına kavuşmaktadır.

İki parametrelili Lindley dağılımı için ortalama kalan ömür fonksiyonu $m(x)$ (2.10) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
m(x) &= \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{\theta + \alpha + \alpha\theta x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x}\right]} \int_x^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{\theta + \alpha + \alpha\theta t}{\theta + \alpha} e^{-\theta t}\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{\left(1 - 1 + \frac{\theta + \alpha + \alpha\theta x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x}\right)} \int_x^{\infty} \left[1 - 1 + \frac{\theta + \alpha + \alpha\theta t}{\theta + \alpha} e^{-\theta t}\right] dt \\
&= \frac{\theta + \alpha}{(\theta + \alpha + \alpha\theta x)e^{-\theta x}} \frac{1}{\theta + \alpha} \int_x^{\infty} (\theta e^{-\theta t} + \alpha e^{-\theta t} + \alpha\theta t e^{-\theta t}) dt
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$t = u \text{ ise } dt = du \text{ ve } e^{-\theta x} dt = dv \text{ ise } v = \frac{-1}{\theta} e^{-\theta t}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\theta + \alpha + \alpha\theta x)e^{-\theta x}} \left(e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta} e^{-\theta x} + \alpha\theta x e^{-\theta x} + \frac{\alpha}{\theta} e^{-\theta x} \right) \\
&= \frac{e^{-\theta x}}{(\theta + \alpha + \alpha\theta x)e^{-\theta x}} \left(1 + \frac{2\alpha}{\theta} + \alpha x \right)
\end{aligned}$$

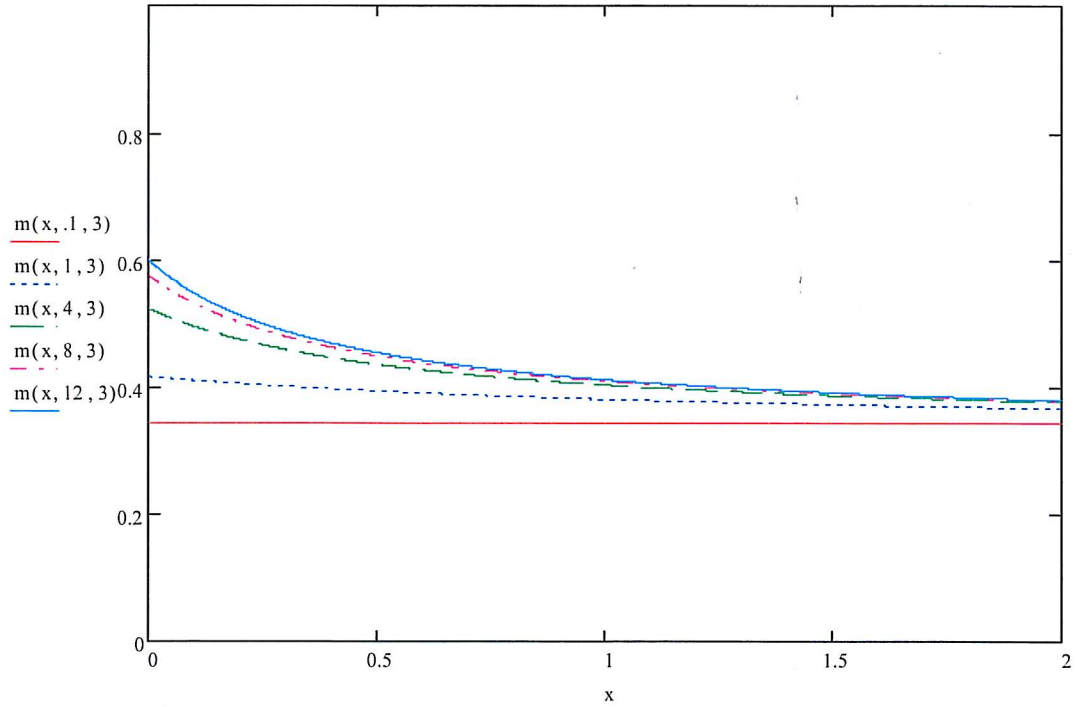
şeklinde elde edilir.

İki parametrelili Lindley dağılımının ortalama kalan ömür fonksiyonu;

$$m(x) = \frac{\theta + 2\alpha + \alpha\theta x}{\theta(\alpha + \theta + \alpha\theta x)} \quad (4.29)$$

şeklinde bulunur.

İki parametrelili Lindley dağılımının ortalama kalan ömür fonksiyonu grafiğı Şekil 4.7'deki gibidir;



Şekil 4.7 İki parametrelili Lindley dağılımının $\theta = 3$; $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$, $\alpha = 4$, $\alpha = 8$ ve $\alpha = 12$ parametre değeri için ortalama kalan ömür fonksiyonu grafikleri

4.5 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahmin Yöntemleri

Bu bölümde, α ve θ parametrelerini tahmin etmek için momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler yöntemi incelenecektir.

4.5.1 İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için momentler yöntemi

İki parametre için ilk iki örneklem momentleri (m_1 ve m_2) sırası ile birinci ve ikinci ham momentlere eşitlendiğinde;

Eşitlik (4.12) den elde edilen

$$\mu'_1 = \frac{(\theta + 2\alpha)}{\theta(\theta + \alpha)}$$

fonksiyonu ile eşitlik (4.14) den elde edilen

$$\mu'_2 = \frac{2(\theta + 3\alpha)}{\theta^2(\theta + \alpha)}$$

fonksiyonu ile denklem sistemi elde edilmiştir. Burada;

$$S_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = m_2 - (m_1)^2$$

olduğu hatırlanırsa, değişim katsayısının karesi yardımı ile;

$$\frac{S_n^2}{m_1^2} = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2} \quad (4.30)$$

$$= \frac{\frac{\theta^2 + 4\alpha\theta + 2\alpha^2}{\theta^2(\alpha + \theta)^2}}{\frac{(\theta + 2\alpha)^2}{\theta^2(\theta + \alpha)^2}} = \frac{(\theta + 2\alpha)^2 - 2\alpha^2}{(\theta + 2\alpha)^2}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlikte düzenlemeler yapıldığında;

$$\frac{m_2}{m_1^2} - 1 = 1 - 2 \frac{\alpha^2}{(\theta + 2\alpha)^2}$$

$$\frac{2\alpha^2}{(\theta + 2\alpha)^2} = 2 - \frac{m_2}{m_1^2}$$

$$\frac{\alpha^2}{(\theta + 2\alpha)^2} = 1 - \frac{m_2}{2m_1^2} \quad (4.31)$$

ifadesine ulaşılır. Eşitliğin solundaki ifade pozitif olduğundan sağ tarafın da pozitif olması gerektiğinden momentler tahmini için ilk koşul;

$$m_2 \leq 2m_1^2 \quad (4.32)$$

dir. Bu kabul altında; θ için bir eşitlik aşağıdaki adımlar ile elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\theta + 2\alpha} &= \sqrt{1 - \frac{m_2}{2m_1^2}} \\ \frac{\theta + 2\alpha}{\alpha} &= \left(1 - \frac{m_2}{2m_1^2}\right)^{-1/2} \\ \frac{\theta}{\alpha} &= \left(1 - \frac{m_2}{2m_1^2}\right)^{-1/2} - 2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$\left(1 - \frac{m_2}{2m_1^2}\right)^{-1/2} - 2$ olarak bir k değişkeni atandığında, tanımı gereği $k \geq 0$ olmalıdır.

Buna göre,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{m_2}{2m_1^2}\right)^{1/2}} \geq 2 \quad (4.34)$$

olması gerektiğinden

$$\frac{1}{4} > 1 - \frac{m_2}{2m_1^2}$$

$$\frac{m_2}{2m_1^2} > \frac{3}{4}$$

dolayısı ile (4.32) eşitliğinin sonucu ile birleştirildiğinde momentler tahmin edicisinin var olması için gerekli koşul,

$$\frac{3}{4} \leq \frac{m_2}{2m_1^2} \leq 1 \quad (4.35)$$

şeklinde verilir. $\theta = \alpha k$ olmak üzere, birinci moment eşitliğinde yerine konulduğunda,

$$m_1 = \frac{(\theta + 2\alpha)}{\theta(\theta + \alpha)} = \frac{\alpha k + 2\alpha}{\alpha k(\alpha k + \alpha)} = \frac{k + 2}{\alpha k(k + 1)}$$

eşitliğinden θ çekilirse,

$$\hat{\alpha} = \frac{k + 2}{m_1 k (k + 1)} \quad (4.36)$$

olarak elde edilir. Buradan da

$$\hat{\theta} = \frac{k + 2}{m_1(k + 1)} \quad (4.37)$$

şeklinde elde edilir.

Momentler yöntemine başka bir yaklaşımda bulunalım;

$$\frac{m_2}{2m_1^2} = \frac{(\theta + 3\alpha)(\theta + \alpha)}{(\theta + 2\alpha)^2} = m^* \quad (4.38)$$

eşitliğinden θ için ikinci dereceden polinomun θ ya bağlı uygun çözümü;

$$\hat{\alpha} = \frac{2(1 - m^*) \theta + \theta \sqrt{1 - m^*}}{4m^* - 3} \quad (4.39)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi θ için eşitlik bulmaya çalışalım;

$$\frac{m_2}{2m_1} = \frac{\theta + 3\alpha}{(\theta + 2\alpha)\theta}$$

oranı dikkate alındığında;

$$\theta^2 m_2 + 2\alpha m_2 \theta - 2m_1 \theta - 6m_1 \alpha = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan θ için ikinci dereceden polinom eşitliği aşağıdaki gibi olur:

$$\alpha(2\theta m_2 - 6m_1) - 2m_1 \theta + \theta^2 m_2$$

İfade biraz düzenlenirse

$$\theta^2 m_2 - 2(m_1 - \alpha m_2)\theta - 6m_1 \alpha = 0$$

olarak elde edilir. Bu polinomun uygun çözümü

$$\hat{\theta} = \frac{m_1}{m_2} - \hat{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2} - \hat{\alpha}\right)^2 + 6\hat{\alpha} \frac{m_1}{m_2}} \quad (4.40)$$

şeklindedir. Bu iki çözüm birbirlerine bağlı olarak parametre içermektedir. Dolayısı ile yinelemeli adımlar ile başlangıç değerleri ile parametre tahminleri elde edilir.

Aşağıda hacimleri $N=10$, $N=50$, $N=100$ ve $N=200$ olan ve $R=1000$ tekrarlı iki parametrelili Lindley dağılımının θ parametresi için simülasyon, RMSE değerleri ve parametre tahminleri (momentler) Çizelge 4.1- 4.4'deki gibidir;

Çizelge 4.1 $N=10$ örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 10$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0443 (0.0057)	0.0622 (0.0122)	0.0610 (0.0110)	0.0530 (0.0030)	0.0489 (0.0011)	0.0657 (0.0157)	0.0378 (0.012)
0.1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.1102 (0.0102)	0.0615 (0.0385)	0.0869 (0.0131)	0.1533 (0.0533)	0.1666 (0.0666)	0.0907 (0.0093)	0.1039 (0.003)
1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	2.0525 (1.0525)	0.8815 (0.1185)	0.9846 (0.0154)	0.9451 (0.0549)	0.8239 (0.1761)	0.9738 (0.0262)	1.0498 (0.049)
3	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	4.8861 (1.8861)	3.4556 (0.4556)	2.0267 (0.9733)	3.5057 (0.5057)	4.2055 (1.2055)	2.3603 (0.6397)	2.5850 (0.425)
5	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	7.9251 (2.9251)	6.6900 (1.6900)	4.2512 (0.7488)	4.5006 (0.4994)	4.4650 (0.5350)	4.9151 (0.0849)	5.3423 (0.342)

Çizelge 4.2 N=50 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 50$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0337 (0.0162)	0.0445 (0.0054)	0.0521 (1.2386)	0.0377 (0.0123)	0.0442 (0.0058)	0.0515 (0.0015)	0.0452 (0.0048)
0.1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0816 (0.0184)	0.0901 (0.0099)	0.1196 (0.0196)	0.1115 (0.0115)	0.0915 (0.0085)	0.0951 (0.0049)	0.0906 (0.0094)
1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.9957 (0.0043)	0.8792 (0.1207)	0.9947 (0.0053)	0.8696 (0.1304)	0.9939 (0.0061)	1.0734 (0.0734)	0.9983 (0.0017)
3	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	3.2838 (0.2838)	3.5189 (0.5189)	2.7990 (0.2010)	2.6953 (0.3047)	2.7521 (0.2479)	2.7518 (0.2482)	3.2444 (0.2444)
5	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	5.7790 (0.7790)	5.5471 (0.5471)	4.2685 (0.5848)	4.0055 (0.9944)	5.9548 (0.9548)	3.7884 (1.2115)	4.3388 (0.6611)

Çizelge 4.3 N=100 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 100$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0476 (0.0024)	0.0566 (0.066)	0.0511 (0.0011)	0.0488 (0.0012)	0.0508 (0.0081)	0.0488 (0.0012)	0.0458 (0.0042)
0.1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0841 (0.0159)	0.0883 (0.0117)	0.0919 (0.0081)	0.0957 (0.0043)	0.1027 (0.0027)	0.0984 (0.0016)	0.1037 (0.0037)
1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.9590 (0.0410)	1.0601 (0.0601)	0.9826 (0.0174)	0.9148 (0.0852)	0.9164 (0.0836)	0.8365 (0.1635)	0.8990 (0.1010)
3	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	3.2323 (0.2323)	2.4939 (0.5061)	2.9092 (0.0908)	2.3301 (0.6699)	2.5698 (0.4302)	2.6163 (0.3837)	2.8768 (0.1232)
5	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	4.8509 (0.1491)	4.5147 (0.4853)	5.3161 (0.3161)	4.2367 (0.7633)	4.8942 (0.1058)	4.6143 (0.3857)	5.1375 (0.1375)

Çizelge 4.4 N=200 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (momentler), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 200$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0468 (0.0032)	0.0526 (0.0026)	0.0434 (0.0066)	0.0523 (0.0023)	0.0524 (0.0024)	0.0459 (0.0041)	0.0452 (0.0048)
0.1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0911 (0.0089)	0.0988 (0.0012)	0.1000 (8.87e-07)	0.1002 (2.21e-04)	0.0937 (0.0063)	0.0999 (7.02e-05)	0.0964 (0.0036)
1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.8348 (0.1652)	0.8254 (0.1746)	0.8838 (0.1162)	0.9310 (0.0690)	0.9405 (0.0595)	0.8999 (0.1001)	1.0568 (0.0568)
3	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	2.8625 (0.1375)	2.7883 (0.2117)	2.5476 (0.4524)	2.8031 (0.1969)	2.7029 (0.2971)	2.6701 (0.3299)	2.7826 (0.2174)
5	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	5.0332 (0.0332)	5.1998 (0.1998)	4.1974 (0.8026)	4.3610 (0.6390)	4.5446 (0.4554)	4.7569 (0.2431)	4.4079 (0.5921)

Yukarıda hacimleri N=10, N=50, N=100 ve N=200 olan ve R=1000 tekrarlı iki parametrelili Lindley dağılımının θ tahmin edicisi için simülasyon, RMSE değerleri ve parametreleri için moment tahmin edicilerine bakıldığında; Lindley dağılımını veren iki farklı karma dağılımın varlığı söz konusu olduğundan dolayı parametre tahmin problemi vardır. θ parametresinin küçük değerlerinde örneklem hacmine bağlı kalınmaksızın iyi sonuçlar verebildiği söylenebilir. α parametresinin tahmininde istenilen sonuçlara ulaşılamadığı ve yüksek RMSE ve gerçek değerden uzak tahminler elde edildiği ve gözlem sayısı artmış olsa bile iyi sonuç elde edilemediği için sadece θ parametresine yer verilmiştir. Sonuç olarak, θ parametresinin α parametresine göre daha iyi tahmin edilebildiği gözlemlenmiştir.

4.5.2 İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için en küçük kareler yöntemi

Bu bölümde iki parametrelili Lindley dağılımının parametreleri en küçük kareler yöntemi ile nümerik yollara başvurulurak tahmin edilecektir.

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ Lindley dağılımından oluşan rasgele örneklem ve $X_{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sıralama örneklemi ve sıralanmış gözlem değerleri $x_{(1)} < x_{(2)} < x_{(3)} < \dots < x_{(n)}$ gözönüne alınarak söz konusu toplam Q ile gösterilmek üzere;

(2.3) numaralı eşitlikte gösterilen ifade;

$$Q(\alpha, \theta) = \underset{(\alpha, \theta) \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^m [F(x_{(i)}) - \hat{F}(x_{(i)})]^2 \quad (4.41)$$

olacak şekilde (α, θ) parametrelili Lindley dağılımına uygun olarak parametre değerlerini bulmayı amaçlamıştır.

Burada

$$Q(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{\alpha \theta x_{(i)}}{\alpha + \theta} e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{i}{n+1} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\theta x_{(i)}} - \frac{\alpha \theta x_{(i)}}{\alpha + \theta} e^{-\theta x_{(i)}} - u_{(i)} \right)^2$$

$$1 - u_{(i)} = e^{-\theta x_{(i)}} + \frac{\alpha \theta x_{(i)}}{\alpha + \theta} e^{-\theta x_{(i)}}$$

Her iki tarafın da logaritması alınarak;

$$\ln(1 - u_{(i)}) = -\theta x_{(i)} + \ln\left(1 + \frac{\alpha \theta x_{(i)}}{\alpha + \theta}\right)$$

eşitliği bulunur.

Bulunan ifadeler eşitlikte yerlerine konulduğunda;

$$Q(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^n \left(\theta x_{(i)} - \ln\left(1 + \frac{\alpha \theta x_{(i)}}{\alpha + \theta}\right) + \ln(1 - u_{(i)}) \right)^2 \quad (4.42)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, α ve θ parametrelerinin kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenip α ve θ için çözümü nümerik yollarla elde edilir.

Aşağıda hacimleri $N=10$, $N=50$, $N=100$ ve $N=200$ olan ve $R=1000$ tekrarlı iki parametrelili Lindley dağılımının θ için simülasyon, RMSE değerleri ve parametre tahminleri (EKK) Çizelge 4.5- 4.8’de gösterildiği gibidir;

Çizelge 4.5 N=10 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (EKK), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 10$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$	0.0411	0.0450	0.0451	0.0461	0.0465	0.0464	0.0463
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(0.0133)	(0.0125)	(0.0121)	(0.0126)	(0.0124)	(0.0121)	(0.0122)
0.1	$\hat{\theta}$	0.0780	0.0878	0.0911	0.0926	0.0934	0.0927	0.0925
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(0.0319)	(0.0247)	(0.0248)	(0.0246)	(0.0252)	(0.0252)	(0.0246)
1	$\hat{\theta}$	0.8644	0.7912	0.7887	0.8434	0.8816	0.8946	0.8970
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(0.4337)	(0.3806)	(0.2837)	(0.2520)	(0.2491)	(0.2524)	(0.2474)
3	$\hat{\theta}$	2.7177	2.5392	2.4016	2.3395	2.4447	2.5524	2.5736
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(1.1837)	(1.3803)	(1.2466)	(0.9572)	(0.9917)	(0.7499)	(0.7650)
5	$\hat{\theta}$	4.5778	4.3236	4.2625	3.8726	3.9454	4.0259	4.1142
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(1.9368)	(2.1332)	(2.3921)	(1.8061)	(1.6490)	(1.3614)	(1.3153)

Çizelge 4.6 N=50 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (EKK), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 50$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$	0.0429	0.0465	0.0470	0.0476	0.0477	0.0478	0.0477
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(0.0083)	(0.0061)	(0.0063)	(0.0061)	(0.0059)	(0.0060)	(0.0061)
0.1	$\hat{\theta}$	0.0822	0.0907	0.0931	0.0949	0.0955	0.0956	0.0955
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(0.0198)	(0.0134)	(0.0124)	(0.0121)	(0.0117)	(0.0123)	(0.0123)
1	$\hat{\theta}$	0.7928	0.7803	0.8186	0.8829	0.9052	0.9288	0.9314
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(0.2578)	(0.2379)	(0.2004)	(0.1479)	(0.1394)	(0.1259)	(0.1223)
3	$\hat{\theta}$	2.5676	2.3263	2.3271	2.4551	2.5559	2.6461	2.6736
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(0.7423)	(0.7745)	(0.7428)	(0.6084)	(0.5189)	(0.4530)	(0.4298)
5	$\hat{\theta}$	4.4154	3.9690	3.8807	3.8544	4.1124	4.2281	4.3191
	($RMSE_{\hat{\theta}}$)	(1.1246)	(1.3174)	(1.2739)	(1.3140)	(0.9953)	(0.8879)	(0.8044)

Çizelge 4.7 N=100 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (EKK), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 100$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0438 (0.0069)	0.0473 (0.0046)	0.0478 (0.0044)	0.0484 (0.0041)	0.0485 (0.0043)	0.0486 (0.0041)	0.0483 (0.0042)
0.1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0835 (0.0176)	0.0923 (0.0104)	0.0944 (0.0094)	0.0961 (0.0088)	0.0964 (0.0085)	0.0969 (0.0083)	0.0968 (0.0086)
1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.7914 (0.2309)	0.7956 (0.2149)	0.8367 (0.1751)	0.8991 (0.1218)	0.9246 (0.1044)	0.9412 (0.0981)	0.9425 (0.0939)
3	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	2.5651 (0.5962)	2.3477 (0.7073)	2.3485 (0.6856)	2.4977 (0.5390)	2.5918 (0.4524)	2.6912 (0.3705)	2.7142 (0.3589)
5	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	4.4204 (0.9210)	3.9785 (1.1441)	3.8944 (1.1809)	4.0311 (1.0218)	4.1594 (0.8933)	4.3132 (0.7551)	4.3678 (0.7127)

Çizelge 4.8 N=200 örneklem hacmi ve farklı parametre değerleri için parametre tahminleri (EKK), yan ve RMSE değerleri (α biliniyorken)

$R = 1000; N = 200$								
θ		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$	$\alpha = 10$
0.05	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0444 (0.0061)	0.0477 (0.0034)	0.0485 (0.0029)	0.0488 (0.0029)	0.0488 (0.0030)	0.0489 (0.0029)	0.0490 (0.0031)
0.1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.0840 (0.0165)	0.0935 (0.0080)	0.0955 (0.0071)	0.0971 (0.0062)	0.0977 (0.0062)	0.0979 (0.0060)	0.0979 (0.0060)
1	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	0.8072 (0.2056)	0.8076 (0.1979)	0.8430 (0.1637)	0.9109 (0.1014)	0.9350 (0.0830)	0.9458 (0.0756)	0.9543 (0.0720)
3	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	2.5836 (0.5011)	2.3779 (0.6502)	2.3826 (0.6357)	2.5210 (0.4986)	2.6289 (0.3952)	2.7233 (0.3104)	2.7547 (0.2864)
5	$\hat{\theta}$ ($RMSE_{\hat{\theta}}$)	4.4319 (0.7587)	4.0343 (1.0321)	3.9588 (1.0844)	4.0762 (0.9531)	4.1946 (0.8386)	4.3574 (0.6803)	4.4387 (0.6100)

Yukarıda hacimleri $N=10$, $N=50$, $N=100$ ve $N=200$ olan ve $R=1000$ tekrarlı iki parametrelili Lindley dağılımının θ tahmin edicisi için simülasyon, RMSE değerleri ve parametrelerin tahmini için en küçük karelerine bakıldığında; söz konusu parametrenin gözlem sayısı arttıkça iyi sonuçlar verebildiği ve gerçek değere yaklaşabildiği söylenebilir. α parametresinin tahmininde istenilen sonuçlara ulaşılamadığı ve yüksek RMSE ve gerçek değerden uzak tahminler elde edildiği ve gözlem sayısı artmış olsa bile iyi sonuç elde edilemediği için sadece θ parametresinin tahminine yer verilmiştir.

4.5.3 İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n(\alpha, \theta)$ parametrelili Lindley dağılımından bir rasgele örneklem olmak üzere, bu örnekleme dayalı olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \theta) &= f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \theta, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta, \alpha) \\
 &= \left(\frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (\alpha x_1 + 1) e^{-\theta x_1} \right) \left(\frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (\alpha x_2 + 1) e^{-\theta x_2} \right) \dots \left(\frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (\alpha x_n + 1) e^{-\theta x_n} \right) \\
 &= \left(\frac{\theta^2}{\theta + \alpha} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha x_i + 1) e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu;

$$\ln L = 2n \ln \theta - n \ln(\theta + \alpha) + \sum_{i=1}^n \ln(\alpha x_i + 1) - \theta \sum_{i=1}^n x_i \tag{4.44}$$

şeklinde elde edilir. Buradan θ parametresine göre birinci kısmi türev alındığında;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - n \frac{1}{\theta + \alpha} - n \bar{X} = 0$$

elde edilir.

Yukarıdaki denkleme göre elde edilen θ ya ait ikinci dereceden polinomun kökü, bizim istediğimiz θ nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olacağı için söz konusu denklemin kökleri bulunur.

$$\frac{2\theta + 2\alpha - \theta - \bar{X}(\theta^2 + \alpha\theta)}{\theta^2 + \theta\alpha} = 0$$

Denkleminde pay ifadesi θ nın ikinci dereceden polinomu şeklinde yazılıp sıfıra eşitlenirse uygun çözüm;

$$\hat{\theta}_{E\check{O}T} = \frac{(1 - \alpha\bar{X}) + \sqrt{(1 - \alpha\bar{X})^2 + 8\alpha\bar{X}}}{2\bar{X}} \quad (4.45)$$

olarak elde edilir.

α için en çok olabilirlik tahmini elde edilmek istendiğinde;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\theta + \alpha} + n \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\alpha x_i + 1} = 0 \quad (4.46)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak, yukarıdaki ifadelerde α ve θ parametrelerinin kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenip α ve θ için çözümü nümerik yollarla elde edilir. Yani sayısal olarak çözüm yoluna gidilir.

Hacimleri $N=10$, $N=50$, $N=100$ ve $N=200$ olan ve $R=1000$ tekrarlı iki parametrelili Lindley dağılımının θ parametresi için (4.45) eşitliği ile verilen EÇÖ tahmin edicisi,

momentler yöntemi ile elde edilen tahmin edici ile aynıdır. Bu nedenle, bu bölümde simülasyona yer verilmemiştir.



5. VERİ SETİ ÜZERİNDE UYGULAMALAR

İki parametrelili Lindley dağılımı, yaşam fonksiyonu verilerinin analizinde etkili olmasının yanında, aşağıdaki örneklerden de görüleceği üzere işsizlik verilerinin karşılaştırılmasında, aylık ortalama güneş lekeleri verilerinin analizinde, farklı sayıda banka müşterilerinin bekleme sürelerinin analizinde, yeraltı sularında uranyum miktarı araştırmalarında, yoksulluk seviyeleri araştırmalarında, Kevlar 49/epoxy küresel basınç kabının farklı basınçlarda çatlamaya dayanma sürelerinin tahminlerinde, ülkelere göre nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verilerinin analizinde, yıllara ve ülkelere göre nüfus başına çocukların ölüm oranı araştırılmasında da etkili olmuştur. 100 adet veri seti üzerinde iki parametrelili Lindley dağılımının uygunluğu araştırılmış ve dağılımın veri setleri üzerindeki uygulanabilirliği incelenmiştir.

Gerçek veri setleri üzerinde Kolmogorov-Smirnov istatistiği kullanılarak bu verilerin dağılıma uygunluğu Matlab programı yardımı ile test edilmiştir. Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICC), Bayes Bilgi Kriteri (BIC) ölçütler göz önüne alınarak, bu veri setlerini kullanan diğer yazarların önerdiği dağılımlar incelenmiş ve Easyfit programı yardımıyla veri setlerinin bilindik dağılımlarla karşılaştırılması yapılmıştır.

Veri Seti-1: Güneş lekelerinin en yüksek olduğu noktada ortaya çıkan Malign Melanom Sıklığı

“Melanom Etiyolojisi, karmaşık ve kompleks bir yapı olup; travma, kalıtım ya da hormonal aktivite etkilerini içerebilir. Özellikle, güneş ışınlarına maruz kalmak, melanom patogenezinde rol oynayabilir ya da melanom oluşumunda söz konusu olabilir. Melanom, buğday tenli kişilerde ve güneş ışınlarına maruz kalan deri bölgelerinde daha sık görülür. Beyaz toplumlarda, güneş ışınlarının daha yoğun olduğu ekvatora yakın alanlarda melanom daha yaygındır.

Aşağıdaki veriler, güneş lekelerinin sayısal ilişki sayısını göstermektedir. Connecticut Tümör Kayıt Ofisi’nden alınmış olan veriler 1936’dan 1972’ye kadar yaşa göre düzeltilmiş melanom görülme sıklığını vermektedir. Amerika Birleşik Devletleri’nde Connecticut’ın, devlet nüfus tabanlı kanser istatistiklerinde en uzun geçmişe sahip olduğu bilinmektedir. Güneş döngüleri ile melanom pigmentleri arasındaki ilişkiyi destekleyen hipotezler söz konusu olup, melanom pigmenti güneşe maruz kaldığında güneş radyasyonunun melanomu gelişimini tetiklediğini klinik olarak belirginleştirdiğini ispatlayan kanıtlar vardır. Görülme sıklığı 100 000 nüfus başına vaka sayısıdır” (Andrews ve Herzberg 2012).

Çizelge 5.1 Güneş lekelerinin sayısal ilişkisi

40	115	100	80	60	40	23	10	10	25
75	145	130	130	80	65	20	10	5	10
60	190	180	175	120	50	35	20	10	15
30	60	105	105	105	80	65			

Çizelge 5.2 Güneş lekelerinin sayısal ilişkisi model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.052684 0.024188	385.453	389.453	389.806	392.675	0.1002	0.8150

Sonuç olarak, güneş lekelerinin en yüksek olduğu noktada ortaya çıkan Malign Melanom Sıklığı verilerine bakıldığında, Lindley dağılımı ile iyi uyum gösterdiği söylenebilir.

Aşağıda Veri seti-2 ile Veri seti-39 arasındaki veriler, 1948’den 1981 tarihine kadar 16-19 yaş arasındaki erkeklerin, 20 yaş ve üzeri erkeklerin, 16-19 yaş arasındaki kadınların ve 20 yaş ve üzerindeki kadınların aylık işsizlik oranlarını göstermektedir.

Veri Seti-2: 1948-1981 Yılları Arası Amerika Birleşik Devletleri İşsizlik Verileri

“Birleşik Devletler sivil nüfusunun iş gücü statüsü üzerine yapılmış istatistikler 60 000 hane halkının katıldığı işçi istatistikleri için Nüfus Sayım Bürosu tarafından yürütülen aylık bir araştırmadan (Güncel Nüfus Araştırması) elde edilmiştir. 16 yaş ve üzerindeki katılımcılarla iş gücü statüsü hakkında bilgi edinmek için görüşülmüştür. Bu anket ayın 12. günü de dâhil olmak üzere bir haftalık statü ve aktivitelerle ilişkilidir.

İnsanlar araştırma haftası boyunca çalışmayan işsizler, son dört hafta içinde iş bulmak için özel bir çaba sarf edenler ve araştırma haftası boyunca çalışanlar olarak sınıflandırılmıştır.

Tahmin edildiği gibi Birleşik Devletler işsizlik serisi iş döngüsü üzerinde güçlü bir şekilde hareket eder. Bu seriler ayrıca düzenli bir şekilde tekerrür eden mevsimsel hareketler sergiler. Genç insanların işsizlik oranı tipik olarak okulun kapalı olduğu yaz aylarında çarpıcı bir şekilde artar ve okulların tekrar açıldığı sonbaharda düşer. Yetişkin erkeklerin işsizlik oranı tipik olarak yılın ilk zamanlarında zirve yapar ve yaz ayında ve sonbahar başlarında en düşük hale gelir. Yetişkin kadın işsizlik oranları ise yılın ilk ayı boyunca yükselerek zirve yapmakta olup sonrasında ilkbahar aylarında ve yaz ayları başlangıcında inişe geçer, yaz ayının sonlarında ve sonbahar başlarında tekrar yükselir, sadece Noel sonrasına kadar düşer.

Tüm bu seriler, yıl içinde kendi hareket modellerini göstermenin yanı sıra toplam eğilim döngülerine göre farklılık gösterir. Genç işsizlerin mevsimlik hareketleri zaman içinde sabit bir şekilde devam eder. Yetişkin erkek işsizlik oranı iş döngüsünden daha çok etkilenecek çarpımlı bir yapı sergiler ve bu serilerin derecesine göre sezonluk hareketler şekillenir. Yetişkin kadınların işsizlik oranı ise tam olarak çarpımlı ya da sabit olmayan karışık bir durum sergiler.

Bu seriler birbirinden bağımsız olarak mevsimlik şekilde İşçi İstatistikleri Bürosu tarafından ayarlanmaktadır. Bunlar toplam mevsimlik işsizlik derecesinin ölçülmesinde ve sonrasında işsizlik oranının hesaplamasında önemli bir parça olarak kullanılmaktadır. Burada gösterilen bu bilgiler mevsimlik olarak ayarlanmamıştır” (Andrews ve Herzberg

2012). 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları aşağıdaki gibidir:

Çizelge 5.3 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları

310	294	448	204	244	174	374	283	290	256
391	382	330	481	425	469	425	419	359	425
417	405	500	655	835	651	715	969	951	936
895	886	847	1030						

Çizelge 5.4 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	P Değeri
Lindley Dağılımı	99118521561.41920 0.00385	474.707	478.707	479.094	481.760	0.1829	0.1814

Veri Seti-3: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.5 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları

298	318	337	171	198	166	324	243	227	290
393	346	424	463	396	465	475	416	411	372
400	413	475	638	747	605	672	931	906	902
851	833	774	946						

Çizelge 5.6 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	387041742881.3648 0.0040	471.428	475.281	475.815	478.481	0.1802	0.1945

Veri Seti-4: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.7 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları

225	301	291	149	166	132	277	212	219	248
377	330	367	443	355	480	490	463	397	363
320	352	483	574	617	592	588	892	911	765
734	733	720	860						

Çizelge 5.8 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	407346989005.55 690.0044	466.11	470.11	470.50	473.16	0.1519	0.3745

Veri Seti-5: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.9 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları

185	349	328	147	188	140	314	244	279	257
415	354	388	445	416	585	527	535	496	337
292	304	440	552	554	527	567	828	812	735
636	675	848	856						

Çizelge 5.10 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	271649062163.04 0.0044	465.6	469.6	470.02	472.6	0.171	0.243

Veri Seti-6: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.11 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları

385	550	500	305	324	280	385	437	494	507
634	603	749	811	699	831	872	844	777	753
778	675	947	980	929	898	1057	1350	1172	1234
994	1004	1240	1190						

Çizelge 5.12 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	143239886946.08 0.0026	499.22	503.22	503.61	506.27	0.190	0.148

Veri Seti-7: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.13 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları

356	478	361	278	266	234	427	354	359	390
580	523	548	608	469	670	569	662	576	620
627	663	807	926	815	839	949	1218	1101	1052
990	956	1168	1038						

Çizelge 5.14 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	109471751424.86 0.0030	489.72	493.72	494.11	496.78	0.2021	0.1078

Veri Seti-8: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.15 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları

274	408	271	186	178	176	346	272	241	270
414	436	456	472	380	474	483	456	382	455
396	407	586	680	702	614	683	977	900	868
750	777	936	883						

Çizelge 5.16 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	169616163350.72 0.0040	472.55	476.55	476.94	479.61	0.1786	0.2025

Veri Seti-9: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.17 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları

197	294	228	152	176	141	279	223	178	229
383	336	329	388	338	416	394	378	352	375
339	407	581	597	640	594	771	863	841	798
727	761	853	843						

Çizelge 5.18 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	157786466270.3 00.0044	466.99	470.99	471.38	474.47	0.132	0.549

Veri Seti-10: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.19 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

166	290	187	128	122	162	188	218	178	226
335	349	370	373	307	376	327	398	317	431
368	403	603	637	588	576	708	838	853	751
754	709	910	857						

Çizelge 5.20 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	131015981302.56 0.0045	466.60	470.60	470.99	473.65	0.113	0.730

Veri Seti-11: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.21 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

189	305	177	180	162	175	239	233	262	311
342	327	365	377	380	441	424	359	342	450
385	420	620	660	669	672	824	866	922	820
792	777	953	1016						

Çizelge 5.22 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	59379447649.48 0.00414	471.84	475.84	476.23	478.90	0.145	0.427

Veri Seti-12: 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.23 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

203	351	213	168	183	252	276	258	226	298
372	399	400	423	328	414	417	405	388	402
410	410	669	704	675	651	835	877	886	725
817	771	874	1003						

Çizelge 5.24 16-19 yaş arasındaki erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	22612562508.24 0.00041	471.45	475.45	475.84	478.50	0.1505	0.3857

Veri Seti-13: 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.25 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları

1245	2154	1930	859	862	894	2099	1485	1428	1353
2804	1689	1740	2522	1807	1770	1467	1320	941	955
843	810	1404	1914	1858	1558	1624	3518	2761	2637
2147	2010	3410	3400						

Çizelge 5.26 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	14772756040.141 80.00111	557.26	561.26	561.64	564.31	0.2274	0.0500

Veri Seti-14: 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.27 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

981	2419	1074	856	702	788	1720	1118	1028	1337
2072	1630	1806	1880	1536	1466	1394	1023	839	893
810	906	1641	1769	1667	1281	1863	3060	2710	2371
1979	2152	3210	3421						

Çizelge 5.28 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	30344965568.450 0.00123	550.98	554.98	555.37	558.03	0.222	0.058

Veri Seti-15: 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.29 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

1163	2108	1186	928	752	1099	1739	1253	1281	1690
2132	2021	2085	2008	1826	1769	1395	1108	971	968
844	909	1821	1939	1599	1396	2146	3184	2978	2387
2054	2272	3308	3773						

Çizelge 5.30 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	53025293883.16 0.00113	555.83	559.83	560.22	562.88	0.2183	0.0667

Veri Seti-16: 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.31 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

1344	2270	1343	914	835	1529	1831	1433	1543	2062
2497	1970	2638	2309	2151	2023	1676	1249	1149	1069
873	1052	2115	2100	1684	1582	2665	3297	3196	2485
2309	2429	3345	4343						

Çizelge 5.32 20 yaş ve üzeri erkeklerin 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	173578330673.66 0.0101	563.27	567.27	567.66	570.32	0.2069	0.0937

Veri Seti-17: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.33 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları

116	149	187	125	132	108	186	133	155	143
188	166	224	271	266	278	295	340	312	276
265	276	385	463	514	448	568	764	746	803
740	684	700	704						

Çizelge 5.34 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	115538753675.05 0.0056	454.54	458.54	458.93	461.60	0.1240	0.6278

Veri Seti-18: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.35 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları

153	180	210	130	106	118	192	144	183	173
195	153	232	277	263	295	288	339	275	346
352	323	378	474	526	558	556	698	718	718
696	652	700	717						

Çizelge 5.36 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	165780129185.92 0.0055	454.01	458.01	458.39	461.06	0.1170	0.6967

Veri Seti-19: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.37 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları

142	169	196	142	100	90	168	136	196	146
168	195	232	291	264	280	280	325	288	276
322	322	387	507	537	507	565	758	732	765
719	640	682	726						

Çizelge 5.38 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	198154052153.85 0.0055	454.87	458.87	459.25	461.92	0.1162	0.7048

Veri Seti-20: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.39 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları

139	171	122	113	88	108	179	138	159	149
241	249	237	260	309	300	341	410	390	260
299	322	400	460	522	524	452	643	656	691
647	648	594	705						

Çizelge 5.40 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	P Değeri
Lindley Dağılımı	94693672455.28 0.00570	451.88	455.88	456.27	458.94	0.0977	0.8704

Veri Seti-21: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.41 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları

93	193	178	106	154	98	197	180	235	227
288	274	297	334	321	454	438	419	476	269
324	319	335	433	405	469	528	741	641	684
706	687	769	772						

Çizelge 5.42 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mayıs ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	P Değeri
Lindley Dağılımı	85680948845.10 0.00521	456.86	460.86	461.25	463.92	0.1201	0.6665

Veri Seti-22: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.43 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları

323	388	344	264	264	206	313	297	463	391
511	508	569	686	542	762	774	745	827	710
820	761	835	902	959	905	1010	1101	1095	1157
1071	1061	1067	1068						

Çizelge 5.44 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	107076391345.34 0.0029	494.42	498.42	498.80	501.47	0.1736	0.2289

Veri Seti-23: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.45 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları

256	356	291	218	216	158	250	215	299	293
425	345	341	519	419	547	464	483	571	584
675	587	644	805	816	742	914	976	928	929
964	875	969	933						

Çizelge 5.46 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	128641402493.27 0.0036	480.82	484.82	485.20	487.87	0.1508	0.3838

Veri Seti-24: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.47 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları

152	230	179	154	156	110	194	189	180	200
249	276	273	384	305	327	374	325	403	446
427	458	552	596	651	570	623	863	911	808
817	791	814	799						

Çizelge 5.48 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	98046355860.35 0.00460	466.67	470.67	471.06	473.72	0.1261	0.6077

Veri Seti-25: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.49 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları

138	271	178	152	136	108	194	178	172	161
260	226	264	357	252	346	327	359	324	394
402	435	553	597	626	625	720	826	781	833
809	777	762	832						

Çizelge 5.50 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	123152097035.53 0.0047	465.51	469.51	469.89	472.56	0.1070	0.7927

Veri Seti-26: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.51 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

90	190	136	100	126	116	167	137	146	131
210	215	251	291	252	349	357	325	343	397
355	434	531	528	566	552	704	779	734	750
699	763	706	846						

Çizelge 5.52 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	199178558963.53 0.0051	462.09	466.09	466.48	469.15	0.1077	0.7864

Veri Seti-27: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.53 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

128	192	155	136	116	110	129	207	191	175
236	262	255	323	315	376	335	381	370	409
391	388	617	589	568	585	701	732	733	742
711	685	698	824						

Çizelge 5.54 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	126422136556.69 0.0049	462.19	466.19	466.58	469.25	0.1229	0.6391

Veri Seti-28: 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.55 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

104	191	169	98	85	145	125	127	124	173
176	205	258	196	251	278	350	294	275	320
317	325	463	468	480	501	638	738	690	589
653	658	599	678						

Çizelge 5.56 16-19 yaş arasındaki kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	517969202156.69 0.0058	452.17	456.17	456.56	459.23	0.0997	0.8553

Veri Seti-29: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.57 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları

446	628	1103	779	646	520	1013	982	848	941
1156	1266	1097	1391	1363	1300	1375	1154	1012	1180
1105	1031	1086	1705	1707	1646	1706	2809	2784	2670
2494	2370	2487	2950						

Çizelge 5.58 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ocak ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	53409026515.67 0.00139	543.68	547.68	548.07	550.73	0.2012	0.1107

Veri Seti-30: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.59 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları

650	708	1092	754	678	484	1031	894	756	846
1332	1237	1018	1533	1245	1319	1400	1306	963	1103
1127	1061	1238	1739	1607	1596	1715	2783	2751	2771
2315	2392	2449	2825						

Çizelge 5.60 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Şubat ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	52251601676.14 0.00140	543.14	547.14	547.52	550.19	0.2008	0.1120

Veri Seti-31: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.61 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları

592	629	978	794	552	538	1101	795	848	768
1276	1180	1054	1479	1205	1198	1322	1123	888	1044
988	964	1264	1667	1616	1496	1586	2748	2521	2628
2217	2255	2300	2717						

Çizelge 5.62 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Mart ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	31634422486.47 0.00150	522.51	526.51	526.91	529.50	0.1977	0.1322

Veri Seti-32: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.63 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları

561	724	823	681	560	454	1061	799	828	709
1373	1046	978	1411	1084	1147	1214	1033	840	972
903	967	1171	1599	1522	1386	1477	2642	2372	2381
2100	2077	2387	2593						

Çizelge 5.64 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Nisan ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	88929487470.16 0.00155	536.12	540.12	540.51	543.18	0.1964	0.1265

Veri Seti-33: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.65 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları

592	865	928	644	514	424	1005	776	838	831
1326	1010	1067	1486	1131	1216	1198	1151	939	1103
1020	1058	1303	1625	1657	1524	1648	2714	2469	2556
2319	2255	2667	2836						

Çizelge 5.66 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Haziran ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	57988202195.79 0.00146	540.84	544.84	545.23	547.90	0.1943	0.1340

Veri Seti-34: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.67 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları

604	1007	838	622	541	432	987	761	986	833
1314	1046	1132	1451	1138	1200	1132	1013	868	1056
994	987	1393	1629	1717	1547	1745	2699	2686	2512
2491	2233	2791	2938						

Çizelge 5.68 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Temmuz ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	23449351529.37985 0.00144	542.133	546.133	546.520	549.186	0.1892	0.1537

Veri Seti-35: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.69 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları

635	1025	720	588	576	458	1006	839	847	798
1343	985	1092	1309	1271	1271	1193	1105	1001	1055
1036	1119	1463	1809	1789	1632	1856	2776	2815	2690
2432	2539	2904	2975						

Çizelge 5.70 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ağustos ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	39970851885.88 0.00139	544.83	548.83	549.22	551.88	0.1619	0.3015

Veri Seti-36: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.71 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları

580	955	756	720	522	556	1075	842	801	806
1225	971	1019	1316	1244	1254	1163	1011	956	1287
1050	1202	1601	1831	1814	1668	2067	2795	2831	2726
2470	2394	2737	3064						

Çizelge 5.72 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Eylül ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	78488996555.2 0.00138	545.16	549.16	549.55	552.22	0.1734	0.2300

Veri Seti-37: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.73 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları

510	889	658	670	530	506	854	811	739	771
1133	1037	1110	1319	1139	1203	1120	963	966	1231
977	1097	1495	1665	1698	1421	1856	2673	2661	2493
2191	2341	2849	3092						

Çizelge 5.74 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Ekim ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	37642170098.7 0.00146	541.69	545.69	546.08	548.74	0.1689	0.2565

Veri Seti-38: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.75 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları

553	965	838	746	564	633	1008	843	865	951
1075	1026	1262	1233	1205	1272	1164	1040	896	1076
956	994	1561	1659	1481	1475	2104	2558	2590	2544
2241	2231	2723	3063						

Çizelge 5.76 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Kasım ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	109718624760.6 0.0014	541.39	545.39	545.78	548.45	0.2206	0.0621

Veri Seti-39: 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

Çizelge 5.77 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları

554	878	684	616	442	708	777	753	767	799
1023	947	1174	1113	1030	1073	966	838	843	929
818	840	1404	1457	1330	1396	2061	2394	2383	2232
2117	2171	2613	2991						

Çizelge 5.78 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki Aralık ayı işsizlik oranları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	P Değeri
Lindley Dağılımı	79273245849.64 0.00158	535.94	539.94	540.33	543.00	0.2049	0.0994

Çizelge 5.79 16-19 yaş arası erkeklerin, 16-19 yaş arası kadınların, 20 yaş ve üzeri erkeklerin ve 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki aylara göre işsizlik oranları model sonuçlarının karşılaştırılması

	16-19 Yaş Arası Erkeklerin İşsizlik Oranı		16-19 Yaş Arası Kadınların İşsizlik Oranı		20 Yaş ve Üzeri Erkeklerin İşsizlik Oranı		20 Yaş ve Üzeri Kadınların İşsizlik Oranı	
	K-S Değeri	P değeri	K-S Değeri	P değeri	K-S Değeri	P değeri	K-S Değeri	p değeri
Ocak	0.3072	0.0357*	0.1240	0.6278	0.3072	0.0357*	0.2012	0.1107
Şubat	0.1829	0.1814	0.1170	0.6967	0.3072	0.0357*	0.2008	0.1120
Mart	0.1802	0.1945	0.1162	0.7048	0.3072	0.0357*	0.1977	0.1322
Nisan	0.1519	0.3745	0.0977	0.8704	0.3072	0.0357*	0.1964	0.1265
Mayıs	0.1711	0.2432	0.1201	0.6665	0.2274	0.0500	0.3072	0.0357
Haziran	0.1905	0.1484	0.1736	0.2289	0.3072	0.0357*	0.1943	0.1340
Temmuz	0.2021	0.1078	0.1508	0.3838	0.3072	0.0357*	0.1892	0.1537
Ağustos	0.1786	0.2025	0.1261	0.6077	0.3072	0.0357*	0.1619	0.3015
Eylül	0.1320	0.5492	0.1070	0.7927	0.3072	0.0357*	0.1734	0.2300
Ekim	0.1136	0.7306	0.1077	0.7864	0.2228	0.0580	0.1689	0.2565
Kasım	0.1455	0.4270	0.1229	0.6391	0.2183	0.0667	0.2206	0.0621
Aralık	0.2274	0.0500	0.0997	0.8553	0.2069	0.0937	0.2049	0.0994
* işaretli p değerleri dağılımın veri setini modelleyemediğini göstermektedir.								

Sonuç olarak, 16-19 yaş arası erkeklerin, 16-19 yaş arası kadınların, 20 yaş ve üzeri erkeklerin ve 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki aylara göre işsizlik oranları model sonuçları karşılaştırıldığında; 16-19 yaş arası erkeklerin özellikle Ekim ayında, 16-19 yaş arası kadınların özellikle Aralık ayında işsizlik oranı Lindley dağılımı ile iyi uyum gösterdiği öte yandan kadınların erkeklere nazaran daha yüksek p değerine sahip olduğu söylenebilir.

Aşağıda Veri seti-40 ile Veri seti-47 arasındaki veriler, 1956 dan 1975 tarihine kadar Kanada’da aylık toplam işsizlik rakamlarını göstermektedir.

Veri Seti-40: Kanada İşsizlik Verisi 1956-1975

“Mevsimsel davranışta değişim sorunlarından biri zaman serilerinde özellikle de işsizlik istatistiklerinde ortaya çıkmaktadır. Ekonomik zaman serilerinin mevsimsel ayarlamaları için, standart prosedürlerin mevsimsel değişim genişliğinin ya seri değişim seviyesiyle orantılı olarak değiştiği ya da seviyeden bağımsız olduğu farz edilir.

Eğer ortalama bir eğim çizgisi veriye uygunsa, on iki ayın üzerinde, eğimden itibaren mutlak sapmaların toplamı mevsimsel genişliğin miktarını verir. Değişim grafiğine karşı ortalama eğilim her takvim yılı için, genişliğin yaklaşık olarak değişim seviyesine mi orantılı olduğu ya da bağımsız seviyede mi olduğu konusunda yardımcı olur. Ani bir değişiklik var ise zorluklar çıkar.

Ekonomistlere göre, gözlenen etkileri üretebilen, fiziksel ve kurumsal değişiklikler için bir araştırma önerilebilir. İstatistikçilere göre mevsimsel ayarlama ile ilgili olarak bir model seçerken ayrı parçalara bakmak gerekir.

Aşağıdaki veriler, ağırlıklı olarak çarpımsal mevsimsellikten, tamamen toplamsal olan ani değişikliklere kadar açık bir örnek verir. Durbin ve Murphy (1975), toplamsal ve çarpımsal mevsimselliğin karışımını gösteren serilere uygulanabilen, toplamsal ve çarpımsal davranış ve gelişim modelleri için biçimsel testler düzenlemiştir” (Andrews ve Herzberg 2012).

Çizelge 5.80 1956-1975 arası Mayıs ayı Kanada toplam işsizlik verileri

175	209	388	354	417	454	335	347	293	265
247	304	366	386	513	543	552	493	524	714

Çizelge 5.81 1956-1975 arası Mayıs ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	461085137435.76 0.0051	265.88	269.88	270.59	271.87	0.2568	0.1191

Veri Seti-41: 1956-1975 arası Haziran ayı Kanada toplam işsizlik verileri

Çizelge 5.82 1956-1975 arası Haziran ayı Kanada toplam işsizlik verileri

127	177	339	248	313	367	300	305	282	257
230	292	395	383	529	551	568	503	469	704

Çizelge 5.83 1956-1975 arası Haziran ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	285746981953.49 0.0055	263.92	267.92	268.63	269.91	0.2566	0.1194

Veri Seti-42: 1956-1975 arası Temmuz ayı Kanada toplam işsizlik verileri

Çizelge 5.84 1956-1975 arası Temmuz ayı Kanada toplam işsizlik verileri

112	181	310	239	328	351	307	294	265	244
244	284	371	349	518	514	543	461	465	653

Çizelge 5.85 1956-1975 arası Temmuz ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	785335255626.46 0.0057	262.08	266.09	266.79	268.08	0.2940	0.0500

Veri Seti-43: 1956-1975 arası Ağustos ayı Kanada toplam işsizlik verileri

Çizelge 5.86 1956-1975 arası Ağustos ayı Kanada toplam işsizlik verileri

116	194	317	257	350	320	279	271	246	211
228	247	319	318	448	455	503	433	447	623

Çizelge 5.87 1956-1975 arası Ağustos ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	389447773463.33 0.0061	259.12	263.12	263.83	265.11	0.2798	0.0708

Veri Seti-44: 1956-1975 arası Eylül ayı Kanada toplam işsizlik verileri

Çizelge 5.88 1956-1975 arası Eylül ayı Kanada toplam işsizlik verileri

116	214	284	224	325	305	259	251	217	176
205	219	262	279	398	434	459	421	431	586

Çizelge 5.89 1956-1975 arası Eylül ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	516455375400. 040.0066	255.91	259.91	260.62	261.90	0.2915	0.0533

Veri Seti-45: 1956-1975 arası Ekim ayı Kanada toplam işsizlik verileri

Çizelge 5.90 1956-1975 arası Ekim ayı Kanada toplam işsizlik verileri

110	223	328	250	366	315	282	266	257	171
195	254	288	314	419	447	483	429	430	576

Çizelge 5.91 1956-1975 arası Ekim ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	240038744598.97 0.0062	258.01	262.01	262.72	264.00	0.262	0.104

Veri Seti-46: 1956-1975 arası Kasım ayı Kanada toplam işsizlik verileri

Çizelge 5.92 1956-1975 arası Kasım ayı Kanada toplam işsizlik verileri

149	318	378	316	426	347	342	303	257	220
238	289	338	354	476	503	524	468	493	640

Çizelge 5.93 1956-1975 arası Kasım ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	547347231366.3 700.0054	263.120	267.12	267.82	269.11	0.2847	0.0629

Veri Seti-47: 1956-1975 arası Aralık ayı Kanada toplam işsizlik verileri

Çizelge 5.94 1956-1975 arası Aralık ayı Kanada toplam işsizlik verileri

211	422	466	405	525	411	414	346	284	252
266	353	373	383	538	530	584	512	597	697

Çizelge 5.95 1956-1975 arası Aralık ayı Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	P Değeri
Lindley Dağılımı	458053609337.39 0.0047	268.75	272.75	273.45	274.74	0.2799	0.0705

Çizelge 5.96 1956-1975 arası aylık Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçları karşılaştırılması

1956-1975 Arası Aylık Kanada Toplam İşsizlik Verileri		
AYLAR	K-S Değeri	P Değeri
Ocak	0.3323	0.0180*
Şubat	0.3574	0.0086*
Mart	0.3370	0.0158*
Nisan	0.3072	0.0357*
Mayıs	0.2568	0.1191
Haziran	0.2566	0.1194
Temmuz	0.2940	0.0500
Ağustos	0.2798	0.0708
Eylül	0.2915	0.0533
Ekim	0.2626	0.1048
Kasım	0.2847	0.0629
Aralık	0.2799	0.0705

1956-1975 arası aylık Kanada toplam işsizlik verileri model sonuçlarına bakıldığında Mayıs, Haziran, Temmuz, Ağustos, Eylül, Ekim, Kasım, Aralık ayları Lindley dağılımı ile uyum sağlayabilmiştir.

Aşağıda Veri seti-48 ile Veri seti-59 arasındaki veriler, 1792 den 1975 yılları arası aylık ortalama güneş lekeleri verilerini göstermektedir.

Veri Seti-48: Aylık Ortalama Güneş Lekesi Verileri

Günlük değişken güneş lekesi sayıları, her gün belirli bir zamanda güneşin yüzeyindeki leke ve leke ögelerine dayalıdır. Wolf, farklı gözlemcilerin ve teleskopların leke sayımlarını ortak bir temele indirgeyebilmek amacıyla göreceli bir sayı tasarlamıştır. Günlük güneş lekesi sayıları tüm dünyada elliden fazla gözlem istasyonundan alınan verilere dayanarak ve bir referans istasyonunun (1982’de değişmiştir) gözlemleriyle bağlantılı olarak hesaplanmaktadır. Diziler özünde güneşin değişken davranışlarını yansıtırlar. Ayrıca bu dünyayı etkileyen harici faktörlerle ilgilidir. Dizilerle ilgili çok sayıda istatistik çalışması yapılmıştır” (Andrews ve Herzberg, 2012).

1749-1983 yılları arası Ocak ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.97 1749-1983 yılları arası Ocak ayı ortalama güneş lekesi verileri

58.0	56	45	21.4	22	14.4	2	1.6	6.9	27	47.8
50	45.3	61	39	12	0	7.2	0	0	11.3	0
22.2	19.2	26.3	36.4	34.9	32.5	19.2	21.5	0	0	21.6
5	17.7	34.6	52.8	43	52.2	47.5	30.9	11.3	4.9	7.5
88.6	188	58	73.3	70	35	44	0	10.2	12.5	14.1
37.6	48.3	67.3	70	43.8	56.5	59.7	24	12	27.4	53.5
73.9	104	36	100.9	54.6	46.8	4.4	21.7	45	177.3	114.7
70	98.7	54	28	13	6.5	37.2	134.7	138	114	103
72.7	144.9	107.6	81.2	24	20.4	13.3	9.4	25.7	38.7	62.6
159.1	156.7	78	75.5	68.4	41.1	15.4	12.3	0.5	13.7	39
83.7	81.5	62.3	63.1	48.3	57.7	48.7	31.6	0	15.6	60.9
77.3	88.3	79.5	86.7	60.8	14.6	14.3	24.4	3.3	0.8	24
36.4	45	60.6	91.5	42.8	29.9	10.3	12.7	0.8	5.3	13.5
69.1	75	83.2	63.3	29	40.6	30.2	19.5	9.4	0.2	5.2
8.3	31.6	54.8	45.5	76.4	39.2	56.7	26.4	3.4	0.3	2.3
2.8	23	45.3	74.7	96	48.1	51.1	31.5	11.8	4.5	0.5
5.5	71.8	81.6	83.5	68.9	65.3	14.6	12.1	12.3	3.4	18.9
62.8	132.5	98.4	80.3	50.5	45.6	35.6	12.4	3.7	18.5	47.6
115.7	108.5	119.1	101.6	59.9	40.7	26.5	0.2	23.1	73.6	165
202.5	217.4	146.3	57.9	38.7	19.8	15.3	17.5	28.2	110.9	121.8
104.4	111.5	91.3	61.5	43.4	27.6	18.9	8.1	16.4	51.9	166.6
159.6	114	111.2	84.3							

Çizelge 5.98 1749-1983 yılları arası Ocak ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.0190269 0.0285183	2296.82	2300.82	2300.88	2307.74	0.0502	0.5768

Veri Seti-49: 1749-1983 yılları arası Şubat ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.99 1749-1983 yılları arası Şubat ayı ortalama güneş lekesi verileri

64	55	44	39.9	23.8	4.2	4	12.6	9.30	29	47
50.8	44.1	29.6	12.2	4.5	9.2	0	0	1.9	10.3	12
32.2	68.8	57.9	22.4	20.7	26.6	4.3	0.9	0	10.8	15.5
18.2	47.4	64.4	49.4	72.1	50.1	55.5	14.9	18.1	24.5	107.6
175.6	62.6	75.9	43.5	50	32	3	11.2	7.1	21.2	52
44	59.5	91	72.8	31.9	59.7	26	11	30	66.1	64.2
142.5	46.2	90.8	29	65.4	0	11.6	36.5	109.3	165.7	98
74.7	37.5	38.7	8	8	47.6	106	129.2	125.3	127.5	62
84.8	102.5	87.7	29.9	22.1	3.5	14.7	43.6	51	44.9	111.8
131.7	89.4	105.4	67.5	42.9	20	11.4	4.9	7.4	34.9	87.6
88	77.8	64.5	56.7	47.1	39.3	38.4	0.7	15.8	59.3	114.9
125.3	120.1	107	64.2	22.2	15	8.7	6	0.6	27.5	53.2
69.3	46.9	86.9	71.8	25.9	13.2	7.1	8.5	0.6	22.2	75.6
73	84.6	67.2	57.4	29.4	36.4	9.2	13.6	2.4	0	17
24.5	85.8	31.3	108.2	33.9	46.6	31.5	9	0	2.9	2.6
42.3	55.4	71.9	65.3	79.5	53.9	28.3	26.4	1.5	5.1	23.2
70	93	73.5	64.1	49.2	43.1	10.6	22.2	7.8	20.5	74.3
128.5	119.2	77.4	59.4	44.5	52.8	28.9	0.5	12.7	86.2	113.4
86.1	182.3	94.8	59.9	22.7	3.9	0.5	20.8	124	130.2	164.9
143.1	106	46.1	50.3	24.4	17.7	14.2	24.4	93.6	111.9	120.5
127.8	79	88.4	42.9	26	11.5	4.3	23.1	93.6	137.5	155

Çizelge 5.100 1749-1983 yılları arası Şubat ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.025419 0.028705	2313.64	2317.64	2300.88	2324.56	0.0670	0.2317

Veri Seti -50: 1749-1983 yılları arası Mart ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.101 1749-1983 yılları arası Mart ayı ortalama güneş lekesi verileri

63	55.5	38	12.6	15.7	4	12.4	21.7	13.9	30	40.8
29.5	48	51.4	32.7	9.6	0	0.9	0	0	0.7	1.9
5.7	26.2	73.7	96.2	25.4	3.7	4.5	5.7	16.1	0.6	0
22.4	36.7	57.8	65	72.3	84.6	93.4	55.1	11.8	3.9	19.7
98.1	134.6	70	89.2	45.3	71	45.7	1.7	6.8	5.4	26.2
49	46.8	74.7	80.7	45.7	34.2	40.2	25	36.6	43	46.3
64.3	80.1	46.7	31.1	51.2	55.7	11.6	6.3	39	134	118
98	53	37	26.7	11	9	47.7	87.4	143.3	120	96.3
74	77.7	55.5	29.7	21.7	8.3	13.6	43.3	63.9	85.7	108.9
96.5	82.6	64.6	61.2	37.7	20.7	17.4	0.4	5.2	57.5	90.3
98.9	101	66.3	39.5	24.6	9.2	26.5	52.7	159.4	143.2	88.4
98.3	46.4	33.8	31.2	11.7	7.8	0	19.5	51.5	67.5	42.8
86.8	49.8	57.3	4.2	7.8	7	5.1	10.4	49.9	65.7	52.3
61	52	29.1	38.3	18.1	8.6	4.5	12.4	13.5	37.2	56.5
64.5	60.7	28.7	66.3	21.4	7.8	4.9	0.5	3.1	38.8	67
94.8	72.2	66.5	70.2	26.7	54.7	3.3	1.8	18	62.5	69.6
85.4	50.2	35	30	11.2	10.1	4.3	23.1	77.1	83.9	86.5
64.6	72.2	46.4	54.2	27.4	11	21.5	76.6	129.8	94.8	157.5
109.7	59.9	22	10	10.9	4.9	118.4	157.4	190.7	185.7	102.2
53	45.6	17.1	16.5	11.7	25.3	111.8	92.2	135.8	102.9	60.7
80.1	46	21.3	11.5	21.9	8.7	76.5	138	126.2	135.5	153.8
66.5	140.8	43.6								

Çizelge 5.102 1749-1983 yılları arası Mart ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.027244 0.029548	2292.97	2296.97	2297.02	2303.88	0.0737	0.1501

Veri Seti-51: 1749-1983 yılları arası Nisan ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.103 1749-1983 yılları arası Nisan ayı ortalama güneş lekesi verileri

75.7	53	28.4	18.6	31.7	4	1.1	8.4	0	31	42
25	50.6	37.5	27.7	23.8	12.3	2.5	0	0	0	16.6
23.8	31.6	58.8	26.4	34.5	20.2	19.4	9.2	13.5	0	19.4
3.8	24	46	61.1	95	107.1	54.6	26.9	2.8	1.4	61.5
142.9	138.2	55.7	88.3	56.4	59.3	38.	13.7	6.5	9.4	30
72.3	47	58.3	71.7	60.2	32.9	34.4	22	6	32.9	42.7
96.7	51	64.9	92.2	32.9	43.8	11.2	21.8	95.5	145	145
95	68.3	41	28.3	10	15.7	85.4	127.2	108.5	123.3	94
77.2	126.6	61.8	65.9	42.6	26.9	8.8	20.8	56.9	69.2	44.7
107.1	102.5	44.1	56.5	65.4	47.6	26.4	4.4	6.5	11.1	38.3
85.7	71.4	98.5	53.7	40.6	35.8	29.4	17.6	5.1	36.6	41
160	162.4	102.1	76.2	32	29.1	2.3	15.8	0.1	6.2	19.3
51.7	95.8	82.1	76.1	55	43.7	6.9	5.1	4.3	1.6	20.5
69.6	88.1	81.6	76.9	43.8	31	14.5	14.2	16	0	0
26.1	43	39.3	55.3	52.6	57.6	32.3	8.4	16.5	4.5	0.9
17.3	41.3	71.8	74.7	80.5	51.8	14.8	32.4	11	6.1	11.3
31.7	38.5	93.5	80.6	52.8	38.2	31.2	11.2	2.9	11.3	12.2
74.9	109.3	101	109.1	60.7	32.8	60.7	26.1	0.3	32	75.7
149.8	189.7	147	113.4	92.9	29.1	27.8	1.8	11.3	110.7	175.2
196	163.3	122	61.4	46.4	29.3	8.6	6.8	48.7	69.5	81.2
106.8	109.5	71.8	63.2	57.7	40.3	5.1	18.8	12.9	99.7	101.5
164.1	156.4	122	80.7							

Çizelge 5.104 1749-1983 yılları arası Nisan ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.024013 0.028563	2312.71	2316.71	2316.76	2323.63	0.0405	0.8195

Veri Seti-52: 1749-1983 yılları arası Mayıs ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.105 1749-1983 yılları arası Mayıs ayı ortalama güneş lekesi verileri

62	52.3	55.7	31	21	7.3	0	8.2	5	32	44
44.3	33.4	39	26.4	10	13.5	2	0	0	1	5.5
5.8	9.8	44.3	21.2	53.1	19.6	29.3	1.7	1.5	0	2.8
15.4	32.4	56.3	89.1	67.5	66.3	38.1	41.3	12.9	8.8	43.6
111.4	111.3	85	90	60.7	59.7	36	20.7	0	12.5	38.1
46.4	49	72	107.2	39.9	32.7	44.3	20.2	26.8	29.8	77.7
73.6	70.1	152.7	38	41.1	51.3	3.9	11.2	80.3	238.9	140
107.2	104.7	54.3	23	6	20.7	92.3	134.8	113	123.5	93
73.7	137.6	53.8	69.2	67.4	24.9	21.1	12	47.8	59.9	75.4
102.2	80.6	61.6	62.6	54.9	34.7	24	9.1	0	29.2	41.4
91	107.1	56.8	64.4	53.8	40.6	34.5	12.9	2.9	26.7	104
176	145.5	107.6	47.9	44.6	11.5	5.1	21.2	5.8	2.4	23.5
43.5	64.1	32.1	66.5	73	30.7	20	7	2.4	4.8	41.1
79.6	84.7	101.2	67.5	27.7	20	25.8	7.7	15.2	10.2	2.8
14.6	39.5	48	57.7	42.9	40.8	36	22.2	9	4.4	0
5.2	33	74.5	114.1	76.7	88.1	33.3	22.2	8	3.2	20.8
42.8	64.3	79.1	76.9	58.2	36.8	24.6	17.9	3.2	19.7	27.3
54.6	116.7	127.4	118.3	54.4	29.5	25	14.1	2.5	30.6	84.9
201.3	174	106.2	106.2	108.5	23.4	12.5	0.8	28.9	136.6	164.6
175.3	172	119.6	51	43.7	43	9.5	24.1	45.3	86.5	127.2
120	127.5	57.5	80.5	42.4	39.5	9	12.4	18.6	82.7	134.4
179.9	127.5	82.2	99.2							

Çizelge 5.106 1749-1983 yılları arası Mayıs ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.021532 0.027672	2312.40	2316.40	2316.45	2323.31	0.0368	0.8969

Veri Seti-53: 1749-1983 yılları arası Haziran ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.107 1749-1983 yılları arası Haziran ayı ortalama güneş lekesi verileri

61	51	41.5	17.1	6.7	11.1	0	10.6	23.7	31.2	46
36	34.8	40.5	25.6	12	13.5	7.7	0	0	1.3	11.2
14.9	55.9	43.6	40	36.4	35	10.8	1.8	5.6	0	0
15.4	37.1	56.7	98	73.9	65.1	33.4	26.7	1	7.8	33.2
124.7	158	83.5	100	50.7	39.6	31.7	26.7	0	12.9	12.8
45	50	48.3	99.3	77.1	35.8	30	20	3	33.3	77.4
94.4	83.3	119.5	57	28.4	28.5	12.3	19	80.7	171.6	113.7
88	97.7	38	25.2	9	26.3	59	99.2	154.2	120	91
64.2	94.5	54.6	48.5	55.7	20.5	10.5	3.7	31.1	65.1	85.3
123.8	81.2	70	63.2	46.9	40	21.1	5.3	5	16	44.5
87.1	108.6	87.8	84	40.8	57.8	33.6	16.5	1.5	31.1	108.4
135.6	91.7	109.9	44.8	38.2	23.9	1.6	13.4	6.4	4.8	34.1
60.5	45.2	76.5	51.2	83.7	27.1	15.7	7.1	6.4	1.3	48.3
76.3	88.2	98.9	71.5	49	11.3	22.3	20.5	12.1	5.8	1.4
16.3	41.9	49	63.2	40.4	48.1	22.6	12.3	2.2	4.1	0
11.4	68.8	67.7	114.9	59.4	111.2	38.7	33.7	5.8	9.1	24
47.5	73.5	59.1	91.4	71.9	15.3	22.2	5.2	6.7	45.7	70
130.3	97.5	101	83.9	59.8	11.4	7.6	5	36.2	73.5	163.9
167.8	121.7	83.6	100.6	36.4	21.8	0.2	31.7	116.6	200.7	171.5
168.7	110.2	77.4	42	35.9	9.1	15.9	47.7	67.3	110.3	106
106.8	49.8	88	39.5	36	11.4	12.2	38.5	95.1	149.5	157.3
90	110.4	91.1	28.8							

Çizelge 5.108 1749-1983 yılları arası Haziran ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.024158 0.028284	2308.26	2312.26	2312.32	2319.17	0.0510	0.5600

Veri Seti-54: 1749-1983 yılları arası Temmuz ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.109 1749-1983 yılları arası Temmuz ayı ortalama güneş lekesi verileri

45.8	50	41	12.9	26.9	4.3	0	2.1	21	35	48
48.3	29.8	37.6	30	12.7	6.7	0.3	0	6.6	0.5	18.3
18.5	35.5	38.8	50	28	31.4	20.6	2.5	7.9	0.5	0
30.9	52.5	42.9	54.3	90.8	43.9	45.2	13.9	7	8.7	59.8
116.7	162.8	94.8	85.4	66.3	78.4	22.2	18.8	8.6	3.6	25
44	51	66	94.1	33.8	54.2	30	27	3.3	21.9	52.6
118.6	109.8	67.7	77.3	27.7	17.5	1	1	95	153	143
86	73.5	37	32.2	6	36.3	83	128	141.5	117	69.3
71	108.2	60.7	84.7	30.8	12.6	9.5	21.2	30.6	46.5	52.2
139.2	78	39.1	36.1	42	45.9	18.7	0.4	4.6	22.2	56.7
95.2	116.7	78	73.4	32.7	54.7	26.8	9.3	5	28.6	59.3
132.4	103	105.5	66.9	67.8	12.5	15.2	5.9	0.1	7.5	21.9
76.9	45.4	80.6	53.1	66.5	30.3	23.3	3.1	9.7	11.6	58.8
76.8	88.8	106	47.8	45	27.6	9	13.5	8.3	0.7	0.9
27.9	50.6	73	103.6	49.7	39.5	35.8	14.1	3.5	3	1.7
5.4	71.6	53.5	119.8	107.6	64.7	27.5	41.9	10.9	3.5	28.1
38.5	52.3	54.9	98	70.2	21.9	17.4	9.6	2.8	9.3	33.9
52.3	145.1	165.3	97.6	67.5	66.9	17.7	13.2	5	42.6	116.2
157.9	142.2	125.8	91	61.5	39.3	8.6	4.8	26.7	129.1	187.2
191.4	149.6	121.7	70.2	21.8	19.6	3.1	11.9	56.7	91.5	96.1
96.8	112.5	81	76.5	23.1	55.8	28.2	1.9	21.4	70.4	159.4
136.3	143.8	106.1	82.2							

Çizelge 5.110 1749-1983 yılları arası Temmuz ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.018461 0.027255	2318.76	2322.76	2322.81	2329.67	0.0496	0.5908

Veri Seti-55: 1749-1983 yılları arası Ağustos ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.111 1749-1983 yılları arası Ağustos ayı ortalama güneş lekesi verileri

60	29.3	40	25.7	1.5	6	3	0	19.5	38.7	50
34.1	43.1	42.7	26.3	12	8	0.2	0	0	15.6	8.4
2.3	47.2	23.2	45	31.5	26.1	25.9	4.8	2.1	0	1.4
25.4	39.6	53.7	76.4	78.3	50.7	54.9	8.9	5.7	4	59
107.8	134	66.3	103	59.8	29.3	39	12.3	3.2	6.4	51.3
38.7	71.3	75.6	91.1	67.7	26.5	30	29.7	4	40.8	66.8
120.3	126.3	58.5	56.2	12.7	6.6	7.9	24.2	112	140	112
86	66	44	20	10	20	89.7	137.2	136	103	87
43	131.2	57.8	39.3	26.5	11.8	23.9	32.3	54.8	140.6	132.5
61.6	61.3	57.4	39.7	50.4	15.8	3.1	5.9	16.9	55.3	106.8
100.3	82.5	62.5	48.1	54.8	37.8	12.7	4.9	34.4	79.6	153.8
110	92.9	68.2	61.3	14.6	8.8	6.3	0	10.7	48.1	58
40.4	46	55.8	50	16.9	21.4	2.8	20.6	8.5	33.2	101.4
129.2	70.3	68.9	27.2	21.8	31.4	2.9	4.3	1	2.3	28.8
58.2	58.8	47.7	54.3	90.5	23.1	11.5	4	0.2	0.3	7.7
69.6	35.2	154.5	101.7	69	19.2	22.8	6.5	0.5	19.3	37.9
61.6	53.8	83.8	65.8	24.9	13	6.8	0.2	8.3	30.1	87
137.7	115.7	105.8	105.5	60	20.2	19.4	16.7	25.9	107.2	188.8
157.9	123.8	85.2	61	54.9	23.5	8.4	40.7	169.6	158	200.2
199.6	134.1	55.9	21.8	33.2	9.3	8.9	51.2	107.2	109.3	98
93	61.4	76.8	25.6	33.6	39.7	16.4	30.1	58.1	142.2	135.4
158.7	107.6	71.8	78.8							

Çizelge 5.112 1749-1983 yılları arası Ağustos ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.016708 0.026596	2324.81	2328.81	2328.86	2335.73	0.0537	0.4905

Veri Seti-56: 1749-1983 yılları arası Eylül ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.113 1749-1983 yılları arası Eylül ayı ortalama güneş lekesi verileri

59	24	11.1	13.5	18.4	5.7	2.4	0	11.5	33.5	51.8
45.3	53	44.4	24	5.7	11.7	0.4	0	2.4	5.2	15.3
8.1	31.5	47.8	36.7	26.1	14.9	5.2	4.4	0	0	20.5
15.7	18.9	49.6	50.4	52.8	62.1	37.9	8.2	11.6	11.5	100.8
95.1	96.3	75.9	91.2	23.5	27.1	28	8.2	17.8	11.8	39.7
62.5	77.2	61.3	100.7	68.5	68.1	28.2	16	4.3	42.7	74.8
148.8	104.4	101.4	50.5	29.3	7.9	3.2	16	116.2	171.7	111
93.7	51	34	18	10	32	111.5	157.3	141	112	77.3
66.5	73.6	132.7	74	35.1	18.5	4.2	6.9	29.6	107.1	161.2
100.3	93.7	86.2	67.9	37.5	33.5	22.4	0	4.4	42.4	80.1
105.8	92.2	79.9	66.6	22	28.5	21.6	7.3	9.8	43.8	80.6
136	80.3	114.6	67.5	28	2.4	9.9	16.4	5.3	6.1	66
53.2	57.7	52.6	61.9	39.6	21.4	7.4	8.8	6.5	17.2	53.8
62.8	77.9	65.9	57.7	61.3	48.1	34.8	8.4	8.3	0.6	7.6
11.1	30.1	55	56.1	85	86.9	38.8	26.2	4	9.5	1.2
12.7	49.5	45.1	129.4	79.9	54.7	36.3	17.8	4.7	13.2	25.1
60.2	60.8	68.4	89.7	34.4	32.1	19	4	5.1	4	42.1
76	100.7	89.6	112.6	66.5	65.9	17.2	10	14.3	34.9	94.4
169.4	143.3	145.3	51.3	83.1	28.2	19.3	1.5	42.7	173.2	235.8
201.2	145.2	127.2	63.6	51.3	38.8	4.7	16.8	50.2	76.8	117.2
91.3	99.5	50.2	64	59.3	40.2	19.3	13.5	44	138.2	188.4
155	167.3	118.8	50.3							

Çizelge 5.114 1749-1983 yılları arası Eylül ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.014811 0.026140	2335.32	2339.32	2339.37	2346.25	0.0510	0.4540

Veri Seti-57: 1749-1983 yılları arası Ekim ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.115 1749-1983 yılları arası Ekim ayı ortalama güneş lekesi verileri

59	47	28.5	19.5	11	6.9	1.5	4.6	12.3	32.6	38.5
54.3	62.3	29.4	27	8	4.7	0	0	6.1	3.9	27.8
19.3	33.5	56.4	25.6	31.7	27.5	9	18.8	0.4	0	25.2
15.6	50.6	57.2	54.7	57.2	84.4	46.2	21.1	7.5	24.8	95.2
137.4	123.7	75.5	65.7	23.2	46.6	25	24.1	23.7	14.3	32.5
37.7	59.7	50.6	88.7	69.3	46.3	28	14	5	44.1	77.8
158.2	103.6	90	78.6	26.3	14	5.6	30	106.5	156.3	124
77	27.3	23.2	8	8	47.2	112.3	157	142	89.7	84.3
61.7	90.8	90.8	49.8	28.5	38.1	5.3	21.5	40.7	55.9	180.4
132.4	71.5	71	62.5	67.3	42.3	12.7	9.7	4.5	40.6	91.2
114.6	90.1	67.2	42	39.9	33.9	17.1	14.1	13.5	61.7	59.4
146.4	89	103.5	47.4	34.3	12.7	14.3	6.7	1.1	12.3	43
64	59.2	83.8	47.8	38.7	8.6	6.6	2.1	2.1	11.2	51.5
70.5	79.7	75.5	67.9	28.4	14.3	34.4	13	12.9	3.7	16.3
38.9	54.2	78.7	17.8	65.4	32.3	58.4	38.3	2.6	3.1	4.6
8.2	53.5	50.7	72.2	85	52.8	49.6	18.2	6.2	11.6	25.6
69.2	71.5	63.1	61.4	54	34.4	10	8.9	3	5.7	53.2
89	124.9	99.1	88.1	55	46.3	19.2	7.8	16.9	68.8	102.3
163.6	136.3	131.6	61.4	51.6	23.8	8.2	7	58.5	155.3	253.8
181.5	111.4	82.8	37.7	39.5	35.3	6.1	20.1	57.2	88.2	107.7
95.7	86.6	51.7	61.3	30.7	47.1	9.1	20.6	43.8	125.1	186.2
164.7	162.4	94.7	55.8							

Çizelge 5.116 1749-1983 yılları arası Ekim ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.029128 0.028951	2319.72	2323.72	2323.78	2330.64	0.0550	0.4586

Veri Seti-58: 1749-1983 yılları arası Kasım ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.117 1749-1983 yılları arası Kasım ayı ortalama güneş lekesi verileri

57	44	67.4	25	8.4	5.8	12.5	2.7	10.5	39.8	34.5
51	61	41	25	2.6	10.5	0	0	0.8	7.9	16.7
14.5	37.2	38.1	28.9	10.9	25.1	7.9	4.4	0	0	0
11.7	39.5	48.2	57	67.6	81.2	43.5	14.3	5.9	30.5	100
120.9	107	158.6	63.3	28.5	37.6	20	13.2	6.8	17	64.7
43	46.3	59.7	89.7	77.8	60.9	26.0	14	5.7	54.7	90.6
148.1	132.2	99.7	61.3	40.9	17.7	15.1	35	146	150.3	114
60	67	31.5	15	17	40.2	116	141.5	94.7	134	81
67	77.4	68.8	54.3	19.8	40.5	19.1	10.7	39.4	60.4	138.9
114.6	99.7	54.8	50.9	54.3	28.8	28.2	4.3	7.7	31.4	51.9
97.2	97.9	53.7	50.6	37.7	57.6	24.6	9	9.3	59.1	77.4
147.5	105.4	112	55.4	28.9	17.7	9.9	14.5	4.1	12.9	30.7
54.8	84.4	84.5	36.6	33.3	0.3	6.9	10.7	0.2	9.6	41.9
65.4	75.1	56.6	47.2	38	8.4	30.9	7.8	4.5	3.8	10.3
44.5	38	107.2	38.9	61.5	45.5	55.8	4.9	4.2	1.1	0.7
16.4	42.5	65.6	96.4	83.4	42	27.2	17.8	7.4	10	22.5
58.6	60.5	67.2	50.3	81.1	35.6	18.7	8.2	0.6	8.7	64.2
115.4	74.4	122.2	68.1	58.4	38.3	30.7	10.2	10.8	46	123.8
128	95.8	143.5	54.8	52.4	22.1	1.6	9.2	89.2	201.3	210.9
152.3	124	89.6	32.6	26.9	23.4	7.4	15.8	57.2	94.3	86
93.5	95.2	63.2	41.6	23.9	25	19.4	5.2	29.1	97.9	183.3
147.9	137.5	98.1	33.3							

Çizelge 5.118 1749-1983 yılları arası Kasım ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.022226 0.028392	2320.39	2324.39	2324.44	2331.32	0.0050	0.5881

Veri Seti-59: 1749-1983 yılları arası Aralık ayı ortalama güneş lekesi verileri

Çizelge 5.119 1749-1983 yılları arası Aralık ayı ortalama güneş lekesi verileri

56	45.7	51.4	18	5.1	3	9.9	8.6	40.1	48.2	50
48	60	38.3	24	0	12.3	0	0	1.1	10.1	14.3
20.1	65	29.9	28.4	25.8	30.6	9.7	0	0	20.4	0.8
22	68.1	46.1	46.6	56.5	82.1	28.9	27.5	9.9	34.5	77.5
206.2	129.8	85.2	75.4	44	40	6.7	4.2	20	9.4	33.5
43	57	61	46	77.2	61.4	25.7	13	19.2	53.3	111.8
112	102.3	95.7	64	43.2	12.2	7.9	40	157.3	105	110
58.7	35.2	30	10.5	14	27.3	112.7	174	129.5	135.5	74
66	79.8	63.6	53.7	38.8	17.6	12.7	21.6	59.7	65.5	109.6
159.9	97	60	71.4	45.4	23.4	21.4	3.1	7.2	37.2	66.9
81	95.6	80.5	40.9	41.2	28.6	12.8	1.5	25.2	67.6	104.3
130	90.3	83.9	49.2	29.3	9.9	8.2	2.3	0.5	7.2	29.6
47.3	41.8	75.9	47.2	21.7	12.4	20.7	6.7	6.7	7.8	32.3
78.6	93.8	60	70.7	42.6	33.3	12.6	10.5	0.3	0	1.1
45.6	54.6	55.5	64.7	47.3	39.5	54.2	5.8	2.2	6.4	3.8
22.3	34.5	53	129.3	59.2	34.9	29.9	20.3	17.5	2.8	16.5
98.6	79.4	45.2	59	108	25.8	17.8	11	0.3	15.4	61.5
123.4	88.8	92.7	42.1	68.3	33.7	22.5	18.8	28.4	27.4	121.7
116.5	138	117.6	54.1	45.8	34.3	2.5	7.6	76.9	192.1	239.4
187.6	125	85.6	40	23.2	14.9	15.1	17	70.4	126.4	109.8
97.9	83.5	82.2	45.3	23.3	20.5	7.8	15.3	43.2	122.7	176.3
174.4	150.1	127	33.4							

Çizelge 5.120 1749-1983 yılları arası Aralık ayı ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.019647 0.027501	2319.20	2323.20	2323.26	2330.12	0.0380	0.8741

Çizelge 5.121 1749-1983 yılları arası aylık ortalama güneş lekesi verileri model sonuçları karşılaştırması

1749-1983 Yılları Arası Ortalama Güneş Lekesi Verileri		
AYLAR	K-S Değeri	P-Değeri
Ocak	0.0502	0.5768
Şubat	0.0670	0.2317
Mart	0.0737	0.1501
Nisan	0.0405	0.8195
Mayıs	0.0368	0.8969
Haziran	0.0510	0.5600
Temmuz	0.0496	0.5908
Ağustos	0.0537	0.4905
Eylül	0.0551	0.4540
Ekim	0.0550	0.4586
Kasım	0.0050	0.5881
Aralık	0.0380	0.8741

Sonuç olarak, 1749-1983 yılları arası 12 ay bazında aylık ortalama güneş lekesi verilerine bakıldığında, Mart ayında meydana gelen ortalama güneş lekesi verilerinin model sonuçları Lindley dağılımı ile en düşük uyumu sağlarken; Nisan, Mayıs ve Aralık aylarının ortalama güneş lekesi verileri model sonuçlarının Lindley dağılımı ile en iyi uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-60: Arsenik ve Yer altı Suyu

Aşağıdaki veriler rasgele seçilen 102 Kuzeybatı Teksas kuyularında oluşan yer altı sularında arsenik konsantrasyonunu göstermektedir. Birimler milyarda bir parçalardır. (http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html 2016).

Çizelge 5.122 Arsenik ve yeraltı suyu verileri

17.60	10.40	13.50	4.00	19.90	16.00	12.00	12.20	11.40	12.70
3.00	10.30	21.40	19.40	9.00	6.50	10.10	8.70	9.70	6.40
9.70	63.00	15.50	10.70	18.20	7.50	6.10	6.70	6.90	0.80
73.50	12.00	28.00	12.60	9.40	6.20	15.30	7.30	10.70	15.90
5.80	1.00	8.60	1.30	13.70	2.80	2.40	1.40	2.90	13.10
15.30	9.20	11.70	4.50	1.00	1.20	0.80	1.00	2.40	4.40
2.20	2.90	3.60	2.50	1.80	5.90	2.80	1.70	4.60	5.40
3.30	1.00	1.30	2.60	1.40	2.30	1.00	5.40	1.80	2.60
3.40	1.40	10.70	18.20	7.70	6.50	12.20	10.10	6.40	10.70
6.10	0.80	12.00	28.10	9.40	6.20	7.30	9.70	62.10	15.50
6.40	9.50								

Çizelge 5.123 Arsenik ve yeraltı suyu verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.00000136991530 0.10290669873142	667.88	671.88	672.00	677.13	0.0849	0.4306

Veri Seti-61: Yeraltı Sularında Uranyum Miktarları

Aşağıdaki veriler rasgele seçilen 102 Kuzeybatı Teksas kuyularında oluşan yer altı sularında Uranyum konsantrasyonunu göstermektedir. Birimler milyarda bir parçalardır (http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html 2016).

Çizelge 5.124 Yeraltı sularında uranyum miktarları verileri

8.0	13.7	4.9	3.1	78.0	9.7	6.9	21.7	26.8	56.2	25.3	4.4	29.8
22.3	9.5	13.5	47.8	29.8	13.4	21.0	26.7	52.5	6.5	15.8	21.2	13.2
12.3	5.7	11.1	16.1	11.4	18.0	15.5	35.3	9.5	2.1	10.4	5.3	11.2
0.9	7.8	6.7	21.9	20.3	2.9	124.2	58.3	83.4	8.9	18.1	11.9	6.7
9.8	15.1	70.4	21.3	58.2	25.0	5.5	14.0	6.0	11.9	15.3	7.0	13.6
16.4	35.9	19.4	19.8	6.3	2.3	1.9	6.0	1.5	4.1	34.0	17.6	18.6
8.0	7.9	56.9	53.7	8.3	33.5	38.2	2.8	4.2	18.7	12.7	3.8	8.8
2.3	7.2	9.8	7.7	27.4	7.9	11.1	24.7					

Çizelge 5.125 Yeraltı sularında uranyum miktarları verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.071507 0.075679	787.38	791.38	791.51	796.57	0.0942	0.3232

Veri Seti-62: Yeraltı Sularındaki Sülfat Miktarı

Aşağıdaki veriler Kuzeybatı Texas'ta rasgele seçilmiş 24 su kuyusunda doğal olarak oluşmuş sülfat miktarını göstermektedir (http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html 2016).

Çizelge 5.126 Yeraltı sularındaki sülfat miktarı verileri

1850	1150	1340	1325	2500	1060	1220	2325	460	200	1500	1775	620
1950	780	840	2650	975	860	495	1900	1220	2125	990		

Çizelge 5.127 Yeraltı sularındaki sülfat miktarı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	1.210280117178896 0.0000000000000014	382.83	386.83	387.40	389.19	0.1775	0.3903

Sonuç olarak, arsenik ve yeraltı suları verileri ile yeraltı sularındaki sülfat miktarı ve yeraltı sularındaki uranyum miktarına bakıldığında Lindley dağılımına uyum gösterdiği ve arsenik ile yeraltı sularının model sonuçlarının diğer iki veri setine göre Lindley dağılımına daha iyi uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti -63: Pizza Franchise (Satış Tekeli Hakkı) Başlangıç Maliyeti

Aşağıdaki veriler, rasgele seçilmiş 36 pizza franchisealarının binlerce dolar üzerinden yıllık başlangıç maliyetlerini göstermektedir (Anonymous. Web sitesi: http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html 2016).

Çizelge 5.128 Pizza franchise(satış tekeli hakkı) başlangıç maliyeti verileri

40	25	50	129	250	128	110	142	25	90	75	100	500
214	275	50	128	250	50	75	30	40	185	50	175	125
200	150	150	120	95	30	400	149	235	100			

Çizelge 5.129 Pizza franchise(satış tekeli hakkı) başlangıç maliyeti verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	1.93310657887604 0.000000000000014	418.09	422.09	422.45	425.26	0.1119	0.7162

Sonuç olarak; pizza franchise (satış tekeli hakkı) başlangıç maliyeti verileri model sonuçlarına bakıldığında, Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-64: Yoksulluk Seviyesi

Aşağıdaki veriler Batı Amerika’da rasgele seçilmiş 80 ilde yoksulluk seviyesinin altında tüm kişilerin yüzdelerini ifade etmektedir. (http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html 2016)

Çizelge 5.130 Yoksulluk seviyesi yüzdeleri

12.1	27.3	20.9	14.9	4.4	21.8	7.1	16.4	13.1	9.4	9.8	15.7	29.9
8.8	32.7	5.1	9.0	16.8	21.6	4.2	11.1	14.1	30.6	15.4	20.7	37.3
7.7	19.4	18.5	19.5	8.0	7.0	20.2	6.3	12.9	13.3	30.0	4.9	14.4
14.1	22.6	18.9	16.8	11.5	19.2	21.0	11.4	7.8	6.0	37.3	44.5	37.1
28.7	9.0	17.9	16.0	20.2	11.5	10.5	17.0	3.4	3.3	15.6	16.6	29.6
14.9	23.9	13.6	7.8	14.5	19.6	31.5	28.1	19.2	4.9	12.7	15.1	9.6
23.8	10.1											

Çizelge 5.131 Yoksulluk seviyesi yüzdeleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	8.96105547980864 0.000000000000012	572.76	576.76	576.91	581.52	0.1018	0.3545

Batı Amerika’da rasgele seçilmiş 80 ilde yoksulluk seviyesinin altında tüm kişilerin yüzdelere bakıldığında Lindley dağılımı ile uyum sağladığı söylenebilir.

Veri Seti -65: Sübvansiyonlu (devletçe para yardımı, destekleme) Konutlar

Aşağıdaki veriler, rasgele seçilmiş 14 Denver mahallesinde bulunan sübvansiyonlu konut yüzdelarını göstermektedir. (http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html 2016)

Çizelge 5.132 Sübvansiyonlu (devletçe para yardımı, destekleme) konut verileri

10.2	11.8	9.7	22.3	6.8	10.4	11.0	5.4	6.6	13.7	13.6	6.5	16.0
24.8												

Çizelge 5.133 Sübvansiyonlu (devletçe para yardımı, destekleme) konut model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	3.944778523460305 0.000000000000017	89.64	93.64	94.73	94.92	0.2260	0.4112

Rasgele seçilmiş 14 Denver mahallesinde bulunan sübvansiyonlu konut yüzdelarına bakıldığında Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-66: Aşağıdaki veriler Navarra (İspanya)’nın dağlık kesimlerinin 38 değişik yerinde yapraklardan (kilogram/hektar şeklinde ölçülendirilmiştir) elde edilen karbon miktarını gösterir. %90 ve üzerinde kayın ağacına sahip bölgeler tekil bölge, diğer yerler ise çoğul bölge olarak adlandırılmıştır (Asgharzadeh vd. 2016).

Çizelge 5.134 Yapraklarda kg/hektar şeklinde ölçülendirilmiş karbon miktarları verileri

1501.82	6989.43	2424.02	4150.29	8693.35	2643.77	13148.37	6149.39
23587.21	7248.37	4788.22	6009.51	5349.65	5741.32	7065.81	7261.37
2358.42	10357.88	2499.05	3022.90	4234.86	4482.03	6363.71	3329.91
8740.47	3664.95	4515.97	8497.71	4569.89	8069.63	7366.79	1525.41
3363.02	2420.57	3576.74	3708.05	5819.12	5479.38		

Çizelge 5.135 Yapraklarda kg/hektar şeklinde ölçülendirilmiş karbon miktarları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	1.45104259719467 0.000000000000003	717.94	721.94	722.28	725.21	0.1429	0.3831

Navarra (İspanya)'nın dağlık kesimlerinin 38 değişik yerinde yapraklardan (kilogram/hektar şeklinde ölçülendirilmiştir) elde edilen karbon miktarları model sonuçlarına bakıldığında Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Aşağıda Veri Seti-67 ile Veri Seti-68; idrarın belirli fiziksel özelliklerinde kalsiyum oksalat kristalleri oluşumu ile ilişkili olup olmadığının belirlenmesi amacıyla analiz edilen verilerdir.

Veri Seti-67: İdrardaki Üre ve Kalsiyum Miktarı ile İlgili Veriler

“İdrardaki iki fiziksel özellik olan litre başına milimol üre konsantrasyonu ve litre başına milimol cinsinden kalsiyum konsantrasyonu kristalli veya kristalsiz ayırım gözetmeksizin aynı veri içerisinde incelenmektedir”(Andrews ve Herzberg 2012).

Çizelge 5.136 İdrardaki üre miktarı verileri

443	296	101	224	91	252	195	550	170	382	152
448	64	147	161	284	133	395	95	214	380	199
87	422	239	270	75	72	159	349	282	297	317
130	362	330	125	260	97	311	385	104	187	126
308	325	354	360	302	364	301	197	188	124	398
159	516	212	486	224	385	473	620	430	198	184
164	141	396	457	10	395	272	418	301	195	394
255	178									

Çizelge 5.137 İdrardaki üre miktarı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	1.42079690364965 0.000000000000007	1004.39	1008.39	1008.55	1013.13	0.1123	0.2528

Veri Seti-68: İdrardaki Kalsiyum Miktarı

Çizelge 5.138 İdrardaki kalsiyum miktarı verileri

2.45	4.49	2.36	2.15	1.16	3.34	1.40	8.48	1.16	2.21	1.93
1.27	1.03	1.47	1.53	5.09	1.05	2.03	7.68	1.45	5.16	0.81
1.32	1.55	1.52	0.77	2.17	0.17	0.83	3.04	1.06	3.93	5.38
3.53	4.54	3.98	1.02	3.46	1.19	5.64	2.66	1.22	2.64	2.31
4.49	6.96	13.00	5.54	6.19	7.31	14.34	4.74	2.50	1.27	4.18
3.10	3.01	6.81	8.28	2.33	7.18	5.67	12.68	8.94	3.16	3.30
6.99	0.65	4.18	4.45	0.27	7.64	6.63	8.53	9.04	0.58	7.82
12.20	9.39									

Çizelge 5.139 İdrardaki kalsiyum miktarı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	2.625773 0.447996	374.90	378.90	379.06	383.64	0.0994	0.3904

Sonuç olarak; Veri-Seti 67 ile Veri Seti-68'deki verilere bakıldığında; idrardaki kalsiyum miktarı, idrardaki üre miktarına göre Lindley dağılımına daha iyi uyum sağlamıştır.

Aşağıda Veri Seti-69 ile Veri Seti-76 arasındaki veriler iki parametrelili Lindley dağılımına uygunluğa göre Kevlar 49/ epoxy küresel basınç kabının parçalanmadan veya kırılmadan ne kadar süre dayanabileceğini test etmeyi amaçlamak açısından Kevlar/epoxy kablo ömrü verisi ve Kevlar/epoxy küresel basınç kabının ömrü verisi olmak üzere iki şekilde incelenmiştir.

Veri Seti-69: Kevlar 49/epoxy Küresel Basınç Kabının Çatlamaya Dayanma Süresi

Bu çalışma, Andrews ve Herzberg (2012) tarafından ele alınmış olup, sabit basınç altında Kevlar49/ epoxy küresel basınç kabının parçalanmadan veya kırılmadan ne kadar süre dayanabileceğini test etmeyi amaçlamıştır. Tıpkı yangın söndürme erlerinin kullandığı soluma aparatı gibi, NASA'da uzay modüllerinde bu Kevlar küresel basınç kabı, kabın ömrünün sonuna kadar sabit basınç altında kullanılmıştır. Bu çalışma; kabın basınç altındaki dayanıklılığını ve ürünün güvenilirliğini test etmek adına veri üretmek için yapılmıştır.

İki çeşit veri kullanılmıştır:

i- Kevlar/epoxy kablo ömrü verisi

ii- Kevlar/epoxy küresel basınç kabının ömrü verisi

Çalışma sonuçlarına göre düşük basınç altında kaza oranları her iki veri kümesi için de zamana bağlı olarak çıktığından; üstel yaşam dağılımı makul bir dağılım değildir. Kevlar/epoxy kabloları hakkında yapılan araştırmalar 59 064 saat yani 7 yıla dayandırılırken, küresel kaplar için yalnızca 1 yıllık bir çalışmaya dayandırılabilmiştir.

Kevlar 49/Epoxy Kablolarının/Tellerinin %90 Baskı Seviyesinde Parçalanma Ömürleri

Çizelge 5.140 Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %90 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri

0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.06
0.07	0.07	0.08	0.09	0.09	0.10	0.10	0.11	0.11	0.12
0.13	0.18	0.19	0.20	0.23	0.24	0.24	0.29	0.34	0.35
0.36	0.38	0.40	0.42	0.43	0.52	0.54	0.56	0.60	0.60
0.63	0.65	0.67	0.68	0.72	0.72	0.72	0.73	0.79	0.79
0.80	0.80	0.83	0.85	0.90	0.92	0.95	0.99	1.00	1.01
1.02	1.03	1.10	1.05	1.10	1.11	1.15	1.18	1.20	1.29
1.31	1.33	1.34	1.40	1.43	1.45	1.50	1.51	1.52	1.53
1.54	1.54	1.55	1.58	1.60	1.63	1.64	1.80	1.80	1.81
2.02	2.05	2.14	2.17	2.33	3.03	3.03	3.34	4.20	4.69
7.89									

Çizelge 5.141 Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %90 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000001138484734 0.975752260814833	206.95	210.95	211.08	216.18	0.0888	0.3811

Veri Seti-70: Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %80 baskı seviyesinde parçalanma ömürleri

Çizelge 5.142 Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri

1.8	3.1	4.2	6.0	7.5	8.2	8.5	10.3	10.6	24.2
29.6	31.7	41.9	44.1	49.5	50.1	59.7	61.7	64.4	69.7
70.0	77.8	80.5	82.3	83.5	84.2	87.1	87.3	93.2	103.4
104.6	105.5	108.8	112.6	116.8	118.0	122.3	123.5	124.4	125.4
129.5	130.4	131.6	132.8	133.8	137.0	140.2	1140.9	148.5	149.2
152.2	152.8	157.7	160.0	163.6	166.9	170.5	174.9	177.7	179.2
183.6	183.8	194.33	195.1	195.3	202.6	220.2	221.3	227.2	251.0
266.5	267.9	269.2	270.4	272.5	285.9	292.6	295.1	301.1	304.3
316.8	329.8	334.1	346.2	351.2	353.3	369.3	372.3	381.3	393.5
451.3	461.5	574.2	653.3	663.0	669.8	739.7	759.6	894.7	974.9

Çizelge 5.143 Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.006797 0.007116	1267.18	1271.18	1271.30	1276.39	0.0683	0.7138

Veri Seti-71: Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %70 baskı seviyesinde parçalanma ömürleri

Çizelge 5.144 Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %70 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri

1051	1337	1387	1921	1942	2322	3629	4006	4012	4063
4921	5445	5620	5817	5905	5956	6068	6121	6473	7501
7886	8108	8546	8666	8831	9106	9711	9806	10205	10396
10861	11026	11214	11362	11604	11608	11745	11762	11895	12044
13520	13670	14110	14496	15395	16179	17092	17568	17568	

Çizelge 5.145 Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin %70 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	2.629796479115492 0.0000000000000227	968.96	972.96	973.22	976.75	0.1288	0.3594

Çizelge 5.146 Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin çeşitli baskı seviyelerinde parçalanma süreleri model sonuçlarının karşılaştırılması

Kevlar 49/Epoxy Kablolarının/Tellerinin %90 Baskı Seviyesinde Parçalanma Süreleri		Kevlar 49/Epoxy Kablolarının/Tellerinin %80 Baskı Seviyesinde Parçalanma Süreleri		Kevlar 49/Epoxy Kablolarının/Tellerinin %70 Baskı Seviyesinde Parçalanma Süreleri	
K-S Değeri	p Değeri	K-S Değeri	p Değeri	K-S Değeri	p Değeri
0.0888	0.3811	0.0683	0.7138	0.1288	0.3594

Sonuç olarak; % 80 baskı seviyesinde Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin parçalanma ömrü, % 70 ve %90 baskı seviyesinde Kevlar 49/Epoxy kablolarının/tellerinin parçalanma süreleri model sonuçlarına göre Lindley dağılımı ile daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-72: Kevlar 49/Epoxy %86 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı

Çizelge 5.147 Kevlar 49/Epoxy %86 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı

65	197	210	205	202	176	209	140	66	42
49	87	135	220	94	170	90	46	217	51
208	138	245	83	36	166	31	147	124	13
244	241	17	21	23	122	109	105	120	

Çizelge 5.148 Kevlar 49/Epoxy %86 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	3.048720502978732 0.000000000000015	478.19	482.19	482.50	485.67	0.1131	0.6156

Veri Seti-73: Kevlar 49/Epoxy %80 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı

Çizelge 5.149 Kevlar 49/Epoxy %80 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı

80	75	79	60	77	55	57	44	15	74
191	183	69	237	29	61	110	12	185	118
119	26	247	108						

Çizelge 5.150 Kevlar 49/Epoxy %80 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	1.980155976284183 0.0000000000000208	261.12	265.12	265.69	267.48	0.1303	0.7629

Veri Seti-74: Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri

Çizelge 5.151 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri verileri

19.1	24.3	69.8	71.2	136.0	199.1	403.7	432.2	453.4	514.1
514.2	541.6	544.9	554.2	664.5	694.1	876.7	930.4	6177.5	1254.9
1275.6	1536.8	1755.5	2046.2						

Çizelge 5.152 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %80 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000000177324404 0.001106727917051	374.71	378.71	379.28	381.07	0.1306	0.7603

Veri Seti-75: Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde sayısı

Çizelge 5.153 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde sayısı

174	200	93	39	50	45	56	243	15	35
231	70	164	241	184	234	240			

Çizelge 5.154 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	7.539407451621147 0.000000000014118	210.65	214.65	215.45	216.43	0.2282	0.2630

Veri Seti-76: Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde parçalanma süreleri (Andrews ve Herzberg, 2012).

Çizelge 5.155 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde parçalanma süreleri

225.2	503.6	1087.7	1134.3	1824.3	1920.1	2383.0	2442.5	3708.9
4908.9	5556.0	6271.1	7332.0	7918.7	7996.0	9240.3	9973.0	3708.9

Çizelge 5.156 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde parçalanma süreleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.923574241042069 0.392067029518244	335.99	339.99	340.79	341.77	0.1075	0.9709

Çizelge 5.157 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının çeşitli baskı seviyelerinde sayılarının model sonuçlarının karşılaştırılması

Kevlar 49/Epoxy Küre Kaplarının %86 Baskı Seviyesinde Sayısı		Kevlar 49/Epoxy Küre Kaplarının %80 Baskı Seviyesinde Sayısı		Kevlar 49/Epoxy Küre Kaplarının %74 Baskı Seviyesinde Sayısı	
K-S Değeri	p Değeri	K-S Değeri	p Değeri	K-S Değeri	p Değeri
0.1131	0.6156	0.1303	0.7629	0.2282	0.2630

Yukarıdaki Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %86, %80 ve %74 baskı seviyesinde sayılarına bakıldığında, Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %80 baskı seviyesinde, diğer baskı seviyelerine göre iki parametrelili Lindley dağılımına göre daha iyi uyum sağladığı söylenebilir.

Çizelge 5.158 Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının çeşitli baskı seviyelerinde parçalanma sürelerinin model sonuçlarının karşılaştırılması

Kevlar 49/Epoxy Küre Kaplarının %80 Baskı Seviyesinde Parçalanma Süreleri		Kevlar 49/Epoxy Küre Kaplarının %74 Baskı Seviyesinde Parçalanma Süreleri	
K-S Değeri	p Değeri	K-S Değeri	p Değeri
0.1306	0.7603	0.1075	0.9709

Yukarıdaki Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %80 ve %74 baskı seviyesinde parçalanma sürelerine bakıldığında, Kevlar 49/Epoxy küre kaplarının %74 baskı seviyesinde, %80

baskı seviyesine göre iki parametrelili Lindley dağılımına göre daha iyi uyum sağladığı söylenebilir.

Veri Seti-77: Aşağıdaki verilere ilişkin 24 adet gözlem, Kuzey Anadolu fay zonunda geçen yüzyıldaki ardışık depremler arasındaki gün cinsinden periyodu göstermekte olup, Tahmasbia ve Rezaei (2008) tarafından kullanılmaktadır.

Çizelge 5.159 Deprem veri seti

136	1187	117	944	24
166	378	1126	716	70
152	264	275		

Çizelge 5.160 Deprem veri seti model sonuçları

Model	Parametre Tahmini (α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000440884525690 0.002671729660357	183.48	187.48	188.68	188.61	0.1449	0.9115

Deprem veri seti model sonuçlarının Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Aşağıda Veri Seti-78 ile Veri Seti-85 arasındaki veriler Belçika, Brezilya, Kanada, Singapur, Amerika Birleşik Devletleri, Birleşik Arap Emirlikleri, Yeni Zelanda, Hong Kong olmak üzere sekiz farklı ülkenin 1998-2010 yılları arasında sabit genişbant internet abone verilerini göstermektedir.

Veri Seti-78: Sabit Genişbant İnternet Aboneliği

Sabit genişbant aboneleri, kamu internetine yüksek hızda erişim için ödeme yapan kullanıcılarıdır. Yüksek hızlı erişimde, bir ya da her iki yönde, saniyede en az 256 kilobayt hıza ulaşılır (Anonymous.Web Sitesi: <https://www.gapminder.org/data/>. Erişim Tarihi:15.04.2016)

Belçika sabit genişbant internet aboneleri (Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.161 Belçika sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0.000590285	0.004071276	0.057331104	0.18713555	0.407721095
1.738724011	2.536205774	4.00923571	5.053675688	5.845137982
1.71719585	0.531980205	6.805120392		

Çizelge 5.162 Belçika sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000000440022346 0.449918937670661	46.76	50.77	51.96	51.89	0.2487	0.3395

Veri Seti-79: Brezilya sabit genişbant internet aboneleri(Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.163 Brezilya sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0.0005902849266	0.004071275921	0.05733110399	0.1871355503	0.4077210953
0.5319802053	1.71719585	1.738724011	2.536205774	4.00923571
5.053675688	5.845137982	6.805120392		

Çizelge 5.164 Brezilya sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000000440022346 0.449918937659179	46.76	50.76	51.96	51.89	0.2487	0.3395

Veri Seti-80: Kanada sabit genişbant internet aboneleri(Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.165 Kanada sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0.4628420485	1.908246774	4.585459072	9.124281334	11.20783113
14.24737972	16.92764494	21.67615746	24.69296945	27.55965862
29.53952415	30.46094998	29.70972572		

Çizelge 5.166 Kanada sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.210180121926336 0.098398615986714	98.31	102.31	103.51	103.44	0.1709	0.7837

Veri Seti-81: Singapur sabit genişbant internet aboneleri (Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.167 Singapur sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0.2546343451	0.7578245384	1.713051466	3.649105848	6.465517241
10.13658015	13.08469532	15.38281213	17.90112237	19.53101164
21.15551515	23.47421606	24.9911365		

Çizelge 5.168 Singapur sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.117103402286490 0.122163416473330	90.437	94.437	95.637	95.567	0.1781	0.7417

Veri Seti-82: Amerika Birleşik Devletleri sabit genişbant internet aboneleri (Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.169 Amerika Birleşik Devletleri sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0.255896235	0.9870577695	2.505604476	4.489194972	6.912311398
9.56345513	12.75677737	17.31082118	20.18825617	23.30635019
24.89592312	25.76999249	27.71082337		

Çizelge 5.170 Amerika Birleşik Devletleri sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.109832 0.110307	93.26	97.26	98.46	98.39	0.1722	0.7760

Veri Seti-83: Birleşik Arap Emirlikleri sabit genişbant internet aboneleri (Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.171 Birleşik Arap Emirlikleri sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0	0.01266811136	0.06504057536	0.2658885389	0.5110162532
0.891719071	1.534864827	3.177903886	5.160498318	7.02612375
8.983580926	9.911101535	10.47414803		

Çizelge 5.172 Birleşik Arap Emirlikleri sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000000492729493 0.270751716304431	59.97	63.97	65.17	65.10	0.2554	0.3094

Veri Seti-84: Yeni Zelanda sabit genişbant internet aboneleri (Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.173 Yeni Zelanda sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0	0	0.120742392	0.4449684319	1.101684184
2.0609853	4.689785933	7.765064467	11.23643837	20.17406523
21.43317951	22.73043236	24.93131868		

Çizelge 5.174 Yeni Zelanda sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000000383457820 0.111407846975685	83.05	87.05	88.25	88.18	0.2691	0.2538

Veri Seti-85: Hong Kong sabit genişbant internet aboneleri (Her 100 kişi başına).

Çizelge 5.175 Hong Kong sabit genişbant internet abone verileri (1998-2010)

0.1681006159	1.308817074	6.668417104	10.67028581	15.40598449
18.83826588	22.37401047	24.35122997	26.19533039	27.41786627
27.73815154	28.8813056	29.86854839		

Çizelge 5.176 Hong Kong sabit genişbant internet abone model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.201342 0.091457	99.94	103.94	105.14	105.07	0.2274	0.4466

Çizelge 5.177 1998-2010 yılları arası ülkelere göre elde edilen sabit genişbant internet abonelerinin (100 kişiye düşen) model sonuçlarının karşılaştırılması

	K-S Değeri	p Değeri
Belçika	0.2487	0.3395
Brezilya	0.2487	0.3395
Kanada	0.1709	0.7837
Singapur	0.1781	0.7417
Amerika Birleşik Devletleri	0.1722	0.7760
Birleşik Arap Emirlikleri	0.2554	0.3094
Yeni Zelanda	0.2691	0.2538
Hong Kong	0.2274	0.4466
Türkiye*	0.3744	0.0382
* işaretli olan Türkiye, dağılımın veri setini modelleyemediğini göstermektedir.		

Sonuç olarak; 1998-2010 yılları arası ülkelere göre elde edilen sabit genişbant internet abonelerinin (100 kişiye düşen) model sonuçları karşılaştırıldığında Yeni Zelanda sabit genişbant internet aboneleri veri seti en düşük modellemeye sahip iken; Kanada, Singapur, Amerika Birleşik Devletleri sabit genişbant internet aboneleri veri setleri diğer ülkelere göre Lindley dağılımı ile daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-86: 2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı (<https://www.gapminder.org/data/> 2016)

Çizelge 5.178 2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
Afganistan	8.894667	Saint Lucia	7.630864
Arnavutluk	1.223273	Saint VincentGrenadines	10.60231
Cezayir	3.803705	Samoa	5.220551
Andorra	0.7054017	San Marino	1.093015
Angora	19.18674	Sao Tome ve Principe	2.303988
Antigua ve Barbuda	3.499865	Suudi Arabistan	6.62988

Çizelge 5.178 2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri (devam)

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
Çad	8.076636	Tuvalu	8.554679
Şili	3.225192	Uganda	7.547772
Çin	9.386707	Ukranya	10.13841
Kolombiya	3.103212	Birleşik Arap Emirlikleri	6.081578
Comoros	3.869431	Birleşik Krallık	0.4009245
Kongo Cumhuriyeti	10.17131	Tanzanya	11.30651
Orta Afrika Cumhuriyeti	14.29328	Amerika Birleşik Devletleri	1.347872
Kosta Rika	4.226932	Uruguay	3.78133
Hırvatistan	2.215064	Özbekistan	4.301025
Küba		Vanuatu	5.576567
Kıbrıs	3.890298	Venezuela	2.482172
Çek Cumhuriyeti	1.843231	Vietnam	5.388711
Fildişi Sahili	16.71086	Yemen Cumhuriyeti	6.972811
Kore Demokratik Cumhuriyeti	5.348045	Kongo Demokratik Cumhuriyeti	17.31894
Arjantin	2.503394	Senegal	6.626352
Ermenistan	2.312726	Sırbistan ve Karadağ	1.38111
Avustralya	1.250547	Seychelles	17.84135
Avusturya	0.9030446	Sierra Leone	16.06741
Azerbaycan	0.4922847	Singapur	0.4237915
Bahama Adaları	7.378496	Slovak Cumhuriyeti	2.99772
Bahreyn	0.7915528	Slovenya	1.216012
Bangladeş	6.269516	Solomon Adaları	6.155058
Barbados	3.250342	Somali	5.91463
Belarus	16.80746	Güney Afrika	2.831743
Belçika	0.5869388	İspanya	1.194185
Belize	6.4369	Sri Lanka	4.779348
Benin	7.249941	Sudan	4.924545
Bhutan	6.63132	Surinam	10.07103
Yeşil Burun Adaları	0.9686725	Türkiye	0.959766
Cook Adaları	4.252205	Türkmenistan	7.036347

Çizelge 5.178 2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri (devam)

Zambiya	6.452204	Zimbabve	6.349378
Danimarka	0.7514781	Finlandiya	2.370722
Bolivya	6.402012	Svaziland	7,554778
Bosna ve Hersek	5.764493	İsveç	1.045261
Botsvana	7.095198	İsviçre	0.8517751
Brezilya	4.259397	Suriye	1.724574
Brunei	5.07066	Tacikistan	4.360607
Bulgaristan	2.20045	Tayland	4.966814
Burkina Faso	9.378786	Makedonya	1.203615
Burundi	11.82111	Timor-Leste	7.999894
Kamboçya	7.805635	Togo	7.91406
Kamerun	7.36117	Tonga	3.92946
Kanada	0.933789	Trinidad ve Tobago	4.684053
Lüksemburg	0.5700158	Tunus	3.023738
Guyana	4.712037		

Çizelge 5.179 2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.610355 0.299834	1031.53	1035.53	1035.60	1042.05	0.0468	0.7754

2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonuçlarına bakıldığında, Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-87: 2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı (<https://www.gapminder.org/data/.2016>)

Çizelge 5.180 2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
Afganistan	8.3863449	Mozambik	7.1671734
Arnavutluk	3.5376987	Myanmar	6.6084266
Cezayir	2.5210345	Namibya	1.5484166
Andorra	0.6720386	Nauru	20.765032
Angora	14.243567	Nepal	6.4851365
Antigua ve Barbuda	6.9375997	Hollanda	0.5888011
Arjantin	1.6490574	Yeni Zelanda	1.5434932
Ermenistan	1.9096835	Nikaragua	4.8974838
Avustralya	0.9248844	Nijer	8.5824699
Avusturya	0.8021783	Nijerya	13.176292
Azerbaycan	2.8146572	Niue	5.4468122
Bahama Adaları	7.3068953	Norveç	1.7377313
Bahreyn	0.5715222	Umman	3.4224255
Bangladeş	6.3560781	Pakistan	5.4131637
Barbados	2.5087729	Panama	4.4426117
Belarus	10.100322	Papua Yeni Gine	7.0604992
Belçika	0.5423049	Paraguay	2.1288807
Belize	15.534864	Peru	4.4130096
Benin	3.8193238	Filipinler	4.2089319
Bhutan	5.8455195	Polonya	2.4734137
Bolivya	5.9886823	Portekiz	1.5142155
Bosna ve Hersek	5.6849909	Katar	2.1925063
Botsvana	9.1530886	Kore Cumhuriyeti	2.2824244
Brezilya	4.0892844	Moldova	7.3745241
Brunei	3.7396495	Romanya	4.617929
Bulgaristan	1.7871877	Rusya	10.0294
Burkina Faso	5.0610347	Ruanda	20.573761
Burundi	18.437159	Saint Kitts ve Nevis	9.0454292
Kamboçya	8.7058945	Saint Lucia	5.6360617
Kamerun	4.4244895	Saint Vincent ve Grenadines	12.06986
Kanada	0.7984931	Samoa	5.5871234
Yeşil Burun Adaları	1.3260694	San Marino	0.7284465
Orta Afrika Cumhuriyeti	15.472693	Sao Tome ve Principe	3.114512
Çad	5.2074013	Suudi Arabistan	6.7716613
Şili	3.090596	Senegal	4.1376815
Çin	9.9491606	Sırbistan ve Karadağ	1.3829156
Kolombiya	3.6245928	Seychelles	15.956892
Comoros	2.1277838	Sierra Leone	8.9640265
Kongo Cumhuriyeti	10.052415	Singapur	0.5943292

Çizelge 5.180 2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri (devam)

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
Cook Adaları	3.9446473	Slovak Cumhuriyeti	2.742431
Kosta Rika	3.2312293	Slovenya	0.8921333
Hırvatistan	1.4666559	Solomon Adaları	6.2568641
Küba	2.5255632	Somali	26.637497
Kıbrıs	3.3060546	Güney Afrika	2.5931451
Çek Cumhuriyeti	1.5786015	İspanya	1.1879923
Fildişi Sahili	25.925079	Sri Lanka	4.1643748
Kore Demokratik Cumhuriyeti	5.1696153	Kongo Demokratik Cumhuriyeti	16.797123
Sudan	7.2558513	Surinam	5.4128628
Danimarka	0.8796414	Svaziland	9.9244976
Cibuti	7.3407264	İsveç	1.1987343
Dominika	3.0683339	İsviçre	0.5800393
Dominik Cumhuriyeti	1.1316286	Suriye	1.60772227
Ekvador	4.4104896	Tacikistan	4.6851835
Mısır	4.2882476	Tayland	6.4879384
El Salvador	4.3467221	Makedonya	1.3572072
Ekvator Ginesi	4.8373322	Timor-Leste	5.6578856
Eritre	7.2772632	Togo	4.1714497
Estonya	5.8773847	Tonga	3.7373724
Japonya	2.4621706	Meksika	2.9203179
Ürdün	2.4908094	Mikronezya Federal Devletleri	4.3801417
Kazakistan	9.1289539	Moğolistan	4.8555689
Kenya	4.9495597	Fas	3.106741
Kiribati	0	Libya	2.4792697
Kuveyt	0.7367865	Litvanya	8.8075962
Kırgızistan	8.7171049	Madagaskar	3.7261426
Laos	9.2893152	Lesotho	5.5340872
Letonya	8.6793137	Liberya	5.4654603
Lübnan	3.095901		
Endonezya	4.7797399	Malezya	3.5122786
İran	2.7192767	Maldivler	4.6025429
Irak	10.312593	Mali	7.320632
İrlanda	1.3040662	Malta	0.718758
İsrail	0.5109014	Marshall Adaları	8.6310549
İtalya	0.7025885	Moritanya	4.3359084
Jamaika	2.1037865	Mauritius	3.6802504
Hindistan	6.6677222	Malawi	15.061623
Macaristan	1.6289475	Zambiya	14.159335
İzlanda	0.7221004	Zimbabve	16.047564

Çizelge 5.180 2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı verileri (devam)

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
Etiyopya	4.5163827	Trinidad ve Tobago	4.4297271
Fiji	5.7088728	Tunus	2.6666031
Finlandiya	2.229738	Türkiye	0.7045709
Fransa	1.4311743	Türkmenistan	10.085534
Gabon	4.3265758	Tuvalu	8.7631741
Gambiya	3.8314133	Uganda	8.3806658
Gürcistan	0.8425884	Ukranya	8.8924236
Amerika Birleşik Devletleri	1.1515256	Birleşik Arap Emirlikleri	2.960258
Gana	3.773252	Birleşik Krallık	0.3479054
Yunanistan	2.509155	Tanzanya	11.590888
Grenada	11.305052	Almanya	0.458497
Guatemala	1.338925	Uruguay	2.1644588
Gine	5.1680264	Özbekistan	5.2711349
Gine-Bissau	3.6718853	Vanuatu	5.4953885
Guyana	5.519558	Venezuela	2.7272921
Haiti	1.6433936	Vietnam	4.5238781
Honduras	3.6400437	Yemen Cumhuriyeti	7.6643171

Çizelge 5.181 2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.781357 0.324447	1011.54	1015.54	1015.60	1022.06	0.0549	0.5890

2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonuçlarına bakıldığında, Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-88: Ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi (m³/inhab/yıl) (2002 yılı) (Anonymous.Web Sitesi: <https://www.gapminder.org/data/>. Erişim Tarihi:15.04.2016)

Çizelge 5.182 2002 yılı ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi verileri (m³/inhab/yıl)

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
Afganistan	1047.093	Namibya	154.46
Arnavutluk	552.031	Nepal	399.354
Cezayir	193.226	Hollanda	493.072
Angora	23.749	Yeni Zelanda	534.429
Arjantin	775.459	Nikaragua	247.33
Ermenistan	568.1674	Nijer	182.567
Avustralya	1220.677	Nijerya	60.988
Avusturya	258.206	Norveç	481.59
Azerbeycan	1224.3352	West Bank ve Gaza	3.681611
Bahreyn	441.18	Umman	556.442
Bangladeş	547.80	Pakistan	1128.993
Barbados	311.707	Panama	267.725
Belarus	280.387	Papua Yeni Gine	12.5455
Belçika	831.173	Paraguay	87.958
Belize	583.53	Peru	764.787
Benin	16.87	Filipinler	358.787
Bhutan	719.2625	Polonya	422.55
Bolivya	166.1406	Portekiz	1088.304
Botsvana	109.2866	Katar	422.116
Brezilya	330.83	Kore Cumhuriyeti	393.176
Bulgaristan	1330.18	Moldova	572.807
Burkina Faso	63.17	Romanya	1057.088
Burundi	40.8561	Rusya	524.633
Kamboçya	307.721	Senegal	203.9317
Kamerun	59.54	Sierra Leone	77.169
Kanada	1468.304	Somali	439.013
Yeşil Burun Adaları	46.5734	Güney Afrika	268.2649
Orta Afrika Cumhuriyeti	6.254	İspanya	860.871
Çad	25.222	Sri Lanka	667.649
Şili	795.528	Sudan	1073.884
Çin	486.454	Surinam	1510.761
Kolombiya	248.957	Swaziland	956.5776
Comoros	13.552	İsveç	331.839
Kongo Cumhuriyeti	13.6614	İsviçre	350.91
Kosta Rika	4.226932	Suriye	939.5591
Hırvatistan	52.567	Tacikistan	1893.06
Küba	791.97	Tayland	1411.602

Çizelge 5.182 2002 yılı ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi verileri (m³/inhab/yıl) (devam)

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
Kıbrıs	304.90675	Togo	29.4243
Çek Cumhuriyeti	252.90	Trinidad ve Tobago	236.618
Kore Demokratik Cumhuriyeti	387.592	Kongo Demokratik Cumhuriyeti	6.724
Tunus	269.931	Türkiye	598.83
Danimarka	236.419	Türkmenistan	5324.076
Cibuti	24.909	Uganda	11.41
Dominik Cumhuriyeti	375.214	Ukranya	781.429
Ekvador	1345.389	Birleşik Krallık	160.637
Mısır	989.8	Tanzanya	145.5561
El Salvador	200.236	Amerika Birleşik Devletleri	1647.995
Ekvator Ginesi	239.3134	Uruguay	946.971
Eritre	75.01	Özbekistan	2292.198
Estonya	116.4487	Venezuela	330.424
Etiyopya	75.9978	Vietnam	876.592
Fiji	86.137	Yemen Cumhuriyeti	176.21
Finlandiya	475.9238	Zambiya	160.078
Fransa	667.684	Zimbabve	327.0001
Gabon	97.754	Mali	617.1556
Gambiya	20.71322	Malta	128.04941
Almanya	471.357	Moritanya	624.79
Gana	46.5541	Mauritius	504.688
Yunanistan	703.906	Meksika	768.867
Guatemala	170.446	Moğolistan	175.336
Gine	177.363	Fas	427.18
Gine-Bissau	120.2021	Mozambik	32.925
Guyana	2227.734	Myanmar	710.528
Haiti	111.723	Kuveyt	374.37368
Honduras	133.417	Kırgızistan	1993.146
Macaristan	751.657	Laos	555.30
İzlanda	523.37959	Letonya	127.93
Hindistan	596.95	Lübnan	356.661
Endonezya	380.657	Lesotho	25.883
İran	1313.39	Liberya	33.877
Irak	2509.36	Libya	776.9474
İrlanda	287.91046	Litvanya	77.865
İsrail	289.0318	Madagaskar	872.559

Çizelge 5.182 2002 yılı ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi verileri (m³/inhab/yıl) (devam)

Ülkeler	Ölüm Oranları	Ülkeler	Ölüm Oranları
İtalya	764.275	Malawi	82.382
Jamaika	155.997	Malezya	371.831
Japonya	693.662	Kenya	48.005
Kazakistan	2343.73		

Çizelge 5.183 2002 yılı ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi verileri model sonuçları (m³/inhab/yıl)

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.00000000318 0.00187599872	2241.83	2245.83	2245.91	2251.90	0.0622	0.5695

2002 yılı ülkelere göre kişi başına düşen toplam su çekimi (m³/inhab/yıl) verileri model sonuçlarına bakıldığında, Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Aşağıda Veri Seti-89 ile Veri Seti-92 arasındaki veriler 1955-2008 yılları arası 4 farklı ülkeye göre 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verilerini göstermektedir.

Veri Seti-89: 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı (Bütün halka oranla ölenlerin sayısı).

1955-2008 yılları arası Avusturya 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı (<https://www.gapminder.org/data/>.2016)

Çizelge 5.184 Avusturya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri (Bütün halka oranla ölenlerin sayısı)

Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı
1955	3.047004	1973	10.3339	1991	3.822723
1956	5.41735	1974	9.47531	1992	3.031016
1957	8.359806	1975	10.86053	1993	3.913665
1958	8.227016	1976	7.293258	1994	3.320353
1959	8.649289	1977	5.99483	1995	3.875526
1960	9.224444	1978	7.199778	1996	3.12763
1961	8.760556	1979	6.552839	1997	2.427178
1962	7.655581	1980	6.775258	1998	2.072531
1963	8.774994	1981	5.779846	1999	2.179007
1964	10.4774	1982	6.695055	2000	1.742017
1965	8.388876	1983	6.079653	2001	1.593927
1966	9.562415	1984	5.463913	2002	1.296523
1967	10.1029	1985	5.707173	2003	2.233693
1968	12.91997	1986	4.375949	2004	1.192754
1969	10.22768	1987	3.929587	2005	1.513266
1970	11.3983	1988	4.173084	2006	1.490741
1971	11.58811	1989	4.778004	2007	1.016716
1972	11.74887	1990	3.918314	2008	0.6884815

Çizelge 5.185 Avusturya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	7805933187475.678 0.337	282.30	286.30	286.54	290.28	0.1003	0.6125

1955-2008 yılları arası Avusturya 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranına bakıldığında Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-90: 1955-2008 yılları arası Finlandiya 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı (Anonymous.Web Sitesi: <https://www.gapminder.org/data/>. Erişim Tarihi:15.04.2016)

Çizelge 5.186 Finlandiya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri

Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı
1952	5.718764	1971	13.597	1990	4.317448
1953	7.104397	1972	14.42342	1991	3.611232
1954	5.923228	1973	13.20031	1992	4.31059
1955	7.410903	1974	9.444217	1993	2.783318
1956	8.033815	1975	8.619254	1994	3.669703
1957	9.316471	1976	7.11241	1995	2.868386
1958	8.116125	1977	7.047467	1996	2.749794
1959	8.298832	1978	6.176873	1997	3.421705
1960	10.60658	1979	5.635862	1998	1.43895
1961	9.980972	1980	4.041144	1999	2.791078
1962	9.920058	1981	4.747703	2000	2.003122
1963	11.15754	1982	4.687634	2001	1.982533
1964	11.83815	1983	5.777357	2002	1.697435
1965	12.14191	1984	4.526107	2003	2.482565
1966	14.02722	1985	5.596587	2004	1.43495
1967	13.10058	1986	3.585032	2005	2.533232
1968	11.10268	1987	3.55106	2006	0.5306522
1969	13.95443	1988	4.999376	2007	1.418689
1970	12.50832	1989	4.551744	2008	1.008989

Çizelge 5.187 Finlandiya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	10130665631627.8 0 0.31	309.46	313.46	313.68	317.55	0.0631	0.9663

1955-2008 yılları arası Finlandiya 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçlarına bakıldığında, Lindley dağılımı ile iyi uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-91: 1950-2008 yılları arası Japonya 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı ([https://www.gapminder.org/ data/](https://www.gapminder.org/data/).2016)

Çizelge 5.188 Japonya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri

Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı
1950	3.612458	1970	9.009819	1990	3.057825
1951	4.004043	1971	8.368959	1991	2.834538
1952	4.455929	1972	8.515089	1992	2.800491
1953	4.758934	1973	8.07844	1993	2.534739
1954	5.337521	1974	6.111013	1994	2.611274
1955	5.095222	1975	6.175536	1995	2.338089
1956	5.34873	1976	5.233179	1996	2.053026
1957	6.016615	1977	5.149218	1997	1.950665
1958	6.560856	1978	5.088893	1998	2.149142
1959	7.60355	1979	4.542347	1999	1.747486
1960	8.345823	1980	4.046936	2000	1.474934
1961	8.565308	1981	3.72369	2001	1.79839
1962	7.399973	1982	3.840034	2002	1.793158
1963	8.08159	1983	3.530854	2003	1.404554
1964	8.038232	1984	3.158915	2004	1.489097
1965	7.93782	1985	2.940342	2005	1.218714
1966	8.542609	1986	2.823806	2006	1.01134
1967	7.755346	1987	2.982615	2007	0.8943998
1968	8.249918	1988	2.765534	2008	0.9109223
1969	8.754262	1989	3.086503		

Çizelge 5.189 Japonya 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	23314235968760.96 0.44	273.52	277.74	277.52	281.68	0.0959	0.6148

1950-2008 yılları arası Japonya 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçlarının Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-92: 1950-2008 yılları arası Singapur 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı (Anonymous. Web Sitesi: <https://www.gapminder.org/data/>. Erişim Tarihi:15.04.2016)

Çizelge 5.190 Singapur 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verileri

Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı	Yıllar	Ölüm Oranı
1963	4.267519	1978	3.199728	1993	0.8807426
1964	3.536614	1979	2.664798	1994	1.524384
1965	5.257335	1980	2.724123	1995	0.9286981
1966	3.761827	1981	3.356711	1996	1.6587
1967	3.900635	1982	1.504341	1997	1.029517
1968	3.271844	1983	2.76854	1998	0.7423885
1969	4.714999	1984	2.685853	1999	0.7138231
1970	4.026981	1985	1.095073	2000	0.5545878
1971	5.544204	1986	1.725202	2001	1.141912
1972	5.888337	1987	2.406359	2002	0.9149109
1973	4.494715	1988	2.12374	2003	0.654993
1974	4.117177	1989	2.31601	2004	0.5040544
1975	3.417402	1990	1.949987	2005	0.2624514
1976	4.862828	1991	1.463686		
1977	3.32257	1992	1.88044		

Çizelge 5.191 Singapur 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	17586431852575.87 0.78	153.37	157.37	157.67	160.89	0.1095	0.6411

1950-2008 yılları arası Singapur 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçlarının Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilir.

Çizelge 5.192 1950-2008 yılları 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçlarının karşılaştırılması

	K-S Değeri	p Değeri
Avusturya	0.1003	0.6125
Finlandiya	0.0631	0.9663
Japonya	0.0959	0.6148
Singapur	0.1095	0.6411

Sonuç olarak; 1950-2008 yılları arası ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı model sonuçları karşılaştırıldığında Avusturya standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verilerinin diğer ülkelere göre Lindley dağılımına daha düşük bir uyum sağladığı gözlemlenirken Finlandiya standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı diğer ülkelere göre Lindley dağılımı ile daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-93: Aşağıda Adana ilinin 15 gün için günlük açık yüzey buharlaşma verileri göstermiştir. Söz konusu veriler normalde 1990-2011 yılları arasındaki Meteoroloji Genel Müdürlüğünden alınmış ve iki parametrelili Lindley dağılımına uyumluluğunda sadece günlük verileri baz alınmıştır (Yavuz ve Devenci 2012).

Çizelge 5.193 Günlük açık yüzey buharlaşması verileri

0.7	1	1.1	1	1.2	1.5	2	1.8	1.8	1.6
2.8	2.2	2.2	2.1	1.5					

Çizelge 5.194 Günlük açık yüzey buharlaşması verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	2.676914582497158 0.0000000000000012	35.01	39.010	40.010	40.42	0.2795	0.1577

Sonuç olarak; Adana ilinin 15 gün için günlük açık yüzey buharlaşma verilerinin iki parametrelili Lindley dağılımına uyumluluğu incelendiğinde iki parametrelili Lindley dağılımına uyumlu olduğu söylenebilir.

Veri Seti-94: Aşağıda Adana ilinin 15 gün için günlük ortalama bulutluluk verileri gösterilmiştir. Söz konusu veriler normalde 1990-2011 yılları arasındaki Meteoroloji Genel Müdürlüğünden alınmış veiki parametrelili Lindley dağılımına uyumluluğunda sadece günlük verileri baz alınmıştır (Yavuz ve Deveci 2012)

Çizelge 5.195 Günlük ortalama bulutluluk verileri

1	8	6.3	8	5.7	0.3	0	0.7	0	3
0	0.7	0	2.3	2.3					

Çizelge 5.196 Günlük ortalama bulutluluk verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.000000166068023 0.365535317804259	56.17	60.18	61.270	61.45	0.2143	0.4768

Sonuç olarak; Adana ilinin 15 gün için günlük ortalama bulutluluk verilerinin iki parametrelili Lindley dağılımına uyumluluğu incelendiğinde iki parametrelili Lindley dağılımına uyumlu olduğu söylenebilir.

Ayrıca söz konusu Adana ilinin 15 gün için, günlük açık yüzey buharlaşması verileri model sonuçları ve günlük ortalama bulutluluk verileri karşılaştırıldığında günlük ortalama bulutluluk verilerinin Lindley dağılımına daha uygun olduğu söylenebilir.

Veri Seti-95: Aşağıdaki veri seti, 1971-1997 yılları arası Yunanistan’da meydana gelen artçı dizilerin yıllara göre derinliklerini vermektedir (Dratakos ve Latoussakis 2001).

Çizelge 5.197 1971-1997 yılları arası artçı dizi derinlikleri verileri

YILLAR	DERİNLİK	YILLAR	DERİNLİK
1971	27	1988	1
1972	33	1988	4
1975	15	1989	13
1975	13	1989	1
1976	29	1990	38
1977	30	1990	5
1978	3	1990	1
1979	6	1992	3
1979	45	1993	1
1980	7	1993	5
1981	17	1993	13
1981	8	1994	5
1981	15	1994	12
1982	5	1995	39
1983	9	1995	26
1983	22	1996	15
1984	24	1996	45
1984	41	1996	5
1984	46	1997	5
1985	13	1997	6
1986	1	1997	25
1988	1	1997	5

Çizelge 5.198 1971-1997 yılları arası artçı dizi derinlikleri verileri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini(α, θ)	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı	0.030583509049489 0.081932482763810	329.10	333.10	333.39	336.67	0.1025	0.7062

Sonuç olarak, 1971-1997 yılları arası Yunanistan’da meydana gelen artçı dizilerinin derinliklerinin model sonuçları incelendiğinde iki parametrelili Lindley dağılımına uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-96: Aşağıdaki veriler Hint domuzlarına farklı dozlarda tüberküloz basili enjekte edilmesinden sonraki sağkalım sürelerini göstermektedir. Bilindiği üzere Hint

domuzları tüberküloza karşı yüksek duyarlılığa sahip olup bu tür deneylerde kullanılmaktadır. Bu deney gerçekleştirilirken hayvanların aynı kafeste, aynı sayıda ve aynı şartlar altında yaşam sürdüklerinden emin olunmuştur (Shanker vd. 2015).

Çizelge 5.199 Hint domuzu sağkalım süreleri

12	15	22	24	24	32	32	33	34	38	38	43	44
48	52	53	54	54	55	56	57	58	58	59	60	60
60	60	61	62	63	65	65	67	68	70	70	72	73
75	76	76	81	83	84	85	87	91	95	96	98	99
109	110	121	127	129	131	143	146	146	175	175	211	233
258	258	263	297	341	341	376						

Çizelge 5.200 Hint domuzu sağkalım süreleri model model sonuçları

Model	Parametre Tahmini	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği
Lindley Sharma(θ)	0.019841	789.04	791.04	791.1	793.32	0.133
Üstel Dağılım(θ)	0.010018	806.88	808.88	808.94	811.16	0.198
Lindley Dağılımı (α, θ)	7.242691477632500 0.000000000000200	778.29 5	782.29 5	782.47 1	786.82 0	0.1426
(α, θ) parametrelili Lindley Dağılımının p değeri 0.1009 etmektedir.						

Sonuç olarak yukarıdaki Hint domuzlarına farklı dozlarda tüberküloz basili enjekte edilmesinden sonraki sağkalım sürelerinin (θ) parametrelili Üstel ve Lindley dağılımları ile (α, θ) parametrelili Lindley dağılımı üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, iki parametrelili Lindley dağılımının daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti -97: Aşağıdaki veri kümesi, rasgele seçilmiş 128 mesane kanseri hastasının ay cinsinden remisyon süresini temsil etmekte olup Lee ve Wang tarafından rapor edilmiştir (Shanker vd. 2015).

Çizelge 5.201 Mesane kanseri hastalarının ay cinsinden remisyon süreleri

0.08	2.09	3.48	4.87	6.94	8.66	13.11	23.63	0.20	2.23	3.52	4.98
9.02	13.29	0.40	2.26	3.57	5.06	7.09	9.22	13.80	25.74	0.50	2.46
5.09	7.26	9.47	14.24	25.82	0.51	2.54	3.70	5.17	7.28	9.74	14.76
0.81	2.62	3.82	5.32	7.32	10.06	14.77	32.15	2.64	3.88	5.32	7.39
14.83	34.26	0.90	2.69	4.18	5.34	7.59	10.66	15.96	36.66	1.05	2.69
5.41	7.62	10.75	16.62	43.01	1.19	2.75	4.26	5.41	7.63	17.12	46.12
2.83	4.33	5.49	7.66	11.25	17.14	79.05	1.35	2.87	5.62	7.87	11.64
1.40	3.02	4.34	5.71	7.93	11.79	18.10	1.46	4.40	5.85	8.26	11.98
1.76	3.25	4.50	6.25	8.37	12.02	2.02	3.31	4.51	6.54	8.53	12.03
2.02	3.36	6.76	12.07	21.73	2.07	3.36	6.93	8.65	12.63	22.69	6.31
6.97	20.28	10.34	17.36	3.64	1.26	4.23	19.13				

Çizelge 5.202 Mesane kanseri hastalarının ay cinsinden remisyon süreleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini	-2lnL	AIC	AICC	BIC	K-S İstatistiği
Lindley Sharma(θ)	0.196045	839.06	841.06	841.09	843.91	0.116
Üstel Dağılım(θ)	0.106773	828.68	830.68	830.72	833.54	0.077
Lindley Dağılımı (α, θ)	0.000000033979509 0.108585234812452	824.377	828.376	828.473	834.081	0.0876
(α, θ) parametrelili Lindley Dağılımının p değeri 0.2642 etmektedir.						

Sonuç olarak yukarıdaki veriler, rasgele seçilmiş 128 mesane kanseri hastasının ay cinsinden remisyon sürelerinin (θ) parametrelili Üstel ve Lindley dağılımları ile (α, θ) parametrelili Lindley dağılımı üzerindeki uyumluluğu karşılaştırıldığında, iki parametrelili Lindley dağılımının daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-98: Güneş Lekeleri (Sun Spots)

Aşağıdaki veriler, 1749 ile 1983 yılları arasında her Ocak ayında meydana gelen ortalama güneş lekeleri sayısını göstermekte olup, rasgele seçilmiştir. (Anonymous. Web Sitesi: http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable_statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html Erişim Tarihi: 01.04.2016)

Çizelge 5.203 Güneş lekeleri verileri

12.5	14.1	37.6	48.3	67.3	70.0	43.8	56.5	59.7
24.0	12.0	27.4	53.5	73.9	104.0	54.6	4.4	177.3
70.1	54.0	28.0	13.0	6.5	134.7	114.0	72.7	81.2
24.1	20.4	13.3	9.4	25.7	47.8	50.0	45.3	61.0
39.0	12.0	7.2	11.3	22.2	26.3	34.9	21.5	12.8
17.7	24.6	43.0	52.2	47.5	30.9	11.3	4.9	88.6
188.0	35.6	50.5	12.4	3.7	18.5	115.5	108.5	119.1
101.6	59.9	40.7	26.5	23.1	73.6	165.0	202.5	217.4
57.9	38.7	15.3	8.1	16.4	84.3	51.9	58.0	74.7
96.0	48.1	51.1	31.5	11.8	4.5	78.1	81.6	68.9

Çizelge 5.204 Güneş lekeleri model sonuçları

Model	Parametre Tahmini	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı (α, θ)	0.089407 0.032691	0.0547	0.9371
Gamma Dağılımı (α, θ)	1.3322 27.453	0.1049	0.60381
Üstel Dağılım (α, θ)	0.03042 3.70	0.10641	0.58589
Üstel Dağılım (θ)	0.02734	0.16579	0.114
Log-Normal Dağılımı (α, θ)	0.79715 3.2948	0.08159	0.86636
Log-lojistik Dağılımı (α, θ)	2.1332 25.923	0.10854	0.56087
Weibull Dağılımı (α, θ)	1.5145 37.228	0.08457	0.83731

Sonuç olarak 1749 ile 1983 yılları arasında her Ocak ayında meydana gelen ortalama güneş lekeleri model sonuçlarına bakıldığında, (α, θ) parametrelili Lindley dağılımının diğer dağılımlara göre daha iyi uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti -99: Aşağıdaki veri seti 100 banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerini göstermiş olup Ghitany vd. (2008b) tarafından Lindley Dağılımı için incelenmiş ve analiz edilmiştir (Shanker vd. 2013).

Çizelge 5.205 100 Banka müşterisinin bekleme zamanları

0.8	0.8	1.3	1.5	1.8	1.9	1.9	2.1	2.6	2.7	2.9	3.1	3.2
3.3	3.5	3.6	4.0	4.1	4.2	4.2	4.3	4.3	4.4	4.4	4.6	4.7
4.7	4.8	4.9	4.9	5.0	5.3	5.5	5.7	5.7	6.1	6.2	6.2	6.2
6.3	6.7	6.9	7.1	7.1	7.1	7.1	7.4	7.6	7.7	8.0	8.2	8.6
8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6	9.7	9.8	10.7	10.9	11.0
11.0	11.1	11.2	11.2	11.5	11.9	12.4	12.5	12.9	13.0	13.1	13.3	13.6
13.7	13.9	14.1	15.4	15.4	17.3	17.3	18.1	18.2	18.4	18.9	19.0	19.9
20.6	21.3	21.4	21.9	23.0	27.0	31.6	33.1	38.5				

Çizelge 5.206 100 Banka müşterisinin bekleme zamanları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı (α, θ)	2.152648288582987 0.000000000000203	0.042	0.9915
Gamma Dağılımı (α, θ)	1.8627 5.3026	0.04827	0.96515
Log-Normal Dağılımı (α, θ)	0.78011 2.0211	0.0565	0.8889
Log-lojistik Dağılımı (α, θ)	2.1941 7.4235	0.07043	0.67739
Weibull Dağılımı (α, θ)	1.5654 10.616	0.05328	0.92453

Sonuç olarak; yukarıdaki veriler, 100 banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerinin model sonuçları karşılaştırıldığında; (α, θ) parametrelili Lindley dağılımının (α, θ) parametrelili Gamma, Log-normal, Log-lojistik ve Weibull dağılımına göre daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.

Veri Seti-100: : Aşağıdaki veri seti 60 banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerini göstermiş ve Lindley Dağılımı için incelenmiş ve analiz edilmiştir (Al Mutairi vd., 2013)

Çizelge 5.207 60 banka müşterisinin bekleme zamanları

0.1	0.2	0.3	0.7	0.9	1.1	1.2	1.8	1.9	2.0	2.2	2.3	2.3
2.3	2.5	2.6	2.7	2.7	2.9	3.1	3.1	3.2	3.4	3.4	3.5	3.9
4.0	4.2	4.5	4.7	5.3	5.6	5.6	6.2	6.3	6.6	6.8	7.3	7.5
7.7	7.7	8.0	8.0	8.5	8.5	8.7	9.5	10.7	10.9	11.0	12.1	12.3
12.8	12.9	13.2	13.7	14.5	16.0	16.5	28.0					

Çizelge 5.208 60 banka müşterisinin bekleme zamanları model sonuçları

Model	Parametre Tahmini	K-S İstatistiği	p Değeri
Lindley Dağılımı (α, θ)	0.659889 0.268625	0.0682	0.9251
Üstel Dağılım (θ)	0.15703	0.12955	0.24434
Üstel Dağılım (α, θ)	0.15953 0.10	0.12087	0.31857
Log-Normal Dağılımı (α, θ)	1.0673 1.4460	0.10224	0.52395
Log-lojistik Dağılımı (α, θ)	1.4964 4.1125	0.11502	0.37662
Weibull Dağılımı (α, θ)	1.1041 6.7787	0.08983	0.6844

Sonuç olarak; yukarıdaki veriler, 60 banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerinin model sonuçları karşılaştırıldığında; (α, θ) parametrelili Lindley dağılımının diğer dağılımlara göre daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.

Sonuç olarak 60 adet banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme süreleri verileri ile 100 adet banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme süreleri verilerinin model sonuçları karşılaştırıldığında 100 adet banka müşterisinin 60 banka müşterisine oranla Lindley dağılımına daha iyi bir uyum gösterdiği söylenebilir.



6. SONUÇ

D.V. Lindley 1958 yılında üstel ve Gamma dağılımını birleştirerek karma bir dağılım olan Lindley dağılımını meydana getirmiş ve Ghitany 2008 yılında bu dağılımın detaylarını oluşturmuştur. Söz konusu meydana getirilen dağılım, bir parçanın ya da canlının yaşam zamanının modellenmesinde ilgi odağı olmasından ve farklı alanlardaki birçok veri setini modellediği düşünüldüğünden dolayı üstel, Gamma, Weibull, log-lojistik gibi dağılımlara alternatif olmuş ve son yıllarda popülerlik kazanmıştır.

Tek parametrelili Lindley dağılımı, farklı ve çeşitli yaşam modelleri analizinde yeterli esnekliğe sahip olamadığından, bu dağılıma esneklik kazandırmak adına fazladan parametreye ihtiyaç olduğundan iki parametrelili Lindley dağılımı meydana getirilmiştir.

Öncelikle, iki parametrelili Lindley dağılımının daha iyi anlaşılması açısından tek parametrelili Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonundan birikimli dağılım fonksiyonu türetilmiş, yaşam fonksiyonu, ortalama kalan ömür fonksiyonu ve bozulma oranı oluşturulmuş ve momentler yöntemi, en küçük kareler yöntemi ve en çok olabilirlik yöntemi yardımı ile parametre tahmini yapılmıştır.

Tezin asıl kısmı olan iki parametrelili Lindley dağılımında öncelikle olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanmış, birikimli dağılım türetilmiştir. $\alpha = 1$ olduğunda tek parametrelili Lindley dağılımına indirgenmiş, $\alpha = \theta$ olduğunda ise parametresi θ olan üstel dağılıma ulaştığı sonucuna varılmıştır. Eşitlik (4.3) ve (4.4) ün birleşiminden oluşan karma dağılım olan $F(x)$ gösterilmiş, eşitlik (4.4) ün bir dağılımı temsil edebilmesi için $\theta > \alpha$ olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. $\theta < \alpha$ olduğu takdirde (4.4) eşitliğinin belirlenememe sorunu olduğu ve θ nın α ya göre daha iyi tahmin edildiği sonucuna ulaşılmıştır.

İki parametrelili Lindley dağılımının orjin etrafındaki ilk dört momenti, varyansı ve merkezi momentleri elde edilmiş, çarpıklık ve basıklıkları elde edilmiş, iki parametrelili Lindley dağılımının yaşam fonksiyonu bulunmuştur.

İki parametrelili Lindley dağılımında sayı üretmek için karma dağılım yöntemi ve dağılım fonksiyonu yöntemi kullanılmıştır. Dağılım fonksiyonu ile sayı üretme tekniğinde doğrudan eşitliğin tersi alınamadığından iteratif yaklaşım olan Newton-Raphson yönteminden faydalanılmıştır.

İki parametrelili Lindley dağılımının bozulma oranı elde edilmiş ve elde edilen eşitlikte $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken uç noktalardaki değerleri araştırılmıştır. İki parametrelili Lindley dağılımının bozulma oranı x için azalmayan bir fonksiyon olduğu ve $x \rightarrow \infty$ olduğunda üstel dağılımın bozulma oranına kavuştuğu sonucuna ulaşılmıştır.

İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini üzerinde durulmuş ve momentler yöntemi, en küçük kareler yöntemi ve en çok olabilirlik yöntemleri ile parametre tahminleri yapılmaya çalışılmıştır.

İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için momentler yönteminde $k \geq 0$ olması koşuluyla bir k değişkeni atanmış ve momentler tahmin edicisinin var olması için gerekli koşulun (4.34) deki eşitlik olması gerektiği elde edilmiştir. Öte yandan momentler yöntemine başka bir yaklaşımda bulunarak (4.38) deki eşitlik ile yeni bir m^* değişkeni atanmıştır. Elde edilen eşitlikten yola çıkılarak α ve θ nin moment tahmin edicisine göre parametrelerinin tahminleri birbirlerine bağlı olarak parametre içerdiğinden dolayı ancak yinelemeli adımlar ve başlangıç değerleri atayarak elde edilebileceği sonucuna ulaşılmıştır. $N=10$, $N=50$, $N=100$ ve $N=200$ olan ve $R=1000$ tekrarlı iki parametrelili Lindley dağılımının θ moment tahmin edicisine dayanarak simülasyon, RMSE değerleri ve parametresi için parametre ile tahmininin simülasyonu yapılarak ve elde edilen sonuçlar incelendiğinde Lindley dağılımını veren iki farklı karma dağılımın varlığı söz konusu olduğundan dolayı parametre tahmin problemi olduğu, θ parametresinin küçük değerlerinde örneklem hacmine bağlı kalınsızın iyi sonuçlar verebildiği söylenebildiği sonucuna ulaşılmıştır. Aynı sonuç α parametresinin tahmininde elde edilememiştir. Bu sonuçtan yola çıkarak, θ parametresinin α parametresine göre daha iyi tahmin edilebildiği gözlemlenmiştir.

İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için en küçük kareler yönteminde eşitlik (4.41) den yola çıkılarak elde edilen (4.42) eşitliğinin α ve θ parametrelerinin kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde söz konusu parametreler için açık bir tahmin elde edilemediği ancak ve ancak nümerik yollarla elde edilebilir olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Moment tahmin edicisindeki ile aynı hacimlere ve aynı tekrar sayısına sahip olması koşuluyla iki parametrelili Lindley dağılımının θ tahmin edicisi için simülasyon, RMSE değerleri ve parametrelerin tahmini için en küçük karelerine bakıldığında; söz konusu parametrenin gözlem sayısı arttıkça iyi sonuçlar verebildiği ve gerçek değere yaklaşabildiği söylenebilir. α parametresinin tahmininde istenilen sonuçlara ulaşamamış olup yüksek RMSE ve gerçek değerden uzak tahminler elde edilmiştir. Dolayısıyla gözlem sayısı artmış olsa bile iyi sonuç elde edilemediği için sadece θ parametresinin tahminine yer verilmiştir.

İki parametrelili Lindley dağılımının parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik tahmin yönteminde elde edilen (4.43) teki log-olabilirlik fonksiyonunun eşitlik (4.44) teki θ parametresine göre kısmi türevleri alınarak ve eşitlik (4.46) daki α parametresine göre kısmi türevleri alınarak en çok olabilirlik yöntemine göre parametrelerin tahmini elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun sonucunda, en küçük kareler yöntemindeki gibi bahse konu parametreler için açık bir tahmin yapılamadığı ve sadece nümerik yollarla elde edilebildiği olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İki parametrelili Lindley dağılımının yukarıdaki moment tahmin edici ve en küçük kareler ile aynı hacime ve aynı tekrar sayısına sahip olması koşuluyla θ parametresi için simülasyon sonuçlarına bakıldığında; Lindley dağılımının θ parametresi için (4.45) eşitliği ile verilen EÇO tahmin edicisi, momentler yöntemi ile elde edilen tahmin edici ile aynı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.. Bu nedenle, bu bölümde simülasyona yer verilmemiştir.

İki parametrelili Lindley dağılımının 100 farklı veri seti üzerinde uygunluğu araştırılmış ve dağılımın çeşitli alanlardaki veri setleri üzerinde uygulanabilirliği incelenmiştir. Gerçek veri setleri üzerinde Kolmogorov-Smirnov test istatistiği kullanılarak söz konusu verilerin dağılıma uygunluğu Matlab paket programı aracılığıyla test edilmiştir. Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICC), Bayes Bilgi Kriteri (BIC) ölçütleri yardımıyla Veri Seti-96 ile Veri Seti-97 yi kullanan diğer

araştırmacıların kullandığı dağılımlar arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Easyfit programı yardımıyla Veri Seti-98 ile Veri Seti-100 arasındaki verilerin model sonuçlarının iki parametrelili Lindley dağılımının Gamma dağılımı(α, θ), Log-normal dağılımı(α, θ), Log-lojistik dağılımı(α, θ), Weibull dağılımı(α, θ), Üstel dağılım(θ) ve Üstel dağılım(α, θ) ile karşılaştırılması yapılmıştır. Söz konusu veri setlerinin Lindley dağılımına uygunluğu aşağıdaki gibidir:

Veri Seti-1 de bahsi geçen güneş lekelerinin en yüksek olduğu noktada ortaya çıkan Malign Melanom sıklığı verilerine bakıldığında Lindley dağılımı ile iyi uyum gösterebildiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-2 ile Veri Seti-39 arasındaki veriler; 1948-1981 yılları arası Amerika Birleşik Devletlerinde 16-19 yaş arası erkeklerin, 16-19 yaş arası kadınların, 20 yaş ve üzeri erkeklerin ve 20 yaş ve üzeri kadınların 1948-1981 yılları arasındaki aylara göre işsizlik oranları model sonuçları iki parametrelili Lindley dağılımına göre karşılaştırılmasını vermekte olup, genelde Amerika Birleşik Devletlerindeki kadınların, erkeklere göre daha yüksek p-değerine sahipken, iki parametrelili Lindley dağılımına göre 16-19 yaş arası erkeklerin özellikle Ekim ayında ve 16-19 yaş arası kadınların özellikle Aralık ayında işsizlik oranı Lindley dağılımı ile iyi uyum gösterebildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-40 ile Veri Seti-47 arasındaki veriler; 1956-1975 yılları arası aylık olarak Kanada'daki toplam işsizlik verisini göstermektedir. Söz konusu verilerin genel olarak 12 ay başına bakıldığında iki parametrelili Lindley dağılımının Mayıs, Haziran, Temmuz, Ağustos, Eylül, Ekim, Kasım, Aralık ayları iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği ve Ocak, Şubat, Mart, Nisan aylarının Lindley dağılımına uygun olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-48 ile Veri Seti-59 arasındaki veriler; 1749-1983 yılları arasında aylık ortalama güneş lekesi verileri incelendiğinde iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum sağlamıştır. Nisan, Mayıs ve Aralık aylarının Lindley dağılımı ile daha iyi uyum gösterebildiği ve Mart ayının iki parametrelili Lindley dağılımına en kötü uyumu sağlayabildiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-60 ve Veri Seti-62 arasındaki veriler; yeraltı sularındaki arsenik, uranyum ve sülfat miktarını vermekte olup iki parametrelili Lindley dağılımını modelleyebildiği, yeraltı sularındaki arsenik miktarının diğer ikisine göre daha yüksek derecede iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum gösterebildiği sonucuna ulaşılmıştır..

Veri Seti-63; Pizza Franchise (Satış Tekeli Hakkı) başlangıç maliyeti verileri model sonuçlarına bakıldığında iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum gösterebildiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-64; yoksulluk seviyesi yüzdelerinin model sonuçları incelendiğinde iki parametrelili Lindley dağılımına uyum gösterebildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-65; sübvansiyonlu (devletçe para yardımı) konut verilerinin model sonuçlarının iki parametrelili Lindley dağılımına uygunluğu incelendiğinde söz konusu dağılım ile uyum gösterebildiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-66; İspanya'nın Navarra bölgesindeki yapraklarda kg/hektar şeklinde ölçülendirilmiş karbon miktarı verilerinin model sonuçları incelendiğinde iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum gösterebildiği sonucu gözlemlenmiştir.

Veri Seti-67 ile Veri Seti-68; idrardaki iki fiziksel özellik olan litre basınç milimol üre konsantrasyonu ve litre başına milimol cinsinden kristalli ve kristalsiz ayırım gözetmeksizin aynı veri içinde incelenen üre ve kalsiyum miktarının model sonuçları incelendiğinde her iki veri setinin iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum gösterebildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-69 ile Veri Seti-76 arasındaki veriler; Kevlar 49/epoxy kablolarının/tellerinin ve küre kaplarının çeşitli baskı seviyelerinde parçalanma ömürleri veya sayılarını vermekte ve söz konusu olan veriler sabit basınç altında Kevlar/epoxy kablo ömrü ve Kevlar/epoxy küresel basınç kabının ömrü verileri düşük basınç altında kaza oranları her iki veri seti için de zamana bağlı olarak çıktığından dolayı Lindley dağılımına

uygunluğu test edilmiştir. Kevlar 49/epoxy kablolarının/tellerinin %90, %80 ve %70 baskı seviyelerinde parçalanma ömürleri gözönüne alınarak yapılan incelemelerde %80 baskı seviyesinde Kevlar/epoxy kablolarının/tellerinin parçalanma ömrünün %90 ve %70 baskı seviyelerine göre Lindley dağılımı ile daha iyi bir uyum sağladığı sonucuna ulaşılmıştır. Kevlar 49/epoxy % 86 ve % 80 baskı seviyesinde küre kaplarının sayısına bakıldığında Lindley dağılımı ile uyum gösterdiği söylenebilmiştir. Kevlar 49/epoxy parçalanma ömürleri, %74 baskı seviyesinde Lindley dağılımı ile uyum gösterebildiğı sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-77; deprem veri seti model sonuçlarına bakıldığında iki parametrelili Lindley dağılımı ile iyi bir uyum gösterebildiğı sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-78 ile Veri Seti-85 arasındaki veriler; Belçika, Brezilya, Kanada, Singapur, Amerika Birleşik Devletleri, Birleşik Arap Emirlikleri, Yeni Zelanda, Hong Kong ülkelerinin 1998-2010 yılları arasında 100 kişiye düşen genişbant internet abone verilerinin iki parametrelili Lindley dağılımına uygunluğu incelendiğinde; Kanada, Singapur, Amerika Birleşik Devletlerinin diğeri ülkelere göre Lindley dağılımı ile daha iyi bir uyum gösterebildiğı gözlemlenmiştir.

Veri Seti-86 ile Veri Seti-87; 2002 ve 2004 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonuçları incelendiğinde her iki veri setinin de iki parametrelili Lindley dağılımını modelleyebildiğı, 2002 yılı ülkelere göre 100 000 standart nüfus başına yaşa göre boğulmadan kaynaklanan ölüm oranı model sonucunun 2004 yılı verilerine göre iki parametrelili Lindley dağılımına daha iyi uyum sağlayabildiğı sonucuna ulaşılmıştır..

Veri Seti-88; 2002 yılı ülkelere göre ($m^3/inhab/yıl$) cinsinden kişi başına düşen toplam su çekimi verileri model sonucu incelendiğinde, söz konusu verilerin iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum gösterebildiğı sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-89 ile Veri Seti-92 arasındaki veriler; Avusturya, Finlandiya, Japonya, Singapur ülkelerinin 100 000 standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verilerinin model sonuçlarına bakıldığında bütün ülkelerin iki parametrelili Lindley dağılımı ile bir uyum gösterdiği; Finlandiya standart nüfus başına 0-14 yaş arası çocukların ölüm oranı verilerinin diğer ülkelere göre iki parametrelili Lindley dağılımı ile daha iyi bir uyum gösterebildiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-93 ile Veri Seti-94; Adana ilinin 15 gün için günlük açık yüzey buharlaşma ve günlük ortalama bulutluluk verilerini göstermekte olup günlük ortalama bulutluluk verileri model sonuçlarının iki parametrelili Lindley dağılımına daha iyi uyum sağlayabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-95; 1971-1997 yılları arası Yunanistan'da meydana gelen artçı dizilerin derinliklerinin, oluşan artçı sarsıntıların zamanına göre verilerin model sonuçları incelendiğinde iki parametrelili Lindley dağılımı ile uyum sağlayabildiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-96; Hint domuzlarına farklı dozlarda tüberküloz basili enjekte edilmesinden sonraki sağkalım sürelerinin model sonuçları karşılaştırıldığında, iki parametrelili Lindley dağılımının diğer iki dağılıma göre daha iyi uyum sağlayabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-97; rasgele seçilmiş 128 mesane kanseri hastasının ay cinsinden remisyon süresinin model sonuçları karşılaştırıldığında iki parametrelili Lindley dağılımının diğer iki dağılıma göre daha iyi uyum sağlayabildiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-98; 1749 ile 1983 yılları arasında her Ocak ayında meydana gelen ortalama güneş lekeleri sayılarının iki parametrelili Lindley dağılımına uygunluğu incelendiğinde Lindley dağılımı ile uyum sağlayabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Veri Seti-99 da içeren veriler 100 adet banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerinin Lindley dağılımı(α, θ), Gamma dağılımı(α, θ), Log-normal dağılımı(α, θ), Log-lojistik dağılımı(α, θ), Weibull dağılımı(α, θ) ile modelleme sonuçları karşılaştırılmış ve iki parametrelili Lindley dağılımının diğer dağılımlara göre daha iyi uyum gösterdiği sonucu elde edilmiştir.

Veri Seti-100 de 60 adet banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerinin Lindley dağılımı(α, θ), Log-normal dağılımı(α, θ), Log-lojistik dağılımı(α, θ), Weibull dağılımı(α, θ), tek parametrelili üstel dağılım(θ) ve iki parametrelili üstel dağılımı(α, θ) model sonuçları karşılaştırılmış ve iki parametrelili Lindley dağılımının diğer dağılımlara göre daha iyi uyum gösterdiği sonucu elde edilmiştir.

Söz konusu 100 adet ve 60 adet banka müşterisinin dakika cinsinden bekleme sürelerinin model sonuçları karşılaştırıldığında; 100 adet banka müşterisinin, 60 adet banka müşterisine göre iki parametrelili Lindley dağılımına daha yüksek uyum sağlayabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Sonuç olarak yukarıdaki çeşitli veri setleri üzerinde iki parametrelili Lindley dağılımının uygunluğu incelendiğinde, bahse konu olan dağılımın yaşam dağılımları dışında da çeşitli veri setlerinin analizlerinde de kullanılabileceği tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Açıkgöz, İ. 2007. Sonlu karma dağılımlarda parametre tahmini. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 141, Ankara.
- Akdi, Y. 2005. Matematiksel istatistiğe giriş. Ankara: Bıçaklar Kitabevi.
- Al-Mutairi, D.K., Ghitany, M.E. and Kundu, D. 2013. Inferences on stress-strength reliability from Lindley distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods, 42(8), 1443-1463.
- Andrews, D.F. and Herzberg, A.M. 2012. Data: a collection of problems from many fields for the student and research worker. Springer Science and Business Media.
- Anonymous 2016 .Web Sitesi: <https://www.gapminder.org/data/> Erişim Tarihi:15.04.2016
- Anonymous. Web Sitesi:<http://college.cengage.com/mathematics/brase/understandable-statistics/7e/students/datasets/svss/frames/frame.html>. Erişim Tarihi: 01.04.2016
- Asgharzadeh, A., Bakouch, H.S., Nadarajah, S. and Sharafi, F. 2016. A new weighted Lindley distribution with application. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 30(1), 1-27.
- Ashour, S.K. and Eltehiwy, M.A. 2015. Exponentiated power Lindley distribution. Journal of advanced research, 6(6), 895-905.
- Bakouch, H.S., Al-Zahrani, B.M., Al-Shomrani, A.A., Marchi, V.A.A. and Louzada, F. 2012. An extended Lindley distribution. J. Korean Stat. Soc. 41(1), 75-85.
- Bhati, D., Malik, M.A. and Vaman, H.J. 2015. Lindley–Exponential distribution: properties and applications. Metron, 73(3), 335-357.
- Bircan, H., Karagöz Y. ve Kasapoğlu Y., Ki-Kare Ve Kolmogorov Smirnov Uygunluk Testlerinin Simülasyon İle Elde Edilen Veriler Üzerinde Karşılaştırılması, Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, C. 4, S. 1, 69-80.
- Bjerkedal, T. 1960. Acquisition of Resistance in Guinea Pies infected with Different Doses of Virulent Tubercle Bacilli. American Journal of Hygiene, 72(1), 130-48.
- Deniz, E.G. and Ojeda, E.C. 2011. The discrete Lindley distribution properties and applications. J. Stat. Comput. Simul.81(11), 1405- 1416.
- Dolapçı, T.İ. ve Aksoy, Y. 2013, Mühendisler için sayısal yöntemler.
- Drakatos, G. and Latoussakis, J. 2001. A catalog of aftershock sequences in Greece (1971–1997): Their spatial and temporal characteristics. Journal of Seismology, 5(2), 137-145.

- Elbatal, I., Merovci, F. and Elgarhy, M. 2013. A new generalized Lindley distribution, *Mathematical Theory and Modeling*, Vol(3) No. 13.
- El-Monsef, M.A., Hassanein, W.A. and Kilany, N.M. 2014. A Three-Parameter Weighted Lindley Distribution.
- Ghitany, M.E., Atieh, B. and Nadarajah, S. 2008. Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation* 78(4), 493–506.
- Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. and Nadarajah, S. 2008a. Zero-truncated Poisson-Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation*. 79:279–287.
- Ghitany, M.E. and Al-Mutairi, D.K. 2008b. Size-biased Poisson-Lindley distribution and its applications. *Metron- Int. J. Stat.* LXVI(3):299-311.
- Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. and Nadarajah, S. 2008c. Zero-truncated Poisson-Lindley distribution and its applications. *Math. Comput. Simul.* 79(3):279-287
- Ghitany, M.E. and Al-Mutairi, D.K. 2009. Estimation methods for the discrete Poisson-Lindley distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(1), 1-9.
- Ghitany, M.E., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D.K. and Husain, H.A. 2011. A two- parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(6), 1190-1201.
- Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K., Al-Awadhi, F.A. and Al-Burais, M.M. 2012. Marshall-Olkin extended Lindley distribution and its application. *International Journal of Applied Mathematics*, 25(5), 709-721.
- Hassan, M.K., On the Convolution of Lindley Distribution, *Columbia International Publishing Contemporary Mathematics and Statistics*, Vol. (2) No. 1,47-54.
- Hassanein, W.A. and Elhaddad, T.A. 2016. *Pak. J. Statist.* 2016 Vol. 32 (3), 227-246 Truncated Lindley Gamma Distribution. *Pak. J. Statist.* 32(3), 227-246.
- Karaatlı, M. ve Albeni, M. 2011. Gül çiçeği dikim alanlarının yapay sinir ağları yöntemiyle tahmini. *Journal of Alanya Faculty of Business/Alanya İletme Fakültesi Dergisi*, 3(2).
- Leemis, L.M. 1986. Lifetime distribution identities. *IEEE transactions on reliability*, 35(2), 170-174.
- Lindley, D.V. 1958. Fiducial distributions and Bayes theorem. *Journal of the Royal Statistical Society B*, vol. 20, pp. 102–107.
- Mahmoudi, E. and Zakerzadeh, H. 2010. Generalized Poisson-Lindley distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 39(10), 1785-1798.

- Mazucheli, J. and Achcar, J.A. 2011. The Lindley distribution applied to competing risks lifetime data. *Computer methods and programs in biomedicine*, 104(2), 188-192.
- Metiri, F., Zeghdoudi, H. and Remita, M.R. 2016. On Bayes estimates of Lindley distribution under Linex loss function: Informative and nonInformative priors. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(1), 391-400.
- Nedjar, S., and Zeghdoudi, H. 2016. On gamma Lindley distribution: Properties and simulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 298, 167-174.
- Rama, S. and Mishra, A. 2013. A quasi Lindley distribution. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*. 6(4), 64-71.
- Shanker, R., Fesshaye, H. and Sharma, S. 2016. On quasi Lindley distribution and its application to model lifetime data. *International Journal of Statistical Distributions and Applications*, 2, 1-7.
- Sankaran, M. 1970. The discrete Poisson-Lindley distribution. *Biometrics*, 145-149.
- Shanker, R., Fesshaye, H. and Selvaraj, S. 2015. On modeling of lifetimes data using Exponential and Lindley distributions. *BiomBiostat ...*
- Shanker, R., Sharma, S. and Shanker, R. 2013. A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data. *Applied Mathematics*, 4(02), 363.
- Shibu, D.S. and Irshad, M.R. 2016. Extended New Generalized Lindley Distribution. *Statistica*, 76(1), 41-56.
- Tahmasbia, R. and Rezaei, S. 2008. A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate. *Computational Statistics and Data Analysis* 52, 3889–3901.
- Ucal, M.Ş. 2006. Ekonometrik Model Seçim Kriterleri Üzerine Kısa Bir İnceleme, *C.Ü İktisadi İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 7(2):41-56.
- Yavuz, S. ve Deveci, M. 2012. İstatistiksel Normalizasyon Tekniklerinin Yapay Sinir Ağı Performansına Etkisi. *Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, (40), 167-187.
- Zakerzadeh, H. and Dolati, A. 2009. Generalized Lindley distribution. *Journal of Mathematical Extension*, 3(2), 13-25.
- Zamani, H. and Ismail, N. 2010. Negative binomial-Lindley distribution and its application. *Journal of Mathematics and Statistics*, 6(1), 4-9.
- Zeghdoudi, H. and Nedjar, S. 2015. Gamma Lindley distribution and its application. *J. Appl. Probab. Stat*, 11.

Warahena-Liyanage, G. and Pararai, M. 2014. A Generalized Power Lindley Distribution with Applications. Asian Journal of Mathematics and Applications, 2014.



EKLER

- EK 1 İki Parametrelİ Lindley Dağılımının Parametre Tahminleri için Momentler Yöntemi Simülasyonunda kullanılan Matlab kodu
- EK 2 İki Parametrelİ Lindley Dağılımının Parametre Tahminleri için En Küçük Kareler Yöntemi Simülasyonunda kullanılan Matlab kodu

EK 1 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahminleri için Momentler Yöntemi Simülasyonunda kullanılan Matlab kodu

```
clc
clear all
%n örnek sayısı
%r tekrar sayısı
n=10;
r=1000;
alfa=10;
teta=5;
p1=teta/(teta+alfa);
for i=1:r
u=rand(n,1);
z1=expinv(u,1/teta);
z2=gaminv(u,2,1/teta);
x=(z1).*(u<p1)+(z2).*(u>=p1);
t(i)=mean(x);
tetasap=((1-alfa*t(i))+sqrt((1-alfa*t(i)).^2+8*alfa*t(i)))./(2*t(i));
end
tetasapm=mean(tetasap)
mseteta=sqrt(mean((tetasap-teta).^2))
```

EK 2 İki Parametrelili Lindley Dağılımının Parametre Tahminleri için En Küçük Kareler Yöntemi Simülasyonunda kullanılan Matlab kodu

```
clear all
clc
for k=1:1000
n=50;
alfa=10;
teta=0.1;
W=teta/(teta+alfa);
u=rand(n,1);
z1=expinv(u,(1/teta));
z2=gaminv(u,2,(1/teta));
xdata=z1.*(u<W)+z2.*(u>=W);
xdata=sort(xdata);
m1=mean(xdata);
d=size(xdata,1);
for i=1:d
ydata(i)=(log(1-i/(d+1)));
end
options = optimset('Display','iter','MaxFunEvals',2000,'TolFun',1e-10, 'TolX',1e-10);
F = @(p,xdata)(log(1+(alfa*p(1)*xdata)/(alfa+p(1)))-xdata*p(1));
p0 = [1/m1]; % Starting guess
[p, resnorm]=lsqcurvefit(F,p0,xdata,ydata',[0],[Inf], options);
%alpha(k)=p(1);
theta(k)=p(1);
end
thetasapka=mean(theta)
rmsetet= sqrt(mean((theta - teta).^2))
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Buket ÜNSALAR

Doğum Yeri : IĞDIR

Doğum Tarihi : 1986

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Fethiye Kemal Mumcu Anadolu Lisesi (2004)

Lisans : Eskişehir Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2017)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Türkiye İş Bankası (2012-2014)

Ankara Büyükşehir Belediyesi (2014-