

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YAKLAŞMA TEORİSİNİN HİPERTOPOLOJİLERE İLİŞKİN
UYGULAMALARI

Meryem ATEŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

YAKLAŞMA TEORİSİNİN HİPERTOPOLOJİLERE İLİŞKİN UYGULAMALARI

Meryem ATEŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Sevda SAĞIROĞLU

Bu tez 7 bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, tez çalışmasında göz önüne alınan problemler açıklandı ve bu problemlerin inşası yapılırken kullanılan literatür bilgisi verildi.

İkinci bölümde, yaklaşma teorisine ilişkin kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm, hipertopoloji tanımı ve bazı özel hipertopoloji örneklerini içermektedir. Ayrıca, verilen hipertopojiler ile uyumlu olacak biçimde tanımlanan yaklaşma yapıları ifade edilmiştir.

Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler tezin orjinal kısımlarını içermektedir.

Dördüncü bölümde, Fell topoloji hatırlatılmış ve özel halde Fell topoloji ile çıkan Fell yaklaşma yapısı tanımlanmıştır. Bu yeni yapının bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, topolojik uzaylar ve yakınsama uzayları içerisinde ifade edilen Kuratowski yakınsaklık kavramı hatırlatılmış, ve bu kavramın yaklaşma uzayları içerisine nasıl genişletilebileceği tartışılmıştır.

Altıncı bölümde, önceki iki bölümde tanımlanan yapılar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

Son bölümde ise tez ile ilgili genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Haziran 2024, 65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hipertopoloji, Yaklaşma Uzayı, Kuratowski Yakınsaklık, Fell topoloji

ABSTRACT

PhD Thesis

APPLICATIONS OF APPROACH THEORY RELATED WITH HYPERTOPOLOGIES

Meryem ATEŞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Sevda SAĞIROĞLU

This thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In this part, the considered problems for this thesis are described and the studies in literature that are used during the construction process of our problems are given.

In second chapter, we give the basic concepts of approach theory that are used in the sequel.

Chapter three consists of the definition of hypertopology and some specific hypertopology examples. Moreover the approach structures that are related with the given hypertopologies are expressed.

The original parts of the thesis are included in chapters four, five and six.

In chapter four, Fell topology is recalled and the Fell approach structure that coincides with the Fell topology in a special case is introduced. Some fundamental properties of this new structure is investigated.

In chapter five, the notion of Kuratowski convergence in the setting of topological spaces and convergence spaces is recalled, and the way of extending this notion to the approach setting is discussed.

In chapter six, the relations between the structures defined in the previous two sections were examined and the results obtained are presented.

In the last chapter, general evaluation of the thesis was given.

June 2024, 65 pages

Key Words: Hypertopology, Approach space, Kuratowski Convergence, Fell topology

TEŞEKKÜR

Bana böylesine zor bir konuda çalışma imkanı sağlayan ve üstesinden gelebileceğime inanan, umutsuzluğa kapıldığımda engin bilgisiyle bana yol gösteren, karanlıkta kaldığımda ışık olan, gerektiğinde beni sabahlara kadar çalıştıran ve çalışmalarımızın karşılığını aldığımızda bana sımsıkı sarılan hocam Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU (Ankara Üniversitesi)'na hayatıma bu denli dokunduğu için, sabrı, sevgisi ve şefkati için, sadece eğitim anlamında değil her anlamda bana destek olduğu için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezimi hazırlama süresince beni sabırla dinleyen, hatalarımı düzelten ve beni yönlendiren değerli TİK jürisi üyeleri Prof. Dr. Erdal GÜNER (Ankara Üniversitesi)'e ve Prof. Dr. Filiz YILDIZ (Hacettepe Üniversitesi)'a en samimi duygularıyla teşekkür ederim. Ayrıca, tezimi titizlikle okuyan ve değerli vakitlerini ayıran tez savunma jüri üyelerim Prof.Dr. Rıza ERTÜRK (Hacettepe Üniversitesi)'e ve Prof. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi)'e beni yönlendirdikleri için saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımıza beraber devam ettiğimiz ve tezime büyük bir katkısı olan hocam Prof. Dr. Frédéric MYNARD (New Jersey Üniversitesi)'a teşekkür ederim.

Bu yolda yürümek için beni teşvik eden, her zaman yolumu aydınlatan, en ümitsiz durumda dahi bana olan güvenini samimiyetle hissettiren ve beni sakinleştiren eşim Osman ATEŞ'e, bir gülüşü ile her şeyi güzelleştiren ömrümün baharı kızım Meyra'ya teşekkür ederim.

Evlat yetiştirmenin zorluğunu anladığım bu yıllarda, tüm zorluklara rağmen beni bugünlere ulaştıran sevgili annem Hatice BİTEN ve babam Memiş BİTEN'e, hayatımın her aşamasında beni destekleyen ve her zaman yanımda olan ablalarım Hanım BİTEN ÇOLAK, Kıymet BİTEN ve kardeşim Ferhan BİTEN'e bana olan güvenlerinden dolayı teşekkür ederim.

Beni kızları gibi seven ve başaracağıma inanan, her zaman heyecanımı paylaşan annem Aynur ATEŞ ve babam Yener ATEŞ'e destekleri için teşekkür ederim.

Meryem ATEŞ
Ankara, Haziran 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. HİPERTOPOLOJİLER ÜZERİNDE TANIMLI YAKLAŞMA YAPILARI	10
3.1 Vietoris Yaklaşma Yapısı	12
4. FELL YAKLAŞMA YAPISI	15
4.1 İndeks Analiz	33
5. YAKLAŞMA UZAYLARINDA HİPERSÜZGEÇ VE HİPERAĞLAR İÇİN KURATOWSKI YAKINSAKLIK	38
6. δ_ϵ -KURATOWSKI YAKINSAKLIK VE FELL YAKLAŞMA UZAYI ARASINDAKİ İLİŞKİLER	52
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	61
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{P}$	$[0, \infty]$
δ	Uzaklık fonksiyonu
λ	Limit operatörü
$\mathcal{L}$	Alt düzgün fonksiyon çatısı
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$CL(X)$	(X, τ) topolojik uzayının boş kümeden farklı kapalı alt kümelerinin ailesi
$K(X)$	(X, τ) topolojik uzayının boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin ailesi
τ_{Fell}	Fell topoloji
τ_{eFell}	Genişletilmiş Fell topoloji
$\mathcal{L}_{Fell}$	Fell yaklaşma yapısı
$\chi_k(X)$	(X, δ) yaklaşma uzayının kompaktlık indeksi
$\chi_{lk}(X)$	(X, δ) yaklaşma uzayının lokal kompaktlık indeksi
$\Lambda_{\mathfrak{A}}$	Λ yönlendirilmiş kümesinin artık alt kümelerinin ailesi
$\Lambda_{\mathfrak{C}}$	Λ yönlendirilmiş kümesinin eşsonlu alt kümelerinin ailesi
$\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ ağının ürettiği süzgeç
λ_{δ}	δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen limit operatörü
$\delta_{\mathcal{L}}$	$\mathcal{L}$ alt düzgün fonksiyon çatısına karşılık gelen uzaklık fonksiyonu
$\mathcal{A}_{\delta}$	δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemi
Top	Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar kategorisi
Met	Metrik uzaylar ve genişlemeyen dönüşümler kategorisi
App	Yaklaşma uzayları ve büzülme dönüşümleri kategorisi
qMet	Quasimetrik uzaylar ve genişlemeyen dönüşümler kategorisi
qMet(X)	X kümesi üzerinde tanımlı quasimetriklerin ailesi

1. GİRİŞ

Yaklaşma uzaylarının hipertopolojiler ile olan ilişkileri, 1996 yılında Lowen ve Sioen tarafından araştırılmaya başlanmıştır. R. Lowen ve M. Sioen, hipertopolojiler ile ilişkili olacak biçimde yaklaşma yapıları inşa edilip edilemeyeceğini araştırmışlar ve 1996 yılında Wijsman topoloji, 1998 yılında da Proximal topoloji ile ilişkili olacak biçimde yaklaşma yapıları inşa etmişlerdir. 2012 yılında ise, Lowen ve Wuyts, Vietoris yaklaşma yapısı ile ilişkili olacak biçimde bir yaklaşma yapısı inşa etmiştir. Ancak, literatürde önemli bir yere sahip olan Fell topoloji ile uyumlu olacak biçimde bir yaklaşma yapısına rastlanılmamaktadır. Bu nedenle, tezimizde ilk olarak Fell topoloji ile ilişkili olacak biçimde bir yaklaşma yapısı inşa etmeyi hedefledik. Fell topoloji ve Vietoris topolojinin tanımlarının benzerliği nedeniyle, tezimizde öncelikle Vietoris topoloji ile uyumlu olacak biçimde tanımlanan yaklaşma yapısının inşası incelenmiştir.

Vietoris topoloji, alt ve üst Vietoris topoloji adı verilen iki topoloji yardımıyla inşa edilir (Hodel ve Levi 1997). Bu sebeple, Lowen ve Wuyts topolojik ko-yansımaları alt ve üst Vietoris topolojiler olacak biçimde tanımladıkları iki yaklaşma yapısı yardımıyla, Vietoris yaklaşma yapısını inşa etmişlerdir. Ancak, $\vee$ -Vietoris yaklaşma yapısının topolojik ko-yansıması $CL(X)$ (X kümesinin boş kümeden farklı tüm kapalı alt kümelerinin ailesi) ailesinin tamamı üzerinde alt Vietoris topoloji ile çakışırken, $\wedge$ -Vietoris yaklaşma yapısının topolojik ko-yansımasının sadece $K(X)$ (X kümesinin boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin ailesi) üzerinde üst Vietoris topoloji ile çakıştığı görülmüştür. Dolayısıyla, Vietoris yaklaşma yapısının topolojik ko-yansıması sadece $K(X)$ üzerinde Vietoris topoloji ile çakışmaktadır (Lowen ve Wuyts 2012). Fell topoloji de Vietoris topolojiye benzer olarak iki topoloji yardımıyla inşa edilmiştir ve hatta alt Vietoris topoloji ile alt Fell topoloji aynı topolojilerdir. Tez çalışmamızın dördüncü bölümünde, öncelikle üst Fell topoloji ile daha sonra da Fell topoloji ile uyumlu olacak biçimde yaklaşma yapıları tanımlanmıştır ve Fell yaklaşma yapısının topolojik ko-yansımasının Fell topoloji ile $CL(X)$

ailesinin tamamı üzerinde çakıştığı ispatlanmıştır.

Topolojide önemli kavramlar olan kompaktlık ve lokal kompaktlık, Lowen tarafından yaklaşma uzaylarına uyarlanmıştır. Çalışmalarımızda, Fell yaklaşma yapısının özellikleri incelenirken, kompaktlık ve lokal kompaktlık dereceleri de incelenmiş ve elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, Kuratowski yakınsaklık kavramı ele alınmıştır. Küme dizilerinin alt ve üst sınırlarını belirleme fikri 1909 yılında Painleve tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Painleve ve Hausdorff, (X, τ) topolojik uzayında küme dizilerinin yakınsaklığına dair bazı çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalar ışığında Kuratowski, ögeleri kapalı kümeler olan ağların yakınsaklığını Hausdorff uzaylarında ele alarak tanımlamış ve bu kavram (Kuratowski 1966) çalışması sayesinde matematik dünyasında geniş kitlelere ulaşmıştır. Küme ağlarının alt ve üst limit kavramları ve daha sonra bu kavramlar yardımıyla Kuratowski anlamında yakınsaklık "Kuratowski-Painleve yakınsaklık" adıyla Beer tarafından tanımlanmıştır (Beer 1993). Bir çok kaynakta bu yakınsaklık kısaca Kuratowski yakınsaklık olarak ifade edildiğinden, tez çalışmamız boyunca bu yakınsaklığı Kuratowski yakınsaklık olarak ifade edeceğiz. Diğer yandan, yakınsama uzaylarında kapalı kümeler üzerinde tanımlı süzgeç aileleri için Kuratowski yakınsaklık Dolecki, Gabriele ve Lechicki tarafından tanımlanmıştır (Dolecki, Gabriele ve Lechicki 1995). Daha sonra, Mynard ve Dolecki tarafından yakınsama uzaylarında, kapalı kümeler üzerinde tanımlı süzgeçler için Kuratowski yakınsaklık tanımı verilmiştir (Dolecki ve Mynard 2016). Çalışmalarımızın devamında, Kuratowski yakınsaklık kavramını hem kapalı kümelerden oluşan ağlar, hem de kapalı kümelerden oluşan süzgeçler için yaklaşma uzaylarına nasıl taşıdığımızı aktardık.

Beer, Kuratowski yakınsaklığın topolojik bir yakınsama olmadığını, ancak karşılık gelen yakınsaklığın Kuratowski yakınsaklıktan zayıf olan en ince τK topolojisi olduğunu ifade etmiştir. τK topolojisinden kaba olan en ince topolojinin Fell topoloji olduğunu ve bir Hausdorff uzayında Kuratowski yakınsaklığın Fell topolojiye göre

yakınsaklık ile çakışması için gerek ve yeter şartın evrensel uzayın lokal kompakt olması olduğunu ispatlamıştır (Beer 2010). Ayrıca Fell topoloji ile Kuratowski yakınsaklık arasında bir çok ilişki olduğunu göstermiştir (Beer 1993).



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmalarımız boyunca kullandığımız temel tanım ve özellikler ifade edilecektir.

Bu çalışma boyunca $[0, \infty]$ kapalı aralığı, toplamsal yarıgrup ve tam latis yapısı ile ele alınacak ve kısalık açısından bu kapalı aralık $\mathbb{P}$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $x \in [0, \infty[$ için

$$\infty + x = x + \infty = \infty$$

$$\infty - x = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty - \infty = 0$$

eşitlikleri kabul edilecektir.

Boş kümeden farklı bir X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi 2^X ve sonlu elemanlı alt kümelerinin ailesi $2^{(X)}$ ile gösterilecektir. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X kümesinin boş kümeden farklı kapalı alt kümelerinin ailesi $CL(X)$, boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin ailesi $K(X)$ ile gösterilecek ve $\mathcal{W} = CL(X) \cup \{\emptyset\}$ olarak ele alınacaktır.

X bir küme ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin kesen ve artan (hit ve miss) kümeleri sırasıyla A^- ve A^+ ile ifade edilir ve

$$A^- := \{B \in CL(X) \mid B \cap A \neq \emptyset\} \text{ ve } A^+ := \{B \in CL(X) \mid B \subset A\},$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca, (X, d) metrik uzay, $\varepsilon > 0$ ve $S_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$ olmak üzere, A^{++} kümesi

$$A^{++} := \{B \in CL(X) \mid \exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(B) \subset A\}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.1 $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{P}$ fonksiyonu,

(i) $\forall x \in X : d(x, x) = 0$,

$$(ii) \forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

özelliklerini gerekliyor ise X kümesi üzerinde tanımlı bir **quasimetrik** adı verilir. X kümesi üzerinde tanımlı bir d quasimetriği,

$$(iii) \forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x),$$

özellidine de sahip ise, X üzerinde tanımlı bir **metrik** adı verilir (Lowen 1997).

Bir X kümesi üzerinde tanımlı tüm süzgeçlerin ailesi $F(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2 X bir küme, $\xi \subset F(X) \times X$ ve $\mathfrak{F} \in F(X)$ olsun. Bu durumda, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ olması durumu $x \in \lim_{\xi} \mathcal{F}$ biçiminde ifade edilir ve x noktası $\mathfrak{F}$ süzgecinin ξ bağıntısına göre limit noktasıdır ya da $\mathfrak{F}$ süzgeci x noktasına ξ bağıntısına göre yakınsaktır denir (Dolecki ve Mynard 2016).

Yaklaşma uzayları, matematiksel olarak birbirine eş olan birden fazla matematiksel yapı kullanılarak ifade edilebilir. Bunlardan bazıları; uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, ölçek, yaklaşma sistemi, alt düzgün fonksiyon çatısı ve üst zarf operatörüdür. Bu bölümde tez çalışmamız boyunca kullandığımız yaklaşma yapılarının tanımları ve bazı özellikleri verilecektir. X bir küme ve $A \subset X$ olmak üzere, A kümesinin gösterge fonksiyonu (indicator) θ_A ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \theta_A : X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longmapsto \theta_A(x) = \begin{cases} 0 & , x \in A \\ \infty & , x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.3 $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\delta : X \times 2^X \rightarrow \mathbb{P}$ fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri gerekliyor ise, δ fonksiyonuna X kümesi üzerinde tanımlı bir **uzaklık fonksiyonu** adı verilir:

$$(D1) \forall x \in X, \forall A \in 2^X : x \in A \Rightarrow \delta(x, A) = 0,$$

$$(D2) \forall x \in X : \delta(x, \emptyset) = \infty,$$

$$(D3) \forall x \in X, \forall A, B \in 2^X : \delta(x, A \cup B) = \min\{\delta(x, A), \delta(x, B)\},$$

$$(D4) A^{(\varepsilon)} = \{x \in X \mid \delta(x, A) \leq \varepsilon\} \text{ biçiminde tanımlanmak üzere;}$$

$$\forall x \in X, \forall A \in 2^X, \forall \varepsilon \in \mathbb{P} : \delta(x, A) \leq \delta(x, A^{(\varepsilon)}) + \varepsilon.$$

Ayrıca, X kümesi üzerinde tanımlı bir δ uzaklık fonksiyonu

$$\forall x \in X, \forall A, B \subset X : A \subset B \Rightarrow \delta(x, B) \leq \delta(x, A) \quad (2.1)$$

özelliğine sahiptir (Lowen 1989).

X boş kümeden farklı bir küme ve $x \in X$ olmak üzere $\dot{x}$ süzgeci, $\dot{x} = \{A \subset X | x \in A\}$ biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.4 X bir küme olmak üzere, $\lambda : F(X) \rightarrow \mathbb{P}^X$ fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlıyor ise, λ fonksiyonuna **limit operatörü** adı verilir.

(L1) $\forall x \in X : \lambda \dot{x}(x) = 0$,

(L2) X üzerinde tanımlı süzgeçlerin boş kümeden farklı her $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ süzgeç ailesi için

$$\lambda\left(\bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j\right) = \sup_{j \in J} \lambda \mathcal{F}_j,$$

(L3) Her $\mathfrak{F} \in F(X)$ ve X kümesi üzerinde tanımlı süzgeçlerin keyfi bir $(\sigma(x))_{x \in X}$ ailesi için

$$\lambda\left(\sum \sigma(\mathfrak{F})\right) \leq \lambda \mathfrak{F} + \sup_{x \in X} \lambda(\sigma(x))(x).$$

$\lambda \mathfrak{F}(x)$ değeri, x noktasının $\mathfrak{F}$ süzgecinin limit noktası olma derecesini ifade etmektedir (Lowen 1997).

Tanım 2.5 X kümesi üzerinde tanımlı δ uzaklık fonksiyonu ele alınmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : F(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longmapsto \alpha \mathfrak{F}(x) = \sup_{F \in \mathfrak{F}} \delta(x, F) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona **yığılma operatörü** adı verilir.

$\alpha \mathfrak{F}(x)$ değeri, x noktasının $\mathfrak{F}$ süzgecinin yığılma noktası olma derecesini ifade etmektedir.

Tanım 2.6 $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}^X$ ve $\psi \in \mathbb{P}^X$ olmak üzere,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall w < \infty : \exists \psi_\varepsilon^w \in \mathcal{A} \ni \psi \wedge w \leq \psi_\varepsilon^w + \varepsilon$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise ψ fonksiyonu $\mathcal{A}$ ailesi tarafından **baskılanır** denir. Ayrıca $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}^X$ fonksiyon ailesi baskıladığı her fonksiyonu içeriyor ise $\mathcal{A}$ ailesine **yoğundur** denir (Lowen 1989).

Tanım 2.7 X bir küme ve her $x \in X$ için $\mathcal{A}(x)$, $\mathbb{P}^X$ içinde bir ideal (sonlu supremuma göre kapalı ve bir öğesinden küçük olan öğeyi içerir) olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $\mathcal{A}(x)$ ailesi

$$(A1) \forall \psi \in \mathcal{A}(x) : \psi(x) = 0,$$

$$(A2) \mathcal{A}(x) \text{ ailesi yoğun,}$$

$$(A3) \forall \psi \in \mathcal{A}(x), \forall \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall w < \infty \text{ için } \exists (\psi_z)_{z \in X} \in \prod_{z \in X} \mathcal{A}(z) \text{ vardır öyle ki;}$$

$$\forall z, y \in X : \psi(y) \wedge w \leq \psi_x(z) + \psi_z(y) + \varepsilon$$

özelliklerini sağlıyor ise $(\mathcal{A}(x))_{x \in X}$ ailesine X üzerinde bir **yaklaşma sistemi** adı verilir (Lowen 1989).

Tanım 2.8 $\mathbb{D} \subset qMet(X)$ ve $d \in qMet(X)$ olmak üzere,

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall w < \infty : \exists d_x^{\varepsilon, w} \in \mathbb{D} \text{ öyle ki } d(x, \cdot) \wedge w \leq d_x^{\varepsilon, w} + \varepsilon$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise d fonksiyonu $\mathbb{D}$ ailesi tarafından **yerel baskılanır** denir. Ayrıca $\mathbb{D}$ ailesi, yerel baskıladığı her fonksiyonu içeriyor ise $\mathbb{D}$ ailesine **yerel doyurulmuş** denir.

Tanım 2.9 $\mathcal{G} \subset qMet(X)$ ailesi, $qMet(X)$ içinde bir ideal ve yerel olarak doyurulmuş ise, $\mathcal{G}$ ailesine **ölçek** adı verilir (Lowen 2015).

Tanım 2.10 $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}^X$ fonksiyon ailesi

$$(LR1) \forall \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L} : \bigvee \mathcal{K} \in \mathcal{L},$$

$$(LR2) \forall \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{K} \text{ sonlu elemanlı} : \bigwedge \mathcal{K} \in \mathcal{L},$$

$$(LR3) \forall \mu \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in \mathbb{P} : \mu + \alpha \in \mathcal{L} \text{ (sonlu ötelemelere göre kapalı),}$$

(LR4) $\forall \mu \in \mathcal{L} , \forall \alpha \in [0, \inf \mu] : \mu - \alpha \in \mathcal{L}$.

özelliklerini sağlıyor ise, $\mathcal{L}$ ailesine **alt düzgün fonksiyon çatısı** adı verilir (Lowen 2015).

$\mathfrak{B} \subset \mathbb{P}^X$ fonksiyon ailesi sonlu ötelemelere göre kapalı ise, X kümesi üzerinde tanımlı bir alt düzgün fonksiyon çatısı için bir **alt tabandır**. Eğer, $\mathfrak{B}$ alt tabanı sonlu infimuma göre kapalı ise, X kümesi üzerinde tanımlı bir alt düzgün fonksiyon çatısı için bir **tabandır**.

Uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yaklaşma sistemi ve alt düzgün fonksiyon çatısı yaklaşma yapılarının matematiksel olarak eş yapılar olduğu Lowen tarafından, bu yapıların birbirleri ile izomorf oldukları gösterilerek ispatlanmıştır. Dolayısıyla yaklaşma yapılarından herhangi birinden diğeri elde edilebilmektedir. Bu geçişlerden, çalışmalarımız boyunca kullanacaklarımız aşağıda verilmiştir.

δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen limit operatörü, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$, $x \in X$ ve $\sec \mathfrak{F} = \{A \subset X \mid \forall F \in \mathfrak{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$ olmak üzere

$$\lambda_\delta \mathfrak{F}(x) = \sup_{A \in \sec \mathfrak{F}} \delta(x, A), \quad (2.2)$$

bir $\mathcal{L}$ alt düzgün fonksiyon çatısına karşılık gelen uzaklık fonksiyonu $x \in X$ ve $A \subset X$ olmak üzere

$$\delta_{\mathcal{L}}(x, A) = \sup\{\rho(x) \mid \rho \in \mathcal{L}, \rho|_A = 0\} \quad (2.3)$$

ve δ uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen yaklaşma sistemi

$$\mathcal{A}_\delta(x) = \{\psi \in \mathbb{P}^X \mid \forall A \subset X : \inf_{y \in A} \psi(y) \leq \delta(x, A)\} \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlıdır (Lowen 2015).

Yaklaşma uzayları arasında tanımlı $f : (X, \delta) \rightarrow (X', \delta')$ fonksiyonu her $x \in X$ ve her $A \subset X$ için $\delta'(f(x), f(A)) \leq \delta(x, A)$ eşitsizliğini sağlıyor ise, f fonksiyonuna yaklaşma uzayları arasında tanımlı bir **büzülme dönüşümü** adı verilir .

Objeleri, yaklaşma uzayları ve morfizmleri, yaklaşma uzayları arasında tanımlı büzülme dönüşümleri olan kategori **App** ile gösterilir. App bir topolojik kategoridir ve **Top** kategorisi **App** kategorisinin içine yansılmalı ve ko-yansılmalı olarak gömülür.

Bir (X, δ) yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması

$$cl_\delta(A) = \{x \in X \mid \delta(x, A) = 0\} ; A \subset X. \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlı topolojik kapanış operatörünün ürettiği topolojidir ve bu topoloji τ_δ^{tc} ile gösterilir. Bu kapanış operatörü, alt düzgün fonksiyon çatısı kullanılarak

$$cl_{\mathcal{L}}(A) = \{x \in X \mid \sup\{\rho(x) \mid \rho \in \mathcal{L}, \rho|_A = 0\} = 0\} \quad (2.6)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Bu durumda, ürettiği topoloji $\tau_{\mathcal{L}}^{tc}$ ile ifade edilir.

(X, δ) bir yaklaşma uzayı, $A \subset X$ ve

$$\delta_\tau(x, A) = \begin{cases} 0, & x \in cl_\tau(A) \\ \infty, & x \notin cl_\tau(A) \end{cases}$$

biçiminde tanımlı uzaklık fonksiyonu olmak üzere, X kümesi üzerinde $\delta = \delta_\tau$ eşitliğini sağlayacak biçimde bir τ topolojisi mevcut ise (X, δ) yaklaşma uzayına **topolojik yaklaşma uzayı** adı verilir (Lowen 1997).

Önerme 2.1 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere δ_τ uzaklık fonksiyonuna karşılık elde edilen yaklaşma yapılarından bazıları aşağıdaki gibidir.

- (i) $\forall \mathfrak{F} \in F(X) : \alpha_\tau \mathfrak{F} = \theta_{adh \mathfrak{F}}$ ve $\lambda_\tau \mathfrak{F} = \theta_{lim \mathfrak{F}}$,
- (ii) $\forall x \in X : \mathcal{A}_\tau(x) = \{\psi \in \mathbb{P}^X \mid \psi(x) = 0 \text{ ve } \psi, x \text{ noktasında üstten yarı sürekli}\}$,
- (iii) $\mathcal{G}_\tau = \{d \in qMet(X) \mid \tau_d \subset \tau\}$,
- (iv) $\mathcal{L}_\tau = \{\mu \in \mathbb{P}^X \mid \mu \text{ alttan yarı sürekli}\}$ (Lowen 1997).

Teorem 2.1 $\mathcal{L}$ yaklaşma yapısının topolojik bir yaklaşma yapısı olması için gerek ve yeter şart, aşağıdaki denk önermelerden birinin gerçekleşmesidir.

- (i) $\forall \mu \in \mathcal{L} : \theta_{\{\mu=0\}} \in \mathcal{L}$,
- (ii) $\forall \mu \in \mathcal{L}$ ve $\forall \varepsilon \in [0, \infty[: \theta_{\{\mu \leq \varepsilon\}} \in \mathcal{L}$,
- (iii) $\mathcal{L}$ alt düzgün fonksiyon çatısının en azından bir $\mathfrak{B}$ alt tabanı mevcuttur öyle ki her $\mu \in \mathfrak{B}$ için $\theta_{\{\mu=0\}} \in \mathcal{L}$ (Lowen 1997).

3. HİPERTOPOLOJİLER ÜZERİNDE TANIMLI YAKLAŞMA YAPILARI

Yaklaşma uzaylarının hipertopolojiler ile olan ilişkileri, 1996 yılında Lowen ve Sioen tarafından araştırılmaya başlanmıştır. R.Lowen ve M.Sioen, hipertopolojiler ile ilişkili olacak biçimde yaklaşma yapıları inşa edilip edilemeyeceğini araştırmış ve 1996 yılında Wijsman topoloji, 1998 yılında Proximal topoloji ile ilişkili olacak biçimde yaklaşma yapıları inşa etmişlerdir. 2012 yılında ise Lowen ve Wuyts, Vietoris yaklaşma yapısı ile ilişkili olacak biçimde bir yaklaşma yapısı inşa etmişlerdir.

Bu bölümde, öncelikle bazı hipertopoloji tanımları ve bu hipertopolojiler ile ilişkili olacak biçimde tanımlanan yaklaşma yapıları tanımları aktarılacaktır. Ayrıca, Fell topoloji ile yakından ilişkileri olan Vietoris topoloji tanımı ve Vietoris hipertopolojisi ile ilişkili olacak biçimde tanımlanan Vietoris yaklaşma yapısının inşası ve tanımı verilecektir.

Tanım 3.1 (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \in CL(X)$ olmak üzere,

$$H_d(A, B) = \sup_{x \in X} |\delta_d(x, A) - \delta_d(x, B)|$$

biçiminde tanımlı metrik, Hausdorff metrik olarak adlandırılır ve H_d metriğinin $CL(X)$ üzerinde ürettiği topolojiye **Hausdorff metrik topoloji** adı verilir (Beer 1993).

Tanım 3.2 (X, d) bir metrik uzay ve $x \in X$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_x : CL(X) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A &\longmapsto d_x(A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlardan oluşan $\{d_x\}_{x \in X}$ ailesinin $CL(X)$ üzerinde ürettiği başlangıç topolojisine **Wijsman topoloji** adı verilir. Wijsman topoloji,

$$\mathcal{W}_1 := (\{A \in CL(X) \mid d(x, A) < \alpha\})_{x \in X, \alpha > 0}$$

$$\mathcal{W}_2 := (\{A \in CL(X) \mid d(x, A) > \alpha\})_{x \in X, \alpha > 0}$$

olmak üzere $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ ailesini alttaban kabul eden topolojidir.

Hausdorff metriğine alternatif olarak, Lowen tarafından bir X kümesinin sonlu elemanlı her F alt kümesine karşılık

$$\begin{aligned} d_F : CL(X) \times CL(X) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (A, B) &\longmapsto d_F(A, B) = \sup_{x \in F} |\delta_d(x, A) - \delta_d(x, B)| \end{aligned}$$

metriği ve $\mathfrak{D}_{W_d} = \{d_F \mid F \in 2^{(X)}\}$ metrik ailesi tanımlanmıştır. Daha sonra $\mathfrak{D}_{W_d}$ ailesinin bir ölçek için taban olduğu elde edilmiş ve bu ailenin ürettiği ölçeğe karşılık gelen uzaklık fonksiyonu

$$\begin{aligned} \delta_{W_d} : CL(X) \times 2^{CL(X)} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (A, \mathcal{A}) &\longmapsto \delta_{W_d}(A, \mathcal{A}) = \sup_{F \in 2^{(X)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} d_F(A, B) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır. $(CL(X), \delta_{W_d})$ uzayına **Wijsman Yaklaşma Uzayı** adı verilir (Lowen, Sioen 1996).

Tanım 3.3 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere

$$\{V^- \mid V \in \tau_d\} \cup \{V^{++} \mid V \in \tau_d\}$$

ailesini alt taban kabul eden $CL(X)$ üzerinde tanımlı hipertopolojiye **Proximal topoloji** adı verilir.

Tanım 3.4 (X, d) bir metrik uzay ve $\Delta \subset CL(X)$ olmak üzere; her $T \in \Delta$ ve her $\varepsilon > 0$ için $T^{(\varepsilon)} \in \Delta$ ise, Δ ailesi sonlu genişlemeler altında değişmezdir denir. Ayrıca, sonlu genişlemeler altında değişmez olan Δ ailesi

$$\{\{x\} \mid x \in X\} \subset \Delta$$

özellğine sahip ise, Δ ailesine X kümesinin bir p-örtüsü adı verilir. Δ ailesinin boş kümeden farklı sonlu elemanlı alt kümelerinin ailesi $2_0^{(\Delta)}$ ile gösterilmek üzere her $\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}$

için tanımlanan

$$\begin{aligned} d^\Gamma : CL(X) \times CL(X) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (A, B) &\longmapsto d^\Gamma(A, B) = \sup_{T \in \Gamma} |D_d(A, T) - D_d(B, T)| \end{aligned}$$

metriklerinden oluşan $\mathfrak{D}^{\Delta, d} := \{d^\Gamma \mid \Gamma \in 2_0^{(\Delta)}\}$ ailesi ele alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \delta_{prox(\Delta, d)} : CL(X) \times 2^{CL(X)} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (A, \mathcal{A}) &\longmapsto \delta_{prox(\Delta, d)}(A, \mathcal{A}) = \sup_{\Gamma \in 2_0^{(\Delta)}} \inf_{B \in \mathcal{A}} d^\Gamma(A, B) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon bir uzaklık fonksiyonudur. $(CL(X), \delta_{prox(\Delta, d)})$ ikilisine **Proximal Yaklaşma Uzayı** adı verilir (Lowen, Sioen 1998).

3.1 Vietoris Yaklaşma Yapısı

Fell yaklaşma yapısı inşa edilirken, Lowen ve Wuyts tarafından 2012 yılında tanımlanan Vietoris yaklaşma yapısından esinlenilmiştir. Bu sebeple, Fell yaklaşma yapısının inşası verilmeden önce, Vietoris yaklaşma yapısı ve inşası hakkında bilgi verilecektir.

Vietoris yaklaşma yapısının topolojik ko-yansıması belirli şartlar altında Vietoris topoloji ile çakıştığından öncelikle Vietoris topoloji tanımını verelim.

Tanım 3.5 (X, τ) bir Hausdorff topolojik uzay olmak üzere, $\{V^- \mid V \in \tau\}$ ailesini alt taban kabul eden $CL(X)$ üzerinde tanımlı hipertopolojiye alt-Vietoris topoloji, $\{W^+ \mid W \in \tau\}$ ailesini taban kabul eden $CL(X)$ üzerinde tanımlı hipertopolojiye üst-Vietoris topoloji adı verilir ve sırasıyla τ_V^- ve τ_V^+ biçiminde gösterilir. $\{V^- \mid V \in \tau\} \cup \{W^+ \mid W \in \tau\}$ ailesini alt taban kabul eden, $CL(X)$ üzerinde tanımlı topolojiye ise **Vietoris topoloji** adı verilir (Hola ve Levi 1997).

$\mu \in [0, \infty]^X$ olmak üzere, $\mu^\vee$ ve $\mu^\wedge$ fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} \mu^\vee : CL(X) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ A &\longmapsto \mu^\vee(A) = \sup_{x \in A} \mu(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu^\wedge : CL(X) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ A &\longmapsto \mu^\wedge(A) = \inf_{x \in A} \mu(x)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Özel olarak, μ fonksiyonu yerine gösterge fonksiyonu ele alırsa,

$$\forall A \in CL(X) \text{ için } \theta_A^\wedge = \theta_{A^-} \text{ , } \theta_A^\vee = \theta_{A^+} \quad (3.1)$$

ve

$$\forall \mathcal{A} \subset CL(X) \text{ için } \theta_{\cap \mathcal{A}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} \theta_A \text{ , } \theta_{\cup \mathcal{A}} = \inf_{A \in \mathcal{A}} \theta_A \quad (3.2)$$

eşitlikleri elde edilir. Lowen, Vietoris topoloji ile uyumlu yaklaşma yapısı inşa ederken, topolojik ko-yansıması Vietoris topoloji ile ilişkilendirilebilecek biçimde bir inşa hedeflemiştir. Dolayısıyla, inşa edilen çatı Vietoris topolojiye göre alttan yarı sürekli fonksiyonları içermelidir. $\theta_A^\wedge$ ve $\theta_A^\vee$ fonksiyonlarının Vietoris topolojiye göre alttan yarı sürekli fonksiyonlar olduğu Önerme 2.1 (iv) ve (3.1) eşitliklerinden açıktır.

Vietoris yaklaşma yapısı, Vietoris topolojiye benzer şekilde iki ayrı aile yardımıyla tanımlanır. $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olsun. Sonlu ötelemelere ve sonlu infimuma göre kapalı olan $\mathcal{L}^\wedge = \{\mu^\wedge \mid \mu \in \mathcal{L}\}$ ailesi bir alt düzgün fonksiyon çatısı için bir tabandır ve ürettiği

$$\mathcal{L}_V^\wedge = \{\sup_{j \in J} \mu_j^\wedge \mid \forall j \in J : \mu_j \in \mathcal{L}\}$$

alt düzgün fonksiyon çatısına Vietoris $\wedge$ -yapı adı verilir. Benzer şekilde, sonlu ötelemelere göre kapalı olan $\mathcal{L}^\vee = \{\mu^\vee \mid \mu \in \mathcal{L}\}$ ailesi bir alt düzgün fonksiyon çatısı için bir alt tabandır ve ürettiği

$$\mathcal{L}_V^\vee = \{\sup_{j \in J} \inf_{k \in I_j} \mu_{j,k}^\vee \mid \forall j, k \in I_j : I_j \subset J \text{ sonlu elemanlı}, \mu_{j,k} \in \mathcal{L}\}$$

fonksiyon çatısına Vietoris $\vee$ -yapı adı verilir. $\mathcal{L}^\wedge$ ve $\mathcal{L}^\vee$ ailelerinin birleşimini alt

taban kabul eden alt düzgün fonksiyon çatısı

$$\mathcal{L}_V = \{\sup_{j \in J} (\mu_j^\wedge \bigwedge \inf_{k \in I_j} \mu_{j,k}^\vee) \mid \forall j, k \in I_j : I_j \subset J \text{ sonlu elemanlı}, \mu_j, \mu_{j,k} \in \mathcal{L}\}$$

biçiminde tanımlıdır, bu yaklaşma yapısına Vietoris yaklaşma yapısı ve $(CL(X), \mathcal{L}_V)$ ikilisine **Vietoris Yaklaşma Uzayı** adı verilir (Lowen ve Wuyts 2012).

$(X, \mathcal{L})$ topolojik bir yaklaşma uzayı olmak üzere, $CL(X)$ üzerinde tanımlanan $\mathcal{L}_V^\wedge, \mathcal{L}_V^\vee$ ve $\mathcal{L}_V$ yaklaşma yapıları ele alındığında, $(CL(X), \mathcal{L}^\wedge), (CL(X), \mathcal{L}_V^\vee)$ ve $(CL(X), \mathcal{L}_V)$ yaklaşma uzayları da topolojik yaklaşma uzaylarıdır. Ayrıca, $\mathcal{L}^\wedge, \mathcal{L}_V^\vee$ ve $\mathcal{L}_V$ yaklaşma yapılarının topolojik ko-yansımaları sırasıyla $\tau_{\mathcal{L}^\wedge}, \tau_{\mathcal{L}_V^\vee}$ ve $\tau_{\mathcal{L}_V}$ olmak üzere:

$$\tau_{\mathcal{L}^\wedge} = \tau_V^+, \tau_{\mathcal{L}_V^\vee} = \tau_V^- \text{ ve } \tau_{\mathcal{L}_V} = \tau_V \quad (3.3)$$

eşitlikleri gerçekleşir. Lowen, topolojik bir yaklaşma uzayı yerine herhangi bir yaklaşma uzayı ele alarak yola çıkılırsa benzer sonuçlar elde edip edemeyeceğini araştırmış; $(X, \mathcal{L})$ yaklaşma uzayı olmak üzere $\tau_{\mathcal{L}_V^\vee} = (\tau_{\mathcal{L}})_V^-$ eşitliğinin gerçekleştiğini ancak,

$$\tau_{\mathcal{L}^\wedge} = (\tau_{\mathcal{L}})_V^+ \text{ ve } \tau_{\mathcal{L}_V} = (\tau_{\mathcal{L}})_V \quad (3.4)$$

eşitliklerinin ise sadece $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ üzerinde gerçekleştiğini göstermiştir. Dolayısıyla, Vietoris yaklaşma yapısının topolojik ko-yansımaları belli şartlar altında Vietoris topoloji ile çakışmaktadır (Lowen ve Wuyts 2012).

4. FELL YAKLAŞMA YAPISI

Bu bölümde, referansları belirtilenler haricinde verilen kavram ve sonuçların tümü (Ateş ve Sağıroğlu 2023) çalışmasından alınmıştır. Söz konusu çalışmada bir $(X, \mathcal{L})$ Hausdorff yaklaşma uzayı ele alınarak bu yapıya karşılık elde edilen Fell yaklaşma yapısı inşa edilmiş ve temel özellikleri incelenmiştir. Aşağıda Fell yaklaşma yapısının Fell topoloji ile olan ilişkileri de incelendiğinden öncelikle Fell topoloji tanımını hatırlatmak anlamlı olacaktır.

Tanım 4.1 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $CL(X)$ üzerinde tanımlı

$$\{W^+ \mid W \in \tau, X - W \in K(X)\}$$

ailesini taban kabul eden topolojiye üst Fell topoloji,

$$\{V^- \mid V \in \tau\}$$

ailesini alt taban kabul eden topolojiye alt Fell topoloji,

$$\{V^- \mid V \in \tau\} \cup \{W^+ \mid W \in \tau, X - W \in K(X)\}$$

ailesini alt taban kabul eden topolojiye ise **Fell topoloji** adı verilir ve bu topolojiler sırasıyla $\tau_{Fell}^+, \tau_{Fell}^-$ ve τ_{Fell} ile gösterilir (Hodel ve Levi 1997).

Fell yaklaşma yapısının inşası için, Lowen tarafından tanımlanan $\mu^\wedge$ fonksiyonunun tanımının kompakt kümeler kullanılarak modifiye edilmesi gerekmektedir. X kümesinin boş kümeden farklı ve $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine göre kapalı olan alt kümelerinin ailesi $CL(X)$, boş kümeden farklı ve $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine göre kompakt olan alt kümelerinin ailesi ise $K(X)$ ile gösterilecektir. $\mu \in \mathbb{P}^X$ ve $B \in K(X)$ olmak üzere $\mu_B^\wedge$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mu_B^\wedge : CL(X) &\longrightarrow \mathbb{P} \\ A &\longmapsto \mu_B^\wedge(A) = \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu tanımda, μ fonksiyonu yerine gösterge fonksiyonu ele alınması durumunda Önerme 4.1' de ifade edilecek olan ve çalışmalarımız için önem

taşıyan bazı eşitlikler elde edilir. Önerme 4.1' in ispatını basitleştirmek için gerekli olan bazı aşikar eşitlikler ise aşağıda ifade edilmiştir.

$\mathcal{A} \subset CL(X)$, $B \in K(X)$ ve $C \in CL(X)$ için

$$\inf_{x \in B \cap C} \sup_{A \in \mathcal{A}} \theta_A(x) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \inf_{x \in B \cap C} \theta_A(x), \quad (4.1)$$

$A, C \in CL(X)$, $\mathcal{B} \subset K(X)$ ve $|\mathcal{B}| < \infty$ için

$$\min_{B \in \mathcal{B}} \inf_{x \in B \cap C} \theta_A(x) = \inf_{x \in (\cup \mathcal{B}) \cap C} \theta_A(x) \quad (4.2)$$

gerçeklenir. Aslında (4.1), (4.2) ve Önerme 4.1' de ifade edilen eşitlikler, herhangi bir topolojik uzayın kapalı alt kümeler ailesi göz önüne alındığında da elde edilebilir. Ancak, yukarıdaki kabuller nedeniyle bir $\mathcal{L}$ yaklaşma yapısı göz önüne alınarak $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine karşılık gelen aileler için ifade edilmiştir.

Önerme 4.1 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olsun ve X üzerinde $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisi ele alınsın. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir.

- (i) $\forall A \in CL(X), \forall B \in K(X) : (\theta_A)_B^\wedge = \theta_{(A \cap B)^-}$,
- (ii) $\forall \mathcal{A} \subset CL(X), \forall B \in K(X) : (\theta_{\cup \mathcal{A}})_B^\wedge = \inf_{A \in \mathcal{A}} (\theta_A)_B^\wedge$,
- (iii) $\forall A \in CL(X), \mathcal{B} \subset K(X)$ ve $|\mathcal{B}| < \infty : (\theta_A)_{\cup \mathcal{B}}^\wedge = \min_{B \in \mathcal{B}} (\theta_A)_B^\wedge$.

İspat. Gösterge fonksiyonun iki değerli olduğu göz önünde bulundurularak ispat yapılacaktır.

(i) $A, C \in CL(X)$ ve $B \in K(X)$ olsun. $(\theta_A)_B^\wedge(C) = \infty$ olması durumunda,

$$B \cap C = \emptyset \text{ veya } A \cap B \cap C = \emptyset$$

olur. Her iki durumda da $C \notin (A \cap B)^-$ olacağından $\theta_{(A \cap B)^-}(C) = \infty$ elde edilir. Benzer şekilde, $\theta_{(A \cap B)^-}(C) = \infty$ olması durumunda $(\theta_A)_B^\wedge(C) = \infty$ olduğu gösterilebilir. $(\theta_A)_B^\wedge(C) = 0$ olması durumunda ise $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ olacağından $\theta_{(A \cap B)^-}(C) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $\theta_{(A \cap B)^-}(C) = 0$ olması durumunda $(\theta_A)_B^\wedge(C) = 0$ olduğu gösterilebilir.

(ii) $\mathcal{A} \subset CL(X)$ ve $B \in K(X)$ olsun. $C \in CL(X)$ olmak üzere, $B \cap C = \emptyset$ olması

durumunda (3.2) eşitliği kullanılarak,

$$(\theta_{\cup \mathcal{A}})_B^\wedge(C) = \inf_{x \in B \cap C} \theta_{\cup \mathcal{A}}(x) = \inf_{x \in B \cap C} \inf_{A \in \mathcal{A}} \theta_A(x) = \infty$$

ve

$$\inf_{A \in \mathcal{A}} (\theta_A)_B^\wedge(C) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \inf_{x \in B \cap C} \theta_A(x) = \infty$$

elde edilir. $B \cap C \neq \emptyset$ olması durumunda ise tekrar (3.2) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} (\theta_{\cup \mathcal{A}})_B^\wedge(C) &= \inf_{x \in B \cap C} \theta_{\cup \mathcal{A}}(x) \\ &= \inf_{x \in B \cap C} \inf_{A \in \mathcal{A}} \theta_A(x) \\ &= \inf_{A \in \mathcal{A}} \inf_{x \in B \cap C} \theta_A(x) \\ &= \inf_{A \in \mathcal{A}} (\theta_A)_B^\wedge(C) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $A \in CL(X)$, $\mathcal{B} \subset K(X)$, $|\mathcal{B}| < \infty$ ve $C \in CL(X)$ olsun. Bu durumda, $(\cup \mathcal{B}) \cap C = \emptyset$ ise

$$(\theta_A)_{\cup \mathcal{B}}^\wedge(C) = \inf_{x \in (\cup \mathcal{B}) \cap C} \theta_A(x) = \infty$$

ve

$$\min_{B \in \mathcal{B}} (\theta_A)_B^\wedge(C) = \min_{B \in \mathcal{B}} \inf_{x \in B \cap C} \theta_A(x) = \infty$$

olduğundan eşitlik sağlanır. $(\cup \mathcal{B}) \cap C \neq \emptyset$ ise (4.2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \min_{B \in \mathcal{B}} (\theta_A)_B^\wedge(C) &= \min_{B \in \mathcal{B}} \inf_{x \in B \cap C} \theta_A(x) \\ &= \inf_{x \in (\cup \mathcal{B}) \cap C} \theta_A(x) \\ &= (\theta_A)_{\cup \mathcal{B}}^\wedge(C) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 4.2 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}} = \{\mu_B^{\wedge} \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)\}$$

ailesi, bir alt düzgün fonksiyon çatısı için alt tabandır. Bu alt tabanın ürettiği fonksiyon çatısı,

$$\mathcal{L}_{Fell}^{\wedge} = \left\{ \sup_{j \in J} \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^{\wedge} \mid J \neq \emptyset, j \in J, \mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}, K_j \subset K(X), \mathcal{L}_j \text{ ve } K_j \text{ sonlu elemanlı} \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

İspat. $\mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)$, $\alpha > 0$ ve $A \in CL(X)$ olmak üzere,

$$(\mu_B^{\wedge} + \alpha)(A) = \mu_B^{\wedge}(A) + \alpha = \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) + \alpha = \inf_{x \in A \cap B} (\mu + \alpha)(x) = (\mu + \alpha)_B^{\wedge}(A)$$

ve $(\mu + \alpha) \in \mathcal{L}$ olduğundan $(\mu + \alpha)_B^{\wedge} \in \mathcal{L}^{\wedge_{Fell}}$ olup, $\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}}$ sonlu ötelemelere göre kapalıdır. Dolayısıyla, bir alt düzgün fonksiyon çatısı için alt tabandır. Alt tabanın sonlu elemanlı alt ailelerinin öğelerinin infimumlarının oluşturduğu

$$\left\{ \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^{\wedge} \mid \mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}, K_j \subset K(X), \mathcal{L}_j \text{ ve } K_j \text{ sonlu elemanlı} \right\}$$

ailesi bir alt düzgün fonksiyon çatısı için tabandır. Tabanın keyfi elemanlı alt ailelerinin öğelerinin supremumlarının oluşturduğu alt düzgün fonksiyon çatısı ise $\mathcal{L}_{Fell}^{\wedge}$ biçiminde ifade edilir. ■

$\mathcal{L}_{Fell}^{\wedge}$ yaklaşma yapısına **Fell $\wedge$ -yapı** adı verilir. Fell topoloji, τ_{Fell}^+ ve τ_V^- topolojilerinin tabanları yardımıyla inşa edilmiştir. Benzer düşünce ile, $\wedge$ -Fell ve $\vee$ -Vietoris yaklaşma yapıları yardımıyla, $CL(X)$ üzerinde Fell yaklaşma yapısının inşası aşağıdaki şekilde yapılır:

Teorem 4.1 $\mathcal{L}^{\vee} \cup \mathcal{L}^{\wedge_{Fell}}$ ailesi sonlu ötelemelere göre kapalıdır. Dolayısıyla, bir alt düzgün fonksiyon çatısı için alt tabandır. $\mathcal{L}^{\vee} \cup \mathcal{L}^{\wedge_{Fell}}$ ailesinin ürettiği alt düzgün fonksiyon çatısı,

$$\mathcal{L}_{Fell} = \left\{ \sup_{j \in J} \left(\inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^{\wedge} \bigwedge \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^{\vee} \right) \mid \mathcal{L}_j, \mathcal{L}_{t_j} \subset \mathcal{L}, K_j \subset K(X), \mathcal{L}_j, \mathcal{L}_{t_j} \text{ ve } K_j \text{ sonlu elemanlı} \right\}$$

biçiminde tanımlıdır ve $\mathcal{L}_{Fell}$ fonksiyon çatısına, **Fell yaklaşma yapısı** adı verilir.

Teorem 4.2 ifade ve ispat edilmeden önce, Teorem 4.2' nin ispatında kullanılacak olan yardımcı bir teorem verilecektir:

Lemma 4.1 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olmak üzere,

$$\forall \mu \in \mathcal{L}, \forall B \in K(X) : \theta_{\{\mu_B^\wedge=0\}} = \sup_{\varepsilon>0} \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. $A \in CL(X)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0} \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}(A) = \infty &\implies \exists \varepsilon > 0 \ni \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}(A) = \infty \\ &\implies \exists \varepsilon > 0 : A \cap (\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B) = \emptyset \\ &\implies \exists \varepsilon > 0 : A \cap B \subset \{\mu > \varepsilon\} \\ &\implies \exists \varepsilon > 0 : \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) \geq \varepsilon > 0 \\ &\implies A \notin \{\mu_B^\wedge = 0\} \\ &\implies \theta_{\{\mu_B^\wedge=0\}} = \infty \end{aligned}$$

elde edilir. $\theta_{\{\mu_B^\wedge=0\}}(A) = \infty$ ise $A \notin \{\mu_B^\wedge = 0\}$, yani $\inf_{x \in A \cap B} \mu(x) > 0$ olur. Bu durumda, $\inf_{x \in A \cap B} \mu(x) < \infty$ veya $\inf_{x \in A \cap B} \mu(x) = \infty$ olacak biçimde iki durum söz konusudur.

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) < \infty &\implies \exists \alpha > 0 \ni \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) = \alpha > \frac{\alpha}{2} > 0 \\ &\implies \exists \alpha > 0 \ni \forall x \in A \cap B : \mu(x) > \frac{\alpha}{2} \\ &\implies \exists \alpha > 0 \ni A \cap B \cap \{\mu \leq \frac{\alpha}{2}\} = \emptyset \\ &\implies \exists \alpha > 0 : \theta_{(\{\mu \leq \alpha\} \cap B)^-}(A) = \infty \\ &\implies \sup_{\varepsilon>0} \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}(A) = \infty \end{aligned}$$

elde edilir. $\inf_{x \in A \cap B} \mu(x) = \infty$ olması durumunda ise $A \cap B = \emptyset$ veya her $x \in A \cap B$

için $\mu(x) = \infty$ olabilir. Her iki durumda da,

$$\forall \varepsilon > 0 : A \cap B \cap \{\mu \leq \varepsilon\} = \emptyset$$

olacağından $\sup_{\varepsilon > 0} \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}(A) = \infty$ elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \theta_{\{\mu_B^\wedge=0\}}(A) = 0 &\iff A \in \{\mu_B^\wedge = 0\} \\ &\iff \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) = 0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in A \cap B \ni \mu(x_\varepsilon) \leq \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap B \cap \{\mu \leq \varepsilon\} \neq \emptyset \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 : \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}(A) = 0 \\ &\iff \sup_{\varepsilon > 0} \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}(A) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.2 $(X, \mathcal{L})$ topolojik Hausdorff yaklaşma uzayı olmak üzere, aşağıdaki önermeler gerçekleşir.

- (i) $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell}^\wedge)$ bir topolojik yaklaşma uzayı ve $\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge} = \tau_{Fell}^+$ dir.
- (ii) $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell})$ bir topolojik yaklaşma uzayı ve $\tau_{\mathcal{L}_{Fell}} = \tau_{Fell}$ dir.

İspat. (i) Keyfi $\mu \in \mathcal{L}$ ve $B \in K(X)$ için $\theta_{\{\mu_B^\wedge=0\}} \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ olduğu gösterilirse, Teorem 2.1 (iii)' den $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell}^\wedge)$ topolojik yaklaşma uzayıdır. $(X, \mathcal{L})$ topolojik yaklaşma uzayı olduğundan Teorem 2.1 (ii)' den her $\varepsilon \geq 0$ için $\theta_{\{\mu \leq \varepsilon\}} \in \mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ ailesinin tanımından $(\theta_{\{\mu \leq \varepsilon\}})_B^\wedge \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ elde edilir. O halde, alt düzgün fonksiyon çatıları keyfi supremuma göre kapalı olduğundan

$$\theta_{\{\mu_B^\wedge=0\}} = \sup_{\varepsilon > 0} (\theta_{\{\mu \leq \varepsilon\}})_B^\wedge$$

eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. Önerme 4.1 (i)' den,

$$\sup_{\varepsilon > 0} (\theta_{\{\mu \leq \varepsilon\}})_B^\wedge = \sup_{\varepsilon > 0} \theta_{(\{\mu \leq \varepsilon\} \cap B)^-}$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, Lemma 4.1' den, $\theta_{\{\mu_B^\wedge=0\}} \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ olup, $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell}^\wedge)$

topolojik yaklaşma uzayıdır. $(\tau_{Fell}^+)^c$ ailesinin tabanı $\{K^- \mid K \in K(X)\}$ olduğundan,

$$\{K^- \mid K \in K(X)\} \subset (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c$$

kapsamasının gerçekleştiği gösterilirse, $(\tau_{Fell}^+)^c \subset (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c$ olduğu söylenebilir. $K \in K(X)$ alalım. $(X, \mathcal{L})$ topolojik yaklaşma uzayı olduğundan $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\sigma$ olacak biçimde, X üzerinde tanımlı bir σ topolojisi mevcuttur. Dolayısıyla, K kümesinin gösterge fonksiyonu

$$\theta_K : (X, \sigma) \longrightarrow [0, \infty]$$

için $\alpha > 0$ olmak üzere $\theta_K^{-1}([0, \alpha]) = K \in \sigma^c$ olduğundan θ_K , σ topolojisine göre alttan yarı sürekli, yani $\theta_K \in \mathcal{L}$ olur. $\theta_K \in \mathcal{L}$ olduğu için $(\theta_K)_K^\wedge \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ elde edilir. $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell}^\wedge)$ topolojik yaklaşma uzayı olduğundan $\{(\theta_K)_K^\wedge = 0\} \in (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c$ olur. $K^- = \{(\theta_K)_K^\wedge = 0\}$ eşitliği kolayca elde edilebileceğinden $(\tau_{Fell}^+)^c \subset (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c$ kapsaması gerçekleşir. Kapsamanın diğer tarafı için,

$$\{\sup_{j \in J} \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge \leq \alpha\} = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_j} \bigcup_{B \in K_j} \{\mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon\}$$

eşitliği ve her $j \in J$, her $\varepsilon > 0$, her $\mu \in \mathcal{L}_j$ ve her $B \in K_j$ için

$$\{\mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon\} \in (\tau_{Fell}^+)^c$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A \in \{\sup_{j \in J} \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge \leq \alpha\} &\iff \forall j \in J : \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge(A) \leq \alpha \\ &\iff \forall j \in J, \forall \varepsilon > 0 : \exists \mu_\varepsilon \in \mathcal{L}_j, \exists B_\varepsilon \in K_j \ni (\mu_\varepsilon)_{B_\varepsilon}(A) \leq \alpha + \varepsilon \\ &\iff \forall j \in J, \forall \varepsilon > 0 : A \in \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_j} \bigcup_{B \in K_j} \{\mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon\} \\ &\iff A \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_j} \bigcup_{B \in K_j} \{\mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\{\mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon\} \in (\tau_{Fell}^+)^c$ olduğunu söyleyebilmek için her $\alpha > 0$ için

$\{\mu_B^\wedge \leq \alpha\} \in (\tau_{Fell}^+)^c$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Diğer yandan,

$$\forall B \in K(X), \forall \alpha > 0 : \{\mu_B^\wedge \leq \alpha\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\{\mu \leq \alpha + \varepsilon\} \cap B)^-$$

eşitliği kolayca elde edilir. Her $B \in K(X)$, $\alpha > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $(\{\mu \leq \alpha + \varepsilon\} \cap B)^- \in (\tau_{Fell}^+)^c$ olduğundan ispat tamamlanır.

(ii) Her $\mu \in \mathcal{L}^\vee \cup \mathcal{L}^{\wedge Fell}$ için $\theta_{\{\mu=0\}} \in \mathcal{L}_{Fell}$ olduğu gösterilirse, Teorem 2.1 (iii)' den $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell})$ topolojik yaklaşma uzayıdır. $\mu \in \mathcal{L}^\vee$ ise $(CL(X), \mathcal{L}_V^\vee)$ topolojik yaklaşma uzayı olduğundan, Teorem 2.1 (iii)' den $\theta_{\{\mu=0\}} \in \mathcal{L}_V^\vee$ bulunur. $\mathcal{L}_V^\vee \subset \mathcal{L}_{Fell}$ kapsamı yaklaşma yapılarının tanımından kolayca görülebileceğinden $\theta_{\{\mu=0\}} \in \mathcal{L}_{Fell}$ elde edilir. Diğer yandan, $\mu \in \mathcal{L}^{\wedge Fell}$ ise $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell}^\wedge)$ topolojik yaklaşma uzayı olduğundan Teorem 2.1 (iii)' den $\theta_{\{\mu=0\}} \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ bulunur. $\mathcal{L}_{Fell}^\wedge \subset \mathcal{L}_{Fell}$ kapsamı yaklaşma yapılarının tanımından kolayca görülebileceğinden $\theta_{\{\mu=0\}} \in \mathcal{L}_{Fell}$ elde edilir. Dolayısıyla, $(CL(X), \mathcal{L}_{Fell})$ topolojik yaklaşma uzayıdır. Şimdi, $(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c = (\tau_{Fell})^c$ eşitliğini ispatlayalım: $(\tau_{Fell})^c$ topolojisinin alt tabanı,

$$\mathcal{S} = \{K^- \mid K \in K(X)\} \cup \{K^+ \mid K \in CL(X)\}$$

olduğundan $\mathcal{S}$ ailesinin her bir ögesinin $(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$ ailesine ait olduğu gösterilirse, $(\tau_{Fell})^c \subset (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$ kapsamı gerçekleşir. $\mathcal{S}$ ailesinin bir $\mathcal{A}$ ögesini alalım. $\mathcal{A} = K^-$ olacak biçimde en azından bir $K \in K(X)$ mevcut olsun. (i) önermesinin ispatından, $K^- = \{(\theta_K)_K^\wedge = 0\}$ ve $\{(\theta_K)_K^\wedge = 0\} \in (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $\mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ ve $\mathcal{L}_{Fell}$ topolojik olduğundan ve $\mathcal{L}_{Fell}^\wedge \subset \mathcal{L}_{Fell}$ kapsamından;

$$(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c = \{h^{-1}([0, \alpha]) \mid h \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge, \alpha > 0\} \subset \{h^{-1}([0, \alpha]) \mid h \in \mathcal{L}_{Fell}, \alpha > 0\} = (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$$

gerçeklenir ve $\mathcal{A} \in (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$ elde edilir. Diğer yandan, $\mathcal{A} = K^+$ olacak biçimde en azından bir $K \in CL(X)$ mevcut olsun. $K^+ = \{\theta_K^\vee = 0\}$ eşitliği kolayca gösterilebilir. $\{\theta_K^\vee = 0\} \in (\tau_{\mathcal{L}_V^\vee})^c$ ve $\mathcal{L}_V^\vee$ topolojik yaklaşma yapıları olduğundan

$$(\tau_{\mathcal{L}_V^\vee})^c = \{h^{-1}([0, \alpha]) \mid h \in \mathcal{L}_V^\vee, \alpha > 0\} \subset \{h^{-1}([0, \alpha]) \mid h \in \mathcal{L}_{Fell}, \alpha > 0\} = (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$$

bulunur ve böylece $\mathcal{A} \in (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$ elde edilir. $(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c \subset (\tau_{Fell})^c$ kapsamasını ispatlamak için $h \in \mathcal{L}_{Fell}$ olmak üzere, keyfi $\alpha > 0$ için $h^{-1}([0, \alpha]) \in (\tau_{Fell})^c$ olduğu gösterilmelidir. $h \in \mathcal{L}_{Fell}$ olduğundan,

$$h = \sup_{j \in J} \left(\inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge \bigwedge \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee \right)$$

olacak biçimde sonlu elemanlı $\mathcal{L}_j, \mathcal{L}_{t_j} \subset \mathcal{L}, K_j \subset K(X)$ alt aileleri mevcuttur. O halde,

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{j \in J} \left(\inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge \bigwedge \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee \right) \leq \alpha \right\} &= \left(\bigcap_{j \in J} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_j} \bigcup_{B \in K_j} \{ \mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon \} \right) \\ &\cup \left(\bigcap_{j \in J} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \{ \mu^\vee \leq \alpha + \varepsilon \} \right) \end{aligned}$$

eşitliği gösterilirse ispat tamamlanır. $A \in CL(X)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A \in \left\{ \sup_{j \in J} \left(\inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge \bigwedge \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee \right) \leq \alpha \right\} &\implies \forall j \in J : \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge(A) \bigwedge \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee(A) \leq \alpha \\ &\implies \forall j \in J : \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge(A) \leq \alpha \text{ veya } \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee(A) \leq \alpha \end{aligned}$$

ve dolayısıyla, her $j \in J$ için

$$\left(\forall \varepsilon > 0 : \exists \mu_\varepsilon \in \mathcal{L}_j, \exists B_\varepsilon \in K_j \ni A \in \{ (\mu_\varepsilon)_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon \} \right)$$

veya

$$\left(\forall \varepsilon > 0 : \exists \mu_\varepsilon \in \mathcal{L}_{t_j} \ni A \in \{ \mu_\varepsilon^\vee \leq \alpha + \varepsilon \} \right)$$

olup,

$$\forall j \in J : \left[\left(A \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \{ \mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon \} \right) \vee \left(A \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \{ \mu^\vee \leq \alpha + \varepsilon \} \right) \right]$$

olur ve dolayısıyla,

$$A \in \left(\bigcap_{j \in J} \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_j} \bigcup_{B \in K_j} \{\mu_B^\wedge \leq \alpha + \varepsilon\} \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \{\mu^\vee \leq \alpha + \varepsilon\} \right)$$

elde edilir. Kapsamanın diğer tarafı da benzer olarak gösterilir ve böylece $\tau_{\mathcal{L}_{\text{Fell}}} = \tau_{\text{Fell}}$ elde edilir. ■

Lemma 4.2 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler gerçektir.

- (i) $\forall \mu \in \mathcal{L}$ ve $\forall B \in K(X): \{\mu_B^\wedge = 0\} = (\{\mu = 0\} \cap B)^-$,
- (ii) $\forall \mu \in \mathcal{L}: \{\mu = 0\}^+ = \{\mu^\vee = 0\}$,
- (iii) $\forall K \in CL(X): \left(\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\} \right)^- = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho_K^\wedge = 0\}$.

İspat. (i) Öncelikle μ fonksiyonunun $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine göre alttan yarı sürekli, yani $\mu \in \mathcal{L}$ ve $\alpha > 0$ için $\{\mu \leq \alpha\} \in (\tau_{\mathcal{L}})^c$ olduğunu gösterelim: $\{\mu \leq \alpha\} \subset cl_{\mathcal{L}}(\{\mu \leq \alpha\})$ olduğu açıktır. Ayrıca (4.2) eşitliğinden,

$$cl_{\mathcal{L}}\{\mu \leq \alpha\} = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_{\{\mu \leq \alpha\}} = 0}} \{\rho = 0\}$$

eşitliği mevcut olduğundan,

$$\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_{\{\mu \leq \alpha\}} = 0}} \{\rho = 0\} \subset \{\mu \leq \alpha\}$$

kapsamasının gösterilmesi yeterlidir. $x \notin \{\mu \leq \alpha\}$ olsun. Bu durumda,

$\rho := (\mu - \alpha) \vee 0$ alınırsa, $\rho(x) > 0$ olup

$$x \notin \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_{\{\mu \leq \alpha\}} = 0}} \{\rho = 0\}$$

elde edilir ve böylece μ fonksiyonu $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine göre alttan yarı sürekli. Diğer yandan,

$$A \in \{\mu_B^\wedge = 0\} \iff \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) = 0$$

olup, $A \cap B$ kompakt ve μ fonksiyonu $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine göre alttan yarı sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A \cap B} \mu(x) = 0 &\iff \exists x \in A \cap B : \mu(x) = 0 \\ &\iff A \cap B \cap \{\mu = 0\} \neq \emptyset \\ &\iff A \in \{\{\mu = 0\} \cap B\}^- \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $\mu \in \mathcal{L}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A \in \{\mu = 0\}^+ &\iff \forall x \in A : \mu(x) = 0 \\ &\iff \sup_{x \in A} \mu(x) = 0 \\ &\iff A \in \{\mu^\vee = 0\} \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $K \in CL(X)$ olmak üzere

$$\left(\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\} \right)^- = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\}^- \quad \text{ve} \quad \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\}^- = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho_K^\wedge = 0\}$$

eşitlikleri gösterilirse ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned} A \in \left(\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\} \right)^- &\iff A \cap \left(\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\} \right) \neq \emptyset \\ &\iff \exists a \in A \exists \forall \rho \in \mathcal{L}, K \subset \{\rho = 0\} : a \in \{\rho = 0\} \\ &\iff \forall \rho \in \mathcal{L} \exists K \subset \{\rho = 0\} : A \cap \{\rho = 0\} \neq \emptyset \\ &\iff A \in \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\}^- \end{aligned}$$

olup ilk eşitlik sağlanır. İkinci eşitlik için,

$$\begin{aligned}
A \in \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\}^- &\implies \forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : A \in \{\rho = 0\}^- \\
&\implies \forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : \exists a \in A \ni \rho(a) = 0 \\
&\implies \forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : \inf_{a \in A} \rho(a) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $K \in CL(X)$ olduğundan Teorem 4.2 den,

$$K = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\}$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda, ilk eşitlik kullanılırsa $A \in K^-$ olup,

$$\forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : \inf_{a \in A \cap K} \rho(a) = 0$$

olduğu ve $\rho_K^\wedge$ nın tanımı kullanılırsa,

$$\forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : A \in \{\rho_K^\wedge = 0\}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $A \in \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho_K^\wedge = 0\}$ elde edilir. Kapsamanın diğer yönünü göstermek için $A \in \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho_K^\wedge = 0\}$ alalım. Bu durumda,

$$\forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : \inf_{a \in A \cap K} \rho(a) = 0$$

elde edilir. ρ fonksiyonu, $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine göre alttan yarı sürekli ve $A \cap K \in K(X)$ olduğundan

$$\forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : \exists a \in A \cap K \ni \rho(a) = 0$$

olur ve böylece

$$\forall \rho \in \mathcal{L} \ni K \subset \{\rho = 0\} : A \cap \{\rho = 0\} \neq \emptyset$$

elde edilir. Dolayısıyla, $A \in \bigcap_{\rho|_K=0}^{\rho \in \mathcal{L}} \{\rho = 0\}^-$ olup ikinci eşitlik sağlanır. ■

Topolojik bir yaklaşma uzayı yerine herhangi bir yaklaşma uzayı ele alındığında, $\mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ ve $\mathcal{L}_{Fell}$ yaklaşma yapılarının üst-Fell ve Fell topolojiler ile olan ilişkilerini ifade eden teorem verilmeden önce, bu teoremin ispatında kullanılacak olan yardımcı bir teoremi hatırlatalım.

Lemma 4.3 $\mathcal{L}$, X kümesi üzerinde tanımlı bir alt düzgün fonksiyon çatısı olmak üzere,

(i) $\mathcal{B}$ ailesi, $\mathcal{L}$ için taban ise $\mathcal{C} := \{\{\rho = 0\} \mid \rho \in \mathcal{B}\}$ ailesi, $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisinin kapalılar ailesi için tabandır.

(ii) $\mathcal{S}$ ailesi, $\mathcal{L}$ için alt taban ise $\mathcal{T} := \{\{\rho = 0\} \mid \rho \in \mathcal{S}\}$ ailesi, $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisinin kapalılar ailesi için alt tabandır (Lowen ve Wuyts 2012).

Teorem 4.3 $(X, \mathcal{L})$ bir Hausdorff yaklaşma uzayı olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

(i) $\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge} = (\tau_{\mathcal{L}})_{Fell}^+$

(ii) $\tau_{\mathcal{L}_{Fell}} = (\tau_{\mathcal{L}})_{Fell}$

İspat. (i) $\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}} = \{\mu_B^\wedge \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)\}$ ailesi $\mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ ailesinin alt tabanı olduğundan, Lemma 4.3 (ii) den,

$$\mathcal{S} = \left\{ \{\mu_B^\wedge = 0\} \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X) \right\}$$

ailesi de $\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}$ topolojisinin kapalılar ailesi için bir alt tabandır. Ayrıca,

$$\mathcal{B} = \{K^- \mid K \in K(X)\}$$

ailesinin de $(\tau_{\mathcal{L}})_{Fell}^+$ topolojisinin kapalılar ailesi için bir taban olduğunu biliyoruz.

$\mathcal{S}$ ailesinin bir $\mathcal{A}$ ögesi ele alınırsa,

$$\exists \mu \in \mathcal{L}, \exists B \in K(X) : \mathcal{A} = \{\mu_B^\wedge = 0\}$$

olduğundan ve Lemma 4.2 (i)' den $\mathcal{A} = \{\{\mu = 0\} \cap B\}^-$ elde edilir. $B \in K(X)$ ve $\{\mu = 0\}$, $\tau_{\mathcal{L}}$ topolojisine göre kapalı olduğundan $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ ve dolayısıyla $(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c \subset ((\tau_{\mathcal{L}})_{Fell}^+)^c$ gerçekleşir. Kapsamanın diğer yönünü ispatlamak için, bu topolojilerin kapalılar ailelerinin taban ve alt tabanları kullanılacaktır. $((\tau_{\mathcal{L}})_{Fell}^+)^c$ ailesinin tabanının $(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge})^c$ ailesinin alt kümesi olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$$\mathcal{B} = \{K^- \mid K \in K(X)\}$$

ailesi $((\tau_{\mathcal{L}})_{\mathcal{F}ell}^+)^c$ kapalılar ailesi için bir taban ve $\mathcal{L}^{\wedge_{\mathcal{F}ell}} = \{\mu_B^\wedge \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)\}$ ailesi $\mathcal{L}_{\mathcal{F}ell}^\wedge$ ailesinin alt tabanı olduğundan, Lemma 4.3 (ii) den,

$$\mathcal{S} = \{\{\mu_B^\wedge = 0\} \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)\} \quad (4.3)$$

ailesi de $(\tau_{\mathcal{L}_{\mathcal{F}ell}})^\wedge$ kapalılar ailesi için bir alt tabandır. $K \in K(X)$ olsun, $K(X) \subset CL(X)$ olduğundan (4.2) eşitliği kullanılarak K kümesi,

$$K = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho|_K = 0}} \{\rho = 0\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece, (4.3) ten $\rho \in \mathcal{L}$ ve $K \in K(X)$ için $\{\rho_K^\wedge = 0\} \in \mathcal{S}$ olur. Lemma 4.2 (iii) kullanılırsa, K^- , $\mathcal{S}$ alt tabanının ürettiği kapalılar ailesine aittir. Dolayısıyla, $((\tau_{\mathcal{L}})_{\mathcal{F}ell}^+)^c \subset (\tau_{\mathcal{L}_{\mathcal{F}ell}})^\wedge$ kapsamı gerçekleşir.

(ii) $\mathcal{L}^{\wedge_{\mathcal{F}ell}} \cup \mathcal{L}^\vee = \{\mu_B^\wedge \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)\} \cup \{\nu^\vee \mid \nu \in \mathcal{L}\}$ ailesi $\mathcal{L}_{\mathcal{F}ell}$ ailesinin alt tabanı olduğundan, Lemma 4.3 (ii) den,

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \{\eta = 0\} \mid \eta \in \mathcal{L}^{\wedge_{\mathcal{F}ell}} \cup \mathcal{L}^\vee \right\}$$

ailesi, $\tau_{\mathcal{L}_{\mathcal{F}ell}}$ topolojisinin kapalılar ailesi için bir alt tabandır. Ayrıca,

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ F^+ \mid F \in (\tau_{\mathcal{L}})^c \right\} \cup \left\{ K^- \mid K \in K(X) \right\}$$

ailesi de $(\tau_{\mathcal{L}})_{\mathcal{F}ell}$ topolojisinin kapalılar ailesi için bir alt tabandır. $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_1$ ise

$$\exists \eta \in \mathcal{L}^{\wedge_{\mathcal{F}ell}} \cup \mathcal{L}^\vee : \mathcal{A} = \{\eta = 0\}$$

gerçeklenir. Eğer, $\eta \in \mathcal{L}^{\wedge_{\mathcal{F}ell}}$ ise

$$\exists \mu \in \mathcal{L}, \exists B \in K(X) : \mathcal{A} = \{\mu_B^\wedge = 0\}$$

elde edilir ve Lemma 4.2 (i) kullanılırsa $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_2$ olduğu görülür. Eğer, $\eta \in \mathcal{L}^\vee$ ise

$$\exists \mu \in \mathcal{L} \ni \mathcal{A} = \{\mu^\vee = 0\}$$

olup Lemma 4.2 (ii) kullanılırsa $\{\mu = 0\} \in (\tau_{\mathcal{L}})^c$ olduğundan $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_2$ elde edilir. Dolayısıyla, $\tau_{\mathcal{L}_{Fell}} \subset (\tau_{\mathcal{L}})_{Fell}$ olur. Kapsamanın diğer yönünü ispatlamak için, bu topolojilerin kapalılar ailelerinin alt tabanları kullanılacaktır. $((\tau_{\mathcal{L}})_{Fell})^c$ kapalılar ailesinin alt tabanının $(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$ kapalılar ailesinin alt kümesi olduğu gösterilerek ispat tamamlanacaktır. $((\tau_{\mathcal{L}})_{Fell})^c$ kapalılar ailesinin alt tabanı

$$\mathcal{S} = \left\{ F^+ \mid F \in (\tau_{\mathcal{L}})^c \right\} \cup \left\{ K^- \mid K \in K(X) \right\}$$

ailesidir. Diğer yandan, $\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}} \cup \mathcal{L}^{\vee} = \{\mu_B^{\wedge} \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)\} \cup \{\nu^{\vee} \mid \nu \in \mathcal{L}\}$ ailesi $\mathcal{L}_{Fell}$ ailesinin alt tabanı olduğundan, Lemma 4.3 (ii) den,

$$\mathcal{R} = \left\{ \{\eta = 0\} \mid \eta \in \mathcal{L}^{\wedge_{Fell}} \cup \mathcal{L}^{\vee} \right\}$$

ailesi, $(\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$ kapalılar ailesi için alt tabandır. $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ alalım. Bu durumda iki durum mevcuttur. Eğer, $\mathcal{A} = F^+$ olacak biçimde $F \in (\tau_{\mathcal{L}})^c$ mevcut ise (4.2) eşitliği kullanılarak

$$\mathcal{A} = \left(\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho/F=0}} \{\rho = 0\} \right)^+ = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho/F=0}} \{\rho = 0\}^+$$

olduğu kolayca elde edilebilir. Ayrıca, $\rho \in \mathcal{L}$ olduğundan $\rho^{\vee} \in \mathcal{L}^{\vee}$ ve dolayısıyla $\{\rho^{\vee} = 0\} \in \mathcal{R}$ olur. Lemma 4.2 (ii)' den $\mathcal{A}$ ailesi, $\mathcal{R}$ alt tabanının ürettiği kapalılar ailesine aittir. İkinci durum; $\mathcal{A} = K^-$ olacak biçimde $K \in K(X)$ kümesinin mevcut olmasıdır. Bu durumda; sırasıyla (4.2) ve Lemma 4.2 (iii) kullanılarak

$$\mathcal{A} = \left(\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho/K=0}} \{\rho = 0\} \right)^- = \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \rho/K=0}} \{\rho_K^{\wedge} = 0\}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca, $\rho \in \mathcal{L}$ olduğundan her $K \in K(X)$ için $\rho_K^{\wedge} \in \mathcal{L}^{\wedge_{Fell}}$ ve dolayısıyla $\{\rho_K^{\wedge} = 0\} \in \mathcal{R}$ elde edilir. O halde $\mathcal{A}, \mathcal{R}$ ailesinin ürettiği kapalılar ailesine aittir. Böylece, $((\tau_{\mathcal{L}})_{Fell})^c \subset (\tau_{\mathcal{L}_{Fell}})^c$ kapsamı gerçekleşir. ■

Fell yaklaşma yapısı, Fell- $\wedge$ ve Fell- $\vee$ yaklaşma yapılarını üreten ailelerin birleşimini alt taban kabul eden yaklaşma yapısı idi. Benzer bir ilişki bu yaklaşma yapılarına karşılık gelen uzaklık fonksiyonları arasında da mevcuttur. Bu ilişki Teorem 4.4' te ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 4.4 $(X, \mathcal{L})$ Hausdorff yaklaşma uzayı olmak üzere $\delta_{\mathcal{L}_{Fell}} = \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee} \vee \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}$ gerçektir.

İspat. $\mathcal{L}_{Fell}^\vee \subset \mathcal{L}_{Fell}$ ve $\mathcal{L}_{Fell}^\wedge \subset \mathcal{L}_{Fell}$ olduğundan her $A \in CL(X)$ ve her $\mathcal{G} \subset CL(X)$ için

$$\delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(A, \mathcal{G}) = \sup_{\substack{\alpha \in \mathcal{L}_{Fell}^\vee \\ \alpha|_{\mathcal{G}}=0}} \alpha(A) \leq \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{Fell} \\ \rho|_{\mathcal{G}}=0}} \rho(A) = \delta_{\mathcal{L}_{Fell}}(A, \mathcal{G})$$

ve

$$\delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}(A, \mathcal{G}) = \sup_{\substack{\nu \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge \\ \nu|_{\mathcal{G}}=0}} \nu(A) \leq \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{Fell} \\ \rho|_{\mathcal{G}}=0}} \rho(A) = \delta_{\mathcal{L}_{Fell}}(A, \mathcal{G})$$

olur. Dolayısıyla (2.3)'ten $\delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(A, \mathcal{G}) \vee \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}(A, \mathcal{G}) \leq \delta_{\mathcal{L}_{Fell}}(A, \mathcal{G})$ elde edilir. Diğer yandan, $\gamma > 0$ olmak üzere $\delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(A, \mathcal{G}) \vee \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}(A, \mathcal{G}) < \gamma$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}_{Fell}^\vee \ni \alpha|_{\mathcal{G}}=0 : \alpha(A) < \gamma \quad (4.4)$$

ve

$$\forall \nu \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge \ni \nu|_{\mathcal{G}}=0 : \nu(A) < \gamma. \quad (4.5)$$

elde edilir. $\sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{Fell} \\ \mathcal{G} \subset \{\rho=0\}}} \rho(A) \leq \gamma$ olduğunu gösterebilmek için $\mathcal{G} \subset \{\rho = 0\}$ olacak biçimde bir $\rho \in \mathcal{L}_{Fell}$ alalım. Bu durumda, $\mathcal{L}_{Fell}$ ailesinin tanımından,

$$\rho = \sup_{j \in J} \left(\inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge \bigwedge \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee \right).$$

olacak biçimde bir $J \neq \emptyset$ indis kümesi, sonlu elemanlı $\mathcal{L}_j, \mathcal{L}_{t_j} \subset \mathcal{L}$ ve $K_j \subset K(X)$ alt kümeleri mevcuttur ve dolayısıyla

$$\forall G \in \mathcal{G} \text{ ve } \forall j \in J : \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge(G) \bigwedge \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee(G) = 0$$

gerçeklenir. O halde üç durum söz konusudur:

İlk durum, her $j \in J$ için $\inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge(G) = 0$ olmasıdır. Bu durumda, K_j ve $\mathcal{L}_j$ sonlu elemanlı olduğundan,

$$\forall G \in \mathcal{G}, \exists \mu_G \in \mathcal{L}_j, \exists B_G \in K_j : \mu_{B_G}^\wedge(G) = 0$$

gerçeklenir. Özel olarak $\psi_j^\wedge := \inf_{G \in \mathcal{G}} \mu_{B_G}^\wedge$ olarak tanımlanırsa, $\mathcal{L}_j$ ve K_j sonlu elemanlı olduğundan $\psi_j^\wedge \in \mathcal{L}_{\text{Fell}}^\wedge$ ve $\mathcal{G} \subset \{\psi_j^\wedge = 0\}$ bulunur. O halde, (4.5)' ten $\psi_j^\wedge(A) < \gamma$ ve dolayısıyla

$$\forall j \in J : \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge(A) \leq \psi_j^\wedge(A) < \gamma$$

elde edilir. Dolayısıyla $\rho(A) \leq \gamma$ elde edilir ve bu ilk durumu ispatlar. İkinci durum, her $j \in J$ için $\inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee(G) = 0$ olmasıdır. Bu durumda, $\mathcal{L}_{t_j}$ sonlu elemanlı olduğundan

$$\forall G \in \mathcal{G} : \exists \mu_G \in \mathcal{L}_{t_j} \ni \mu_G^\vee(G) = 0$$

elde edilir. Özel olarak $\psi_j^\vee := \inf_{G \in \mathcal{G}} \mu_G^\vee$ olarak tanımlanırsa, $\mathcal{L}_{t_j}$ sonlu elemanlı olduğundan $\psi_j^\vee \in \mathcal{L}_{\text{Fell}}^\vee$ ve $\mathcal{G} \subset \{\psi_j^\vee = 0\}$ elde edilir. O halde, (4.4)' ten $\psi_j^\vee(A) < \gamma$ ve dolayısıyla

$$\forall j \in J : \inf_{\mu \in \mathcal{L}_{t_j}} \mu^\vee(A) \leq \psi_j^\vee(A) < \gamma$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $\rho(A) \leq \gamma$ elde edilir, ve ikinci durumun ispatı tamamlanır. Üçüncü durum için I indis kümesi, J nin keyfi bir alt kümesi olsun. $j \in I$ için birinci durum, $j \in J - I$ için ikinci durum gerçekleşsin. Bu durumda her $G \in \mathcal{G}$ için

$$\forall j \in I : \exists \mu_j \in \mathcal{L}_j, \exists B_j \in K_j \ni \mu_{B_j}^\wedge(G) = 0$$

ve

$$\forall j \in J - I : \exists \eta_j \in \mathcal{L}_{t_j} \ni \eta_j^\vee(G) = 0$$

gerçeklenir. $\phi^\wedge = \inf_{j \in I} \mu_j^\wedge_{B_j}$ ve $\phi^\vee = \inf_{j \in J-I} \eta_j^\vee$ olmak üzere, özel olarak $\psi = \phi^\wedge \wedge \phi^\vee \in \mathcal{L}_{\text{Fell}}$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{G} \subset \{\phi^\wedge = 0\} \cap \{\phi^\vee = 0\} = \{\psi = 0\}$ elde edilir. Diğer yandan, $\phi^\vee \in \mathcal{L}_{\text{Fell}}^\vee$ ve $\phi^\wedge \in \mathcal{L}_{\text{Fell}}^\wedge$ olduğundan sırasıyla (4.4) ve (4.5) kullanılırsa $\phi^\vee(A) < \gamma$ ve $\phi^\wedge(A) < \gamma$ bulunur. O halde $\psi(A) < \gamma$ ve dolayısıyla $\rho(A) \leq \gamma$ olup ispat tamamlanır. ■

Fell topoloji, $\mathcal{W} := CL(X) \cup \{\emptyset\}$ ailesi üzerinde de tanımlanmış ve elde edilen topolojiye genişletilmiş Fell topoloji adı verilmiştir. Ayrıca, genişletilmiş Fell topolojinin, Fell topolojinin sahip olmadığı kompaktlık gibi bazı özelliklere sahip olduğu Beer tarafından gösterilmiştir (Beer 1993). Bu sonuçlardan esinlenerek, genişletilmiş Fell topoloji ile uyumlu olacak biçimde bir yaklaşma yapısı inşa edilip edilemeyeceği araştırılmış ve Ateş ile Sağiroğlu (Ateş ve Sağiroğlu 2023) tarafından aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Genişletilmiş Fell topoloji tanımlanırken $A \subset X$ olmak üzere, A^+ ailesi,

$$A^+ = \{B \in \mathcal{W} \mid B \subset A\}$$

olarak göz önüne alınmıştır. Bu durumda,

$$\{V^- \mid V \in \tau\} \cup \{W^+ \mid W \in \tau, X - W \in K(X)\} \quad (4.6)$$

ailesi $\mathcal{W}$ üzerinde bir topoloji için alt tabandır. Bu aile tarafından üretilen topolojiye **genişletilmiş Fell topoloji** adı verilir ve $\tau_{e\text{Fell}}$ ile gösterilir (Beer 1993). $\tau_{e\text{Fell}}$ ile ilişkili olacak biçimde yaklaşma yapısı tanımlanırken, $\mathcal{L}_{\text{Fell}}$ yaklaşma yapısının inşasından farklı olarak, $\mu_B^\wedge$ ve $\mu^\vee$ fonksiyonlarının tanım kümeleri $CL(X)$ yerine $\mathcal{W}$ olarak ele alınmıştır.

Önerme 4.3 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{L}^{\wedge_{e\text{Fell}}} = \{\mu_B^\wedge \mid \mu \in \mathcal{L}, B \in K(X)\}$$

ailesi, sonlu ötelemelere göre kapalıdır ve dolayısıyla bir alt düzgün fonksiyon çatısı için alt tabandır. Bu alt tabanın ürettiği fonksiyon çatısı,

$$\mathcal{L}^{\wedge_{e\text{Fell}}} = \left\{ \sup_{j \in J} \inf_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_j \\ B \in K_j}} \mu_B^\wedge \mid J \neq \emptyset, \mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}, K_j \subset K(X), \mathcal{L}_j \text{ ve } K_j \text{ sonlu elemanlı} \right\}$$

biçiminde tanımlıdır.

İspat. Önerme 4.2' nin ispatına benzer olarak yapılabilir. ■

Teorem 4.5 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

$$(i) \tau_{\mathcal{L}_{e\mathcal{F}ell}}^{\wedge} = (\tau_{\mathcal{L}})_{e\mathcal{F}ell}^+,$$

$$(ii) \tau_{\mathcal{L}_{e\mathcal{F}ell}} = (\tau_{\mathcal{L}})_{e\mathcal{F}ell}.$$

İspat. Teorem 4.3' ün ispatına benzer olarak yapılabilir. ■

4.1 İndeks Analiz

Topolojik uzaylarda tanımlanan kompaktlık, lokal kompaktlık ve bağlantılılık gibi bazı özelliklerin yaklaşma uzaylarındaki karşılıkları Lowen tarafından araştırılmış ve Lowen bu özelliklere sahip olmayı nümerik olarak indislemiştir. Özelliğe sahip olmaya yakınlığı; indisin yeteri kadar küçük olmasıyla doğru orantılı olarak tanımlanmıştır. İlk olarak 1930 yılında Kuratowski tarafından tam metrik uzaylarda kompakt olmama ölçüsü tanımlanmıştır, daha sonra Hausdorff, kompakt olmamanın Hausdorff ölçüsünü tanımlamıştır. Bu ölçüler Banach uzayları teorisi, fonksiyonel analiz, sabit nokta teorisi ve hiperuzaylar alanlarında aktif olarak kullanılmaktadır.

$(X, \mathcal{L})$ yaklaşma uzayının **kompaktlık indeksi**

$$\chi_k(X) = \sup_{F \in \mathfrak{F}} \inf_{x \in X} \alpha_{\mathfrak{F}}(x)$$

olarak tanımlanır (Lowen 1997). Uzaklık fonksiyonuna karşılık gelen alt düzgün fonksiyon çatısı yardımıyla, kompaktlık indeksi

$$\chi_k(X) = \sup_{\mathfrak{F} \in F(X)} \inf_{x \in X} \sup_{F \in \mathfrak{F}} \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ F \subset \{\rho=0\}}} \rho(x) \quad (4.7)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bir yaklaşma uzayının kompaktlık indeksi sıfıra eşit ise, yaklaşma uzayı 0-kompakttır denir. Lowen ve Wuyts kompaktlık indeksinin FS-kümeler cinsinden de ifade edilebileceğini ispatlamıştır, $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ olmak üzere her $\mathcal{C} \in 2^{(\mathcal{B})}$ için $\inf_{\mu \in \mathcal{C}} \mu = 0$ gerçekleşiyor ise $\mathcal{B}$ ailesine FS-küme adı verilir.

$\mathcal{L}$ alt düzgün fonksiyon çatısı için bir $\mathcal{B}$ alt tabanı verilsin. Eğer bir FS-küme $\mathcal{B}$ ailesi

tarafından kapsanıyor ise bu kümeye $\mathcal{B}$ içinde bir FS-kümedir denir. $\mathcal{B}$ içindeki tüm FS-kümelerin ailesi $B_s(\mathcal{B})$ ile gösterilir ve

$$\chi_k(X) = \sup_{\mathcal{I} \in B_s(\mathcal{B})} \inf_{x \in X} \bigvee \mathcal{I}(x) \quad (4.8)$$

eşitliği gerçekleşir (Lowen ve Wuyts 2012).

Lowen, bir yaklaşma uzayının lokal kompaktlık indeksini şu şekilde tanımlamıştır: $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı ve $\mathfrak{F} \in F(X)$ olmak üzere $\chi_k(\mathfrak{F}) := \inf_{F \in \mathfrak{F}} \chi_k(F)$ biçiminde tanımlanmıştır. Ayrıca, $(X, \mathcal{L})$ yaklaşma uzayının **lokal kompaktlık indeksi**

$$\chi_{lk}(X) = \sup_{\mathfrak{F} \in F(X)} \left(\chi_k(\mathfrak{F}) \ominus \inf_{x \in X} \lambda \mathfrak{F}(x) \right)$$

olarak verilir (Lowen 2015).

Bu kısımda, Fell- $\wedge$ ve eFell yaklaşma yapılarının kompaktlık indeksleri araştırılacaktır.

Teorem 4.3 ve Teorem 4.5 ile sırasıyla; Fell yaklaşma yapısının ve genişletilmiş Fell yaklaşma yapısının topolojik ko-yansımalarının sırasıyla Fell topoloji ve genişletilmiş Fell topoloji olduğu gösterilmiştir. Teorem 4.6 ile Fell- $\wedge$ yaklaşma uzayının ve Teorem 4.7 ile genişletilmiş Fell yaklaşma uzayının 0-kompakt oldukları gösterilmiştir.

Teorem 4.6 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olmak üzere,

$$\chi_k(CL^{\wedge_{Fell}}(X)) = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}}$ yaklaşma yapısı için $\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}}$ alt tabanını ele alalım. Her $\mathcal{I} \in B_s(\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}})$ için (4.8) göz önüne alınarak;

$$\inf_{A \in CL(X)} \bigvee \mathcal{I}(A) = 0$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\mathcal{I} \in B_s(\mathcal{L}^{\wedge_{Fell}})$ alalım. Bu durumda, $\mu \in \mathcal{L}$ ve $K \in$

$K(X)$ olmak üzere, $\{\mu_K^\wedge\} \in 2^{(I)}$ için

$$\inf_{A \in CL(X)} \mu_K^\wedge(A) = 0$$

olur. Diğer yandan, her $A \in CL(X)$ için $A \cap K \subset X$ olduğundan $\mu_K^\wedge(X) \leq \mu_K^\wedge(A)$ olduğu açıktır. Bu durumda,

$$\mu_K^\wedge(X) \leq \inf_{A \in CL(X)} \mu_K^\wedge(A)$$

gerçeklenir ve dolayısıyla $\mu_K^\wedge(X) = 0$ bulunur. $K \in K(X)$ keyfi bir kompakt küme olduğundan

$$\bigvee \mathcal{I}(X) = \sup_{\mu_B^\wedge \in \mathcal{I}} \mu_B^\wedge(X) = 0$$

olup, sonuç olarak $\inf_{A \in CL(X)} \bigvee \mathcal{I}(A) = 0$ elde edilir. ■

Genişletilmiş Fell yaklaşma yapısının topolojik ko-yansımasının genişletilmiş Fell topoloji ile çakıştığı Ateş ve Sağıroğlu tarafından Teorem 4.5' te ispatlanmıştır. Ayrıca genişletilmiş Fell topoloji kompakt olduğundan genişletilmiş Fell yaklaşma uzayının 0-kompakt olduğu söylenebilir.

Teorem 4.7 ile $(\mathcal{W}, \mathcal{L}_{eFell})$ yaklaşma uzayının 0-kompakt olduğu doğrudan ispatlanmıştır.

Teorem 4.7 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı olmak üzere,

$$\chi_k(\mathcal{W}_{\mathcal{L}_{eFell}}) = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $(\mathcal{W}, \tau_{eFell})$ topolojik uzayının kompakt olduğu Beer tarafından (Beer 1993) ve topolojik ko-yansıması kompakt olan yaklaşma uzaylarının 0-kompakt olduğu Lowen tarafından (Lowen 2015) ispatlanmıştır. Dolayısıyla, Teorem 4.5 kullanılırsa genişletilmiş Fell yaklaşma uzayının kompaktlık indeksi sıfır olarak bulunur. ■

$(X, \mathcal{L})$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması lokal kompakt ise $(X, \mathcal{L})$ uzayı

LC1 yaklaşma uzayı olarak adlandırılır (Lowen, Verbeeck 1998). Teorem 4.8, Beer (Beer 1993) tarafından verilen Sonuç 5.1.4' ün yaklaşma teorisi içindeki analogu olarak düşünülebilir. Teorem ve ispatı verilmeden önce, bu teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki önermeyi ifade ve ispat edelim.

Önerme 4.4 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı ve $B \in CL(X)$ olsun. Bu durumda

(i) $\rho \in \mathcal{L}_{eFell}$ ve $\mathcal{D} \subset CL(X)$ olmak üzere $\rho|_{\mathcal{D}} = 0$ ise $\rho|_{CL(X)} \in \mathcal{L}_{Fell}$ ve $(\rho|_{CL(X)})|_{\mathcal{D}} = 0$,

(ii) $\forall B \in CL(X) : \nu \in \mathcal{A}_{eFell}(B) \Rightarrow \nu|_{CL(X)} \in \mathcal{A}_{Fell}(B)$

gerçeklenir.

İspat. (i) Tanım kümesi kısıtlanmış olan fonksiyon tanımından açıktır.

(ii) (2.3) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathcal{A}_{eFell}(B) = \left\{ \phi \in \mathbb{P}^{\mathcal{W}} \mid \forall \mathcal{D} \subset \mathcal{W} : \inf_{D \in \mathcal{D}} \phi(D) \leq \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{eFell} \\ \rho|_{\mathcal{D}} = 0}} \rho(B) \right\}$$

elde edilir. Şimdi $\nu \in \mathcal{A}_{eFell}(B)$ alalım. Bu durumda,

$$\forall \mathcal{D} \subset \mathcal{W} : \inf_{D \in \mathcal{D}} \nu(D) \leq \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{eFell} \\ \rho|_{\mathcal{D}} = 0}} \rho(B) \quad (4.9)$$

olup, bu eşitsizlik özel olarak $CL(X)$ ' in keyfi bir $\mathcal{D}$ alt ailesi için de gerçekleşir.

Ayrıca, keyfi bir $D \in \mathcal{D} \subset CL(X)$ için $\nu|_{CL(X)}(D) = \nu(D)$ olduğu açıktır. (4.9) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\inf_{D \in \mathcal{D}} \nu|_{CL(X)}(D) = \inf_{D \in \mathcal{D}} \nu(D) \leq \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{eFell} \\ \rho|_{\mathcal{D}} = 0}} \rho(B) \quad (4.10)$$

gerçeklenir. İspatı tamamlamak için

$$\sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{eFell} \\ \rho|_{\mathcal{D}} = 0}} \rho(B) \leq \sup_{\substack{\mu \in \mathcal{L}_{Fell} \\ \mu|_{\mathcal{D}} = 0}} \mu(B)$$

eşitsizliğinin gösterilmesi yeterlidir. Keyfi bir $\alpha > 0$ alalım ve

$$\forall \mu \in \mathcal{L}_{Fell} \text{ öyle ki } \mu|_{\mathcal{D}} = 0 : \mu(B) < \alpha \quad (4.11)$$

olsun. $\rho|_{\mathcal{D}} = 0$ olacak biçimde bir $\rho \in \mathcal{L}_{eFell}$ alalım. $\mathcal{L}_{eFell}$ ailesinin tanımından ve kısıtlama fonksiyonlarının özelliklerinden $\rho|_{CL(X)} \in \mathcal{L}_{eFell}$ ve $(\rho|_{CL(X)})|_{\mathcal{D}} = 0$ elde edilir. O halde, (4.11) ifadesi kullanılırsa $\sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{eFell} \\ \rho|_{\mathcal{D}} = 0}} \rho(B) < \alpha$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.8 $(X, \mathcal{L})$ bir LC1-Hausdorff yaklaşma uzayı olmak üzere; $(\mathcal{W}, \mathcal{L}_{eFell})$ 0-kompakt Hausdorff yaklaşma uzayı ve $(CL(X), \mathcal{L}_{eFell})$ LC1 Hausdorff yaklaşma uzayıdır.

İspat. $(\mathcal{W}, \tau_{eFell})$ Hausdorff topolojik uzay (Fell 1962) ve $(\mathcal{W}, \mathcal{L}_{eFell})$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması $(\mathcal{W}, \tau_{eFell})$ olduğundan, Teorem 4.5' ten $(\mathcal{W}, \mathcal{L}_{eFell})$ yaklaşma uzayı 0-kompakt Hausdorff yaklaşma uzayıdır. Diğer yandan, $(X, \mathcal{L})$ uzayı LC1 olduğundan, $(X, \tau_{\mathcal{L}})$ lokal kompakttır. O halde, Beer tarafından (Beer 1993) verilen Sonuç 5.1.4' ten $(CL(X), (\tau_{\mathcal{L}}^{tc})_{eFell})$ lokal kompakttır. Sonuç olarak Teorem 4.3 (ii) kullanılırsa $(CL(X), \mathcal{L}_{eFell})$ yaklaşma uzayı LC1' dir.

İspatın tamamlanması için $(CL(X), \mathcal{L}_{eFell})$ yaklaşma uzayının Hausdorff yaklaşma uzayı olduğu gösterilmelidir. $B, D \in CL(X)$ ve $B \neq D$ olsun. $(\mathcal{W}, \mathcal{L}_{eFell})$ Hausdorff yaklaşma uzayı olduğundan

$$\exists \nu \in \mathcal{A}_{eFell}(B), \psi \in \mathcal{A}_{eFell}(D) : \inf_{T \in \mathcal{W}} (\nu \vee \psi)(T) > 0$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{W} = CL(X) \cup \{\emptyset\}$ olduğundan

$$\inf_{T \in CL(X)} (\nu \vee \psi)(T) > 0$$

bulunur. Önerme 4.4 (ii) den $\nu|_{CL(X)} \in \mathcal{A}_{eFell}(B)$ ve $\psi|_{CL(X)} \in \mathcal{A}_{eFell}(D)$ elde edilir. O halde, her $T \in CL(X)$ için $\nu|_{CL(X)}(T) = \nu(T)$ ve $\psi|_{CL(X)}(T) = \psi(T)$ olduğundan

$$\inf_{T \in CL(X)} \left(\nu|_{CL(X)} \bigvee \psi|_{CL(X)} \right)(T) > 0$$

elde edilir. O halde, $(CL(X), \mathcal{L}_{eFell})$ Hausdorff yaklaşma uzayıdır. ■

5. YAKLAŞMA UZAYLARINDA HİPERSÜZGEÇ VE HİPERAĞLAR İÇİN KURATOWSKI YAKINSAKLIK

Bu bölümde tez çalışmamız süresince elde ettiğimiz orjinal kavram ve sonuçlar verilmiştir. Referanssız olarak verilen kavram ve sonuçların tümü orjinaldir. Bu sonuçlar bir makale olarak düzenlenmiştir ve en kısa zamanda yayınlanmak üzere uygun bir dergiye gönderilecektir.

Öncelikle, Dolecki ve Mynard (2016) tarafından yakınsama uzaylarında verilen bazı tanım ve kavramları özel olarak (X, τ) topolojik uzayında göz önüne alacağız. Bir (X, τ) topolojik uzayında, $CL(X)$ ailesinin bir $\mathfrak{F}$ alt kümeler ailesinin X kümesi üzerinde tanımlı indirgenmiş (reduction)

$$rdc(\mathfrak{F}) = \left\{ \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F} \right\} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlanır (Dolecki ve Mynard 2016). Ayrıca, $\mathfrak{F}$ bir süzgeç ise $rdc(\mathfrak{F})$ ailesine $\mathfrak{F}$ süzgecinin indirgenmiş süzgeci adı verilir. Her $\mathbb{D} \subset F(X)$ için

$$rdc\left(\bigwedge_{\mathfrak{F} \in \mathbb{D}} \mathfrak{F}\right) = \bigwedge_{\mathfrak{F} \in \mathbb{D}} rdc\mathfrak{F} \quad (5.2)$$

eşitliği gerçekleşir (Dolecki ve Mynard 2016). Ayrıca, $\mathfrak{F}$ ve $\mathfrak{G}$ süzgeçleri için, $\mathfrak{F} \# \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{F}$ mesh $\mathfrak{G}$) ifadesi ; her $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ ve her $\mathcal{G} \in \mathfrak{G}$ için $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ anlamına gelmektedir. Ayrıca, $\mathfrak{F}$ ve $\mathfrak{G}$ süzgeçlerinin infimumu $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$ biçiminde tanımlıdır. Bu süzgeçlerin supremumu sadece $\mathfrak{F} \# \mathfrak{G}$ koşulu altında tanımlıdır ve

$$\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G} = \{F \cap G \mid F \in \mathfrak{F}, G \in \mathfrak{G}\} \quad (5.3)$$

olur. (X, ξ) bir yakınsama uzayı ve $\mathcal{F}$ bir hipersüzgeç olmak üzere

$$adh_{\xi}\mathcal{F} = \bigcup_{F(X) \ni \mathcal{H} \# \mathcal{F}} \lim_{\xi} \mathcal{H} \quad (5.4)$$

biçiminde tanımlanan aile yardımıyla yakınsama uzaylarında Kuratowski yakınsak-

lık aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

(X, ξ) yakınsama uzayında $A \in CL(X)$ olmak üzere

$$adh_{\xi}rdc(\mathfrak{F}) \subset A \text{ ve } A \subset adh_{\xi}rdc(\mathfrak{F}^{\#}) \quad (5.5)$$

kapsamalarından ilki gerçekleşiyor ise $\mathfrak{F}$ süzgeci A kümesine üst Kuratowski yakınsak, ikinci kapsama gerçekleşiyor ise $\mathfrak{F}$ süzgeci A kümesine alt Kuratowski yakınsaktır denir. Eğer $\mathfrak{F}$ süzgeci A kümesine hem üst hem de alt Kuratowski yakınsak oluyor ise $\mathfrak{F}$ süzgeci A kümesine Kuratowski yakınsaktır denir (Dolecki ve Mynard 2016).

Dolecki ve Mynard, hiperuzaylarda süzgeç yakınsaklığını inceledikleri makalelerinde (Dolecki ve Mynard 2003), $CL(X)$ üzerinde tanımlanan süzgeçlere hipersüzgeç, hiperuzayın öğelerine hipernokta ve hiperuzayın alt kümelerine hiperküme adını vermiştir. Benzer olarak, çalışmalarımız boyunca $CL(X)$ üzerinde tanımlanan ağlara hiperağ adı verilecektir.

Dolecki ve Mynard tarafından verilen tanımların analogu, bir (X, τ) topolojik uzayında, $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi $\mathcal{V}_{(x)}$ ile gösterilmek üzere

$$Li_{\tau}\mathfrak{F} = \{A \in CL(X) \mid x \in X, rdc(\mathfrak{F}) \# \mathcal{V}_{(x)} \Rightarrow x \in A\}$$

ve

$$Ls_{\tau}\mathfrak{F} = \{A \in CL(X) \mid x \in A \Rightarrow \forall \mathcal{H} \in \sec \mathfrak{F} : \mathcal{V}_{(x)} \# rdc(\mathcal{H})\}$$

biçimindedir. $\mathfrak{F}$ hipersüzgecinin A hipernoktasına Kuratowski yakınsak olması için gerek ve yeter şart $A \in Li_{\tau}\mathfrak{F} \cap Ls_{\tau}\mathfrak{F}$ olmasıdır. Bu tanım ışığında, yaklaşma uzaylarında hipersüzgeçler için Kuratowski yakınsaklık tanımı verilebilir.

Tanım 5.1 (X, δ) bir yaklaşma uzayı, $\mathfrak{F}$ bir hipersüzgeç, $x \in X$ ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olsun. Bu durumda, $\mathfrak{F}$ hipersüzgecinin δ_{ε} -limit ve δ_{ε} -yığılma noktaları kümeleri sırasıyla

$$Li_{\delta_{\varepsilon}}(\mathfrak{F}) = \{A \in CL(X) \mid x \in X, \sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) \leq \varepsilon \Rightarrow x \in A^{(\varepsilon)}\} \quad (5.6)$$

ve

$$Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F}) = \{A \in CL(X) \mid x \in A^{(\varepsilon)} \Rightarrow \sup_{\mathcal{H} \in \text{sec } \mathfrak{F}} \delta(x, rdc(\mathcal{H})) \leq \varepsilon\} \quad (5.7)$$

biçiminde tanımlıdır.

Bu tanımlar yardımıyla bir hiperuzayda bir hipersüzgecin Kuratowski anlamda yakınsaklığı aşağıdaki biçimde tanımlanır.

Tanım 5.2 (X, δ) bir yaklaşma uzayı, $\mathfrak{F}$ bir hipersüzgeç ve A bir hipernokta olmak üzere; $A \in Li_{\delta_\varepsilon}\mathfrak{F}$ ise $\mathfrak{F}$ hipersüzgeci A hipernoktasına üst δ_ε –Kuratowski yakınsak, $A \in Ls_{\delta_\varepsilon}\mathfrak{F}$ ise $\mathfrak{F}$ hipersüzgeci A hipernoktasına alt δ_ε –Kuratowski yakınsaktır denir. Ayrıca; $A \in Li_{\delta_\varepsilon}\mathfrak{F} \cap Ls_{\delta_\varepsilon}\mathfrak{F}$ ise $\mathfrak{F}$ hipersüzgeci A kümesine δ_ε –Kuratowski yakınsaktır denir ve kısaca $A = K_{\delta_\varepsilon} - \lim \mathfrak{F}$ biçiminde gösterilir.

Önerme 5.1 (X, δ) bir yaklaşma uzayı, $\mathfrak{F}$ bir hipersüzgeç, $\varepsilon = 0$ ve δ uzaklık fonksiyonunun topolojik ko-yansıması τ ile gösterilmek üzere, $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F})$ ve $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F})$ sırasıyla $Li_\tau(\mathfrak{F})$ ve $Ls_\tau(\mathfrak{F})$ kümeleri ile çakışır. Dolayısıyla, (X, δ_τ) yaklaşma uzayında bir hipersüzgeç için verilen δ_0 -Kuratowski yakınsaklığı, (X, τ) topolojik uzayında verilen Mynard ve Dolecki anlamında Kuratowski yakınsaklık ile çakışır.

İspat. Kısalık açısından, $\varepsilon = 0$ durumunda $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F})$ ve $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F})$ aileleri $Li_{\delta_\tau}(\mathfrak{F})$ ve $Ls_{\delta_\tau}(\mathfrak{F})$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $x \in X$ olmak üzere $A \in Li_\tau(\mathfrak{F})$ ve $\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta_\tau(x, S) = 0$ olsun. Bu durumda δ_τ uzaklık fonksiyonunun tanımı kullanılarak her $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ ve her $S \in rdc(\mathfrak{F})$ için $S \cap V \neq \emptyset$ elde edilir. O halde $rdc(\mathfrak{F}) \# \mathcal{V}_{(x)}$ gerçekleşir. Ayrıca, $A \in Li_\tau(\mathfrak{F})$ olduğundan, $x \in A$ olup, $A \in Li_{\delta_\tau}(\mathfrak{F})$ elde edilir. Diğer yandan, $x \in X$ olmak üzere $A \in Li_{\delta_\tau}(\mathfrak{F})$ ve $\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) = 0$ olsun. Bu durumda, $rdc(\mathfrak{F}) \# \mathcal{V}_{(x)}$ olup

$$\forall S \in rdc(\mathfrak{F}), \forall V \in \mathcal{V}_{(x)} : V \cap S \neq \emptyset$$

gerçeklenir ve dolayısıyla her $S \in rdc(\mathfrak{F})$ için $x \in cl_\tau(S)$ olup, $\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta_\tau(x, S) = 0$ elde edilir. $A \in Li_{\delta_\tau}(\mathfrak{F})$ olduğundan $x \in A$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, $Li_\tau(\mathfrak{F}) = Li_{\delta_\tau}(\mathfrak{F})$ elde edilir. $Ls_\tau(\mathfrak{F}) = Ls_{\delta_\tau}(\mathfrak{F})$ eşitliğini ispatlamak için, $x \in A$ ve $\mathcal{H} \in \text{sec } \mathfrak{F}$

alım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{(x)} \# rdc(\mathcal{H}) &\iff \forall V \in \mathcal{V}_{(x)}, \forall T \in rdc(\mathcal{H}) : V \cap T \neq \emptyset \\
&\iff \forall T \in rdc(\mathcal{H}) : x \in cl_\tau(T) \\
&\iff \forall T \in rdc(\mathcal{H}) : \delta_\tau(x, T) = 0 \\
&\iff \sup_{T \in rdc(\mathcal{H})} \delta_\tau(x, T) = 0
\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır. ■

Önerme 5.2 (X, δ) yaklaşma uzayı, $\mathfrak{F}$ ve $\mathfrak{G}$ hipersüzgeçler ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olmak üzere, aşağıdaki özellikler gerçekleşir.

- (i) $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{G} \Rightarrow Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F}) \subset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G})$,
- (ii) $\mathfrak{F} \# \mathfrak{G} \Rightarrow Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F}) \cup Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G}) \subset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$,
- (iii) $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \subset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F}) \cap Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G})$,
- (iv) $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \subset Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F}) \cap Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G})$,
- (v) $\mathfrak{F} \# \mathfrak{G} \Rightarrow Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F}) \cup Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G}) \subset Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$.

İspat. (i) $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{G}$ ise, $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ olacağından, (5.2) eşitliği kullanılarak $rdc(\mathfrak{F}) = rdc(\mathfrak{F}) \cap rdc(\mathfrak{G})$ eşitliği elde edilir. $A \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F})$ alalım. Bu durumda, her $x \in X$ için

$$\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) \leq \sup_{T \in rdc(\mathfrak{G})} \delta(x, T) \quad (5.8)$$

olacağından $\sup_{T \in rdc(\mathfrak{G})} \delta(x, T) \leq \varepsilon$ olması durumunda (5.8) eşitsizliğinden $\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) \leq \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla, hipotezden $x \in A^{(\varepsilon)}$ olup, $A \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G})$ elde edilir.

(ii) $\mathfrak{F} \# \mathfrak{G}$ olmak üzere $A \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F}) \cup Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G})$ alalım. $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}$ ve $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}$ olduğundan, indirgenmiş süzgeç tanımından $rdc(\mathfrak{F}) \subset rdc(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$ ve $rdc(\mathfrak{G}) \subset rdc(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})$ elde edilir. Dolayısıyla, her $x \in X$ için

$$\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) \leq \sup_{K \in rdc(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})} \delta(x, K)$$

41

ve

$$\sup_{T \in rdc(\mathfrak{G})} \delta(x, T) \leq \sup_{K \in rdc(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})} \delta(x, K)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Bu durumda, $\sup_{K \in rdc(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})} \delta(x, K) \leq \varepsilon$ ise $\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) \leq \varepsilon$ ve $\sup_{T \in rdc(\mathfrak{G})} \delta(x, T) \leq \varepsilon$ olacağı açıktır. Hipotezden $x \in A^{(\varepsilon)}$ bulunur, bu ise ispatı tamamlar.

(iii) $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \leq \mathfrak{F}$ olduğundan, $rdc(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \subset rdc(\mathfrak{F})$ bulunur. Böylece, her $x \in X$ için

$$\sup_{K \in rdc(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})} \delta(x, K) \leq \sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) \quad (5.9)$$

ve $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \leq \mathfrak{G}$ olduğundan benzer olarak

$$\sup_{K \in rdc(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})} \delta(x, K) \leq \sup_{T \in rdc(\mathfrak{G})} \delta(x, T) \quad (5.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Kabul edelim ki $A \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})$ olsun. Eğer $\sup_{S \in rdc(\mathfrak{F})} \delta(x, S) \leq \varepsilon$ ise, sırasıyla (5.9) eşitsizliği ve hipotez kullanılırsa $x \in A^{(\varepsilon)}$ elde edilir. Böylece, $A \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F})$ olur. Eğer $\sup_{T \in rdc(\mathfrak{G})} \delta(x, T) \leq \varepsilon$ ise, sırasıyla (5.10) eşitsizliği ve hipotez kullanılırsa $x \in A^{(\varepsilon)}$ elde edilir. Böylece, $A \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{G})$ bulunur, bu ise ispatı tamamlar.

(iv) $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ ve $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}$ olduğundan

$$\sec \mathfrak{F} \subset \sec(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \text{ ve } \sec \mathfrak{G} \subset \sec(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \quad (5.11)$$

kapsamaları gerçekleşir. $A \in Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})$ alalım. Bu durumda $x \in A^{(\varepsilon)}$ olması durumunda

$$\sup_{\mathcal{H} \in \sec(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})} \delta(x, rdc(\mathcal{H})) \leq \varepsilon$$

eşitsizliğin gerçeklendiği bilinmektedir. O halde (5.11) kapsamalarından

$$\sup_{\mathcal{H} \in \text{sec}\mathfrak{F}} \delta(x, \text{rdc}(\mathcal{H})) \leq \varepsilon \text{ ve } \sup_{\mathcal{H} \in \text{sec}\mathfrak{G}} \delta(x, \text{rdc}(\mathcal{H})) \leq \varepsilon$$

elde edilir ve dolayısıyla $A \in L_{S_{\delta_\varepsilon}}(\mathfrak{F}) \cap L_{S_{\delta_\varepsilon}}(\mathfrak{G})$ bulunur.

(v) $\mathfrak{F} \# \mathfrak{G}$ olmak üzere $A \in L_{S_{\delta_\varepsilon}}(\mathfrak{F}) \cup L_{S_{\delta_\varepsilon}}(\mathfrak{G})$ alalım. İspatı tamamlamak için $x \in A^{(\varepsilon)}$ olması durumunda $\sup_{\mathcal{H} \in \text{sec}(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})} \delta(x, \text{rdc}(\mathcal{H})) \leq \varepsilon$ olacağını göstermemiz gereklidir. $x \in A^{(\varepsilon)}$ alalım, hipotezden

$$\sup_{\mathcal{H} \in \text{sec}\mathfrak{F}} \delta(x, \text{rdc}(\mathcal{H})) \leq \varepsilon \text{ veya } \sup_{\mathcal{H} \in \text{sec}\mathfrak{G}} \delta(x, \text{rdc}(\mathcal{H})) \leq \varepsilon \quad (5.12)$$

olduğu bilinmektedir. Diğer yandan, $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G} \leq \mathfrak{F}$ ve $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G} \leq \mathfrak{G}$ olduğundan $\text{sec}(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}) \subset \text{sec}\mathfrak{F} \cup \text{sec}\mathfrak{G}$ kapsamasının gerçeklendiği açıktır. O halde, (5.12) eşitsizliklerinden

$$\sup_{\mathcal{H} \in \text{sec}(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G})} \delta(x, \text{rdc}(\mathcal{H})) \leq \varepsilon$$

elde edilir, bu ise ispatı tamamlar. ■

Topolojik uzaylarda, hiperağların Kuratowski anlamda yakınsaklığı Beer tarafından incelenmiştir (Beer 2010). Tez çalışmamızın bu bölümünde, hiperağların Kuratowski anlamda yakınsaklığını yaklaşma uzayları teorisinde ele alacağız. Ancak, tanımlarımızı ve özelliklerini vermeden önce bu yakınsaklığın topolojik durumda nasıl tanımlandığını aktarmak anlamlı olacaktır:

Tanım 5.3 $(\Lambda, \preceq)$ yönlendirilmiş bir küme ve $\Sigma \subset \Lambda$ olsun. Bu durumda, Σ kümesi Λ nın herhangi bir indisinden önde gelen bütün indisleri içeriyor ise **artık** (*residual*) küme, Λ nın her indisi için bu indisten önde gelen en az bir indis içeriyor ise **eşsonlu** (*cofinal*) küme adını alır ve her artık küme, eşsonlu kümedir (Frolik 1960).

Artık ve eşsonlu kümelerin oluşturduğu aileler sırasıyla

$$\Lambda_{\mathfrak{R}} = \{\mathfrak{R} \subset \Lambda \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ öyle ki } \forall \lambda \succeq \lambda_0 \implies \lambda \in \mathfrak{R}\}$$

ve

$$\Lambda_{\mathfrak{C}} = \{\mathfrak{C} \subset \Lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda \text{ için } \exists \lambda' \in \Lambda \text{ öyle ki } \lambda' \succeq \lambda \implies \lambda' \in \mathfrak{C}\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 5.4 (X, τ) Hausdorff topolojik uzay ve $(\Lambda, \preceq)$ yönlendirilmiş bir küme olmak üzere, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ hiperağının limit ve yığılma noktaları kümeleri sırasıyla

$$Li(A_\lambda) = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_{(x)} \text{ için } \exists \mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}} \text{ öyle ki } \forall \lambda \in \mathfrak{R} \text{ için } V \cap A_\lambda \neq \emptyset\}$$

$$Ls(A_\lambda) = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_{(x)} \text{ için } \exists \mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}} \text{ öyle ki } \forall \lambda \in \mathfrak{C} \text{ için } V \cap A_\lambda \neq \emptyset\}$$

biçiminde tanımlıdır. $A \in CL(X)$ olmak üzere $Li(A_\lambda) = Ls(A_\lambda) = A$ eşitliği gerçekleşiyor ise $\mathcal{A}$ hiperağı A hiperkümesine Kuratowski-Painleve yakınsaktır denir ve $A = K - \lim A_\lambda$ biçiminde ifade edilir (Beer 2010).

Bazı kaynaklarda Kuratowski-Painleve yakınsaklık ifadesi yerine Kuratowski yakınsaklık ifadesi kullanılmaktadır. Biz de çalışmalarımız boyunca bu yakınsaklığı kısaca Kuratowski yakınsaklık olarak ifade edeceğiz.

Tanım 5.5 (X, δ) bir yaklaşma uzayı, A bir hipernokta, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{A}$ hiperağının δ_ε -limit ve δ_ε -yığılma noktalarının kümeleri sırasıyla

$$Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \sup_{\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda) \leq \varepsilon\} \quad (5.13)$$

ve

$$Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \sup_{\mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} A_\lambda) \leq \varepsilon\} \quad (5.14)$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 5.6 (X, δ) bir yaklaşma uzayı, $A \in CL(X)$, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olsun. Bu durumda,

$$Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) = Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) = A$$

gerçekleniyor ise $\mathcal{A}$ hiperağı A kümesine $\delta_\varepsilon - \textbf{Kuratowski}$ yakınsak denir ve $A = K_{\delta_\varepsilon} - \lim \mathcal{A}$ biçiminde ifade edilir.

Önerme 5.3 (X, δ) bir Hausdorff yaklaşma uzayı, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ, $\varepsilon = 0$ ve δ uzaklık fonksiyonunun topolojik ko-yansıması τ ile gösterilmek üzere, $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ ve $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ sırasıyla $Li_\tau(A_\lambda)$ ve $Ls_\tau(A_\lambda)$ kümeleri ile çakışır. Bu sebeple, (X, δ_τ) yaklaşma uzayında hiperağlar için verilen δ_ε -Kuratowski yakınsaklık, $\varepsilon = 0$ durumunda (X, τ) topolojik uzayında verilen Beer anlamında Kuratowski-Painleve yakınsaklık ile çakışır.

İspat. Kısalık açısından, $\varepsilon = 0$ durumunda $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ ve $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ aileleri $Li_{\delta_\tau}(\mathcal{A})$ ve $Ls_{\delta_\tau}(\mathcal{A})$ ile gösterilecektir. δ_τ tanımından,

$$\forall \mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}} : \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda) = 0 \iff x \in \bigcap_{\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}} \{cl_\tau(\bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda)\}$$

olduğu açıktır, bu ise $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) = Li_\tau(A_\lambda)$ anlamına gelir. $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) = Ls_\tau(A_\lambda)$ olduğu benzer şekilde gösterilir. ■

Önerme 5.4 (X, δ) yaklaşma uzayı, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ ve $\mathcal{B} = \langle B_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ iki hiperağ olmak üzere;

$$\mathcal{C} = \{A_\lambda \cup B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{D} = \{A_\lambda \cap B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

biçiminde tanımlanan hiperağlar için aşağıdaki özellikler gerçekleşir.

- (i) $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{C}) = Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) \cup Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{B})$,
- (ii) $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{C}) \supset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) \cup Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{B})$,
- (iii) $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{D}) \subset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) \cap Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{B})$,
- (iv) $Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{D}) \subset Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) \cap Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{B})$.

İspat. (i) Her $\mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}}$ ve her $\lambda \in \mathfrak{R}$ için $A_\lambda \subset A_\lambda \cup B_\lambda$ olduğundan, $\bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} (A_\lambda \cup B_\lambda)$ olur. Dolayısıyla, (2.1) kullanılarak

$$\forall \mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}}, \forall x \in X : \delta\left(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} (A_\lambda \cup B_\lambda)\right) \leq \delta\left(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} A_\lambda\right)$$

olur ve böylece

$$\forall x \in X : \sup_{\mathfrak{A} \in \Lambda_{\mathfrak{A}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}} (A_{\lambda} \cup B_{\lambda})) \leq \sup_{\mathfrak{A} \in \Lambda_{\mathfrak{A}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}} A_{\lambda})$$

olacağından, $LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{A}) \subset LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{C})$ gerçekleşir. Benzer şekilde, $LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{B}) \subset LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{C})$ elde edilebilir ve $LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{A}) \cup LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{B}) \subset LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{C})$ bulunur. Kapsamanın diğer yönü için, $x \notin LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{A}) \cup LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{B})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\sup_{\mathfrak{A} \in \Lambda_{\mathfrak{A}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}} A_{\lambda}) > \varepsilon \text{ ve } \sup_{\mathfrak{A} \in \Lambda_{\mathfrak{A}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}} B_{\lambda}) > \varepsilon$$

olur ve böylece

$$\exists \mathfrak{A}_1 \in \Lambda_{\mathfrak{A}} : \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_1} A_{\lambda}) > \varepsilon \text{ ve } \exists \mathfrak{A}_2 \in \Lambda_{\mathfrak{A}} : \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_2} B_{\lambda}) > \varepsilon \quad (5.15)$$

elde edilir. $\mathfrak{A}_1$ ve $\mathfrak{A}_2$ artık kümeler olduğundan,

$$\mathfrak{A}_1 = \{k \mid k \succeq i\} \text{ ve } \mathfrak{A}_2 = \{k \mid k \succeq j\}$$

olacak biçimde $i, j \in \Lambda$ indisleri mevcuttur. Ayrıca, Λ yönlendirilmiş olduğundan, $\gamma \succeq i$ ve $\gamma \succeq j$ olacak biçimde bir $\gamma \in \Lambda$ mevcuttur. Dolayısıyla, $\mathfrak{A}_3 := \{k \mid k \succeq \gamma\} \subset \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ olacak biçimde bir $\mathfrak{A}_3$ artık kümesi elde edilir ve

$$\bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_3} A_{\lambda} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_1} A_{\lambda} \text{ ile } \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_3} B_{\lambda} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_2} B_{\lambda}$$

gerçeklenir. (2.1) özelliği ve (5.15) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\varepsilon < \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_3} A_{\lambda}) \text{ ve } \varepsilon < \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_3} B_{\lambda})$$

bulunur. (D3) özelliğinden

$$\varepsilon < \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_3} A_{\lambda} \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_3} B_{\lambda}) = \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}_3} (A_{\lambda} \cup B_{\lambda}))$$

elde edilir. Sonuç olarak $x \notin LS_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{C})$ olup, ispat tamamlanır.

(ii) Her $\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}$ ve $\lambda \in \mathfrak{C}$ için $A_\lambda \subset A_\lambda \cup B_\lambda$ olduğundan, $\bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} (A_\lambda \cup B_\lambda)$ olur. Dolayısıyla, (2.1) kullanılırsa

$$\forall \mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}, \forall x \in X : \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} (A_\lambda \cup B_\lambda)) \leq \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda)$$

ve böylece

$$\forall x \in X : \sup_{\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} (A_\lambda \cup B_\lambda)) \leq \sup_{\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda)$$

olup, $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) \subset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{C})$ elde edilir. Benzer olarak, $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{B}) \subset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{C})$ olacağından $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) \cup Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{B}) \subset Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{C})$ bulunur.

(iii) ve (iv) seçeneklerinin ispatları her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \cap B_\lambda \subset A_\lambda$ olduğundan diğer seçeneklerin ispatlarına benzer olarak yapılır. ■

Aşağıdaki örnekleri ifade ve ispat etmeden önce, $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde tanımlı ve örneklerde kullanacağımız iki uzaklık fonksiyonunun tanımını verelim:

$x \in \mathbb{P}$ ve $A \in CL(X)$ olmak üzere,

$$\delta_{\mathbb{E}}(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

ve

$$\delta_f(x, A) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ \infty, & x \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlar, $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde tanımlı iki uzaklık fonksiyonudur (Lowen 2015).

Örnek 5.1 $\mathcal{A} = \langle A_n = [1, 2 + \frac{1}{n}] \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$ hiperağını ve $(\mathbb{P}, \delta_{\mathbb{E}})$ yaklaşma uzayını ele alalım. Bu durumda, $\mathcal{A}$ hiperağı $[1, 2]$ kümesine $(\delta_{\mathbb{E}})_0 - Kuratowski$ yakınsaktır.

$Ls_{\delta_0}(\mathcal{A})$ kümesi tanımı gereğince, bu kümenin elemanları,

$$\forall \mathfrak{R} \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}^+ : \delta_{\mathbb{E}}(x, \bigcup_{n \in \mathfrak{R}} A_n) = 0$$

eşitliğini sağlayan x noktaları olmalıdır. Yani,

$$\forall \mathfrak{R} \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}^+, \forall \varepsilon > 0 : \exists a_{\varepsilon, \mathfrak{R}} \in \bigcup_{n \in \mathfrak{R}} A_n \text{ öyle ki } |x - a_{\varepsilon, \mathfrak{R}}| \leq \varepsilon \quad (5.16)$$

önermesini gerçekleyen x noktalarını bulmalıyız. $x \in [1, 2]$ ise, artık küme ne olursa olsun A_n kümelerinin tanımından $a_{\varepsilon, \mathfrak{R}} = x$ olarak seçilebilir ve böylece (5.16) önermesi gerçekleşir. Diğer yandan, $x \notin [1, 2]$ ise en azından $\mathfrak{R} = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \geq x - 1\}$ artık kümesi için (5.16) önermesi gerçekleşmeyeceğinden $Ls_{(\delta_{\mathbb{E}})_0}(\mathcal{A}) = [1, 2]$ bulunur. $Li_{(\delta_{\mathbb{E}})_0}(\mathcal{A})$ kümesinin elemanları ise,

$$\forall \mathfrak{C} \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{C}}^+, \forall \varepsilon > 0 : \exists a_{\varepsilon, \mathfrak{C}} \in \bigcup_{n \in \mathfrak{C}} A_n \text{ öyle ki } |x - a_{\varepsilon, \mathfrak{C}}| \leq \varepsilon$$

önermesini gerçekleyen x noktalarıdır. Keyfi bir $\mathfrak{C} \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{C}}^+$ eşsonlu kümesi alalım. $\mathfrak{C}$, $\mathbb{Z}^+$ kümesinin bir eşsonlu altkümesi olduğundan, en küçük elemanı mevcuttur. Bu elemanı λ_0 ile gösterelim. Bu durumda,

$$\bigcup_{n \in \mathfrak{C}} A_n = A_{n_0} = [1, 2 + \frac{1}{n_0}]$$

olacağından; $x \in [1, 2]$ ise $a_{\varepsilon, \mathfrak{C}} = x$ seçilebilir. Ancak $x \notin [1, 2]$ olması durumunda, eşsonlu küme nasıl tanımlanmış olursa olsun x noktasının her ε komşuluğunda bulunan bir $a_{\varepsilon, \mathfrak{C}} \in [1, 2 + \frac{1}{n_0}]$ bulunamaz. Dolayısıyla, $Li_{\delta}(\mathcal{A}) = [1, 2]$ olup ispat tamamlanır.

Örnek 5.2 $b > a \geq 0$ olmak üzere, $\Lambda = [a, b]$ yönlendirilmiş kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{A} = \langle A_{\lambda} = \{\lambda\} \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ hiperağını ve $(\mathbb{P}, \delta_{finest})$ yaklaşma uzayını ele alalım. Bu durumda, $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olmak üzere, $\mathcal{A}$ hiperağı $\{b\}$ kümesine $(\delta_f)_{\varepsilon}$ – Kuratowski yakınsaktır.

Keyfi bir $\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}$ eşsonlu kümesi ele alınırsa $\lambda_0 \geq b$ olacak biçimde bir $\lambda_0 \in \mathfrak{C}$ mevcuttur, hatta Λ kümesinde b noktasından önde gelen tek öge kendisi olduğundan $\lambda_0 = b \in \mathfrak{C}$ olup $b \in Li_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{A})$ elde edilir. $x \in [a, b[$ olmak üzere, $\mathfrak{C} = \{b\}$ eşsonlu kümesi için $x \notin \{b\}$ olacağından $x \notin Li_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{A})$ olup, $Li_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{A}) = \{b\}$ bulunur. Diğer yandan, her $\mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}}$ için artık küme tanımından $b \in \mathfrak{R}$ olduğu açıktır. $x \in [a, b[$ ise en azından $\mathfrak{R} = \{b\}$ artık kümesi için $x \notin \mathfrak{R}$ olacağından $Ls_{\delta_{\varepsilon}}(\mathcal{A}) = \{b\}$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 5.5 $(X, \mathcal{L})$ bir yaklaşma uzayı, $K \in K(X)$, $\langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olmak üzere her $\Sigma \in \Lambda_{\mathfrak{R}} \cup \Lambda_{\mathfrak{C}}$ için

$$x \in Ls_{\delta_\varepsilon} \left(\bigcup_{\lambda \in \Sigma} (A_\lambda \cap K) \right) \implies \delta(x, K) \leq \varepsilon$$

gerçeklenir.

İspat. $x \in Ls_{\delta_\varepsilon} \left(\bigcup_{\lambda \in \Sigma} (A_\lambda \cap K) \right)$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \delta \left(\bigcup_{\lambda \in \Sigma} (A_\lambda \cap K) \right) \leq \varepsilon &\Leftrightarrow \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ \bigcup_{\lambda \in \Sigma} A_\lambda \cap K \subset \{\rho=0\}}} \rho(x) \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \rho \in \mathcal{L} \text{ öyle ki } \bigcup_{\lambda \in \Sigma} A_\lambda \cap K \subset \{\rho=0\} \\ &\text{ için } \rho(x) \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde edilir. $\delta(x, K) = \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L} \\ K \subset \{\rho=0\}}} \rho(x) \leq \varepsilon$ olduğunu göstermek için $K \subset \{\rho=0\}$ olacak biçimde bir $\rho \in \mathcal{L}$ alalım. $\bigcup_{\lambda \in \Sigma} (A_\lambda \cap K) \subset K$ olduğundan $\bigcup_{\lambda \in \Sigma} (A_\lambda \cap K) \subset \{\rho=0\}$ elde edilir ve (5.17) önermesi kullanılırsa $\rho(x) \leq \varepsilon$ bulunur, bu ise ispatı tamamlar. ■

Önerme 5.6 (X, δ) bir yaklaşma uzayı olmak üzere, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ hiperağı, $\varepsilon \in \mathbb{P}$ ve $x \in X$ noktası için aşağıda verilen özellikler gerçekleşir.

- (i) $\exists \mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}} \ni (\forall \lambda \in \mathfrak{R}) : \delta(x, A_\lambda) \leq \varepsilon \implies x \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$,
- (ii) $\exists \mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}} \ni (\forall \lambda \in \mathfrak{C}) : \delta(x, A_\lambda) \leq \varepsilon \implies x \in Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$.

İspat. (i) $x \in X$ ve her $\lambda \in \mathfrak{R}$ için $\delta(x, A_\lambda) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bir $\mathfrak{R}$ artık kümesi alınsın. Bu durumda, $\mathfrak{R} = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \succeq \lambda_0\}$ olacak biçimde bir $\lambda_0 \in \Lambda$ mevcuttur. Diğer yandan, herhangi bir $\mathfrak{C}$ eşsonlu kümesi ele alındığında, $\beta \succeq \lambda_0$ olacak biçimde bir $\beta \in \mathfrak{C}$ vardır ve β aynı zamanda $\mathfrak{R}$ kümesinin de elemanı olacağından hipotezden $\delta(x, A_\beta) \leq \varepsilon$ elde edilir. Diğer yandan, $A_\beta \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda$ olup, (2.1) özelliği kullanılırsa,

$$\delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda) \leq \delta(x, A_\beta)$$

elde edilir. Böylece (5.13)'ten $x \in Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ elde edilir.

(ii) $x \in X$ ve her $\lambda \in \mathfrak{C}$ için $\delta(x, A_\lambda) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bir $\mathfrak{C}$ eşsonlu kümesini ele alalım. Diğer yandan, keyfi bir $\mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}}$ ve her $\beta \in \mathfrak{R}$ için $\gamma \succeq \beta$ olacak biçimde bir

$\gamma \in \mathfrak{C}$ vardır ve $\delta(x, A_\gamma) \leq \varepsilon$ gerçekleşir. Ayrıca, $\mathfrak{A}$ artık küme olduğundan, $\gamma \in \mathfrak{A}$ dir. $A_\gamma \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}} A_\lambda$ olduğu ele alınırsa, (2.1) özelliği kullanılarak;

$$\delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}} A_\lambda) \leq \delta(x, A_\gamma)$$

elde edilir. Böylece (5.14)'ten $x \in Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ olup, ispat tamamlanır. ■

Yaklaşma uzaylarında, hiperağlar ve hipersüzgeçler için δ_ε -Kuratowski yakınsaklığı tanımlandıktan sonra bir hiperağın yakınsadığı küme ile bu hiperağa karşılık gelen hipersüzgecin yakınsadığı küme arasında bir ilişki olup olmadığını araştırıp, Teorem 5.1'i inşa ettik. Bu teoremi ifade ve ispat etmeden önce, bir hiperağdan elde edilen hipersüzgeci nasıl ele aldığımızı açıklayalım:

$\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ olmak üzere,

$$\mathcal{B}_{\lambda_0} = \{A_\lambda \mid \lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda\}$$

ailesi $CL(X)$ üzerinde bir süzgeç tabanıdır ve bu taban

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{A}} := \{\mathcal{F} \subset CL(X) \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda : \mathcal{B}_{\lambda_0} \subset \mathcal{F}\} \quad (5.18)$$

biçiminde bir süzgeç üretir (Baekeland ve Lowen 1995).

Teorem 5.1 (X, δ) bir yaklaşma uzayı, A bir hipernokta, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olsun. Bu durumda, eğer $\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ hipersüzgeci A hipernoktasına δ_ε -Kuratowski yakınsak ise $\mathcal{A}$ hiperağı da A hipernoktasına δ_ε -Kuratowski yakınsaktır.

İspat. Her artık küme bir eşsonlu küme olduğundan $Li_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A}) \subset Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ ifadesi gerçekleşir. Diğer yandan, $x \in Ls_{\delta_\varepsilon}(\mathcal{A})$ ise

$$\forall \mathfrak{A} \in \Lambda_{\mathfrak{A}} : \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{A}} A_\lambda) \leq \varepsilon \quad (5.19)$$

olur. Ayrıca, $S \in rdc(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})$ olmak üzere, (5.1) eşitliğinden $S = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ olacak biçimde

bir $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ mevcuttur. $\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ hipersüzgecinin tanımından, bir

$$\mathcal{B}_{\lambda_0} = \{A_\lambda \mid \lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{F}$$

alt ailesinin varlığı bilinmektedir. O halde (2.1) özelliği kullanılırsa

$$\delta(x, \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F) \leq \delta(x, \bigcup_{\lambda \succeq \lambda_0} A_\lambda) \quad (5.20)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, $\mathfrak{R}_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \succeq \lambda_0\}$ biçiminde tanımlanan küme artık küme olduğundan, (5.19) eşitsizliği kullanılırsa $\delta(x, \bigcup_{\lambda \succeq \lambda_0} A_\lambda) \leq \varepsilon$ ve dolayısıyla, (5.20) kullanılarak $\delta(x, S) = \delta(x, \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F) \leq \varepsilon$ bulunur. $\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ hipersüzgeci A hipernoktasına δ_ε -Kuratowski yakınsak olduğundan

$$\{x \in X \mid \sup_{S \in rdc(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})} \delta(x, S) \leq \varepsilon\} \subset A^{(\varepsilon)} \subset \{x \in X \mid \sup_{\mathcal{H} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}} \delta(x, rdc(\mathcal{H})) \leq \varepsilon\}$$

olduğu bilinmektedir ve dolayısıyla

$$\sup_{\mathcal{H} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}} \delta(x, rdc(\mathcal{H})) \leq \varepsilon \quad (5.21)$$

elde edilir. Şimdi keyfi bir $\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}$ alalım ve $\mathcal{S}_{\mathfrak{C}} = \{A_\beta \mid \beta \in \mathfrak{C}\}$ ailesini tanımlayalım. Bu durumda, her $\lambda \in \Lambda$ için $\mathcal{B}_\lambda = \{A_\gamma \mid \gamma \succeq \lambda\}$ ve $\mathcal{B}_\lambda \cap \mathcal{S}_{\mathfrak{C}} \neq \emptyset$ olacağından $\mathcal{S}_{\mathfrak{C}} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ gerçekleşir. Böylece (5.21) eşitsizliği kullanılarak

$$\delta(x, rdc(\mathcal{S}_{\mathfrak{C}})) \leq \varepsilon \quad (5.22)$$

bulunur. Ayrıca, $rdc(\mathcal{S}_{\mathfrak{C}}) = \bigcup_{\beta \in \mathfrak{C}} A_\beta$ olduğundan $\delta(x, A_\beta) \leq \varepsilon$ elde edilir. $A_{\gamma_\lambda} \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda$ olduğundan $\delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda) \leq \varepsilon$ olup, ispat tamamlanır. ■

6. δ_ε -KURATOWSKI YAKINSAKLIK VE FELL YAKLAŞMA UZAYI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

(X, τ) Hausdorff topolojik uzayında bir hiperağın Kuratowski anlamda yakınsaklığı ile aynı hiperağın Fell topolojiye göre yakınsaklığı karşılaştırılabilmektedir (Beer 1993). Dolayısıyla, bir (X, δ) yaklaşma uzayında bir hiperağın δ_ε -Kuratowski yakınsaklığı ile aynı ağın Fell yaklaşma yapısına göre (Ateş ve Sağiroğlu 2023) yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi incelemek anlamlıdır. Hipsüzgeçlerin Fell yaklaşma yapısına göre yakınsaklıkları $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}}$ limit operatörü yardımıyla incelenir. Bu nedenle bir hiperağın yakınsaklığı bu hiperağa karşılık gelen süzgeç yardımıyla incelenecektir.

Önerme 6.1 $(X, \mathcal{L})$ bir Hausdorff yaklaşma uzayı, $A \in CL(X)$, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve $\varepsilon \in \mathbb{P}$ olmak üzere

$$A \in Li_{(\delta_{\mathcal{L}})_\varepsilon}(\mathcal{A}) \implies \lambda_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) \leq \varepsilon$$

gerçeklenir.

İspat. (2.3) eşitliği kullanılarak $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = \sup_{\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}} \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(A, \mathcal{G})$ bulunur. $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) \leq \varepsilon$ olduğunu göstermek için

$$\forall \mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}} : \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(A, \mathcal{G}) = \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{Fell}^\vee \\ \rho|_{\mathcal{G}} = 0}} \rho(A) \leq \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilmelidir. Öncelikle, $\rho \in \mathcal{L}_{Fell}^\vee$ ve $\mathcal{G} \subset \{\rho = 0\}$ olacak biçimde bir $\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ alalım. $\sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ ailesinin tanımından, her $\lambda \in \Lambda$ için $B_\lambda = \{A_{\gamma_\lambda} \mid \lambda \preceq \gamma_\lambda \in \Lambda\}$ olmak üzere $B_\lambda \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ olur. Bu durumda, $A_{\gamma_\lambda^*} \in B_\lambda \cap \mathcal{G}$ olacak biçimde bir $\gamma_\lambda^* \succeq \lambda$ mevcuttur. Λ yönlendirilmiş kümesinin bu şekilde elde edilen tüm γ_λ^* öğelerinden oluşan kümeyi $\mathfrak{C} = \{\gamma_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda}$ ile gösterelim. Bu küme eşsonlu bir kümedir. Diğer yandan, $\rho \in \mathcal{L}_{Fell}^\vee$ olduğundan $J \neq \emptyset$ bir indis kümesi, her $j \in J$ için $I_j \subset J$ sonlu elemanlı bir alt küme ve her $k \in I_j$ için $\mu_{j,k} \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\rho = \sup_{j \in J} \inf_{k \in I_j} \mu_{j,k}^\vee$ olur

ve her $\gamma_\lambda^* \in \mathfrak{C}$ için $A_{\gamma_\lambda^*} \in \mathcal{G}$ ve $\mathcal{G} \subset \{\rho = 0\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sup_{j \in J} \inf_{k \in I_j} \mu_{j,k}^\vee(A_{\gamma_\lambda^*}) = 0 &\implies \forall j \in J : \exists k_0 \in I_j \text{ öyle ki } \sup_{z \in A_{\gamma_\lambda^*}} \mu_{j,k_0}(z) = 0, \\ &\implies \forall j \in J : \exists k_0 \in I_j \text{ öyle ki } \forall z \in A_{\gamma_\lambda^*} : \mu_{j,k_0}(z) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $j \in J$ için $\bigcup_{\gamma_\lambda^* \in \mathfrak{C}} A_{\gamma_\lambda^*} \subset \{\mu_{j,k_0} = 0\}$ olacak biçimde bir $k_0 \in I_j$ mevcuttur. $A \subset Li_{\delta_{\mathcal{L}}}(\mathcal{A})$ hipotezi kullanılırsa

$$\forall a \in A : \sup_{\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}} \delta_{\mathcal{L}}(a, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda) \leq \varepsilon \quad (6.1)$$

olup, (2.3) eşitliğinden

$$\forall a \in A, \forall \mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}} : \sup_{\substack{\mu \in \mathcal{L} \\ \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda \subset \{\mu=0\}}} \mu(a) \leq \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$a \in A, \mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}} \text{ ve } \mu \in \mathcal{L} \text{ öyle ki } \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{C}} A_\lambda \subset \{\mu = 0\} : \mu(a) \leq \varepsilon \quad (6.2)$$

elde edilir. Dolayısıyla; her $a \in A$ için $\mu_{j,k_0}(a) \leq \varepsilon$ elde edilir. Sonuç olarak, her $j \in J$ için $\mu_{j,k_0}^\vee(A) = \sup_{a \in A} \mu_{j,k_0}(a) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bir $k_0 \in I_j$ mevcuttur ve

$$\rho(A) = \sup_{j \in J} \inf_{k \in I_j} \mu_{j,k}^\vee(A) \leq \sup_{j \in J} \mu_{j,k_0}^\vee(A) \leq \varepsilon$$

elde edilir, bu ise ispatı tamamlar. ■

Önerme 6.1 de hiperağ yerine bir hipersüzgeç ele alınarak aşağıdaki teorem inşa edilmiştir.

Teorem 6.1 $(X, \mathcal{L})$ bir Hausdorff yaklaşma uzayı, A bir hipernokta ve $\mathfrak{F}$ bir hipersüzgeç olsun. Eğer $\mathfrak{F}$ hipersüzgeci A hipernoktasına alt δ_ε -Kuratowski yakınsak ise

$$\lambda_{\mathcal{L}_{\text{Fell}}^\vee} \mathfrak{F}(A) \leq \varepsilon$$

olur.

İspat. (2.3) eşitliğinden $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee} \mathfrak{F}(A) = \sup_{\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}} \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(A, \mathcal{G})$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\forall \mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F} : \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}(A, \mathcal{G}) = \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{Fell}^\vee \\ \rho|_{\mathcal{G}} = 0}} \rho(A) \leq \varepsilon$$

olduğu gösterilmelidir. Keyfi bir $\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}$ ve $\rho|_{\mathcal{G}} = 0$ olacak biçimde bir $\rho \in \mathcal{L}_{Fell}^\vee$ alalım. $\mathcal{L}_{Fell}^\vee$ ailesinin tanımından

$$\rho = \sup_{j \in J} \inf_{k \in I_j} \mu_{j,k}^\vee$$

olacak biçimde $J \neq \emptyset$ indis kümesi ve J ailesinin sonlu elemanlı bir I_j alt kümesi mevcuttur ve her $j \in J, k \in I_j$ için $\mu_{j,k} \in \mathcal{L}$ olur. Diğer yandan, hipotez kullanılırsa

$$A^{(\varepsilon)} \subset \{x \in X \mid \sup_{\mathcal{H} \in \sec \mathfrak{F}_A} \delta(x, rdc(\mathcal{H})) \leq \varepsilon\}$$

olur ve dolayısıyla, keyfi bir $a \in A^{(\varepsilon)}$ ve $\mathcal{H} \in \sec \mathfrak{F}$ için

$$\delta_{\mathcal{L}}(x, rdc(\mathcal{H})) = \sup_{\substack{\eta \in \mathcal{L} \\ \eta|_{rdc(\mathcal{H})} = 0}} \eta(a) \leq \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu durumda, $\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}$ olduğundan

$$\eta \in \mathcal{L} , \eta|_{rdc(\mathcal{G})} = 0 : A^{(\varepsilon)} \subset \{\eta \leq \varepsilon\} \quad (6.3)$$

elde edilir. $\rho|_{\mathcal{G}} = 0$ olduğu için her $T \in \mathcal{G}$ için $\rho(T) = 0$ olur ve dolayısıyla I_j sonlu elemanlı olduğundan

$$\forall j \in J : \exists k_T \in I_j \text{ öyle ki } \mu_{j,k_T}^\vee(T) = 0$$

elde edilir. Son olarak, $\mu^\vee$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\forall j \in J : \exists k_T \in I_j \text{ öyle ki } \forall t \in T : \mu_{j,k_T}(t) = 0$$

elde edilir. O halde, her $t \in rdc(\mathcal{G}) = \bigcup_{T \in \mathcal{G}} T$ için $\mu_{j,k_T}(t) = 0$ olup, (6.3)' ten her $j \in J$

için $A^{(\varepsilon)} \subset \{\mu_{j,k_T} \leq \varepsilon\}$ ve dolayısıyla $\rho(A) \leq \varepsilon$ elde edilir, böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 6.1 kullanılarak ve $\varepsilon = 0$ durumunda δ_ε -Kuratowski yakınsaklık ele alınarak bir topolojik uzayda hipersüzgeçlerin yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1 (X, τ) topolojik Hausdorff uzayında, A hipernoktası ve $\mathfrak{F}$ hipersüzgeci için eğer $A \in L_{S_\tau}\mathfrak{F}$ ise $\mathfrak{F}$ hipersüzgeci alt Fell topolojiye göre A hiperkümesine yakınsaktır.

İspat. $A \in L_{S_\tau}\mathfrak{F}$ alalım. $\delta = \delta_\tau$ olması durumunda $L_{S_\tau}\mathfrak{F} = L_{S_{\delta_\tau}}\mathfrak{F}$ ve böylece $A \in L_{S_{\delta_\tau}}\mathfrak{F}$ elde edilir. Bu ise $\mathfrak{F}$ hipersüzgecinin A hiperkümesine alt δ_τ -Kuratowski yakınsak olduğu anlamına gelmektedir. Teorem 6.1 kullanılırsa, $\lambda = \lambda_{\delta_\tau}$ olmak üzere $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}^\vee}\mathfrak{F}(A) = 0$ elde edilir. Böylece, $\mathcal{L}_{Fell}^\vee$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması alt Fell topoloji olduğundan (Ateş ve Sağıroğlu 2023), $\mathfrak{F}$ hipersüzgecinin A kümesine alt Fell topolojiye göre yakınsak olduğu elde edilir. ■

Önerme 6.2 $(X, \mathcal{L})$ bir Hausdorff yaklaşma uzayı, A bir hipernoktası ve $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperayrık olsun. Eğer her $\lambda \in \mathfrak{C}$ için $K \cap A_\lambda \neq \emptyset$ şartını sağlayan bir $\mathfrak{C}$ eşsonlu kümesi ve bir $K \in K(X)$ kompakt kümesi bulunabilmesi durumunda, her $\lambda \in \mathfrak{C}$ için $L_{S_{\delta_0}}(K \cap A_\lambda) \subset A$ gerçekleşiyor ise,

$$\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = 0$$

olur.

İspat. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden

$$\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = \sup_{\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}} \delta_{\mathcal{L}_{Fell}^\wedge}(x, A) = \sup_{\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}} \sup_{\substack{\rho \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge \\ \mathcal{G} \subset \{\rho=0\}}} \rho(A)$$

olduğu bilinmektedir. Herhangi bir $\mathcal{G} \in \sec \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ ve $\mathcal{G} \subset \{\rho = 0\}$ olacak biçimde bir $\rho \in \mathcal{L}_{Fell}^\wedge$ alalım. Bu durumda,

$$\rho = \sup_{j \in J} \inf_{\substack{\nu \in \mathcal{L}_j \\ K \in \mathcal{K}_j}} \nu_K^\wedge$$

olacak biçimde bir $J \neq \emptyset$ indis kümesi ve sonlu elemanlı $\mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}$ ve $K_j \subset K(X)$ alt kümeleri mevcuttur. Diğer yandan, $\mathcal{G} \in \text{sec } \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ ve $\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$, $(\mathcal{B}_\lambda = \{A_\gamma \mid \lambda \preceq \gamma \in \Lambda\})_{\lambda \in \Lambda}$ tabanı tarafından üretilen süzgeç olduğundan her $\lambda \in \Lambda$ için $\mathcal{B}_\lambda \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla, $A_{\gamma_\lambda} \in \mathcal{B}_\lambda \cap \mathcal{G}$ olacak biçimde bir $\gamma_\lambda \succeq \lambda$ mevcuttur. Λ 'nın bu şekilde elde edilen γ_λ elemanlarından oluşan kümeyi $\mathfrak{C} = \{\gamma_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ile gösterelim, $\mathfrak{C}$ kümesinin eşsonlu küme olduğu tanımından açıktır. Ayrıca $(A_{\gamma_\lambda})_{\gamma_\lambda \in \mathfrak{C}} \subset \mathcal{G}$ ve $\mathcal{G} \subset \{\rho = 0\}$ olduğundan, her $\gamma_\lambda \in \mathfrak{C}$ için $\rho(A_{\gamma_\lambda}) = 0$ olur. O halde, her $\gamma_\lambda \in \mathfrak{C}$ ve $j \in J$ için

$$\inf_{\substack{\nu \in \mathcal{L}_j \\ K \in K_j}} \nu_K^\wedge(A_{\gamma_\lambda}) = 0$$

elde edilir. $\mathcal{L}_j$ ve K_j sonlu elemanlı olduğundan $(\nu_{j,\gamma_\lambda})_{P_{j,\gamma_\lambda}}^\wedge(A_{\gamma_\lambda}) = 0$ olacak biçimde $\nu_{j,\gamma_\lambda} \in \mathcal{L}_j$ ve $P_{j,\gamma_\lambda} \in K_j$, mevcuttur. O halde $(\nu_{j,\gamma_\lambda})_{P_{j,\gamma_\lambda}}^\wedge$ fonksiyonunun tanımından

$$\inf_{x \in A_{\gamma_\lambda} \cap P_{j,\gamma_\lambda}} \nu_{j,\gamma_\lambda}(x) = 0$$

elde edilir. Ayrıca $A_{\gamma_\lambda} \cap P_{j,\gamma_\lambda}$ kümesi kompakt ve ν_{j,γ_λ} fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan bir $x_{j,\gamma_\lambda} \in A_{\gamma_\lambda} \cap P_{j,\gamma_\lambda}$ ögesi için $\nu_{j,\gamma_\lambda}(x_{j,\gamma_\lambda}) = 0$ olacaktır. Sonuç olarak, her $j \in J$, $\gamma_\lambda \in \mathfrak{C}$ için

$$\exists \nu_{j,\gamma_\lambda} \in \mathcal{L}_j, \exists P_{j,\gamma_\lambda} \in K_j : \exists x_{j,\gamma_\lambda} \in A_{\gamma_\lambda} \cap P_{j,\gamma_\lambda} \text{ öyle ki } \nu_{j,\gamma_\lambda}(x_{j,\gamma_\lambda}) = 0 \quad (6.4)$$

olur. Şimdi, $P = \bigcup_{P_{j,\gamma_\lambda} \in K_j} P_{j,\gamma_\lambda}$ kompakt kümesini tanımlayalım, bu durumda her $\gamma_\lambda \in \mathfrak{C}$ için $P \cap A_{\gamma_\lambda} \neq \emptyset$ olur. Diğer yandan $\mathfrak{C}$ yönlendirilmiş küme olduğundan, P içinde bir $\xi = (x_{j,\gamma_\lambda})_{\gamma_\lambda \in \mathfrak{C}}$ ağı tanımlanabilir ve P kompakt olduğundan ξ ağının P içinde yakınsak bir $\xi' = (x_{j,s})_{s \in S \subset \mathfrak{C}}$ alt ağı vardır. ξ' ağının P içindeki limit noktasını x_0 ile gösterelim. Bu durumda,

$$\forall V \in \mathcal{V}_{(x_0)} : \exists s_0 \in \mathcal{S} \text{ öyle ki } \forall s \succeq s_0 : x_{j,s} \in V \quad (6.5)$$

gerçeklenir. $\mathfrak{R} := \{s \in \mathcal{S} \mid s \succeq s_0\}$ biçiminde tanımlanan küme $\mathcal{S}$ içinde bir artık kümedir. Her artık küme eşsonlu küme olduğundan $\mathfrak{R}$, $\mathcal{S}$ içinde ve dolayısıyla $\mathfrak{C}$

içinde eşsonlu kümedir. (6.4) kullanılırsa, her $s \in \mathfrak{R}$ ve her j için

$$\exists \nu_{j,s} \in \mathcal{L}_j, \exists P_{j,s} \in K_j : \exists x_{j,s} \in A_s \cap P_{j,s} \text{ öyle ki } \nu_{j,s}(x_{j,s}) = 0 \quad (6.6)$$

elde edilir. P kümesinin tanımı ve (6.5) kullanılırsa her $V \in \mathcal{V}_{(x_0)}$ ve $s \in \mathfrak{R}$ için $A_s \cap P \cap V \neq \emptyset$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, her $s \in \mathfrak{R}$ için $x_0 \in cl_\delta(A_s \cap P)$ ve Önerme 5.6 (b) den $\mathfrak{R} \subset \Lambda$ eşsonlu kümesinin her s ögesi için $x_0 \in Ls_\delta(A_s \cap P)$ olacağı açıktır. Böylece hipotezden, $x_0 \in A$ elde edilir. İspatı tamamlamak için $\rho(A) = 0$ olduğu gösterilmelidir:

$$\rho(A) = \sup_{j \in J} \inf_{\substack{\nu \in \mathcal{L}_j \\ K \in K_j}} \nu_K^\wedge(A) = \sup_{j \in J} \inf_{\substack{\nu \in \mathcal{L}_j \\ K \in K_j}} \inf_{x \in A \cap K} \nu(x)$$

olduğundan (6.4) kullanılırsa, $\mathcal{P}_j := \{P_{j,\gamma_\mu}\}_{\gamma_\mu \in \mathfrak{C}} \subset K_j$ ve dolayısıyla

$$\rho(A) \leq \sup_{j \in J} \inf_{\substack{\nu \in \mathcal{L}_j \\ K \in \mathcal{P}_j}} \inf_{x \in A \cap K} \nu(x)$$

elde edilir. Diğer yandan, $x_0 \in A \cap P$ olduğundan bir $P_{j,\gamma_\lambda} \in \mathcal{P}_j$ için $x_0 \in A \cap P_{j,\gamma_\lambda}$ dir. Dolayısıyla,

$$\sup_{j \in J} \inf_{\substack{\nu \in \mathcal{L}_j \\ K \in \mathcal{P}_j}} \inf_{x \in A \cap K} \nu(x) \leq \sup_{j \in J} \inf_{\nu \in \mathcal{L}_j} \inf_{x \in A \cap P_{j,\gamma_\lambda}} \nu(x)$$

elde edilir. (6.6)' dan, $\mathcal{H}_j = \{\nu_{j,s}\}_{s \in \mathcal{S}} \subset \mathcal{L}_j$ ve $x_0 \in A \cap P_{j,\gamma_\lambda}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sup_{j \in J} \inf_{\nu \in \mathcal{L}_j} \inf_{x \in A \cap P_{j,\gamma}} \nu(x) &\leq \sup_{j \in J} \inf_{\nu \in \mathcal{H}_j} \inf_{x \in A \cap P_{j,\gamma_\lambda}} \nu(x) \\ &\leq \sup_{j \in J} \inf_{\nu \in \mathcal{H}_j} \nu(x_0) \\ &= \sup_{j \in J} \inf_{s \in \mathcal{S}} \nu_{j,s}(x_0) \end{aligned} \quad (6.7)$$

elde edilir. Şimdi, $\kappa = \inf_{s \in \mathcal{S}} \nu_{j,s}$ biçiminde bir κ fonksiyonu tanımlayalım. $\kappa \in \mathcal{L}$ olduğu ve dolayısıyla κ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olduğu açıktır. Eğer, ξ' ağıının κ

fonksiyonu altında görüntüsü alınır, (6.6)' dan

$$\forall \beta \in \mathcal{S} : \kappa(x_{j,\beta}) = \inf_{s \in \mathcal{S}} \nu_{j,s}(x_{j,\beta}) \leq \nu_{j,\beta}(x_{j,\beta}) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, her terimi sıfır olan $\kappa(\xi') = \{\kappa(x_{j,\beta})\}_{\beta \in \mathcal{S}}$ ağı elde edilir ve bu nedenle $\kappa(\xi')$ ağı sıfır noktasına yakınsar. Diğer yandan, ξ' ağı x_0 noktasına yakınsadığından ve κ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan

$$\liminf_{\beta} \kappa(x_{j,\beta}) \geq \kappa(x_0)$$

ve böylece $\kappa(x_0) = 0$ elde edilir. Son olarak (6.7) kullanılırsa

$$\sup_{j \in J} \inf_{s \in \mathcal{S}} \nu_{j,s}(x_0) = \sup_{j \in J} \kappa(x_0) = 0$$

olur, bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 6.2 (X, δ) bir Hausdorff yaklaşma uzayı, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve A bir hipernokta olmak üzere,

$$i) \quad A \subset Li_{\delta_0} A_\lambda,$$

$$ii) \quad \text{Her } \lambda \in \mathfrak{C} \text{ için } K \cap A_\lambda \neq \emptyset \text{ olacak biçimde bir } \mathfrak{C} \text{ eşsonlu kümesi ve } K \in K(X)$$

oluyor ise

$$\forall \lambda \in \mathfrak{C} : L_{S_{\delta_0}}(K \cap A_\lambda) \subset A$$

gerçeklensin. Bu durumda;

$$\lambda_{\mathcal{L}_{\text{Fell}}}(\mathfrak{F}\mathcal{A})(A) = 0$$

olur.

İspat. (2.2) kullanılırsa, her A hipernoktası için

$$\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = \sup_{\mathcal{G} \in \text{sec } \mathfrak{F}_{\mathcal{A}}} \delta_{\mathcal{L}_{Fell}}(A, \mathcal{G})$$

olur. O halde Teorem 4.4, Önerme 6.1 ve Önerme 6.2 kullanılarak $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = 0$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 6.3 (X, δ) bir Hausdorff yaklaşma uzayı, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve A bir hipernokta olsun. Eğer $A = K_\delta - \lim \mathcal{A}$ ise $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = 0$ dır.

İspat. (X, δ) Hausdorff yaklaşma uzayında, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ hiperağını ve A hipernoktasını alalım. Eğer, $A = K_\delta - \lim \mathcal{A}$ ise $A \subset Li_\delta(A_\lambda)$ ve $Ls_\delta(A_\lambda) \subset A$ dır. Diğer yandan, $\mathfrak{C} \in \Lambda_{\mathfrak{C}}$ eşsonlu kümesi ve $K \in K(X)$ kompakt kümesi her $\lambda \in \mathfrak{C}$ için $K \cap A_\lambda \neq \emptyset$ olacak biçimde seçilsin. Ayrıca,

$$\forall \mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}} : \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} (K \cap A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} A_\lambda$$

olduğundan her $x \in X$ için (2.1)' den

$$\sup_{\mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} A_\lambda) \leq \sup_{\mathfrak{R} \in \Lambda_{\mathfrak{R}}} \delta(x, \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{R}} (K \cap A_\lambda))$$

elde edilir. Bu ise $Ls_\delta(K \cap A_\lambda) \subset Ls_\delta(A_\lambda)$ anlamına gelir ve hipotezden $Ls_\delta(A_\lambda \cap K) \subset A$ olup, Teorem 6.2' nin hipotezleri gerçekleşir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Eğer bir (X, δ_τ) Hausdorff yaklaşma uzayı ile yola çıkılırsa Teorem 6.3' ten $A = K_{\delta_\tau} - \lim \mathcal{A}$ ise $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\delta_\tau}$ olmak üzere $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (Baekeland ve Lowen 1995) makalesindeki Önerme 1.5' ten $\mathcal{A}$ hiperağının $(X, \mathcal{L}_{Fell})$ içinde A hiperkümesine yakınsak olması ile $\lambda_{\mathcal{L}_{Fell}}(\mathfrak{F}_{\mathcal{A}})(A) = 0$ olması aynı anlamdadır. Ayrıca, $\mathcal{L}_{Fell}$ yaklaşma uzayının topolojik ko-yansıması $CL(X)$ üzerinde tanımlı Fell topoloji ile çakıştığından (Teorem 4.3), (Lowen 2015) kitabında verilen topolojik limit operatörü tanımı kullanılarak (Beer 1993) kitabındaki Teorem 5.2.6 nın aşağıdaki kısmı sonuç olarak bırakılabilir.

Sonuç 6.2 (X, τ) bir topolojik Hausdorff uzay, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve A bir

hipernokta olsun. Bu durumda, eğer $\mathcal{A}$ hiperağı A hiperkümesine Kuratowski yakınsak ise, $\mathcal{A}$ hiperağı A hiperkümesine $CL(X)$ üzerinde tanımlı Fell topolojiye göre yakınsaktır.

Eğer Teorem 6.2' de bir (X, δ_τ) topolojik yaklaşma uzayı ile yola çıkılırsa, (Beer 1993) kitabında verilen Önerme 5.2.5' in aşağıdaki kısmı doğrudan sonuç olarak bırakılabilir.

(X, τ) Hausdorff topolojik uzayına karşılık gelen yaklaşma yapısı ele alındığında, Teorem 6.2 ve Teorem 4.3 (ii) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 6.3 (X, τ) bir Hausdorff topolojik uzay, $\mathcal{A} = \langle A_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$ bir hiperağ ve A bir hipernokta olsun. Kabul edelim ki

- i) $A \subset LiA_\lambda$,
- ii) $\forall K \in K(X) : Ls(K \cap A_\lambda) \subset A$

gerçeklensin. Bu durumda, $\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}$ hipsüzgeci A hipernoktasına τ_{Fell} topolojisine göre yakınsaktır.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yüksek lisans tezimde, Wijsman ve Proximal hipertopolojilerine karşılık gelecek biçimde tanımlanan yaklaşma yapılarını çalışmıştık. Literatürde çok fazla hipertopoloji vardır ve bunlardan biri de Vietoris hipertopolojisi. Lowen ve Wuyts, Vietoris topoloji ile uyumlu olacak biçimde bir yaklaşma yapısı tanımlamıştır, ancak Vietoris yaklaşma yapısı adı verilen bu yapının topolojik ko-yansımasının tüm $CL(X)$ üzerinde değil de $K(X)$ üzerinde Vietoris topoloji ile çakıştığı elde edilmiştir.

Tez çalışmamızın başında, literatürde çok kullanılan ancak kendisi ile uyumlu olacak biçimde bir yaklaşma yapısı tanımlanmayan hipertopolojileri araştırmaya başladık ve literatürde önemli bir yere sahip olan Fell topoloji ile uyumlu olacak biçimde bir yaklaşma yapısı tanımlanmadığını gördük. Fell topoloji ile Vietoris topoloji tanım olarak benzer oldukları için Lowen ve Wuyts tarafından inşa edilen Vietoris yaklaşma yapısının inşasından esinlenerek gerekli değişiklikleri yaptık ve Fell yaklaşma yapısını inşa ettik. Daha da önemlisi, ortaya koyduğumuz yapının $CL(X)$ in tamamı üzerinde Fell topoloji ile örtüştüğünü gördük. Daha sonra, amacımız başka hipertopolojiler için de benzer yaklaşma yapıları tanımlamaktı. Ancak, Fell topolojinin Kuratowski yakınsaklık ile arasında ciddi ilişkiler olduğunu farkettilik ve yönümüzü değiştirerek Kuratowski yakınsaklık yapısının yaklaşma uzaylarında karşılığını tanımlamayı hedefledik.

Çalışmamızın ikinci kısmında, Kuratowski yakınsaklık yapısını yaklaşma uzaylarına genişletebildik ve bu yaklaşma yapısının, özel olarak topolojik yaklaşma uzaylarında ele alındığında alışılmış Kuratowski yakınsaklık ile çakıştığını gördük. Daha sonra, Fell limit operatörü kullanılarak göz önüne alınan yakınsaklık ile yaklaşma uzaylarında tanımladığımız yakınsaklık arasındaki bazı ilişkileri inceledik. Tez çalışmamızın sonuçlarını özetleyelim:

1. Fell yaklaşma yapısı ile genişletilmiş Fell yaklaşma yapısını tanımladıktan sonra topolojik ko-yansımalarının sırasıyla $CL(X)$ üzerinde tanımlanan Fell topoloji ve

genişletilmiş Fell topoloji ile çakıştığını gösterdik. Ayrıca, bu yapılarla ilişkin bazı temel özellikler elde ettik.

2. Hiperaglar için topolojik uzaylarda, hipersüzgeçler için ise yakınsama uzaylarında tanımlanan Kuratowski yakınsaklık kavramını yaklaşma uzaylarında ifade ettik.

3. Yaklaşma uzaylarında tanımladığımız Kuratowski yakınsaklık ile Fell yaklaşma yapısı arasında standart durumda da var olan özellikleri de sonuç bırakabilecek biçimde bir takım paralel özellikler elde ettik.

Çalışmalarımızın devamında, tanımladığımız yapıların başka özelliklerini ele alacağız. Daha sonra, Kuratowski yakınsaklık kullanılarak tanımlanan epi-yakınsaklık adı verilen kavramı da yaklaşma uzaylarına taşımayı hedefliyoruz. Ayrıca, fonksiyonel analize de hizmet eden bir diğer hipertopoloji olan Mosco topoloji ile uyumlu olacak biçimde bir yaklaşma yapısı tanımlamayı hedefliyoruz.

KAYNAKLAR

- Ates, M., Sagirolu, S., 2023. *The Fell Approach Structure*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. Vol. 72, No 3, 633–649.
- Baekeland. R., Lowen. R., 1995. *Measures of Compactness in Approach Spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. Vol. 36, No. 2, 327-345.
- Beer, G., 1993. *Topologies on Closed Convex Sets*. Kluwer Academic Publishers.
- Beer, G., Rodriguez-Lopez. J., 2010. *Topologies Associated with Kuratowski-Painleve Convergence of Closed Sets* . Journal of Convex Analysis, Vol. 17, No. 3-4, 805-826.
- Choquet, G., 1948. Convergences, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., II Ser. 23, 57-112.
- Dolecki, S., Mynard, F., 2003. *Hyperconvergences*, Applied General Topology, Vol 4, 391-419.
- Dolecki, S., Mynard, F., 2016. *Convergence Foundations of Topology*. World Scientific.
- Dolecki, S., Salinetti, G. and Roger J-B., 1983. Wets, Equi-Semicontinuity, Transactions of the American Mat. Soc. Vol. 276, No. 1, 409-429.
- Dolecki, S., Gabriele, H. and Lechicki, A. 1995. When Do The Upper Kuratowski Topology (Homeomorphically, Scott Topology) and The Co-Compact Topology Coincide?, Transactions of The American Mathematical Society, Vol. 347, No. 8, 2869-2884.
- Fell, J., 1962. *A Hausdorff Topology for The Closed Subsets of Locally Compact Non-Hausdorff Space*, Proc. Amer. Math. Soc., 13, 472-476.
- Frolík, Z., 1960. *Concerning Topological Convergence of Sets* , Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10, 168-180.
- Hola, L., Levi, S., 1997. *Decomposition Properties of Hyperspace Topologies*, Set Valued Analysis, Kluwer Academic Publishers.
- Kuratowski, K., 1966. *Topology, Vol I*. Academic Press, New York.
- Lowen, R., 1989. *Approach Spaces A Common Supercategory of Top and Met*, Math. Nachr. 141, 183-226.
- Lowen, R., Sioen, M., 1996. *The Wijsman and Attouch-Wets Topologies on Hyperspaces Revisited Topology*, Topology and its Applications, 70, 179-197.
- Lowen, R., 1997. *Approach Spaces: the Missing Link in the Topology Uniformity Metric Triad*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, New York, United States Springer.

Lowen, R., Verbeeck, C., 1998. Local Compactness in Approach Spaces I, Internat. J. Math-Math. Sci. Vol. 21 No. 3, 429-438.

Lowen, R., Sioen, M., 1998. *Proximal Hypertopologies Revisited*, Set Valued Analysis, 6, 1-19.

Lowen, R., Sioen, M., 2003. *A Note on Separation in Ap* , Applied General Topology, 4, 475-486.

Lowen, R., Wuyts, P., 2012. *The Vietoris Hyperspace Structure for Approach Spaces*, Acta Math. Hungar.

Lowen, R., 2015. *Index Analysis, Approach Theory at Work*. Springer.

Luchetti, R., Pasquale, A., 1994. *A New Approach to a Hyperspace Theory*, Journal of Convex Analysis, Vol. 1, No. 2, 173-193.

Willard, S., 1968. *General Topology*. Addison-Welley Publishing Company.