

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

LORENTZ UZAYINDA HAREKETLER VE SABİT EĞRİLİKLİ YÜZEYLER

Esmâ DEMİR ÇETİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

22/05/2014

Esma DEMİR ÇETİN

ÖZET

Doktora Tezi

LORENTZ UZAYINDA HAREKETLER VE SABİT EĞRİLİKLİ YÜZEYLER

Esmâ DEMİR ÇETİN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, 3 boyutlu Lorentz uzayı tanımlanıp, bu uzayda vektörel çarpım, izometrilere, dönme hareketi, helikoidal hareket grupları ve yüzeylerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3 boyutlu Lorentz uzayında homotetik hareket grupları tanımlanmış ve homotetik hareket grupları altında bir noktanın yörüngesinden bahsedilmiştir. Daha sonra ise eğrilerin homotetik hareket grupları altında yörüngesi olan yüzeyler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Lorentz uzayında bir yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri tanımlanmış ve üreteç eğrisinin bir polinom eğrisi veya çember olması durumunda homotetik hareket grupları altında taradıkları yüzeylerin eğriliklerinin sabit veya sıfır olabilmesi için gerekli şartlar aranmış ve bu yüzeylere örnekler verilmiştir. Daha sonra ise yüzeylerin umbilik olması ile $H^2-K=0$ olması arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Son olarak beşinci bölümde helikoidal hareket grupları ile elde edilen yüzeyler için lineer Weingarten yüzey olma şartları ele alınmıştır.

Mayıs 2014, 74 sayfa

Anahtar Kelimeler : Lorentz uzayı, Homotetik hareket, Umbilik yüzeyler, Sabit ortalama eğrilik, Sabit Gauss eğriliği.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

MOTIONS AND SURFACES WITH CONSTANT CURVATURES IN LORENTZ SPACE

Esma DEMİR ÇETİN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, Lorentz 3-space and its properties are mentioned. Then vector product, isometries, rotation, helicoidal motion groups and surfaces are given.

In the third chapter, firstly homothetic motion groups on Lorentz 3-space is defined. Then orbit of a point under a homothetic motion group is mentioned and then surfaces which are the orbit of curves under homothetic motion groups are examined.

In the forth chapter, mean and Gauss curvatures of a surface on Lorentz 3-space are defined and then surfaces, which are the orbit of curves under homothetic motion groups, with constant or zero curvatures are researched.

Finally in the fifth chapter the surfaces, which are the orbit of curves under helicoidal motion groups, with $LH+K=c$ are investigated.

May 2014, 74 pages

Key Words: Lorentz 3-space, Homothetic motion groups, Umbilical surfaces, Constant mean curvature, Constant Gauss curvature.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, bana araştırma olanağı sağlayan ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), fikirleriyle ve önerileriyle beni yönlendiren Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. Baki KARLIĞA'ya (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK'a (Nevşehir Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme ve eşime en derin duygularla teşekkür ederim.

Esmâ DEMİR ÇETİN

Ankara, Mayıs 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. LORENTZ-MINKOWSKI UZAYI	3
2.1 Temel Tanımlar	3
2.2 Lorentz Vektörel Çarpımı	7
2.3 E_1^3 ün İzometrilere	7
2.4 E_1^3 de Yüzeyler	11
3. E_1^3 de HOMOTETİK HAREKET	16
3.1 Tanımlar ve Parametrizasyonlar	16
3.2 E_1^3 de Bir Noktanın Homotetik Hareket Altındaki Yörüngesi.....	17
3.3 E_1^3 de Bir Eğrinin Homotetik Hareket Altındaki Yörüngesi	21
4. E_1^3 de YÜZEYLERİN EĞRİLİKLERİ	23
4.1 Non-dejenere Yüzeylerin Ortalama Eğrilikleri ve Gauss Eğrilikleri	23
4.2 E_1^3 de Bir Polinom Eğrisinin ve Bir Çemberin Homotetik Hareket Altındaki Yörüngesi Olan Yüzeyler İçin Ort. Eğrilik ve Gauss Eğriliklerinin Sabit Olması	28
4.3 E_1^3 de Bir Polinom Eğrisinin Homotetik Hareket Altındaki Yörüngesi Olan Yüzeyler İçin Umbilik Olma ve $H^2-K=0$ Arasındaki İlişki.....	51

5. E_1^3 de BİR EĞRİNİN HELİKOİDAL HAREKET ALTINDAKİ	
YÖRÜNGESİ OLAN LİNEER WEINGARTEN YÜZEYLER	66
5. 1 Lineer Weingarten Helikoidal Yüzeyler.....	66
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	71
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER DİZİNİ

E_1^3	3 boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı
T_pM	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
H	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğrilği
C	Light koni
H^2	Hiperbolik yüzey
S_1^2	De Sitter yüzeyi
E, F, G	Bir yüzey için birinci esas formun katsayıları
e, f, g	Bir yüzey için ikinci esas formun katsayıları
W	Birinci esas form

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Light koni	4
Şekil 2.2 Hiperbolik yüzey, light koni, De Sitter yüzeyi	15
Şekil 3.1 E_1^3 de Lorentz çemberleri	21
Şekil 4.1 $f(s)=1$, $\lambda(t)=1+t$ ve $H=0$ olan yüzey	33
Şekil 4.2 $f(s)=1-s$, $\lambda(t)=2+3t$ ve $H=(1/(h+3))$ olan yüzey	34
Şekil 4.3 $f(s)=s$, $\lambda(t)=1+2t+3t^2$ ve $H=(1/(h))$ olan yüzey	35
Şekil 4.4 $f(s)=1$, $\lambda(t)=1+t$ ve $H=0$ olan yüzey	36
Şekil 4.5 $f(s)=2$, $\lambda(t)=1+t$ ve $H=0$ olan yüzey	37
Şekil 4.6 $f(s)=1+s$, $\lambda(t)=1+t-ht^2$ ve $H=0$ olan yüzey	38
Şekil 4.7 $f(s)=1+2s$, $\lambda(t)=1-h$ ve $K=0$ olan yüzey	42
Şekil 4.8 $f(s)=2+s$, $\lambda(t)=3-(h/2)t$ ve $K=0$ olan yüzey	43
Şekil 4.9 $f(s)=1+s$, $\lambda(t)=1-h$ ve $K=0$ olan yüzey	44
Şekil 4.10 Lorentz silindiri	54
Şekil 4.11 İkinci çeşit helikoid	55
Şekil 4.12 Parabolik null silindir	56
Şekil 4.13 $f(s)=1+s$, $\lambda(t)=1-t$ olan yüzey	64
Şekil 4.14 $f(s)=1$, $\lambda(t)=2-h$ olan yüzey	65

1. GİRİŞ

Öklid uzayında bir M yüzeyi için, H ortalama eğrilik ve K Gauss eğriliği olmak üzere $H^2 - K \geq 0$ dır. Bu eşitsizliğin önemi aslında Weingarten dönüşümünün matrisinin köşegenleştirilebilir olmasıdır. Hatta bir $P \in M$ noktası için $H^2 - K = 0$ ise P noktası bu M yüzeyinin bir umbilik noktasıdır. Öklid uzayında bütün noktaları umbilik olan yüzeylere umbilik yüzeyler denir. Bunlar düzlem parçaları ve kürelerdir (Struik 1988).

Lorentz uzayı E_1^3 de H , K ve umbilik olma arasındaki ilişki Öklid uzayından oldukça farklıdır. Öncelikle H ve K dan bahsedebilmek için non-dejenere yüzeylere (metriğin non-dejenere olduğu yüzeylere) ihtiyaç vardır. Bunlar metriğin pozitif tanımlı olduğu spacelike yüzeyler ve metriğin Lorentz metriği olduğu timelike yüzeylerdir. Bu durumda H ve K Öklid uzayındakine benzer şekilde tanımlanır. $P \in M$ noktasındaki Weingarten dönüşümü Ap olmak üzere bu P noktasında

$$H(P) = \epsilon iz(Ap), K(p) = \epsilon det(Ap)$$

Burada eğer yüzey spacelike ise $\epsilon = 1$, yüzey timelike ise $\epsilon = -1$ dir.

E_1^3 de Weingarten dönüşümü self-adjoint olmasına rağmen köşegenleştirilemeyebilir. Bunun sebebi yüzey üzerindeki metriğin Lorentz metriği olmasıdır. M , E_1^3 ün non-dejenere bir yüzeyi ve $P \in M$ olmak üzere eğer Weingarten dönüşümü Ap köşegenleştirilebilir ise $H^2(P) - \epsilon K(P) \geq 0$ dır ve P nin umbilik nokta olması durumunda $H^2(P) - \epsilon K(P) = 0$ olur. Ap nin her zaman köşegenleştirilebilir olması sadece spacelike yüzeyler için mümkündür. Timelike yüzeylerde ise genel olarak Weingarten dönüşümü köşegenleştirilemez. Eğer köşegenleştirilebilir ise $H^2(P) - \epsilon K(P) \geq 0$ dır. Köşegenleştirilemez ise $H^2(P) - \epsilon K(P) \leq 0$ olur.

Öklid uzayında olduğu gibi E_1^3 de tüm noktaları umbilik olan spacelike ya da timelike yüzeylere umbilik yüzeyler denir. Özel olarak bu yüzeyler için her P noktasında

Weingarten dönüşümü A köşegenleştirilebilirdir. Bununla birlikte Lorentz uzayında $H^2 - K = 0$ şartını sağlayan ancak Weingarten dönüşümü köşegenleştirilemeyen yüzeyler de vardır. Yani E_1^3 de bir yüzey üzerinde $H^2 - K = 0$ olması yüzeyin umbilik olmasını garanti etmez. E_1^3 ün umbilik yüzey örnekleri hiperbolik yüzeyler ve pseudo kürelerdir (O'Neill 1983).

Magid (1983) E_1^3 de a sabit bir sayı olmak üzere minimal polinomu $(x - a)^2$ olan yüzeylere genelleştirilmiş umbilik yüzeyler demiştir. Dillen ve Kuhnel (1999) ise, E_1^3 de doğrultmanları null olan bütün regle yüzeyler için $H^2 - K = 0$ olduğunu söylemişlerdir.

Hou ve Ji (2007) 3 boyutlu Lorentz uzayında $H^2 - K = 0$ eşitliğini sağlayan helikoidal yüzeyler olmasına rağmen helikoidal yüzeyler üzerinde umbilik nokta bulunmadığını göstermişlerdir. E_1^3 ün umbilik yüzeyleri olan hiperbolik yüzeyler ve pseudo küreler sırasıyla spacelike dönel yüzey ve timelike dönel yüzey örnekleridir. Ayrıca Clelland (2010) $H^2 - K = 0$ olan timelike yüzeyleri incelemiştir ve bu yüzeylerin, doğrultmanları lightlike olan regle yüzeyler olduğunu ispatlamıştır.

Bu tezde önce helikoidal hareket gruplarının daha genel hali olan homotetik hareket grupları altında noktaların ve eğrilerin yörüngesi incelenip yörünge eğrilerinden ve homotetik yüzeylerden bahsedilmiştir. Bu yüzeyler için umbilik olma şartları incelenmiştir. Daha sonra ise homotetik hareket grubu altında bir eğrinin yörüngesi olan bir yüzeyin üreteç eğrisinin bir polinom grafiği veya çember olduğu durumda yüzeyin sabit eğriliklere sahip olması için gereken şartlar incelenmiştir. Son olarak ise λ nın 1 olduğu durumda özel olarak helikoidal yüzeyler için lineer Weingarten yüzey olma şartları araştırılmıştır.

2. LORENTZ-MINKOWSKI UZAYI

2.1 Temel Tanımlar

$\mathbb{R}^3$, bilinen vektör yapısıyla üç boyutlu reel vektör uzayı ve $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ iken $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathbb{R}^3$ ün standart bazı olmak üzere (x, y, z) bu baza göre bir vektörün koordinatlarıdır.

Eğer $\{e_1, \dots, e_m\}$ vektör cümlesi ise $\langle e_1, \dots, e_m \rangle = \{\sum a_i e_i, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m\}$ bu vektörlerin lineer kombinasyonları tarafından üretilen alt vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.1: $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere Lorentz uzayında iç çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle, \rangle : E^3 \times E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longrightarrow \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

E^3 üzerinde tanımlanan bu simetrik, bilineer ve nondejenere metrik tensöre *Lorentz metriği* denir.

Aynı zamanda $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\langle u, v \rangle = u^t G v$ yazılabilir (Lopez 2008).

Tanım 2.1.2: $\langle, \rangle$, E^3 de Lorentz metriği olsun. $\{E^3, \langle, \rangle\}$ ikilisine 3 boyutlu *Lorentz uzayı* denir ve E_1^3 ile gösterilir.

$v = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3$ olmak üzere v nin normu $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ şeklinde tanımlanır (Lopez 2008).

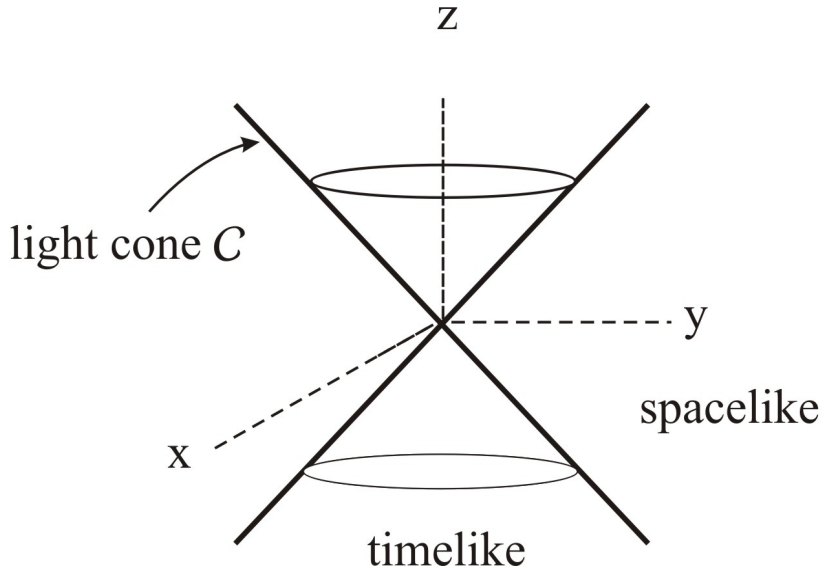
Tanım 2.1.3: $v = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3$ olmak üzere $\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye *timelike vektör*;

$\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye *null ya da lightlike vektör*;

$\langle v, v \rangle > 0$ ise v ye *spacelike vektör* denir (Lopez 2008).

E_1^3 de lightlike koni tüm lightlike vektörlerin kümesidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C = \{(x, y, z) \in E_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$



Şekil 2.1 Light koni

Tanım 2.1.4: $U \subset E_1^3$ bir altvektör uzayı olsun. U üzerinde tanımlanan metrik $\langle, \rangle_U$ pozitif tanımlıysa U ya spacelike, nondejenere indeks 1 ise timelike, dejenere ve $U \neq \{0\}$ ise lightlike denir.

Bir vektörün ya da bir alt vektör uzayının karakteri spacelike, timelike ya da lightlike olarak belirlidir. Bu durumda U bu üç durumdan birini sağlar (Lopez 2008).

Önerme 2.1.1: U, E_1^3 ün bir alt vektör uzayı olsun.

(i) Eğer $U = \langle u \rangle$ 1 boyutlu bir vektör uzayı ve u spacelike (sırasıyla timelike,

lightlike) ise U da spacelike (sırasıyla timelike, lighthlike) olur.

(ii) $U^\perp$ timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) ise U spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) olur.

(iii) Eğer U lightlike bir düzlem ise bu durumda $\text{boy}(U \cap U^\perp) = 1$ dir.

(iv) $\text{boy}(U) = 2$ olsun. Bu durumda U iki tane lineer bağımsız lightlike vektör içeriyor ise kendisi timelikedir. Diğer yandan U bir lightlike vektör içeriyor ancak timelike vektör içermiyorsa kendisi lightlikedir (Lopez 2008).

Önerme 2.1.2: (i) u ve v iki timelike vektör ve $\langle u, v \rangle \neq 0$ olmak üzere

$$|\langle u, v \rangle| \geq \sqrt{-\langle u, u \rangle} \sqrt{-\langle v, v \rangle}$$

dir. $\langle u, v \rangle < 0$ ise u ile v arasındaki hiperbolik açı φ olmak üzere $\langle u, v \rangle = -|u||v| \cosh \varphi$ olarak tanımlıdır.

(ii) u ve v iki lightlike vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise bu vektörler lineer bağımlıdır.

(iii) u ve v iki timelike ya da lightlike vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise bu durumda bu vektörlerin ikisi de lightlikedir (Lopez 2008).

τ , E_1^3 de tüm timelike vektörlerin kümesi olsun. $u, v \in \tau$ olmak üzere yukarıdaki önermeden $\langle u, v \rangle > 0$ veya $\langle u, v \rangle < 0$ olduğunu biliyoruz. $u \in \tau$ olmak üzere $C(u) = \{v \in \tau; \langle u, v \rangle < 0\}$ kümesine u ya ait *timelike koni* denir. Bu da τ üzerinde iki sınıfa sahip bir denklik bağıntısı tanımlar (Lopez 2008).

Tanım 2.1.5: $E_3 = (0, 0, 1)$ ve u bir timelike vektör olmak üzere $u \in C(E_3)$ ise u ya *gelecek yönlü* denir (Lopez 2008).

Önerme 2.1.3: P, E_1^3 de bir düzlem olsun. N_e de Öklid metriği ile bu düzleme ortogonal vektör olmak üzere N_e timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) ise P spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) olur (Lopez 2008).

Son olarak yönlendirmeden bahsedilecek olursa bir vektör uzayı olarak E_1^3 üzerinde bilinen yönlendirme mevcuttur. Yani E_1^3 e ait iki baz B ve B' , $M_{BB'}$ de bu bazlar arasında geçiş matrisi olmak üzere $\det(M_{BB'}) > 0$ ise B ve B' bazları aynı yönlendirmeye sahiptir. Bu da E_1^3 ün tüm bazları arasında bir denklik bağıntısı tanımlar. Bu bağıntıyla iki denklik sınıfı elde edilir. E_1^3 üzerinde standart baz B_u ve herhangi bir baz B olmak üzere eğer $\det(M_{B_u B}) > 0$ ise bu durumda B pozitif yönlendirmeye sahiptir .

B^o, E_1^3 ün tüm ortonormal bazlarının cümlesi olmak üzere, $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazı için e_3 timelike alınacaktır. Bu durumda bu baza göre metriğin matris gösterimi

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olacaktır.

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ iki ortonormal baz olmak üzere eğer $e'_3 \in C(e_3)$ yani $\langle e_3, e'_3 \rangle = 0$ ise $B \sim B'$ olur. Bu durumda iki denklik sınıfı vardır ve bu denklik sınıfları *timelike yönlendirme* adını alır. Her denklik sınıfı tek bir timelike koni tanımlar ve aynı şekilde verilen her timelike koni için tek bir timelike yönlendirme mevcuttur. Öyle ki bu yönlendirmeye ait olan tüm bazların üçüncü vektörleri bu timelike koni üzerindedir (Lopez 2008).

Tanım 2.1.6: Verilen bir $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazı için, e_3 vektörü gelecek yönlü yani $\langle e_3, E_3 \rangle < 0$ ise B ye *gelecek yönlü baz* denir (Lopez 2008).

2.2 Lorentz Vektörel Çarpımı

Tanım 2.2.1: $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3$ olmak üzere u ve v nin Lorentz vektörel çarpımı uxv aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\langle uxv, w \rangle = \det(u, v, w)$$

$$uxv = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Eğer Öklid uzayındaki vektörel çarpıma $ux_e v$ dersek, $uxv, ux_e v$ nin $z = 0$ düzlemine göre yansımalarıdır (Lopez 2008).

Önerme 2.2.1: Lorentz vektörel çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $uxv = -vxu$ dir.

(ii) uxv vektörü u ve v ye diktir.

(iii) $uxv = 0$ olması için gerek ve yeter şart bu vektörlerin lineer bağımlı olmalarıdır.

(iv) $uxv \neq 0$ olmak üzere bu vektörün $P = \langle u, v \rangle$ düzleminde olması için P lightlike olmalıdır (Lopez 2008).

Tanım 2.2.2: E_1^3 , 3 boyutlu Lorentz uzayı ve $u, v \in E_1^3$ olsun.

$\langle u, v \rangle = 0$ ise u ve v vektörleri E_1^3 de *birbirine ortogonaldır* denir (Lopez 2008).

2.3 E_1^3 ün İzometrileri

Tanım 2.3.1: E_1^3 ün bir izometrisi $A : E_1^3 \longrightarrow E_1^3$, Lorentz metriğini koruyan

bir izomorfizmdir. Öyle ki

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle, u, v \in E_1^3$$

dir. E_1^3 ün bütün izometrilerinin cümlesi $O_1(3)$ ile gösterilir. Bu durumda $O_1(3)$ *Lorentz grubu* adını alır. $O_1(3)$ ün bir elemanı, iki ortonormal baz arasındaki geçiş matrisi olarak alınabilir. Çünkü E_1^3 ün bir izomorfizmi A olmak üzere eğer A ortonormal baz olmayı koruyorsa bir izometridir.

E_1^3 üzerinde vektör uzayı yapısıyla bilinen yönlendirme ve üzerinde tanımlanan metrikle de timelike yönlendirme mevcuttur. Bununla birlikte bilindiği üzere 3 boyutlu Öklid uzayının izometrilere iki bağlantılı elemana sahiptir; determinantın 1 olduğu pozitif yönlendirme ve determinantın -1 olduğu negatif yönlendirme. Dolayısıyla $O_1(3)$ dört bağlantılı elemana sahiptir (Lopez 2008).

Lemma 2.3.1: $A \in O_1(3)$ olsun.

(i) $\det A = 1$ ise A yönlendirmeyi korur.

(ii) $A = (a_{ij})$ olmak üzere $\det A = 1$ ve $a_{33} > 0$ ise A timelike yönlendirmeyi korur (Lopez 2008).

Teorem 2.3.1: $O_1(3)$ ün bağlantılı elemanları

$$O_1^{++}(3) = \{A \in O_1(3); \det A = 1, a_{33} > 0\}$$

$$O_1^{+-}(3) = \{A \in O_1(3); \det A = 1, a_{33} < 0\}$$

$$O_1^{-+}(3) = \{A \in O_1(3); \det A = -1, a_{33} > 0\}$$

$$O_1^{--}(3) = \{A \in O_1(3); \det A = -1, a_{33} < 0\}$$

olarak tanımlanır ve $O_1^{++}(3)$ kümesine *ortocrone grup* denir (Lopez 2008).

Tanım 2.3.2: E_1^3 de dönme, bir vektörü, bir L doğrusu üzerinde bir nokta etrafında hareket ettiren izometridir. L doğrusuna dönmenin ekseni denir.

E_1^3 de eksenin spacelike, timelike veya lightlike olmasına göre üç çeşit dönme hareketi vardır. Bu durumda L , sırasıyla z -ekseni, x -ekseni veya $(1,0,1)$ vektörü tarafından üretilen doğru alınabilir. Dönme hareketinin matrisi de yine L nin karakterine bağlı olarak değişir.

1. $L = \langle(0, 0, 1)\rangle$ şeklinde timelike ise dönme matrisi A

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

2. $L = \langle(1, 0, 0)\rangle$ şeklinde spacelike ise dönme matrisi A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

3. $L = \langle(1, 0, 1)\rangle$ şeklinde lightlike ise dönme matrisi A

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & 1 & \theta \\ \frac{\theta^2}{2} & \theta & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

olur (Lopez 2008).

Tanım 2.3.3: Lorentz katı hareketi $\phi : E_1^3 \longrightarrow E_1^3$ uzaklığı koruyan birebir ve örten bir dönüşümdür ve $p, q \in E_1^3$ olmak üzere

$$|\phi(p) - \phi(q)|^2 = |p - q|^2$$

eşitliği sağlanır.

$v \in E_1^3$ vektörünün ötelemesi $T_v(p) = p + v$ dönüşümüdür.

Her Lorentz katı hareketi E_1^3 ün bir izometrisi A ve ötelemesi T_v nin bileşkesidir. Kısaca $\phi = T_v \circ A$ dır.

Teorem 2.3.2: Lorentz helikoidal hareket grubu Lorentz katı hareketlerinin bir parametrelili aşıkarak olmayan bir alt grubudur. Her helikoidal hareket grubu bir L eksenini ve $h \in \mathbb{R}$ adımıyla kesin olarak tanımlanır. L ekseninin karakterine bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur. Helikoidal hareket ϕ_t ile gösterilirse bir $(a, b, c) \in E_1^3$ noktası için helikoidal hareket grubu

1) $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ şeklinde timelike iken

$$\phi_t(a, b, c) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

2) $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ şeklinde spacelike ise

$$\phi_t(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ şeklinde lightlike ise

$$\phi_t(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & t \\ -\frac{t^2}{2} & t & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} - t \\ t^2 \\ \frac{t^3}{3} + t \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $h = 0$ alınırsa bu durumda L eksenini etrafında bir dönme grubu elde edilir.

Helikoidal hareket gruplarında ötelemenin eksenini, dönme ekseninin karakterine bağlı olarak değişiklik gösterir.

(i) Dönme eksenini spacelike ya da timelike iken öteleme de aynı eksen üzerinde olur. Bununla birlikte P noktası eksen üzerinde bir nokta ise P nin helikoidal hareket grubu altındaki yörüngesi eksenin kendisi olacaktır.

(ii) Dönme eksenini lightlike iken öteleme aynı eksen üzerinde değildir. Hatta eksene ait bir P noktasının helikoidal hareket grubu altındaki yörüngesi eksenin kendisi değildir. Orjin noktasının lightlike eksen etrafında helikoidal hareket grubu altındaki yörüngesi lightlike bir eğridir. Dillen ve Kühnel (1999) lightlike bir eksen etrafında bir dönme ve ötelemeden oluşan hareketin yine lightlike eksen etrafında bir dönme hareketi olduğunu söylemişlerdir.

Örnek 2.3.1: $t \in \mathbb{R}$ ve helikoidal hareket grubu $\phi = T_v \circ A$ olsun. Burada A , eksenini $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ olan dönme ve $v = \langle (1, 0, 1) \rangle$ dir. Bu durumda helikoidal hareket grubunun parametrik ifadesi

$$\phi(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & t \\ -\frac{t^2}{2} & t & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. ϕ altında sabit kalan noktaların cümlesi $R = (0, -1, 0) + \langle (1, 0, 1) \rangle$ doğrusudur. Bu durumda ϕ yeni eksenini R olan bir dönme hareketidir. Burada R , L ye paraleldir.

2.4 E_1^3 de Yüzeyler

Tanım 2.4.1: E_1^3 de M , bağlantılı bir yüzey ve $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bir immersiyon öyle ki $T_p M$, $p \in M$ noktasındaki teğet düzlem olmak üzere x in p noktasındaki diferensiyeli $(dx)_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birebirdir. Ters fonksiyon teoreminden x , $x(M)$

üzerinde lokal olarak homeomorfizmdir. Eğer x her yerde homeomorfizm ise x *imbedding* dir ve M de E_1^3 e *embedded* dir. Eğer M kompakt ise bu şart altında $x(M)$ kendi kendini kesmez (Lopez 2008).

Tanım 2.4.2: Bir $x : M \longrightarrow E_1^3$ immersiyonu için P noktasındaki birinci esas form $g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ metriğidir. E_1^3 üzerindeki metrik üç şekilde olabilir.

(i) $T_p M$ spacelike bir düzlem ise g_p pozitif tanımlıdır.

(ii) $T_p M$ timelike bir düzlem ise g_p indeks 1 tipinde bir metriktir.

(iii) $T_p M$ lightlike bir düzlem ise g_p dejenere bir metriktir (Lopez 2008).

Tanım 2.4.3: M bir yüzey olmak üzere her $P \in M$ için $T_p M$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) ise M nin immersiyonu $x : M \longrightarrow E_1^3$ de spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) tır. Bununla beraber M de spacelike (sırasıyla timelike ya da lightlike) tır. İmmersiyon timelike ya da spacelike ise non-dejenere olarak adlandırılır. Bundan sonra g_p yerine $\langle, \rangle$ ifadesi kullanılacaktır (Lopez 2008).

Tanım 2.4.4: $X : U \longrightarrow M$, M nin bir parametrizasyonu olsun. Birinci esas formun katsayıları $E, F, G : U \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle$$

dir. Bununla beraber $W = EG - F^2$ olarak tanımlanır (Lopez 2008).

Önerme 2.4.1: $X : U \longrightarrow M$, M yüzeyinin bir parametrizasyonu olsun. Eğer M non-dejenere ise M nin normali

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

olarak tanımlanır. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(i) M yüzeyi spacelike (ya da timelike) dır.

(ii) W pozitif (ya da negatif) tanımlıdır.

(iii) N timelike (ya da spacelike) dır.

Bunun yanında $W = 0$ ya da $X_u \times X_v$ vektörü lightlike ise M , lightlikedır (Lopez 2008).

Önerme 2.4.2: $x : M \longrightarrow E_1^3$, M yüzeyinin spacelike bir immersiyonu olsun. Bu durumda M yönlendirilebilir bir yüzeydir (Lopez 2008).

İspat: Her $P \in M$ için, $T_P M$ spacelike bir düzlemdir. Vektörel çarpımla birlikte lokal olarak tanjant düzleme ortogonal olacak şekilde bir N birim vektörü bulunabilir. X_u ve X_v vektörleri spacelike olacağından $X_u \times X_v$ vektörü timelikedır. Bu durumda N vektörü

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

şeklindedir. Böylece her noktanın bir komşuluğunda diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanı vardır.

$E_3 = (0, 0, 1)$ vektörü timelike bir vektördür ve $\forall P$ için $|\langle N(P), E_3 \rangle| \geq 1$ olur. $\langle N(P), E_3 \rangle \geq 1$ veya $\langle N(P), E_3 \rangle \leq -1$ dir. Bu da yüzeyin her noktasında bir normal vektör alanı tanımlanmasını sağlar ve M yönlendirilebilir bir yüzey olur.

Spacelike yüzeylerde bir N yönlendirmesi alındığında her zaman $\langle N, E_3 \rangle < 0$ ve M nin yönlendirmesi gelecek yönlü kabul edilecektir.

Lorentz-Minkowski uzayında, Öklid anlamında küre tanımı yoktur. Bunun yerine aşağıdaki kuadrikler tanımlanır. $r > 0$ ve $p_0 \in E_1^3$ olmak üzere :

1. Yarıçapı r ve merkezi p_0 olan *hiperbolik yüzey*

$$H^2(r; p_0) = \{p \in E_1^3; \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = -r^2\}$$

2. Yarıçapı r ve merkezi p_0 olan *psuedo-küre*

$$S_1^2(r; p_0) = \{p \in E_1^3; \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = r^2\}$$

3. Merkezi p_0 olan *lightlike koni*

$$C(p_0) = \{p \in E_1^3; \langle p - p_0, p - p_0 \rangle = 0\}$$

Eğer p_0 orijin ise ilk iki durum için $H^2(r)$ ve $S_1^2(r)$ de yazılır.

Tanım 2.4.5: *Hiperbolik yüzey* $H^2(1)$ şeklinde tanımlı yüzeydir ve H^2 ile gösterilir. *De Sitter Yüzeyi* ise $S_1^2 = S_1^2(1)$ olarak tanımlanır.

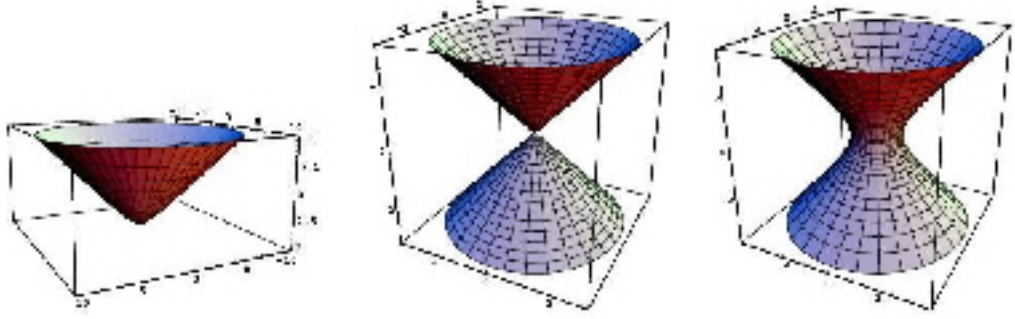
M non-dejenere bir yüzey ve $N(P)$ de her P noktasında $T_p M$ ye ortogonal olan birim vektör olmak üzere M spacelike ise $N(p) \in H^2(1)$ ve M timelike ise $N(p) \in S_1^2(1)$ dir.

Tanım 2.4.6: Non dejenere bir M yüzeyi için $\eta = N : M \longrightarrow E_1^3$ şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir η dönüşümüne *Gauss dönüşümü* denir. Burada M nin her P noktası için $N(P)$, $T_p M$ ye ortogonal ve $|N(P)| = 1$ dir.

Eğer M spacelike bir yüzey ise yönlendirilebilirdir ve yönlendirme gelecek yönlüdür. Timelike yüzeyler için ise Gauss dönüşümünün varlığından lokal olarak bahsedilebilir (Lopez 2008).

Teorem 2.4.1: Hiperbolik yüzey H^2 spacelike bir yüzey ve De Sitter yüzeyi S_1^2 timelike bir yüzeydir. Bununla beraber lightlike koni, lightlike bir yüzeydir. Şekilde

sırasıyla hiperbolik yüzey, light koni ve De Sitter yüzeyi görülmektedir.



Şekil 2.2 Hiperbolik yüzey, light koni, De Sitter yüzeyi

3. E_1^3 DE HOMOTETİK HAREKET

3.1 Tanımlar ve Parametrizasyonlar

Tanım 3.1.1: 3-boyutlu Lorentz uzayında 1 parametrelili homotetik hareket

$$\begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir dönüşümdür. Burada $A \in O_1(3)$, $A^t = \epsilon A^{-1} \epsilon$ dir. X ve Y , 3×1 tipinde reel matrislerdir. Homotetik sabit λ , A ve C bir t parametresine bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Afin dönüşüm olma durumunu engellemek için $\lambda = \lambda(t) \neq \text{sabit}$ olarak alınacaktır. Bununla birlikte hareketin yalnızca dönme ya da yalnızca öteleme olmaması için $\frac{d}{dt}(\lambda A) \neq 0$ ve $\frac{d}{dt}(C) \neq 0$ olarak alınacaktır (Tosun, Küçük, Güngör 2006).

Tanım 3.1.2: 3-boyutlu Lorentz uzayında homotetik hareket grubu bir L eksenini ve $h \in \mathbb{R}$ adımıyla birlikte eksenin karakterine bağlı olarak aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

1. $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ şeklinde timelike ise

$$\phi_t(a, b, c) = \lambda(t) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

2. $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ şeklinde spacelike ise

$$\phi_t(a, b, c) = \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

3. $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ şeklinde lightlike ise

$$\phi_t(a, b, c) = \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & t \\ -\frac{t^2}{2} & t & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} - t \\ t^2 \\ \frac{t^3}{3} + t \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda(t)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve h da reel sabittir. Özel olarak $\lambda(t) = 1$ olarak alınırsa Lorentz uzayında helikoidal hareket grupları elde edilir. Bununla birlikte $\lambda(t) = 1$ ve $h = 0$ alındığında dönme hareketi elde edilecektir.

3.2 E_1^3 de Bir Noktanın Homotetik Hareket Grubu Altındaki Yörüngesi

Tanım 3.2.1: $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere E_1^3 de bir eğri $\alpha : I \longrightarrow E_1^3$ şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Eğer bir $t_0 \in I$ noktasında $\alpha'(t_0) \neq 0$ ise α ya bu noktada *regüler* denir (Lopez 2008).

E_1^3 de eğrilerin karakterleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 3.2.2: α, E_1^3 de bir eğri olsun. Eğer bir $t \in I$ noktası için $\alpha'(t)$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) ise $\alpha(t)$ spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) dır. Genel olarak, E_1^3 de bir eğrinin karakteri I nın bütün noktalarında aynı değildir. Yani α nın spacelike, timelike, lightlike olduğu noktalar olabilir. Bununla beraber α nın spacelike ve timelike olduğu noktalar arasında, lightlike olduğu bir nokta da vardır. Eğer α , bir $t_0 \in I$ noktasında spacelike ya da timelike ise α nın aynı karaktere sahip olduğu bir $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ açık aralığı vardır.

Örneğin $\alpha(t) = (\cosh t, t^2, \sinh t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri için $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 4t^2 - 1$ olarak hesaplanır. Bu durumda α eğrisi $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ aralığında spacelike, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ aralığında timelike ve $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ noktalarında lightlikedir (Lopez 2008).

Tanım 3.2.3: $\alpha : I \longrightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa α *regülerdir* denir (Lopez 2008).

Lemma 3.2.1: Her spacelike ya da timelike eğri yay parametresi ile parametrelendirilebilir. Bir $\alpha : I \longrightarrow E_1^3$ eğrisi için bir $\phi : J \longrightarrow I$ diffeomorfizmi vardır öyle ki $\beta = \alpha \circ \phi$ bir eğri olmak üzere her $s \in J$ için α spacelike ise $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$ ve her $s \in J$ için α timelike ise $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = -1$ dir (Lopez 2008).

Önerme 3.2.1: E_1^3 de $p = (a, b, c)$ bir nokta ve α eğrisi de bu noktanın homotetik hareket grubu altındaki yörüngesi olsun. Bu durumda α eğrisinin karakteri t ye bağlıdır.

İspat: i) Eksen timelike ise p noktasının homotetik hareket altındaki yörüngesi

$$\alpha(t) = (a\lambda(t) \cos t - b\lambda(t) \sin t, a\lambda(t) \sin t + b\lambda(t) \cos t, c\lambda(t) + ht)$$

olacaktır. Bu eğri için

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = (a^2 + b^2 - c^2)\lambda'(t)^2 + (a^2 + b^2)\lambda(t)^2 - 2ch\lambda'(t) - h^2$$

olarak hesaplanır. Görüldüğü gibi α eğrisinin karakteri t ye bağlıdır. Ancak $c = 0$, yani p noktası eksene ortogonal olan düzlemde ise ve $\lambda(t) = \frac{h}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t$ veya $\lambda(t) = \frac{h}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t$ seçilirse α bir null eğri olur. Burada $a^2 + b^2 \neq 0$ dir.

ii) Eksen timelike ise p noktasının yörüngesi

$$\alpha(t) = (a\lambda(t) + ht, b\lambda(t) \cosh t + c\lambda(t) \sinh t, b\lambda(t) \sinh t + c\lambda(t) \cosh t)$$

ile parametrize edilen eğridir. Bu eğri için

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = (a^2 + b^2 - c^2)\lambda'(t)^2 - (b^2 - c^2)\lambda(t)^2 - 2ah\lambda'(t) + h^2$$

dir. Yine α nın karakteri t parametresine bağlıdır. Özel olarak $a = 0$ ve $\lambda(t) = \frac{h}{\sqrt{b^2 - c^2}} \cosh t$ olarak seçilirse α null bir eğri olacaktır. Burada $b^2 - c^2 \neq 0$ dir.

iii) Eksen lightlike ise p noktasının homotetik hareket altındaki yörüngesi

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & (\lambda(t)(a(1 - \frac{t^2}{2}) + bt + c\frac{t^2}{2}) + h(\frac{t^3}{3} - t), \lambda(t)(-at + b + ct) + ht^2, \\ & \lambda(t)(-a\frac{t^2}{2} + bt + c(1 + \frac{t^2}{2})) + h(\frac{t^3}{3} + t)) \end{aligned}$$

eğrisidir ve bu eğrinin karakteri t parametresine bağlıdır. Özel olarak $p = (0, b, 0)$ ve $\lambda(t) = \frac{h}{b}t^2$ seçilirse α null bir eğri olur.

Önerme 3.2.2: Homotetik hareket gruplarında özel olarak $\lambda(t) = 1$ alındığında elde edilen helikoidal hareket grupları için $p = (a, b, c)$ noktasının helikoidal hareket grupları altındaki yörüngesi olan eğrinin karakteri sabittir.

i) Eksen timelike ise p noktasının helikoidal hareket grubu altındaki yörüngesi, parametrizasyonu

$$\alpha(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t, c + ht)$$

olan eğridir ve bu eğri için $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = a^2 + b^2 - h^2$ dir. α nın karakteri t den bağımsızdır. $a^2 + b^2 = h^2$ olduğunda α null bir eğri, $a^2 + b^2 > h^2$ olduğunda α spacelike bir eğri ve $a^2 + b^2 < h^2$ olduğunda ise α timelike bir eğri olacaktır.

ii) Eksen spacelike ise p noktasının helikoidal hareket grubu altındaki yörüngesi

$$\alpha(t) = (a + ht, b \cosh t + c \sinh t, b \sinh t + c \cosh t)$$

parametrizasyonu ile verilen eğri olur ve bu eğri için $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -b^2 + c^2 + h^2$ olarak hesaplanır. $b^2 - c^2 = h^2$ olduğunda α null bir eğri, $b^2 - c^2 < h^2$ ise α spacelike bir eğri ve $b^2 - c^2 > h^2$ ise α timelike bir eğri olacaktır.

iii) Eksen lightlike ise p noktasının helikoidal hareket grubu altındaki yörüngesi

$$\alpha(t) = (a + (b - h)t + \frac{c - a}{2}t^2 + h\frac{t^3}{3}, b + (c - a)t + ht^2, c(b + h)t + \frac{c - a}{2}t^2 + h\frac{t^3}{3})$$

ile verilen eğridir. $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = (a - c)^2 - 4bh$ olarak hesaplanır. $(a - c)^2 = 4bh$ ise α null bir eğri, $(a - c)^2 > 4bh$ ise α spacelike bir eğri ve $(a - c)^2 < 4bh$ olduğunda ise α timelike bir eğri olur.

Tanım 3.2.4: E_1^3 de bir noktanın dönme hareketi ile elde edilen yörüngesine *Lorentz çemberi* denir.

$p = (a, b, c) \in E_1^3$ de bir nokta, $G_L = \{\phi_t; t \in \mathbb{R}\}$ de eksen L olan bir dönme hareketi ve $\alpha(t) = \phi_t(p)$, p noktasının bu dönme hareketi altında çizdiği yörünge olsun. Burada $p \notin L$ dir. Eksenin karakterine bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur.

i) Eksen timelike z eksenini olsun. Bu durumda $\alpha(t) = (a \cos t - b \sin t, b \cos t + a \sin t, c)$ olur. Bu eğri, $z = c$ düzleminde yarıçapı $\sqrt{a^2 + b^2}$ Öklid çemberidir ve spacelike bir eğridir.

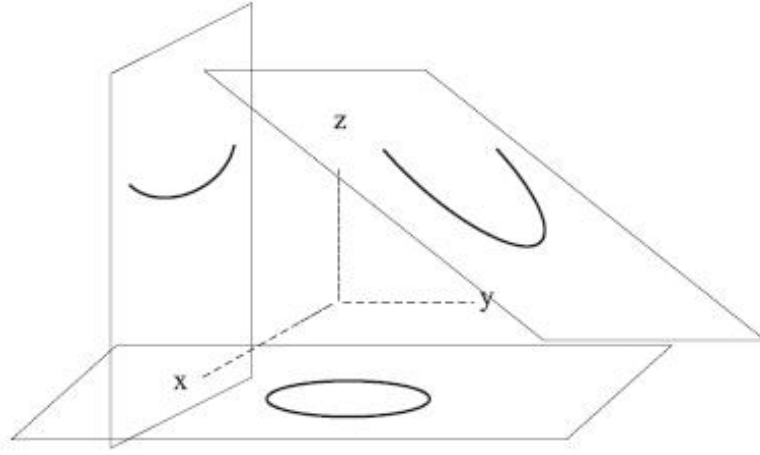
ii) Eksen spacelike x eksenini olsun. Bu eksen etrafında p noktasının dönme hareketi ile elde edilen eğri $\alpha(t) = (a, b \cosh t + c \sinh t, c \cosh t + b \sinh t)$ olarak parametrize edilir ve $\|\alpha'(t)\|^2 = -b^2 + c^2$ olarak hesaplanır. b ve c nin aldığı değerlere göre üç farklı durum söz konusudur.

a) $b^2 < c^2$ ise α , spacelike bir eğridir ve z eksenini bir noktada keser. Özel olarak $p = (0, 0, c)$ seçilirse $\alpha(t) = (0, c \sinh t, c \cosh t)$ olur ki bu eğri de $x = 0$ düzleminde $z^2 - y^2 = c^2$ hiperbolüdür.

b) $b^2 = c^2$ ise α lightlike bir eğridir ve $\alpha(t) = (a, \pm c(\cosh t + \sinh t), \pm c(\cosh t + \sinh t))$ şeklinde parametrize edilir. Bu durumda α , $x = a$ düzleminde $y = \pm z$ doğrularından biridir.

c) $b^2 > c^2$ ise α timelike bir eğridir ve y eksenini bir noktada keser. Özel olarak $p = (0, b, 0)$ alınırsa $\alpha(t) = (0, b \cosh t, b \sinh t)$ elde edilir. Bu eğri $x = 0$ düzleminde $y^2 - z^2 = b^2$ hiperbolüdür.

iii) Lightlike eksen $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ ve $p = (a, 0, c)$ olarak alınırsa $\alpha(t) = (a, 0, c) + (c - a)t(1, 0, 1) + (c - a)t^2/2(1, 0, 1)$ parametrizasyonuna sahip spacelike eğridir. Bu eğri $x - z = a - c$ düzleminde yatar ve eksenini $(1, 0, 1)$ e paralel olan bir paraboldür.



Şekil 3.1 E_1^3 de Lorentz çemberleri

Bununla birlikte E_1^3 de bir çember E_1^3 ün bir katı hareketidir. Öklid anlamında, diğer çemberler yukarıda verilen çemberlerin afin hareketi ile elde edilir (Lopez 2008).

3.3 E_1^3 de Bir Eğrinin Homotetik Hareket Altındaki Yörüngesi

Teorem 3.3.1: M , E_1^3 de homotetik hareket grubu altında üretilen bir yüzey olsun. Bu durumda homotetik hareket grupları altında yörüngesi M olan üreteç eğrisi γ olmak üzere

(i) $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ timelike ise bu eğri $\gamma(s) = (f(s), 0, g(s))$ şeklinde parametrize edilir ve ϕ_t (3.1) ile verilen homotetik hareket, M yüzeyi de $X(s, t) = \phi_t(\gamma(s))$

olmak üzere parametrizasyonu aşağıdaki gibidir:

$$X(s, t) = (f(s)\lambda(t) \cos t, f(s)\lambda(t) \sin t, ht + \lambda(t)g(s))$$

(ii) $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ spacelike. ise üreteç eğri $\gamma(s) = (0, f(s), g(s))$ şeklinde parametrize edilir ve ϕ_t (3.2) ile verilen homotetik hareket, M yüzeyi de $X(s, t) = \phi_t(\gamma(s))$ olmak üzere

$$X(s, t) = (ht + \lambda(t)f(s), g(s)\lambda(t) \cosh t, g(s)\lambda(t) \sinh t)$$

olur.

(iii) $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ lightlike ise üreteç eğri $\gamma(s) = (f(s), g(s), f(s))$ şeklinde parametrize edilir ve ϕ_t (3.3) ile verilen homotetik hareket, M yüzeyi de $X(s, t) = \phi_t(\gamma(s))$ olmak üzere

$$X(s, t) = (\lambda(t)(tg(s) + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} - t), \lambda(t)g(s) + ht^2, \lambda(t)(tg(s) + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} + t))$$

olur.

4. E_1^3 de YÜZEYLERİN EĞRİLİKLERİ

4.1 Non-dejenere Yüzeylerin Ortalama Eğrilikleri ve Gauss Eğrilikleri

$x : M \longrightarrow E_1^3$, M yüzeyinin bir non-dejenere immersiyonu olmak üzere, eğer immersiyon spacelike ise M yüzeyi yönlendirilebilirdir ve gelecek yönlü Gauss dönüşümü N alınır. Eğer immersiyon timelike ise N Gauss dönüşümü olarak alınır. $\langle N, N \rangle = \epsilon$ olmak üzere eğer immersiyon spacelike ise $\epsilon = -1$ ve timelike ise $\epsilon = 1$ dir. İki durumda da yüzey nondejenere dir.

$\chi(M)$, M nin teğet vektör alanlarının cümlesi olsun. ∇^0 , E_1^3 ün Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $X, Y \in \chi(M)$ ise bu durumda

$$\nabla_X^0 Y = (\nabla_X^0 Y)^\top + (\nabla_X^0 Y)^\perp$$

dir. Burada $\top$ ve $\perp$ sırasıyla $\nabla_X^0 Y$ vektör alanının teğet kısmını ve normal kısmını göstermektedir. ∇ , M üzerinde x immersiyonunun konneksiyonu olmak üzere

$$\nabla_X Y = (\nabla_X^0 Y)^\top$$

dir. x in ikinci esas formu $\sigma : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow (\chi(M))^\perp$ olmak üzere

$$\sigma(X, Y) = (\nabla_X^0 Y)^\perp$$

olur. O halde Gauss formülü de

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \tag{4.1}$$

şeklindedir.

M nin normal vektör alanı Z olmak üzere $-\nabla_X^0 Z$ nin teğet kısmı $A_Z(X) = -(\nabla_X^0 Z)^\top$ için

(4.1) den

$$\langle A_Z(X), Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), Z \rangle \quad (4.2)$$

olur. $A_Z : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ dönüşümüne Z ye bağlı *Weingarten endomorfizmi* denir. σ simetrik olduğundan (4.2) den

$$\langle A_Z(X), Y \rangle = \langle X, A_Z(Y) \rangle \quad (4.3)$$

dir. Bu da A_Z dönüşümünün M üzerinde tanımlanan metriğe göre lineer ve self-adjoint olduğunu gösterir. $Z = N$ alınrsa $\langle N, N \rangle$ sabit olduğundan $\langle \nabla_X^0 N, N \rangle = 0$ olur. O halde $(\nabla_X N)^\perp = 0$ ve

$$-\nabla_X^0 N = A_N(X) \quad (4.4)$$

bulunur (Lopez 2008).

Tanım 4.1.1: $p \in M$ noktasındaki Weingarten endomorfizmi $A_p : T_p M \longrightarrow T_p M$, $A_p = A_{N(p)}$ olarak tanımlanır. $v \in T_p M$ ve $X \in \chi(M)$ de $X(P) = v$ olacak şekilde teğet vektör alanı olmak üzere $A_p(v) = (A_N(X))_p$ ve (4.4) den

$$A_p(v) = -(dN)_p(v), \quad v \in T_p M$$

olur. Burada $(dN)_p$, E_1^3 de N nin p noktasındaki diferensiyelidir.

Eğer $X, Y \in \chi(M)$ ise (4.1) ve (4.2) den

$$\sigma(X, Y) = \epsilon \langle \sigma(X, Y), N \rangle N = \epsilon \langle A(X), Y \rangle N \quad (4.5)$$

olur ve (4.1)

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y + \epsilon \langle A(X), Y \rangle N$$

olarak yazılabilir (Lopez 2008).

Tanım 4.1.2: Bir nondejenere immersiyon için ortalama eğrilik

$$H = \epsilon \frac{1}{2} \dot{I}z(\sigma)$$

ve Gauss eğriliği

$$K = \epsilon \det(\sigma)$$

dir (Lopez 2008).

Bu hesaplamalar teğet uzayın $B = \{e_1, e_2\}$ ortonormal bazına göre yapılmıştır ve M nin spacelike ya da timelike olmasına göre sırasıyla $\langle e_1, e_1 \rangle = \epsilon$ ve $\langle e_2, e_2 \rangle = -\epsilon$ dir. Bu durumda

$$H = \frac{\epsilon}{2} (\langle Ae_1, e_1 \rangle - \epsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle) \quad (4.6)$$

$$K = -(\langle Ae_1, e_1 \rangle \langle Ae_2, e_2 \rangle - \langle Ae_1, e_2 \rangle^2) \quad (4.7)$$

İddia: Bu tanımlar seçilen bazlardan bağımsızdır.

İspat: $B' = \{v_1, v_2\}$ ortonormal bazı için B ve B' bazları arasında geçiş matrisi $C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$v_1 = ae_1 + be_2, \quad v_2 = ce_1 + de_2$$

ve $\epsilon = -1$ ise

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ve $\epsilon = 1$ ise

$$C = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Buradan (4.8) ve (4.9) kullanılarak

$$\begin{aligned}\sigma(v_1, v_1) - \epsilon\sigma(v_2, v_2) &= (a^2 - \epsilon c^2)\sigma(e_1, e_1) + (b^2 - \epsilon d^2)\sigma(e_2, e_2) + 2(ab - \epsilon cd)\sigma(e_1, e_2) \\ &= \sigma(e_1, e_1) - \epsilon\sigma(e_2, e_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\langle Av_1, v_1 \rangle \langle Av_2, v_2 \rangle - \langle Av_1, v_2 \rangle^2 &= (ad - bc)(\langle Ae_1, e_1 \rangle \langle Ae_2, e_2 \rangle - \langle Ae_1, e_2 \rangle^2) \\ (ad - bc = 1 \text{ olduğundan})\end{aligned}$$

$$= \langle Ae_1, e_1 \rangle \langle Ae_2, e_2 \rangle - \langle Ae_1, e_2 \rangle^2$$

elde edilir.

Önerme 4.1.1: Bir nondejenere yüzeyin Weingarten dönüşümünün matrisi A olmak üzere

$$H = \frac{\epsilon}{2} \dot{I}z(A) \quad \text{ve} \quad K = \epsilon \det(A)$$

dır.

İspat: $T_p M$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ için daha önce verilen tanımlardan

$$H = \epsilon \frac{\langle Ae_1, e_1 \rangle - \epsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle}{2} \quad (4.10)$$

O halde $H = (\epsilon/2) \dot{I}z(A)$ olur. Diğer yandan $\det(A) = -\epsilon(\langle Ae_1, e_1 \rangle \langle Ae_2, e_2 \rangle - \langle Ae_1, e_2 \rangle^2)$ olduğundan $K = \epsilon \det(A)$ olur.

Örnek 4.1.1: p_0 merkezli, r yarıçaplı $H^2(r, p_0)$ hiperbolik yüzey ve her $v \in T_p M$ teğet vektörü için normal vektör $N(p) = \frac{(p - p_0)}{r}$ ve $A_p(v) = -\frac{v}{r}$ olur. O halde I_2 tanjant düzlemde birim matris olmak üzere $A_p = -\frac{1}{r} I_2$ olur ve buradan $H = \frac{\epsilon}{r}$ ve $K = -\frac{\epsilon}{r^2}$ dir.

Örnek 4.1.2: p_0 merkezli, r yarıçaplı $S_1^2(r, p_0)$ psuedo-küre için $A_p = -\frac{1}{r} I_2$ ve $H = \frac{\epsilon}{r}$, $K = -\frac{\epsilon}{r^2}$ dir.

Önerme 4.1.2: $T_p M$ nin $\{e_1, e_2\}$ bazı için

$$H = \frac{\epsilon}{2} \frac{|e_1|^2 \langle Ae_2, e_2 \rangle - 2 \langle e_1, e_2 \rangle \langle Ae_1, e_2 \rangle + |e_2|^2 \langle Ae_1, e_1 \rangle}{|e_1|^2 |e_2|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2} \quad (4.11)$$

$$K = \epsilon \frac{\langle Ae_1, e_1 \rangle \langle Ae_2, e_2 \rangle - \langle Ae_1, e_2 \rangle^2}{|e_1|^2 |e_2|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2} \quad (4.12)$$

ve

$X = X(u, v)$ yüzeyi için

$$X_u = \frac{\partial X(u, v)}{\partial u}, \quad X_v = \frac{\partial X(u, v)}{\partial v}$$

dir ve birinci ve ikinci esas formun katsayıları sırasıyla $\{E, F, G\}$ ve $\{e, f, g\}$ olmak üzere

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle$$

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle, \quad f = -\langle N_u, X_v \rangle, \quad g = -\langle N_v, X_v \rangle$$

olur. O halde

$$H = \epsilon \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad K = \epsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (4.13)$$

bulunur ve burada

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{\epsilon(EG - F^2)}}$$

dir. $W = EG - F^2$, eğer M spacelike ise pozitif, M timelike ise negatiftir. Her $u, v, w \in E_1^3$ için $\langle uxv, w \rangle = \det(u, v, w)$ olduğundan (4.13) den

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \frac{G \det(X_u, X_v, X_{uu}) - 2F \det(X_u, X_v, X_{uv}) + E \det(X_u, X_v, X_{vv})}{(\epsilon(EG - F^2))^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{H_1}{(\epsilon W)^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur. Ayrıca

$$K = -\frac{\det(X_u, X_v, X_{uu}) \det(X_u, X_v, X_{vv}) - \det(X_u, X_v, X_{uv})^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$= -\frac{K_1}{W^2} \quad (4.15)$$

elde edilir.

Örnek 4.1.3: $f, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bir dönüşüm ve M de f nin grafiği olsun. M nin bir parametrizasyonu $X : \Omega \longrightarrow E_1^3$, $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ve $X_x = (1, 0, f_x)$ ve $X_y = (0, 1, f_y)$ olmak üzere $EG - F^2 = 1 - f_x^2 - f_y^2 = 1 - |Df|^2$ dir. M nondejenere olmak üzere M spacelike ise $|Df|^2 < 1$, timelike ise $|Df|^2 > 1$ dir. O halde

$$H = -\frac{(1 - f_y)^2 f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 - f_x^2) f_{yy}}{2|1 - f_x^2 - f_y^2|^{3/2}}$$

$$K = -\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 - f_x^2 - f_y^2)^2}$$

olarak hesaplanır.

4.2 E_1^3 de Bir Polinom Eğrisinin ve Çemberin Homotetik Hareket Altındaki Yörüngesi Olan Yüzeyler için Ortalama Eğrilikler ve Gauss Eğriliklerinin Sabit Olması

Teorem 4.2.1: E_1^3 de homotetik hareket grupları altında üretilen ve üreteç eğrisi bir polinom olan yüzeylerin sabit ortalama eğrilığe sahip olması ancak alınan polinomun derecesinin 1 veya 0 olması ile mümkündür. Hatta,

(i) E_1^3 de timelike eksen $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ olmak üzere özel olarak $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olarak alındığında bu üreteç eğrisiyle eksen etrafında homotetik hareket altında elde edilen yüzey

$$X(s, t) = (s\lambda(t) \cos t, s\lambda(t) \sin t, ht + \lambda(t)f(s))$$

ile parametrize edilen yüzey olur. Bu yüzey için

a) $H = 0$ ise $f(s) = a_0$ ile birlikte $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ dir.

b) H sıfırdan farklı bir sabit ise $\lambda(t) = \sum_{k=0}^l b_k t^k$, $b_k \in \mathbb{R}, l \geq 2$ ve $f(s) = \pm s$ iken $H = \frac{1}{|h|}$ ya da $f(s) = a_0 \pm s$ ile birlikte $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ iken $H = \frac{1}{|h + a_0 b_1|}$ şeklindedir.

ii) Eksen $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ spacelike ise $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olarak alındığında bu eksen etrafında bu eğri ile homotetik hareket altında elde edilen yüzey

$$X(s, t) = (ht + \lambda(t)f(s), s\lambda(t) \cosh t, s\lambda(t) \sinh t)$$

idi. Bu yüzey için

a) $H = 0$ ise $f(s) = a_0$ ve $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ olur.

b) $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$ ve $\lambda(t) = \sum_{k=0}^l b_k t^k$, $b_k \in \mathbb{R}$ iken H sıfırdan farklı bir sabit olamaz.

iii) Eksen lightlike iken $\gamma(s) = (f(s), s, f(s))$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu üreteç eğriyle eksen etrafında homotetik hareket altında elde edilen yüzey

$$X(s, t) = (\lambda(t)(ts + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} - t), s\lambda(t) + ht^2, \lambda(t)(ts + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} + t))$$

idi. Bu yüzey için

a) $H = 0$ ise $f(s) = a_0$ ve $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ ya da $f(s) = a_0 + a_1 s$ ve $\lambda(t) = b_0 + b_1 t - \frac{ha_1}{a_0} t^2$ olmalıdır.

b) $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$ ve $\lambda(t) = \sum_{k=0}^l b_k t^k$, $b_k \in \mathbb{R}$ iken H sıfırdan farklı bir sabit olamaz.

İspat: i) Eksen timelike iken verilen yüzey için

$$H = [-2(h + (f - sf')\lambda')(-s\lambda' + f'(h + f\lambda')) + sf''(-h^2 + s^2\lambda^2 - 2hf\lambda' + s^2\lambda'^2 - f^2\lambda'^2) + s(1 - f'^2)(s\lambda^2f' - 2\lambda'(h + (f - sf')\lambda') + (f - sf')\lambda\lambda'')]/2(-\epsilon(s^2\lambda^2(-1 + f'^2) + (h + (f - sf')\lambda')^2))^{\frac{3}{2}}$$

dir. Bu da kısaca $H = \frac{H_1}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} (*)$ şeklinde yazılabilir.

a) $H = 0$ olduğu durumda H_1 , " s " değişkenine bağlı bir polinom olur. $\forall s$ için $H_1(s) = 0$ olabilmesi için H_1 polinomunun bütün katsayıları sıfır olmalıdır. Gerekli hesaplamalar yapıldığında H_1 polinomunun başkatsayısı s^{3m-1} terimine aittir ve o da $-(\lambda^2(t)m^3 - \lambda'^2(t)(3m^2 - 2m^3 - m) + (m^3 - m^2)\lambda\lambda'') a_m^3$ dir. $m \geq 2$ olduğu durumda başkatsayı sıfır olamaz. Dolayısıyla H_1 bir sıfır polinomu olamaz ve buradan $H \neq 0$ elde edilir.

$m = 1$ yani $f(s) = a_0 + a_1s$ iken $H_1 = (-2ha_1^2s(1 - a_1^2) - 4a_0a_1h)\lambda' + 2a_0^2a_1\lambda'^2 + a_1s^2(1 - a_1^2)\lambda^2 + a_0s\lambda\lambda''$ olur. $H_1 = 0$ olabilmesi için $a_1 = \pm 1$ ve $\lambda(t) = b_0 - \frac{h}{a_0}t$ olmalıdır. Ancak bu durumda payda sıfır olacağından $H = 0$ elde edilemez. $m = 0$ yani $f(s) = a_0$ iken $\lambda(t) = b_0$ veya $\lambda(t) = b_0 + b_1t$ seçildiğinde $H = 0$ olur. Ancak $\lambda(t) \neq sbt$ kabul edildiğinden $\lambda(t) = b_0$ alınamaz.

b) H sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu durumda $(*)$ ifadesinden $4H^2|EG - F^2|^3 - H_1^2 = 0$ olur. Bu da " s " değişkenine bağlı bir polinomdur. Yine bu polinomun bir sıfır polinomu olabilmesi için tüm katsayılarının sıfır olması gerekir. $m \geq 2$ iken bu polinomun derecesi $6m$ ve başkatsayısı $4H^2a_m^6(\lambda^2m^2 + \lambda'^2(1 - m)^2)^3$ olur ki bu katsayı sıfır olamaz.

$m = 1$ iken polinomun derecesi 6 ve başkatsayısı $4H^2\lambda^6(a_1^2 - 1)^3$ olur. Başkatsayının sıfır olabilmesi için $a_1 = \pm 1$ olmalıdır ve bu durumda $4H^2|EG - F^2|^3 - H_1^2 = 4H^2(h + a_0\lambda')^6 - (a_0\lambda\lambda'' - 2(h + a_0\lambda')^2)^2 = 0$ olur. $\lambda(t) = \sum_{k=0}^l b_k t^k$ olmak üzere

$f(s) = \pm s$ iken $4H^2 |EG - F^2|^3 - H_1^2 = 0$ ve $H = \frac{1}{|h|}$ dir.

$\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ ve $f(s) = a_0 \pm s$ iken $H = \frac{1}{|h + a_0 b_1|}$ elde edilir.

ii) Eksen spacelike iken bu eksen etrafında homotetik hareketle elde edilen yüzey için ortalama eğrilik

$$H = \frac{[(2(h + (f - sf')\lambda')(s\lambda' + f'(h + f\lambda')) + sf''(h^2 - s^2\lambda^2 + 2hf\lambda' + (s^2 + f^2)\lambda'^2) - s(1 + f'^2)(s\lambda^2 f' + 2\lambda'(h + f\lambda' - sf'\lambda') - (f - sf')\lambda\lambda''))]/[-\epsilon(-s^2\lambda^2(1 + f'^2) + (h + (f - sf')\lambda')^2)]^{\frac{3}{2}}}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Bu eşitlik kısaca $H = \frac{H_1}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}$ (*) şeklinde yazılabilir.

a) $H = 0$ iken H_1 , " s " değişkenine bağlı bir polinomdur. $\forall s$ için $H_1(s) = 0$ olabilmesi için H_1 polinomunun bütün katsayıları sıfır olmalıdır. $m \geq 2$ iken H_1 polinomunun başkatsayısı s^{3m-1} terimine aittir ve bu katsayı $-(\lambda^2(t)m^3 - \lambda'^2(t)(3m^2 - 2m^3 - m) - (m^3 - m^2)\lambda\lambda'') a_m^3$ dir ve bu katsayı sıfır olamaz. Dolayısıyla $H_1 \neq 0$ ve $H \neq 0$.

$m = 1$ alalım. $f(s) = a_0 + a_1 s$ olduğunda $H_1 = (4hs(1 + a_1^2) + 4a_0a_1h + 2a_0^2a_1(1 + s))\lambda' + 2a_0a(2 + a_1^2)\lambda'^2 + a_1s^2(1 + a_1^2)\lambda^2 + a_0s(1 + 2a_1^2)\lambda\lambda'' + 2h^2a_1$ olarak hesaplanır. $m = 1$ iken bu katsayı sıfır olamaz. O halde $m = 1$ iken $H \neq 0$ elde edilir.

$m = 0$ iken $f(s) = a_0$ olsun. Bu durumda $H_1 = 4hs\lambda' + 4a_0s\lambda'^2 + a_0s\lambda\lambda''$ olur ve $\lambda(t) = b_0$ veya $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ seçilirse $H_1 = 0$ ve dolayısıyla $H = 0$ elde edilir. Ancak $\lambda(t) \neq sbt$ olduğundan $\lambda(t) = b_0$ alınamaz.

b) H sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu durumda (*) ifadesinden $4H^2 |EG - F^2|^3 - H_1^2 = 0$ olur. Bu da " s " değişkenine bağlı bir polinomdur. Yine bu polinomun bir sıfır polinomu olabilmesi için tüm katsayılarının sıfır olması gerekir. $m \geq 2$ iken bu polinomun derecesi $6m$ ve başkatsayısı $4H^2((1 - m)^2\lambda'^2 - m^2\lambda^2)^3 a_m^6$ olur ki bu katsayı sıfır olamaz. $m = 1$ ve $f(s) = a_0 + a_1 s$ olsun. Bu durumda polinomun başkatsayısı s^6

terimine aittir ve $-4H^2\lambda^6(1+a_1^2)^3$ dir. Bu katsayı sıfır olamaz. $m = 0$ ve $f(s) = a_0$ iken polinomun derecesi 6 ve başkatsayısı $-4H^2\lambda^6$ dir. Yine bu katsayı sıfır olamaz.

iii) Eksen lightlike iken verilen yüzey için

$$H = -\frac{h\lambda^2[\lambda'(4hf - s^2\lambda')f'' + \lambda(4hsf'' - f\lambda'' + f'(-2h + s\lambda''))]}{8[-\epsilon h\lambda^2(s\lambda + hf'^2 + (f - sf')\lambda')]^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Bu ifade kısaca $H = \frac{H_1}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}$ (*) ile ifade edilebilir.

a) $H = 0$ olduğu durumda H_1 , " s " değişkenine bağlı bir polinom olur. $\forall s$ için $H_1(s) = 0$ olabilmesi için H_1 polinomunun bütün katsayıları sıfır olmalıdır. $m \geq 2$ iken H_1 polinomunun başkatsayısı s^{2m-2} terimine aittir ve o da $4h^2\lambda^2\lambda'm(m-1)a_m^2$ dir. $m \geq 2$ iken bu katsayı sıfır olamaz.

$m = 1$ yani $f(s) = a_0 + a_1s$ iken $H_1 = -h\lambda^3\lambda''a_0 - 2h^2\lambda^3a_1$ olur. Bu durumda $\lambda(t) = b_0 + b_1t - \frac{ha_1}{a_0}t^2$ iken $H_1 = 0$ elde edilir.

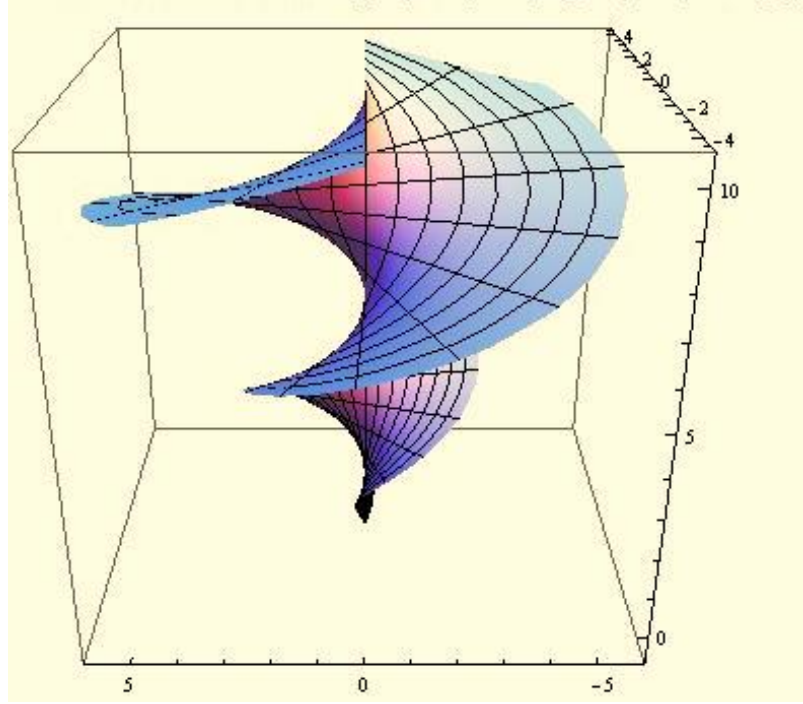
$m = 0$ yani $f(s) = a_0$ iken $H_1 = -h\lambda^3\lambda''a_0$ olur ve $H = 0$ olabilmesi için $\lambda(t) = b_0$ veya $\lambda(t) = b_0 + b_1t$ olmalıdır. Ancak $\lambda(t) \neq sbt$ olacağından $\lambda(t) = b_0$ alınamaz.

b) H sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu durumda (*) ifadesinden $4H^2|EG - F^2|^3 - H_1^2 = 0$ olur. Bu da " s " değişkenine bağlı bir polinomdur. Yine bu polinomun bir sıfır polinomu olabilmesi için tüm katsayılarının sıfır olması gerekir. $m \geq 2$ iken bu polinomun derecesi $6m - 6$ ve başkatsayısı $256H^2h^6\lambda^6m^6a_m^6 \neq 0$ dir.

$m = 1$ yani $f(s) = a_0 + a_1s$ iken polinomun başkatsayısı s^3 terimine aittir ve $256H^2h^3\lambda^9 \neq 0$ dir.

$m = 0$ yani $f(s) = a_0$ iken polinomun derecesi 3 ve başkatsayısı $256H^2h^3\lambda^9 \neq 0$ dir.

Örnek 4.2.1: Timelike eksen etrafında homotetik hareketle elde edilen, üret  eğrisi $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ ve $f(s) = 1$, $\lambda(t) = 1 + t$ olmak üzere $H = 0$ olan yüzey şekildeki gibidir.



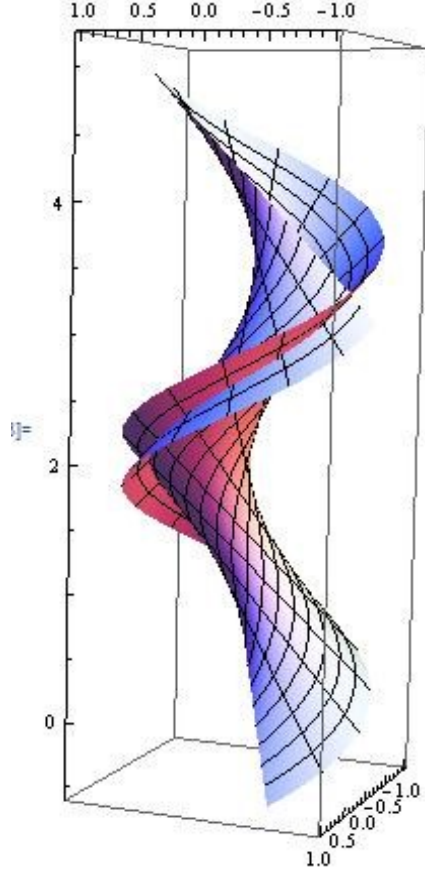
Şekil 4.1 $f(s) = 1$, $\lambda(t) = 1 + t$ ve $H = 0$ olan yüzey

Bu yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = (s(1 + t) \cos t, s(1 + t) \sin t, ht + 1 + t)$$

dir.

Örnek 4.2.2: Timelike eksen etrafında homotetik hareketle elde edilen,üreteç eğrisi $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ ve $f(s) = 1 - s$, $\lambda(t) = 2 + 3t$ olmak üzere $H = \frac{1}{|h + 3|}$ olan yüzey şekildeki gibidir.



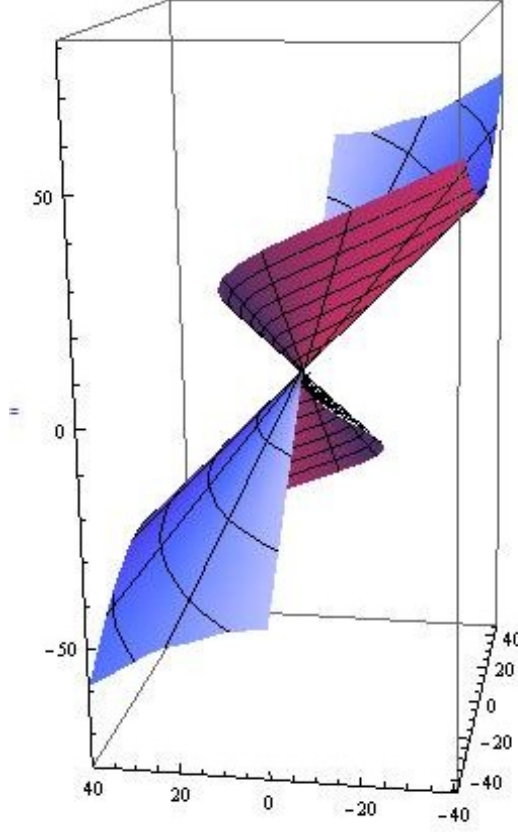
Şekil 4.2 $f(s) = 1 - s$, $\lambda(t) = 2 + 3t$ ve $H = \frac{1}{|h + 3|}$ olan yüzey

Bu yüzey

$$X(s, t) = (s(2 + 3t) \cos t, s(2 + 3t) \sin t, ht + (1 - s)(2 + 3t))$$

parametrizasyonuna sahiptir.

Örnek 4.2.3: Timelike eksen etrafında homotetik hareketle elde edilen, üreteç eğrisi $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ ve $f(s) = s$, $\lambda(t) = 1 + 2t + 3t^2$ olmak üzere $H = \frac{1}{|h|}$ olan yüzey şekildeki gibidir.



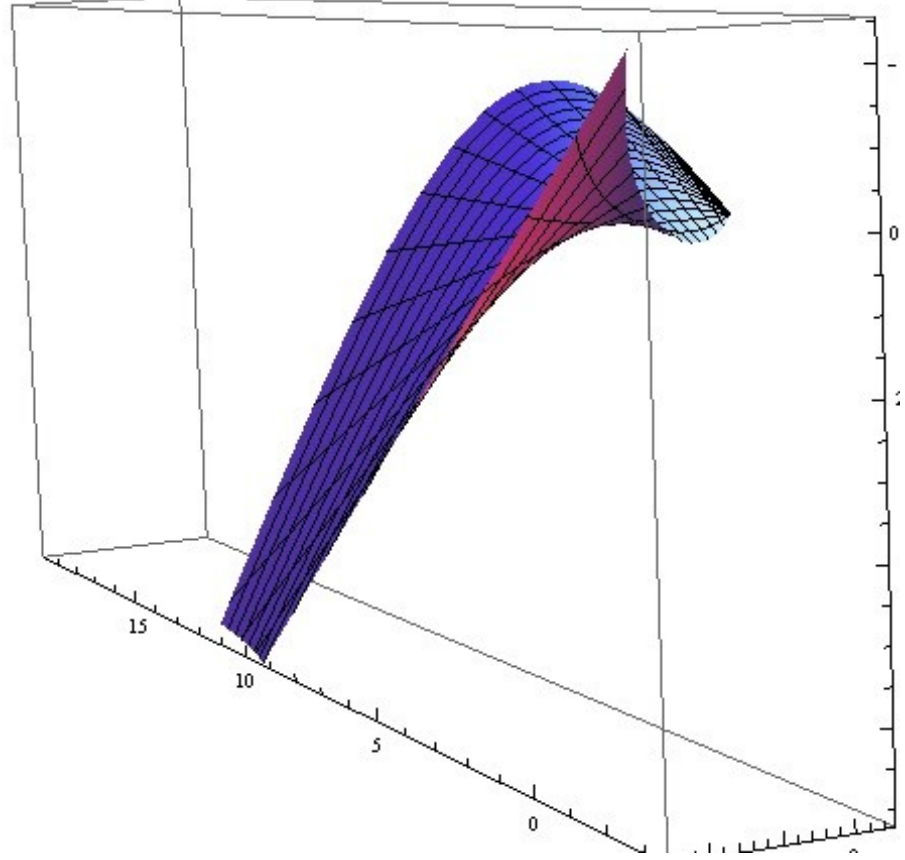
Şekil 4.3 $f(s) = s$, $\lambda(t) = 1 + 2t + 3t^2$ ve $H = \frac{1}{|h|}$ olan yüzey

Bu yüzey

$$X(s, t) = s(1 + 2t + 3t^2) \cos t, s(1 + 2t + 3t^2) \sin t, ht + s(1 + 2t + 3t^2)$$

şeklinde parametrize edilir.

Örnek 4.2.4: Spacelike eksen ile birlikte üreteç eğrisi $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$ olmak üzere $f(s) = 1$ ve $\lambda(t) = 1 + t$ iken elde edilen yüzey şekildeki gibidir. Bu yüzey için $H = 0$ dir.



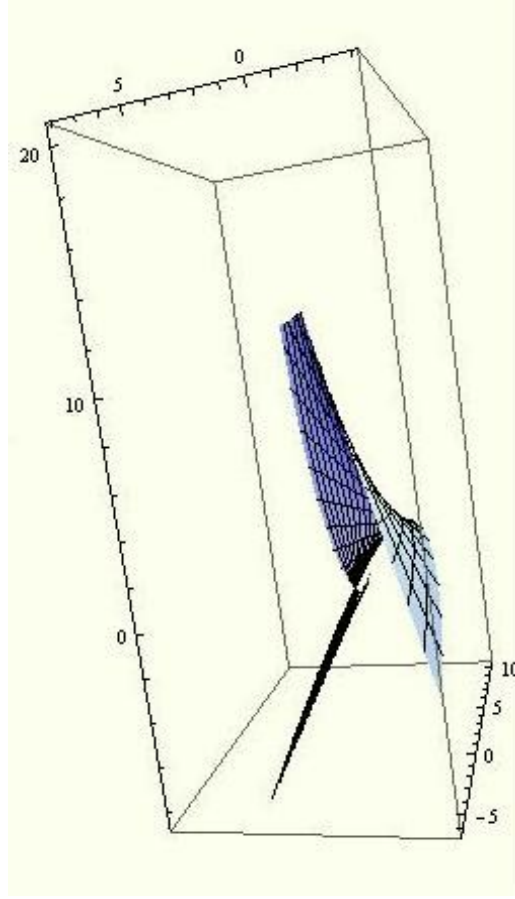
Şekil 4.4 $f(s) = 1$, $\lambda(t) = 1 + t$ ve $H = 0$ olan yüzey

Bu yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = (1 + t(1 + h), s(1 + t) \cosh t, s(1 + t) \sinh t)$$

dir.

Örnek 4.2.5: Lightlike eksen etrafındaki homotetik hareketle elde edilen,üreteç eğrisi $\gamma(s) = (f(s), s, f(s))$, $f(s) = 2$ ve $\lambda(t) = 1 + t$ iken elde edilen yüzey şekildeki gibidir. Bu yüzey için $H = 0$ dir.



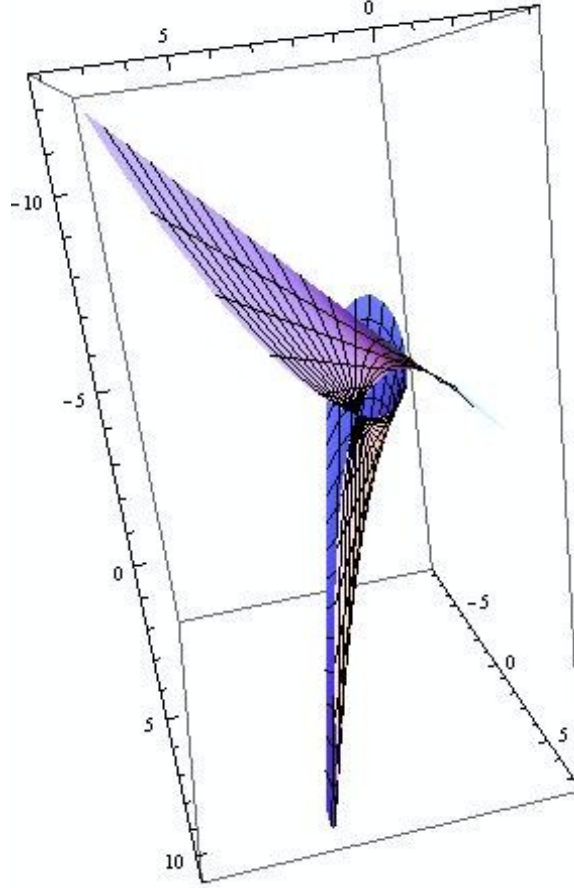
Şekil 4.5 $f(s) = 2$, $\lambda(t) = 1 + t$ ve $H = 0$ olan yüzey

Bu yüzey

$$X(s, t) = ((1 + t)(st + 2) + h(\frac{t^3}{3} - t), s(1 + t) + ht^2, (1 + t)(st + 2) + h(\frac{t^3}{3} + t))$$

ile parametrize edilir.

Örnek 4.2.6: Lightlike eksen etrafındaki homotetik hareketle elde edilen,üreteç eğrisi $\gamma(s) = (f(s), s, f(s))$, $f(s) = 1 + s$ ve $\lambda(t) = 1 + t - ht^2$ ile birlikte $H = 0$ olan yüzey şekilde verilmiştir.



Şekil 4.6 $f(s) = 1 + s$, $\lambda(t) = 1 + t - ht^2$ ile birlikte $H = 0$ olan yüzey

Bu yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = ((1 + t - ht^2)(st + 1 + s) + h(\frac{t^3}{3} - t), s(1 + t - ht^2) + ht^2, (1 + t - ht^2)(st + 1 + s) + h(\frac{t^3}{3} + t))$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.2: E_1^3 de homotetik hareket grupları altında üretilen ve üreteç eğrisi bir polinom olan sabit Gauss eğriliğine sahip yüzeyleri ele alınsın. Bu şekilde yüzeyler elde edilebilmesi için üreteç eğrisinde polinomun derecesi 1 veya 0 olmalıdır.

İspat: i) Hareketin ekseni timelike iken $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olarak alındığında bu üreteç eğriyle eksen etrafında homotetik hareket altında elde edilen yüzey

$$X(s, t) = (s\lambda(t) \cos t, s\lambda(t) \sin t, ht + \lambda(t)f(s))$$

idi. Bu yüzey için Gauss eğriliği

$$K = -[h + (f - sf')\lambda']^2 + s^2 f''[s\lambda^2 f' - 2\lambda'(h + (f - sf')\lambda') + (f - sf')\lambda\lambda''] / (s^2 \lambda^2 (-1 + f'^2) + (h + (f - sf')\lambda')^2)^2$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlik de kısaca $K = -\frac{K_1}{(EG - F^2)^2} (*)$ olarak yazılabilir.

a) $K = 0$ iken K_1 , değişkeni " s " olan bir polinomdur. $m \geq 2$ iken bu polinomun derecesi $2m$ dir ve başkatsayısı $m^2(m-1)a_m^2$ dir. Bu katsayı $m \geq 2$ iken sıfır olamaz. Dolayısıyla bir sıfır polinomu elde edilemez ve $K \neq 0$ olur. $m \leq 1$ iken $K_1 = -[h + a_0\lambda']^2$ olur. $\lambda(t) = b_0 - \frac{h}{a_0}t$ ile birlikte $K_1 = 0 \implies K = 0$ olur. Ancak $f(s) = a_0 + a_1s$ olarak seçildiğinde $a_1 = \pm 1$ olması durumunda $W = EG - F^2 = 0$ olacağından $a_1 \neq \pm 1$ olarak alınmalıdır.

b) K sıfırdan farklı bir sabit olsun. $(*)$ ifadesinden $K(EG - F^2)^2 + K_1 = 0$ elde edilir ki bu da değişkeni " s " olan bir polinomdur. $m \geq 2$ iken bu polinomun başkatsayısı s^{4m} terimine aittir ve bu katsayı $K(\lambda^2 m^2 + \lambda'^2(1+m)^2)a_m^4 \neq 0$ dir. $m = 1$ yani $f(s) = a_0 + a_1s$ iken $K(EG - F^2)^2 + K_1 = 0$ polinomunun derecesi 4 ve başkatsayısı $K\lambda^2(a_1^2 - 1)^2$ dir. Bu katsayı ancak $a_1 = \pm 1$ iken sıfır olabilir ve $\lambda(t) = b_0 + b_1t$ olarak seçildiğinde $K = \frac{1}{(h + a_0\lambda')^2}$ elde edilir. $m = 0$ yani $f(s) = a_0$ iken $K(EG - F^2)^2 + K_1 = 0$ polinomunun başkatsayısı s^4 e aittir ve başkatsayı $K\lambda^4 \neq 0$ dir.

Sonuç olarak timelike eksen etrafındaki homotetik hareketle elde edilen yüzey için $K = 0$ olabilmesi $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n, m \leq 1$ ve $\lambda(t) = b_0 - \frac{h}{a_0}t$ iken mümkündür.

K nın sıfırdan farklı bir sabit olabilmesi içinse $f(s) = a_0 \pm s$ ve $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ olmalıdır ve bu durumda $K = \frac{1}{(h + a_0 \lambda')^2}$ elde edilir.

ii) Homotetik hareketin ekseni spacelike iken $\gamma(s) = (f(s), s, 0), f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n, a_n \in \mathbb{R}$ olarak alındığında bu eğrinin homotetik hareket altındaki yörüngesi olan yüzey

$$X(s, t) = (ht + \lambda(t)f(s), s\lambda(t) \cosh t, s\lambda(t) \sinh t)$$

idi. Bu yüzey için

$$K = \frac{(h + (f - sf')\lambda')^2 + s^2 f''(s\lambda^2 f' + 2\lambda'(h + (f - sf')\lambda') - (f - sf')\lambda\lambda'')}{(-s^2 \lambda^2 (1 + f'^2) + (h + (f - sf')\lambda')^2)^2}$$

dir. Bu ifade kısaca $K = -\frac{K_1}{(EG - F^2)^2}^{(*)}$ olarak yazılabilir.

a) $K = 0$ iken K_1 , değişkeni " s " olan bir polinomdur. $m \geq 2$ iken K_1 polinomunun başkatsayısı s^{2m} terimine aittir ve bu katsayı $(m-1)^2 a_m^2 \lambda'^2 (1-2m) + m^2 (m-1) a_m^2 \lambda^2$ olarak hesaplanır. Bu durumda başkatsayı sıfır olamaz. $m \leq 1$ iken $f(s) = a_0$ veya $f(s) = a_0 + a_1 s$ olmak üzere $K_1 = (h + a_0 \lambda')^2 - a_0 \lambda \lambda''$ olur. $\lambda(t) = b_0 - \frac{h}{a_0}t$ ile birlikte $K_1 = 0$ ve dolayısıyla $K = 0$ elde edilir.

b) K sıfırdan farklı bir sabit olsun. $(*)$ ifadesinden $K(EG - F^2)^2 + K_1 = 0$ elde edilir ki bu da değişkeni " s " olan bir polinomdur. $m \geq 2$ iken bu polinomun başkatsayısı s^{4m} terimine aittir ve bu katsayı $K(-m^2 \lambda^2 + (1-m)^2 \lambda'^2)^2 a_m^4$ dir ve sıfır olamaz. $m \leq 1$ iken $f(s) = a_0$ veya $f(s) = a_0 + a_1 s$ olmak üzere $K(EG - F^2)^2 + K_1 = 0$ polinomunun derecesi 4 ve başkatsayısı $K\lambda^4(1 + a_1^2)^2$ dir. Bu katsayı sıfır olamaz.

iii) Hareketin ekseni lightlike iken $\gamma(s) = (f(s), s, f(s)), f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu üreteç eğriyle eksen etrafında homotetik hareket altında elde edilen

yüzey

$$X(s, t) = (\lambda(t)(ts + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} - t), s\lambda(t) + ht^2, \lambda(t)(ts + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} + t))$$

idi. Bu yüzey için Gauss eğriliği

$$K = -\frac{-\lambda + f''(2s\lambda' + f\lambda'' - f'(2h + s\lambda''))}{4\lambda(s\lambda + hf'^2 + (f - sf')\lambda')^2}$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlik de kısaca $K = -\frac{K_1}{(EG - F^2)^2}^{(*)}$ olarak yazılabilir.

a) $K = 0$ iken K_1 , değişkeni " s " olan bir polinomdur. $m \geq 2$ iken

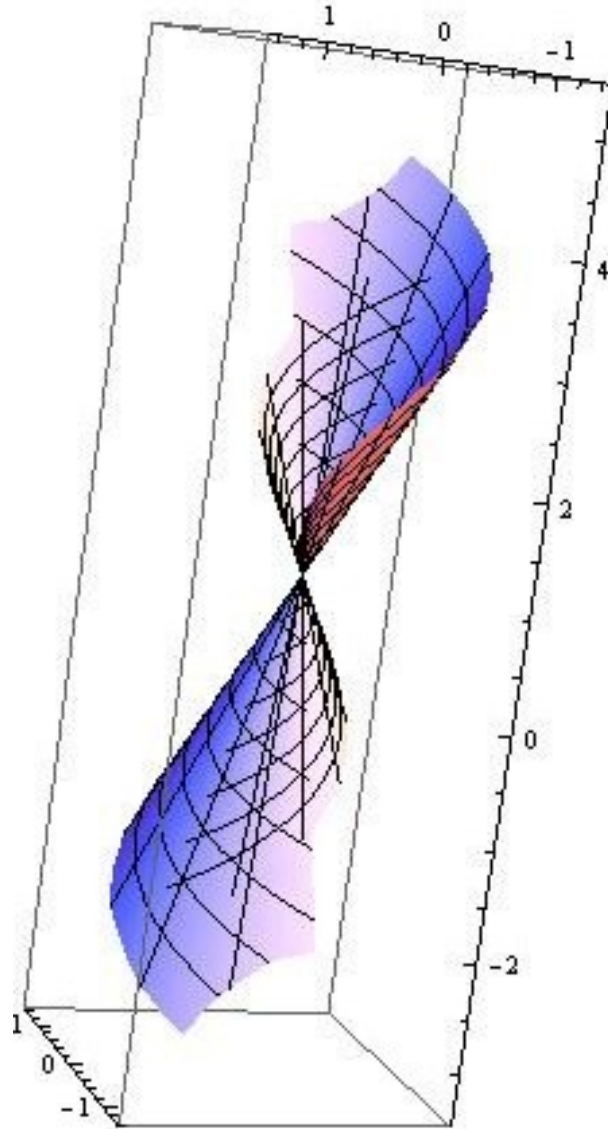
$K_1 = -\lambda + 2m(m-1)a_m\lambda's^{m-1} - (m-1)^2ma_m^2\lambda''s^{2m-2} - 2hm^2(m-1)a_m^2s^{2m-3}$ olur. Burada K_1 sıfır olamaz. O halde $m \geq 2$ iken $K \neq 0$ olur. $m \leq 1$ iken $K_1 = -\lambda \neq 0$ ve dolayısıyla $K \neq 0$ dir.

b) K sıfırdan farklı bir sabit olsun. $(*)$ ifadesinden $K(EG - F^2)^2 + K_1 = 0$ elde edilir ki bu da değişkeni " s " olan bir polinomdur. $m \geq 2$ iken bu polinomun başkatsayısı s^{4m-4} terimine aittir ve $4\lambda h^2 m^2 a_m^2$ dir. Bu katsayı sıfır olamaz. $m = 1$ yani $f(s) = a_0 + a_1s$ iken $4K(s\lambda + h + a_1^2 + a_0\lambda')^2 + 1 = 0$ elde edilir ki bu durumda $K(EG - F^2)^2 + K_1 \neq 0$ ve buradan da $K \neq sbt$ olur. $m = 0$ yani $f(s) = a_0$ iken $K(EG - F^2)^2 + K_1 = 0$ polinomunun derecesi 2 ve başkatsayısı $4K\lambda^3 \neq 0$ olur ve bu durumda istenen sıfır polinomu elde edilemez.

Sonuç olarak lightlike eksen etrafındaki homotetik hareketle elde edilen yüzeyler için $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$ iken $K \neq 0$ ve $K \neq sbt$ olur.

Sonuç 4.2.1: Bir polinom eğrisinin homotetik hareket grubu altında yörüngesi olan yüzeyler sabit ortalama eğriliğe veya sabit Gauss eğriliğine sahip ise bu yüzeyler regle yüzeylerdir.

Örnek 4.2.7: Timelike eksen etrafında homotetik hareketle elde edilen, üretç eğrisi $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ olmak üzere $f(s) = 1 + 2s$ ve $\lambda(t) = 1 - ht$ olan yüzey şekildeki gibidir. Bu yüzey için $K = 0$ dir.

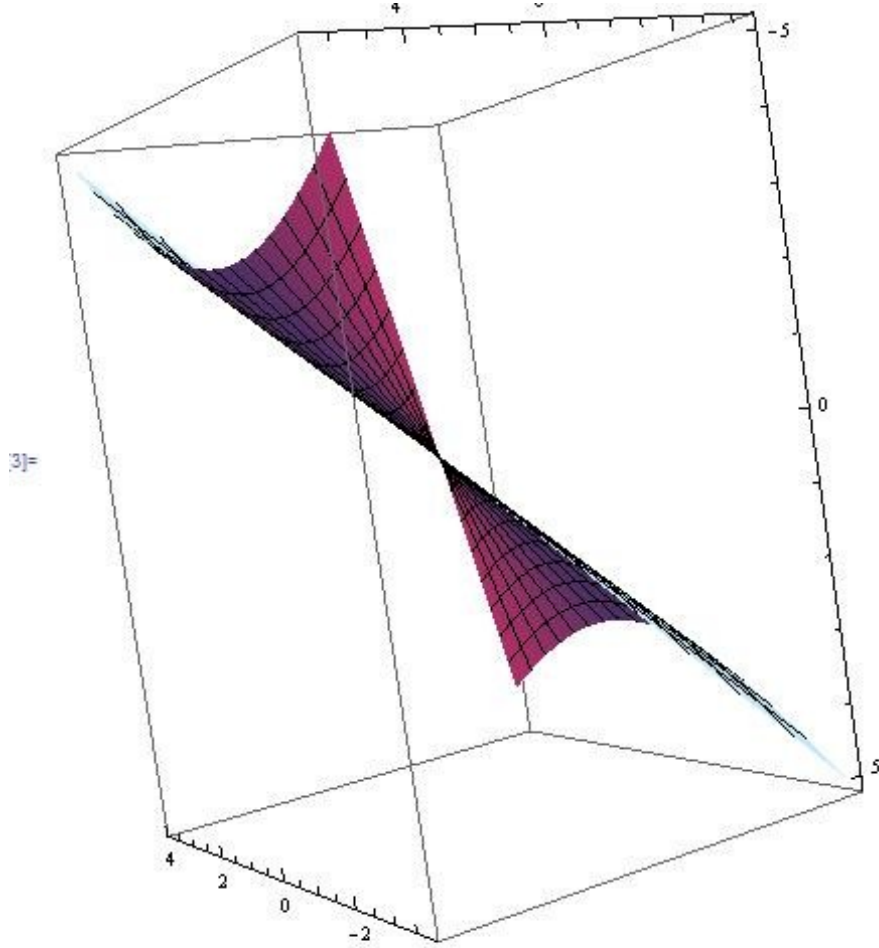


Şekil 4.7 $f(s) = 1 + 2s$, $\lambda(t) = 1 - ht$ ile birlikte $K = 0$ olan yüzey

Bu yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = (s(1 - ht) \cos t, s(1 - ht) \sin t, ht + (1 + 2s)(1 - ht))$$

Örnek 4.2.8: Spacelike eksen ile birlikte üreteç eğrisi $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$ olmak üzere $f(s) = 2 + s$ ve $\lambda(t) = 3 - \frac{h}{2}t$ iken elde edilen yüzey şekildeki gibidir. Bu yüzey için $K = 0$ dir.



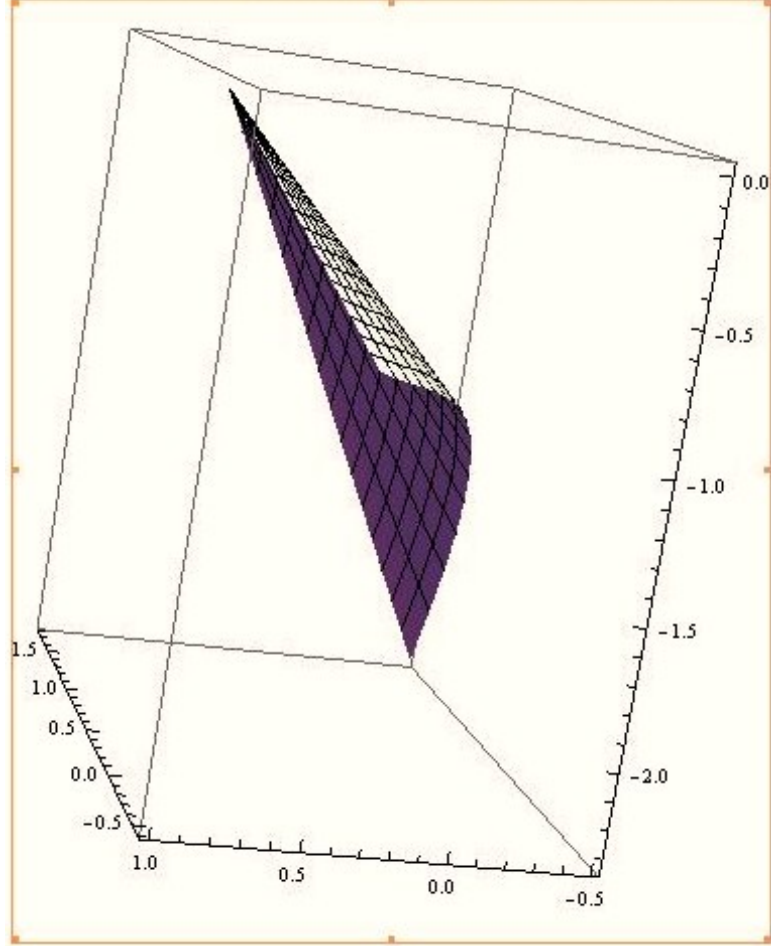
Şekil 4.8 $f(s) = 2 + s$, $\lambda(t) = 3 - \frac{h}{2}t$ ile birlikte $K = 0$ olan yüzey

Bu yüzey

$$X(s, t) = (ht + (3 - \frac{h}{2}t)(2 + s), s(3 - \frac{h}{2}t) \cosh t, s(3 - \frac{h}{2}t) \sinh t)$$

parametrizasyonuna sahiptir.

Örnek 4.2.9: Spacelike eksen ile birlikte üreteç eğrisi $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$ olmak üzere $f(s) = 1 + s$ ve $\lambda(t) = 1 - ht$ seçildiğinde elde edilen yüzey şekildeki gibidir. Bu yüzey için $K = 0$ dir.



Şekil 4.9 $f(s) = 1 + s$, $\lambda(t) = 1 - ht$ ve $K = 0$ olan yüzey

Bu yüzey

$$X(s, t) = (1 + s(1 - ht), s(1 - ht) \cosh t, s(1 - ht) \sinh t)$$

parametrizasyonuna sahiptir.

Teorem 4.2.3: E_1^3 de bir Lorentz çemberinin homotetik hareket altında taradığı yüzeyler için ortalama eğrilik sıfır veya sıfırdan farklı bir sabit olamaz. Özel olarak $\lambda(t) = \text{sabit}$ seçilmesi durumunda elde edilen hareket grupları için timelike ve space-like eksen etrafında Lorentz çemberinin taradığı helikoidal yüzeylerin ortalama eğriligi sıfırdan farklı bir sabit olabilir.

İspat: i) Eksen $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ timelike iken türeteç eğrisi $\gamma(s) = (x(s), 0, z(s))$ olmak üzere γ eğrisi için $x^2 - z^2 = \pm r^2$ olmalıdır. Diğer durum benzer olacağından $x^2 - z^2 = r^2$ olarak alalım. Bu durumda $\gamma(s) = (r \cosh s, 0, r \sinh s)$ olacaktır. γ eğrisi merkezi orijin, yarıçapı $r > 0$ olan bir Lorentz çemberidir. γ eğrisi, üzerinde bulunduğu düzlemde ötelenir ve döndürülürse bu düzlemde başka Lorentz çemberleri elde edilir. O halde $y = 0$ düzleminde Lorentz çemberleri genel olarak

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cosh s \\ 0 \\ r \sinh s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = (a + r \cosh(s + \theta), 0, b + r \sinh(s + \theta))$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\theta, a, b \in \mathbb{R}$ dir. (3.1) ile verilen homotetik hareket altında $\gamma(s)$ nin taradığı yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = (\lambda(t) \cos t(a + r \cosh(s + \theta)), \lambda(t) \sin t(a + r \cosh(s + \theta)), \lambda(t)(b + r \sinh(s + \theta)) + ht)$$

şeklindedir. Bu yüzey için ortalama eğrilik

$$\begin{aligned} H = & -(4r \sinh(s + \theta)(h \cosh(s + \theta) + \lambda'(b \cosh(s + \theta) - a \sinh(s + \theta)))(-h \sinh(s + \theta) \\ & + \lambda'(r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))) - 2(a + r \cosh(s + \theta)) \\ & (-h^2 + (a + r \cosh(s + \theta))^2 \lambda^2 - 2h(b + r \sinh(s + \theta))\lambda' + (a^2 - b^2 + r^2 \\ & + 2ar \cosh(s + \theta) - 2br \sinh(s + \theta))\lambda'^2) - r(a + r \cosh(s + \theta))(2 \cosh(s + \theta) \\ & (a + r \cosh(s + \theta))\lambda^2 + 4\lambda'(-h \sinh(s + \theta) + (r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda' \\ & - 2(r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda\lambda'')) / (4r(-(a + r \cosh(s + \theta))^2 \lambda^2 - (h \sinh(s + \theta) - (r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda')^2))^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

a) $H = 0$ olabilmesi ancak $a = -r$, $\cosh(s + \theta) = 1$, $\sinh(s + \theta) = 0$ ve $\lambda(t) = -\frac{h}{b}t + c$ seçilmesi ile mümkündür. Ancak bu durumda da $W = EG - F^2 = 0$ olur.

Bununla birlikte $\lambda(t) = 1$ olduğu durumda yani helikoidal hareket ile taranan yüzey için H nın pay kısmı $\sum_{n=0}^3 A_n \cosh(n(s + \theta))$ olarak elde edilir. Bu ifadenin sıfır olabilmesi için bütün A_n katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda başkatsayı $A_3 = \frac{r^3(h^2 + r^2)}{2}$ dir ve bu katsayı sıfır olamaz. O halde helikoidal hareket için $H \neq 0$ dir.

b) H sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu durumda (4.14) ifadesinden $4H^2W^3 - H_1^2 = 0$ elde edilir. Burada özel olarak $a = 0$, $b = 0$, $\lambda(t) = \frac{h}{2r}$ ve $\sinh[s + \theta] = 0$ seçilirse $H = \frac{2}{h}$ olacaktır. Ancak homotetik hareket durumunda $\lambda(t) \neq \text{sabit}$ dir.

ii) Eksen $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ spacelike eksen iken üreteç eğri $y^2 - z^2 = \pm r^2$ parametrisasyonuna sahiptir. Diğer durum benzer olacağından $y^2 - z^2 = r^2$ olarak alınırsa $\gamma(s) = (0, r \cosh s, r \sinh s)$ olmak üzere timelike eksen durumuna benzer olarak bir dönme ve ötelemeden sonra

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r \cosh s \\ r \sinh s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \\ &= (0, a + r \cosh(s + \theta), b + r \sinh(s + \theta)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eğrinin (3.2) ile verilen homotetik hareket grubu altında taradığı yüzeyin parametrisasyonu

$$\begin{aligned} X(s, t) &= ht, \lambda(t) \cosh(t)(a + r \cosh(s + \theta)) + \lambda(t) \sinh(t)(b + r \sinh(s + \theta)), \\ &\lambda(t) \sinh(t)(a + r \cosh(s + \theta)) + \lambda(t) \cosh(t)(b + r \sinh(s + \theta)) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu yüzey için

$$\begin{aligned}
H = & (h(h^2 + (-a^2 + b^2 - ar \cosh(s + \theta) + br \sinh(s + \theta))\lambda^2 + (a^2 - b^2 + r^2 \\
& + 2ar \cosh(s + \theta) - 2br \sinh(s + \theta))\lambda'^2 - r(r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta)) \\
& \lambda\lambda''))/2r\lambda(-\epsilon(-h^2 - ((b \cosh(s + \theta) - a \sinh(s + \theta))\lambda + (r + a \cosh(s + \theta) \\
& - b \sinh(s + \theta))\lambda'^2))^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

a) $H = 0$ ise $H_1 = (h(h^2 + (-a^2 + b^2 - ar \cosh(s + \theta) + br \sinh(s + \theta))\lambda^2 + (a^2 - b^2 + r^2 + 2ar \cosh(s + \theta) - 2br \sinh(s + \theta))\lambda'^2 - r(r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda\lambda'')) = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\cosh(s + \theta)$ ve $\sinh(s + \theta)$ lineer bağımsız olduklarından $a = 0$ ve $b = 0$ seçilirse $H_1 = h(h^2 + r^2\lambda'^2 - r^2\lambda\lambda'')$ olarak elde edilir ki bu ifadenin sıfır olması için λ doğrusal olmalıdır. Ancak bu seçimle de $W = EG - F^2 = 0$ olacağından H_1 sıfır olamaz. O halde $H \neq 0$ dir.

b) H sıfırdan farklı bir sabit olması için. $a = 0$ ve $b = 0$ seçilirse

$$H = \frac{h(h^2 + r^2\lambda'^2 - r^2\lambda\lambda'')}{2r\lambda(-\epsilon(-h^2 - r^2\lambda'^2))^{\frac{3}{2}}}$$

olacaktır. O halde H sıfırdan farklı bir sabit ise

$$4H^2r^2\lambda^2(-\epsilon(-h^2 - r^2\lambda'^2))^3 - h^2(h^2 + r^2\lambda'^2 - r^2\lambda\lambda'')^2 = 0$$

olarak hesaplanır. Bu ifadenin sıfır olması ancak $\lambda(t) = b_0$ şeklinde sabit ise mümkündür. Bu durumda $H = \frac{1}{2rb_0}$ olur. Ancak homotetik hareket durumunda $\lambda(t) \neq \text{sabit}$ dir.

iii) Eksen $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ lightlike eksen olsun. Üreteç eğri $x - z = 0$ düzlemindedir ve bu düzlemdeki Lorentz çemberi $\gamma(s) = (\frac{cs^2}{2}, cs, \frac{cs^2}{2}), c \neq 0$ çemberinin katı

hareketiyle elde edilebilir. O halde

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & 1 & \theta \\ -\frac{\theta^2}{2} & t & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{cs^2}{2} \\ cs \\ \frac{cs^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

ile verilen Lorentz çemberinin lightlike eksen etrafında homotetik hareketle taradığı yüzeyin parametrizasyonu

$$\begin{aligned} X(s, t) = & (\lambda(\frac{cs^2}{2} + cs\theta + bt + cst + a) + h(\frac{t^3}{3} - t), \lambda(cs + b) + ht^2, \lambda(\frac{cs^2}{2} + cs\theta \\ & + bt + cst + a) + h(\frac{t^3}{3} + t)) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu yüzey için

$$\begin{aligned} H = & c^2 h \lambda^2 (4h\lambda'(2a + cs(s + 2\theta)) - 2\lambda'^2(b + cs)^2 + \lambda(4h(2b + c(s - \theta)) \\ & + c\lambda''(-2a + cs^2 + 2b(s + \theta)))) / 4\sqrt{2}(-\epsilon(-c^2 h \lambda^2(2h(s + \theta)^2 \\ & + 2\lambda(b + cs) + \lambda'(2a - cs^2 - 2b(s + \theta))))^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

a) $H = 0$ olması için $H_1 = c^2 h \lambda^2 (4h\lambda'(2a + cs(s + 2\theta)) - 2\lambda'^2(b + cs)^2 + \lambda(4h(2b + c(s - \theta)) + c\lambda''(-2a + cs^2 + 2b(s + \theta)))) = 0$ olmalıdır. Ancak bu ifade sıfır olamaz. O halde $H \neq 0$ dir.

b) $H \neq 0$ olacak şekilde bir sabit olsun Özel olarak $a = 0$ ve $b = 0$ seçilirse $4H^2W^3 - H_1^2 = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} & 32c^2 h \lambda^2 H^2 (-\epsilon(2h(s + \theta)^2 + 2\lambda cs - \lambda' cs^2)^3 - (4chs\lambda'(s + 2\theta) - 2c^2 s^2 \lambda'^2 \\ & + \lambda(4ch(s - \theta) + c^2 s^2 \lambda''))^2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da s ye bağlı bir polinomdur ve bu polinomun başkatsayısı s^6 terimine aittir ve $256c^2 h^4 \lambda^2 H^2$ dir. Bu katsayı sıfır olamaz. O halde H sıfırdan farklı bir

sabit olamaz.

Teorem 4.2.4: E_1^3 de bir Lorentz çemberinin homotetik hareket altında taradığı yüzeyler için Gauss eğriliğinin sıfır olması ancak hareketin eksenini spacelike iken mümkündür. Bunun dışında, bir çemberin homotetik hareket altında taradığı yüzeyin Gauss eğriliği sıfır veya sıfırdan farklı bir sabit olamaz.

İspat: i) Eksen $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ timelike iken

$$\gamma(s) = (a + r \cosh(s + \theta), 0, b + r \sinh(s + \theta))$$

çemberinin taradığı yüzey

$$X(s, t) = (\lambda(t) \cos t(a + r \cosh(s + \theta)), \lambda(t) \sin t(a + r \cosh(s + \theta)), \lambda(t)(b + r \sinh(s + \theta)) + ht)$$

idi. Bu yüzey için

$$\begin{aligned} K = & 2r \sinh^2(s + \theta)(h \sinh(s + \theta) - (r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda')^2 \\ & + (a + r \cosh(s + \theta))^2(2 \cosh(s + \theta)(a + r \cosh(s + \theta))\lambda^2 + 4\lambda'(-h \sinh(s + \theta) \\ & + (r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda') - 2(r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta)) \\ & \lambda\lambda'') / 2r((a + r \cosh(s + \theta))^2\lambda^2 + (h \sinh(s + \theta) - (r + a \cosh(s + \theta) - \\ & b \sinh(s + \theta))\lambda')^2)^2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

a) $K = 0$ olabilmesi için (4.15) ifadesinden $K_1 = 0$ olmalıdır. $\cosh$ ve $\sinh$ fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından $a = 0$ ve $b = 0$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} K_1 = & 2r \sinh^2(s + \theta)(h \sinh(s + \theta) - r\lambda')^2 + r^2 \cosh^2(s + \theta)(2r\lambda^2 \cosh^2(s + \theta) \\ & + 4\lambda'(-h \sinh(s + \theta) + r\lambda') - 2r\lambda\lambda'') \end{aligned}$$

olur. Ancak bu durumda $K_1 = 0$ olamaz. O halde $K \neq 0$ dir.

b) K sıfırdan farklı bir sabit ise (4.15) ifadesinden $KW^2 + K_1 = 0$ olmalıdır. Bu eşitlik ise ancak $\lambda(t) = b_0(sabit)$ ve $\sinh(s + \theta) = 0$ olması ile mümkündür. Bu durumda $K = \frac{1}{r^2 b_0^2}$ olur. Ancak homotetik hareket için $\lambda(t) \neq sabit$ olarak alınmıştır.

ii) Eksen $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ spacelike eksen iken üreteç eğri

$$\gamma(s) = (0, a + r \cosh(s + \theta), b + r \sinh(s + \theta))$$

ve bu eğriyle homotetik hareket altında elde edilen yüzey

$$\begin{aligned} X(s, t) = & \quad ht, \lambda(t) \cosh(t)(a + r \cosh(s + \theta)) + \lambda(t) \sinh(t)(b + r \sinh(s + \theta)), \\ & \lambda(t) \sinh(t)(a + r \cosh(s + \theta)) + \lambda(t) \cosh(t)(b + r \sinh(s + \theta)) \end{aligned}$$

idi. Bu yüzey için

$$\begin{aligned} K = & \quad -(h^2((a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda + 2(b \cosh(s + \theta) - a \sinh(s + \theta))\lambda' \\ & + (r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda'')) / r \lambda (h^2 + ((b \cosh(s + \theta) \\ & - a \sinh(s + \theta))\lambda + (r + a \cosh(s + \theta) - b \sinh(s + \theta))\lambda')^2)^2 \end{aligned}$$

dir.

a) Timelike eksen ile benzer şekilde $\cosh$ ve $\sinh$ fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından $a = 0$ ve $b = 0$ olarak alınır

$$K = \frac{h^2 \lambda''}{\lambda (h^2 + r^2 \lambda'^2)^2}$$

olarak hesaplanır. O halde $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ seçilirse $K = 0$ elde edilir.

b) K sıfırdan farklı bir sabit ise (4.15) ifadesinden $KW^2 + K_1 = 0$ olmalıdır. Bunun için özel olarak $\lambda(t) = b_0(sabit)$ ve $\sinh(s + \theta) = 0$ seçilmelidir. Bu şekilde elde edilen yüzey için $K = \frac{h^2 a}{r(h^2 + b_0^2 b^2)^2}$ olur. Ancak yine homotetik hareket için $\lambda(t) \neq sabit$

olacağından bir çemberin homotetik hareket altında taradığı yüzey için Gauss eğriliği sıfırdan farklı bir sabit olamaz.

iii) Eksen $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ lightlike eksen olsun. Bir Lorentz çemberinin homotetik hareket altında taradığı yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = (\lambda(\frac{cs^2}{2} + cs\theta + bt + cst + a) + h(\frac{t^3}{3} - t), \lambda(cs + b) + ht^2, \lambda(\frac{cs^2}{2} + cs\theta + bt + cst + a) + h(\frac{t^3}{3} + t))$$

idi. Bu yüzey için

$$K = \frac{4h(s + \theta) + 2c\lambda - 4(b + cs)\lambda' + (-2a + cs^2 + 2b(s + \theta))\lambda''}{2c\lambda(2h(s + \theta)^2 + 2(b + cs)\lambda + (2a - cs^2 - 2b(s + \theta))\lambda')^2}$$

olarak hesaplanır.

a) $K = 0$ olabilmesi için $K_1 = 0$ olmalıdır. Ancak $c \neq 0$ olduğundan $K_1 \neq 0$ ve $K \neq 0$ dir.

b) K sıfırdan farklı bir sabit ise $KW^2 + K_1 = 0$ olmalıdır. Bu da s parametresine bağlı bir polinomdur ve bu polinomun bir sıfır polinomu olabilmesi için tüm katsayıları sıfır olmalıdır. Bu polinomun başkatsayısı s^4 terimine aittir ve bu katsayı $2c\lambda K (2h - c\lambda')^2$ dir. Bu katsayının sıfır olabilmesi için $\lambda'(t) = \frac{2h}{c}$ ve $\lambda(t) = b_0 + \frac{2h}{c}t$ olmalıdır. Ancak Bu durumda da diğer katsayılar sıfır olamayacağından $KW^2 + K_1 \neq 0$ ve $K \neq \text{sabit}$ elde edilir.

4.3 E_1^3 de Bir Polinom Eğrisinin Homotetik Hareket Altındaki

Yörüngesi Olan Yüzeyler için Umbilik Olma ve $H^2 - K = 0$

Arasındaki İlişki

Öklid uzayı ve Lorentz uzayı arasında Weingarten dönüşümünün köşegenleştirilebilmesi konusunda farklılıklar vardır. E^3 de Weingarten endomorfizminin matrisi köşegenleştirilebilir. E_1^3 de ise Weingarten dönüşümü self-adjoint olmasına rağmen köşegenleştirilebilir.

lemeyebilir. Bunun sebebi yüzey üzerindeki metriğin Lorentz metriği olmasıdır. M, E_1^3 ün bir non-dejenere yüzeyi ve $P \in M$ olmak üzere eğer P noktasında bu yüzeyin Weingarten dönüşümü A_p köşegenleştirilebilir ise $H^2(P) - K(P) \geq 0$ dır ve P nin umbilik nokta olması durumunda $H^2(P) - K(P) = 0$ olur. Öklid uzayında olduğu gibi E_1^3 de tüm noktaları umbilik olan spacelike ya da timelike yüzeylere umbilik yüzeyler denir. Özel olarak bu yüzeyler için yüzeyin her noktasında Weingarten dönüşümü köşegenleştirilebilirdir. Bununla birlikte Lorentz uzayında $H^2 - K = 0$ şartını sağlayan ancak Weingarten dönüşümü köşegenleştirilemeyen yüzeyler de vardır. Örneğin parametrizasyonu $X(s, t) = (s \cos t, s \sin t, s + ht + a_0)$ olan yüzey için $|H| = \frac{1}{h}$ ve $K = \frac{1}{h^2}$ dir. Bu yüzeyin Weingarten dönüşümünün matrisi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ -1 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

dir ve bu matris köşegenleştirilemez.

Tanım 4.3.1: Bir $p \in M$ noktası ve $x : M \longrightarrow E_1^3$ nondejenere immersiyonu için eğer A_p endomorfizmi köşegenleştirilebilir ise A_p nin eigen değerlerine p noktasındaki esas eğrilikler denir ve $\lambda_1(p)$ ve $\lambda_2(p)$ ile gösterilir.

Eğer immersiyon spacelike ise (4.3) den A_p , M üzerindeki metriğe göre self-adjointtir ve metrik pozitif tanımlı olduğundan A_p köşegenleştirilebilirdir.

Önerme 4.3.1: A_p , E_1^3 ün non-dejenere bir yüzeyinde köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği sırasıyla

$$H(p) = \epsilon \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2}$$

ve

$$K(p) = \epsilon \lambda_1(p) \lambda_2(p)$$

olarak tanımlıdır.

Tanım 4.3.2: Eğer bir $p \in M$ noktasında ikinci esas form metrik ile orantılıysa, yani

$$\sigma_p(u, v) = \lambda(p) \langle u, v \rangle$$

ise p noktası umbilik noktadır. Eğer her $p \in M$ için bu şart sağlanıyorsa bu durumda M umbilik yüzeydir. Özel olarak umbilik bir noktada Weingarten dönüşümünün matrisi köşegenleştirilebilir ve $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$ dir.

Bilindiği gibi 3 boyutlu Öklid uzayında umbilik yüzeyler, düzlemler ve kürelerdir. E_1^3 için de benzer bir durum geçerlidir.

Teorem 4.3.1: E_1^3 de timelike bir M yüzeyi umbilik yüzey olsun. Bu durumda M , düzlem veya tek kanatlı hiperboloid (Lorentz küresi) dir.

Örnek 4.3.1: Spacelike ya da timelike düzlemler umbilik yüzeylerdir. Bu yüzeyler için her p noktasında $A_p = 0$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dir.

Örnek 4.3.2: Yarıçapı r , merkezi p_0 olan hiperbolik yüzey $H^2(r, p_0)$ olmak üzere bu yüzey için $A_p = -\frac{1}{r}I_2$ dir. Buradan $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{r}$ olur.

Örnek 4.3.3: Benzer şekilde pseudo-küre $S_1^2(r, p_0)$ için $A_p = -\frac{1}{r}I_2$ dir. Buradan $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{r}$ olur.

Önerme 4.3.2: M , E_1^3 te non-dejenere bir yüzey ve $p \in M$ olmak üzere A_p köşegenleştirilebilir ise

$$H(p)^2 - \epsilon K(p) \geq 0 \quad (4.16)$$

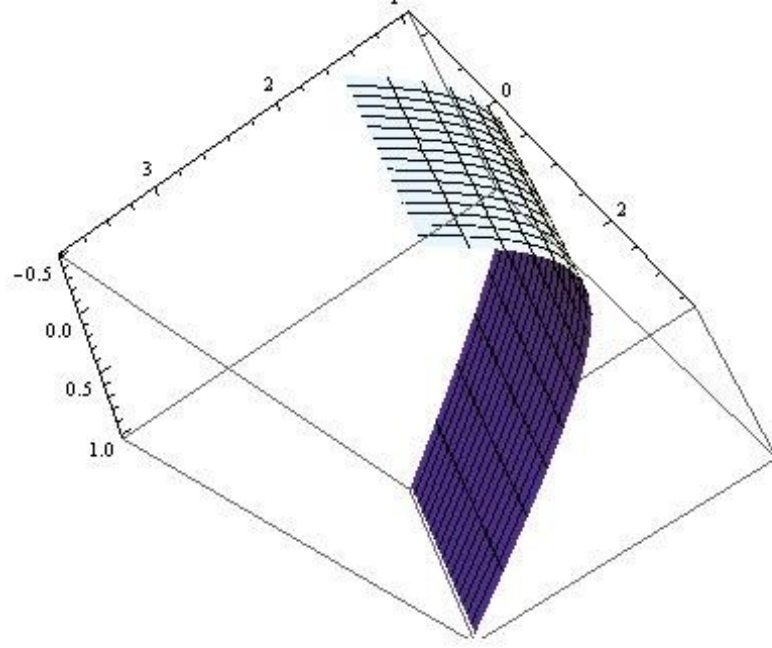
dır. Eğer yüzey umbilik bir yüzey ise $H(p)^2 - \epsilon K(p) = 0$ olur.

İspat: Önerme 4.3.1 den

$$0 \leq \left(\epsilon \frac{\lambda_1(p) - \lambda_2(p)}{2} \right)^2 = \left(\epsilon \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2} \right)^2 - \lambda_1(p)\lambda_2(p) = H^2(p) - \epsilon K(p)$$

olur. $H^2(p) - \epsilon K(p) = 0$ olması için $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$, yani p noktası umbilik olmalıdır.

Örnek 4.3.4: $y^2 - z^2 = 1$ olan yüzey spacelike bir yüzeydir. $X(s, t) = (ht, \sinh s, \cosh s)$ parametrizasyonu ile verilen yüzey



Şekil 4.10 Lorentz silindiri

şeklindedir ve bu yüzey için $\{X_s, X_t\}$ bazına bağlı olarak Weingarten dönüşümünün matrisi

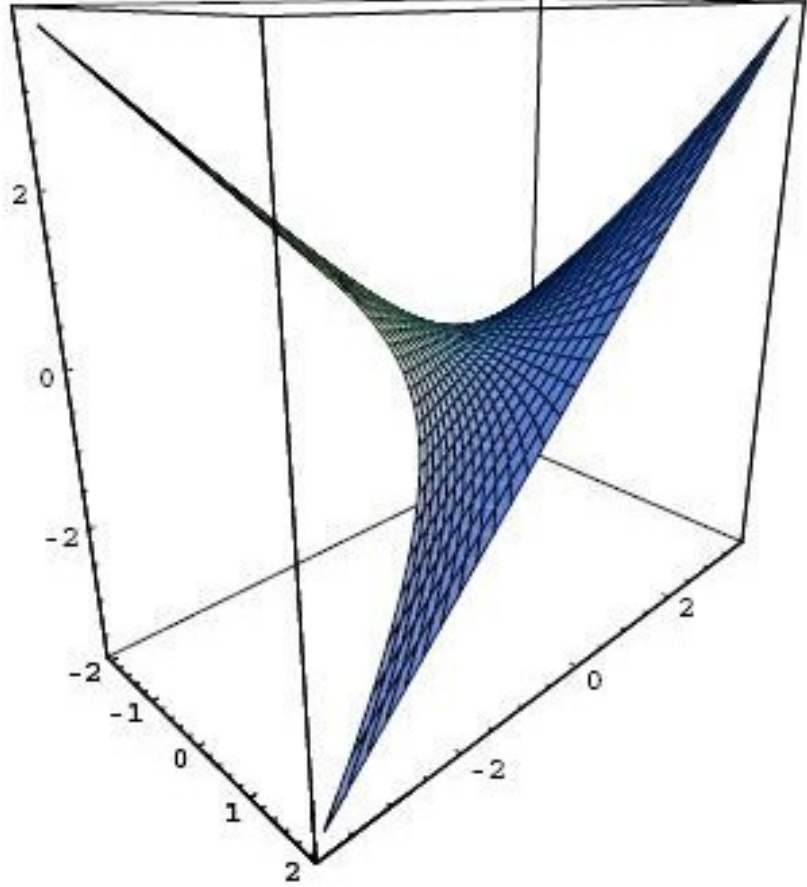
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

O halde bu yüzey üzerinde umbilik nokta yoktur.

Örnek 4.3.5: İkinci çeşit helikoid yüzeyi için yüzeyin parametrizasyonu

$X(s, t) = (ht, s \cosh t, s \sinh t)$ ve $h > 0$, $s \in (h, \infty)$ olmak üzere birinci esas form $EG - F^2 = h^2 - s^2 < 0$ olur.



Şekil 4.11 İkinci çeşit helikoid

Bu durumda yüzey timelike bir yüzeydir ve bu yüzey için

$$H = 0, \quad K = \frac{h^2}{(h^2 - s^2)^2}$$

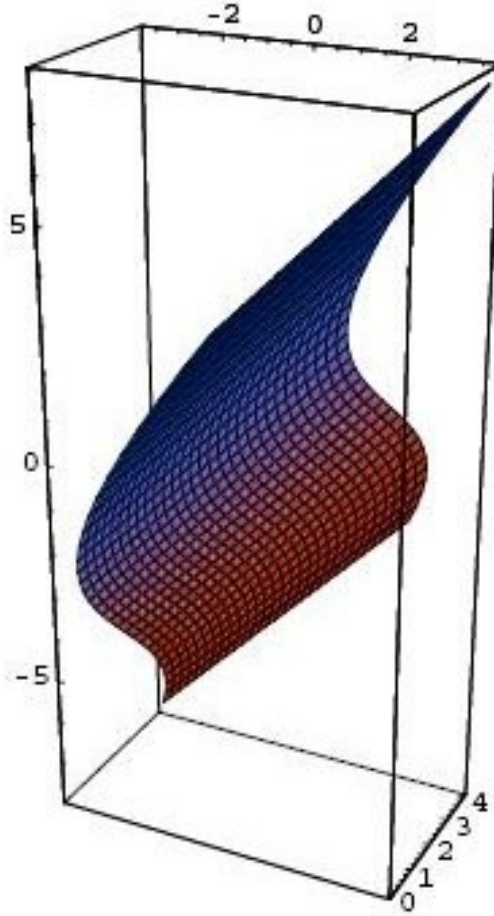
dir. O halde $H^2 - K < 0$ olur ve bu da Weingarten dönüşümünün matrisinin

köşegenleştirilemeyeceği anlamına gelir. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{(s^2-h^2)^{3/2}} \\ -\frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Karakteristik polinom $P_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 + \frac{h^2}{(s^2-h^2)^2}$ olur ve A köşegenleştirilemez.

Örnek 4.3.6: $X(s, t) = (s + h(-t + \frac{t^3}{3}), ht^2, s + h(t + \frac{t^3}{3}))$ parametrizasyonu ile belirlenen parabolik null silindir için $EG - F^2 = -4h^2$, $H = K = 0$ dır.



Şekil 4.12 Parabolik null silindir

O halde $H^2 - K = 0$ olur. $h > 0$ olmak üzere Weingarten dönüşümünün matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Karakteristik polinom $P_A(x) = x^2$ dir ve A köşegenleştirilemez.

Önerme 4.3.3: E_1^3 de verilen bir M yüzeyi için bir $p \in M$ noktasında ikinci esas formun kuadratik formu II_p ve birinci esas formun kuadratik formu I_p olmak üzere eğer II_p, I_p nin skalar bir katı ise p noktası M yüzeyinin bir umbilik noktasıdır.

II_p nin, I_p nin skalar bir katı olması, p noktasındaki şekil operatörü matrisinin birim matrisin skalar bir katı olmasına eşdeğerdir. Esas olarak II_p ile I_p arasında böyle bir ilişkinin elde edilmesi, şekil operatörü matrisinin birim matrisin skalar bir katı olduğunu göstermek için daha kısa bir yoldur. Bu şart sağlandığında p noktası M yüzeyinin umbilik bir noktası ve $H^2(p) - K(p) = 0$ olur.

Şekil operatörü S_p self-adjoint lineer bir operatördür; $\forall v, w \in T_p M$ vektörleri için

$$\langle S_p(v), w \rangle = \langle v, S_p(w) \rangle$$

dir. Bu eşitlik S_p nin matrisinin, $T_p M$ nin herhangi bir ortonormal bazına göre anti-simetrik olmasıyla eşdeğerdir. Bu durumda Öklid uzayından farklı olarak S_p köşegenleştirilemeyebilir.

Tanım 4.3.3: E_1^3 de S_p köşegenleştirilemezken $H^2(p) - K(p) = 0$ şartı sağlanıyorsa bu durumda $T_p M$ nin bir bazına göre S_p nin matrisi, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

formundadır. Burada $K(p) = a^2$ ve $H(p) = a$ ile birlikte $H^2(p) - K(p) = 0$ dir. Bu durumun p nin umbilik nokta olma durumuna benzerliğinden dolayı bu şartları

sağlayan $p \in M$ noktalarına *quasi umbilik (genelleştirilmiş umbilik) noktalar* denir. $\forall p \in M$ için bu sonuçlar elde ediliyorsa M ye *quasi umbilik (genelleştirilmiş umbilik) yüzey* denir.

p noktası quasi umbilik bir nokta ise S_p nin eigen vektörleri lightlike vektörlerdir. $T_p M$ nin herhangi bir ortonormal (e_1, e_2) bazına göre S_p nin matrisi anti-simetrik olacaktır

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda S_p nin eigen değerleri için elde edilen fonksiyonun diskriminantı $(a - c)^2 = 4b^2$ dir. Buradan da eigen değerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + c)$ olarak hesaplanır. Eigen vektörü ise $e_1 - e_2$ dir. Bu vektör de lightlike bir vektördür.

Homotetik hareket gruplarının özel bir hali olan helikoidal hareket gruplarıyla yapılan çalışmalar sonucunda Hou ve Ji (2007) 3 boyutlu Lorentz uzayında $H^2 - K = 0$ denklemini sağlayan helikoidal yüzeyler olmasına rağmen bu yüzeyler üzerinde umbilik nokta bulunmadığını göstermişlerdir. Ayrıca Clelland (2010) $H^2 - K = 0$ olan timelike yüzeyleri incelemiştir ve bu yüzeylerin doğrultmanları lightlike olan regle yüzeyler olduğunu ispatlamıştır.

Üreteç eğrisi bir polinom olan ve homotetik hareket grupları altında üretilen yüzeyler için umbilik olma şartları incelenirse, ilk olarak eksenin karakterine bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur.

(i) Eksen timelike iken $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olarak alındığında bu eğrinin yörüngesi olan yüzey $X(s, t) = (s\lambda(t) \cos t, s\lambda(t) \sin t, ht + \lambda(t)f(s))$ ve $\{E, F, G\}$, $\{e, f, g\}$ de sırasıyla birinci ve ikinci esas formun katsayıları olmak üzere

$$E = \lambda^2(1 - f'^2), \quad F = \lambda\lambda'(s - f'f) - h\lambda f', \quad G = s^2(\lambda^2 + \lambda'^2) - (\lambda'f + h)^2$$

ve

$$e = -\frac{sf''\lambda^3}{A}, \quad f = -\frac{(f-sf')\lambda^2\lambda' + h\lambda^2}{A} \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Burada $A = \sqrt{((f-sf')\lambda\lambda' + h\lambda)^2 + (1-f'^2)s^2\lambda^4}$ dir.

Parametrizasyonu verilen yüzeyin bir P noktası umbilik nokta ise bu noktada $II_p = kI_p$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Buradan $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = k$ dir.

O halde p umbilik nokta ise $(eF - fE)(p) = (eG - gE)(p) = (fG - gF)(p) = 0$ olmalıdır.

$$\implies (eF - fE)(p) = -\frac{sf''\lambda^3}{A}(\lambda\lambda'(s-f'f) - h\lambda f') + \frac{(f-sf')\lambda^2\lambda' + h\lambda^2}{A}\lambda^2(1-f'^2) = 0$$

$$\implies \lambda^4\lambda'[(f-sf')(1-f'^2) - s^2f'' + sf''f'f] + h\lambda^4(sf''f' + 1 - f'^2) = 0$$

Bu durumda $f(s) = a_0 \pm s$ seçilirse $(eF - fE)(p) = (eG - gE)(p) = 0$ elde edilir.

Ancak

$$(fG - gF)(p) = \frac{\lambda(h + a_0\lambda')((h + a_0\lambda')^2 + a_0s\lambda\lambda'')}{\sqrt{(h + a_0\lambda')^2}}$$

olarak hesaplanır ve bu ifadenin sıfıra eşit olması mümkün değildir.

(ii) Eksen spacelike iken $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olarak alındığında bu eksen etrafında bu eğri ile homotetik hareket altında elde edilen yüzey $X(s, t) = (ht + \lambda(t)f(s), s\lambda(t) \cosh t, s\lambda(t) \sinh t)$ idi ve bu yüzey için birinci ve ikinci esas formun katsayıları sırasıyla

$$E = \lambda^2(f'^2 - 1), \quad F = \lambda\lambda'(f'f + s) + h\lambda f', \quad G = (s^2 + f^2)\lambda'^2 - s^2\lambda^2 + 2hf\lambda' + h^2$$

ve

$$e = \frac{sf''\lambda^3}{A}, \quad f = \frac{(sf' - f)\lambda^2\lambda' - h\lambda^2}{A} \quad \text{bulunur.}$$

Burada $A = \sqrt{(1 + f'^2)s^2\lambda^4 - ((f - sf')\lambda\lambda' + h\lambda)^2}$ dir. Yine

$$(eF - fE)(p) = \frac{(sf''f'f + s^2f'' + (sf' - f)(f'^2 - 1))\lambda'\lambda^4 + (sf''f' - f'^2 + 1)h\lambda^4}{A}$$

İlk duruma benzer şekilde $f(s) = a_0 \pm s$ seçilirse $(eF - fE)(p) = (eG - gE)(p) = 0$ olarak hesaplanır. Ancak

$$\begin{aligned} (fG - gF)(p) = & -\lambda(h - a_0\lambda')(h^2 - s^2\lambda^2 + 2h(a_0 + s)\lambda' + (s^2 + (a_0 + s)^2\lambda'^2) \\ & -s(s\lambda\lambda' + \lambda(h + (a + s)\lambda'))(-2\lambda'(h + a_0\lambda') + (a_0 + s)\lambda\lambda'' \\ & -s\lambda(\lambda + \lambda'')/\sqrt{2s^2\lambda^2 - (h + a_0\lambda')^2} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifade sıfır olamaz.

(iii) Eksen lightlike iken $\gamma(s) = (f(s), s, f(s))$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu üreteç eğriyle eksen etrafında homotetik hareket altında elde edilen yüzey parametrizasyonu $X(s, t) = (\lambda(t)(ts + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} - t), s\lambda(t) + ht^2, \lambda(t)(ts + f(s)) + h(\frac{t^3}{3} + t))$ olan yüzey idi. Bu yüzey için birinci ve ikinci esas formun katsayıları sırasıyla

$$E = \lambda^2, \quad F = s\lambda\lambda' - 2hf'\lambda, \quad G = -4hf\lambda' - 4hs\lambda$$

ve

$$e = \frac{2hf''\lambda^2}{A}, \quad f = \frac{2h\lambda^2 - 2hf'\lambda\lambda'}{A} \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Burada $A = \sqrt{4h^2 f'(2t^3 + 2t + f')\lambda^2 + 4(f - sf')\lambda^2 \lambda' + 4s\lambda^3}$ dir.

$$\implies (eF - fE)(p) = \frac{2h(f' + sf'')\lambda^3 \lambda' - 4h^2 f' f'' \lambda^3 - 2h\lambda^4}{A} \text{ dir.}$$

$f(s) = a_0 + s$ ve $\lambda(t) = e^t$ olarak seçilirse $(eF - fE)(p) = 0$ olarak hesaplanır. Ancak

$$(eG - gE)(p) = -\frac{e^{3t}h(a_0 e^t + 2(-h + e^t s))}{\sqrt{e^{2t}h(a_0 e^t + h + e^t s)}}$$

ve

$$(fG - gF)(p) = -\frac{e^t h(-2e^t h + e^{2t} s)(a_0 e^t + 2(-h + e^t s))}{\sqrt{e^{2t}h(a_0 e^t + h + e^t s)}}$$

bulunur ve bu ifadeler sıfır olamazlar.

Sonuç 4.3.1: E_1^3 de bir polinom eğrisinin homotetik hareket altındaki yörüngesi olan yüzeyler üzerinde umbilik nokta yoktur.

Teorem 4.3.2: E_1^3 de bir polinom eğrisinin homotetik hareket altındaki yörüngesi olan yüzeyler için $H^2 - K = 0$ ise bu durumda bu yüzeyler regle yüzeylerdir.

İspat: i) Eksen timelike iken üreteç eğrisi $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ olmak üzere bu eğrinin homotetik hareket grubu altındaki yörüngesi olan yüzey için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği daha önceden hesaplanmıştı. Bu hesaplamalardan

$$\begin{aligned} H^2 - K &= [-2(h + (f - sf')\lambda')(-s\lambda' + f'(h + f\lambda')) + sf''(-h^2 + s^2\lambda^2 - 2hf\lambda' \\ &\quad + s^2\lambda'^2 - f^2\lambda'^2) + s(1 - f'^2)(s\lambda^2 f' - 2\lambda'(h + (f - sf')\lambda')) + (f - s \\ &\quad f')\lambda\lambda'']^2 + 4(s^2\lambda^2(-1 + f'^2) + (h + (f - sf')\lambda')^2)(-(h + (f - sf')\lambda')^2 \\ &\quad + s^2 f''[s\lambda^2 f' - 2\lambda'(h + (f - sf')\lambda') + (f - sf')\lambda\lambda'']) \\ &\quad / 4(s^2\lambda^2(-1 + f'^2) + (h + (f - sf')\lambda')^2)^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $H^2 - K$, s parametresine bağlı bir polinomdur ve bu polinomun bir sıfır polinomu olabilmesi için pay kısmı sıfır olmalıdır. Paydaki polinomun

başkatsayısı s^{6m-2} terimine aittir ve $((4m^2 - 2m)\lambda'^2 - m(m-1)\lambda^2 - m^2\lambda\lambda'')^2 a_m^6$ dir. $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $m \geq 2$ iken bu katsayı sıfır olamaz. Özel olarak $f(s) = a_0 + s$ ve $\lambda(t) = b_0 + b_1 t$ seçilirse $H = \frac{1}{a_0 b_1 + h}$, $K = \frac{1}{(a_0 b_1 + h)^2}$ ve $H^2 - K = 0$ bulunur.

ii) Eksen spacelike iken üreteç eğrisi $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu eğri ile spacelike eksen etrafında homotetik hareket ile elde edilen yüzey için

$$\begin{aligned} H^2 - K = & [(2(h + (f - sf')\lambda')(s\lambda' + f'(h + f\lambda')) + sf''(h^2 - s^2\lambda^2 + 2hf\lambda' + (s^2 \\ & + f^2)\lambda'^2) - s(1 + f'^2)(s\lambda^2 f' + 2\lambda'(h + f\lambda' - sf'\lambda') + (f - sf')\lambda\lambda''))]^2 \\ & - 4(-s^2\lambda^2(1 + f'^2) + (h + (f - sf')\lambda')^2)(h + (f - sf')\lambda')^2 + s^2 f''(s\lambda^2 \\ & f' + 2\lambda'(h + (f - sf')\lambda') - (f - sf')\lambda\lambda'')/4(-s^2\lambda^2(1 + f'^2) + (h + (f \\ & - sf')\lambda')^2)^3 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $H^2 - K$, s parametresine bağlı bir polinomdur ve bu polinomun bir sıfır polinomu olabilmesi için pay kısmı sıfır olmalıdır. Paydaki polinomun başkatsayısı s^{6m-2} terimine aittir ve bu katsayı $m^2(1-m)^2 a_m^6 (3\lambda'^2 - m(2\lambda'^2 + \lambda\lambda''))^2$ dir. $m \geq 2$ iken bu katsayı ancak λ sabit iken sıfır olabilir. Ancak $\lambda(t) \neq sbt$ olduğundan bu durumda bu katsayı sıfır olamaz. Özel olarak $f(s) = a_0$ seçilirse

$$H^2 - K = \frac{3(h + a_0\lambda')^4 + (2s^2\lambda^2 + 5a_0\lambda\lambda'')(h + a_0\lambda')^2 + a_0^2\lambda^2\lambda''^2 + 2a_0s^2\lambda^3\lambda''}{(-2s^2\lambda^2 + (h + a_0\lambda')^2)^3}$$

olarak hesaplanır ve burada $\lambda(t) = b_0 - \frac{h}{a_0}t$ alınırsa $H = 0$ ve $K = 0$ olmak üzere $H^2 - K = 0$ elde edilir.

iii) Eksen lightlike iken $\gamma(s) = (f(s), s, f(s))$, $f(s) = \sum_{n=0}^m a_n s^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

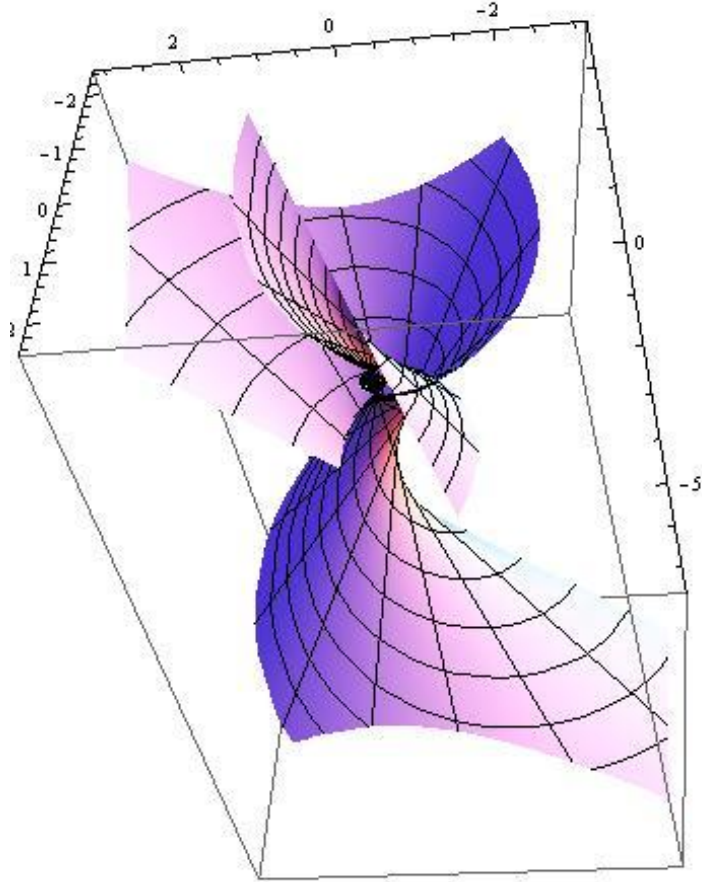
bu üreteç eğriyle eksen etrafında homotetik hareket altında elde edilen yüzey için

$$\begin{aligned} H^2 - K = & (\lambda' f''(4hf - s^2 \lambda') + \lambda(4hsf'' - f\lambda'' + f'(-2h + s\lambda''))))^2 \\ & + 16h\lambda(s\lambda + hf'^2 + (f - sf')\lambda')(\lambda + f''(-2s\lambda' - f\lambda'' \\ & / + f'(2h + s\lambda''))))64h\lambda^2(s\lambda + hf'^2 + (f - sf')\lambda')]^3 \end{aligned}$$

$H^2 - K = 0$ olabilmesi ancak $H = 0$ ve $K = 0$ iken mümkündür. Ancak Teorem 4.3.2 de görüldüğü üzere lightlike eksen ile homotetik hareket grubu altında elde edilen yüzey için f polinomunun derecesi ne olursa olsun $K \neq 0$ olduğundan bu durumda $H^2 - K \neq 0$ elde edilir.

Sonuç 4.3.2: E_1^3 de bir polinom eğrisinin homotetik hareket grubu altında taradığı yüzeyler için $H^2 - K = 0$ ise bu durumda bu yüzeyler regle yüzeylerdir.

Örnek 4.3.7: Timelike eksen etrafında homotetik hareketle elde edilen, üreteç eğrisi $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ olmak üzere $f(s) = 1 + s$ ve $\lambda(t) = 1 - t$ olan yüzey şekildeki gibidir. Bu yüzey için $H = \frac{1}{|-1 + h|}$ ve $K = \frac{1}{(-1 + h)^2}$ ile birlikte $H^2 - K = 0$ dir. Bu yüzey şekildeki gibidir.



Şekil 4.13 $f(s) = 1 + s$, $\lambda(t) = 1 - t$ olan yüzey

Bu yüzey

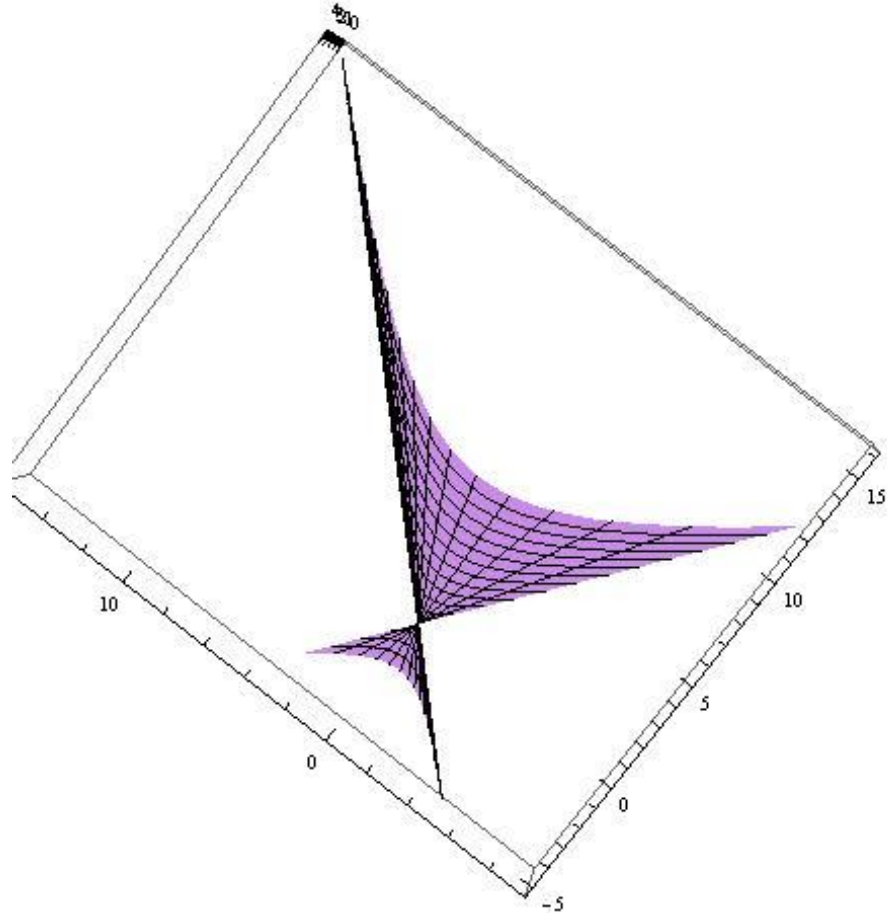
$$X(s, t) = (s(1 - t) \cos t, s(1 - t) \sin t, ht + (1 + s)(1 - t))$$

parametrizasyonuna sahiptir.

Örnek 4.3.8: Spacelike eksen ile birlikte üreteç eğrisi $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$ ve $f(s) = 1$ ve $\lambda(t) = 2 - ht$ seçildiğinde elde edilen yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = (1 + s(2 - ht), s(2 - ht) \cosh t, s(2 - ht) \sinh t)$$

dir ve bu yüzey şekildeki gibidir. Bu yüzey için $H = 0$, $K = 0$ ile birlikte $H^2 - K = 0$ dir.



Şekil 4.14 $f(s) = 1$, $\lambda(t) = 2 - ht$ olan yüzey

5. E_1^3 BİR EĞRİNİN HELİKOİDAL HAREKET GRUBU ALTINDAKİ YÖRÜNGESİ OLAN LİNEER WEINGARTEN YÜZEYLER

Tanım 5.1: E_1^3 de bir M yüzeyinin esas eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere bu eğrilikler arasında $\phi(k_1, k_2) = 0$ olacak şekilde bir ϕ fonksiyonu var ise M ye E_1^3 de *Weingarten yüzey* (*W-yüzey*) denir.

Esas eğriliklerin arasında böyle bir fonksiyonun varlığına eşdeğer olarak M yüzeyinin Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H olmak üzere $\phi(K, H) = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir ϕ fonksiyonu bulunabiliyorsa M bir Weingarten yüzey olur.

Lineer Weingarten yüzeylere örnek olarak sabit ortalama eğriliğe sahip yüzeyler (minimal yüzeyler), sabit Gauss eğriliğine sahip yüzeyler (küreler, developable yüzey-

ler), dönel yüzeyler vb. verilebilir. Developable regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri sıfırdır. Bu yüzeyler için her noktadaki tanjant düzlemleri her bir doğrultman boyunca sabittir. Developable yüzey örnekleri ise düzlem parçaları, silindirler ve konilerdir ve Öklid uzayı ve Lorentz uzayı için bu örnekler aynıdır. Özel olarak Lorentz uzayında yüzeylerin teğet düzlemleri non dejeneredir.

5.1 Lineer Weingarten Helikoidal Yüzeyler

Homotetik hareket gruplarında özel olarak $\lambda(t) = 1$ alındığında helikoidal hareket grupları elde edilir.

Tanım 5.1.1. E_1^3 de düzlemsel bir eğrinin bir parametrelili helikoidal hareket grubu altında çizdiği yörüngeye *helikoidal yüzey* denir. Hareketin eksenini L ve adımını h olmak üzere eksenin karakterine bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur.

(i) $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ timelike ise üreteç eğri $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ şeklinde parametrize edilebilir ve (3.1) ile verilen homotetik hareket grubunda $\lambda(t) = 1$ olmak üzere elde

edilen helikoidal yüzey

$$X(s, t) = (s\lambda(t) \cos t, s \sin t, ht + f(s))$$

şeklinde parametrize edilir.

(ii) $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ spacelike ise üreteç eğri $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$ şeklinde parametrize edilebilir ve (3.2) ile verilen homotetik hareket grubunda $\lambda(t) = 1$ olmak üzere elde edilen helikoidal yüzey

$$X(s, t) = (ht + f(s), s \cosh t, s \sinh t)$$

ile parametrize edilen yüzey olur.

(iii) $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ lightlike ise üreteç eğri $\gamma(s) = (f(s), s, f(s))$ şeklinde parametrize edilir ve (3.3) ile verilen homotetik hareket grubunda $\lambda(t) = 1$ olmak üzere elde edilen yüzeyin parametrizasyonu

$$X(s, t) = (ts + f(s) + h(\frac{t^3}{3} - t), s + ht^2, ts + f(s) + h(\frac{t^3}{3} + t))$$

şeklinde olacaktır.

Teorem 5.1.1: M, E_1^3 de düzlemsel bir eğrinin helikoidal hareket grubu altındaki yörüngesi olan helikoidal yüzey olsun. M nin ortalama eğriliği H ve Gauss eğriliği K olmak üzere $lH + K = c$ şartını sağlayan M yüzeyleri için

i) Eksen $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ timelike iken üreteç eğri $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$, olmak üzere

$$f(s) = \int -\sqrt{\frac{l^2 s^6 + 2cs^6 + 2c^2 s^8 - h^2 s^2 (2 + (l^2 + 4c)s^2 + 2c^2 s^4) - \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (l^2 + 4c)s^4 - 2h^2 (2 + l^2 s^2 + 2cs^2))}}{2s^4 (1 + (l^2 + 2c)s^2 + c^2 s^4)}}} ds$$

$$f(s) = \int \sqrt{\frac{l^2 s^6 + 2cs^6 + 2c^2 s^8 - h^2 s^2 (2 + (l^2 + 4c)s^2 + 2c^2 s^4) - \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (l^2 + 4c)s^4 - 2h^2 (2 + l^2 s^2 + 2cs^2))}}{2s^4 (1 + (l^2 + 2c)s^2 + c^2 s^4)}}} ds$$

$$f(s) = \int -\sqrt{\frac{l^2 s^6 + 2cs^6 + 2c^2 s^8 - h^2 s^2 (2 + (l^2 + 4c)s^2 + 2c^2 s^4) + \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (l^2 + 4c)s^4 - 2h^2 (2 + l^2 s^2 + 2cs^2))}}{2s^4 (1 + (l^2 + 2c)s^2 + c^2 s^4)}} ds$$

$$f(s) = \int \sqrt{\frac{l^2 s^6 + 2cs^6 + 2c^2 s^8 - h^2 s^2 (2 + (l^2 + 4c)s^2 + 2c^2 s^4) + \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (l^2 + 4c)s^4 - 2h^2 (2 + l^2 s^2 + 2cs^2))}}{2s^4 (1 + (l^2 + 2c)s^2 + c^2 s^4)}} ds$$

dir.

ii) $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ spacelike ve üreteç eğri $\gamma(s) = (f(s), s, 0)$ olmak üzere

$$f(s) = \int -\sqrt{-\frac{2cs^6 + l^2 s^6 + 2c^2 s^8 - h^2 s^2 (2 + 4cs^2 + l^2 s^2 + 2c^2 s^4) + \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (4c + l^2)s^4 - 2h^2 (2 + 2cs^2 + l^2 s^2))}}{2s^4 (1 + 2cs^2 + l^2 s^2 + c^2 s^4)}}} ds$$

$$f(s) = \int \sqrt{-\frac{2cs^6 + l^2 s^6 + 2c^2 s^8 - h^2 s^2 (2 + 4cs^2 + l^2 s^2 + 2c^2 s^4) + \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (4c + l^2)s^4 - 2h^2 (2 + 2cs^2 + l^2 s^2))}}{2s^4 (1 + 2cs^2 + l^2 s^2 + c^2 s^4)}}} ds$$

$$f(s) = \int -\sqrt{\frac{-2cs^6 - l^2 s^6 - 2c^2 s^8 + h^2 s^2 (2 + 4cs^2 + l^2 s^2 + 2c^2 s^4) + \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (4c + l^2)s^4 - 2h^2 (2 + 2cs^2 + l^2 s^2))}}{2s^4 (1 + 2cs^2 + l^2 s^2 + c^2 s^4)}}} ds$$

$$f(s) = \int \sqrt{\frac{-2cs^6 - l^2 s^6 - 2c^2 s^8 + h^2 s^2 (2 + 4cs^2 + l^2 s^2 + 2c^2 s^4) + \sqrt{l^2 s^8 (h^4 l^2 + (4c + l^2)s^4 - 2h^2 (2 + 2cs^2 + l^2 s^2))}}{2s^4 (1 + 2cs^2 + l^2 s^2 + c^2 s^4)}}} ds$$

dir.

iii) $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ lightlike ise üreteç eğri $\gamma(s) = (f(s), s, f(s))$ olmak üzere

$$f(s) = \int -\sqrt{\frac{2chs - hl^2 s + 8c^2 hs^3 + \sqrt{h^2 l^2 (1 + 4cs^2 + l^2 s^2)}}{2h^2 (l^2 - 4c^2 s^2)}} ds$$

$$f(s) = \int \sqrt{\frac{-2chs - hl^2 s + 8c^2 hs^3 + \sqrt{h^2 l^2 (1 + 4cs^2 + l^2 s^2)}}{2h^2 (l^2 - 4c^2 s^2)}} ds$$

$$f(s) = \int -\sqrt{\frac{-2chs + hl^2 s - 8c^2 hs^3 + \sqrt{h^2 l^2 (1 + 4cs^2 + l^2 s^2)}}{2h^2 (-l^2 + 4c^2 s^2)}} ds$$

$$f(s) = \int \sqrt{\frac{-2chs + hl^2 s - 8c^2 hs^3 + \sqrt{h^2 l^2 (1 + 4cs^2 + l^2 s^2)}}{2h^2 (-l^2 + 4c^2 s^2)}} ds$$

dir.

ispat: i) Eksen $L = \langle (0, 0, 1) \rangle$ timelike iken elde edilen yüzey $X(s, t) = (s\lambda(t) \cos t, s \sin t, ht + f(s))$ ile parametrize edilir. Bu yüzey için

$$H = \frac{-2h^2 f'(s) + s f''(s)(s^2 - h^2) + s^2 f'(s)(1 - f'(s)^2)}{2(-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2))^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$K = \frac{-h^2 + s^3 f'(s) f''(s)}{(-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2))^2}$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$H = \frac{1}{2s} \left(\frac{s^2 f'(s)}{\sqrt{-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2)}} \right)'$$

ve

$$K = \frac{1}{2s} \left(\frac{s^2 f'(s)^2 + h^2}{-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2)} \right)'$$

olarak yazılabilir. O halde $lH + K = c$ ifadesinde bu türevler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s} \left(l \frac{s^2 f'(s)}{\sqrt{-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2)}} + \frac{s^2 f'(s)^2 + h^2}{-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2)} \right)' &= c \\ \Rightarrow l \frac{s^2 f'(s)}{\sqrt{-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2)}} + \frac{s^2 f'(s)^2 + h^2}{-h^2 + s^2(1 - f'(s)^2)} &= cs^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümüyle aranan $f(s)$ ifadesi bulunur.

ii) $L = \langle (1, 0, 0) \rangle$ spacelike iken helikoidal hareket grubu ile elde edilen yüzeyin parametrizasyonu $X(s, t) = (ht + f(s), s \cosh t, s \sinh t)$ dir ve bu yüzey için

$$H = \frac{2h^2 f'(s) + s f''(s)(h^2 - s^2) - s^2 f'(s)(1 + f'(s)^2)}{2(h^2 - s^2(1 + f'(s)^2))^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$K = \frac{h^2 + s^3 f'(s) f''(s)}{(h^2 - s^2(1 + f'(s)^2))^2}$$

olur. Buradan

$$H = \frac{1}{2s} \left(\frac{s^2 f'(s)}{\sqrt{h^2 - s^2(1 + f'(s)^2)}} \right)'$$

ve

$$K = -\frac{1}{2s} \left(\frac{-s^2 f'(s)^2 + h^2}{h^2 - s^2(1 + f'(s)^2)} \right)'$$

olarak hesaplanır. O halde $lH + K = c$ ifadesinde bu türevler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s} \left(l \frac{s^2 f'(s)}{\sqrt{h^2 - s^2(1 + f'(s)^2)}} + \frac{-s^2 f'(s)^2 + h^2}{h^2 - s^2(1 + f'(s)^2)} \right)' &= c \\ \Rightarrow l \frac{s^2 f'(s)}{\sqrt{h^2 - s^2(1 + f'(s)^2)}} + \frac{-s^2 f'(s)^2 + h^2}{h^2 - s^2(1 + f'(s)^2)} &= cs^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümüyle aranan $f(s)$ ifadesi bulunur.

iii) $L = \langle (1, 0, 1) \rangle$ lightlike ise helikoidal hareket ile elde edilen yüzey $X(s, t) = (ts + f(s) + h(\frac{t^3}{3} - t), s + ht^2, ts + f(s) + h(\frac{t^3}{3} + t))$ ile parametrize edilir. Bu yüzey için

$$H = \frac{h^2(f'(s) - 2sf''(s))}{4(-h(s + hf'(s)^2))^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$K = \frac{1 + 2hf'(s)f''(s)}{4(s + hf'(s)^2)^2}$$

olur. Buradan

$$H = \frac{1}{4} \left(-\frac{4hf'(s)}{\sqrt{4h(s + hf'(s)^2)}} \right)'$$

ve

$$K = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{s + hf'(s)^2} \right)'$$

olarak da yazılabilir. $lH + K = c$ ifadesinden

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \left(l \frac{4hf'(s)}{\sqrt{4h(s + hf'(s)^2)}} + \frac{1}{s + hf'(s)^2} \right)' &= c \\ \Rightarrow l \frac{4hf'(s)}{\sqrt{4h(s + hf'(s)^2)}} + \frac{1}{s + hf'(s)^2} &= -4cs \end{aligned}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümüyle aranan f fonksiyonu bulunur.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bir eğrinin, doğrunun ya da noktanın uzayda hareketinin geometrisini araştırmak uzay kinematiği açısından önemlidir. Böyle bir hareket geometrik modellemede ve mekanik ürünlerin üretiminde, robot hareketlerinin dizaynında uygulamaya sahiptir. Bununla birlikte homotetik hareketler genel görecelilik kuramında yapılan çalışmalarda da yer almaktadır. Ayrıca homotetik hareket gruplarının özel bir hali olan helikoidal hareket grupları da halen incelenmektedir.

Bu tezde polinom eğrilerinin homotetik hareket altında taradıkları yüzeylerin sabit ortalama eğrilğe ya da sabit Gauss eğrilğine sahip olabilmesi için regle yüzeyler olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte yine bu yüzeyler genelleştirilmiş umbilik yüzeyler ise regle yüzeylerdir.

Bu çalışma uzayda hareketlerin bir genellemesi olduğundan önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- Abdell-Baky, R.A. 2008. Ruled W-Surfaces in Minkowski 3-Space R_1^3 . Archivum Math. 44 , 251-263
- Baikoussis, C. and Koufogiorgos, T. 1998. Helicoidal Surfaces with Prescribed Mean or Gaussian Curvature. J. Geom. 63, 25-29
- Beneki, C., Kaimakamis, G. and Papantoniou, B. J. 2002. Helicoidal Surfaces in Three Dimensional Minkowski Space. J. Math. Anal. Appl. 275, 586-614
- Choi, M. Kim, Y. H. and Park, G. 2009. Helicoidal Surfaces and Their Gauss Map in Minkowski 3-Space. II, Bull. Korean Math. Soc. 46, 567-576
- Clelland, J. N., 2010. Totally Quasi-Umbilical Timelike Surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$. arXiv: 1006.4380v1
- Dillen, F. and Kühnel, W. 1999. Ruled Weingarten Surfaces in Minkowski 3-Space. Manuscripta Math. 98, 307-320
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2000. Diferensiyel Geometri Cilt 2
- Hano, J. and Nomizu, K. 1984. Surfaces of Revolution with Constant Mean Curvature in Lorentz-Minkowski Space. Tohoku Math. J. 36, 427-437
- Hou, Z.H. and Ji, F. 2006. Helicoidal Surfaces under the cubic Screw Motion in Minkowski 3-Space. J. Math Anal. Appl., 634-647
- Hou, Z.H and Ji, F. 2007. Helicoidal Surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-Space. J. Math Anal., Appl. 318, 101-113
- Ji, F. and Hou, Z.H. 2005. A Kind of Helicoidal Surfaces in 3-Dimensional Minkowski Space. J. Math Anal., Appl. 304, 632-643
- Ji, F. and Wang, Y. 2010. Linear Weingarten Helicoidal Surfaces in Minkowski 3-Space. Dynamical Systems, Vol 12, 95-101
- Kobayashi, O. 1983. Maximal Surfaces in 3-dimensional Minkowski Space L^3 . Tokyo J. Math 6, 297-309
- Lopez, R. 2000. Timelike Surfaces with Constant Mean Curvature in Lorentz 3-Space. Tohoku Math J. 52, 515-532

- Lopez, R. and Demir, E. 2010. Helicoidal Surfaces in Minkowski Space with Constant Mean Curvature and Constant Gauss Curvature. arXiv:1006.2345
- Magid, M. 1985. Lorentzian Isoparametric Hypersurfaces. Pacific J. Math. 118, 165-197
- O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Application to General Relativity. Academic Press, New York
- Sasahara, N. 2000. Spacelike Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space. Tokyo J. Math. 23, 477-502
- Struik, D. 1988. Lectures on Classical Differential Geometry. Dover, 2nd Edition New York
- Tosun, M., Kucuk, A. and Gungor M. A. 2006. The homothetic motions in the Lorentz 3-space. Acta Mathematica Science 26B(4): 711-719.
- Weinstein 1996. An Introduction to Lorentz Surfaces. Walter de Gruyter, 1996

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esmâ DEMİR ÇETİN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 08.05.1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Gölbaşı Anadolu Lisesi (2004)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2010)

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

Nevşehir Üniversitesi Araştırma Görevlisi 2009-

Yayınları (SCI ve diğer)

- 1) **E. Demir** and Y. Yaylı, Motion Groups and Circular Helices in Lorentz 3-Space, Int. Journal of Physical Sciences vol 7(42),5664-5668 (2012) (SCI-Expanded)
- 2) R. Lopez, **E. Demir**, Helicoidal surfaces in Minkowski Space with Constant Mean Curvature and Constant Gauss Curvature, Central European Journal of Math.12(9), 1349-1361 (2014) (SCI-Expanded)